Algumas Caracterizações dos Operadores Compactos entre determinados Espaços de Banach

Fernanda Cardoso Estevam

DISSERTAÇÃO APRESENTADA AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM MATEMÁTICA

Área de concentração: Análise
Orientadora: **Profa. Dra. Mary Lilian Lourenço**

Durante o programa de mestrado, a autora obteve apoio financeiro do CNPq

São Paulo, 11 de janeiro de 2005.

Algumas Caracterizações dos Operadores Compactos entre determinados Espaços de Banach

Este exemplar corresponde à redação final
da dissertação devidamente corrigida e
defendida por Fernanda Cardoso Estevam
e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, 11 janeiro de de 2005.

Banca examinadora:

- Profa. Dra. Mary Lilian Lourenço (orientadora) - IME-USP
- Prof. Dr. Humberto Daniel Carrión Villaroel - IME-USP
- Prof. Dr. Mario Carvalho de Matos - Unicamp

A Marcus Harada Penna,
por seu amor incondicional

Agradecimentos

Agradeço à minha orientadora Profa. Dra. Mary Lilian por sua orientação, paciência, incentivo, confiança, suas sugestões, seus conselhos e pelo seu carinho.

A todos os professores do IME-USP que contribuíram para minha formação. Aos meus amigos e colegas do IME-USP, em especial à Neusa Nogas Tocha.

A Marcus Harada Penna pelo incentivo, apoio e grande ajuda a mim dedicados durante o programa de mestrado e durante a elaboração deste texto.

Ao CNPq pelo apoio financeiro recebido durante o programa de mestrado.

Resumo

O objetivo desta dissertação é estudar algumas caracterizações dos operadores compactos entre espaços de Banach. Para isso estudamos um resultado onde o espaço de Banach ℓ_1 é o único espaço de Banach E com uma base normalizada $(u_n)_n$ tal que cada operador linear compacto $T : F \to E$ tem uma representação da forma $Tx = \sum g_n(x)u_n$, para cada $x \in F$, com F um espaço de Banach e $\sum g_n$ uma série ω^* incondicionalmente convergente no dual topológico F' de F. Também estudamos algumas caracterizações dos espaços de Banach F para os quais todos os operadores lineares contínuos de $C(\Omega)$ em F sejam compactos, com Ω um espaço de Hausdorff compacto. Os resultados apresentados aqui encontram-se nos textos científicos [2] e [21].

Abstract

The main purpose of this work is to study some characterizations of compact operators in Banach spaces. In this way, we have studied a result where the Banach space ℓ_1 is the only Banach space E with a normalized base $(u_n)_n$ such that every compact linear operator $T : F \to E$ has a representation of the form $Tx = \sum g_n(x)u_n$, for each $x \in F$, where F is a Banach space and $\sum g_n$ is a ω^* unconditionally convergent series in the dual F' of F. We also have studied some characterizations on a Banach space F for which all continuous linear operators from $C(\Omega)$ into F are compact, where Ω is a compact Hausdorff space. The results studied here were presented on the papers [2] and [21].

Sumário

Introdução

Nesta dissertação temos por objetivo estudar algumas caracterizações dos operadores compactos entre determinados espaços de Banach. Os resultados apresentados neste trabalho encontram-se nos textos científicos Ansari [2] e Randtke [21].

No capítulo 1 apresentamos as notações, definições e resultados de Análise Funcional e Geometria de espaços de Banach que utilizamos no decorrer da dissertação. Isto é, na primeira seção apresentamos conceitos básicos e na segunda seção apresentamos a definição e algumas propriedades de topologia fraca. Na terceira seção apresentamos alguns resultados sobre séries e bases de Schauder. Na quarta seção apresentamos alguns resultados importantes dos operadores compactos e fracamente compactos como os teoremas de Schauder e de Gantmacher. Encontram-se na quinta seção alguns resultados do espaço de todos os operadores compactos entre o espaço ℓ_2; esse é um exemplo de espaço de operadores compactos entre espaços de Banach que contém um subespaço isométrico a c_0, que não é reflexivo e não é complementado em $L(\ell_2, \ell_2)$.

No capítulo 2 apresentamos algumas caracterizações dos espaços de Banach E para os quais todos os operadores compactos de um espaço de Banach F em E admitam uma particular representação em séries. Mostramos que ℓ_1 é o único espaço de Banach E com base normalizada $(u_n)_n$ tal que todo operador linear compacto $T : F \to E$ de um espaço de Banach F em E tem uma representação da forma $Tx = \sum g_n(x)u_n$ com $\sum g_n$ uma série ω^* incondicionalmente convergente no dual F' de F.

No capítulo 3 estudamos algumas caracterizações dos espaços de Banach F para os quais todos os operadores contínuos de $C(\Omega)$ em F sejam compactos, com Ω um espaço de Hausdorff compacto. Estas caracterizações dependem do espaço Ω ser disperso ou não disperso. Na primeira seção apresentamos os resultados para Ω disperso. A segunda seção caracteriza em termos de seqüências $l_p^{\omega}(F)$, os espaços de Banach F para os quais todos os operadores lineares contínuos de E em F são compactos, com $E = c_0$ ou ℓ_p $(1 \leq p < \infty)$. As caracterizações para Ω não disperso estão na terceira seção. Terminamos esse capítulo apresentando na quarta seção alguns resultados que relacionam o espaço $K(C(\Omega), C(\Omega))$, de todos os operadores compactos entre $C(\Omega)$, com o espaço $\Phi_{c_0}(C(\Omega), C(\Omega))$ de todos os operadores contínuos entre $C(\Omega)$ que admitem uma fatoração através de c_0, com Ω qualquer espaço de Hausdorff compacto (disperso ou não disperso).

Capítulo 1

Definições e resultados preliminares

Neste capítulo apresentaremos as notações, definições e alguns resultados de Análise Funcional e Geometria de espaços de Banach que serão utilizados no decorrer desta dissertação.

Notações

A menos de menção explícita do contrário, vamos utilizar a seguinte notação:

$\mathbb{N}$ denotará o conjunto dos números naturais;

$\mathbb{R}$, o conjunto dos números reais;

$\mathbb{C}$, o conjunto dos números complexos;

$\mathbb{K}$, o corpo $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$;

E e F, espaços de Banach sobre $\mathbb{K}$;

$L(E, F)$, o espaço de Banach dos operadores lineares contínuos de E em F,
com a norma usual $\| T \| = \sup_{\|x\| \leq 1} \| T(x) \|$;

E', o espaço dual de E, o espaço $L(E, \mathbb{K})$;

ℓ_1, c_0, ℓ_∞, os usuais espaços de Banach das seqüências absolutamente somáveis, seqüências convergentes a zero e seqüências limitadas, respectivamente;

Ω, um espaço de Hausdorff compacto,
e $C(\Omega)$, o espaço de Banach de todas as funções contínuas $f : \Omega \to \mathbb{K}$,
com a norma usual $\| f \|_\infty = \sup\{| f(x) | : x \in \Omega\}$;

$[x_n : n \in \mathbb{N}]$ denotará o subespaço gerado por $(x_n)_n$;

$\overline{[x_n : n \in I\!N]}$, o subespaço fechado gerado por $(x_n)_n$;

B_E, a bola unitária fechada de E;

S_E, a esfera unitária de E;

$x_n \to x$ denotará que a seqüência $(x_n)_n$ converge para x;

$x_n \not\to x$, que a seqüência $(x_n)_n$ não converge para x;

$x_n \xrightarrow{\omega} x$, que a seqüência $(x_n)_n$ converge fracamente para x.

Usaremos a palavra espaço tanto do ponto de vista topológico como de espaço vetorial.

1.1 Conceitos Básicos

Começamos apresentando nesta seção definições e resultados básicos de espaços de Banach.

Definição 1.1.1. *Dados E e F espaços normados, considere $L(E,F)$ como sendo o conjunto dos operadores lineares contínuos de E em F.*

As operações usuais de adição e multiplicação por escalar fazem de $L(E,F)$ um espaço vetorial, e a aplicação $\| \cdot \|$ de $L(E,F)$ em $I\!R_+$ dada por $\| T \| = \sup_{\|x\| \leq 1} \| T(x) \|$ constitui uma norma em $L(E,F)$. Se F é um espaço de Banach, então $L(E,F)$ também é um espaço de Banach.

Teorema 1.1.2 (Teorema de Hahn-Banach). *Sejam X um espaço normado, M um subespaço de X e $f : M \to I\!K$ um funcional linear contínuo. Então f pode ser estendido a um funcional linear contínuo $F : X \to I\!K$ tal que $\| F \| = \| f \|$.*

Demonstração: Ver por exemplo, Megginson [16], pág. 75, teorema 1.9.6. ■

Como conseqüência do Teorema de Hahn-Banach temos o seguinte corolário.

Corolário 1.1.3. *Sejam X um espaço normado e $x_0 \in X$. Então*

$$\| x_0 \| = \sup\{ | x'(x_0) | : x' \in B_{X'} \}.$$

Demonstração: Se $x_0 = 0$, então o resultado é imediato. Se $x_0 \neq 0$, para $x' \in B_X$, $| x'(x_0) | \leq \| x' \| \| x_0 \| \leq \| x_0 \|$. Logo $\sup\{| x'(x_0) | : x' \in B_{X'}\} \leq \| x_0 \|$.

Sejam $M = [x_0]$ e $f : M \to I\!K$ um funcional linear definido por $f(\lambda x_0) = \lambda \| x_0 \|$, temos que $\| f \| = 1$. Pelo teorema de Hahn-Banach (teorema 1.1.2), f pode ser estendido para um funcional linear contínuo $F : X \to I\!K$ tal que $\| F \| = \| f \|$. Assim temos que $\| F \| = 1$ e $F(x_0) = \| x_0 \|$. Conseqüentemente $\| x_0 \| = | F(x_0) | \leq \sup\{| x'(x_0) |: x' \in B_{X'}\}$. Assim $\| x_0 \| = \sup\{| x'(x_0) | : x' \in B_{X'}\}$. ■

Definições 1.1.4. *Sejam E e F espaços de Banach sobre $I\!K$.*

1. *Um operador $T \in L(E, F)$ é dito um isomorfismo de E sobre F se T é uma bijeção e $T^{-1} \in L(F, E)$. Os espaços E e F são ditos isomorfos se existe um isomorfismo T de E sobre F.*
2. *Um operador $T \in L(E, F)$ é dito uma isometria entre E e F se $\| Tx \| = \| x \|$, para todo $x \in E$. Os espaços E e F são ditos isométricos se existe uma isometria T de E sobre F.*

Definições 1.1.5. *Sejam E e F espaços de Banach sobre $I\!K$.*

1. *Dizemos que F possui uma cópia isomorfa de E se existe um subespaço M de F que é isomorfo a E, ou seja, existe um isomorfismo de E sobre M. Notação: denotamos por $E \hookrightarrow F$, se F possui uma cópia isomorfa de E e por $E \not\hookrightarrow F$ se F não tem uma cópia isomorfa de E.*
2. *Dizemos que F possui uma cópia isométrica de E se existe um subespaço M de F que é isométrico a E, ou seja, existe uma isometria de E sobre M.*

Definição 1.1.6. *Sejam E e F espaços de Banach, e $T : E \to F$ um operador linear contínuo. Denotaremos por $T^* : F' \to E'$ o adjunto de T, definido por $T^*(y') = y' \circ T$ para cada y' em F'.*

Proposição 1.1.7. *Sejam E um espaço de Banach e $C : E \to E''$ a aplicação linear definida por $C(x)(x') = C_x(x') = x'(x)$ para cada $x \in E$ e cada $x' \in E'$. Então a aplicação C é uma isometria de E em E'' e é chamada de inclusão natural.*

Demonstração: Seja $x \in E$. Então $\| C(x) \| = \sup\{| C(x)(x') |: x' \in B_{E'}\} = \sup\{| x'(x) |: x' \in B_{E'}\}$ e pelo corolário 1.1.3, segue que $\| C(x) \| = \| x \|$. Assim a aplicação C é uma isometria de E em E''. ■

Proposição 1.1.8. *Sejam E e F espaços de Banach, e $T : E \to F$ um operador linear contínuo. Sejam C_E e C_F as inclusões naturais de E e F em seus biduais respectivamente. Então $(T^{**} \circ C_E)(E) \subseteq C_F(F)$ e $T^{**} \circ C_E = T$.*

Demonstração: Seja $x \in E$. Para cada $y' \in F'$, $((T^{**} \circ C_E)(x)(y')) = (C_E(x))(T^*(y')) = (T^*(y'))(x) = y'(T(x))$. Como $y'(T(x)) = C_F(T(x))(y')$, segue que $(T^{**} \circ C_E)(x) = C_F(T(x))$ e daí o resultado.

■

O teorema da aplicação aberta que enunciamos a seguir tem várias aplicações. Apresentamos em seguida, uma das suas importantes aplicações que é o teorema do gráfico fechado, resultado esse que será utilizado no decorrer desta dissertação para mostrar a continuidade de operadores que construiremos.

Teorema 1.1.9 (Teorema da Aplicação Aberta). *Sejam E e F espaços de Banach e $T : E \to F$ um operador linear contínuo sobrejetor. Então para todo aberto G em E, $T(G)$ é um aberto em F.*

Demonstração: Ver Megginson [16], pág. 43, teorema 1.6.5. ■

Teorema 1.1.10 (Teorema do Gráfico Fechado). *Sejam E e F espaços de Banach, e $T : E \to F$ um operador linear. Se o gráfico de T, $G_T = \{(x, Tx) : x \in E\}$, é fechado, então T é contínuo.*

Demonstração: Consideremos $E \times F$ munido da seguinte norma

$$\| (x, y) \| = \| x \| + \| y \| .$$

Como $E \times F$ é um espaço de Banach e G_T é fechado, segue que G_T é um espaço de Banach.

Sejam $P_1 : G_T \to E$ e $P_2 : G_T \to F$ operadores lineares dados por $P_1(x, Tx) = x$ e $P_2(x, Tx) = Tx$. De

$$\| P_1(x, Tx) \| = \| x \| \leq \| x \| + \| Tx \| = \| (x, Tx) \|$$

$$\| P_2(x, Tx) \| = \| Tx \| \leq \| x \| + \| Tx \| = \| (x, Tx) \|$$

segue que P_1 e P_2 são contínuos. Além disso, temos que P_1 é bijetor, e logo, pelo Teorema da Aplicação Aberta (teorema 1.1.9), P_1^{-1} é contínuo. Como $T = P_2 \circ P_1^{-1}$ segue que T é também contínuo. ■

Definição 1.1.11. *Seja X um espaço métrico. Um subconjunto M de X é dito*
a) raro em X se $\overline{M}$ tem interior vazio.
b) de primeira categoria em X se M é união enumerável de conjuntos raros em X.
c) de segunda categoria em X se M não é de primeira categoria em X.

Teorema 1.1.12. *Seja X um espaço métrico completo não vazio. Então todo subconjunto de X aberto, não vazio, é de segunda categoria em X. Em particular, o espaço X é de segunda categoria em X.*

Teorema 1.1.13 (Princípio da Limitação Uniforme). *Sejam E um espaço de Banach, F um espaço normado e $\mathcal{F}$ uma família não vazia de operadores lineares contínuos de E em F. Se $\sup\{\| Tx \|: T \in \mathcal{F}\} < \infty$ para cada $x \in E$, então $\sup\{\| T \|: T \in \mathcal{F}\} < \infty$.*

Demonstração: Para cada $k \in I\!N$, seja $A_k \subset E$ o conjunto dos $x \in E$ tais que $\| T_n x \| \leq k \ \forall \ n \in I\!N$. Observamos que cada A_k é fechado. De fato, para cada $x \in \overline{A_k}$, existe uma seqüência $(x_j)_j \subset A_k$ com $x_j \to x$. Assim para cada n fixo, temos que $\| T_n x_j \| \leq k$. Agora como T_n é contínuo, obtemos $\| T_n x \| \leq k$. Logo $x \in A_k$ e A_k é fechado.

Para cada $x \in E$ temos que $\sup\{\| Tx \|: T \in \mathcal{F}\} < \infty$, assim cada $x \in E$ pertence a algum A_k. Logo $E = \cup_{k=1}^{\infty} A_k$. Como E é completo, pelo teorema 1.1.12 temos que algum A_k contém uma bola aberta, ou seja, existe $x_0 \in E$ e $r > 0$ tais que $B(x_0, r) \subset A_{k_0}$.

Se $x \in E$ é qualquer, $x \neq 0$, seja $z = x_0 + \frac{rx}{2\|x\|}$. Então $\| z - x_0 \| < r$ e logo $z \in B(x_0, r)$. Como $B(x_0, r) \subset A_{k_0}$, segue que $\| T_n z \| \leq k_0 \ \forall n$ e também que $\| T_n x_0 \| \leq k_0$.

Para cada n, $\| T_n x \| = \frac{2\|x\|}{r} \| T_n(z - x_0) \| \leq \frac{4k_0\|x\|}{r}$. Assim segue que $\| T_n \| = \sup\{\| T_n x \| : \| x \| = 1\} \leq \frac{4k_0}{r}$, e segue o resultado. ■

Definição 1.1.14. *Seja E um espaço de Banach. Um subespaço M de E é dito complementado em E se M é fechado em E e existe um subespaço fechado N de E tal que $E = M \oplus N$.*

Se H é um espaço de Hilbert e F é um subespaço fechado de H, então F é complementado em H e $H = F \oplus F^{\perp}$ com $F^{\perp}$ o complemento ortogonal de F.

Definição 1.1.15. *Seja X um espaço vetorial. Um operador linear $P : X \to X$ é chamado uma projeção em X se $P(Px) = P(x)$ para cada $x \in X$, isto é, $P^2 = P$.*

Como primeira aplicação do teorema do gráfico fechado, a seguinte proposição mostra que existe uma correspondência bijetora entre projeções P de E sobre M e os subespaços fechados de E, N, tais que $E = M \oplus N$.

Proposição 1.1.16. *Um subespaço M de um espaço de Banach E é complementado em E se, e somente se, é a imagem de uma projeção contínua em E.*

Demonstração: Suponhamos que M é complementado em E. Então existe N subespaço fechado de E tal que $E = M \oplus N$. Logo cada $x \in E$ tem uma representação única da forma $x = m + n$, $m \in M$ e $n \in N$.

Seja P um operador de E em E com $ImP = M$ dado por $P(m+n) = m$. Temos que P é linear e $P^2 = P$. Vamos mostrar que P é contínuo. Suponhamos que

$$x_k = m_k + n_k \to x,\ m_k \in M,\ n_k \in N \text{ e } Px_k = m_k \to y.$$

Como M é fechado, $y \in M$. Logo $y = Py$ e $n_k \to x - y$. Como N também é fechado, $x - y \in N$. Portanto $0 = P(x-y) = Px - y$. Segue do Teorema do Gráfico Fechado (teorema 1.1.10), que P é contínuo.

Reciprocamente, suponhamos que P é uma projeção contínua em E com $ImP = M$. Seja $N = ker(P)$. Como P é contínuo, N é fechado. Como P é uma projeção contínua de E sobre M, M também é fechado. Além disso $N \cap M = \{0\}$, pois $v \in N \cap M$ implica que $v = Pv = 0$. Como todo $x \in E$ pode ser escrito como $x = Px + (x - Px)$ e $x - Px \in N$, segue que $E = M + N$. Logo M é complementado em E. ∎

Lembramos que se M é um subespaço de um espaço vetorial X, então a codimensão de M em X é a dimensão do espaço vetorial quociente X/M. Denotaremos por $\dot{x}$ a classe de equivalência de x em X/M. Se X é um espaço normado e M é um subespaço fechado de X, então definimos uma norma em X/M dada por $\| \dot{x} \| = \inf\{\| y \| : y \in \dot{x}\}$.

O teorema que enunciamos a seguir garante que todo subespaço fechado de E de codimensão finita de um espaço de Banach E é complementado em E. Utilizaremos esse teorema ainda neste capítulo na demonstração de resultados que caracterizam operadores compactos.

Teorema 1.1.17. *Sejam E um espaço de Banach e M um subespaço fechado de E de codimensão finita. Então M é complementado em E.*

Demonstração: Seja $\{\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n\}$ uma base de E/M e seja $N = [x_1, \ldots, x_n]$. Assim N é um subespaço fechado de E. Sejam $f_1, \ldots, f_n \in E'$ funcionais tais que $f_i(x_j) = \delta_{ij}$, isto é, a base dual de $[x_1, \ldots, x_n]$ estendida por Hahn-Banach a E.

Considere $\Pi : E \to E/M$ dada por $\Pi(v) = \sum_{i=1}^n f_i(v)\dot{x}_i$. Π é uma projeção contínua. Para cada $v \in E$ considere $w = v - \sum_{i=1}^n f_i(v)x_i$. Afirmamos que $w \in M$. De fato $\Pi(w) = \Pi(v) - \sum_{i=1}^n f_i(v)\Pi(x_i) = \sum_{i=1}^n f_i(v)\dot{x}_i - \sum_{i=1}^n f_i(v)\dot{x}_i = 0$, isto é, $w \in M$. Portanto $v = w + \sum_{i=1}^n f_i(v)x_i \in M + N$. Se $u \in M \cap N$, então $u = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$ e $\Pi(u) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \dot{x}_i = 0$, pois $u \in M$. Portanto $\alpha_i = 0$ para $i = 1, \ldots n$. Donde M é um subespaço complementado em E. ■

Definições 1.1.18. *(Os espaços $\ell_p's$ e c_0)*

Dado p qualquer, $1 \leq p < \infty$, considere ℓ_p como sendo o conjunto das seqüências $x = (x_k)_k \subset I\!K$ tais que a série $\sum_{k=1}^\infty \mid x_k \mid^p$ converge.

As operações usuais de adição e multiplicação por escalar em $I\!K^{I\!N}$ fazem de ℓ_p um espaço vetorial e a aplicação $\| \cdot \|_p$ de ℓ_p em $I\!R_+$ dada por $\| x \|_p = (\sum_{k=1}^\infty \mid x_k \mid^p)^{1/p}$ constitui uma norma em ℓ_p que o faz completo, ou seja, $(\ell_p, \| \cdot \|_p)$ é um espaço de Banach.

Para $p = \infty$, considere ℓ_∞ como sendo o conjunto das seqüências $x = (x_k)_k \subset I\!K$ limitadas.

As operações usuais de adição e multiplicação por escalar em $I\!K^{I\!N}$ fazem de ℓ_∞ um espaço vetorial, e a aplicação no espaço a valores em $I\!R$ dada por $\| x \|_\infty = \sup_{k \in I\!N} \mid x_k \mid$ constitui uma norma em ℓ_∞ que o faz completo, ou seja, $(\ell_\infty, \| \cdot \|_\infty)$ é um espaço de Banach.

Definimos c_0 como sendo o subespaço de ℓ_∞ constituído das seqüências $x = (x_k)_k \subset I\!K$ que convergem a zero.

Munindo c_0 da norma induzida de ℓ_∞, o espaço normado obtido é Banach.

Para $1 \leq p < q < \infty$, temos que $\ell_p \subset \ell_q$.

Se E é c_0 ou ℓ_p, com $1 \leq p < \infty$, considere a seqüência $(e_n)_n$ com $e_n = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$. Esta seqüência será chamada de seqüência de vetores unitários de E.

Definição 1.1.19. *(O espaço $C(\Omega)$)*

Dado Ω um espaço de Hausdorff compacto, considere $C(\Omega)$ o conjunto das funções contínuas f de Ω em $\mathbb{K}$.

As operações usuais de adição e multiplicação por escalar dos espaços de funções fazem de $C(\Omega)$ um espaço vetorial, e a aplicação $\| \cdot \|_\infty$ de $C(\Omega)$ em $\mathbb{R}_+$ dada por $\| f \|_\infty = \sup\{| f(x) |: x \in \Omega\}$ constitui uma norma em $C(\Omega)$ que o faz completo, ou seja, $(C(\Omega), \| \cdot \|_\infty)$ é um espaço de Banach.

No capítulo 3, estudamos algumas caracterizações dos espaços de Banach F para os quais todos os operadores contínuos de $C(\Omega)$ em F sejam compactos, com Ω um espaço de Hausdorff compacto. Estas caracterizações dependem de Ω ser disperso ou não. A seguir apresentamos a definição de espaço topológico disperso e alguns resultados que utilizaremos.

Definição 1.1.20. *(Espaços dispersos)*

Um espaço topológico S é dito disperso se todo subconjunto fechado, não vazio de S, munido da topologia induzida, tem um ponto isolado.

Como exemplo, considere $S = \{0, 1, 1/2, 1/3, \dots\}$ com a topologia induzida de $\mathbb{R}$. Então S é disperso.

Teorema 1.1.21. *Seja Ω um conjunto infinito. Se Ω é um espaço de Hausdorff compacto disperso, então $C(\Omega)$ contém um subespaço complementado que é isométrico a c_0.*

Demonstração: Ver Rosenthal [23], pág. 201, demonstração do corolário 3.2. ∎

Definição 1.1.22. *Seja S um conjunto. Considere $\ell_1(S)$ como sendo a família de todas as funções $f : S \to \mathbb{K}$ tais que $\sum_{s\in S} | f(s) | < \infty$, com a soma definida por $\sum_{s\in S} | f(s) | = \sup\{\sum_{s\in F} | f(s) | : F$ é um subconjunto finito de $S\}$. As operações usuais de adição e multiplicação fazem de $\ell_1(S)$ um espaço vetorial e a aplicação $\| \cdot \|$ de $\ell_1(S)$ em $\mathbb{R}_+$ dada por $\| f \| = \sum_{s\in S} | f(s) |$ constitui uma norma em $\ell_1(S)$ que o faz completo, ou seja, $(\ell_1(S), \| \cdot \|)$ é um espaço de Banach.*

Teorema 1.1.23. *Sejam S um conjunto. Se S é um espaço de Hausdorff compacto disperso, então $C(S)'$ é isomorfo a $\ell_1(S)$.*

Demonstração: Ver Semadeni [24], pág. 338, corolário 19.7.7. ∎

Definição 1.1.24. *Seja X um espaço normado. Dizemos que X é separável se admite um subconjunto enumerável denso.*

Teorema 1.1.25. *Seja Ω um conjunto infinito. Se Ω é um espaço de Hausdorff compacto não disperso, então todo espaço de Banach separável é isométrico a um subespaço de $C(\Omega)$.*

Demonstração: Ver Rosenthal [23], pág. 201, demonstração do corolário 3.2. ■

Teorema 1.1.26. *Seja E um espaço de Banach separável que contém uma cópia isomorfa de c_0. Então existe uma projeção de norma ≤ 2 de E sobre c_0.*

Demonstração: Ver Lindenstrauss, Tzafiri [14], pág. 106, teorema 2.f.5. ■

No capítulo 3, mostramos que se F é um espaço de Banach para o qual cada operador linear contínuo de $C(\Omega)$ em F é absolutamente 2-somante, com Ω um espaço de Hausdorff compacto não disperso, então cada operador linear contínuo de $C(\Omega)$ em F é compacto se, e somente se, cada operador linear contínuo de ℓ_2 em F é compacto. Apresentamos a seguir a definição de operadores absolutamente 2-somantes e alguns resultados.

Definição 1.1.27. *(Operadores absolutamente 2-somantes)*

Sejam E e F espaços de Banach. Um operador $T \in L(E,F)$ é dito absolutamente 2-somante se dada uma seqüência $(x_n)_n$ qualquer em E tal que $\sum \mid f(x_n) \mid^2 < \infty$ para cada $f \in E'$, temos que $\sum \parallel Tx_n \parallel^2 < \infty$.

Denotamos por $\Pi_2(E,E)$ o conjunto dos operadores absolutamente 2-somantes.

Em seguida apresentamos o teorema de fatoração de Grothendieck-Pietsch que estabelece que todo operador absolutamente 2-somante se fatora através de um espaço de Hilbert.

Teorema 1.1.28 (Grothendieck-Pietsch). *Sejam E e F espaços de Banach. Então cada operador $T \in \Pi_2(E,F)$ admite uma fatoração através de um espaço de Hilbert.*

Demonstração: Ver Retherford [22], pág. 105, teorema de Grothendieck-Pietsch. ■

Teorema 1.1.29. *Sejam X um subespaço fechado de c_0, Ω um espaço de Hausdorff compacto e T um operador linear contínuo de X em $C(\Omega)$. Então para todo $\epsilon > 0$, T estende-se para um operador contínuo $\hat{T}$ de c_0 em $C(\Omega)$ com $\| \hat{T} \| < (1+\epsilon) \| T \|$.*

Demonstração: Ver Lindenstrauss, Pelczynski [13], pág. 231, teorema 3.1. ∎

Na quinta seção deste capítulo apresentamos alguns resultados para o espaço de todos os operadores compactos entre o espaço ℓ_2. Para tal vamos precisar da seguinte proposição que estabelece que o espaço $L(\ell_2, \ell_2)$ contém uma cópia isométrica de ℓ_∞.

Proposição 1.1.30. *O espaço $L(\ell_2, \ell_2)$ contém uma cópia isométrica de ℓ_∞.*

Demonstração: Seja $\varphi : \ell_\infty \to L(\ell_2, \ell_2)$ a aplicação linear dada por $\varphi(a)(x) = T(a)(x) = (a_i x_i)_i$ para cada $a = (a_i)_i \in \ell_\infty$ e cada $x = (x_i)_i \in \ell_2$.

Como

$$(\sum | a_i x_i |^2)^{1/2} = (\sum | a_i |^2 | x_i |^2)^{1/2} \leq \| a \|_\infty (\sum | x_i |^2)^{1/2} = \| a \|_\infty \| x \|_2,$$

segue que $T(a)$ está bem definido e $\| T(a) \| \leq \| a \|_\infty$, portanto $T(a)$ é contínuo.

Agora, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $| a_{n_0} | > \| a \|_\infty - \epsilon$. Como

$$\| T(a)(e_{n_0}) \|_2 = | a_{n_0} | > \| a \|_\infty - \epsilon$$

segue que $\| T(a) \| > \| a \|_\infty - \epsilon$, fazendo $\epsilon \to 0$, temos que $\| T(a) \| \geq \| a \|_\infty$. Logo $\| T(a) \| = \| a \|_\infty$ e conseqüentemente φ é uma isometria. ∎

Teorema 1.1.31 (Sobczysk). *Seja X um subespaço fechado de um espaço de Banach separável E. Se X é isomorfo a c_0, então X é complementado em E.*

Demonstração: Ver [9], pág. 142, teorema 5.14. ∎

Na quinta seção deste capítulo apresentamos alguns resultados para o espaço $K(\ell_2, \ell_2)$ de todos os operadores compactos entre o espaço ℓ_2. Mostramos que $K(\ell_2, \ell_2)$ não é complementado em $L(\ell_2, \ell_2)$, para isso usaremos o seguinte teorema que mostra que o espaço c_0 não é complementado em ℓ_∞.

Teorema 1.1.32 (Phillips). *O espaço c_0 não é complementado em ℓ_∞.*

Demonstração: Ver Megginson [16], pág. 301, teorema 3.2.20. ■

Sejam E um espaço de Banach e A um subconjunto não vazio de E. A envoltória convexa fechada de A é o conjunto $\overline{co}(A) = \{\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i : x_i \in A,\ \lambda_i \geq 0 \text{ e } \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i = 1\}$.

O próximo teorema que utilizaremos na demonstração de resultados no capítulo 2 mostra que todo subconjunto compacto de um espaço normado está contido na envoltória convexa fechada de uma seqüência que converge em norma para zero.

Teorema 1.1.33. *Sejam X um espaço normado e K um subconjunto de X. Se K é compacto, então existe uma seqüência $(x_n)_n \subset X$ tal que $\lim_n \| x_n \| = 0$ e $K \subset \overline{co}((x_n)_n)$.*

Demonstração: Ver Diestel [5], pág. 3, teorema 5. ■

Terminamos essa seção apresentando o Lema de Riesz que utilizaremos no capítulo 3.

Lema 1.1.34 (Lema de Riesz). *Sejam Y um subespaço próprio fechado de um espaço normado X e $0 < \theta < 1$. Então existe um $x_\theta \in S_X$ tal que $\| x_\theta - y \| > \theta$ para todo $y \in Y$.*

Demonstração: Tomemos $x \in X \setminus Y$. Como Y é fechado, a distância de x a Y, d, é positiva, isto é,

$$0 < d = \inf\{ \| x - y \| : y \in Y \}.$$

Para $0 < \theta < 1$, $d/\theta > d$ e assim, existe um $z \in Y$ tal que $\| x - z \| < d/\theta$.

Seja $x_\theta = \frac{x-z}{\|x-z\|}$. Temos que $x_\theta \in S_X$, e além disso, se $y \in Y$, então

$$\| x_\theta - y \| = \left\| \frac{x-z}{\| x - z \|} - y \right\| =$$

$$= \left\| \frac{x}{\| x - z \|} - \frac{z}{\| x - z \|} - \frac{\| x - z \| y}{\| x - z \|} \right\| =$$

$$= \frac{1}{\| x - z \|} \| x - \underbrace{(z + \| x - z \| y)}_{\text{um elemento de } Y} \| >$$

$$\frac{\theta}{d} d = \theta.$$

■

1.2 Topologia fraca em espaços de Banach

Nesta dissertação, utilizaremos as definições e algumas propriedades de topologia fraca e operadores fracamente compactos. A topologia fraca em um espaço normado X é a menos fina que torna os elementos do dual de X contínuos. Essa topologia não é induzida por uma métrica, logo argumentos familiares usados para espaços métricos baseados em convergência de seqüências não podem ser utilizados na sua forma usual. Entretanto a maioria dos resultados pode ser adaptada trocando-se seqüências por redes. Começamos então esta seção com uma discussão sobre redes.

Definição 1.2.1. *Um conjunto dirigido é um conjunto não-vazio I com uma relação $\preceq$ tal que:*

(1) $\alpha \preceq \alpha$ para todo $\alpha \in I$.

(2) $\alpha \preceq \beta$ e $\beta \preceq \gamma \Rightarrow \alpha \preceq \gamma$ para todos α, β, e $\gamma \in I$.

(3) Para todos α e $\beta \in I$ existe um $\gamma_{\alpha,\beta} \in I$ tal que $\alpha \preceq \gamma_{\alpha,\beta}$ e $\beta \preceq \gamma_{\alpha,\beta}$.

Definição 1.2.2. *Uma rede em um conjunto X é uma função $\alpha \in I \mapsto x_\alpha \in X$, com I um conjunto dirigido. Analogamente às seqüências, denotamos uma rede $\alpha \in I \mapsto x_\alpha \in X$ por $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ ou (x_α).*

Exemplos 1.2.3. *a) Toda seqüência é uma rede, com o conjunto de índices $\mathbb{N}$ com sua ordem natural.*

b) O conjunto $\mathbb{R}$ com sua ordem natural é um conjunto dirigido, logo toda função com domínio em $\mathbb{R}$ é uma rede.

Definição 1.2.4. *Seja $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ uma rede em um espaço topológico X e $x \in X$. Dizemos que $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ converge para x se para cada vizinhança aberta V de x em X, existe α_0 em I tal que $\alpha_0 \preceq \alpha \Rightarrow x_\alpha \in V$.*

Se X é um espaço de Hausdorff, então dados dois pontos $x, y \in X$ distintos, existem vizinhanças abertas V_x e V_y de x e y respectivamente tais que $V_x \cap V_y = \emptyset$. Se uma rede $(x_\alpha)_{\alpha \in I} \subset X$ converge para x e y, existem α_1 e α_2 em I tais que $\alpha_1 \preceq \alpha \Rightarrow x_\alpha \in V_x$ e $\alpha_2 \preceq \alpha \Rightarrow x_\alpha \in V_y$. Sendo I um conjunto dirigido, é possível encontrar $\alpha_0 \in I$ tal que $\alpha_1 \preceq \alpha_0$ e $\alpha_2 \preceq \alpha_0$. Devemos ter $x_{\alpha_0} \in V_x \cap V_y$. Logo, uma rede em um espaço de Hausdorff tem apenas um limite. Como iremos trabalhar apenas com espaços de Hausdorff, escrevemos $x_\alpha \to x$ para denotar que a rede $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ converge para x.

Proposição 1.2.5. *Sejam X e Y espaços topológicos, e $f : X \to Y$ uma função. Então f é contínua em $x \in X$ se, e somente se, $x_\alpha \to x \Rightarrow f(x_\alpha) \to f(x)$, para toda rede $(x_\alpha)_{\alpha \in I} \subset X$.*

Demonstração: Sejam $f : X \to Y$ contínua em x e $x_\alpha \to x$. Para toda vizinhança V de $f(x)$, existe uma vizinhança U de x tal que $f(U) \subset V$. Como $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ converge para x, existe α_0 em I tal que $\alpha_0 \preceq \alpha \Rightarrow x_\alpha \in U$. Logo $\alpha_0 \preceq \alpha \Rightarrow x_\alpha \in U \Rightarrow f(x_\alpha) \in V$.

Por outro lado, suponhamos que $x_\alpha \to x \Rightarrow f(x_\alpha) \to f(x)$, para toda rede $(x_\alpha)_{\alpha \in I} \subset X$ mas $f : X \to Y$ não é contínua em x. Então, existe uma vizinhança V de $f(x)$ tal que para toda vizinhança U de x, $f(U) \not\subset V$. Pelo axioma da escolha, para cada vizinhança U de x podemos tomar $x_U \in U$ tal que $f(x_U) \notin V$. O conjunto Υ_x de todas as vizinhanças de x em X é um conjunto dirigido pela relação $W \leq U \Leftrightarrow U \subset W$. Logo, $(x_U)_{U \in \Upsilon_x}$ é uma rede em X que converge para x, pois dado $U \in \Upsilon_x$, tomando $U_0 = U$ temos que $W \geq U \Rightarrow W \subset U \Rightarrow x_W \in U$. Evidentemente, a rede $(f(x_U))_{U \in \Upsilon}$ não converge para $f(x)$, o que é uma contradição. ■

Apresentamos a seguir a definição de topologia fraca e alguns resultados que utilizaremos posteriormente.

Definição 1.2.6. *(Topologia fraca)*

Seja X um espaço normado. A topologia fraca de X é a topologia obtida tomando como base todos os conjuntos da forma:

$$V(x_0, x_1', \ldots, x_n', \epsilon) = \{x \in X : \sup_{i=1,\ldots,n} \mid x_i'(x) - x_i'(x_0) \mid < \epsilon\}$$

onde $x_0 \in X$; $x_1', \ldots, x_n' \in X'$, $n \in I\!N$ e $\epsilon > 0$.

Aqui, fracamente aberto, fracamente fechado, fracamente compacto, função fracamente contínua, etc estão se referindo a conjunto aberto, fechado, compacto, função contínua, etc com relação à topologia fraca.

Proposição 1.2.7. *Uma rede $(x_\alpha)_{\alpha \in I} \subset X$ em um espaço de Banach E é fracamente convergente para x se, e somente se, $f(x_\alpha) \to f(x)$ em $I\!K$, para todo $f \in E'$.*

Demonstração: Se $x_\alpha \xrightarrow{\omega} x$, então, dado $f \in E'$, pela proposição 1.2.5 segue que $f(x_\alpha) \to f(x)$.

Por outro lado, se para todo funcional linear contínuo f, $f(x_\alpha) \to f(x)$, dado um aberto $V(x, f_1, f_2, \ldots, f_n, \epsilon)$, para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, existe $\alpha_i \in I$ tal que $| f_i(x_\alpha) - f_i(x) | < \epsilon$, para todo $\alpha \geq \alpha_i$. Tomando $\alpha_0 \geq \alpha_i$ para todo i, temos que

$$\alpha \geq \alpha_0 \Rightarrow | f_i(x_\alpha) - f_i(x) | < \epsilon \ (i = 1, 2, \ldots, n) \Rightarrow x_\alpha \in V(x, f_1, f_2, \ldots, f_n, \epsilon),$$

e portanto $x_\alpha \xrightarrow{\omega} x$. ■

Exemplo 1.2.8. *Seja $(e_n)_n$ a seqüência de vetores unitários de ℓ_2. É fácil ver que $e_n \xrightarrow{\omega} 0$ e como $\| e_n \| = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $e_n \not\to 0$ em ℓ_2.*

Proposição 1.2.9. *Sejam X um espaço normado e $(x_n)_n$ uma seqüência em X. Se $(x_n)_n$ é fracamente convergente, então $(x_n)_n$ é limitada.*

Demonstração: Se $x_n \xrightarrow{\omega} x$, então $f(x_n) \to f(x)$ para cada $f \in X'$, logo $(f(x_n))_n \subset \mathbb{K}$ é limitado. Assim para cada $f \in X'$ existe c_f tal que $| f(x_n) | \leq c_f$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Seja $C : X \to X''$ a inclusão natural. Então $| C_{x_n}(f) | = | f(x_n) | \leq c_f$, isto é, a seqüência $(| C_{x_n}(f) |)_n$ é limitada para todo $f \in X'$. Pelo Princípio da Limitação Uniforme, teorema 1.1.13, $(\| C_{x_n} \|)_n$ é limitada, agora como $\| C_{x_n} \| = \| x_n \|$, segue que $(x_n)_n$ é limitada. ■

Teorema 1.2.10. *Sejam E e F espaços de Banach, e $T : E \to F$ um operador linear. Então T é norma-norma contínuo se, e somente se, é fraco-fraco contínuo.*

Demonstração: Suponhamos que T é norma-norma contínuo. Sejam $x_\alpha \xrightarrow{\omega} x$ em E e $y' \in F'$. Como T é norma-norma contínuo, $y' \circ T \in E'$ e logo $y' \circ T(x_\alpha) \to y' \circ T(x)$, conseqüentemente $Tx_\alpha \xrightarrow{\omega} Tx$ em F. Logo T é fraco-fraco contínuo.

Reciprocamente, seja $T : E \to F$ um operador fraco-fraco contínuo. Suponhamos por absurdo que T não é norma-norma contínuo. Então existe uma seqüência $(x_n)_n \subset E$ tal que $x_n \to 0$ e $\| Tx_n \| \geq n^2$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $x_n \to 0$, segue que $x_n \xrightarrow{\omega} 0$ em E, e assim, por hipótese, $Tx_n \xrightarrow{\omega} 0$ em F. Agora pela proposição 1.2.9, a seqüência $(Tx_n)_n$ é limitada, uma contradição. Portanto T é norma-norma contínuo. ■

Definição 1.2.11. *Seja X um espaço normado. Dizemos que X tem a propriedade de Schur se para toda seqüência $(x_n)_n \subset X$ tal que $x_n \xrightarrow{\omega} x$, para algum $x \in X$, implicar que $x_n \to x$ em X.*

Exemplo 1.2.12. *No exemplo 1.2.8 acima foi mostrado que ℓ_2 não tem a propriedade de Schur.*

Proposição 1.2.13. *Sejam S um conjunto e $\ell_1(S)$ o espaço definido como em 1.1.22. Então $\ell_1(S)$ tem a propriedade de Schur.*

Demonstração: Ver por exemplo Semadeni [24], pág. 303, teorema 17.7.5. ∎

Teorema 1.2.14 (Teorema ℓ_1 de Rosenthal). *Seja E um espaço de Banach. Cada seqüência limitada $(x_n)_n \subset E$ admite uma subseqüência fracamente de Cauchy em E se, e somente se, $\ell_1 \not\hookrightarrow E$.*

Demonstração: Ver por exemplo Diestel [5], pág. 201. ∎

Teorema 1.2.15. *Seja X um espaço de Banach. Então X é reflexivo se, e somente se, toda seqüência limitada em X admite uma subseqüência fracamente convergente.*

Demonstração: Ver Megginson [16], pág. 119, teorema 1.13.5.

Teorema 1.2.16 (Eberlein-Smulian). *Seja A um subconjunto de um espaço normado. Então A é relativamente fracamente compacto se, e somente se, A é relativamente fracamente seqüencialmente compacto.*

Demonstração: Ver Megginson [16], pág. 248, teorema 2.8.6.

1.3 Séries e Bases de Schauder

Nesta seção apresentaremos resultados relacionados a séries e bases em espaços de Banach. Este tema será de suma importância no capítulo 2 para estudar algumas caracterizações de operadores compactos em espaços de Banach.

Sejam X um espaço normado e $(x_n)_n$ uma seqüência em X. Então a série gerada por $(x_n)_n$ é a seqüência $(\sum_{n=1}^m x_n)_{m=1}^\infty$. Para cada inteiro positivo m, o $m-ésimo$ termo $\sum_{n=1}^m x_n$ dessa seqüência de somas é a $m - ésima$ soma parcial da série. Se a série converge, isto é, se $\lim_m \sum_{n=1}^m x_n$ existe, então esse limite é a soma da série e é denotado por $\sum_{n=1}^\infty x_n$ ou por $\sum_n x_n$.

Definições 1.3.1. *Sejam E um espaço normado e $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ uma série em E. Então a série $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ é:*

(1) Incondicionalmente convergente se para cada permutação $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a série $\sum_{i=1}^{\infty} x_{\sigma(i)}$ converge.

(2) Somável para um $x \in E$ se para cada $\epsilon > 0$ é possível obter F_ϵ (finito) $\subset \mathbb{N}$ tal que para todo F finito com $F_\epsilon \subset F \subset \mathbb{N}$, temos que $\| x - \sum_{i \in F} x_i \| < \epsilon$.

(3) Limitada multiplicada convergente se para cada seqüência de escalares $(\lambda_i)_i$ a série $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i$ converge.

(4) Cauchy somável se para cada $\epsilon > 0$ é possível obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo subconjunto finito de $\mathbb{N}$, F, com $\min F \geq n_0$, temos que $\| \sum_{i \in F} x_i \| < \epsilon$.

Proposição 1.3.2. *Sejam E um espaço de Banach, $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ uma série em E e (1), (2), (3), (4) como na definição anterior. Então são equivalentes: (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3) $\Leftrightarrow$ (4).*

Demonstração: Para a implicação (1) $\Leftrightarrow$ (2), ver Retherford [22], pág. 14, para as implicações (1) $\Leftrightarrow$ (3) $\Leftrightarrow$ (4), ver Diestel, Jarchow, Tonge [6], pág. 9, teorema 1.9. ∎

Definição 1.3.3. *Sejam E um espaço de Banach e $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ uma série em E. Dizemos que a série $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ é absolutamente convergente se a série numérica $\sum_{i=1}^{\infty} \| x_i \|$ converge.*

Em $\mathbb{K}$, convergência absoluta e convergência incondicional são equivalentes. Para espaços normados temos:

Proposição 1.3.4. *Um espaço normado X é um espaço de Banach se, e somente se, cada série absolutamente convergente em X é também convergente.*

Demonstração: Suponhamos que X é um espaço de Banach e que $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ é uma série absolutamente convergente em X. Então para $s_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$,

$$\| s_{n+k} - s_n \| = \| \sum_{i=n+1}^{n+k} x_i \| \leq \sum_{i=n+1}^{n+k} \| x_i \| \to 0 \text{ quando } n \to \infty$$

Logo, $(s_n)_n$ é uma seqüência de Cauchy e portanto convergente no espaço de Banach X.

Suponhamos que X não é um espaço de Banach. Seja $(x_n)_n$ uma seqüência de Cauchy não convergente em X. Para cada inteiro positivo j, existe um inteiro positivo n_j tal que

$\| x_n - x_m \| \leq 2^{-j}$ se $n, m \geq n_j$. Podemos assumir que $n_{j+1} \geq n_j$ para cada j. Como o limite de uma subseqüência de uma seqüência de Cauchy deve ser o limite da seqüência, a subseqüência $(x_{n_j})_j$ não tem limite. Logo a série $\sum_{j=1}^{\infty}(x_{n_{j+1}} - x_{n_j})$ não é convergente pois $\sum_{j=1}^{k}(x_{n_{j+1}} - x_{n_j}) = x_{n_{k+1}} - x_{n_1}$ para cada inteiro positivo k. Entretanto essa série é absolutamente convergente pois $\sum_{j=1}^{\infty} \| x_{n_{j+1}} - x_{n_j} \| \leq \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} = 1$. ■

Proposição 1.3.5. *Sejam E um espaço de Banach e $\sum_n x_n$ uma série em E. Se a série $\sum_n x_n$ é incondicionalmente convergente em E, então a série $\sum_n \alpha_n x_n$ também é incondicionalmente convergente em E para todo $(\alpha_n)_n \in \ell_\infty$.*

Demonstração: Se a série $\sum_n x_n$ é incondicionalmente convergente em E, pela proposição 1.3.2, a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é limitada multiplicada convergente; conseqüentemente a série $\sum_n \alpha_n x_n$ é incondicionalmente convergente em E para todo $(\alpha_n)_n \in \ell_\infty$. ■

Apresentamos também a definição de série ω^* incondicionalmente convergente.

Definição 1.3.6. *(Séries ω^* incondicionalmente convergentes)*

Seja E um espaço de Banach. Uma série $\sum g_n$ no espaço dual E' de E é dita ω^* incondicionalmente convergente se $\sum g_n(x)$ é incondicionalmente convergente para cada x em E, ou equivalentemente, $\sum | g_n(x) | < \infty$ para cada x em E.

Exemplos 1.3.7. *(a) Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $p_n : \ell_1 \to \mathbb{K}$ o funcional linear e contínuo definido por $p_n(\lambda) = \lambda_n$, para cada $\lambda = (\lambda_j)_j \in \ell_1$. Como $\sum | p_n(\lambda) | = \sum | \lambda_n | < \infty$ para cada $\lambda = (\lambda_j)_j$ em ℓ_1, a série $\sum p_n$ é então ω^* incondicionalmente convergente em $\ell_\infty = (\ell_1)'$.*
(b) Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $q_n : \ell_\infty \to \mathbb{K}$ o funcional linear e contínuo definido por $q_n(\lambda) = n\lambda_n$, para cada $\lambda = (\lambda_j)_j \in \ell_\infty$. Para $\lambda = (1, 1, \ldots)$, $\sum | q_n(\lambda) | = \sum n = \infty$. Logo a série $\sum q_n$ não é ω^* incondicionalmente convergente em $(\ell_\infty)'$.

Proposição 1.3.8. *Sejam E um espaço de Banach e $\sum g_n$ uma série incondicionalmente convergente em E'. Então $\sum g_n$ é ω^* incondicionalmente convergente.*

Demonstração: Seja $\sum g_n$ uma série incondicionalmente convergente em E'. Dado $x \in E$, se $x = 0$, então é imediato que $\sum g_n(x)$ é incondicionalmente convergente em $\mathbb{K}$. Se $x \neq 0$, então pela proposição 1.3.2, existe g em E' tal que dado $\epsilon > 0$, existe F_ϵ (finito) $\subset \mathbb{N}$ tal que para todo F com $F_\epsilon \subset F$ (finito) $\subset \mathbb{N}$, temos que $\| g - \sum_{n \in F} g_n \| < \epsilon / \| x \|$.

Como, $\| (g - \sum_{n\in F} g_n)(x) \| \leq \| g - \sum_{n\in F} g_n \| \| x \|$, segue que a série numérica $\sum g_n(x)$ é somável para $g(x)$, logo, novamente usando a proposição 1.3.2, incondicionalmente convergente em $I\!\!K$. ■

Usaremos o seguinte lema na demonstração de alguns resultados no capítulo 2.

Lema 1.3.9. *Seja $\sum \mu_n$ uma série de escalares. Se a série $\sum \mid \mu_n \mid$ diverge, então existe uma seqüência não-crescente $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots$ de números positivos convergindo a zero tal que a série $\sum \mid \lambda_n \mu_n \mid$ também diverge.*

Demonstração: Como $\sum \mid \mu_n \mid$ diverge, existe $N_1, N_2, \ldots$ uma seqüência crescente de inteiros positivos tal que

$$\mid \mu_{N_k} \mid + \cdots + \mid \mu_{N_{k+1}-1} \mid > 4^k, \; \textit{para cada } k \in I\!\!N.$$

Considere $\lambda_n = 2^{-k}$ para $N_k \leq n < N_{k+1}$. Então $(\lambda_n)_n$ é uma seqüência não crescente de inteiros positivos que converge para zero. Como

$$\mid \lambda_{N_K} \mu_{N_k} \mid + \cdots + \mid \lambda_{N_{k+1}-1} \mu_{N_{k+1}-1} \mid =$$

$$= \mid \lambda_{N_K} \mid \mid \mu_{N_k} \mid + \cdots + \mid \lambda_{N_{k+1}-1} \mid \mid \mu_{N_{k+1}-1} \mid =$$

$$= 2^{-k} (\mid \mu_{N_k} \mid + \cdots + \mid \mu_{N_{k+1}-1} \mid) > 2^{-k} \, 4^k = 2^k,$$

a série $\sum \mid \lambda_n \mu_n \mid$ diverge. ■

A proposição que apresentamos em seguida está demonstrada em McArthur and Retherford [15] e será utilizada na demonstração de resultados no capítulo 2.

Proposição 1.3.10. *Sejam E um espaço de Banach, σ um conjunto finito de inteiros positivos, $(x_j)_{j\in\sigma}$ uma família de elementos de E, $(t_j)_{j\in\sigma}$ uma família de números complexos. Então vale a seguinte desigualdade:*

$$\| \sum_{j\in \sigma} t_j x_j \| \leq 4 \sup_{j\in\sigma} \mid t_j \mid \sup_{\sigma' \subseteq \sigma} \| \sum_{j \in \sigma'} x_j \| .$$

Demonstração: Como σ é um conjunto finito, podemos assumir que $\sigma = \{1, \ldots, n\}$. Para demonstrar a desigualdade vamos proceder da seguinte maneira:

1) Vamos assumir que todos os escalares são números reais não negativos com $t_1 \geq t_2 \geq \cdots \geq t_n$. Então

$$\| \sum_{j=1}^{n} t_j x_j \| = \| \sum_{j=1}^{n-1} (t_j - t_{j+1})(x_1 + \cdots + x_j) + t_n(x_1 + \cdots + x_n) \| \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n-1} (t_j - t_{j+1}) \| x_1 + \cdots + x_j \| + t_n \| x_1 + \cdots + x_n \| \leq$$

$$\leq [\sum_{j=1}^{n-1} (t_j - t_{j+1}) + t_n] \sup_{\sigma' \subseteq \sigma} \| \sum_{j \in \sigma'} x_j \| \leq$$

$$\leq \sup_{j \varepsilon \sigma} | t_j | \sup_{\sigma' \subseteq \sigma} \| \sum_{j \in \sigma'} x_j \|$$

2) Em seguida vamos assumir que todos os escalares são números reais negativos com $| t_1 | \geq | t_2 | \geq \cdots \geq | t_n |$. Então

$$\| \sum_{j=1}^{n} t_j x_j \| = \| \sum_{j=1}^{n} - | t_j | x_j \| = \| \sum_{j=1}^{n} | t_j | x_j \| .$$

Agora por 1) temos que

$$\| \sum_{j=1}^{n} t_j x_j \| \leq \sup_{j \in \sigma} | t_j | \sup_{\sigma' \subseteq \sigma} \| \sum_{j \in \sigma'} x_j \|$$

Agora, para escalares reais quaisquer aplicamos isto para escalares positivos e negativos separadamente. Se $t_j \geq 0$ para $j = 1, \ldots, m$; $t_j < 0$ para $j = m+1, \ldots, n$; $t_1 \geq t_2 \geq \cdots \geq t_m$ e $| t_{m+1} | \geq | t_{m+2} | \geq \cdots \geq | t_n |$, então por 1) e 2) temos que

$$\| \sum_{j=1}^{n} t_j x_j \| = \| \sum_{j=1}^{m} t_j x_j + \sum_{j=m+1}^{n} t_j x_j \| \leq \| \sum_{j=1}^{m} t_j x_j \| + \| \sum_{j=m+1}^{n} t_j x_j \| \leq$$

$$\leq 2 \sup_{j \in \sigma} | t_j | \sup_{\sigma' \subseteq \sigma} \| \sum_{j \in \sigma'} x_j \|$$

Então para $t_j = a_j + \imath\, b_j \in \mathbb{C}$, escrevemos $\sum t_j x_j$ como $\sum a_j x_j + i \sum b_j x_j$. Aplicando a desigualdade para escalares reais para cada soma separadamente obtemos o resultado.

$$\| \sum_{j=1}^{n} t_j x_j \| = \| \sum_{j=1}^{n} a_j x_j + \sum_{j=1}^{n} \imath b_j x_j \| \leq \| \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \| + | \imath | \| \sum_{j=1}^{n} b_j x_j \| \leq$$

$$4 \sup_{j \in \sigma} | t_j | \sup_{\sigma' \subseteq \sigma} \| \sum_{j \in \sigma'} x_j \|$$

■

Utilizamos alguns resultados envolvendo bases de Schauder nos capítulos 2 e 3 desta dissertação. Apresentamos a seguir as definições e resultados que utilizaremos.

Definições 1.3.11. *(Bases de Schauder)*

Sejam E um espaço de Banach e $(x_n)_n$ uma seqüência em E.

1. *Dizemos que $(x_n)_n$ é uma base de Schauder para E se para cada x em E existe uma única seqüência de escalares $(\alpha_n)_n$ tal que a série $\sum \alpha_n x_n$ converge para x em E.*
2. *Dizemos que $(x_n)_n$ é uma seqüência básica de Schauder em E se $(x_n)_n$ é uma base de Schauder para o subespaço $\overline{[x_n : n \in \mathbb{N}]}$.*
3. *Dizemos que uma base de Schauder $(x_n)_n$ para E é normalizada se $\| x_n \| = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*
4. *Dizemos que uma base de Schauder $(x_n)_n$ para E é incondicional se para cada x em E a expansão $x = \sum \alpha_n x_n$ é uma série incondicionalmente convergente.*

Neste trabalho, uma seqüência $(x_n)_n \subset E$ será chamada de base (seqüência básica) quando ela for uma base de Schauder (seqüência básica de Schauder) para E.

Exemplo 1.3.12. *Se E é c_0 ou ℓ_p, com $1 \leq p < \infty$, considere $(e_n)_n$ a seqüência de vetores unitários de E, então $(e_n)_n$ é uma base de Schauder normalizada incondicional para E. Esta seqüência será chamada de base canônica de E.*

Definição 1.3.13. *Seja E um espaço de Banach com base de Schauder $(x_n)_n$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos o m-ésimo coeficiente funcional x'_m associado a $(x_n)_n$ como a aplicação:*

$$x'_m : E \to \mathbb{K} \text{ dada por :}$$

$$x'_m(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n) = \alpha_m, \quad \text{para cada } x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n \text{ em } E.$$

Também definimos a m-ésima projeção natural P_m relativa à base $(x_n)_n$ como a aplicação:

$$P_m : E \to E \text{ dada por :}$$

$$P_m(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n) = \sum_{n=1}^{m} \alpha_n x_n, \quad \text{para cada } x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n \text{ em } E.$$

Cada coeficiente funcional é um funcional linear sobre E e cada projeção é um operador linear sobre E.

Vamos agora mostrar que os coeficientes funcionais e as projeções naturais são contínuos. Para isto vamos usar outra norma, que não é a norma original de E.

Definição 1.3.14. *Seja $(x_n)_n$ uma base de Schauder para um espaço de Banach E. Definimos uma norma e denotamos $\| \,.\, \|_{(x_n)}$ por:*

$$\| x \|_{(x_n)} = \sup_m \| \sum_{n=1}^{m} \alpha_n x_n \| , \quad \text{para cada } x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n \text{ em } E.$$

Teorema 1.3.15. *Seja $(x_n)_n$ uma base de Schauder para um espaço de Banach E. Então $\| \,.\, \|_{(x_n)}$ é uma norma equivalente à norma original de E e, $\| x \| \leq \| x \|_{(x_n)}$, para todo $x \in E$.*

Demonstração: Para cada $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ *em* E,

$$\| x \| = \| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n \| = \| \lim_{j\to\infty} \sum_{n=1}^{j} \alpha_n x_n \| =$$

$$= \lim_{j\to\infty} \| \sum_{n=1}^{j} \alpha_n x_n \| \leq \sup_j \| \sum_{n=1}^{j} \alpha_n x_n \| = \| x \|_{(x_n)} .$$

Portanto, $\| x \| \leq \| x \|_{(x_n)}$, para cada $x \in E$.

Com a desigualdade demonstrada acima, temos que $Id : (E, \| \,.\, \|_{(x_n)}) \to (E, \| \,.\, \|)$ é um operador linear, contínuo e bijetor.

Vamos mostrar que $(E, \| \,.\, \|_{(x_n)})$ é um espaço de Banach, então pelo teorema da aplicação aberta (teorema 1.1.9), teremos que $\| \,.\, \|$ e $\| \,.\, \|_{(x_n)}$ são equivalentes.

Seja $(y_j)_j = (\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{n,j} x_n)_j$ uma seqüência de Cauchy em E com relação à norma $\| \cdot \|_{(x_n)}$. Dados j_1, j_2, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, temos:

$$| \alpha_{k,j_1} - \alpha_{k,j_2} | \, \| x_k \| = \| (\alpha_{k,j_1} - \alpha_{k,j_2}) x_k \| = \| \sum_{n=1}^{k} (\alpha_{n,j_1} - \alpha_{n,j_2}) x_n - \sum_{n=1}^{k-1} (\alpha_{n,j_1} - \alpha_{n,j_2}) x_n \| \leq$$

$$2 \| \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_{n,j_1} - \alpha_{n,j_2}) x_n \|_{(x_n)} \leq 2 \| y_{j_1} - y_{j_2} \|_{(x_n)}$$

Para $k = 1$ e todos $j_1, j_2 \in \mathbb{N}$,

$$| \alpha_{1,j_1} - \alpha_{1,j_2} | \, \| x_1 \| = \| (\alpha_{1,j_1} - \alpha_{1,j_2}) x_1 \| \leq \| \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_{n,j_1} - \alpha_{n,j_2}) x_n \|_{(x_n)} = \| y_{j_1} - y_{j_2} \|_{(x_n)}$$

Assim fixado $k \in \mathbb{N}$, segue que $(\alpha_{k,j})_j \subset \mathbb{K}$ é uma seqüência de Cauchy em $\mathbb{K}$, sendo portanto convergente para, digamos, $\alpha_k \in \mathbb{K}$. Consideremos então a seqüência de escalares $(\alpha_n)_n$. Vamos mostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ converge em E e $y = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ será nosso candidato a limite de $(y_j)_j$ na norma $\| \cdot \|_{(x_n)}$.

Seja $\epsilon > 0$. Então existe $j_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que $j, j' \geq j_\epsilon \Rightarrow \| y_j - y_{j'} \|_{(x_n)} < \epsilon/3$ e

$$\| \sum_{n=1}^{m} \alpha_{n,j} x_n - \sum_{n=1}^{m} \alpha_{n,j'} x_n \| \leq \| y_j - y_{j'} \|_{(x_n)} < \epsilon/3, \forall m \in \mathbb{N}, \ se \ j, j' \geq j_\epsilon.$$

Fixado $j = j_\epsilon$ e fazendo $j' \to \infty$, temos que para cada $m \in \mathbb{N}$:

$$\| \sum_{n=1}^{m} \alpha_{n,j_\epsilon} x_n - \sum_{n=1}^{m} \alpha_n x_n \| \leq \epsilon/3. \tag{1.1}$$

Seja $m_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que $m_2 \geq m_1 > m_\epsilon \Rightarrow \| \sum_{n=m_1}^{m_2} \alpha_{n,j_\epsilon} x_n \| < \epsilon/3$. Se $m_2 \geq m_1 > m_\epsilon$, temos

$$\| \sum_{n=m_1}^{m_2} \alpha_n x_n - \sum_{n=m_1}^{m_2} \alpha_{n,j_\epsilon} x_n \| \leq \| \sum_{n=1}^{m_2} \alpha_n x_n - \sum_{n=1}^{m_2} \alpha_{n,j_\epsilon} x_n \| + \| \sum_{n=1}^{m_1-1} \alpha_n x_n - \sum_{n=1}^{m_1-1} \alpha_{n,j_\epsilon} x_n \| \leq \frac{2\epsilon}{3}.$$

Logo,

$$\| \sum_{n=m_1}^{m_2} \alpha_n x_n \| \leq \| \sum_{n=m_1}^{m_2} \alpha_n x_n - \sum_{n=m_1}^{m_2} \alpha_{n,j_\epsilon} x_n \| + \| \sum_{n=m_1}^{m_2} \alpha_{n,j_\epsilon} x_n \| < \epsilon.$$

Portanto $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n = y \in E$, pois $(E, \| \cdot \|)$ é um espaço de Banach. Finalmente, de (1.1) temos que para cada $j \geq j_\epsilon$

$$\| \sum_{n=1}^{m} (\alpha_{n,j} - \alpha_n) x_n \| \leq \epsilon/3 \ \forall m \in I\!N,$$

isto é,

$$\sup_m \| \sum_{n=1}^{m} (\alpha_{n,j} - \alpha_n) x_n \| \leq \ \epsilon/3 < \epsilon.$$

Logo $y_j \overset{\|\cdot\|_{(x_n)}}{\to} y$. Portanto $(E, \| \cdot \|)_{(x_n)}$ é um espaço de Banach. ■

Proposição 1.3.16. *Cada projeção natural P_m relativa a uma base de Schauder $(x_n)_n$ de um espaço de Banach E é contínua.*

Demonstração: Dado $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ em E, para cada $m \in \mathbf{N}$:

$$\| P_m(x) \|_{(x_n)} = \| P_m(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n) \|_{(x_n)} = \| \sum_{n=1}^{m} \alpha_n x_n \|_{(x_n)} \leq$$

$$\leq \| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n \|_{(x_n)} = \| x \|_{(x_n)} .$$

Como as normas $\| \ . \ \|$ e $\| \ . \ \|_{(x_n)}$ são equivalentes, segue que P_m é contínua para cada $m \in I\!N$. ■

Corolário 1.3.17. *Seja $\{P_m : m \in I\!N\}$ a coleção de projeção naturais relativas a uma base de Schauder $(x_n)_n$ de um espaço de Banach E, então $\sup_n \| P_n \| < \infty$.*

Demonstração: Da demonstração da proposição 1.3.16, temos que $\| P_m \|_{(x_n)} \leq 1$ para cada $m \in I\!N$. Como as normas $\| \cdot \|$ e $\| \cdot \|_{(x_n)}$ são equivalentes, segue o resultado. ■

Definição 1.3.18. *Seja $(x_n)_n$ uma base de Schauder para um espaço de Banach E. Chamamos de constante básica para a base $(x_n)_n$ ao número $\sup_n \| P_n \|$. Denotaremos a constante básica por C.*

A constante básica depende da norma do espaço e temos do corolário 1.3.17 que $C < \infty$.

Proposição 1.3.19. *Sejam E um espaço de Banach e $(x_n)_n$ uma base de Schauder para E com coeficientes funcionais associados $(x'_n)_n$. Então os coeficientes funcionais são contínuos.*

Demonstração: Para cada $m \in \mathbb{N}$, seja $T_m : [x_m] \to \mathbb{K}$ a aplicação linear contínua definida por $T_m(\alpha\, x_m) = \alpha$. Dado $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ em E, se $m = 1$, então $x'_1(x) = \alpha_1 = (T_1 \circ P_1)(x)$. Como T_1 e P_1 são contínuas, segue que x'_1 é contínuo. Se $m \geq 2$, então

$$x'_m(x) = \alpha_m = T_m(\alpha_m x_m) = T_m(\sum_{n=1}^{m} \alpha_n x_m - \sum_{n=1}^{m-1} \alpha_n x_m) = T_m(P_m(x) - P_{m-1}(x)) =$$

$$= T_m(P_m - P_{m-1})(x)$$

e como T_m e P_m são contínuas, segue que x'_m é contínuo. ∎

Na demonstração de alguns resultados no capítulo 2 utilizaremos algumas normas equivalentes à norma original de E.

Definição 1.3.20. *Seja $(x_n)_n$ uma base de Schauder incondicional para um espaço de Banach E. Então definimos a norma incondicional multiplicador limitado relativa à base $(x_n)_n$ por*

$$\| x \|_{(bmu)} = \sup\{\| \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \alpha_n x_n \| : (\beta_n) \in S_{\ell_\infty}\} \textit{ para cada } x = \sum \alpha_n x_n \textit{ em } E.$$

Observamos que $\| x \|_{(bmu)} < \infty$ para todo $x \in E$, uma vez que se $\sup\{\| \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \alpha_n x_n \| : (\beta_n) \in S_{\ell_\infty}\} = \infty$ para um certo $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n \in E$, então dado $n_1 \in \mathbb{N}$, é possível obter $n_2 > n_1$ e escalares $\beta_1, \ldots, \beta_{n_2}$ tais que $| \beta_i | \leq 1$ para $1 \leq i \leq n_2$ e $\| \sum_{n=1}^{n_2} \beta_n \alpha_n x_n \| \geq 1 + \sum_{n=1}^{n_1} \| \alpha_n x_n \|$.

Assim segue que $\| \sum_{n=n_1+1}^{n_2} \beta_n \alpha_n x_n \| = \| \sum_{n=1}^{n_2} \beta_n \alpha_n x_n - \sum_{n=1}^{n_1} \beta_n \alpha_n x_n \| \geq$

$\geq \| \sum_{n=1}^{n_2} \beta_n \alpha_n x_n \| - \| \sum_{n=1}^{n_1} \beta_n \alpha_n x_n \| \geq 1 + \sum_{n=1}^{n_2} \| \alpha_n x_n \| - \| \sum_{n=1}^{n_1} \| \beta_n \alpha_n x_n \| =$

$= 1 + \sum_{n=1}^{n_2} \| \alpha_n x_n \| - \sum_{n=1}^{n_1} | \beta_n | \| \alpha_n x_n \| \geq$

$\geq 1 + \sum_{n=1}^{n_2} \| \alpha_n x_n \| - \sum_{n=1}^{n_1} \| \alpha_n x_n \| = 1$. Seja $\gamma_n = \beta_n$ para $n = 1, \ldots, n_2$.

Do mesmo modo é possível obter $n_3 > n_2$ e escalares $\beta'_{n_2+1}, \ldots, \beta'_{n_3}$ tais que $| \beta'_i | \leq 1$ para $n_2 + 1 \leq i \leq n_3$ e $\| \sum_{n=1}^{n_3} \beta'_n \alpha_n x_n \| \geq 1 + \sum_{n=1}^{n_2} \| \alpha_n x_n \|$. E assim $\| \sum_{n=n_2+1}^{n_3} \beta'_n \alpha_n x_n \| \geq 1$. Seja $\gamma_n = \beta'_n$ para $n = n_2 + 1, \ldots, n_3$.

Prosseguindo dessa forma, obtemos indutivamente $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ e $(\gamma_n)_n$ tais que $|\, \gamma_n \,| \leq 1$ e $\| \sum_{n=n_i+1}^{n_{i+1}} \gamma_n \alpha_n x_n \| \geq 1$.

A seqüência de somas parciais da série $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \alpha_n x_n$ não é de Cauchy, portanto a série $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \alpha_n x_n$ não converge, uma contradição, pois por hipótese $(x_n)_n$ é uma base incondicional para E.

Teorema 1.3.21. *Seja $(x_n)_n$ uma base de Schauder incondicional para um espaço de Banach E. Então $\| \cdot \|_{(bmu)}$ é uma norma equivalente à norma original de E, e*

$$\| x \| \leq \| x \|_{(x_n)} \leq \| x \|_{(bmu)}, \textit{ para cada } x \textit{ em } E.$$

Demonstração: Seja $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ em E. Do teorema 1.3.15, temos que $\| x \| \leq \| x \|_{(x_n)}$.

Dado $m \in I\!N$, considere $\beta_n = 1$ para $n = 1, \ldots, m$ e $\beta_n = 0$ para $n > m$. Então, $(\beta_n)_n \in S_{\ell_\infty}$ e

$$\| \sum_{n=1}^{m} \alpha_n x_n \| = \| \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \alpha_n x_n \| \leq sup\{\| \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \alpha_n x_n \| \;\; (\beta_n)_n \in S_{\ell_\infty}\} \leq \| x_n \|_{(bmu)}$$

Logo, $\sup_m \| \sum_{n=1}^{m} \alpha_n x_n \| \leq \| x \|_{(bmu)}$. E portanto $\| x \|_{(x_n)} \leq \| x \|_{(bmu)}$

Temos que $Id : (E, \| \cdot \|_{(bmu)}) \rightarrow (E, \| \cdot \|)$ é um operador linear, contínuo e bijetor. Vamos mostrar que $(E, \| \cdot \|_{(bmu)})$ é um espaço de Banach, então pelo teorema da aplicação aberta, teorema 1.1.9, teremos que as normas $\| \cdot \|$ e $\| \cdot \|_{(bmu)}$ são equivalentes.

Seja $(y_j)_j = (\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{n,j} x_n)_j$ uma seqüência de Cauchy em E com relação à norma $\| \cdot \|_{(bmu)}$. Então $(y_j)_j$ é também uma seqüência de Cauchy em $(E, \| \cdot \|)$, portanto $y_j \xrightarrow{\|\cdot\|} x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n \in E$. Vamos mostrar que $y_j \rightarrow x$ em $(E, \| \cdot \|_{(bmu)})$.

Seja $(x'_n)_n$ a seqüência de coeficientes funcionais associada a $(x_n)_n$. Para cada $n \in I\!N$ temos que x'_n é contínuo, então $x'_n(y_j) \xrightarrow{j} x'_n(x)$, logo $\alpha_{nj} \rightarrow \alpha_n$. Seja C a constante básica de $(x_n)_n$. Dado $\epsilon > 0$ é possível obter $j_\epsilon \in I\!N$ tal que $j, j' \geq j_\epsilon \Rightarrow \| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{n,j'} x_n - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{n,j} x_n \|_{(bmu)} \leq \epsilon / C$.

Dados $m \in I\!N$, $(\beta_n)_n \in S_{\ell_\infty}$ e $j, j' \geq j_\epsilon$, temos que

$$\| \sum_{n=1}^{m} \beta_n \alpha_{n,j'} x_n - \sum_{n=1}^{m} \beta_n \alpha_{n,j} x_n \| \leq C \| \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \alpha_{n,j'} x_n - \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \alpha_{n,j} x_n \| \leq$$

$$\leq C \parallel \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{n,j'} x_n - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{n,j} x_n \parallel_{(bmu)} \leq \frac{C\epsilon}{C} = \epsilon.$$

Assim $\parallel \sum_{n=1}^{m} \beta_n \alpha_n x_n - \sum_{n=1}^{m} \beta_n \alpha_{n,j} x_n \parallel \leq \epsilon$ para todo $m \in I\!N$, $\forall \beta_n \in S_{\ell_\infty}$, $\forall j \geq j_\epsilon$.

Fazendo $m \to \infty$, temos que $\parallel \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \alpha_n x_n - \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \alpha_{n,j} x_n \parallel \leq \epsilon, \forall \beta_n \in S_{\ell_\infty}$, $\forall j \geq j_\epsilon$. Então para todo $j \geq j_\epsilon$, temos que $\parallel \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{n,j} x_n \parallel_{(bmu)} \leq \epsilon$, ou seja, $\parallel x - y_j \parallel_{(bmu)} \leq \epsilon$. Assim $(E, \parallel . \parallel_{(bmu)})$ é um espaço de Banach. ∎

Definição 1.3.22. *Seja $(x_n)_n$ uma base de Schauder incondicional para um espaço de Banach E. Então definimos a norma incondicional relativa à base $(x_n)_n$, e escrevemos $\parallel \cdot \parallel_{(u)}$, por*

$$\parallel x \parallel_{(u)} = \sup\{\parallel \sum_{n \epsilon A} \alpha_n x_n \parallel : A \text{ é um subconjunto finito de } I\!N\}$$

para cada $x = \sum \alpha_n x_n$ em E.

Teorema 1.3.23. *Seja $(x_n)_n$ uma base de Schauder incondicional para um espaço de Banach E. Então $\parallel . \parallel_u$ é uma norma equivalente à norma original de E, e*

$$\parallel x \parallel \leq \parallel x \parallel_{(x_n)} \leq \parallel x \parallel_{(u)} \leq \parallel x \parallel_{(bmu)}, \text{ para cada } x \text{ em } E.$$

Demonstração: Vamos mostrar que $\parallel x \parallel \leq \parallel x \parallel_{(x_n)} \leq \parallel x \parallel_{(u)} \leq \parallel x \parallel_{(bmu)}$, para cada x em E. Do teorema 1.3.15, temos que $\parallel x \parallel \leq \parallel x \parallel_{(x_n)}$, para cada x em E.

Para cada $x = \sum \alpha_n x_n$ em E temos que:
para cada $m \in I\!N$, $\{1, \ldots, m\}$ é um subconjunto finito de $I\!N$, então,

$$\parallel \sum_{n=1}^{m} \alpha_n x_n \parallel \leq \parallel \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n \parallel_{(u)}$$

Logo,

$$\sup_m \parallel \sum_{n=1}^{m} \alpha_n x_n \parallel \leq \parallel \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n \parallel_{(u)} .$$

E portanto $\parallel x \parallel_{(x_n)} \leq \parallel x \parallel_{(u)}$.

Para cada subconjunto finito $A \subset I\!N$, considere $\beta_n = 1$ para $n \in A$ e $\beta_n = 0$ para $n \notin A$. Então, $(\beta_n)_n \, \epsilon \, S_{\ell_\infty}$ e

$$\| \sum_{n \epsilon A} \alpha_n x_n \| = \| \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \alpha_n x_n \| \leq \| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n \|_{(bmu)}$$

Logo,

$$\sup\{\| \sum_{n \epsilon A} \alpha_n x_n \|: A \text{ é um subconjunto finito de } I\!N\} = \| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n \|_{(u)} \leq \| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n \|_{(bmu)} .$$

E portanto $\| x \|_{(u)} \leq \| x \|_{(bmu)}$.

Assim temos que $\| x \| \leq \| x \|_{(x_n)} \leq \| x \|_{(u)} \leq \| x \|_{(bmu)}$, para cada $x \in E$.

Segue do teorema 1.3.21 que a norma $\| x \|_{(u)}$ é equivalente à norma original de E. ■

Definição 1.3.24. *(Bases equivalentes)*

Sejam E, F espaços de Banach, e $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ bases de Schauder de E e F, respectivamente. As bases $(x_n)_n$ e $(y_n)_n$ são ditas equivalentes se, para toda seqüência $(\alpha_n)_n$ de escalares a série $\sum \alpha_n x_n$ converge em E se , e somente se, a série $\sum \alpha_n y_n$ converge em F.

A equivalência entre as bases garante isomorfismo entre os respectivos espaços de Banach.

Proposição 1.3.25. *Sejam E e F espaços de Banach, e $(x_n)_n$ e $(y_n)_n$ bases de Schauder de E e F, respectivamente. Então as bases $(x_n)_n$ e $(y_n)_n$ são equivalentes se, e somente se, existe um isomorfismo $T : E \rightarrow F$ tal que $T(x_n) = y_n$ para cada $n \in I\!N$.*

Demonstração: É claro que se existe um isomorfismo $T : E \rightarrow F$ tal que $T(x_n) = y_n$ para cada $n \in I\!N$, então $(x_n)_n$ e $(y_n)_n$ são equivalentes.

Reciprocamente, suponhamos que $(x_n)_n$ e $(y_n)_n$ são equivalentes. Seja $T : E \rightarrow F$ um operador definido por $T(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n y_n$ para cada $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ em E. Como $(x_n)_n$ e $(y_n)_n$ são equivalentes, é imediato que: T está bem definida, é linear, bijetora e $T(x_n) = y_n$, para todo $n \in I\!N$.

Vamos mostrar que T é contínua. Consideremos $G_T = \{(x, Tx), \ x \epsilon E\} \subset E \times F$. Seja $(a_k, b_k) \subset G_T$ tal que $(a_k, b_k) \rightarrow (a, b) \in E \times F$ quando $k \rightarrow \infty$. Então,

$$a_k = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{(k)} x_n \rightarrow a = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n \text{ em } E, \text{ quando } k \rightarrow \infty \text{ e}$$

$$b_k = T(a_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{(k)} y_n \rightarrow = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n y_n = b \text{ em } F, \text{ quando } k \rightarrow \infty.$$

Para cada $n \in I\!N$, o coeficiente funcional x'_n é contínuo, $x'_n(a_k) = \alpha_n^{(k)} \rightarrow \alpha_n = x'_n(a)$, quando $k \rightarrow \infty$, e como y'_n é contínuo, $y'_n(b_k) = \alpha_n^{(k)} \rightarrow \beta_n = y'_n(b)$, quando $k \rightarrow \infty$. Pela unicidade do limite, $\alpha_n = \beta_n$, para todo $n \in I\!N$. Logo $b = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n y_n = T(a)$ e $(a, b) \in G_T$.

Segue do Teorema do Gráfico Fechado (teorema 1.1.10), que T é contínua e do teorema da Aplicação Aberta (teorema 1.1.9), que T é um isomorfismo. ∎

Terminamos esta seção apresentando resultados de seqüências básicas e seqüências de blocos que utilizaremos no capítulo 3.

Teorema 1.3.26. *Sejam E um espaço de Banach e $(x_n)_n$ uma seqüência em E. Se $(x_n)_n$ converge fracamente a zero mas não converge a zero em norma, então $(x_n)_n$ admite uma subseqüência que é uma seqüência básica.*

Demonstração: Ver por exemplo Megginson [16], pág. 364, teorema 4.1.32. ∎

Definição 1.3.27. *Sejam E um espaço de Banach, $(x_n)_n$ uma base de Schauder para E e $(y_n)_n$ uma seqüência de vetores não nulos de E. Dizemos que $(y_n)_n$ é uma seqüência de blocos de $(x_n)_n$ se cada y_n pode ser escrito na forma*

$$y_n = \sum_{k=p_n}^{q_n} \alpha_k x_k$$

com $p_1 \leq q_1 < p_2 \leq q_2 < p_3 \leq q_3 < \ldots$ e $(\alpha_k)_k$ uma seqüência de escalares.

Teorema 1.3.28. *Sejam $E = c_0$ ou ℓ_p, com $1 \leq p < \infty$ e $(e_n)_n$ a base canônica de E. Se $(x_n)_n$ é uma seqüência de blocos de $(e_n)_n$, então $(\| x_n \|^{-1} x_n)_n$ é uma seqüência básica equivalente à $(e_n)_n$ e $\overline{[x_n : n \in I\!N]}$ é isomorfo a E.*

Demonstração: Ver por exemplo Lindenstrauss, Tzafriri [14], pág. 53, teorema 2.a.1. ∎

Teorema 1.3.29 (Princípio de Seleção de Bessaga-Pelczynski). *Sejam E um espaço de Banach, $(x_n)_n$ uma base de Schauder para E e $(x'_n)_n$ a seqüência de coeficientes* *funcionais associada à* $(x_n)_n$. *Seja* $(y_n)_n$ *uma seqüência em* E *tal que* $\lim_m x'_n y_m = 0$ *para cada* n, *mas* $(y_n)_n$ *não converge a zero em norma. Então existe uma subseqüência de* $(y_n)_n$ *que é uma seqüência básica equivalente a uma seqüência de blocos de* $(x_n)_n$.

Demonstração: Ver por exemplo Megginson [16], pág. 396, teorema 4.3.19. ■

1.4 Operadores compactos

No que segue apresentamos a definição de operadores compactos e resultados sobre os mesmos que utilizaremos no decorrer desta dissertação.

Definição 1.4.1. *(Operadores Compactos) Sejam* E *e* F *espaços de Banach. Um operador linear* $T : E \to F$ *é dito compacto se para todo subconjunto* B *limitado de* E, $T(B)$ *é um subconjunto relativamente compacto de* F.

O conjunto dos operadores compactos de E em F será denotado por $K(E, F)$. No que segue vamos mostrar que $K(E, F)$ é um subconjunto de $L(E, F)$.

Proposição 1.4.2. *Sejam* E *e* F *espaços de Banach, e* $T : E \to F$ *um operador linear compacto. Então* T *é contínuo.*

Demonstração: Se T é compacto, então $T(B_E)$ é relativamente compacto, logo $\overline{T(B_E)}$ é um subconjunto limitado em F. Assim $\sup\{\| Tx \| : \| x \| = 1\} < \infty$ e conseqüentemente T é contínuo. ■

Não é difícil mostrar que $K(E, F)$ é um subespaço de $L(E, F)$.

Proposição 1.4.3. *Se* E *é um espaço de Banach, então o operador identidade definido em* E *é compacto se, e somente se,* E *tem dimensão finita.*

Demonstração: Sabemos que B_E é compacta se, e somente se, $dimE < \infty$. Assim, $Id(B_E) = B_E$ é relativamente compacto se, e somente se, $dimE < \infty$. Logo, o operador identidade definido em E é compacto se, e somente se, E tem dimensão finita. ■

Proposição 1.4.4. *Sejam* E *e* F *espaços de Banach e* $T : E \to F$ *um operador linear de posto finito. Então* T *é compacto se, e somente se, é contínuo.*

Demonstração: Se T é compacto então pela proposição 1.4.2 segue que T é contínuo. Agora, se T é contínuo, então $T(B_E)$ é um subconjunto limitado de $T(E)$. Agora, como T tem posto finito, $dim T(E) < \infty$, logo $T(B_E)$ é relativamente compacto e conseqüentemente T é compacto. ■

Lembramos que um subconjunto S de um espaço métrico é totalmente limitado se para todo $\epsilon > 0$ é possível cobrir S por um número finito de bolas abertas de raio ϵ e centro em S. Lembramos também que um subconjunto S de um espaço topológico X é seqüencialmente compacto se toda seqüência em S admite uma subseqüência que converge para um ponto de X. Sabemos da teoria de espaços métricos que um subconjunto de um espaço métrico completo é relativamente compacto se, e somente se, é totalmente limitado se, e somente se, é seqüencialmente compacto. (Por exemplo, ver Dunford e Schwartz [8], pag. 22, teorema 15). Com isto temos a seguinte caracterização de operadores compactos.

Proposição 1.4.5. *Sejam E e F espaços de Banach, e $T : E \to F$ um operador linear. Então são equivalentes:*

(a) T é compacto.

(b) $T(B_E)$ é um subconjunto relativamente compacto de F.

(c) Para todo subconjunto B limitado de E, $T(B)$ é um subconjunto totalmente limitado de F.

(d) Toda seqüência limitada $(x_n)_n$ em E admite uma subseqüência $(x_{n_j})_j$ tal que $(Tx_{n_j})_j$ é convergente.

Se E e F são espaços de Banach então $K(E,F)$ é um subespaço fechado de $L(E,F)$, como mostra a seguinte proposição.

Proposição 1.4.6. *Sejam E e F espaços de Banach, e $(T_n)_n$ uma seqüência de operadores lineares compactos de E em F que converge para algum T em $L(E,F)$. Então T é compacto.*

Demonstração: Suponhamos que $(T_n)_n$ é uma seqüência de operadores lineares compactos de E em F que converge para algum T em $L(E,F)$. Dado $\epsilon > 0$ existe $n \in I\!N$ tal que $\| T_n - T \| < \epsilon/3$. Como T_n é compacto, existem $x_1, \ldots, x_m \in B_E$ tais que dado $x \in B_E$, existe x_i tal que $\| T_n x - T_n x_i \| < \epsilon/3$. Segue que dado x em B_E existe x_i tal que

$\| Tx - Tx_i \| \leq \| Tx - T_n x \| + \| T_n x - T_n x_i \| + \| T_n x_i - Tx_i \| < \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon.$
Portanto $T(B_E)$ é totalmente limitado e logo T é compacto. ■

Exemplo 1.4.7. *O operador linear $T : \ell_2 \to \ell_2$ definido por $T(\xi) = (\xi_1,\ \xi_2/2,\ \ldots,\ \xi_n/n,\ \ldots)$, para cada $\xi = (\xi_j)_j$ em ℓ_2, é compacto.*

Para demonstrar isto, para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $T_n : \ell_2 \to \ell_2$ um operador linear dado por $T_n(\xi) = (\xi_1,\ \xi_2/2,\ \ldots,\ \xi_n/n, 0, 0, \ldots)$ para cada $\xi = (\xi_j)_j$ em ℓ_2.
Para cada n, T_n é contínuo e de posto finito, logo compacto. Além disto, para cada $\xi = (\xi_j)_j \in \ell_2$

$$\| (T - T_n)(\xi) \|^2 = \sum_{j=n+1}^{\infty} | \xi_j / j |^2 = \sum_{j=n+1}^{\infty} 1/j^2 \, | \xi_j |^2 \leq$$

$$\leq \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{j=n+1}^{\infty} | \xi_j |^2 \leq \| \xi \|^2 / (n+1)^2$$

Logo

$$\| T - T_n \| = sup\{ \| (T - T_n)(\xi) \| : \| \xi \| \leq 1 \} \leq 1/(n+1)$$

Assim $T_n \to T$, e portanto T é compacto.

Observação 1.4.8. *Observemos que a proposição anterior não é verdadeira para convergência pontual. Por exemplo, para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $T_n : \ell_2 \to \ell_2$ o operador linear dado por $T_n(\xi) = (\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n, 0, 0, \ldots)$ para cada $\xi = (\xi_j)_j$ em ℓ_2.*
Para cada n, T_n é contínuo e de posto finito, logo compacto. Além disto, é claro que $T_n(x) \to Id(x)$, mas $Id : \ell_2 \to \ell_2$ não é compacto pois dimensão$(\ell_2) = \infty$.

A seguinte caracterização é um dos resultados importantes da teoria de operadores compactos que será utilizada nos capítulos 2 e 3. Apresentamos aqui a demonstração que encontra-se em Goldberg [10].

Teorema 1.4.9 (Teorema de Schauder). *Um operador linear contínuo $T : E \to F$ entre espaços de Banach é compacto se, e somente se, seu adjunto T^* é compacto.*

Demonstração: Se T é compacto, então dado $\epsilon > 0$, existem $x_1, \ldots, x_n \in B_E$ tais que para cada $x \in B_E$ existe x_i tal que

$$\| Tx - Tx_i \| < \epsilon/3. \tag{1.2}$$

Seja $A : F' \to I\!K^n$ dado por:

$$Ay' = (y'(Tx_1), \ldots, y'(Tx_n)).$$

A é linear, contínuo em $I\!K^n$. Portanto A é compacto. Logo existem $y'_1, \ldots, y'_m \in B_{F'}$ tal que para cada $y' \in B_{F'}$ existe y'_j tal que

$$\| Ay' - Ay'_j \| < \epsilon/3.$$

Mas como

$$\| Ay' - Ay'_j \| = \| A(y' - y'_j) \| = \| (y' - y'_j)(Tx_1), \ldots, (y' - y'_j)(Tx_n) \| =$$

$$= (\sum_{i=1}^{n} | (y' - y'_j)(Tx_n) |^2)^{1/2},$$

em particular

$$| y'(Tx_i) - y'_j(Tx_i) | < \epsilon/3, \ para \ 1 \leq i \leq n. \tag{1.3}$$

De 1.2 e 1.3, e observando-se que y' e $y'_j \in B_{F'}$, temos que para cada $x \in B_E$ e para cada $y' \in B_{F'}$

$$| T^*y'x - T^*y'_jx | \leq | y'Tx - y'Tx_i | + | y'Tx_i - y'_jTx_i | + | y'_jTx_i - y'_jTx | \leq$$

$$\leq | y'(Tx - Tx_i) | + | y'(Tx_i) - y'_j(Tx_i) | + | y'_j(Tx_i - Tx) | \leq$$

$$\leq \| y' \| \| Tx - Tx_i \| + \epsilon/3 + \| y'_j \| \| Tx_i - Tx \| < \epsilon.$$

Logo $\| T^*y' - T^*y'_j \| \leq \epsilon$ e portanto T^* é compacto.

Por outro lado, se T^* é compacto, então pela primeira parte dessa demonstração, T^{**} é compacto. Sejam $C_E : E \to E''$ *e* $C_F : F \to F''$ as inclusões naturais de E em E'' e F em F'' respectivamente. Pela proposição 1.1.8, $C_F{}^{-1}T^{**}C_E = T$, como T^{**} é compacto, C_E e $C_F{}^{-1}$ são contínuas, segue que T é compacto. ■

A seguir apresentamos dois resultados que encontram-se em Goldberg [10]. Neste, os resultados são enunciados para espaços normados, mas em acordo com o contexto desta dissertação os enunciamos para espaços de Banach. O lema 1.4.10 será utilizado no demonstração do teorema 1.4.11. Utilizaremos este último para demostrar que alguns operadores que construímos no capítulo 2 são compactos.

Lema 1.4.10. *Sejam S um subconjunto limitado de um espaço de Banach E e $x'_1, ..., x'_n \in E'$. Então dado $\epsilon > 0$ existem $x_1, ..., x_m$ em S tais que dado x em S, podemos escolher x_k tal que $| x'_i x \; - \; x'_i x_k | < \epsilon$, para $1 \leq i \leq n$.*

Demonstração: A aplicação $A : E \to I\!\!K^n$ definida por $A(x) = (x'_1 x, x'_2 x, ..., x'_n x)$ é linear e contínua, logo compacta pela proposição 1.4.4. Então existem $x_1, x_2, ..., x_m$ em S tais que dado x em S existe x_k tal que $\| Ax \; - \; Ax_k \| < \epsilon$.

Como $| x'_i x \; - \; x'_i x_k | \leq \| Ax \; - \; Ax_k \|$, para $1 \leq i \leq n$, segue o resultado. ■

Teorema 1.4.11. *Sejam E e F espaços de Banach, e $T : E \to F$ um operador linear contínuo. Se para todo $\epsilon > 0$ existe um subespaço fechado N de E, de codimensão finita em E, tal que $\| T|_N \| \leq \epsilon$ então T é compacto.*

Demonstração: Dado $\epsilon > 0$, por hipótese, existe N subespaço fechado de codimensão finita de E, tal que $\| T|_N \| \leq \epsilon$. Logo, pelo teorema 1.1.17 existem $v_1, v_2, ..., v_n$ em E tais que

$$E \; = \; N \oplus [v_1, ..., v_n]$$

Segue que existem $x'_1, x'_2, ..., x'_n$ em E' tais que todo x em E tem uma única representação da forma:

$$x \; = \; u \; + \; \sum_{i=1}^{n} x'_i(x) v_i, \quad u \text{ em } N \tag{1.4}$$

com $\sum_{i=1}^{n} x'_i(x) v_i$, a projeção de E sobre $[v_1, ..., v_n]$

Como $\| T|_N \| \leq \epsilon$, segue que:

$$\| Tx \| \leq \epsilon \| u \| \; + \; \sum_{i=1}^{n} | x'_i(x) | \, \| Tv_i \| \, . \tag{1.5}$$

De 1.4,

$$\| u \| \leq \| x \| + \sum_{i=1}^{n} | x_i'(x) | \| v_i \| \tag{1.6}$$

De 1.5 e 1.6 e tomando-se $K = \max\{\| Tv_i \|, \| v_i \| : 1 \leq i \leq n\}$, segue que

$$\| Tx \| \leq \epsilon \| x \| + \epsilon K \sum_{i=1}^{n} | x_i'(x) | + K \sum_{i=1}^{n} | x_i'(x) |, \tag{1.7}$$

para cada x em E.

Dado $\eta > 0$, pelo lema 1.4.10, existem $x_1, x_2, ..., x_m$ em B_E tais que dado v em B_E, existe x_k tal que

$$\sum_{i=1}^{n} | x_i'v - x_i'x_k | \leq \eta.$$

Substituindo-se x por $v - x_k$ em 1.7 e observando-se que $\| v - x_k \| \leq 2$, temos que

$$\| Tv - Tx_k \| \leq 2\epsilon + \epsilon K\eta + K\eta.$$

Como $\epsilon > 0$ e $\eta > 0$ são arbitrários, segue que $T(B_E)$ é totalmente limitado, e logo T é compacto. ∎

Teorema 1.4.12. *Sejam E e F espaços de Banach, e $T \in L(E, F)$. Então $T \in K(E, F)$ se, e somente se, existem M um subespaço fechado de c_0, $S \in K(E, M)$ e $R \in K(M, F)$ tais que $T = R \circ S$.*

Demonstração: Ver Aliprantis [1], pág. 269, teorema 16.5. ∎

Na próxima seção utilizaremos a seguinte proposição para mostrar que nem sempre $K(E, E)$ é complementado em $L(E, E)$.

Proposição 1.4.13. *Seja E um espaço de Banach com base de Schauder. Se E' é separável, então $K(E, E)$ é separável.*

Demonstração: Ver [9], pág. 205, proposição 7.5. ∎

Definição 1.4.14. *(Operadores completamente contínuos)*

Sejam E e F espaços de Banach, e $T : E \to F$ um operador linear contínuo. Dizemos que T é completamente contínuo se para cada seqüência $(x_n)_n$ em E tal que $x_n \xrightarrow{\omega} x$ para algum x em E temos que $Tx_n \to Tx$.

Proposição 1.4.15. *Sejam E e F espaços de Banach, e $T : E \to F$ um operador linear. Se T é compacto, então T é completamente contínuo.*

Demonstração: Seja $(x_n)_n$ uma seqüência em E tal que $x_n \xrightarrow{\omega} x$ para algum x em E. Então, pelo teorema 1.2.10, $Tx_n \xrightarrow{\omega} Tx$. Suponhamos que $Tx_n \not\to Tx$.

Então existe $(Tx_{nk})_k$ tal que $\| Tx_{nk} - Tx \| \geq \epsilon$ para algum $\epsilon > 0$ e para todo $k \in I\!K$. Como $(x_n)_n$ é fracamente convergente, pela proposição 1.2.9, $(x_n)_n$ é limitada. Então, como T é um operador compacto, existe uma subseqüência convergente $T(x_{nkl})_l$. Suponhamos que $Tx_{nkl} \to y$. Então $Tx_{nkl} \xrightarrow{\omega} y$. Logo $y = Tx$. Portanto $\| Tx_{nkl} - Tx \| \to 0$, uma contradição. ∎

No capítulo 3, utilizamos alguns resultados de operadores compactos em espaços de Hilbert. Apresentamos agora estes resultados, aqui, H e K denotarão espaços de Hilbert e $< \cdot, \cdot >$ denotará um produto interno.

Definição 1.4.16. *Seja H um espaço de Hilbert. Um subconjunto $\{h_j,\ j \in J\}$ de H é dito ortonormal se $\| h_j \| = 1$ para todo j e $< h_j, h_i > = 0$ para todo $i \neq j$.*

Definição 1.4.17. *Sejam H um espaço de Hilbert e $\{h_j,\ j \in J\}$ um subconjunto ortonormal em H. Se o subespaço gerado pela família $\{h_j,\ j \in J\}$ é denso em H então $\{h_j,\ j \in J\}$ é dito completo e cada $x \in H$ é da forma $x = \sum_j \alpha_j h_j$ com $\sum_j | \alpha_j |^2 < \infty$.*

Proposição 1.4.18. *Seja H um espaço de Hilbert. Então todo conjunto ortonormal em H pode ser estendido a um subconjunto ortonormal completo.*

Demonstração: Ver Pedersen [17], pág. 83, proposição 3.1.12. ∎

Proposição 1.4.19. *Seja H um espaço de Hilbert separável de dimensão infinita. Então H é isométrico a ℓ_2.*

Demonstração: Ver Retherford [22], pág.25. ∎

Teorema 1.4.20 (Teorema da Representação de Riesz). *Sejam H um espaço de Hilbert e $f \in H'$. Então existe um único $z \in H$ tal que $f(x) = < x, z >$ para todo $x \in H$.*

Demonstração: Se $f = 0$ então o resultado é válido tomando $z = 0$. Assim podemos supor que $f \neq 0$. Seja $M = ker f$. Então M é um subespaço fechado de H, e como $f \neq 0$, $M \neq H$, logo $M^{\perp} \neq \{0\}$. Portanto existe $z_0 \in M^{\perp}$, $z_0 \neq 0$.

Dado $x \in H$, tomemos $z = f(x)z_0 - f(z_0)x$. Temos que $f(z) = 0$, logo $z \in M$. Assim, temos que $0 =< z, z_0 >=< f(x)z_0 - f(z_0)x, z_0 >= f(x) < z_0, z_0 > -f(z_0) < x, z_0 >$. Observando que $< z_0, z_0 >=\| z_0 \|^2 \neq 0$, segue que

$$f(x) = \frac{f(z_0)}{\| z_0 \|^2} < x, z_0 > .$$

Tomando $z = \overline{\frac{f(z_0)}{\|z_0\|^2}} z_0$, temos que $f(x) =< x, z >$.

Vamos agora mostrar que z é único. Suponhamos então que existe $z' \in H$ tal que $f(x) =< x, z >=< x, z' >$ para todo $x \in H$. Então $< x, z - z' >= 0$ para todo $x \in H$. Em particular, para $x = z - z'$, temos que $< z - z', z - z' >=\| z - z' \|^2 = 0$. Logo $z = z'$. Portanto z é único. ■

Se H é um espaço de Hilbert, denotaremos por $l_2^{\omega}(H)$ o espaço de todas as seqüências $(x_n)_n$ de H tais que para todo $f \in H'$ temos que $\sum_{n=1}^{\infty} | f(x_n) |^2 < \infty$.

Lema 1.4.21. *Sejam H um espaço de Hilbert e $(h_n)_n$ uma seqüência ortonormal em H. Então $(h_n)_n \in l_2^{\omega}(H)$.*

Demonstração: Seja $(h_n)_n$ uma seqüência ortonormal em H. Vamos mostrar que $\sum_n | f(h_n) |^2 < \infty$ para cada $f \in H'$.

Pelo teorema da representação de Riesz (teorema 1.4.20), temos que para cada $f \in H'$, existe um único $y \in H$ tal que $f(h_n) =< h_n, y >$, para todo $n \in I\!N$. Assim $\sum_n | f(h_n) |^2 = \sum_n |< h_n, y >|^2$.

Pela proposição 1.4.18 $(h_n)_n$ pode ser estendida uma uma seqüência ortonormal completa $(h_\alpha)_\alpha$ com $\sum_\alpha |< h_\alpha, y >|^2 < \infty$. Como $\sum_n |< h_n, y >|^2 < \sum_\alpha |< h_\alpha, y >|^2$, segue que $\sum_n | f(h_n) |^2 < \infty$, para cada $f \in H'$. Portanto $(h_n)_n \in l_2^{\omega}(H)$, e conseqüentemente $(h_n)_n$ converge fracamente a zero. ■

Se H e K são espaços de Hilbert e $T : H \to K$ é um operador linear contínuo tal que $\lim_n \| Th_n \| = 0$ para toda seqüência ortonormal $(h_n)_n$ em H, então T é compacto.

Este resultado será utilizado no capítulo 3. No que segue apresentamos este resultado precedido de um lema que será utilizado em sua demonstração.

Se $T : H \to K$ é um operador linear contínuo entre espaços de Hilbert, denotaremos por $T^\times : K \to H$ o operador adjunto de Hilbert de T tal que $< Tx, y > = < x, T^\times y >$ para todo $x \in H$ e $y \in K$. Um operador linear contínuo $T : H \to H$, com H um espaço de Hilbert, é dito auto-adjunto se $T^\times = T$.

Lema 1.4.22. *Sejam H um espaço de Hilbert e $Q \in L(H, H)$ uma projeção ortogonal sobre um subespaço fechado $M \subset H$. Então Q é um operador auto-adjunto.*

Demonstração: Sendo M um subespaço fechado de H, temos que $H = M \oplus M^\perp$, com $M^\perp = \{n \in H :< n, m >= 0,\ \textit{para todo } m \textit{ em } M\}$. Como Q é uma projeção de H sobre M, temos que $kerQ = M^\perp$.

Para todos x, $y \in H$, $x = m + n$ e $y = m_1 + n_1$, com $m, m_1 \in M$ e $n, n_1 \in M^\perp$, podemos escrever:

$$< Qx, y > = < m, m_1 + n_1 > = < m, m_1 > =$$

$$= < m, m_1 > + < n, m_1 > = < m + n, m_1 > = < x, Qy > = < Q^\times(x), y > .$$

Logo para todos x, $y \in H$ temos que $< (Q - Q^\times)(x), y > = 0$. Tomando-se $y = (Q - Q^\times)(x)$ segue que para todo $x \in H$, $< (Q - Q^\times)(x), (Q - Q^\times)(x) > = 0$ e conseqüentemente $Q^\times = Q$. ■

Proposição 1.4.23. *Sejam H e K espaços de Hilbert, e $T : H \to K$ um operador linear contínuo. Então T é compacto se, e somente se, $\lim_n \| Th_n \| = 0$ para toda seqüência ortonormal $(h_n)_n$ em H.*

Demonstração: Seja $(h_n)_n$ uma seqüência ortonormal em H. Pelo lema 1.4.21, $(h_n)_n$ converge fracamente a zero. Se T é compacto então, pela proposição 1.4.15, T é completamente contínuo. Segue que $\lim_n \| Th_n \| = 0$.

Para a recíproca, mostraremos que se $T : H \to K$ é um operador linear não compacto então $\lim_n \| Th_n \| > 0$ para alguma seqüência ortonormal $(h_n)_n$ em H.

Vamos definir uma seqüência $(h_n)_n$ indutivamente.

Sendo T um operador linear não compacto, T não é limite de qualquer seqüência de operadores de posto finito. Assim, existe $\eta > 0$ tal que $\| T - P \| > \eta$ para cada operador P com posto finito. Em particular, $\| T \| > \eta$ (basta tomar P como o operador nulo). Pela definição de norma, existe $h_1 \in H$, $\| h_1 \| = 1$ tal que $\| Th_1 \| > \eta$.

Suponhamos que já estejam definidos os elementos $h_1, \ldots, h_m \in H$, $\| h_i \| = 1$, com $\| Th_i \| > \eta$ e $< h_i, h_j > = \delta_{i,j}$ para $i, j = 1, \ldots, m$, para algum $m \geq 1$. Denotemos por Q a projeção ortogonal de H sobre o espaço $E_m = [h_1, \ldots, h_m]$. Consideremos $P = T \circ Q$. Então, P é linear e de posto finito, donde segue que $\| T - P \| > \eta$. Escolhamos assim $h \in H$ tal que $\| h \| = 1$ e $\| (T - P)h \| > \eta > 0$. Temos $Th \neq Ph$, donde $Qh - h \neq 0$. Consideremos $h_{m+1} = \| h - Qh \|^{-1} (h - Qh)$. Temos que $\| h_{m+1} \| = 1$ e ainda temos que $Th_{m+1} = \| h - Qh \|^{-1} (Th - T \circ Qh) = \| h - Qh \|^{-1} (T - P)h$.

Como $\| h \| = 1$ e Q é uma projeção ortogonal, segue que $\| h - Qh \| \leq \| h \| = 1$, logo $\| Th_{m+1} \| = \| h - Qh \|^{-1} \| (T - P)h \| > 1.\eta > \eta$. Portanto, como $Qh_{m+1} = 0$, segue que h_{m+1} é ortogonal a todo elemento da imagem de Q.

De fato, se $y \in ImQ$, $y = Qx$, $x \in H$ e utilizando o lema 1.4.22 (e observando que $dim(ImQ) < \infty$), temos que:

$$< y, h_{m+1} > \; = \; < Qx, h_{m+1} > \; = \; < x, Q^{\times} h_{m+1} > \; = \; < x, Qh_{m+1} > \; = \; 0.$$

Em particular, temos $< h_{m+1}, h_i > = 0, i = \ldots, m$. Fica então definida a seqüência ortonormal $(h_i)_i$ em H tal que $\lim_n \| Th_n \| > \eta > 0$. ∎

Apresentamos a seguir a definição de Operadores fracamente compactos e somente alguns resultados sobre estes que utilizaremos posteriormente em demonstrações de resultados no capítulo 3.

Definição 1.4.24. *(Operadores fracamente compactos) Um operador linear $T : E \to F$ entre espaços de Banach é fracamente compacto se para todo subconjunto B limitado de E, temos que $T(B)$ é um subconjunto relativamente fracamente compacto de F.*

O conjunto dos operadores fracamente compactos de E em F será denotado por $K^{\omega}(E, F)$. Não é difícil mostrar que $K^{\omega}(E, F)$ é um subespaço de $L(E, F)$.

Segue do teorema de Eberlien-Smulian (teorema 1.2.16), a seguinte proposição.

Proposição 1.4.25. *Sejam E e F espaços de Banach, e $T : E \to F$ um operador linear. Então são equivalentes.*
(a) T é fracamente compacto.
(b) Toda seqüência limitada $(x_n)_n$ em E admite uma subseqüência $(x_{nj})_j$ tal que $(Tx_{nj})_j$ converge fracamente.

Teorema 1.4.26 (Gantmacher). *Um operador linear contínuo entre espaços de Banach é fracamente compacto se, e somente se, seu adjunto é fracamente compacto.*

Demonstração: Ver Megginson [16], pág. 343, teorema 3.5.13. ■

Teorema 1.4.27. *Sejam Ω um espaço de Hausdorff compacto e E um espaço de Banach qualquer tal que $c_0 \not\hookrightarrow E$. Então todo operador linear contínuo de $C(\Omega)$ em E é fracamente compacto.*

Demonstração: Ver Pelczynski [18], pág. 219, teorema 5. ■

1.5 O espaço $K(\ell_2, \ell_2)$

Ao longo dessa dissertação estudamos algumas caracterizações de operadores compactos entre espaços de Banach. Como trabalhamos com espaços que contém cópias isométricas de c_0 e com a noção de subespaços complementados, decidimos por incluir nesta seção exemplo de um espaço formado por operadores compactos que possui cópia de c_0 e não é complementado em $L(\ell_2, \ell_2)$.

Proposição 1.5.1. *O espaço c_0 é isométrico a um subespaço de $K(\ell_2, \ell_2)$.*

Demonstração: Seja φ uma aplicação linear de c_0 em $K(\ell_2, \ell_2)$ dada por $\varphi(a) = T(a)$ para cada $a = (a_i)_i \in c_0$, com $T(a) : \ell_2 \to \ell_2$ dado por $T(a)(x) = (a_i x_i)_i$ para cada $x = (x_i)_i \in \ell_2$.

De

$$(\sum | a_i x_i |^2)^{1/2} = (\sum | a_i |^2 | x_i |^2)^{1/2} \leq \| a \|_\infty (\sum | x_i |^2)^{1/2} = \| a \|_\infty \| x \|_2,$$

temos que o operador $T(a)$ está bem definido e é contínuo com $\| T(a) \| \leq \| a \|_\infty$.

Dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in I\!N$ tal que $| a_{n_0} | > \| a \|_\infty - \epsilon$. Como $T(a)(e_{n_0}) = a_{n_0} e_{n_0}$ e $\| e_{n_0} \| = 1$, segue que

$$\| T(a)(e_{n_0}) \|_2 = | a_{n_0} | > \| a \|_\infty - \epsilon.$$

Fazendo $\epsilon \to 0$, temos que $\| T(a) \| \geq \| a \|_\infty$.

Logo $\| T(a) \| = \| a \|_\infty$ e φ é uma isometria.

Vamos agora mostrar que $T(a)$ é compacto. Para cada $n \in I\!N$, seja $T_n(a) : \ell_2 \to \ell_2$ um operador linear dado por $T_n(a)(x) = (a_1 x_1, a_2 x_2, \dots, a_n x_n, 0, 0, \dots)$ para cada $x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell_2$.

Para cada $n \in I\!N$ e $x = (x_i)_i \in \ell_2$,

$$(\sum_{i=1}^{n} | a_i x_i |^2)^{1/2} = (\sum_{i=1}^{n} | a_i |^2 | x_i |^2)^{1/2} \leq \| a \|_\infty (\sum_{i=1}^{n} | x_i |^2)^{1/2} \leq \| a \|_\infty \| x \|_2,$$

logo temos que o operador $T_n(a)$ está bem definido e é contínuo.

Para cada $n \in I\!N$, $T_n(a)$ é compacto pois é um operador de posto finito. Vamos agora provar que $T(a)$ é compacto.

Dado $\epsilon > 0$, existe $n_1 \in I\!N$ tal que $n \geq n_1 \Rightarrow | a_n | < \epsilon$.

Para $n \geq n_1$,

$$\| (T(a) - T_n(a))(x) \|_2 = \| T(a)(x) - T_n(a)(x) \|_2 =$$

$$= (\sum_{i=n+1}^{\infty} | a_i x_i |^2)^{1/2} \leq \sup_{i>n} | a_i | (\sum | x_i |^2)^{1/2} \leq$$

$$\leq \sup_{i>n} | a_i | \| x \|_2$$

Logo $\| T(a) - T_n(a) \| \leq \sup_{i>n} | a_i | < \epsilon$. Portanto $T(a)$ é compacto. ■

Corolário 1.5.2. *O espaço $K(\ell_2, \ell_2)$ não é reflexivo.*

Demonstração: Pela proposição 1.5.1, c_0 é isométrico a um subespaço de $K(\ell_2, \ell_2)$. Como c_0 não é reflexivo, segue o resultado. ■

Proposição 1.5.3. *O espaço $K(\ell_2, \ell_2)$ não é complementado em $L(\ell_2, \ell_2)$.*

Demonstração: Vamos supor por absurdo que $K(\ell_2, \ell_2)$ seja complementado em $L(\ell_2, \ell_2)$. Ou seja, existe uma projeção $P : L(\ell_2, \ell_2) \to K(\ell_2, \ell_2)$. Vamos mostrar que com tal hipótese podemos exibir uma projeção Q em ℓ_∞ com $ImQ = c_0$, chegando assim num absurdo pelo teorema 1.1.32.

Segue da proposição 1.5.1, que existe um subespaço fechado M de $K(\ell_2, \ell_2)$ isométrico a c_0. Seja $\varphi : c_0 \to M$ tal isometria dada por $\varphi(a) = T(a)$ para cada $a = (a_i)_i \in c_0$, com $T(a) : \ell_2 \to \ell_2$ dado por $T(a)(x) = (a_i x_i)_i$ para cada $x = (x_i)_i \in \ell_2$.

Podemos estender φ para $\tilde{\varphi} : \ell_\infty \to L(\ell_2, \ell_2)$ a aplicação linear contínua dada por $\tilde{\varphi}(a)(x) = T(a)(x) = (a_i x_i)_i$ para cada $a = (a_i)_i \in \ell_\infty$ e cada $x = (x_i)_i \in \ell_2$. Como vimos na proposição 1.1.30, $\tilde{\varphi}$ é uma isometria de ℓ_∞ sobre um subespaço N de $L(\ell_2, \ell_2)$.

Agora, como ℓ_2 é separável, segue da proposição 1.4.13 que $K(\ell_2, \ell_2)$ é separável. Então pelo teorema 1.1.31, M é complementado em $K(\ell_2, \ell_2)$. Logo, obtemos uma projeção linear contínua $R : K(\ell_2, \ell_2) \to M$.

Assim definimos $Q : \ell_\infty \to c_0$ como o operador linear contínuo dado por $Q = \varphi^{-1} \circ R \circ P \circ \tilde{\varphi}$. Afirmamos que Q é sobrejetor e $Q^2 = Q$. De fato, para cada $a \in c_0$, existe $T \in M$ tal que $(\varphi^{-1})(T) = a$. Usando que R é uma projeção de $K(\ell_2, \ell_2)$ sobre M, segue que $R(T) = T$ e como P também é uma projeção de $L(\ell_2, \ell_2)$ sobre $K(\ell_2, \ell_2)$, segue que $P(T) = T$. Agora $\tilde{\varphi}(a) = \varphi(a) = T$. Assim $Q(a) = (\varphi^{-1} \circ R \circ P \circ \tilde{\varphi})(a) = \varphi^{-1} \circ R \circ P(T) = \varphi^{-1}(T) = a$.

Vamos agora provar que $Q^2 = Q$. Para cada $a \in \ell_\infty$, temos que $(\varphi^{-1} \circ R \circ P \circ \tilde{\varphi})(a) \in c_0$, logo $\tilde{\varphi}(\varphi^{-1}(R(P(\tilde{\varphi}(a))))) = \varphi \circ \varphi^{-1} \circ R \circ P(\tilde{\varphi}(a)) = R(P(\tilde{\varphi}(a)))$.

Usando que $R(P(\tilde{\varphi}(a))) \in M \subset K(\ell_2, \ell_2)$, segue que $P(R(P(\tilde{\varphi}(a)))) = R(P(\tilde{\varphi}(a)))$. Assim $Q^2(a) = (\varphi^{-1} \circ R \circ P \circ \tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1} \circ R \circ P \circ \tilde{\varphi})(a) = (\varphi^{-1}(R(R(P(\tilde{\varphi}(a)))))) = (\varphi^{-1}(R(P(\tilde{\varphi}(a))))) = Q(a)$, concluindo assim que Q é uma projeção de ℓ_∞ sobre c_0, um absurdo. $\blacksquare$

Capítulo 2

Uma caracterização de operadores compactos atráves de ℓ_1

O objetivo desse capítulo é apresentar algumas caracterizações dos espaços de Banach F para os quais todos os operadores compactos $T : E \to F$ de um espaço de Banach E em F admitam uma particular representação em séries.

Os resultados que apresentamos foram estudados no texto científico de Randtke [21]. Entre eles o teorema 2.10 prova que, a menos de isomorfismo, ℓ_1 é o único espaço de Banach E tal que todo operador linear compacto $T : F \to E$ tem uma representação da forma $Tx = \sum g_n(x)u_n$, para cada $x \in F$, com F um espaço de Banach, $(u_n)_n$ base normalizada de E e $\sum g_n$ uma série ω^* incondicionalmente convergente no dual topológico F' de F.

Convém ressaltar que alguns dos resultados apresentados no trabalho de Randtke [21] são conseqüências da teoria de Grothendieck para produtos tensoriais (ver Grothendieck [11]). No entanto, as demonstrações apresentadas em [21] são muito mais simples e independem da teoria de produtos tensoriais.

Começamos apresentando dois resultados de Randtke [20] que utilizaremos na demonstração da proposição 2.4. Em [20] estes resultados são enunciados para espaços normados mas, de acordo com o contexto desta dissertação, os enunciamos para espaços de Banach.

Neste capítulo, a menos de menção explícita do contrário, denotaremos por $(e_n)_n$ a base canônica de l_1.

Teorema 2.1. *Sejam E e F espaços de Banach, e $T \in L(E,F)$. Se T é compacto então existe uma seqüência $(x'_n)_n \subset E'$ tal que $\| x'_n \| \to 0$ e $\| T(x) \| \leq \sup_n | x'_n(x) |$ para todo $x \in E$.*

Demonstração: Se T é compacto, então pelo teorema de Schauder (teorema 1.4.9), $T^* : F' \to E'$ também é compacto. Então $\overline{T^*(B_{F'})}$ é compacto em E', logo pelo teorema 1.1.33, existe uma seqüência $(x'_n)_n \subset E'$ tal que $\lim_n \| x'_n \| = 0$ e $\overline{T^*(B_{F'})} \subset \overline{co}((x'_n)_n)$.

Assim, se $T^*(y') \in \overline{T^*(B_{F'})}$, existe $(w_m)_m \in co((x'_n)_n)$ tal que $w_m \to T^*(y')$. Agora, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in I\!N$ tal que $\| T^*(y') - w_{n_0} \| < \epsilon$, isto é, $\| T^*(y') \| < \epsilon + \| w_{n_0} \|$.

Como $w_{n_0} = \sum_{i=1}^{l} \lambda_{w_{n_0},i} x'_i$, com $\sum_{i=1}^{l} \lambda_{w_{n_0},i} = 1$ e $\lambda_{w_{n_0}} \geq 0$, segue que

$$\| T^*(y') \| < \epsilon + \| w_{n_0} \| = \epsilon + \sum_{i=1}^{l} \lambda_{w_{n_0},i} x'_i.$$

Conseqüentemente, para cada $x \in E$,

$$| (T^*(y'))(x) | < \epsilon + | \sum_{i=1}^{l} \lambda_{w_{n_0},i} x'_i(x) | \leq \epsilon + \sum_{i=1}^{l} \lambda_{w_{n_0},i} \; | x'_i(x) | \leq \epsilon + \sup_k | x'_k(x) | .$$

Logo, $| (T^*(y'))(x) | < \epsilon + \sup_i | x'_i(x) |$.

Então para cada $x \in E$, temos que $\| T(x) \| = \sup\{y'(T(x)) : y' \in B_{F'}\} = \sup\{(T^*(y'))(x) : y' \in B_{F'}\} \leq \sup_n | x'_n(x) | + \epsilon$. Como a desigualdade vale para todo $\epsilon > 0$, segue o resultado. ■

Lema 2.2. *Sejam F um espaço de Banach e $T : c_0 \to F$ um operador linear. Se T é compacto, então existe uma seqüência $\lambda = (\lambda_n)_n$ em c_0 tal que, para cada $\mu = (\mu_n)_n$ em c_0,*

$$\| T\mu \| \leq \sup_n \{| \lambda_n |^2 | \mu_n |\}.$$

Demonstração: Se T é compacto, então pelo teorema 2.1 existe uma seqüência $(x'_n)_n \in c'_o$ tal que $\| x'_n \| \to 0$ e $\| T(\mu) \| \leq \sup_n | x'_n(\mu) |$ para todo $\mu = (\mu_n)_n \in c_0$.

Para concluir a demonstração do lema, vamos definir operadores auxiliares da seguinte maneira: considere os operadores lineares

$$c_0 \xrightarrow{S} S(c_0) \xrightarrow{R} c_0$$

$$x = (x_m)_m \to (\| x'_m \| x_m)_m \to (x'_m(x))_m.$$

Afirmamos que S e $R \circ S$ são contínuos. De fato,

$$\| S(x) \| = \| (\| x'_m \| x_m)_m \| = \sup_m \| x'_m \| \mid x_m \mid \leq C \sup_m \mid x_m \mid = C \| x \|$$

e

$$\| R((\| x'_m \| x_m)_m) \| = \| (x'_m(x))_m \| = \sup_m \mid x'_m(x) \mid \leq \sup_m \| x'_m \| \| x \| \leq C \| x \| .$$

Assim $\| R((\| x'_m \| x_m)_m) \| = \| (x'_m(x))_m \| \leq \| R \| \| (\| x'_m \| x_m)_m) \|$. Chamando $\mid \lambda_m \mid^2 = \| R \| \| x'_m \|$, temos que $\lambda_n \to 0$ e $\sup_m \mid x'_m(x) \mid \leq \| R \| \sup_m \| x'_m \| \mid x_m \mid = \sup_m \mid \lambda_m \mid^2 \mid x_m \mid$.

Conseqüentemente, $\| T(\mu) \| \leq \sup_m \mid \lambda_m \mid^2 \mid \mu_m \mid$, para todo $\mu = (\mu_n)_n \in c_0$. ■

Proposição 2.3. *Sejam E um espaço de Banach e $T : c_0 \to E$ um operador linear. Se T é compacto, então existem uma seqüência $\lambda = (\lambda_n)_n$ em c_0 e uma série incondicionalmente convergente $\sum y_n$ em E, tais que, para cada $\mu = (\mu_n)_n$ em c_0, $T\mu = \sum \lambda_n \mu_n y_n$.*

Demonstração: Se $T : c_0 \to E$ é compacto, então pelo lema 2.2, existe uma seqüência $\lambda = (\lambda_n)_n$ em c_0 tal que para cada $\mu = (\mu_n)_n$ em c_0

$$\| T\mu \| \leq \sup_n \{\mid \lambda_n \mid^2 \mid \mu_n \mid\}. \tag{2.1}$$

Se $\lambda_n = 0$ para todo $n \in I\!N$, então o resultado é imediato; caso contrário, efetuando convenientes trocas de posição na seqüência, podemos assumir que $\lambda_n \neq 0$ para naturais convenientes.

Para cada n, seja $y_n = T[(\lambda_n)^{-1} e_n]$, com $(e_n)_n$ base canônica de c_0. Vamos mostrar que a série $\sum y_n$ é incondicionalmente convergente. Para cada $\xi = (\xi_n)_n \neq 0$ em ℓ_∞, como $\lambda \in c_0$, dado $\epsilon > 0$, existe n_0 tal que $sup\{\mid \lambda_k \mid : k \geq n_0\} < \epsilon / \| \xi \|_\infty$.

Assim, de 2.1, temos que

$$\| \sum_{k=n_0}^{m} \xi_k y_k \| = \| T[\sum_{k=n_0}^{m} \xi_k (\lambda_k)^{-1} e_k] \| \leq \sup_k \{\mid \lambda_k \mid^2 \mid \xi_k \mid \mid \lambda_k \mid^{-1} : k \geq n_0\} =$$

$$= \sup\{|\lambda_k||\xi_k| : k \geq n_0\} \leq \|\xi\|_\infty \sup\{|\lambda_k| : k \geq n_0\} \leq \epsilon$$

Segue que a série $\sum \xi_n y_n$ é Cauchy somável em E e portanto, pelas proposições 1.3.2 e 1.3.5, temos que a série $\sum y_n$ é incondicionalmente convergente em E.

Vamos agora mostrar que para cada $\mu = (\mu_n)_n$ em c_0, $T\mu = \sum \lambda_n \mu_n y_n$.

Como para cada $\mu = (\mu_n)_n$ em c_0, existe $n_0 \in I\!N$ tal que $\sum_{k>n_0} |\mu_n| < \epsilon / \|T\|$ temos que

$$\| T\mu - \sum_{k=1}^{n_0} \lambda_k \mu_k y_k \| = \| T\mu - \sum_{k=1}^{n_0} \lambda_k \mu_k T[(\lambda_k)^{-1} e_k] \| =$$

$$= \| T\mu - \sum_{k=1}^{n_0} T(\mu_k e_k) \| = \| T[\sum_{k>n_0} \mu_k e_k] \| \leq \| T \| \, \| \sum_{k>n_0} \mu_k e_k \| \leq \epsilon$$

Segue que $T\mu = \sum \lambda_n \mu_n y_n$. ∎

No que segue vamos apresentar alguns resultados cujas demonstrações encontram-se em [21]. A próxima proposição mostra que se T é um operador linear de um espaço de Banach E em ℓ_1, então T é compacto se, e somente se, T tem uma particular representação em séries.

Proposição 2.4. *Sejam E um espaço de Banach e $T : E \to \ell_1$ um operador linear. Então são equivalentes:*

(1) T é compacto.

(2) Existem uma seqüência $\lambda = (\lambda_n)_n$ em c_0 e uma série incondicionalmente convergente $\sum g_n$ em E' tais que para cada x em E

$$Tx = \sum \lambda_n \, g_n(x) \, e_n,$$

com $(e_n)_n$ é a base canônica de ℓ_1.

(3) Existem uma seqüência $\lambda = (\lambda_n)_n$ em c_0 e uma série ω^* incondicionalmente convergente $\sum g_n$ em E' tais que para cada x em E

$$\| Tx \| \leq \sum |\lambda_n| \, |g_n(x)| \, .$$

Demonstração: (1) implica (2). Se T é compacto, então pelo teorema de Schauder (teorema 1.4.9), $T^* : \ell_\infty \to E'$ também é compacto.

Consideremos $C : c_0 \to l_\infty$ a inclusão natural, que a cada $\mu \in c_0$ associa $C(\mu) = C_\mu$, dada por $C_\mu(\lambda) = \lambda(\mu)$ para cada $\lambda \in l_1$.

Então a aplicação $T^* \circ C : c_0 \to E'$ é compacta e pela proposição 2.3 existem uma seqüência $\lambda = (\lambda_n)_n$ em c_0 e uma série incondicionalmente convergente $\sum g_n$ em E' tal que para cada $\mu = (\mu_n)_n$ em c_0

$$(T^* \circ C)(\mu) = \sum_n \lambda_n \mu_n g_n.$$

A aplicação $T^* \circ C$ está bem definida pois a série $\sum g_n$ é incondicionalmente convergente em E'. Agora para cada x em E e para cada $\mu = (\mu_n)_n$ em c_0, observando-se que $C_\mu(e_n) = \mu_n$ para cada $n \in I\!N$, temos que

$$((T^* \circ C)(\mu))(x) = \sum_n \lambda_n \mu_n g_n(x) = C_\mu(\sum_n \lambda_n g_n(x) e_n) = (\sum_n \lambda_n g_n(x) e_n)(\mu).$$

Por outro lado,

$$((T^* \circ C)(\mu))(x) = (T^*(C_\mu))(x) = C_\mu(Tx) = (Tx)(\mu).$$

Logo,para cada x em E e para cada $\mu = (\mu_n)_n$ em c_0:

$$(Tx)(\mu) = (\sum_n \lambda_n g_n(x) e_n)(\mu).$$

E assim, como as funções coincidem em todos os pontos do domínio, segue que:

$$Tx = \sum_n \lambda_n g_n(x) e_n.$$

(2) implica (3). Por (2), existe uma seqüência $\lambda = (\lambda_n)_n$ em c_0 e uma série incondicionalmente convergente $\sum g_n$ em E' tal que para cada x em E

$$Tx = \sum_n \lambda_n g_n(x) e_n, \tag{2.2}$$

com (e_n) a base canônica de ℓ_1. Agora, pela proposição 1.3.8, temos que $\sum g_n$ é ω^* incondicionalmente convergente em E', e de 2.2 temos que,

$$\| Tx \| \leq \sum_n | \lambda_n | \, | g_n(x) | .$$

(3) implica (1). Para cada x em E definamos as seguintes funções de E em $I\!R^+$:

$$p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mid g_n(x) \mid^{1};$$

$$p_k(x) = \sum_{n=1}^{k} \mid g_n(x) \mid .$$

Como $\sum g_n$ é ω^* incondicionalmente convergente, p está bem definida. Primeiro vamos mostrar que existe um $M > 0$ tal que $p(x) < M \parallel x \parallel$ para todo $x \in E$. Para cada k, p_k é soma finita de funções contínuas, logo p_k é contínua. Assim para cada k e para cada $r \in I\!R^+$, o conjunto $\{x \in E : p_k(x) \leq r\}$ é imagem inversa de um conjunto fechado de $I\!R^+$, e logo é um conjunto fechado de E.

Agora para cada $r \in I\!R^+$,

$$\{x \in E : p(x) \leq r\} = \cap_{k=1}^{\infty}\{x \in E : p_k(x) \leq r\}.$$

Logo para cada $r \in I\!R^+$, $\{x \in E : p(x) \leq r\}$ é intersecção de conjuntos fechados, e logo um conjunto fechado.

Assim a imagem inversa de p de qualquer subconjunto fechado de $I\!R^+$ é um subconjunto fechado de E, portanto, p é contínuo.

Logo, existe $\gamma > 0$ tal que $\parallel x \parallel < \gamma \Rightarrow p(x) < 1$.

Dado $\epsilon > 0$ e x qualquer em E, então

$$\parallel \frac{\gamma x}{\parallel x \parallel + \epsilon} \parallel = \gamma \parallel \frac{x}{\parallel x \parallel + \epsilon} \parallel < \gamma$$

e

$$p(\frac{\gamma x}{\parallel x \parallel + \epsilon}) < 1.$$

Observando-se que para cada $\alpha \in I\!K$, $p(\alpha x) = \mid \alpha \mid p(x)$ temos que

$$p(\frac{\gamma x}{\parallel x \parallel + \epsilon}) = \frac{\gamma}{\parallel x \parallel + \epsilon} p(x) < 1.$$

[1]Observamos que p é uma seminorma.

Assim, $p(x) < \frac{\|x\|+\epsilon}{\gamma}$. Fazendo-se $\epsilon \to 0$, temos que $p(x) < \frac{\|x\|}{\gamma}$. Agora tomando-se $M = \frac{1}{\gamma}$, temos que $p(x) < M \| x \|$.

Vamos agora mostrar que T é compacto utilizando o teorema 1.4.11. Por hipótese,

$$\| Tx \| \leq \sum | \lambda_n | | g_n(x) | \leq \| \lambda \|_\infty \sum | g_n(x) | \leq \| \lambda \|_\infty p(x) \ \leq \| \lambda \|_\infty M \| x \| \, .$$

Logo T é contínuo.

Como $(\lambda_n)_n \in c_0$, dado $\epsilon' > 0$ existe $n_0 \in I\!N$ tal que para $n > n_0$, temos que $\sup\{| \lambda_k | : k > n_0\} < \epsilon'/M$. Seja $N = kerg_1 \cap \cdots \cap kerg_{n_o}$. Para todo $x \in N$ temos que:

$$\| T(x) \| \leq \sum_{k>n_0} | \lambda_k || g_k(x) | \leq$$

$$\leq \sup\{| \lambda_k | : k \geq n_0\} \, p(x) \ \leq \ \sup\{| \lambda_k | : k \geq n_0\} \, M \| x \| \leq \ \epsilon' \| x \| \, .$$

Assim $\| T|_N \| \leq \epsilon'$. Como $dim(E/N) \leq n_0$, segue do teorema 1.4.11 que T é compacto.

■

Como conseqüência da proposição 2.4 temos os seguinte corolário.

Corolário 2.5. *Sejam E um espaço de Banach e $T : E \to \ell_1$ um operador linear compacto. Então existe uma série ω^* incondicionalmente convergente $\sum h_n$ em E' tal que para cada x em E*

$$Tx = \sum h_n(x) e_n$$

com $(e_n)_n$ é a base canônica de ℓ_1.

Demonstração: Pela proposição 2.4, (1) $\Rightarrow$ (2), existem $\lambda = (\lambda_n)_n \in c_0$ e $\sum g_n$ incondicionalmente convergente em E' tal que $Tx = \sum \lambda_n g_n(x) e_n$, para cada $x \in E$, com $(e_n)_n$ base canônica de l_1.

Tomemos $h_n = \lambda_n g_n$ para cada $n \in I\!N$. Então pela proposição 1.3.5 $\sum h_n$ é incondicionalmente convergente e logo pela proposição 1.3.8, ω^* incondicionalmente convergente em E'. E temos que $Tx = \sum h_n(x) e_n$, para cada $x \in E$. ■

Observação 2.6. *Considere $(p_n)_n$ a seqüência de funcionais lineares contínuos definida no exemplo 1.3.7. A série $\sum p_n$ é então ω^* incondicionalmente convergente em $\ell_\infty =$*

$(\ell_1)'$. *Como o operador identidade* $Id : \ell_1 \to \ell_1$ *tem uma representação da forma* $Idx = \sum p_n(x)e_n$, *com* $(e_n)_n$ *base canônica de* ℓ_1, *e sabemos que* $Id : \ell_1 \to \ell_1$ *não é compacto, podemos ver que a condição do corolário 2.5 não caracteriza operadores lineares compactos em* ℓ_1.

Se observamos a demonstração de (3) implica (1) da proposição acima, notamos que se T satisfaz a condição (3), a demonstração é a mesma se colocamos o contradomínio de T qualquer espaço de Banach F. Assim temos o seguinte corolário:

Corolário 2.7. *Sejam* E *e* F *espaços de Banach e* $T : E \to F$ *um operador linear. Se existem uma seqüência* $\lambda = (\lambda_n)_n$ *em* c_0 *e uma série* ω^* *incondicionalmente convergente* $\sum g_n$ *em* E' *tais que para cada* x *em* E

$$\| Tx \| \leq \sum | \lambda_n | | g_n(x) |,$$

então T *é compacto.*

A classe de operadores que satisfazem a hipótese do Corolário 2.7 formam um ideal de operadores, como mostra a seguinte proposição. Denotaremos esta classe por $I(E, F)$.

Proposição 2.8. *Sejam* E, F *e* G *espaços de Banach,* $R : E \to F$, $S : E \to F$ *e* $T : F \to G$ *operadores lineares. Se* R *e* $S \in I(E, F)$, *então* $R + S \in I(E, F)$. *Além disso, se* $S \in I(E, F)$ *ou* $T \in L(F, G)$, *então* $T \circ S \in I(E, G)$.

Demonstração: Sejam R e $S \in I(E, F)$; $\lambda = (\lambda_n)_n$ e $\beta = (\beta_n)_n \in c_0$; $\sum g_n$ e $\sum h_n$ séries ω^* incondicionalmente convergentes em E' tais que:

$$\| Rx \| \leq \sum | \lambda_n || g_n(x) | \ \textit{para cada } x \textit{ em } E \textit{ e}$$

$$\| Sx \| \leq \sum | \beta_n | | h_n(x) | \ \textit{para cada } x \textit{ em } E.$$

Seja $\gamma = (\gamma_n)_n$ a seguinte seqüência:

$$\gamma_n = \begin{cases} \lambda_{\frac{n+1}{2}} & \text{se } n \text{ é ímpar,} \\ \beta_{\frac{n}{2}} & \text{se } n \text{ é par.} \end{cases}$$

Seja a série $\sum f_n$ com:

$$f_n = \begin{cases} g_{\frac{n+1}{2}} & \text{se } n \text{ é ímpar,} \\ h_{\frac{n}{2}} & \text{se } n \text{ é par.} \end{cases}$$

Então $\gamma \in c_0$, $\sum f_n$ é ω^* incondicionalmente convergente em E' e para cada $x \in E$:

$$\| (R+S)(x) \| \leq \| Rx \| + \| Sx \| \leq$$

$$\leq \sum | \lambda_n || g_n(x) | + \sum | \beta_n | | h_n(x) | = \sum | \gamma_n || f_n(x) | .$$

Assim, $R+S \in I(E,F)$.

Agora se $S \in I(E,F)$, existem $\lambda = (\lambda_n)_n \in c_0$ e $\sum g_n$ série ω^* incondicionalmente convergentes em E' tal que:

$$\| Sx \| \leq \sum | \lambda_n || g_n(x) | \ \textit{para cada } x \textit{ em } E.$$

Então $T \circ S : E \to G$ é contínuo e para cada x em E

$$\| (T \circ S)(x) \| \leq \| T \| \| Sx \| \leq \| T \| \sum | \lambda_n | | g_n(x) | = \sum | \| T \| \ \lambda_n | | g_n(x) | .$$

Como $(\| T \| \ \lambda_n)_n \in c_0$, segue que $T \circ S \in I(E,G)$.

Se $T \in I(F,G)$, existem $\beta = (\beta_n)_n \in c_0$ e $\sum h_n$ série ω^* incondicionalmente convergentes em F' tal que:

$$\| Ty \| \leq \sum | \beta_n || h_n(y) | \ \textit{para cada } y \textit{ em } F.$$

Então $T \circ S : E \to G$ é contínuo e para cada x em E

$$\| (T \circ S)(x) \| = \| T(S(x)) \| \leq \sum | \beta_n || h_n(S(x)) | = \sum | \beta_n || (S^* \circ h_n)(x) | .$$

Como $\sum | (S^* \circ h_n)(x) | = \sum | h_n(S(x)) | < \infty$ para cada x em E, segue que $\sum S^* \circ h_n$ é ω^* incondicionalmente convergente em F'e portanto $T \circ S \in I(E,G)$. ■

É fácil ver que $I(E,F)$ é um espaço vetorial. Vamos agora definir uma norma em $I(E,F)$.

Proposição 2.9. *Considere em $I(E,F)$ a seguinte função $\alpha : I(E,F) \to \mathbb{R}$, dada por*

$$\alpha(T) = \inf \ [\ \sup\{ \sum | \lambda_n | | g_n(x) | : \| x \| \leq 1 \} \ ]$$

para cada $T \in I(E,F)$, com o ínfimo tomado sobre $\Gamma = \{\lambda = (\lambda_n)_n \in c_0$ e $\sum g_n$ séries ω^* incondicionalmente convergentes em E' tais que $\| Tx \| \leq \sum |\lambda_n| \, |g_n(x)| \}$.

A função $\alpha(.)$ é uma norma em $I(E,F)$ e $\| T \| \leq \alpha(T)$ para todo operador T em $I(E,F)$.

Demonstração: Vamos primeiro mostrar que $\| T \| \leq \alpha(T)$ para todo operador T em $I(E,F)$. Seja $T \in I(E,F)$ qualquer. Sejam $(\lambda_n)_n \in c_0$ e $\sum g_n$ uma série ω^* incondicionalmente convergente em E' tais que $\| Tx \| \leq \sum |\lambda_n| \, |g_n(x)|$. Como

$$\| T \| = \sup_{\|x\| \leq 1} \| Tx \| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \sum |\lambda_n| \, |g_n(x)|,$$

segue que

$$\| T \| \leq \inf_{\Gamma}[\sup_{\|x\| \leq 1} \{\sum |\lambda_n| \, |g_n(x)|\}]$$

Portanto, $\| T \| \leq \alpha(T)$.

Vamos agora mostrar que $\alpha(T)$ é uma norma. Como $\| T \| \leq \alpha(T)$, temos que $\alpha(.) \geq 0$, e que $\alpha(T) = 0 \Rightarrow T \equiv 0$. Se $T \equiv 0$, basta tomarmos $\lambda_n = 0$ e $g_n \equiv 0$ para todo $n \in I\!\!N$ que teremos

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \sum |\lambda_n| \, |g_n| = 0$$

e conseqüentemente $\alpha(T) = 0$.

Seja $\gamma \in I\!\!K$ qualquer. Se $\gamma = 0$ então é óbvio que $\alpha(\gamma T) = \gamma \alpha(T)$. Se $\gamma \neq 0$ então para cada $\lambda = (\lambda_n)_n \in c_0$ e para cada série ω^* incondicionalmente convergente $\sum g_n \in E'$ tais que

$$\| Tx \| \leq \sum |\lambda_n| |g_n(x)|, \tag{2.3}$$

segue

$$\| \gamma T x \| \leq |\gamma| \sum |\lambda_n| |g_n(x)| = \sum |\gamma \lambda_n| |g_n(x)| .$$

Logo

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \{\sum |\gamma \lambda_n| |g_n(x)|\} = \sup_{\|x\| \leq 1} \{|\gamma| \sum |\lambda_n| |g_n(x)|\}$$

e assim

$$\inf_{\Gamma} [\sup_{\|x\| \leq 1} \{\sum |\gamma \lambda_n| |g_n(x)|\}] = \inf_{\Gamma} [\sup_{\|x\| \leq 1} \{|\gamma| \sum |\lambda_n| |g_n(x)|\}] = |\gamma| \; \alpha(T)$$

Portanto $\alpha(\gamma T) \leq |\gamma| \alpha(T)$. Agora

$$\alpha(T) = \alpha(\frac{\gamma}{\gamma}T) \leq \frac{1}{|\gamma|}\alpha(\gamma T).$$

Logo

$$|\gamma| \alpha(T) \leq \alpha(\gamma T).$$

Portanto $\alpha(\gamma T) = |\gamma| \alpha(T)$.

Sejam T e $S \in I(E,F)$. Vamos agora mostrar que $\alpha(T+S) \leq \alpha(T)+\alpha(S)$. Dado $\epsilon > 0$, segue da definição de $\alpha(\cdot)$ que existem $\lambda = (\lambda_n)_n$ e $\beta = (\beta_n)_n \in c_0$, e $\sum g_n$ e $\sum h_n$ séries ω^* incondicionalmente convergentes em E' tais que:

$$\| Tx \| \leq \sum |\lambda_n| |g_n(x)|,$$

$$\| Sx \| \leq \sum |\beta_n| |h_n(x)| \quad \textit{para cada } x \textit{ em } E, \textit{ e}$$

$$\sup_{\|x\|\leq 1} \{\sum |\lambda_n| |g_n(x)|\} \leq \alpha(T) + \epsilon/2$$

$$\sup_{\|x\|\leq 1} \{\sum |\beta_n| |h_n(x)|\} \leq \alpha(S) + \epsilon/2.$$

Consideremos $\gamma = (\gamma_n)_n$ dada por:

$$\gamma_n = \begin{cases} \lambda_{\frac{n+1}{2}} & \text{se } n \text{ é ímpar,} \\ \beta_{\frac{n}{2}} & \text{se } n \text{ é par,} \end{cases}$$

e $\sum f_n$ dada por:

$$f_n = \begin{cases} g_{\frac{n+1}{2}} & \text{se } n \text{ é ímpar,} \\ h_{\frac{n}{2}} & \text{se } n \text{ é par.} \end{cases}$$

Então $\gamma \in c_0$, $\sum f_n$ é ω^* incondicionalmente convergente em E' e para cada $x \in E$, temos que

$$\| (T+S)(x) \| \leq \sum_n |\gamma_n| |f_n(x)| = \sum_n |\lambda_n| |g_n(x)| + \sum_n |\beta_n| |h_n(x)|.$$

Assim

$$\sup_{\|x\|\leq 1} \{\sum |\gamma_n| |f_n(x)|\} \leq \sup_{\|x\|\leq 1} \{\sum |\lambda_n| |g_n(x)|\} + \sup_{\|x\|\leq 1} \{\sum |\beta_n| |h_n(x)|\} \leq$$

$$\leq \alpha(T) + \alpha(S) + \epsilon.$$

Agora $\gamma \in c_0$, $\sum f_n$ é ω^* incondicionalmente convergente em E' e para cada $x \in E$, temos que $\| (T+S)(x) \| \leq \sum_n | \gamma_n || f_n(x) |$; e
$\alpha(T+S) = \inf [\sup\{ \sum | \mu_n | | k_n(x) | : \| x \| \leq 1\}]$, com o ínfimo tomado sobre $\Gamma = \{\mu = (\mu_n)_n \in c_0$ *e* $\sum k_n$ *séries* ω^* *incondicionalmente convergentes em* E' *tais que* $\| (T+S)(x) \| \leq \sum | \mu_n | | k_n(x) | \}$, então $\alpha(T+S) \leq \alpha(T) + \alpha(S) + \epsilon$. Como a desigualdade vale para todo $\epsilon > 0$; segue que $\alpha(T+S) \leq \alpha(T) + \alpha(S)$. ■

O teorema 2.10 seguinte mostra que ℓ_1 é o único espaço de Banach E com base normalizada $(u_n)_n$ tal que todo operador linear compacto $T : F \to E$ de um espaço de Banach F em E tem uma representação da forma $Tx = \sum g_n(x) u_n$ com $\sum g_n$ uma série ω^* incondicionalmente convergente no dual topológico F' de F. O teorema 2.10 é então usado para dar uma outra caracterização de operadores compactos através de ℓ_1 (corolário 2.11).

Teorema 2.10. *Para um espaço de Banach E com base normalizada $(u_n)_n$, são equivalentes:*

(1) $(u_n)_n$ é equivalente a base canônica de ℓ_1.

(2) Para cada operador linear compacto $T : F \to E$, F um espaço de Banach, existem uma seqüência $\lambda = (\lambda_n)_n$ em c_0 e uma série incondicionalmente convergente $\sum g_n$ em F' tais que para cada y em F

$$Ty = \sum \lambda_n \, g_n(y) \, u_n.$$

(3) Para cada operador linear compacto $T : F \to E$, F um espaço de Banach, existe uma série ω^* incondicionalmente convergente $\sum h_n$ em F' tal que para cada y em F

$$Ty = \sum h_n(y) \, u_n.$$

(4) Para cada operador linear compacto $T : E \to E$, existe uma série ω^* incondicionalmente convergente $\sum h_n$ em E' tal que para cada x em E

$$Tx = \sum h_n(x) \, u_n.$$

Demonstração: (1) $\Rightarrow$ (2) Seja $(e_n)_n$ a base canônica de l_1. Como por hipótese $(e_n)_n$ e $(u_n)_n$ são equivalentes, pela proposição 1.3.25 existe um isomorfismo $S : E \to l_1$ com $S(u_n) = e_n$ para cada n.

Então $S \circ T : F \to l_1$ é um operador compacto e pela proposição 2.4, existem $\lambda = (\lambda_n)_n \in c_0$ e $\sum g_n$ incondicionalmente convergente em F' tais que para cada $y \in F$, $(S \circ T)(y) = \sum \lambda_n g_n(y) e_n$.

Logo,

$$T(y) = S^{-1}(\sum \lambda_n g_n(y) e_n) = \sum \lambda_n g_n(y) S^{-1}(e_n) = \sum \lambda_n g_n(y) u_n.$$

(2) $\Rightarrow$ (3) Por hipótese, para cada operador linear compacto $T : F \to E$, existem uma seqüência $\lambda = (\lambda_n)_n$ em c_0 e uma série incondicionalmente convergente $\sum g_n$ em F' tais que para cada y em F

$$Ty = \sum \lambda_n \; g_n(y) \; u_n.$$

Para cada $n \in I\!N$, seja $h_n = \lambda_n g_n$. Para cada $y \in F$, $Ty = \sum h_n(y) u_n$ e das proposições 1.3.5 e 1.3.8, temos que $\sum h_n$ é ω^* incondicionalmente convergente.

(3) $\Rightarrow$ (4) é imediato.

(4) $\Rightarrow$ (1) Vamos mostrar que $(e_n)_n$ e $(u_n)_n$ são equivalentes. Seja $(f_n)_n$ a seqüência de coeficientes funcionais associada à $(u_n)_n$. Como $(u_n)_n$ é uma base normalizada, dado $\alpha = \sum \alpha_n e_n$ em ℓ_1, temos que

$$\sum \| \alpha_n u_n \| = \sum | \alpha_n | \| u_n \| = \sum | \alpha_n | < \infty$$

então $\sum \alpha_n u_n$ é absolutamente convergente em E e segue da proposição 1.3.4 que a série é convergente em E.

Considere $x = \sum \beta_n u_n$ em E, como $(u_n)_n$ é base de Schauder para E, pela unicidade da representação, $x = \sum f_n(x) u_n$. Como $\| e_n \| = 1$, temos que

$$\sum \| f_n(x) e_n \| = \sum | f_n(x) | .$$

Como ℓ_1 é Banach, pela proposição 1.3.4, para mostrar a implicação (1), é suficiente mostrar que $\sum | f_n(x) |$ converge. Para tal, vamos definir um operador linear compacto $T : E \to E$ e utilizar as hipóteses de (4).

Pelo teorema 1.3.15, para cada $x = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)u_k$ em E,

$$\| x \|_{(x_n)} = \sup_n \| \sum_{k=1}^{n} f_k(x)u_k \|$$

define uma norma em E equivalente à norma original.

Fixados $n \leq m$, para cada $x = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)u_k$ em E, temos que

$$\sum_{k=n}^{m} f_k(x)u_k = \sum_{k=1}^{m} f_k(x)u_k - \sum_{k=1}^{n-1} f_k(x)u_k,$$

logo

$$\| \sum_{k=n}^{m} f_k(x)u_k \| \leq \| \sum_{k=1}^{m} f_k(x)u_k \| + \| \sum_{k=1}^{n-1} f_k(x)u_k \| .$$

Assim

$$\sup\{\| \sum_{k=n}^{m} f_k(x)u_k \|: n \leq m < \infty\} \leq \sup\{\| \sum_{k=1}^{m} f_k(x)u_k \| + \| \sum_{k=1}^{n-1} f_k(x)u_k \|: n \leq m < \infty\} \leq$$

$$\leq \sup_m \| \sum_{k=1}^{m} f_k(x)u_k \| + \sup_m \| \sum_{k=1}^{m-1} f_k(x)u_k \| \leq 2 \| x \|_{(x_n)} .$$

Seja $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots$ uma seqüência não-crescente de números positivos convergindo para zero. De

$$\sum_{k=n}^{m} \lambda_k f_k(x)u_k = \sum_{k=n}^{m-1} [(\lambda_k - \lambda_{k+1}) \sum_{j=n}^{k} f_j(x)u_j] + \lambda_m \sum_{k=n}^{m} f_k(x)u_k,$$

segue que,

$$\| \sum_{k=n}^{m} \lambda_k f_k(x)u_k \| \leq \| \sum_{k=n}^{m-1} [(\lambda_k - \lambda_{k+1}) \sum_{j=n}^{k} f_j(x)u_j] \| + \| \lambda_m \sum_{k=n}^{m} f_k(x)u_k \| \leq$$

$$\leq \sum_{k=n}^{m-1} (\lambda_k - \lambda_{k+1}) \| \sum_{j=n}^{k} f_j(x)u_j \| + \lambda_m \| \sum_{k=n}^{m} f_k(x)u_k \| \leq$$

$$\leq [\sum_{k=n}^{m-1} (\lambda_k - \lambda_{k+1}) + \lambda_m] \sup\{\| \sum_{k=n}^{m} f_k(x)u_k \|: n \leq m < \infty\} \leq$$

$$\leq \lambda_n \, 2 \, \| x \|_{(x_n)} .$$

Logo, temos que

$$\| \sum_{k=n}^{m} \lambda_k f_k(x) u_k \| \leq \lambda_n \, 2 \, \| x \|_{(x_n)} \tag{2.4}$$

para cada $x = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) u_k$ em E.

Como a seqüência $(\lambda_n)_n$ converge a zero, segue que a série $\sum \lambda_n f_n(x) u_n$ é Cauchy somável e logo, pela proposição 1.3.2, incondicionalmente convergente e portanto convergente.

Assim podemos definir o operador linear $T : E \to E$ dado por

$$Tx = \sum \lambda_n f_n(x) u_n$$

$$com \;\; \| T(x) \| \leq \lambda_1 \, 2 \, \| x \|_{(x_n)} .$$

Vamos mostrar que T é compacto. Como $(\lambda_n)_n$ converge a zero, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in I\!N$ tal que para $n > n_0$, temos que $| \lambda_n | < \epsilon/2$. Seja $N = ker f_1 \cap \cdots \cap ker f_{n_0}$. Para todo $x \in N$, temos que

$$\| Tx \| \leq \lambda_{n_0+1} \, 2 \, \| x \|_{(x_n)} \leq \epsilon \, \| x \|_{(x_n)} .$$

Como $dim(E/N) = n_0$ segue do teorema 1.4.11 que T é compacto. Portanto, pela hipótese, existe uma série ω^* incondicionalmente convergente $\sum h_n$ em E' tal que para cada x em E

$$Tx = \sum h_n(x) u_n$$

Mas então, como $(u_n)_n$ é base de Schauder para E, pela unicidade da representação, segue que

$$\lambda_n f_n(x) = h_n(x)$$

para cada x em E e

$$\sum | \lambda_n | \, | f_n(x) | \leq \sum | h_n(x) | < \infty$$

para cada x em E. Pelo lema 1.3.9, segue que $\sum | f_n(x) | < \infty$ para cada x em E e segue (1). ∎

Parte da demonstração da implicação (4) $\Rightarrow$ (1) do teorema 2.10 está baseada em uma modificação da demonstração de um resultado apresentado em [15], (ver proposição 1.3.10). Utilizaremos também este resultado na demonstração do próximo corolário.

Se a base é incondicional temos a seguinte versão para o teorema 2.10.

Corolário 2.11. *Para um espaço de Banach E com base incondicional normalizada $(u_n)_n$ são equivalentes:*

(1) $(u_n)_n$ é equivalente a base canônica de ℓ_1.

(2) Todo operador linear compacto $T : c_0 \to E$ tem uma representação da forma

$$T\lambda = \sum g_n(\lambda)\ u_n, \ \textit{para cada}\ \lambda \in c_0$$

com $\sum g_n$ uma série ω^* incondicionalmente convergente em $\ell_1 = (c_0)'$.

Demonstração: (1) $\Rightarrow$ (2) segue do teorema 2.10 considerando $F = c_0$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Vamos mostrar que $(e_n)_n$ e $(u_n)_n$ são equivalentes. Seja $(f_n)_n$ a seqüência de coeficientes funcionais associada à $(u_n)_n$. Como $(u_n)_n$ é normalizada, dado $\alpha = \sum \alpha_n e_n$ em ℓ_1, temos que

$$\sum \| \alpha_n u_n \| = \sum | \alpha_n || \| u_n \| = \sum | \alpha_n | < \infty$$

então $\sum \alpha_n u_n$ é absolutamente convergente em E, segue da proposição 1.3.4 que a série converge em E.

Dado $x = \sum \beta_n u_n$ em E, como $(u_n)_n$ é base de Schauder para E, pela unicidade da representação, $x = \sum f_n(x) u_n$. E como $\| e_n \| = 1$, temos que

$$\sum \| f_n(x) e_n \| = \sum | f_n(x) | .$$

Como ℓ_1 é Banach, pela proposição 1.3.4, para mostrar a implicação (1), é suficiente mostrar que $\sum | f_n(x) |$ converge. Para tal, vamos definir um operador linear compacto $T : c_0 \to E$ e utilizar as hipóteses de (2).

Como $(u_n)_n$ é uma base incondicional, pelo teorema 1.3.23 podemos assumir que para cada $x = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)u_k$ em E

$$\| x \|_{(u)} = sup\{\| \sum_{k \epsilon A} \| f_k(x)u_k \|: A \text{ é um subconjunto finito de } I\!N\}$$

define uma norma equivalente à norma original de E.

Portanto, pela proposição 1.3.10 segue que para cada $\lambda = (\lambda_n)_n$ em c_0 e para cada $x = \sum f_n(x)u_n$ em E, fixados $n \leq m \in I\!N$, temos que

$$\| \sum_{k=n}^{m} \lambda_k f_k(x)u_k \| \leq 4sup\{| \lambda_k |: n \leq k \leq m\} \| x \|_{(u)} . \tag{2.5}$$

Como $(\lambda_n)_n \in c_0$, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in I\!N$ tal que para $n \geq n_0$ temos que $\sup\{| \lambda_k |: k > n_0\} < \epsilon/4 \| x \|_{(u)}$.

Assim, de 2.5, temos que a série $\sum \lambda_n f_n(x)u_n$ é Cauchy somável e logo, pela proposição 1.3.2, incondicionalmente convergente, para cada $\lambda = (\lambda_n)_n$ em c_0 e cada $x = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)u_k$ em E.

Fixe x em E e seja $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots$ uma seqüência não-crescente de números positivos convergindo para zero. Seja $T : c_0 \to E$ o operador linear dado por

$$T\lambda = \sum \lambda_n \mu_n f_n(x)u_n$$

para cada $\lambda = (\lambda_n)_n$ em c_0.

Novamente utilizando a proposição 1.3.10, temos que:

$$\| \sum_{n=1}^{m} \lambda_n \mu_n f_n(x)u_n \| \leq 4sup\{| \lambda_n \mu_n |: 1 \leq n \leq m\} \| x \|_{(u)} .$$

Logo, para cada $\lambda = (\lambda_n)_n \in c_0$

$$\| T\lambda \| = \| \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \mu_n f_n(x)u_n \| = \lim_{m \to \infty} \| \sum_{n=1}^{m} \lambda_n \mu_n f_n(x)u_n \| \leq 4 \| \lambda \|_{\infty} \mu_1 \| x \|_{(u)} .$$

Assim, temos que T é contínuo. Vamos mostrar que T é compacto utilizando o teorema 1.4.11.

Como $\mu_1, \ldots, \mu_n, \ldots$ é uma seqüência que converge a zero, dado $\epsilon' > 0$, existe $n_1 \in I\!N$ tal que para $n > n_1$, temos que $\mu_n < \epsilon'/4 \| x \|_{(u)}$.

Seja $N = \{\lambda = (\lambda_n)_n \in c_0 : \lambda_k = 0 \; para \; k \leq n_1\}$. Para todo $\lambda \in N$, pela proposição 1.3.10, temos que:

$$\| T\lambda \| = \| \sum_{k>n_1} \lambda_k \mu_k f_k(x) u_k \| \leq 4 \| \lambda \|_\infty \mu_{n_1+1} \| x \|_{(u)} \leq \epsilon' \| x \|_{(u)} .$$

Denotando-se por $(e_n)_n$ a base canônica de c_0, $N = [e_{n_1+1}, e_{n_1+2}, \ldots]$. Logo, $dim(E/N) = n_1 < \infty$. Portanto, pelo teorema 1.4.11, T é compacto.

Assim, pela hipótese existe uma série ω^* incondicionalmente convergente $\sum g_n$ em ℓ_1 tal que $T\lambda = \sum g_n(\lambda) u_n$ para cada $\lambda = (\lambda_n)_n$ em c_0. Mas como $(u_n)_n$ é base de Schauder de E, segue que

$$\lambda_n \mu_n f_n(x) = g_n(\lambda)$$

para cada $\lambda = (\lambda_n)_n$ em c_0 e para cada $n \in I\!N$. Como $\sum g_n$ é ω^* incondicionalmente convergente

$$\sum | \lambda_n | | \mu_n | | f_n(x) | \leq \sum | g_n(\lambda) | < \infty$$

para cada λ em c_0, então pelo lema 1.3.9,

$$\sum | \mu_n | | f_n(x) | < \infty \; e \; \sum | f_n(x) | < \infty.$$

■

Terminamos este capítulo apresentando a seguinte proposição.

Proposição 2.12. *Sejam E e F espaços de Banach, e $T : E \to F$ um operador linear contínuo. Então são equivalentes:*

(1) Existem uma seqüência $\lambda = (\lambda_n)_n$ em c_0, uma série incondicionalmente convergente $\sum g_n$ em E' e uma seqüência limitada $(y_n)_n$ em F tais que, para cada x em E,

$$Tx = \sum \lambda_n g_n(x) y_n.$$

(2) Existem uma seqüência $\lambda = (\lambda_n)_n$ em c_0, uma série ω^* incondicionalmente convergente $\sum g_n$ em E' e uma seqüência limitada $(y_n)_n$ em F tais que, para cada x em E,

$$Tx = \sum \lambda_n g_n(x) y_n.$$

(3) Existem operadores lineares compactos $P : E \to \ell_1$ e $Q : \ell_1 \to F$ tais que $T = Q \circ P$.

Demonstração: (1) $\Rightarrow$ (2) segue da proposição 1.3.8.
(2) $\Rightarrow$ (3). Pela hipótese, T tem uma representação da forma

$$Tx = \sum \lambda_n g_n(x) y_n$$

com $\lambda = (\lambda_n)_n$ seqüência em c_0, $\sum g_n$ série ω^* incondicionalmente convergente em E' e $(y_n)_n$ seqüência limitada em F.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, se $\lambda_n \in \mathbb{C}$, sejam γ_n tal que $\gamma_n^2 = \lambda_n$, e $h_n = g_n$; se $\lambda_n \in \mathbb{R}$, sejam $\gamma_n = \sqrt{\mid \lambda_n \mid}$ e $h_n = \begin{cases} g_n & \text{se } \lambda_n \geq 0, \\ -g_n & \text{se } \lambda_n < 0. \end{cases}$

Então $(\gamma_n)_n \in c_0$, $\sum h_n$ é uma série ω^* incondicionalmente convergente em E' e $Tx = \sum \gamma_n \gamma_n h_n(x) y_n$, para cada $x \in E$.

Seja $P : E \to \ell_1$ um operador linear definido por $Px = \sum \gamma_n h_n(x) e_n$ para cada x em E, com $(e_n)_n$ base canônica de l_1. De

$$\sum \| \gamma_n h_n(x) e_n \| = \sum \mid \gamma_n \mid \mid h_n(x) \mid \leq \| \gamma \|_\infty \sum \mid h_n(x) \mid$$

para cada $x \in E$, temos que o operador P está bem definido, pois a série $\sum \gamma_n h_n(x) e_n$ converge absolutamente em ℓ_1, e é contínuo.

Segue da proposição 2.4 que P é compacto.

Seja $Q : \ell_1 \to F$ um operador linear definido por $Q\mu = \sum \gamma_n \mu_n y_n$ para cada $\mu = (\mu_n)_n$ em ℓ_1. Como $(y_n)_n$ é limitada, existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $\| y_n \| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para cada $\mu = (\mu_n)_n \in \ell_1$, temos que

$$\sum \| \gamma_n \mu_n y_n \| \leq$$

$$\leq M \sum \mid \mu_n \mid \mid \gamma_n \mid = M \| \gamma \|_\infty \sum \mid \mu_n \mid = M \| \gamma \|_\infty \| \mu \|_1$$

e assim a série $\sum \gamma_n \mu_n y_n$ converge, isto significa que Q está bem definido e é contínuo.

Vamos agora usar o teorema 1.4.11 para mostrar que Q é compacto.

Como $\gamma \in c_0$, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n > n_0$ temos que $\mid \gamma_n \mid < \epsilon / M$.

Seja $N = \{(\mu_n)_n \in \ell_1 : \mu_n = 0 \textit{ para } n \leq n_0\}$. Para todo $\mu = (\mu_n)_n \in N$, temos que

$$\| Q\mu \| = \sum_{k > n_0} \mid \gamma_k \mid \mid \mu_k \mid \| y_k \| \leq$$

$$\leq M \sum_{k>n_0} | \gamma_k | | \mu_k | \leq M \sup_{k>n_0} | \gamma_k | \sum_{k>n_0} \mu_k \leq M \frac{\epsilon}{M} \| \mu \|_1 = \epsilon \| \mu \|_1 .$$

Temos que $N = [e_{n_0+1}, e_{n_0+2}, \ldots]$, ($(e_n)_n$ base canônica de ℓ_1). Logo $dim(\ell_1/N) = n_0 < \infty$. Portanto segue do teorema 1.4.11 que Q também é compacto.

Agora para cada $x \in E$, temos que $(Q \circ P)(x) = \sum \lambda_n g_n(x) y_n$, isto é, $Q \circ P = T$.
(3) $\Rightarrow$ (1). Suponha que existam $P : E \to \ell_1$ e $Q : \ell_1 \to F$ operadores compactos tais que $Q \circ P = T$.

Pela proposição 2.4, existem uma seqüência $\lambda = (\lambda_n)$ em c_0 e uma série incondicionalmente convergente $\sum g_n$ em E' tal que para cada x em E

$$Px = \sum \lambda_n g_n(x) e_n,$$

com $(e_n)_n$ base unitária canônica de ℓ_1.

Tome $y_n = Q(e_n)$ para cada $n \in I\!N$. Como Q é compacto, $(y_n)_n$ é limitada em F.

Por hipótese, $T = Q \circ P$, então, para cada $x \in E$,

$$T(x) = (Q \circ P)(x) = Q(\sum \lambda_n g_n(x) e_n) =$$

$$= \sum \lambda_n g_n(x) Q(e_n) = \sum \lambda_n g_n(x) y_n.$$

∎

Capítulo 3

Espaços de Banach F para os quais $L(C(\Omega), F) = K(C(\Omega), F)$

O objetivo deste capítulo é estudar algumas caracterizações dos espaços de Banach F para os quais todos os operadores contínuos de $C(\Omega)$ em F são compactos, com Ω um espaço de Hausdorff compacto.

Os resultados que apresentamos neste capítulo foram estudados no texto científico de Ansari [2].

3.1 Caracterizações para Espaços Compactos Dispersos

Nesta seção, Ω denotará um espaço de Hausdorff compacto disperso (ver definição 1.1.20). Neste caso mostramos que todos os operadores contínuos de $C(\Omega)$ em F são compactos se, e somente se, todos os operadores de um subespaço fechado de c_0 em F são compactos se, e somente se, F não contém cópia de c_0.

Começamos a seção mostrando que se E é um subespaço fechado de c_0, de dimensão infinita, e F é um espaço de Banach, então todos os operadores contínuos de E em F são compactos se, e somente se, F não contém cópia de c_0.

Proposição 3.1.1. *Sejam E um subespaço fechado de c_0, de dimensão infinita, e F um espaço de Banach. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) $L(E,F) = K(E,F)$.

(2) F não contém cópia de c_0.

Demonstração: (1) implica (2) Suponhamos por contradição que $c_0 \hookrightarrow F$. Então existem um subespaço Z, $Z \subseteq F$ e $T : c_0 \to Z$ um isomorfismo.

Consideremos $T|_E$: $E \to Z$. Assim, $T|_E \in L(E,F) = K(E,F)$ e conseqüentemente $\overline{T|_E\,(B_E)}$ é um subconjunto compacto de F.

Agora, como $T|_E$ é um isomorfismo de E sobre $T(E)$, segue que $(T|_E)^{-1}$ é contínuo e $\overline{T|_E\,(B_E)} = T|_E\,(B_E)$. Assim, $(T|_E)^{-1}(T|_E\,(B_E)) = B_E$ é um subconjunto compacto de E, absurdo uma vez que a dimensão de E é infinita.

(2) implica (1) Suponhamos que $c_0 \not\hookrightarrow F$. Sejam $T \in L(E,F)$ e $(x_n)_n$ uma seqüência limitada em E. Vamos mostrar que $(Tx_n)_n$ admite uma subseqüência convergente em F e conseqüentemente $T \in K(E,F)$.

Como E é um subespaço de c_0 e $\ell_1 \not\hookrightarrow c_0$, temos que $\ell_1 \not\hookrightarrow E$. Logo, pelo teorema 1.2.14, $(x_n)_n$ admite uma subseqüência fracamente de Cauchy. Podemos assumir, sem perda de generalidade que $(x_n)_n$ é fracamente de Cauchy.

Seja $y_{m,n} = x_n - x_m$. Então, $(y_{m,n})_{m,n}$ é uma rede que converge fracamente a zero. Como T é contínuo, pelo teorema 1.2.10, $(Ty_{m,n})_{m,n}$ também converge fracamente a zero.

Afirmamos que $\| Ty_{m,n} \| \to 0$. Vamos supor por absurdo que $\| Ty_{m,n} \| \not\to 0$

Então existem $\epsilon > 0$ e seqüências $(m_k)_k$ e $(n_k)_k$ de números naturais tais que $m_k > m_{k-1} \geq k-1$, $n_k > n_{k-1} \geq k-1$ e $\| Ty_{m_k,n_k} \| > \epsilon$, $\forall k$. Então, pelo teorema 1.3.26, $(Ty_{m_k,n_k})_k$ admite uma subseqüência que é uma seqüência básica em F. Podemos assumir, sem perda de generalidade que $T(y_{m_k,n_k})_k$ é uma seqüência básica em F

Como $(y_{m_k,n_k})_k$ converge fracamente a zero, inf $\| y_{m_k,n_k} \| \geq \epsilon > 0$ e $(y_{m_k,n_k})_k \subseteq E \subseteq c_0$, pelo Princípio de Seleção de Bessaga-Pelczynski (teorema 1.3.29), $(y_{m_k,n_k})_k$ admite uma subseqüência que é uma seqüência básica equivalente a uma seqüência de blocos da base canônica de c_0. Podemos assumir, sem perda de generalidade, que $(y_{m_k,n_k})_k$ é uma seqüência básica equivalente a uma seqüência de blocos da base canônica de c_0. Assim, pelo teorema 1.3.28, temos que o espaço fechado gerado por $(y_{m_k,n_k})_k$ é isomorfo a c_0.

Agora como T é um operador linear contínuo, para toda seqüência de escalares (a_k), $\sum a_k y_{m_k,n_k}$ converge se, e somente se, $\sum a_k T y_{m_k,n_k}$ converge. Logo as seqüências $(y_{m_k,n_k})_k$ e $(T y_{m_k,n_k})_k$ são equivalentes.

Assim, pela proposição 1.3.25, os espaços fechados gerados por $(y_{m_k,n_k})_k$ e por $T(y_{m_k,n_k})_k$ são isomorfos. Então o subespaço de F, $\overline{[T(y_{m_k,n_k}) : k \in I\!N]}$, é isomorfo a c_0, contradizendo a hipótese inicial. ■

Corolário 3.1.2. *Para um espaço de Banach F, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) Para cada conjunto infinito Ω que seja um espaço de Hausdorff compacto disperso, então $L(C(\Omega), F) = K(C(\Omega), F)$.

(2) Para algum conjunto infinito Ω que seja um espaço de Hausdorff compacto disperso, então $L(C(\Omega), F) = K(C(\Omega), F)$.

(3) F não contém cópia de c_0.

(4) Para cada subespaço fechado E de dimensão infinita de c_0, temos que $L(E, F) = K(E, F)$.

(5) Para algum subespaço fechado E de dimensão infinita de c_0, temos que $L(E, F) = K(E, F)$.

Demonstração: (1) implica (2) é imediato.
(2) implica (3) Suponhamos por contradição que $c_0 \hookrightarrow F$. Então existem Z um subespaço de F e $R : c_0 \to Z$ um isomorfismo.

Como Ω é um conjunto infinito e é um espaço compacto disperso, segue do teorema 1.1.21 que existe um subespaço M complementado de $C(\Omega)$ que é isométrico a c_0.

Sejam P a projeção contínua de $C(\Omega)$ sobre M, S a isometria de M sobre c_0 e $T = R \circ S$ (um isomorfismo de M em Z). Então $T \circ P \in L(C(\Omega), Z)$.

Para cada $n \in I\!N$, sejam $x_n = S^{-1}(e_n)$ e $z_n = R(e_n)$, com $(e_n)_n$ a base canônica de c_0. Como P é uma projeção de $C(\Omega)$ em M e $(x_n)_n \in M$, segue que $P(x_n) = x_n$ para cada $n \in I\!N$. Assim, $(T \circ P)(x_n) = R(S(P(x_n))) = R(S(x_n)) = R(e_n) = z_n$ para cada $n \in I\!N$.

Como $(e_n)_n$ é uma seqüência limitada em c_0 que não admite subseqüências convergentes, S^{-1} é uma isometria e R é um isomorfismo, segue que $(x_n)_n$ e $(z_n)_n$ são seqüências limitadas em M e Z respectivamente, que não admitem subseqüências convergentes. Logo $T \circ P \notin K(C(\Omega), Z)$, contradizendo a hipótese inicial.

(3) implica (1) Sejam Ω um conjunto infinito, que é um espaço de Hausdorff disperso, e $T \in L(C(\Omega), F)$. Como $c_0 \not\hookrightarrow F$, segue do teorema 1.4.27 que o operador T é fracamente compacto. Então segue do teorema de Gantmacher, teorema 1.4.26, $T^* : F' \to C(\Omega)'$ é fracamente compacto.

Pelo teorema 1.1.23, $C(\Omega)'$ é isomorfo a $\ell_1(\Omega)$. Pela proposição 1.2.13, $\ell_1(\Omega)$ tem a propriedade de Schur. Logo, pela proposição 1.4.25, T^* é compacto. Portanto pelo teorema de Schauder (teorema 1.4.9), segue que T é compacto.

As equivalências (3) $\Leftrightarrow$ (4) $\Leftrightarrow$ (5) seguem diretamente da proposição anterior (proposição 3.1.1). ∎

As equivalências (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3) deste corolário foram apresentadas em Ansari [2], mas já tinham sido provadas anteriormente por Pelczynski [19], pág. 385, proposição 2.

Corolário 3.1.3 (Pitt). *Para $1 \leq p < \infty$, temos que $L(c_0, \ell_p) = K(c_0, \ell_p)$.*

Demonstração: Como $c_0 \not\hookrightarrow \ell_p$ então pela proposição 3.1.1,temos que $L(c_0, \ell_p) = K(c_0, \ell_p)$. ∎

3.2 Seqüências $l_p^\omega(F)$

Esta seção fornece uma caracterização completa de todos os espaços de Banach F, em termos de seqüências $l_p^\omega(F)$, para os quais $L(E, F) = K(E, F)$, com $E = c_0$ ou ℓ_p $(1 \leq p < \infty)$. No que segue apresentamos a definição do espaço de seqüências $l_p - fracas$ em um espaço de Banach.

Definição 3.2.1. *(Seqüências l_p fracas)*

Sejam E um espaço de Banach e $1 \leq p < \infty$. Uma seqüência $(x_n)_n$ de elementos de E é chamada seqüência $l_p - fraca$, se para todo $f \in E'$ temos que $\sum_{n=1}^{\infty} | f(x_n) |^p < \infty$. O espaço de todas as seqüências de um espaço de Banach E que são $l_p - fracas$ será denotado por $l_p^\omega(E)$.

Para um número real $p > 1$, denotamos por q o conjugado de p.

Proposição 3.2.2. *Seja F um espaço de Banach. Então as seguintes afirmações são verdadeiras.*

(a) Se $(y_n)_n \in l_p^\omega(F)$, para $p \geq 1$ então $(y_n)_n \in l_r^\omega(F)$ para todo $r \geq p$.

(b) Seja $(e_n)_n$ a base canônica de l_p, para $1 < p < \infty$ então $(e_n)_n \in l_q^\omega(l_p)$.

(c) Seja $(e_n)_n$ a base canônica de c_0, então $(e_n)_n \in l_1^\omega(c_0)$.

Demonstração: (a) Se $(y_n)_n \in l_p^\omega(F)$, então para todo $f \in F'$ temos que $\sum | f(y_n) |^p < \infty$, ou seja, $(f(y_n))_n \in \ell_p$. Como $\ell_p \subseteq \ell_r$ para $p \leq r$ segue que $(f(y_n)) \in \ell_r$ para $p \leq r$ e para todo $f \in F'$, isto é, $(y_n)_n \in l_r^\omega(F)$ para $p \leq r$.

(b) Seja $(e_n)_n$ base canônica de ℓ_p para $1 < p < \infty$. Como $(\ell_p)' \cong \ell_q$, para cada $\phi \in (\ell_p)'$, existe $(a_j)_j \in \ell_q$ tal que $\phi(x) = \sum a_j x_j$ para cada $x = (x_j)_j \in l_p$. Assim, para cada $\phi \in (\ell_p)'$ temos que $\sum | \phi(e_n) |^q = \sum | a_n |^q < \infty$. Portanto, $(e_n)_n \in l_q^\omega(\ell_p)$.

(c) Seja $(e_n)_n$ base canônica de c_0. Como $(c_0)' \cong \ell_1$, para cada $\phi \in (c_0)'$, existe $(a_j)_j \in l_1$ tal que $\phi(x) = \sum a_j x_j$ para cada $x = (x_j)_j \in c_0$. Assim, para cada $\phi \in (c_0)'$ temos que $\sum | \phi(e_n) | = \sum | a_n | < \infty$. Portanto, $(e_n)_n \in l_1^\omega(c_0)$. ■

Na demonstração da proposição 3.2.5 utilizaremos fortemente a proposição que apresentamos a seguir. Nesta última, para demonstrar que (a) $\Rightarrow$ (b) utilizamos o fato que se $(y_n)_n$ é uma seqüência em $l_p^\omega(F)$, com F um espaço de Banach e $1 < p < \infty$, então a série $\sum a_n y_n$ converge incondicionalmente em F, para toda seqüência $(a_n)_n \in \ell_q$. A demonstração deste resultado é uma modificação da prova de um resultado de Diestel (ver [5], pág. 44, teorema 6).

Proposição 3.2.3. *Sejam $(y_n)_n$ uma seqüência em um espaço de Banach F e $1 < p < \infty$, então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) A seqüência $(y_n)_n \in l_p^\omega(F)$.

(b) Existe um operador $T \in L(\ell_q, F)$ tal que $T(e_n)_n = y_n$, com $(e_n)_n$ base canônica de ℓ_q.

Demonstração: (a) implica (b). Suponhamos que $(y_n)_n \in l_p^\omega(F)$, ou seja, $\sum | f(y_n) |^p < \infty$ para cada $f \in F'$.

Primeiro, definamos o operador linear $S : F' \to \ell_p$ por $S(f) = (f(y_n))_n$ para cada $f \in F'$. O operador S está bem definido pois $(y_n)_n \in l_p^\omega(F)$. Usaremos o Teorema do Gráfico Fechado, teorema 1.1.10, para mostrar que S é contínuo.

Sejam $G_S = \{(f, Sf) : f \in F'\} \subset F' \times \ell_p$, o gráfico de S, e $(f,g) \in \overline{G_S}$. Então existe $(f_n, g_n) \in G_S$ tal que $(f_n, g_n) \to (f,g)$. Logo, $f_n \to f$ em F' e $S(f_n) = g_n \to g$ em ℓ_p. Vamos mostrar que $g = S(f)$.

Observemos que como $S(f_n) = g_n \to g$ em ℓ_p, a seqüência $(Sf_n)_n$ é de Cauchy em ℓ_p, logo, dado $\epsilon > 0$ existe um número natural j_0 tal que $\| Sf_i - Sf_j \|_p < \epsilon$ para todos $i,j > j_0$. Isto é, $\sum_{n=1}^{\infty} | f_i(y_n) - f_j(y_n) |^p < \epsilon^p$ para todos $i,j > j_0$.

Em particular, $\sum_{n=1}^{N} | f_i(y_n) - f_j(y_n) |^p < \epsilon^p$ para todos $i,j > j_0$ e para todo $N \in I\!N$. Fazendo $j \to \infty$, temos que $\sum_{n=1}^{N} | f_i(y_n) - f(y_n) |^p < \epsilon^p$. E como isto vale para todo $N \in I\!N$, temos que $\| Sf_i - Sf \|_p^p = \sum_{n=1}^{\infty} | f_i(y_n) - f(y_n) |^p \leq \epsilon^p$ para todos $i > j_0$. Logo $Sf_n \to Sf$ em ℓ_p. Como $S(f_n) \to g$, segue que $S(f) = g$. Portanto, segue do teorema do gráfico fechado que S é contínuo.

No que segue, vamos mostrar que $\sum a_n y_n$ é incondicionalmente convergente em F e a partir daí construir T. Sejam $(a_n)_n \in \ell_q$ e $f \in F'$ tal que $\| f \| \leq 1$. Para cada i,j naturais, temos que:

$$| f(\sum_{n=i}^{j} a_n y_n) | = | \sum_{n=i}^{j} a_n f(y_n) | \leq \| (0,0,\ldots,a_i,\ldots,a_j,0,0,\ldots) \|_q \| S(f) \| \leq$$

$$\leq (\sum_{n=i}^{j} | a_n |^q)^{1/q} \| S \| \| f \| \leq (\sum_{n=i}^{j} | a_n |^q)^{1/q} \| S \| .$$

Então,

$$\sup_{\|f\| \leq 1} | f(\sum_{n=i}^{j} a_n y_n) | \leq (\sum_{n=i}^{j} | a_n |^q)^{1/q} \| S \|$$

Como, pelo teorema 1.1.3,

$$\sup_{\|f\| \leq 1} | f(\sum_{n=i}^{j} a_n y_n) | = \| \sum_{n=i}^{j} a_n y_n \|, \textit{ temos que}$$

$$\| \sum_{n=i}^{j} a_n y_n \| \leq (\sum_{n=i}^{j} | a_n |^q)^{1/q} \| S \| \textit{ para todos } i,\ j \textit{ naturais.} \tag{3.1}$$

Como $(a_n)_n \in \ell_q$, $(\sum_{n=i}^{j} \mid a_n \mid^q)^{1/q} \to 0$ quando $j \to \infty$. Logo, $\| \sum_{n=i}^{j} a_n y_n \| \to 0$ quando $j \to \infty$. Portanto a série $\sum a_n y_n$ é Cauchy somável, e como F é um espaço de Banach, pela proposição 1.3.2, a série é incondicionalmente convergente em F.

Em seguida, definamos o operador $T : \ell_q \to F$ por $T(a) = \sum a_n y_n$ para cada $a = (a_n)_n \in \ell_q$. O operador T está bem definido, é linear e $T(e_n) = y_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Vamos mostrar que T é contínuo. Para cada $a = (a_n)_n \in \ell_q$, usando 3.1, segue que

$$\| T(a) \| = \| \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n \| \leq \| a \|_q \| S \| .$$

Logo, $\| T \| \leq \| S \|$ e portanto T é contínuo.

(b) implica (a). Suponha $T \in L(\ell_q, F)$ e $T(e_n) = y_n$ para cada n, com $(e_n)_n$ base canônica de ℓ_q. Seja $f \in F'$ qualquer. Então

$$\sum \mid f(y_n) \mid^p = \sum \mid f(T(e_n)) \mid^p = \sum \mid (f \circ T)(e_n) \mid^p < \infty$$

pois $f \circ T \in (\ell_q)'$ e pela proposição 3.2.2(b), $(e_n)_n \in l_p^\omega(\ell_q)$. Portanto $(y_n)_n \in \ell_p^\omega(F)$. ■

Substituindo-se $l_p^\omega(F)$ por $l_1^\omega(F)$ e ℓ_q por c_0 na proposição 3.2.3 obtemos o seguinte resultado que também será utilizado na demonstração da proposição 3.2.5.

Proposição 3.2.4. *Seja $(y_n)_n$ uma seqüência em um espaço de Banach F então as seguintes afirmações são equivalentes.*

(a) A seqüência $(y_n)_n \in l_1^\omega(F)$.

(b) Existe um operador $T \in L(c_0, F)$ tal que $T(e_n)_n = y_n$, com $(e_n)_n$ base canônica de c_0.

Demonstração: (a) implica (b). A idéia da demonstração desta implicação é análoga a demonstração da implicação (a) $\Rightarrow$ (b) da proposição anterior com as adequadas mudanças nas normas.

(b) implica (a). Suponha $T \in L(c_0, F)$ e $T(e_n) = y_n$ para cada n natural, com $(e_n)_n$ base canônica de c_0. Seja $f \in F'$ qualquer. Então

$$\sum \mid f(y_n) \mid = \sum \mid f(T(e_n)) \mid = \sum \mid (f \circ T)(e_n) \mid < \infty$$

pois $f \circ T \in (c_0)'$ e pela observação 3.2.2(c) $(e_n)_n \in l_1^\omega(c_0)$. Portanto $(y_n)_n \in l_1^\omega(F)$. ∎

Proposição 3.2.5. *Sejam F um espaço de Banach e $1 < p < \infty$. As seguintes afirmações são válidas:*

(a) $L(\ell_p, F) = K(\ell_p, F)$ se, e somente se, toda seqüência em $l_q^\omega(F)$ converge a zero em F.

(b) $L(c_0, F) = K(c_0, F)$ se, e somente se, toda seqüência em $l_1^\omega(F)$ converge a zero em F.

(c) $L(\ell_1, F) = K(\ell_1, F)$ se, e somente se, F tem dimensão finita.

Demonstração: (a)($\Rightarrow$) Suponhamos que $L(\ell_p, F) = K(\ell_p, F)$. Seja (y_n) uma seqüência qualquer em $l_q^\omega(F)$. Pela proposição 3.2.3 (a) ($\Rightarrow$) (b), existe um operador linear contínuo $T \in L(\ell_p, F)$ tal que $T(e_n) = y_n$, para todo $n \in I\!N$, com $(e_n)_n$ a base canônica de ℓ_p.

Vamos proceder a demonstração por contradição. Suponhamos que $(y_n)_n$ não converge a zero em F. Então existe uma subseqüência $(y_{nk})_k$ tal que $\| y_{nk} \| > \epsilon$ para algum $\epsilon > 0$ e para todo $k \in I\!N$.

Como $(e_{nk})_k$ é uma seqüência limitada em ℓ_p e T é um operador compacto, segue que a seqüência $(Te_{nk})_k$, isto é, $(y_{nk})_k$ tem uma subseqüência convergente, $(y_{nkl})_l$. Suponhamos que $y_{nkl} \to y \in F$. Então $(y_{nkl})_l$ converge fracamente a y.

Como $(y_n)_n \in l_q^\omega(F)$, $(y_n)_n$ converge fracamente a zero. conseqüentemente $(y_{nkl})_l$ também converge fracamente a zero. Logo $y = 0$. Portanto $y_{nkl} \to 0$, uma contradição.

($\Leftarrow$) Reciprocamente, suponhamos que toda seqüência em $l_q^\omega(F)$ converge a zero. Sejam $(x_n)_n$ uma seqüência limitada em ℓ_p e $T \in L(\ell_p, F)$ um operador qualquer. Vamos mostrar que $(Tx_n)_n$ tem uma subseqüência convergente em F.

Como ℓ_p é reflexivo, pelo lema 1.2.15, $(x_n)_n$ tem uma subseqüência fracamente convergente. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $(x_n)_n$ é fracamente convergente. Suponhamos que $x_n \xrightarrow{\omega} x \in \ell_p$.

Se $\lim_{n\to\infty} \| x_n - x \| = 0$, pela continuidade de T teríamos o resultado. Vamos agora verificar que se $\lim_{n\to\infty} \| x_n - x \| > 0$ então $T(x_n)_n$ admite uma subseqüência convergente. Segue do Princípio de Seleção de Bessaga-Pelczynski (teorema 1.3.29) que $(x_n - x)_n$ admite uma subseqüência que é uma seqüência básica equivalente a uma seqüência de blocos da base canônica de ℓ_p. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $(x_n - x)_n$ é tal seqüência. Pelo teorema 1.3.28, $(x_n - x)$ é equivalente à base canônica de ℓ_p.

Como a base canônica de ℓ_p está em $l_q^\omega(\ell_p)$, segue que $(x_n - x) \in l_q^\omega(\ell_p)$. Logo $(T(x_n - x)) \in l_q^\omega(F)$. Conseqüentemente, por hipótese, $(T(x_n - x))_n$ converge a zero em F. Assim, para toda seqüência $(x_n)_n$ limitada em ℓ_p, $(Tx_n)_n$ admite uma subseqüência convergente em F e $T \in K(\ell_p, F)$.

(b) $(\Rightarrow)$ Suponhamos que $L(c_0, F) = K(c_0, F)$. Seja (y_n) uma seqüência qualquer em $l_1^\omega(F)$. Pela proposição 3.2.4 (a) $(\Rightarrow)$ (b), existe um operador linear contínuo $T \in L(c_0, F)$ tal que $T(e_n) = y_n$, para todo $n \in I\!N$, com $(e_n)_n$ a base canônica de c_0.

Procedendo por contradição, vamos supor que $(y_n)_n$ não converge a zero. Então existe uma subseqüência $(y_{nk})_k$ tal que $\| y_{nk} \| > \epsilon$ para algum $\epsilon > 0$ e para todo $k \in I\!N$.

Como $(e_{nk})_k$ é uma seqüência limitada em ℓ_p e T é um operador compacto, a seqüência $(Te_{nk})_k$, isto é, $(y_{nk})_k$ tem uma subseqüência convergente, $(y_{nkl})_l$ em F. Suponhamos que $y_{nkl} \to y \in F$. Então y_{nkl} converge fracamente a y.

Como $(y_n)_n \in l_1^\omega(F)$, $(y_n)_n$ converge fracamente a zero. Então y_{nkl} também converge fracamente a zero. Logo $y = 0$. Portanto $y_{nkl} \to 0$, uma contradição.

$(\Leftarrow)$ Para a recíproca, suponhamos que toda seqüência em $l_1^\omega(F)$ converge a zero em F. Notemos que a base canônica de c_0 pertence a $l_1^\omega(c_0)$ e que não converge a zero. Logo $c_0 \not\hookrightarrow F$. Então pela proposição 3.1.1, $L(c_0, F) = K(c_0, F)$.

(c) $(\Rightarrow)$ Suponhamos por contradição que F tem dimensão infinita. Então podemos escolher y_1 de norma 1 em F. Seja Y_1 o subespaço de F gerado por y_1. Pelo Lema de Riesz, lema 1.1.34, existe $y_2 \in S_F$ tal que $\| y_2 - y_1 \| > 1/2$. Seja Y_2 o subespaço de F gerado por y_1 e y_2. Pelo Lema de Riesz, lema 1.1.34, existe $y_3 \in S_F$ tal que $\| y_3 - y_1 \| > 1/2$ e $\| y_3 - y_2 \| > 1/2$.

Desta maneira, por indução, construímos uma seqüência $(y_n)_n \in F$ de norma 1 e tal que $\| y_m - y_n \| > 1/2$ para $m \neq n$. Claramente, $(y_n)_n$ não admite subseqüência convergente.

Vamos agora construir um operador contínuo e não compacto de ℓ_1 em F.

Seja $T : \ell_1 \to F$ um operador linear dado por $T(a) = \sum a_n y_n$ para cada $a = (a_n)_n \in \ell_1$. De $\| \sum a_n y_n \| \leq \sum \| a_n y_n \| = \sum | a_n | \| y_n \| = \sum | a_n | = \| a \|_1$, temos que o operador T está bem definido e é contínuo.

Denotando por $(e_n)_n$ a base canônica de ℓ_1, para cada $n \in I\!N$, temos que $T(e_n) = y_n$. Como $(y_n)_n \subset F$ é limitada e não admite subseqüência convergente, segue que $T \notin K(\ell_1, F)$, contradizendo a hipótese inicial.

($\Leftarrow$) Se F tem dimensão finita então é imediato que $L(\ell_1, F) = K(\ell_1, F)$. ■

Corolário 3.2.6. *Seja F um espaço de Banach. Se $L(\ell_p, F) = K(\ell_p, F)$, para algum p, $1 \leq p < \infty$, então as seguintes afirmações são verdadeiras.*

(a) $L(\ell_r, F) = K(\ell_r, F)$ para todo r tal que $p \leq r < \infty$.

(b) $L(c_0, F) = K(c_0, F)$.

Demonstração: Se $p = 1$, então pela proposição 3.2.5 (c), F tem dimensão finita e conseqüentemente $L(\ell_r, F) = K(\ell_r, F)$ para todo r tal que $p \leq r < \infty$ e $L(c_0, F) = K(c_0, F)$.

(a) Se $1 < p \leq r < \infty$ e $L(\ell_p, F) = K(\ell_p, F)$, pela proposição 3.2.5 (a), toda seqüência em $l_q^\omega(F)$ converge a zero em F. Denotemos por r' o conjugado de r. Como $p \leq r$, temos que $r' \leq q$.

Agora pela proposição 3.2.2 (a), temos que toda seqüência em $l_{r'}^\omega(F)$ é uma seqüência em $l_q^\omega(F)$. Logo toda seqüência em $l_{r'}^\omega(F)$ converge a zero em F. Agora novamente utilizando a proposição 3.2.5 (a), segue que $L(\ell_r, F) = K(\ell_r, F)$.

(b) Se $1 < p \leq r < \infty$ e $L(\ell_p, F) = K(\ell_p, F)$, pela proposição 3.2.5 (a), toda seqüência em $l_q^\omega(F)$ converge a zero em F, logo F não possui cópia de c_0 (pois a base canônica de c_0 é uma seqüência em $l_q^\omega(c_0)$ que não converge a zero). Então, pela proposição 3.1.1, $L(c_0, F) = K(c_0, F)$. ■

Na seção 3, vamos precisar da seguinte proposição para demonstração do corolário 3.3.4.

Proposição 3.2.7. *Seja F um espaço de Banach. Então as seguintes afirmações são equivalentes.*

(a) Para cada espaço de Hilbert H de dimensão infinita temos que $L(H, F) = K(H, F)$.

(b) Para algum espaço de Hilbert H de dimensão infinita temos que $L(H, F) =$

$K(H,F)$.

(c) $L(\ell_2,F)=K(\ell_2,F)$.

(d) Toda seqüência em $l_2^\omega(F)$ converge a zero em F.

Demonstração: (a) implica (b) é imediato.
(b) implica (c) Suponhamos que $L(H_1,F) = K(H_1,F)$ para algum espaço de Hilbert H_1. Sejam $T : \ell_2 \to F$ um operador contínuo e $(h_n)_n$ uma seqüência ortonormal qualquer em H_1. Então o subespaço de H_1 gerado por $(h_n)_n$, G, é separável. Logo, pela proposição 1.4.19, existe um isomorfismo $R : \ell_2 \to G$.

Sejam $S = T \circ R^{-1}$. Então $S : G \to F$ é um operador contínuo. Como $T = S \circ R$, vamos mostrar que S é um operador compacto, então teremos T um operador compacto.

Para isso, seja $P : H_1 \to G$ a projeção ortogonal de H_1 em G. Então $S \circ P : H_1 \to F$ é um operador contínuo, e logo, por hipótese, compacto. Como P é projeção de H_1 sobre G, cada subconjunto limitado de G, B_1, é imagem de um subconjunto limitado de H_1, B_2, e assim, $\overline{S(B_1)} = \overline{S(P(B_2))} = \overline{(S \circ P)(B_2)}$ é um subconjunto compacto de F, pois $S \circ P$ é um operador compacto. Portanto S também é compacto.

(c) implica (d) é a proposição 3.2.5 (a).

(d) implica (a) Sejam H um espaço de Hilbert e $T \in L(H,F)$ quaisquer. Vamos mostrar que $\lim \| Th_n \| = 0$ para toda seqüência ortonormal $(h_n)_n$ de H. Assim, pelo teorema 1.4.23, teremos $T \in K(H,F)$.

Seja $(h_n)_n$ uma seqüência ortonormal qualquer em H. Então, pela proposição 1.4.21, $(h_n)_n \in l_2^\omega(H)$. Vamos mostrar que $(Th_n)_n \in l_2^\omega(F)$.

Para cada $\varphi \in F'$, $\varphi \circ T \in H'$, temos que $\sum | \varphi(T(h_n)) |^2 = \sum | (\varphi \circ T)(h_n) |^2 < \infty$. Então $(Th_n)_n \in l_2^\omega(F)$ e conseqüentemente, por hipótese, $(Th_n)_n$ converge a zero em F. ■

3.3 Caracterizações para Espaços Compactos Não Dispersos

Nesta seção, Ω denotará um espaço de Hausdorff compacto não disperso. Nesse caso, apresentamos uma condição necessária para um espaço de Banach F para que todo operador linear contínuo de $C(\Omega)$ em F seja compacto. Especificamente, se cada operador linear contínuo de $C(\Omega)$ em F é compacto então cada operador linear contínuo de ℓ_p em F é compacto, para $p \geq 2$.

Como conseqüência temos que para Ω um espaço de Hausdorff compacto não disperso e F um espaço de Banach para o qual cada operador linear contínuo de $C(\Omega)$ em F é absolutamente 2-somante, então cada operador linear contínuo de $C(\Omega)$ em F é compacto se, e somente se, cada operador linear contínuo de ℓ_2 em F é compacto.

Temos também como conseqüência que para Ω um espaço de Hausdorff compacto não disperso e F um espaço de Banach, cada operador linear contínuo de $C(\Omega)$ em F é compacto se, e somente se, cada operador linear contínuo de ℓ_2 em F é compacto e cada operador linear contínuo de $C(\Omega)$ em F admite uma fatoração através de um subespaço fechado de c_0.

Proposição 3.3.1. *Se F é um espaço de Banach com a propriedade de Schur, então $L(C(\Omega), F) = K(C(\Omega), F)$.*

Demonstração: Seja $T \in L(C(\Omega), F)$ qualquer. Como F tem a propriedade de Schur, $c_0 \not\hookrightarrow F$ (pois a base canônica de c_0 converge fracamente a zero, mas não converge em norma para zero). Então pelo teorema 1.4.27, T é fracamente compacto. Novamente observando-se que F tem a propriedade de Schur pela proposição 1.4.25, temos que T é compacto. ■

Lema 3.3.2. *Seja F um espaço de Banach tal que $L(\ell_2, F) \neq K(\ell_2, F)$. Se $T : \ell_2 \to F$ é um operador linear contínuo e não é compacto, então existe uma seqüência básica equivalente à base canônica de ℓ_2, $(\mu_n)_n \in \ell_2$, tal que $(T\mu_n)_n$ não admite subseqüência convergente.*

Demonstração: Como T é não compacto, existe uma seqüência limitada $(x_n)_n \in \ell_2$ tal que $(Tx_n)_n$ não admite subseqüência convergente.

Como ℓ_2 é reflexivo, pelo lema 1.2.15, $(x_n)_n$ admite uma subseqüência fracamente convergente. Sem perda de generalidade, podemos supor que $(x_n)_n$ é fracamente convergente, isto é, $x_n \xrightarrow{\omega} x$, para algum $x \in \ell_2$.

Então, pelo princípio de seleção de Bessaga e Pelczynski, teorema 1.3.29, existe uma subseqüência de $(x_n - x)_n$, que é uma seqüência básica equivalente a uma seqüência de blocos da base canônica de ℓ_2. Sem perda de generalidade, podemos supor que $(x_n - x)_n$ é tal seqüência.

Logo, pelo teorema 1.3.28, $(\frac{x_n - x}{\|x_n - x\|})_n$ é uma seqüência equivalente a base canônica de ℓ_2. Além disso, como $(Tx_n)_n$ não admite subseqüência convergente, temos que $(T(\frac{x_n - x}{\|x_n - x\|}))_n$ não admite subseqüência convergente. ■

Teorema 3.3.3. *Sejam Ω um espaço de Hausdorff, compacto, não disperso e F um espaço de Banach. Se $L(C(\Omega), F) = K(C(\Omega), F)$ então $L(\ell_p, F) = K(\ell_p, F)$ para $p \geq 2$.*

Demonstração: Pelo corolário 3.2.6, somente o caso $p = 2$ precisa ser demonstrado.

Suponhamos por contradição que $L(\ell_2, F) \neq K(\ell_2, F)$. Então existe um operador não compacto $T \in L(\ell_2, F)$. Logo, pelo lema 3.3.2, existe uma seqüência básica $(\mu_n)_n \in \ell_2$ equivalente à base canônica de ℓ_2, tal que $(T\mu_n)_n$ não admite subseqüência convergente em F.

Vamos agora definir um operador linear contínuo $\psi(T) : C(\Omega) \to F$ que não é compacto.

Como Ω é um espaço de Hausdorff compacto não disperso, segue [1] que existem um espaço de funções G (que é um espaço de Hilbert) que contém uma seqüência básica de funções ortonormais $(r_n)_n$ equivalente à base canônica de ℓ_2 e uma aplicação contínua $\Lambda : C(\Omega) \to G$ tal que para cada função r_n e para cada número natural k, existe uma função $f_{nk} \in C(\Omega)$ tal que $\| f_{nk} \| = 1$ e $\| \Lambda f_{nk} - r_n \| < 1/k$.

Seja M o subespaço fechado de G gerado pela seqüência $(r_n)_n$ e pelas seqüências $(\Lambda f_{nk})_k$ para $n = 1, 2, \ldots$. Sejam M_1 o subespaço fechado de M gerado pela seqüência $(r_n)_n$, e M_0 o complemento ortogonal de M_1 em M. Então M é soma direta de M_1 e M_0.

[1]Na realidade o espaço G é o espaço $L_2(\mu)$ para uma medida apropriada. No entanto, por fugir ao escopo desta dissertação, não enunciaremos aqui estes resultados. Ver Diestel [7] pág.183 e Semadeni [24] pág. 338, teorema 19.7.6

Seja N o subespaço fechado de l_2 gerado por $(\mu_n)_n$.

Seja $P : G \to M$, a projeção ortogonal de G sobre M. Como $(r_n)_n$ é equivalente à base canônica de ℓ_2, segue que $(\mu_n)_n$ e $(r_n)_n$ são equivalentes, logo existe um isomorfismo J' de M_1 sobre N, tal que $J'(r_n) = \mu_n$ para $n = 1, 2, \ldots$. O operador J' pode ser estendido para um operador contínuo $J : M_1 \oplus M_0 \to N$, com $J(x) = 0$ para cada $x \in M_0$.

Seja $\psi(T) = T|_N \; JP\Lambda$. Temos que $\psi(T)$ é um operador linear contínuo de $C(\Omega)$ em F. Afirmamos que $\psi(T)$ não é compacto.

Para isso é suficiente mostrar que $(T\mu_n)_n \subseteq \overline{\{\psi(T)(f) : f \in C(\Omega) \; e \; \| f \| = 1\}}$.

Para este fim, notemos que:

$$\| T\mu_n - \psi(T)f_{nk} \| = \| TJPr_n - TJP\Lambda f_{nk} \| \leq \| T \| \; \| J \| \; \| P \| \; \| r_n - \Lambda f_{nk} \| \leq$$

$$\leq \| T \| \; \| J \| \; \| P \| \; 1/k \to 0 \; quando \; k \to \infty.$$

■

Corolário 3.3.4. *Seja Ω um espaço de Hausdorff compacto não disperso. Seja F um espaço de Banach tal que $L(C(\Omega), F) = \Pi_2(C(\Omega), F)$. Então são as seguintes afirmações são equivalentes.*
(a) $L(C(\Omega), F) = K(C(\Omega), F)$.
(b) $L(\ell_2, F) = K(\ell_2, F)$.

Demonstração: (a) implica (b) É o teorema 3.3.3.

(b) implica (a) Seja $T \in L(C(\Omega), F)$ qualquer. Então por hipótese temos que $T \in \Pi_2(C(\Omega), F)$. Logo, pelo teorema de fatoração de Grothendieck-Pietsch (teorema 1.1.28), existe um espaço de Hilbert H e operadores lineares $S \in L(C(\Omega), H)$ e $R \in L(H, F)$ tais que $T = R \circ S$.

Agora, por hipótese, $L(\ell_2, F) = K(\ell_2, F)$. Então pela proposição 3.2.7, temos que $L(H, F) = K(H, F)$. Logo R é compacto e conseqüentemente $T = R \circ S \in K(C(\Omega), F)$.
■

Corolário 3.3.5. *Sejam Ω um espaço de Hausdorff compacto não disperso e F um espaço de Banach. Então as seguintes afirmações são equivalentes.*

(a) $L(C(\Omega), F) = K(C(\Omega), F)$.

(b) $L(\ell_2, F) = K(\ell_2, F)$ e cada $T \in L(C\Omega), F)$ admite uma fatoração através de um subespaço fechado de c_0.

Demonstração: (a) implica (b) Se $L(C(\Omega), F) = K(C(\Omega), F)$, então pelo teorema 3.3.3, $L(\ell_2, F) = K(\ell_2, F)$ e, pelo teorema 1.4.12, cada $T \in L(C\Omega), F)$ admite uma fatoração através de um subespaço fechado de c_0.

(b) implica (a) Seja $T \in L(C(\Omega), F)$ qualquer. Por hipótese, existem operadores $S \in L(C(\Omega), c_0)$ e $R \in L(c_0, F)$ tais que $T = R \circ S$.

Como por hipótese $L(\ell_2, F) = K(\ell_2, F)$, pela proposição 3.2.5 (a), toda seqüência em $l_2^{\omega}(F)$ converge a zero em F. Usando a proposição 3.2.2 itens (c) e (a) segue que $c_0 \not\hookrightarrow F$. Então, pela proposição 3.1.1, $L(c_0, F) = K(c_0, F)$. Assim R é compacto e conseqüentemente $T \in K(C(\Omega), F)$. ■

3.4 Fatoração

Nesta seção Ω é um espaço de Hausdorff compacto (disperso ou não disperso). Se E é um espaço de Banach, denotaremos por $\Phi_E(C(\Omega), C(\Omega))$ o conjunto dos operadores contínuos $T : C(\Omega) \to C(\Omega)$ que admitem uma fatoração através de E.

Aqui usaremos alguns dos teoremas anteriores para mostrar alguns resultados para o espaço $\Phi_{c_0}(C(\Omega), C(\Omega))$ de todos os operadores contínuos $T : C(\Omega) \to C(\Omega)$ que admitem uma fatoração através de c_0. Tal espaço contém o espaço de todos os operadores compactos de $C(\Omega)$ em $C(\Omega)$.

Proposição 3.4.1. *Sejam Ω um conjunto infinito que é um espaço de Hausdorff compacto, e X um subespaço fechado de c_0. Então as seguintes afirmações são válidas.*
(a) $\Phi_X(C(\Omega), C(\Omega)) \subseteq \Phi_{c_0}(C(\Omega), C(\Omega))$.
(b) $K(C(\Omega), C(\Omega)) \subset \Phi_{c_0}(C(\Omega), C(\Omega))$.

Demonstração: (a) Seja $T \in \Phi_X(C(\Omega), C(\Omega))$ qualquer e sejam $T_1 : C(\Omega) \to X$ e $T_2 : X \to C(\Omega)$ operadores contínuos tais que $T = T_2 \circ T_1$. Como X é um subespaço fechado de c_0, pelo teorema 1.1.29, T_2 estende-se para um operador linear contínuo $\hat{T}_2$ de c_0 em $C(\Omega)$. Assim $T = \hat{T}_2 \circ T_1 \in \Phi_{c_0}(C(\Omega), C(\Omega))$.

(b) Seja $T \in K(C(\Omega), C(\Omega))$ qualquer. Pelo teorema 1.4.12, T admite uma fatoração através de um subespaço fechado de c_0. Logo pelo item (a), $T \in \Phi_{c_0}(C(\Omega), C(\Omega))$. Portanto $K(C(\Omega), C(\Omega)) \subset \Phi_{c_0}(C(\Omega), C(\Omega))$. ■

Observamos que a inclusão dada no item b) é estrita, como mostra o exemplo a seguir.

Primeiro suponhamos Ω disperso. Como Ω é um conjunto infinito, pelo teorema 1.1.21, $C(\Omega)$ contém um subespaço complementado M que é isométrico a c_0.

Sejam $P : C(\Omega) \to M$ a projeção contínua de $C(\Omega)$ sobre M, $J : M \to C(\Omega)$ a inclusão de M em $C(\Omega)$ e $R : c_0 \to M$ a isometria de c_0 sobre M. Então $J \circ P = J \circ R \circ R^{-1} \circ P$. E assim $J \circ P \in \Phi_{c_0}(C(\Omega), C(\Omega))$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $z_n = R(e_n)$, com $(e_n)_n$ a base canônica de c_0. Então $(z_n)_n$ é uma seqüência limitada em M que não admite subseqüência convergente. E $(J \circ P)(z_n) = J(z_n) = z_n$. Assim, $J \circ P$ não é compacto.

Suponhamos agora Ω não disperso. Como a base canônica $(e_n)_n \subset c_0$, $(e_n)_n \in \ell_2^{\omega}(c_0)$, mas $e_n \not\to 0$, segue da proposição 3.2.5 (a) que $L(\ell_2, c_0) \neq K(\ell_2, c_0)$. Assim, pelo teorema 3.3.3, $L(C(\Omega), c_0) \neq K(C(\Omega), c_0)$. Consideremos $T \in L(C(\Omega), c_0)$ e $T \notin K(C\Omega), c_0)$.

Agora observemos que como Ω não é disperso, segue do teorema 1.1.25 que existe um subespaço M de $C(\Omega)$ isométrico a c_0. Seja $J : c_0 \to M$ a isometria de c_0 sobre M. Claramente $J \circ T : C(\Omega) \to M$ é contínuo e admite uma fatoração através de c_0. Afirmamos que $J \circ T$ não é compacto. Vamos supor por absurdo que $J \circ T$ seja compacto, então, como J é uma isometria de c_0 sobre M, temos que $J^{-1} : M \to c_0$ é contínuo, logo $J^{-1} \circ J \circ T = T$ é compacto, uma contradição. Assim $K(C(\Omega), C(\Omega)) \neq \Phi_{c_0}(C(\Omega), C(\Omega))$.

Teorema 3.4.2. *Sejam Ω um espaço de Hausdorff compacto e X um espaço de Banach separável. Então as seguintes afirmações são equivalentes.*
(a) $\Phi_X(C(\Omega), C(\Omega)) \subseteq K(C(\Omega), C(\Omega))$.
(b) $\Phi_X(C(\Omega), C(\Omega)) \subset \Phi_{c_0}(C(\Omega), C(\Omega))$.

Demonstração: (a) implica (b) Suponhamos que $\Phi_X(C(\Omega), C(\Omega)) \subseteq K(C(\Omega), C(\Omega))$. Então pela proposição 3.4.1 (b), $\Phi_X(C(\Omega), C(\Omega)) \subset \Phi_{c_0}(C(\Omega), C(\Omega))$. Observamos que $K(C(\Omega), C(\Omega)) \neq \Phi(C(\Omega), C(\Omega))$, assim $\Phi_X(C(\Omega), C(\Omega)) \neq \Phi_{c_0}(C(\Omega), C(\Omega))$.

(b) implica (a) Com as hipóteses dadas vamos ter que $c_0 \not\hookrightarrow X$. De fato, se $c_0 \hookrightarrow X$, então, como X é separável, pelo teorema 1.1.26, existe uma projeção contínua P de X sobre c_0. Seja J a inclusão de c_0 em X.

Agora consideremos $T \in \Phi_{c_0}(C(\Omega), C(\Omega))$ qualquer e $T = T_2 \circ T_1$ uma fatoração de T através de c_0. Então $T = T_2 \circ P \circ J \circ T_1$. Logo $T \in \Phi_X(C(\Omega), C(\Omega))$. Assim, $\Phi_{c_0}(C(\Omega), C(\Omega)) \subset \Phi_X(C(\Omega), C(\Omega))$, contradizendo a hipótese. Assim temos que $c_0 \not\hookrightarrow X$.

Vamos agora mostrar que $\Phi_X(C(\Omega), C(\Omega)) \subseteq K(C(\Omega), C(\Omega))$. Para isto é suficiente mostrar que $L(C(\Omega), X) = K(C(\Omega), X)$, pois a composição de um operador compacto com um operador contínuo é um operador compacto.

Se Ω é disperso, pelo corolário 3.1.2 (3) implica (1), temos que $L(C(\Omega), X) = K(C(\Omega), X)$.

Se Ω não é disperso, então pelo teorema 1.1.25, existe uma isometria $J : X \to C(\Omega)$, de X sobre um subespaço de $C(\Omega)$.

Seja $T \in L(C(\Omega), X)$ qualquer. Então $J \circ T \in \Phi_X(C(\Omega), C(\Omega))$. Logo, por hipótese, $J \circ T \in \Phi_{c_0}(C(\Omega), C(\Omega))$. Sejam $T_1 : C(\Omega) \to c_0$ e $T_2 : c_0 \to J(X)$ operadores contínuos tais que $J \circ T = T_2 \circ T_1$.

Observamos que como o operador $T_2 \in L(c_0, J(X))$, $c_0 \not\hookrightarrow X$, J é uma isometria de X sobre $J(X)$, temos que $c_0 \not\hookrightarrow J(X)$. Então pelo corolário 3.1.2 (3) implica (4), temos que T_2 é compacto. Logo $J \circ T = T_2 \circ T_1$ é compacto. Como J é uma isometria de X sobre $J(X)$, temos que $J^{-1} : J(X) \to X$ é contínuo, logo $J^{-1} \circ J \circ T = T$ é compacto, e conseqüentemente $L(C(\Omega), X) = K(C\Omega), X)$. ■

Referências Bibliográficas

[1] Aliprantis, C. D., Burkinshaw, O.: *Positive Operators*, Pure and Applied Mathematics Series, **119**, Academic Press, New & York London, 1985.

[2] Ansari, S. I.: *On Banach spaces Y for which $B(C(\Omega), Y) = K(C(\Omega), Y)$.* Pacific J. Math., **169 (2)**(1995), 201-218.

[3] Bessaga, C., Pelczynski, A.: *On bases and uncondicional convergence of series in Banach spaces.* Studia Math., **17** (1958), 151-164.

[4] Conway, J. B.: *A Course in Functional Analysis*, Springer-Verlag, New York, 1985.

[5] Diestel, J.: *Sequences and Series in Banach Spaces*, Springer-Verlag, New York, 1984.

[6] Diestel, J., Jarchow, H., Tonge, A.: *Absolutely Summing Operators.* Cambridge University Press, 1995.

[7] Diestel, J., Uhl, J. J.: *Vector Measures.* Mathematical Surveys, **15**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1977.

[8] Dunford, N., Schwartz, J. T.: *Linear Operator, Part I.* New York. 1958.

[9] Fabian, M.; Habala, P.; Hájek, P; Santalucía, V. M.; Pelant, J.; Zizler, V.: *Function Analysis and Infinite-Dimensional Geometry.* Canadian Mathematical Society: Springer-Verlag, 2001 .

[10] Goldberg, S.: *Unbonded Linear Operators: Theory and Applications.* New York: McGraw-Hill, 1966.

[11] Grothendieck, A.: *Sur certains classes de suites dans les espaces de Banach, et le theoreme de Dvoretzky-Rogers.* Boletim Soc. Mat. São Paulo, **8**, (1956) 81-110.

[12] Lacey, H. E.: *The Isometric Theory of Classical Banach Spaces.* Springer-Verlag, Berlin & New York, 1974.

[13] Lindenstrauss, J., Pelczynski, A.: *Contributions to the theory of classical Banach spaces.* J. Funct. Anal. **8** (1971), 225-249.

[14] Lindenstrauss, J., Tzafriri, L.: *Classical Banach Spaces I*, Springer-Verlag, Berlin & New York, 1977.

[15] McArthur, C. V., Retherford, J. R.: *Some applications of an inequality in locally convex spaces.* Trans. Amer. Math. Soc. **137**, (1969) 115-123.

[16] Megginson, R. E.: *An Introduction to Banach Spaces Theory.* New York: Springer 1998.

[17] Pedersen, G. K.: *Analysis Now.* Graduate Texts in Mathematics, **118**, Springer-Verlag, 1989.

[18] Pelczynski, A.: *Projections in certain Banach spaces.* Studia Math., **19** (1960), 209-228.

[19] Pelczynski, A.: *A theorem of Dunford-Pettis type for polynomial operators.* Bul. Serie des sciences math., astro., et phys. **XI (6)** (1963), 379-386.

[20] Randtke, D. J.: *Representation theorems for compact operator.* Proc. Amer. Math. Soc. **37**, (1973) 481-485.

[21] Randtke, D. J.: *A compact operator characterization of* ℓ_1. Math. Ann. **208**, (1974) 1-8.

[22] Retherford, J. R.: *Hilbert Space: Compact Operators and Trace Theorem*, Cambridge University Press, 1993.

[23] Rosenthal, H. P.: *On quasi-complemented subespaces of Banach spaces, with an appendix on compactnes of operators from* $L^p(\mu)$ *to* $L^r(\nu)$. J. Funct. Anal.,**4** (1969), 176-214.

[24] Semadeni, Z.: *Banach Spaces of Continuous Functions.* Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1971.

[25] Singer, I.: *Bases in Banach Spaces.* New York: Springer-Verlag, 1970.