Sobre Álgebras de Grupo Fortemente Associativas

Jonas Gonçalves Lopes

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR
EM
MATEMÁTICA

Área de concentração: **Matemática**
Orientador: **Prof. Dr. Michael Dokuchaev**

Durante este trabalho, o autor teve o apoio financeiro
da CAPES / PICDT - UFRN

São Paulo, 18 de abril de 2005.

Sobre Álgebras de Grupo Fortemente Associativas

Este exemplar corresponde à redação
final da tese de doutorado devidamente corrigida
e defendida por Jonas Gonçalves Lopes
e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, 18 de abril de 2005.

Banca examinadora:

- Prof. Dr. Michael Dokuchaev (Orientador) - IME-USP
- Prof. Dr. Francisco César Polcino Milies - IME-USP
- Prof. Dr. Miguel Angel Alberto Ferrero - UFRGS
- Prof. Dr. Antonio Paques - UNICAMP
- Prof. Dr. Guilherme Augusto de La Rocque Leal - UFRJ

“ Deus marcou o tempo certo para
cada coisa” .
Eclesiastes 4; 11.

Aos meus Pais,
Luis Carlos Lopes e
Júlia Gonçalves Lopes,
In memory

À minha esposa Lizete,
e aos meus filhos,
Jonatha e Janethe.

Agradecimentos

À Universidade Federal do Rio Grande do Norte, por viabilizar a realização desse curso.
À CAPES / PICDT-UFRN, pelo apoio financieiro.
Ao meu orientador, prof. Dr. Michael Dokuchaev, pelo excelente trabalho de orientação.
Aos professores da banca examinadora, pelas sugestões apresentadas, as quais contribuiram para a redação final desta tese.
Ao IME-USP, pelo acolhimento e infra-estrutura disponibilizados.
A todos os professores do IME com os quais tive a oportunidade de estudar, por contribuirem diretamente para o sucesso alcançado.
Aos funcionários da secretaria de pós-graduação do IME, Sebastião F. Pinho Souza, Patrícia Cristina Martorelli, Rosemary Colombo Lima e Alessandra F. Bernardo da Silva, pela dedicação no atendimento.
Aos funcionários da biblioteca do IME.
Aos amigos André e Rita, pelo apoio recíproco.
Ao amigo David, pelo trabalho de digitação.

Resumo

Uma álgebra $\mathcal{A}$ é chamada fortemente associativa se para qualquer grupo G e toda ação parcial α de G sobre $\mathcal{A}$, o produto cruzado parcial $\mathcal{A} *_\alpha G$ é associativo.

O objetivo desta tese é pesquisar o problema de caracterização das álgebras de grupo FH fortemente associativas, em que H é um grupo finito e F é um corpo cuja característica p divide a ordem de H.

Se H é um grupo nilpotente, foi demonstrado que FH é fortemente associativa se, e somente se, $|H| = 2$ ou $|H| = 3$.

Agora, se H é um grupo de Frobenius com complemento P, em que P é um $p-$subgrupo de Sylow de H, foi provado que FH é fortemente associativa se, e somente se, $|P| = 2$ ou $|P| = 3$.

Dentre outros resultados destaca-se o seguinte Teorema:
Sejam H um grupo $p-$solúvel, P um $p-$subgrupo de Sylow de H e seja F um corpo de característica $p > 0$. Suponha que $\Delta(H, O_{p'}(H))$ é uma $F-$álgebra semisimples.
Então a álgebra de grupo FH é fortemente associativa se, e somente se, H é um dos seguintes dois tipos:
(i) H é cíclico de ordem 2 ou 3;
(ii) H é um grupo de Frobenius com complemento P e núcleo H', $|P| = 2$ ou $|P| = 3$.

Em particular, se H é metabeliano e F é algebricamente fechado, as álgebras de grupo FH modulares fortemente associativas são completamente caracterizadas, pois neste caso $\Delta(H, O_{p'}(H))$ é semisimples.

Também foram feitas caracterizações para o grupo simétrico S_n e para os grupos diedrais D_n de ordem $2n$. Para S_n, $n \geq 5$, temos exemplos de grupos não solúveis, para os quais as álgebras de grupo não são fortemente associativas.

Abstract

An algebra $\mathcal{A}$ is called strongly associative if for any group G and every partial action α of G on $\mathcal{A}$, the crossed product $\mathcal{A} *_\alpha G$ is associative.

The purpose of this thesis is to investigate the problem of the caracterization of the strongly associative group algebras FH, where H is a finite group and F is a field whose characteristic p divides the order of H.

If H is nilpotent, we prove that FH is strongly associative if and only if $|H| = 2$ or $|H| = 3$.

Now, if H is a Frobenius group with complement P, where P is a Sylow $p-$subgroup of H, it is proved that FH is strongly associative if and only if $|P| = 2$ or $|P| = 3$.

Among other results we point out the following theorem:
Let H be a $p-$solvable group, P a Sylow $p-$subgroup of H and let F be a field whose characteristic is p. Suppose that $\Delta(H, O_{p'}(H))$ is a semisimple $F-$algebra. Then the group algebra FH is strongly associative if and only if H is one of the following two types:
(i) H is cyclic of order 2 or 3;
(ii) H is a Frobenius group with complement P and kernel H', $|P| = 2$ or $|P| = 3$.

In particular, if H is metabelian and F is algebraically closed, the strongly associative modular group algebras FH are completely characterized, since in this case $\Delta(H, O_{p'}(H))$ is semisimple.

We also obtained such characterizations for the symmetric groups S_n and the Dihedral group D_n of the order $2n$. For S_n, $n \geq 5$, we have examples of non-solvable groups whose group algebras are not strongly associative.

Introdução

O objetivo deste trabalho é pesquisar o problema de caracterização das álgebras de grupo modulares "fortemente associativas". Mais precisamente: Se H é um grupo finito e F é um corpo cuja característica p divide a ordem de H, queremos determinar condições necessárias e suficientes para que a álgebra de grupo FH seja "fortemente associativa".

Esse problema foi sugerido no artigo "Associativity of crossed products by partial actions, enveloping actions and partial representations", devido a M. Dokuchaev e R. Exel (vide [3]).

Para esse fim, é utilizado o conceito de "ação parcial de um grupo", o qual foi definido explicitamente, pela primeira vez, por R. Exel em [9]. Esse conceito aparece implicitamente em várias áreas da Matemática. Por exemplo, o fluxo de um campo de vetores diferenciável é uma ação parcial (vide [1], Ex.1.2). Além disso, o grupo de Möbius age globalmente na esfera de Riemann, mas parcialmente no plano complexo (vide [16], Proposição 3.16). Em particular, o referido conceito aparece na teoria de álgebras de operadores como um poderoso instrumento no seu estudo (vide [8], [10]). Cabe salientar que o número de pesquisas envolvendo o conceito algébrico de "ação parcial de um grupo" vem crescendo (vide [3], [4], [5] e [6]).

No artigo citado acima, de M. Dokuchaev e R. Exel, define-se "uma ação parcial de um grupo sobre uma $F-$ álgebra" do seguinte modo:

Seja G um grupo com elemento neutro 1 e seja $\mathcal{A}$ uma álgebra, associativa (não necessariamente com unidade).

Uma ação parcial de G sobre $\mathcal{A}$ é um par $\alpha = (\{\mathcal{A}_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$, formado por uma coleção de ideais (bilaterais) $\mathcal{A}_g$ de $\mathcal{A}$, e por uma coleção de isomorfismos de álgebras

$$\alpha_g : \mathcal{A}_{g^{-1}} \longrightarrow \mathcal{A}_g,$$

satisfazendo para todo $g, h \in G$:
(i) $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}$ e α_1 é o automorfismo identidade de $\mathcal{A}$;
(ii) $\mathcal{A}_{(gh)^{-1}} \supseteq \alpha_h^{-1}(\mathcal{A}_h \cap \mathcal{A}_{g^{-1}})$;
(iii) $\alpha_g \circ \alpha_h(x) = \alpha_{gh}(x)$, para cada $x \in \alpha_h^{-1}(A_h \cap A_{g^{-1}})$.

Passamos agora a considerar uma generalização do conceito de produto cruzado.

Dada uma ação parcial $\alpha = (\{\mathcal{A}_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$ de um grupo G sobre uma $F-$álgebra $\mathcal{A}$, o produto cruzado parcial de $\mathcal{A}$ e G por α, denotado por $\mathcal{A} *_\alpha G$, é o conjunto de todas as somas formais finitas $\{\sum_{g\in G} a_g\delta_g : a_g \in \mathcal{A}_g\}$, em que δ_g são símbolos.

A adicão é definida componente à componente, e a multiplicação é determinada por

$$(a_g\delta_g) \cdot (b_h\delta_h) = \alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}(a_g)b_h\right)\delta_{gh}.$$

A questão que surgiu naturalmente foi determinar se $\mathcal{A} *_\alpha G$ é associativo ou não. No caso de uma C^*-álgebra, há cerca de dez anos, R. Exel provou em [7] a associatividade desse produto cruzado, usando a existência de unidades aproximadas.

Em [3], M. Dokuchaev e R. Exel provaram que $\mathcal{A} *_\alpha G$ é sempre associativo se $\mathcal{A}$ é semiprima. Lembremos que uma álgebra $\mathcal{A}$ com unidade é chamada semiprima se $\mathcal{A}$ não contém ideais nilpotentes não nulos. É fácil ver que esse resultado representa uma generalização daquele obtido no contexto de C^*-álgebras.

Entretanto $\mathcal{A} *_\alpha G$ nem sempre é associativo. Veremos no Exemplo 2.4.1 que se H é o grupo de Klein, de ordem 4, e F é um corpo de característica 2, então o produo cruzado $FH *_\alpha G$ não é associativo, em que FH denota a álgebra de grupo do grupo H sobre F. Pelo teorema de Maschke segue que FH não é semiprima.

Para futuras referências, foi introduzida em [3] a seguinte terminologia:

Diremos que uma álgebra $\mathcal{A}$ é fortemente associativa se, para qualquer grupo G e para toda ação parcial α de G sobre $\mathcal{A}$, o produto cruzado parcial $\mathcal{A} *_\alpha G$ é associativo.

Portanto, uma álgebra semiprima é fortemente associativa.

Dada uma álgebra $\mathcal{A}$, e considerando a álgebra $W(\mathcal{A})$, chamada a álgebra dos multiplicadores de $\mathcal{A}$, veremos no Cap. 1 (vide Lema 1.2.1) que se $\alpha = (\{\mathcal{A}_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$ é uma ação parcial arbitrária de um grupo G sobre $\mathcal{A}$, então $\mathcal{A}$ é fortemente associativa se, e somete se, a condição (1.1) verifica-se, isto é,

$$(\alpha_g \circ R_c \circ \alpha_{g^{-1}}) \circ L_a = L_a \circ (\alpha_g \circ R_c \circ \alpha_{g^{-1}})$$

é válida em A_g, para todo $g \in G$ e todo $a, c \in \mathcal{A}$.

Verificaremos a validade dessa condição sempre que formos provar que a álgebra de grupo FH, de um grupo finito H sobre um corpo F cuja característica p divide a ordem de H, é fortemente associativa.

No Exemplo 2.1.1 veremos que a álgebra de grupo do grupo cíclico de ordem 2 sobre um corpo de característica 2 é fortemente associativa.
Também, se $H =< y : y^3 = 1 >$ é um grupo cíclico de ordem 3, e F é um corpo de característica 3, verifica-se no Exemplo 2.2.1 que FH é fortemente associativa.

Agora, se $H =< y : y^4 = 1 >$ é um grupo cíclico de ordem 4, ou $H = \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ ou $H = \frac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$, e se F é um corpo de caractrística 2, os Exemplos 2.3.1, 2.5.1 e 2.6.1, respectivamente, mostram que FH não é fortemente associativa.

O capítulo 3 é dedicado ao problema de caracterização das álgebras de grupo fortemente associativas. A Proposição 3.1.1 considera o caso quando $H =< y : y^p = 1 >$ é um grupo cíclico de ordem p.

O Lema 3.2.1 desempenha um papel fundamental para o desenvolvimento deste trabalho.

Usando a Proposição 3.1.1 e o Lema 3.2.1 demonstra-se o Teorema 3.3.1, no qual H é um grupo nilpotente.

Agora, usando alguns resultados da teoria de blocos caracteriza-se FH quando H é um grupo de Frobenius com complemento P, em que P é um p-subgrupo de Sylow de H (vide Teorema 3.5.3).

No Teorema 3.6.2, o grupo H é p-solúvel e $\Delta(H, O_{p'}(H))$ é uma F-álgebra semisim-

ples.

Usando o Teorema 3.7.3 podemos concluir que FS_4 não é fortemente asociativa (vide Exemplo 3.7.1).

Usando também alguns resultados sobre grupos p-nilpotentes são demostrados os Teoremas 3.8.4 e 3.9.4. No Teorema 3.8.4, H é um grupo metabeliano e F é um corpo algebricamente fechado de característica $p > 0$, enquanto no Teorema 3.9.4, o grupo H é p-solúvel, $\Delta(H, O_{p'}(H))$ é uma F-álgebra não-semisimples, e F é algebricamente fechado de característica $p > 0$. Aqui a condição (1.1) é substituida ou reduzida à uma outra, dada no item (iv) desse Teorema 3.9.4.

Finalmente, no capítulo 4 são feitas caracterizações para o grupo simétrico S_n, e para os grupos diedrais D_n de ordem $2n$. Como $S_n, n \geq 5$, não é solúvel, obtem-se exemplos de grupos não solúveis para os quais as álgebras de grupo não são fortemente associativas.

Índice

1 Multiplicadores de Álgebras × Associatividade Forte de Álgebras 1

1.1 Definições (Ação Parcial de um Grupo sobre uma Álgebra, Produto Cruzado Parcial, Álgebra dos Multiplicadores de uma Álgebra dada) 1

1.2 Condição Necessária e Suficiente para uma Álgebra ser Fortemente Associativa 5

2 Exemplos de Álgebras de Grupo Fortemente Associativas e Não-fortemente Associativas 9

2.1 Grupo Cíclico de ordem 2 13

2.2 Grupo Cíclico de ordem 3 13

2.3 Grupo Cíclico de ordem 4 14

2.4 Grupo de Klein 15

2.5 $H = \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ 16

2.6 $H = \frac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ 16

3 O Problema de Caracterização das Álgebras de Grupo Fortemente Associativas 19

3.1 O Grupo é Cíclico de ordem p prima 19

3.2 Uma Condição para a Álgebra de Grupo não ser Fortemente Associativa . 21

3.3 O Grupo é Nilpotente 22

3.4 Resultados Auxiliares 23

3.5 O Grupo é de Frobenius com complemento P 26

3.6 O Grupo H é $p-$solúvel e $\Delta(H, 0_{p'}(H))$ é uma $F-$álgebra Semisimples . 34

3.7 Um Tipo Particular de Grupo $p-$Solúvel 36

3.8 O Grupo é Metabeliano 40

3.9 O Grupo H é $p-$Solúvel e $\Delta(H, 0_{p'}(H))$ é uma $F-$álgebra não-Semisimples 43

4 Caracterizações Para o Grupo Simétrico S_n e Grupos Diedrais D_n de ordem $2n$ 53

CAPÍTULO 1

Multiplicadores de Álgebras × Associatividade Forte de Álgebras

1.1 Definições (Ação Parcial de um Grupo sobre uma Álgebra, Produto Cruzado Parcial, Álgebra dos Multiplicadores de uma Álgebra dada)

Seja G um grupo com elemento neutro 1 e seja $\mathcal{A}$ uma álgebra, associativa (não necessariamente com unidade).

Definição 1.1.1. *Uma ação parcial de G sobre $\mathcal{A}$ é um par $\alpha = (\{\mathcal{A}_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$, formado por uma coleção de ideais (bilaterais) $\mathcal{A}_g$ de $\mathcal{A}$, e por uma coleção de isomorfismos de álgebras*

$$\alpha_g : \mathcal{A}_{g^{-1}} \longrightarrow \mathcal{A}_g,$$

satisfazendo para todo $g, h \in G$:
(i) $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}$ e α_1 é o automorfismo identidade de $\mathcal{A}$;
(ii) $\mathcal{A}_{(gh)^{-1}} \supseteq \alpha_h^{-1}(\mathcal{A}_h \cap \mathcal{A}_{g^{-1}})$;
(iii) $\alpha_g \circ \alpha_h(x) = \alpha_{gh}(x)$, para cada $x \in \alpha_h^{-1}(A_h \cap A_{g^{-1}})$.

As condições (ii) e (iii) nos dizem que α_{gh} é uma extensão de $\alpha_g \circ \alpha_h$. Agora,

tomando $h = g^{-1}$ em (iii), obtemos

$$\alpha_g \circ \alpha_{g^{-1}}(x) = \alpha_1(x) = x,$$

para todo $x \in \alpha_{g^{-1}}^{-1}(\mathcal{A}_{g^{-1}} \cap \mathcal{A}_{g^{-1}}) = \mathcal{A}_g$; isso implica que $\alpha_{g^{-1}} = \alpha_g^{-1}$, para todo $g \in G$.

Além disso, é fácil ver que as condições $(i) - (iii)$ são equivalentes às seguintes:
(i) $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}$ e α_1 é o automorfismo identidade de $\mathcal{A}$;
(ii') $\alpha_g(\mathcal{A}_h \cap \mathcal{A}_{g^{-1}}) = \mathcal{A}_g \cap \mathcal{A}_{gh}$, $\forall\, g, h \in G$;
(iii') $\alpha_g(\alpha_h(x)) = \alpha_{gh}(x)$, $\forall x \in \mathcal{A}_{h^{-1}} \cap \mathcal{A}_{(gh)^{-1}}$, $\forall\, g, h \in G$.

Com efeito, segue de (ii) que

$$\alpha_h^{-1}(\mathcal{A}_h \cap \mathcal{A}_{g^{-1}}) \subseteq \mathcal{A}_{h^{-1}} \cap \mathcal{A}_{h^{-1}g^{-1}}.$$

Substituindo h por h^{-1} e g por gh temos $\alpha_{h^{-1}}^{-1}(\mathcal{A}_{h^{-1}} \cap \mathcal{A}_{h^{-1}g^{-1}}) \subseteq \mathcal{A}_h \cap \mathcal{A}_{g^{-1}}$, e consequentemente

$$\alpha_{h^{-1}}(\mathcal{A}_h \cap \mathcal{A}_{g^{-1}}) \supseteq \mathcal{A}_{h^{-1}} \cap \mathcal{A}_{h^{-1}g^{-1}}.$$

Como $\alpha_{h^{-1}} = \alpha_h^{-1}$ obtemos

$$\alpha_h^{-1}(\mathcal{A}_h \cap \mathcal{A}_{g^{-1}}) = \mathcal{A}_{h^{-1}} \cap \mathcal{A}_{h^{-1}g^{-1}},$$

de modo que vale (iii').
Finalmente, usando novamente que $\alpha_{h^{-1}} = \alpha_h^{-1}$ e substituindo h^{-1} por g segue (ii').

Passamos agora a considerar uma generalização do conceito de produto cruzado.

Definição 1.1.2. *Dada uma ação parcial* $\alpha = (\{\mathcal{A}_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$ *de um grupo* G *sobre uma* $F-$*álgebra* $\mathcal{A}$, *o produto cruzado parcial de* $\mathcal{A}$ *e* G *por* α, *denotado por* $\mathcal{A} *_\alpha G$, *é o conjunto de todas as somas formais finitas* $\{\sum_{g\in G} a_g\delta_g : a_g \in \mathcal{A}_g\}$, *em que* δ_g *são símbolos.*

A adicão é definida componente à componente, e a multiplicação é determinada por

$$(a_g\delta_g)\cdot(b_h\delta_h) = \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a_g)b_h)\,\delta_{gh}.$$

Note que como $\alpha_{g^{-1}}(a_g) \in \mathcal{A}_{g^{-1}}$ e $b_h \in \mathcal{A}_h$, e sendo $\mathcal{A}_{g^{-1}}$ e $\mathcal{A}_h$ ideais, temos que $\alpha_{g^{-1}}(a_g)b_h \in \mathcal{A}_h \cap \mathcal{A}_{g^{-1}}$. Segue da condição (ii') que

$$\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a_g)b_h) \in \mathcal{A}_g \cap \mathcal{A}_{gh} \subseteq \mathcal{A}_{gh},$$

e o produto está bem definido.

Note também que podemos identificar $\mathcal{A}$ com $\mathcal{A}\delta_1$.

Para futuras referências, foi introduzida em [3] a seguinte terminologia:

Definição 1.1.3. *Dizemos que uma álgebra $\mathcal{A}$ é fortemente associativa se, para qualquer grupo G e para toda ação parcial α de G sobre $\mathcal{A}$, o produto cruzado parcial $\mathcal{A} *_\alpha G$ é associativo.*

Sejam F um corpo e $\mathcal{A}$ uma F-álgebra.

Definição 1.1.4. *Um multiplicador de $\mathcal{A}$ é um par (L, R), em que L e R são transformações lineares de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{A}$ satisfazendo para todo $a, c \in \mathcal{A}$:*
i) $L(ac) = L(a)c$,
ii) $R(ac) = aR(c)$,
iii) $aL(c) = R(a)c$.

Chamamos L a ação à esquerda e R a ação à direita do multiplicador (L, R).

O conjunto de todos multiplicadores de $\mathcal{A}$ será denotado por $W(\mathcal{A})$. É fácil verificar que $W(\mathcal{A})$ é uma álgebra sob as seguintes operações :

$$\begin{aligned} (L,R)+(L',R') &= (L+L', R+R') \ ; \\ \lambda(L,R) &= (\lambda L, \lambda R) \qquad (\lambda \in F) \ ; \\ (L,R)(L',R') &= (L \circ L', R' \circ R). \end{aligned}$$

Com essas operações $W(\mathcal{A})$ é chamada a álgebra dos multiplicadores de $\mathcal{A}$. $W(\mathcal{A})$ tem o elemento unidade (Id, Id), em que $Id : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ é a aplicação identidade.

Agora suponha que I é um ideal (bilateral) de $\mathcal{A}$. Note que cada $a \in \mathcal{A}$ dá origem a um multiplicador $\eta_a = (L_a, R_a)$ de I definido por

$$L_a(b) = ab, \qquad R_a(b) = ba, \qquad \forall\, b \in I.$$

Considere a aplicação

$$\begin{aligned} \Psi : \ \mathcal{A} &\longrightarrow W(I) \\ a &\longrightarrow \eta_a. \end{aligned}$$

Ψ é um homomorfismo de álgebras pois Ψ é $F-$linear e, além disso,

$$L_{ac} = L_a \circ L_c, \qquad R_{ac} = R_c \circ R_a,$$

de modo que

$$\begin{aligned}\Psi(ac) &= \eta_{ac} = (L_{ac}, R_{ac}) = (L_a \circ L_c, R_c \circ R_a) = \\ &= (L_a, R_a)(L_c, R_c) = \eta_a \eta_c = \Psi(a)\Psi(c).\end{aligned}$$

Seja $\phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ um isomorfismo de $F-$álgebras. É fácil ver que se $(L, R) \in W(\mathcal{A})$, então $(\phi \circ L \circ \phi^{-1}, \phi \circ R \circ \phi^{-1})$ é um elemento de $W(\mathcal{B})$, e temos o seguinte resultado, o qual está enunciado em [3] sem demonstração.

Proposição 1.1.1. *A aplicação* $\overline{\phi} : W(\mathcal{A}) \longrightarrow W(\mathcal{B})$ *definida por* $\overline{\phi}(L, R) = (\phi \circ L \circ \phi^{-1}, \phi \circ R \circ \phi^{-1})$ *é um isomorfismo de* $F-$*álgebras.*

Demonstração: Com efeito, $\overline{\phi}$ é $F-$linear pois ϕ, L, R, ϕ^{-1} são $F-$lineares, de modo que as compostas $\phi \circ L \circ \phi^{-1}$ e $\phi \circ R \circ \phi^{-1}$ o são; também temos

$$\begin{aligned}\overline{\phi}\left((L, R)(L', R')\right) &= \overline{\phi}\left(L \circ L', R' \circ R\right) \\ &= \left(\phi \circ L \circ L' \circ \phi^{-1}, \phi \circ R' \circ R \circ \phi^{-1}\right) \\ &= \left(\phi \circ L \circ \phi^{-1} \circ \phi \circ L' \circ \phi^{-1}, \phi \circ R' \circ \phi^{-1} \circ \phi \circ R \circ \phi^{-1}\right) \\ &= (\phi \circ L \circ \phi^{-1}, \phi \circ R \circ \phi^{-1})\left(\phi \circ L' \circ \phi^{-1}, \phi \circ R' \circ \phi^{-1}\right) \\ &= \overline{\phi}(L, R)\, \overline{\phi}(L', R'), \text{ para todo } (L, R),\ (L', R') \in W(\mathcal{A}).\end{aligned}$$

Agora, $\overline{\phi}$ é sobrejetora pois dado $(L'', R'') \in W(\mathcal{B})$, tomando $(L, R) = \left(\phi^{-1} \circ L'' \circ \phi, \phi^{-1} \circ R'' \circ \phi\right) \in W(\mathcal{A})$, obtemos $\overline{\phi}(L, R) = (L'', R'')$.

Finalmente, se $\overline{\phi}(L, R) = (\phi \circ L \circ \phi^{-1}, \phi \circ R \circ \phi^{-1}) = (0, 0)$ segue que $\phi \circ L \circ \phi^{-1} \equiv 0$ e $\phi \circ R \circ \phi^{-1} \equiv 0$, e daí obtemos $L \equiv 0$ e $R \equiv 0$, isto é, $(L, R) = (0, 0)$, e portanto $\overline{\phi}$ é injetora. Isso completa a demonstração.

■

1.2 Condição Necessária e Suficiente para uma Álgebra ser Fortemente Associativa

Observação 1.2.1. *Seja G um grupo qualquer e $\alpha = (\{\mathcal{A}_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$ uma ação parcial arbitrária de G sobre uma $F-$álgebra $\mathcal{A}$. Sejam $a, c \in \mathcal{A}$. Considere $\eta_a = (L_a, R_a)$ como um multiplicador de $\mathcal{A}_g, g \in G$, e $\eta_c = (L_c, R_c)$ como um multiplicador de $\mathcal{A}_{g^{-1}}$. Sendo $\alpha_g : \mathcal{A}_{g^{-1}} \longrightarrow \mathcal{A}_g$ um isomorfismo, segue pela Proposição 1.1.1 que a aplicação $\overline{\alpha}_g : W(\mathcal{A}_{g^{-1}}) \longrightarrow W(\mathcal{A}_g)$ definida por:*

$$\begin{aligned}\overline{\alpha}_g(L, R) &= \left(\alpha_g \circ L \circ \alpha_g^{-1}, \alpha_g \circ R \circ \alpha_g^{-1}\right)\\ &= \left(\alpha_g \circ L \circ \alpha_{g^{-1}}, \alpha_g \circ R \circ \alpha_{g^{-1}}\right)\end{aligned}$$

é um isomorfismo de $F-$álgebras, de modo que

$$\overline{\alpha}_g(L_c, R_c) = \left(\alpha_g \circ L_c \circ \alpha_{g^{-1}}, \alpha_g \circ R_c \circ \alpha_{g^{-1}}\right).$$

Portanto, podemos considerar L_a como a ação à esquerda do multiplicador η_a de $\mathcal{A}_g$ e $\alpha_g \circ R_c \circ \alpha_{g^{-1}}$ como a ação à direita do multiplicador $\overline{\alpha}_g(L_c, R_c)$ de A_g.

L_a e $\alpha_g \circ R_c \circ \alpha_{g^{-1}}$ aparecem naturalmente no próximo resultado, cuja demonstração está contida na prova do Teorema 3.1 de [3], p.6, devido a M. Dokuchaev e R. Exel.

Lema 1.2.1. *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra (associativa) e seja $\alpha = (\{\mathcal{A}_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$ uma ação parcial de um grupo G sobre $\mathcal{A}$. Então o produto cruzado parcial $\mathcal{A} *_\alpha G$ é associativo se, e somente se, a igualdade*

$$(\alpha_g \circ R_c \circ \alpha_{g^{-1}}) \circ L_a = L_a \circ (\alpha_g \circ R_c \circ \alpha_{g^{-1}}) \tag{1.1}$$

é valida em $\mathcal{A}_g$, para todo $g \in G$ e todo $a, c \in \mathcal{A}$.

Verificaremos a validade dessa condição (1.1) sempre que formos provar que uma certa álgebra $\mathcal{A}$ é fortemente associativa.

Demonstração do Lema 1.2.1: Obviamente $\mathcal{A} *_\alpha G$ é associativo se, e somete se,

$$(a\delta_h\ b\delta_g)\ c\delta_f = a\delta_h\,(b\delta_g\ c\delta_f) \tag{1.2}$$

para arbitrários $h, g, f \in G$ e $a \in \mathcal{A}_h$, $b \in \mathcal{A}_g$, $c \in A_f$. Notemos que

$$(a\delta_h\ b\delta_g)\ c\ \delta_f = \alpha_h\,(\alpha_{h^{-1}}(a)\ b)\,\delta_{hg}\ c\ \delta_f = \alpha_{hg}\{\alpha_{hg}^{-1}\,[\alpha_h(\alpha_{h^{-1}}(a)\ b]\ c\}\delta_{hgf}.$$

Vemos que $\alpha_{h^{-1}}(a)\ b \in \mathcal{A}_{h^{-1}} \cap \mathcal{A}_g$ implica

$$\alpha_h\,(\alpha_{h^{-1}}(a)\ b) \in \alpha_h\,(\mathcal{A}_{h^{-1}} \cap \mathcal{A}_g) = \mathcal{A}_h \cap \mathcal{A}_{hg},\ \text{por } (ii') \text{ de } 1.1.1.$$

Agora por (iii') de 1.1.1 segue que

$$\alpha_{hg}^{-1}\,[\alpha_h(\alpha_{h^{-1}}(a)\ b] = \alpha_{g^{-1}}\{\alpha_{h^{-1}}\,[\alpha_h(\alpha_{h^{-1}}(a)\ b)]\} = \alpha_{g^{-1}}(\alpha_{h^{-1}}(a)\ b).$$

Como esse elemento pertence a $\mathcal{A}_{g^{-1}} \cap \mathcal{A}_{g^{-1}h^{-1}}$, podemos também separar α_{hg}, donde

$$(a\delta_h\ b\delta_g)\ c\delta_f = \alpha_h\ \{\alpha_g\ [\alpha_{g^{-1}}(\alpha_{h^{-1}}(a)\ b)c\ ]\ \}\ \delta_{hgf}.$$

Comparando com

$$a\delta_h\ (b\delta_g\ c\delta_f) = a\delta_h\ \alpha_g\,(\alpha_{g^{-1}}(b)\ c)\ \delta_{gf} = \alpha_h\ [\alpha_{h^{-1}}(a)\ \alpha_g\ (\alpha_{g^{-1}}(b)\ c)\ ]\ \delta_{hgf},$$

e aplicando $\alpha_{h^{-1}}$, obtemos que (1.2) vale se, e somente se,
$\alpha_g\{\alpha_{g^{-1}}(\alpha_{h^{-1}}(a)\ b)\ c\} = \alpha_{h^{-1}}(a)\ \alpha_g\ (\alpha_{g^{-1}}(b)\ c)$ é verificada para todo $a \in \mathcal{A}_h$, $b \in \mathcal{A}_g$, $c \in \mathcal{A}_f$.

Como $\alpha_{h^{-1}} : \mathcal{A}_h \longrightarrow \mathcal{A}_{h^{-1}}$ é um isomorfismo, $\alpha_{h^{-1}}(a)$ pertence a $\mathcal{A}_{h^{-1}}$ e, consequentemente, a condição acima é equivalente a

$$\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(ab)\ c) = a\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(b)\ c) \tag{1.3}$$

para todo $a \in \mathcal{A}_{h^{-1}}$, $b \in \mathcal{A}_g$, $c \in \mathcal{A}_f$. Se $h = f = 1$, então $\mathcal{A}_h = \mathcal{A}_f = \mathcal{A}$ e logo $\mathcal{A} *_\alpha G$ é associativo se, e somete se, (1.3) vale para $g \in G$, $a, c \in \mathcal{A}$ e $b \in \mathcal{A}_g$ arbitrários. Isso é equivalente a afirmar que a igualdade (1.1) é válida em $\mathcal{A}_g$ para todo $g \in G$ e todo $a, c \in \mathcal{A}$.

■

Foram obtidos os dois seguintes resultados auxiliares:

Lema 1.2.2. *Seja $\mathcal{A} = \mathcal{B} \times \mathcal{D}$, em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{D}$ são $F-$álgebras. Se a $F-$álgebra $\mathcal{A}$ é fortemente associativa, então $\mathcal{B}$ e $\mathcal{D}$ são fortemente associativas.*

Demonstração: Provaremos que $\mathcal{B}$ é fortemente associativa, de modo análogo prova-se que $\mathcal{D}$ é fortemente associativa.

Suponhamos que $\mathcal{B}$ não seja fortemente associativa. Então existe um grupo G e uma ação parcial $\mu = (\{\mathcal{B}_g\}_{g\in G}, \{\mu_g\}_{g\in G})$ de G sobre $\mathcal{B}$ tal que $\mathcal{B} *_\mu G$ não é associativo. Pelo Lema 1.2.1, isso implica que existe um ideal $\mathcal{B}_{g_o} \neq \mathcal{B}$ com $g_o \neq 1$ tal que

$$\left(\mu_{g_o} \circ R_c \circ \mu_{g_o^{-1}}\right) \circ L_a \neq L_a \circ \left(\mu_{g_o} \circ R_c \circ \mu_{g_o^{-1}}\right)$$

em B_{g_o} para algum $a \in \mathcal{B}$ e para algum $c \in \mathcal{B}$.
Mas $\alpha = (\{\mathcal{A}_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$ dada por:

$$\mathcal{A}_g = \mathcal{B}_g, \ \forall\, g \in G, \ g \neq 1, \ \mathcal{A}_1 = \mathcal{A}, \ \alpha_g = \mu_g \ \forall\, g \in G, \ g \neq 1,$$

$\alpha_1 = Id_{\mathcal{A}}$, é uma ação parcial de G sobre $\mathcal{A}$, pois para cada $g \in G$, $\mathcal{B}_g$ é um ideal de $\mathcal{A}$. Consequentemente a igualdade (1.1) não é válida em $\mathcal{A}_{g_o} = \mathcal{B}_{g_o}$ para os elmentos a e c, contradizendo a associatividade forte de $\mathcal{A}$. Portanto, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{D}$ são fortemente associativas.

■

Lema 1.2.3. *Sejam $\mathcal{A}$ uma $F-$álgebra, F um corpo, G um grupo qualquer e $\alpha = (\{\mathcal{A}_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$ uma ação parcial arbitrária de G sobre $\mathcal{A}$. Se um ideal $\mathcal{A}_g$, $g \in G$, é um somando direto de $\mathcal{A}$, então a igualdade (1.1) é satisfeita em $\mathcal{A}_g$, para todo a, $c \in \mathcal{A}$.*

Demonstração : Seja $\mathcal{A}_{g_o}$ um somando direto de $\mathcal{A}$ e seja $\mathcal{I}$ um ideal de $\mathcal{A}$ tal que $\mathcal{A} = A_{g_o} \bigoplus \mathcal{I}$.

Queremos provar que

$$\left(\alpha_{g_o} \circ R_c \circ \alpha_{g_o^{-1}}\right) \circ L_a = L_a \circ \left(\alpha_{g_o} \circ R_c \circ \alpha_{g_o^{-1}}\right)$$

é válida em $\mathcal{A}_{g_o}$, $\forall\, a, c \in \mathcal{A}$.

Para isso, sejam $b \in \mathcal{A}_{g_o}$, $a, c \in \mathcal{A}$. Escreva $a = a_1 + a_2$, em que $a_1 \in \mathcal{A}_{g_o}$, $a_2 \in \mathcal{I}$. Então,

$$\begin{aligned}
\alpha_{g_o}\left(\alpha_{g_o^{-1}}(a\ b)\ c\right) &= \alpha_{g_o}\left(\alpha_{g_o^{-1}}((a_1 + a_2)\ b)\ c\right) \\
&= \alpha_{g_o}\left(\alpha_{g_o^{-1}}(a_1\ b)\ c\right) \\
&= \alpha_{g_o}\left(\alpha_{g_o^{-1}}(a_1)\ \alpha_{g_o^{-1}}(b)\ c\right) \\
&= a_1\ \alpha_{g_o}\left(\alpha_{g_o^{-1}}(b)\ c\right) \\
&= (a_1 + a_2)\ \alpha_{g_o}\left(\alpha_{g_o^{-1}}(b)\ c\right) \\
&= a\ \alpha_{g_o}\left(\alpha_{g_o^{-1}}(b)\ c\right).
\end{aligned}$$

Portanto, a igualdade (1.1) é satisfeita em todo somando direto $\mathcal{A}_g$ de $\mathcal{A}$, para todo $a, c \in \mathcal{A}$.

■

CAPÍTULO 2

Exemplos de Álgebras de Grupo Fortemente Associativas e Não-fortemente Associativas

Para uso posterior, os seguintes resultados bem conhecidos são necessários.

Lema 2.0.1. *Seja* $H =< y : y^{p^n} = 1 >$ *um grupo cíclico de ordem* p^n *e seja* F *um corpo de característica* p*. Então para cada* $i \in \{0, 1, 2, \ldots, p^n\}$*, a álgebra de grupo* FH *tem exatamente um ideal de dimensão* $p^n - i$ *sobre* F*, a saber* $J(FH)^i = FH(y-1)^i$ *(*$i-$*ésima potência do radical de Jacobson* $J(FH)$ *de* FH *).*

Demonstração : (Adaptada de [15], Lema 17.13(ii), p. 295).

Com efeito, considere a aplicação

$$\begin{array}{rccl} \theta : & F[X] & \longrightarrow & FH \\ & f & \longrightarrow & f(y). \end{array} \qquad \text{definida por}$$

Note que θ é um homomorfismo sobrejetor de álgebras, logo $\dfrac{F[X]}{ker(\theta)} \simeq FH$, em que $ker(\theta) = \{f \in F[X] : f(y) = 0\}$.

Como $F[X]$ é um domínio de ideais principais, $ker(\theta)$ é o ideal gerado pelo polinômio mônico f_o, de grau mínimo, tal que $f_o(y) = 0$.

Agora, sendo $y^{p^n} = 1$ temos que $X^{p^n} - 1 \in ker(\theta)$.
Note ainda que se $f = \sum_{i=0}^{r} k_i X^i$ é um polinômio de grau $r < p^n$, segue que $f(y) = \sum_{i=0}^{r} k_i y^i \neq 0$, pois os elementos $\{1, y, y^2, \ldots, y^r\}$ são linearmente independentes sobre F. Logo $ker(\theta) =< X^{p^n} - 1 >$, de modo que $\dfrac{F[X]}{< X^{p^n} - 1 >} \simeq FH$.

Sabemos que qualquer ideal de $\dfrac{F[X]}{< X^{p^n} - 1 >}$ tem a forma $\dfrac{I}{< X^{p^n} - 1 >}$, em que I é um ideal de $F[X]$ contendo $< X^{p^n} - 1 >$. Como $F[X]$ é um domínio de ideais principais, $I =< f >$ para algum f dividindo $X^{p^n} - 1$. Mas $X^{p^n} - 1 = (X - 1)^{p^n}$, de modo que $I =< (X - 1)^i >$ para algum i, $0 \leq i \leq p^n$, e a imagem I^* de I em FH é $I^* = FH(y - 1)^i$.

Porque $J(FH) = \Delta(H)$ (ideal de aumento de FH) e H é gerado por y, temos também $J(FH) = FH(y - 1)$. Portanto os ideais de FH são os $J(FH)^i = FH(y - 1)^i$, $0 \leq i \leq p^n$ e $dim_F \dfrac{FH}{J(FH)^i} = dim_F \dfrac{F[X]}{< (X - 1)^i >} = i$, donde $dim_F J(FH)^i = p^n - i$, $0 \leq i \leq p^n$.

■

Lema 2.0.4. *(Vide [15],p. 303, Lema 1.2). Seja H um grupo de ordem p^n, $n \geq 1$, e seja*

$$H = H_1 \supsetneq H_2 \supsetneq \cdots \supsetneq H_n \supsetneq H_{n+1} = 1$$

uma série de composição de H. Para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, escolha $g_i \in H_i - H_{i+1}$. Seja F um corpo de característica p. Então os elementos $\lambda(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \prod_{i=1}^{n}(g_i - 1)^{a_i}$ com $0 \leq a_i < p$ formam uma $F-$base de FH. Além disso, esses elementos com $\lambda(0, 0, \ldots, 0) = 1$ excluído formam uma $F-$base para $\Delta(H)$ (o ideal de aumento de FH).

Corolário 2.0.1. *Seja $H =< y : y^{p^n} = 1 >$ um grupo cíclico de ordem p^n e seja F um*

corpo de característica p. Então

$$B = \{(y-1)^k : \ 0 \leq k \leq p^n - 1\}$$

é uma $F-$base da álgebra de grupo FH.

Demonstração (Alternativa).

Para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, escolha $g_i \in H_i - H_{i+1}$ como $g_i = y^{\frac{p^n}{p^{n-(i-1)}}} = y^{p^{i-1}}$.
Pelo Lema 2.0.2 segue que os elementos

$$\begin{aligned}
\lambda(a_1, a_2, \ldots, a_n) &= \textstyle\prod_{i=1}^{n}(g_i - 1)^{a_i} \qquad (0 \leq a_i \leq p-1) \\
&= (y-1)^{a_i}(y^p - 1)^{a_i} \cdots (y^{p^{n-1}} - 1)^{a_i} \\
&= (y-1)^{a_i}(y-1)^{pa_i} \cdots (y-1)^{p^{n-1}a_i} \\
&= (y-1)^{(1+p+\cdots+p^{n-1})\ a_i} \\
&= (y-1)^{(\frac{p^n-1}{p-1})a_i} \\
&= (y-1)^k, \text{ em que } \ k = \left(\frac{p^n-1}{p-1}\right) a_i,
\end{aligned}$$

formam uma $F-$base de FH. Além disso, como $0 \leq a_i \leq p-1$ obtemos $0 \leq \dfrac{a_i}{p-1} \leq 1$ e consequentemente, $0 \leq \left(\dfrac{p^n-1}{p-1}\right) a_i \leq p^n - 1$, isto é, $0 \leq k \leq p^n - 1$. Portanto

$$B = \{(y-1)^k : 0 \leq k \leq p^n - 1\}$$

é uma $F-$base de FH.

■

Observação. Seja $H = H_1 \times H_2$, em que H_1 e H_2 são grupos finitos, e seja F um corpo. Sejam β_1 e β_2 $F-$bases de FH_1 e FH_2, respectivamente.
Como existe um isomorfismo

$$\begin{aligned}
f^* : \ FH_1 \bigotimes FH_2 &\longrightarrow F[H_1 \times H_2] \quad \text{tal que} \\
f^*(u \bigotimes v) &= uv \quad (u \in FH_1, \ v \in FH_2)
\end{aligned}$$

segue que $B = f^*(\beta_1 \bigotimes \beta_2)$ é uma $F-$base de $F[H_1 \times H_2] = FH$.

Usando a observação anterior, segue pelo Corolário 2.0.1 e por indução o seguinte

Lema 2.0.5. *Seja* $H =< a_1 > \times \cdots \times < a_r >$ *um* $p-$*grupo abeliano finito decomposto como um produto direto de* $p-$*subgrupos cíclicos* $< a_1 >, \ldots, < a_r >$, *de ordens* $p^{n_1}, \ldots, p^{n_r}$, *respectivamente. Seja* F *um corpo de característica* p. *Então*

$$B = \{(a_1 - 1)^{k_1}(a_2 - 1)^{k_2} \cdots (a_r - 1)^{k_r} : \ 0 \leq k_i \leq p^{n_i} - 1, \ i = 1, \ldots, r\}$$

é uma $F-$*base da álgebra de grupo* FH.

Uma outra demonstração do Lema 2.0.3 pode ser vista no ártigo de W. E. Deskins, "Finite abelian groups with isomorphic group algebras", Duke Math. J. 23 (1956), 35-40.

Vimos no Lema 1.2.1 que dada uma ação parcial $\alpha = (\{\mathcal{A}_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$ de um grupo G sobre uma álgebra $\mathcal{A}$, então $\mathcal{A}$ é fortemente associativa se, e somete se, a condição (1.1) verifica-se, isto é,

$$(\alpha_g \circ R_c \circ \alpha_{g^{-1}}) \circ L_a = L_a \circ (\alpha_g \circ R_c \circ \alpha_{g^{-1}})$$

é válida em $\mathcal{A}_g$, para todo $g \in G$ e todo $a, c \in FH$.

Para evitar repetições de argumentos, foi obtido o seguinte

Lema 2.0.6. *Seja* H *um grupo finito e seja* F *um corpo. Seja* G *um grupo qualquer e* $\alpha = (\{\mathcal{A}_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$ *uma ação parcial arbitrária de* G *sobre a álgebra de grupo* FH. *Suponha que* $g \in G$ *é tal que* $\mathcal{A}_g = FH$ *ou* $\mathcal{A}_g = \Delta(H)$. *Então a igualdade (1.1) verifica-se em* $\mathcal{A}_g$, *com* $a, c \in F$ *arbitrários.*

Demonstração : Queremos provar que

$$(\alpha_g \circ R_c \circ \alpha_{g^{-1}}) \circ L_a = L_a \circ (\alpha_g \circ R_c \circ \alpha_{g^{-1}})$$

é válida em $\mathcal{A}_g$, $\forall\ a, c \in FH$.

Com efeito, se $\mathcal{A}_g = FH$, então α_g é um automorfismo de FH. Como $a \in \mathcal{A}_g$ obtemos para $b \in \mathcal{A}_g$, $c \in FH$, que

$$\begin{aligned} \alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}(ab)\ c\right) &= \alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}(a)\ \alpha_{g^{-1}}(b)\ c\right) \\ &= \alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}(a)\right)\ \alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}(b)\ c\right) \\ &= a\ \alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}(b)\ c\right), \end{aligned}$$

e a igualdade (1.1) verifica-se neste caso.

Agora, se $\mathcal{A}_g = \Delta(H)$, sejam $b \in \Delta(H)$, $a, c \in FH$. Usando que $FH = \Delta(H) \bigoplus F$ (soma direta de $F-$espaços), escreva $a = a' + \lambda$, em que $a' \in \Delta(H)$, $\lambda \in F$.
Então

$$\begin{aligned}
\alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}(ab)\ c\right) &= \alpha_g\left(\left(\alpha_{g^{-1}}(a'b)\ c\right) + \alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}(\lambda b)\ c\right)\right. \\
&= \alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}(a')\alpha_{g^{-1}}(b)\ c\right) + \lambda\ \alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}(b)\ c\right) \\
&= a'\ \alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}(b)\ c\right) + \lambda\ \alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}(b)\ c\right) \\
&= (a' + \lambda)\ \alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}(b)\ c\right) \\
&= a\ \alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}(b)\ c\right),
\end{aligned}$$

de modo que a igualdade (1.1) é satisfeita em $\mathcal{A}_g = \Delta(H)$.

■

A seguir são apresentados dois exemplos de álgebras de grupo fortemente associativas.

2.1 Grupo Cíclico de ordem 2

Exemplo 2.1.1: *Seja* $H =< y : y^2 = 1 >$ *um grupo cíclico de ordem* 2, *e seja* F *um corpo de característica* 2. *Então a álgebra de grupo* FH *é fortemente associativa.*

Com efeito, pelo Lema 2.0.1 o único ideal não trivial de FH é $J(FH) = FH(y-1)$.

Seja G um grupo qualquer e $\alpha = (\{\mathcal{A}_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$ uma ação parcial arbitrária de G sobre FH. Então, para todo $g \in G$, temos $\mathcal{A}_g = FH$ ou $\mathcal{A}_g = J(FH)$. Como H é um $2-$grupo segue que $J(FH) = \Delta(H)$. Pelo Lema 2.0.4, segue que a condição (1.1) é satisfeita. Portanto, FH é fortemente associativa.

2.2 Grupo Cíclico de ordem 3

Exemplo 2.2.1: *Seja* $H =< y : y^3 = 1 >$ *um grupo cíclico de ordem* 3, *e seja* F *um corpo de característica* 3. *Então a álgebra de grupo* FH *é fortemente associativa.*

De fato, pelo Lema 2.0.1 temos que os únicos ideais não triviais de FH são $J(FH) = FH(y-1)$ e $J(FH)^2 = FH(y-1)^2$.

Seja G um grupo qualquer e $\alpha = (\{\mathcal{A}_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$ uma ação parcial arbitrária de G sobre FH. Neste caso, $\forall g \in G$, temos $\mathcal{A}_g = FH$ ou $\mathcal{A}_g = J(FH)$, ou $\mathcal{A}_g = J(FH)^2$.

Como H é um 3−grupo segue que $J(FH) = \Delta(H)$. Logo, pelo Lema 2.0.4, a igualdade (1.1) é válida em $\mathcal{A}_g = FH$ e em $\mathcal{A}_g = J(FH)$.

Agora, seja $\mathcal{A}_g = J(FH)^2$. Como $dim_F J(FH)^2 = 1$, vemos facilmente que $\alpha_g \circ R_c \circ \alpha_{g^{-1}}$ e L_a comutam em $\mathcal{A}_g$, $\forall\, a, c \in FH$. Portanto, FH é fortemente associativa.

Os próximos exemplos exibem álgebras de grupo as quais não são fortemente associativas.

2.3 Grupo Cíclico de ordem 4

Exemplo 2.3.1: *Seja* $H =< y : y^4 = 1 >$ *um grupo cíclico de ordem* 4, *e seja* F *um corpo de característica* 2. *Então* FH *não é fortemente associativa.*

Com efeito, pelo Corolário 2.0.1, $B = \{1, (y-1), (y-1)^2, (y-1)^3\}$ é uma F−base de FH. Tome I o ideal gerado por $(y-1)^2$ (I é o subespaço de FH gerado por $(y-1)^2$ e $(y-1)^3$). Seja $G =< g : g^2 = 1 >$ um grupo cíclico de ordem 2.

Considere a ação parcial α de G sobre FH dada por $\mathcal{A}_g = I$, e

$$\begin{aligned} \alpha_g : \ (y-1)^2 &\longrightarrow (y-1)^3 \\ (y-1)^3 &\longrightarrow (y-1)^2. \end{aligned}$$

(Por definição $\mathcal{A}_1 = FH$ e α_1 é o automorfismo identidade de FH).
Agora, tomando $x = (y-1)\delta_1 + (y-1)^2\delta_g$, obtemos:

$$\begin{aligned} xx &= ((y-1)\delta_1 + (y-1)^2\delta_g)\,((y-1)\delta_1 + (y-1)^2\delta_g) \\ &= (y-1)^2\delta_1 + (y-1)^3\delta_g + 0 + 0. \end{aligned}$$

Por um lado, temos

$$\begin{aligned}(xx)x &= [(y-1)^2\delta_1 + (y-1)^3\delta_g]\,((y-1)\delta_1 + (y-1)^2\delta_g)\\ &= (y-1)^3\delta_1 + 0 + (y-1)^2\delta_g + 0\\ &= (y-1)^3\delta_1 + (y-1)^2\delta_g;\end{aligned}$$

enquanto

$$\begin{aligned}x(xx) &= ((y-1)\delta_1 + (y-1)^2\delta_g)\,((y-1)^2\delta_1 + (y-1)^3\delta_g)\\ &= (y-1)^3\delta_1 + 0 + 0 + 0\\ &= (y-1)^3\delta_1.\end{aligned}$$

Como $(xx)x \neq x(xx)$, segue que FH não é fortemente associativa.

2.4 Grupo de Klein

Exemplo 2.4.1: *Seja* $H = \dfrac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \times \dfrac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} = < a_1 : a_1^2 = 1 > \times < a_2 : a_2^2 = 1 >$, *e seja* F *um corpo de característica* 2. *Então a álgebra de grupo* FH *não é fortemente associativa.*

Com efeito, pelo Lema 2.0.3 $B = \{1, (a_1-1), (a_2-1), (a_1-1)(a_2-1)\}$ é uma $F-$base de FH. Seja $G =< g : g^2 = 1 >$ um grupo cíclico de ordem 2 e tome I o ideal de FH gerado por $v = (a_2 - 1)$ (I é o subespaço gerado por v e $(a_1 - 1)v$).

Considere a ação parcial α de G sobre FH dada por $\mathcal{A}_g = I$,

$$\begin{aligned}\alpha_g :\ v &\longrightarrow (a_1 - 1)v\\ (a_1 - 1)v &\longrightarrow v.\end{aligned}$$

(Por definição $\mathcal{A}_1 = FH$ e α_1 é a aplicação identidade de FH). Então o produto cruzado $FH *_\alpha G$ não é associativo. Para ver isso, tome $x = (a_1 - 1)\delta_1 + v\delta_g$. Neste caso é fácil ver que $(xx)x = v\delta_g$, enquanto $x(xx) = 0$.

Como $(xx)x = v\delta_g \neq 0 = x(xx)$ segue o resultado.

2.5 $H = \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$

Exemplo 2.5.1: *Seja* $H = \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} = < a_1 : a_1^2 = 1 > \times < a_2 : a_2^2 = 1 > \times < a_3 : a_3^2 = 1 >$, *e seja* F *um corpo de característica* 2. *Então a álgebra de grupo* FH *não é fortemente associativa.*

De fato, pelo Lema 2.0.3

$$B = \{1, (a_1-1), (a_2-1), (a_1-1)(a_2-1), (a_3-1), (a_1-1)(a_3-1), (a_2-1)(a_3-1), (a_1-1)(a_2-1)(a_3-1)\}$$

é uma $F-$base de FH. Seja $G =< g : g^2 = 1 >$ um grupo cíclico de ordem 2 e tome I o ideal de FH gerado por $v = (a_2 - 1)(a_3 - 1)$ (I é o subespaço gerado por v e $(a_1 - 1)v$).

Considere a ação parcial α de G sobre FH dada por $\mathcal{A}_g = I$,

$$\alpha_g : v \longrightarrow (a_1 - 1)v, \quad (a_1 - 1)v \longrightarrow v.$$

Tome $x = (a_1 - 1)\delta_1 + v\delta_g$. Como no Exemplo 2.4.1 é fácil ver que $(xx)x = v\delta_g$, enquanto $x(xx) = 0$, logo FH não é fortemente associativa.

2.6 $H = \frac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$

Exemplo 2.6.1: *Seja* $H = \frac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} = < a_1 : a_1^4 = 1 > \times < a_2 : a_2^2 = 1 >$, *e seja* F *um corpo de característica* 2. *Então a álgebra de grupo* FH *não é fortemente associativa.*

Com efeito, novamente pelo Lema 2.0.3,

$$B = \{1, (a_1-1), (a_1-1)^2, (a_1-1)^3, (a_2-1), (a_1-1)(a_2-1), (a_1-1)^2(a_2-1), (a_1-1)^3(a_2-1)\}$$

é uma $F-$base de FH. Considere também $G =< g : g^2 = 1 >$ um grupo cíclico de ordem 2 e tome agora I o ideal de FH gerado por $v = (a_1 - 1)^2(a_2 - 1)$ (I é o subespaço gerado por v e $(a_1 - 1)v$).

Tomando a ação parcial α de G sobre FH dado por $\mathcal{A}_g = I$,

$\alpha_g : v \longrightarrow (a_1 - 1)v$, $(a_1 - 1)v \longrightarrow v$, então para $x = (a_1 - 1)\delta_1 + v\delta_g$, obtemos

$$\begin{aligned} xx &= ((a_1 - 1)\delta_1 + v\delta_g)\,((a_1 - 1)\delta_1 + v\delta_g) \\ &= (a_1 - 1)^2\delta_1 + (a_1 - 1)v\delta_g + 0 + 0. \end{aligned}$$

Por um lado, temos

$$\begin{aligned} (xx)x &= [(a_1 - 1)^2\delta_1 + (a_1 - 1)v\delta_g]\,((a_1 - 1)\delta_1 + v\delta_g) \\ &= (a_1 - 1)^3\delta_1 + 0 + v\delta_g + 0 \\ &= (a_1 - 1)^3\delta_1 + v\delta_g; \end{aligned}$$

enquanto

$$\begin{aligned} x(xx) &= ((a_1 - 1)\delta_1 + v\delta_g)\,[(a_1 - 1)^2\delta_1 + (a_1 - 1)v\delta_g] \\ &= (a_1 - 1)^3\delta_1 + 0 + 0 + 0 \\ &= (a_1 - 1)^3\delta_1. \end{aligned}$$

Como $(xx)x \neq x(xx)$, segue que FH não é fortemente associativa.

CAPÍTULO 3

O Problema de Caracterização das Álgebras de Grupo Fortemente Associativas

Iniciamos agora o estudo da caracterização das álgebras de grupo FH fortemente asociativas, em que H é um grupo finito e F é um corpo cuja característica p divide a ordem de H.

3.1 O Grupo é Cíclico de ordem p prima

Os Exemplos 2.1.1, 2.2.1 e 2.3.1 sugerem a validade da seguinte

Proposição 3.1.1. *Seja* $H =< y : y^p = 1 >$ *um grupo cíclico de ordem* p *e seja* F *um corpo de característica* $p > 0$. *Então a álgebra de grupo* FH *é fortemente associativa se, e somente se,* $|H| = 2$ *ou* $|H| = 3$.

Demonstração: ($\Longleftarrow$) Se $|H| = 2$ ou $|H| = 3$, vimos nos Exemplos 2.1.1 e 2.2.1, respectivamente, que FH é fortemente associativa.

($\Longrightarrow$) Reciprocamente, se FH é fortemente associativa, suponhamos que $|H| \geq 5$.

Sendo H cíclico, temos pelo Lema 2.0.1 que $J(FH)^{p-2}$ tem dimensão 2 sobre F, e

podemos afirmar que $J(FH) \supsetneq J(FH)^{p-2}$.
Pelo Corolário 2.0.1,

$$B = \{1, (y-1), \ldots, (y-1)^{p-2}, (y-1)^{p-1}\}$$

é uma $F-$base de FH, de modo que $J(FH)^{p-2} = FH(y-1)^{p-2}$ é o subespaço gerado por $(y-1)^{p-2}$ e $(y-1)^{p-1}$.

Tome $G =< g : g^2 = 1 >$ um grupo cíclico de ordem 2 , $I = J(FH)^{p-2}$ e considere a ação parcial α de G sobre FH dada por $\mathcal{A}_{g^{-1}} = \mathcal{A}_g = I$, e

$$\begin{array}{rccl} \alpha_g : & \mathcal{A}_{g^{-1}} & \longrightarrow & \mathcal{A}_g \\ & (y-1)^{p-2} & \longrightarrow & (y-1)^{p-1} \\ & (y-1)^{p-1} & \longrightarrow & (y-1)^{p-2}. \end{array}$$

(Por definição $\mathcal{A}_1 = FH$ e $\alpha_1 = Id_{FH}$). Tomando $x = (y-1)\delta_1 + (y-1)^{p-2}\delta_g$, (note que $(y-1) \in J(FH) \subset FH = \mathcal{A}_1$ e $(y-1) \notin J(FH)^{p-2} = \mathcal{A}_g$), obtemos:

$$\begin{aligned} xx &= ((y-1)\delta_1 + (y-1)^{p-2}\delta_g)\,((y-1)\delta_1 + (y-1)^{p-2}\delta_g) \\ &= (y-1)^2\delta_1 + (y-1)^{p-1}\delta_g + 0 + 0. \end{aligned}$$

Por um lado, temos

$$\begin{aligned} (xx)x &= [(y-1)^2\delta_1 + (y-1)^{p-1}\delta_g]\,((y-1)\delta_1 + (y-1)^{p-2}\delta_g) \\ &= (y-1)^3\delta_1 + 0 + (y-1)^{p-2}\delta_g + 0 \\ &= (y-1)^3\delta_1 + (y-1)^{p-2}\delta_g; \end{aligned}$$

enquanto,

$$\begin{aligned} x(xx) &= ((y-1)\delta_1 + (y-1)^{p-2}\delta_g)\,[((y-1)^2\delta_1 + (y-1)^{p-1}\delta_g)] \\ &= (y-1)^3\delta_1 + 0 + 0 + 0 \\ &= (y-1)^3\delta_1. \end{aligned}$$

Logo, o produto cruzado parcial $FH *_\alpha G$ não é associativo, o que contradiz a hipotese. Portanto, $|H| = 2$ ou $|H| = 3$.

■

3.2 Uma Condição para a Álgebra de Grupo não ser Fortemente Associativa

O próximo resultado desempenha um papel fundamental para o desenvolvimento deste trabalho.

Lema 3.2.1. *Sejam H um grupo finito e $M \neq H$ um subgrupo normal de H. Seja F um corpo de característica p. Se $p|\ |M|$, então a álgebra de grupo FH não é fortemente associativa.*

Demonstração : Denotemos por $T = \{1 = h_1, h_2, \ldots, h_k\}$ um transversal à esquerda de M em H (conjunto completo de representantes de classes à esquerda de M), em que o elemento identidade 1 de H é escolhido como o representante da classe M. Seja $\tilde{h} = 1 + h_2 + \cdots + h_k$, e considere $\widehat{M} = \sum_{x \in M} x$, o qual é um elemento não nulo central de FH. É fácil ver que

$$\tilde{h}\widehat{M} = \widehat{M}\tilde{h} = \widehat{H}, \quad \tilde{h}^2\widehat{M} = k\widehat{H}, \quad \widehat{M}^2 = 0 \text{ (pois } \widehat{M}^2 = |M|\widehat{M}, \text{ e } p|\ |M|).$$

Seja $I =< \widehat{M} >$ o ideal de FH gerado por $\widehat{M}$, o qual tem $F-$base

$$\{\widehat{H}, \widehat{M}, h_2\widehat{M}, \ldots, h_{k-1}\widehat{M}\}.$$

Tome $G =< g : g^2 = 1 >$ um grupo cíclico de ordem 2 , e considere a ação parcial α de G sobre FH dada por $\mathcal{A}_{g^{-1}} = \mathcal{A}_g = I$,

$$\alpha_g : \mathcal{A}_{g^{-1}} \longrightarrow \mathcal{A}_g$$

$$\text{se } k = 2 \begin{cases} \widehat{H} \longrightarrow \widehat{M} \\ \widehat{M} \longrightarrow \widehat{H}, \end{cases}$$

$$\text{e se } k \geq 3 \begin{cases} \widehat{H} \longrightarrow \widehat{M} \\ \widehat{M} \longrightarrow \widehat{H} \\ \cdots \\ \text{fixa os demais} \\ \text{elementos da base} \end{cases}$$

(Por definição $\mathcal{A}_1 = FH$ e $\alpha_1 = Id_{FH}$).

Finalmente, tomando $x = \tilde{h}\delta_1 + \widehat{M}\delta_g$, obtemos:

$$\begin{aligned} xx &= (\tilde{h}\delta_1 + \widehat{M}\delta_g)(\tilde{h}\delta_1 + \widehat{M}\delta_g) \\ &= \tilde{h}^2\delta_1 + \widehat{H}\delta_g + k\widehat{M}\delta_g + 0. \end{aligned}$$

Por um lado, temos

$$\begin{aligned} (xx)x &= [\tilde{h}^2\delta_1 + \widehat{H}\delta_g + k\widehat{M}\delta_g](\tilde{h}\delta_1 + \widehat{M}\delta_g) \\ &= \tilde{h}^3\delta_1 + k\widehat{H}\delta_g + \widehat{M}\delta_g + 0 + k^2\widehat{M}\delta_g + 0 \\ &= \tilde{h}^3\delta_1 + \left[k\widehat{H} + (1+k^2)\widehat{M}\right]\delta_g; \end{aligned}$$

enquanto,

$$\begin{aligned} x(xx) &= \left(\tilde{h}\delta_1 + \widehat{M}\delta_g\right)[\tilde{h}^2\delta_1 + \widehat{H}\delta_g + k\widehat{M}\delta_g] \\ &= \tilde{h}^3\delta_1 + k\widehat{H}\delta_g + k\widehat{H}\delta_g + k^2\widehat{M}\delta_g + 0 + 0 \\ &= \tilde{h}^3\delta_1 + \left[2k\widehat{H} + k^2\widehat{M}\right]\delta_g. \end{aligned}$$

Note que $(xx)x - x(xx) = \left(\widehat{M} - k\widehat{H}\right)\delta_g \neq 0$. Portanto, FH não é fortemente associativa.

■

3.3 O Grupo é Nilpotente

Segue como conseqüência da Proposição 3.1.1 e do Lema 3.2.1 o seguinte

Teorema 3.3.1. *Seja H um grupo nilpotente e seja F um corpo cuja característica p divide a ordem de H. Então a álgebra de grupo FH é fortemente associativa se, e somente se, $|H| = 2$ ou $|H| = 3$.*

Demonstração: ($\Longrightarrow$) Suponha que FH é fortemente associativa.
Afirmação. Devemos ter $|H| = p$.

Com efeito, sendo H nilpotente finito e como p divide $|H|$, temos que o $p-$subgrupo de Sylow P de H não é trivial e é normal em H; Se $P \subsetneq H$ segue pelo Lema 3.2.1 que FH não é fortemente associativa, o que é uma contradição. Logo $H = P$, e existe um

subgrupo normal M de H tal que $|H/M| = p$ (vide [13], Teorema 7.2). Se $M \neq \{1\}$, pelo Lema 3.2.1, obtemos novamente que FH não é fortemente associativa, o que é uma contradição. Portanto, $|H| = p$, provando a afirmação.

Neste caso, pela Proposição 3.1.1 segue que $|H| = 2$ ou $|H| = 3$.

($\Longleftarrow$) Reciprocamente, se $|H| = 2$ ou $|H| = 3$, pelos Exemplos 2.1.1 e 2.2.1 temos que FH é fortemente associativa.

■

3.4 Resultados Auxiliares

Os próximos resultados são bem conhecidos e serão usados nas demonstrações dos teoremas subsequentes.

Teorema 3.4.1. *(Vide [14], p. 182, Teorema 12.9(a)). Seja M um subgrupo normal de H e seja F um corpo de característica p. Suponha que M é um $p'-$grupo e ponha $e = |M|^{-1} \sum_{x \in M} x$. Então e é um idempotente central de FH e $ex = e$ para todo $x \in M$. Além disso,*

$$FH = FHe \bigoplus FH(1-e)$$

é uma decomposição direta de FH em ideais (bilaterais). A aplicação φ de FHe sobre $F(H \backslash M)$ definida por $\varphi(ge) = gM$ $(g \in H)$ é um isomorfismo de $F-$álgebras e também um isomorfismo de $FH-$módulos. Também temos $FH(1-e) = \Delta(H, M)$.

Definição 3.4.1. *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo F. Um idempotente central e em $\mathcal{A}$ é chamado centralmente primitivo se $e \neq 0$ e e não pode ser escrito como uma soma de dois idempotentes centrais ortogonais não nulos em $\mathcal{A}$.*

Proposição 3.4.1. *(Vide [15] , p.57, Proposição 10.8 $(i), (ii)$, ou [14], Teorema 12.1 a), b)). Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo F.*

(i) Existe uma decomposição direta

$$\mathcal{A} = B_1 \bigoplus \cdots \bigoplus B_n$$

de $\mathcal{A}$ em ideais bilaterais indecomponíveis $B_i \neq 0$ com $B_iB_j = 0$ para $i \neq j$.
(ii) Escreva $1 = e_1 + \cdots + e_n$ com $e_i \in B_i$. Então os e_i são idempotentes centralmente primitivos mutuamente ortogonais e $B_i = \mathcal{A}e_i = e_i\mathcal{A}$.

Lembremos agora o importante conceito de bloco.

Definição 3.4.2. *Seja $\mathcal{A} = \oplus_{i=1}^n B_i = \oplus_{i=1}^n \mathcal{A}e_i$ a decomposição definida na Proposição 3.4.1. B_i é chamado um bloco e e_i um idempotente de bloco de $\mathcal{A}$. Escreve-se também $B = B(e)$ para indicar que B é um bloco contendo o idempotente de bloco e.*

A partir da próxima Proposição até a Proposição 3.4.3 $\mathcal{A}$ denotará uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo F.

Sejam $e_1, e_2, \ldots, e_n$ os idempotentes de blocos de $\mathcal{A}$ e seja V um $\mathcal{A}-$ módulo indecomponível. Seja $\mathcal{A} = B(e_1) \oplus \cdots \oplus B(e_n)$ a decomposição direta de $\mathcal{A}$ em soma de blocos. Dizemos que V pertence ao bloco $B(e_i)$ se existe $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que

$$e_iV = V \text{ e } \quad e_jV = 0 \qquad \text{para todo} \quad j \neq i.$$

Observe que se V pertence ao bloco $B(e_i)$, então:
(a) Todos $\mathcal{A}-$módulos isomorfos a V pertencem a $B(e_i)$,
(b) $v = 1 \cdot v = e_iv$ para todo $v \in V$.

Proposição 3.4.2. *(Vide [15], p. 59, Proposição 10.10 (i), (ii), (iii), ou [14], Teorema 12.1 d), e), f)). Seja $\mathcal{A} = B(e_1) \oplus \cdots \oplus B(e_n)$ a decomposição direta de $\mathcal{A}$ em soma de blocos.*
(i) Para todo $\mathcal{A}-$módulo V, $V = \oplus_{i=1}^n e_iV$ é uma decomposição direta de V em $\mathcal{A}-$módulos. Em particular, se V é indecomponível, então $V = e_iV$ para um único $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
(ii) Para cada ideal à esquerda I de $\mathcal{A}$, temos

$$I = \bigoplus_{i=1}^{n} (I \cap B(e_i)).$$

Em particular, cada ideal à esquerda indecomponível pertence a exatamente um dos $B(e_i)$.
(iii) Se $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ são ideais de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2$, então $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ são somas diretas de blocos. Em particular, os blocos são os únicos ideais indecomponíveis que são somandos diretos de $\mathcal{A}$.

Definição 3.4.3. *Seja* ${}_{\mathcal{A}}\mathcal{A} = I_1 \oplus \cdots \oplus I_n$ *uma decomposição de* ${}_{\mathcal{A}}\mathcal{A}$ *em submódulos indecomponíveis* $\{I_i\}$. *Esses somandos* $\{I_i\}$ *são chamados os módulos indecomponíveis principais (à esquerda) de* $\mathcal{A}$.

Prova-se (vide [2], Teorema (54.5)) que um ideal à esquerda I de $\mathcal{A}$ é um módulo indecomponível principal de $\mathcal{A}$ se, e somente se, $I = \mathcal{A}e$ para algum idempotente primitivo e em $\mathcal{A}$. Lembremos que um idempotente $e \in \mathcal{A}$ é chamado primitivo se e não pode ser expresso como uma soma de dois idempotentes ortogonais.

Definição 3.4.4. *Dois* $\mathcal{A}-$*módulos indecomponíveis principais gerados por idempotentes primitivos* e *e* f *estão ligados se existe uma seqüência* $e_1, \cdots, e_n$ *de idempotentes primitivos com* $e_1 = e$, $e_n = f$, *tal que para cada* i, $\mathcal{A}e_i$ *e* $\mathcal{A}e_{i+1}$ *têm um fator de composição em comum. Dois idempotentes primitivos* e *e* f *estão ligados quando os módulos* $\mathcal{A}e$ *e* $\mathcal{A}f$ *estão ligados. A relação* $\sim$ *de estar ligado é uma relação de equivalência, e podemos decompor o conjunto de todos* $\mathcal{A}-$*módulos indecomponíveis principais em um número finito de classes de equivalência.*

No que segue denotamos por $X_1, \ldots, X_m$ as classes de equivalência de $\sim$.

Proposição 3.4.3. (*Vide [15], p. 63, Proposição* 10.14). *Seja* $\mathcal{A} = \oplus_{i=1}^{n} \mathcal{A}e_i$ *uma decomposição de* $\mathcal{A}$ *em módulos indecomponíveis principais, e para cada* $j \in \{1, \ldots, m\}$ *ponha*

$$I_j = \bigoplus_{\mathcal{A}e_i \in X_j} \mathcal{A}e_i$$

(i) $I_i, \ldots, I_m$ *são todos os blocos de* $\mathcal{A}$.
(ii) Dois $\mathcal{A}-$*módulos indecomponíveis principais estão ligados se e somente se eles pertencem ao mesmo bloco.*

Agora, apresentamos a seguinte

Definição 3.4.5. *Seja* H *um grupo finito e seja* F *um corpo arbitrário de característica* $p > 0$. *Por bloco principal de* FH *entendemos o bloco que contém o* $FH-$*módulo trivial* 1_H *ou* 1_{FH} *(o módulo para a* $1-$*representação ou representação trivial de* H *de grau* 1*).*

Denotemos o p'-subgrupo normal maximal de H por $O_{p'}(H)$, enquanto $O_p(H)$ indica o $p-$subgrupo normal maximal de H.

Definição 3.4.6. *Um grupo H é chamado $p-$restrito se H satisfaz a propriedade*

$$C_H\left(\tilde{H}/M\right) \subset \tilde{H}$$

para $M = O_{p'}(H)$ e $\tilde{H} = O_{p',p}(H)$ (imagem inversa de $O_p(H/M)$ em H).

Proposição 3.4.4. *(Vide [15], p. 115, Proposição 1.20). Seja H $p-$restrito, seja $M = O_{p'}(H)$ e seja $e = |M|^{-1}\sum_{x\in M} x$. Então $FHe \simeq F(H/M)$ é o bloco principal de FH.*

3.5 O Grupo é de Frobenius com complemento P

Alguns resultados conhecidos permitem facilmente caracterizar as álgebras de grupo modulares fortemente associativas tais que H é um grupo de Frobenius com complemento P, em que P é um $p-$subgrupo de Sylow de H.

Lembremos inicialmente a definição de grupo de Frobenius.

Definição 3.5.1. *Um grupo de permutações H agindo sobre um conjunto S é dito transitivo quando para $s, s' \in S$, existe $\gamma \in H$ tal que $\gamma(s) = s'$.*

Definição 3.5.2. *Um grupo de permutações transitivo H sobre m letras no qual somente a identidade fixa mais que uma letra, mas para alguma letra i, $1 \leq i \leq m$, o subgrupo fixando i é não-trivial, é chamado um grupo de Frobenius.*

Os seguintes resultados bem conhecidos serão usados nesta seção:

Teorema 3.5.1. *(Frobenius) (Vide [11], p. 38, Teorema 7.5). Seja H um grupo de Frobenius e seja H_1 o subgrupo fixando uma letra. Então o subgrupo de H consistindo da identidade junto com aqueles elementos os quais fixam nenhuma letra formam um subgrupo normal M de H de ordem $(H : H_1)$.*

M é chamado o núcleo de Frobenius de H e H_1 é chamado um complemento de Frobenius.

Lema 3.5.1. *(Vide [11], p. 38, Teorema 7.6).*
Seja H um grupo de Frobenius com complemento H_1 e núcleo M. Então
(i) $H = MH_1$ com $M \cap H_1 = \{1\}$, de modo que H é o produto semidireto de M por H_1.
(ii) $|H_1|$ divide $|M| - 1$.
(iii) Todo elemento de $H_1 - \{1\}$ induz por conjugação um automorfismo de M o qual fixa somente o elemento identidade de M.
(iv) $C_H(y) \subseteq M$ para todo y em $M - \{1\}$.

Observação 3.5.1. *Prova-se (em [11], p. 39, Teorema 7.7) o seguinte resultado:*

Seja H_1 um subgrupo não trivial de H. Então H é um grupo de Frobenius com complemento H_1 se, e somente se, H_1 é disjunto de seus conjugados e $N_H(H_1) = H_1$.

Observação 3.5.2. *Pova-se também (vide [17], p. 280, Teorema 2.6) que se H é um grupo de Frobenius e M é o núcleo de Frobenius de H, então M é um subgrupo nilpotente. Usando esse resultado é fácil ver que M é o único subgrupo normal próprio de H o qual satisfaz a condição (iv) no Lema 3.5.1. Logo, um grupo de Frobenius tem um único núcleo de Frobenius.*

Teorema 3.5.2. *(Motose (1974)),(Vide [15], p. 189, Teorema 7.7). Seja H um grupo de Frobenius com complemento H_1 e núcleo M e seja F um corpo arbitrário de característica $p > 0$.*
(i) Se p divide $|M|$ e P é um $p-$subgrupo de Sylow de M (e portanto de H, pelo Lema 3.5.1 (ii)), então $J(FH) = FH \cdot \Delta(P) = \Delta(H, P)$.
(ii) Se p não divide $|M|$, então

$$J(FH) = J(FH_1)e \quad e\ dim_F J(FH) = dim_F J(FH_1),$$

em que $e = |M|^{-1} \sum_{m \in M} m.$

Corolário 3.5.1. *(Wallace (1958)),(Vide [15],p. 189). Seja P um $p-$subgrupo de Sylow de H, seja F um corpo de característica p e seja H um grupo de Frobenius com complemento P e núcleo M. Então*

$$J(FH) = \Delta(P)e$$

em que $e = |M|^{-1} \sum_{m \in M} m.$

Em particular, $dim_F J(FH) = |P| - 1.$

O próximo resultado obtido é o

Teorema 3.5.3. *Seja H um grupo de Frobenius com complemento P, em que P é um $p-$subgrupo de Sylow de H, e seja F um corpo de característica $p > 0$. Então a álgebra de grupo FH é fortemente associativa se, e somente se, $|P| = 2$ ou $|P| = 3$.*

Demonstração : Pelo Teorema de Frobenius e Lema 3.5.1 (i), existe um subgrupo normal M de H tal que

$$H = MP, \quad M \cap P = \{1\}.$$

Como $|H| = |M||P|$, M é um $p'-$grupo. Segue obviamente que $M = O_{p'}(H)$ e que H é $p-$restrito.

Seja $e = |M|^{-1} \sum_{x \in M} x$. Pelo Teorema 3.4.1 segue que

$$FH = FHe \oplus FH(1-e), \tag{3.1}$$

em que $FHe \simeq F(H/M) \simeq FP$ e $FH(1-e) = \Delta(H, M)$.

$\Longrightarrow$) Supondo que FH é fortemente associativa, temos pelo Lema 1.2.2 que FHe é fortemente associativa. Como $FHe \simeq FP$ segue que FP é fortemente associativa.
Pelo Teorema 3.3.1, concluimos que $|P| = 2$ ou $|P| = 3$.

$\Longleftarrow$) Reciprocamente, se $|P| = 2$ ou $|P| = 3$, segue de (3.1) e pela Proposição 3.4.2 (iii) que os ideais FHe e $FH(1-e)$ de FH são somas diretas de blocos. Mas, sendo H $p-$restrito, obtemos pela Proposição 3.4.4 que FHe é o bloco principal de FH. Assim,

$$FH = FHe \oplus FHe_1 \oplus \cdots \oplus FHe_n$$

é a decomposição direta de FH em soma de blocos, em que $e, e_1, \ldots, e_n$ são idempotentes centralmente primitivos mutuamente ortogonais.

Agora pelo Corolário 3.5.1 (Wallace), segue que

$$J(FH) = \Delta(P)e = J(FP)e;$$

como $FHe \cong FP$ segue que $J(FHe) = J(FP)e$, e $J(FH) = J(FHe)$. Logo, $J(FHe_i) = 0$, $\forall i = 1, \ldots, n$. Isso implica que cada bloco FHe_i, $i = 1, \cdots, n$, é uma $F-$álgebra simples.

Queremos provar que FH é fortemente associativa. Para isso, seja G um grupo qualquer e $\alpha = (\{\mathcal{A}_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$ uma ação parcial arbitrária de G sobre FH.

Analisemos inicialmente o caso $|P| = 2$. Neste caso, as possibilidades para $\mathcal{A}_g$ são ou $FH, FHe, J(FH) = J(FH)e$, $FHe_{i_1} \oplus \cdots \oplus FHe_{i_t}$, em que $1 \leq i_1 < \cdots < i_t \leq n$, ou $FHe \oplus FHe_{i_1} \oplus \cdots \oplus FHe_{i_t}$ ou $J(FH)e \oplus FHe_{i_1} \oplus \cdots \oplus FHe_{i_t}$.

Vamos provar que a condição (1.1) verifica-se.

Com efeito, em $\mathcal{A}_g = FH$ segue pelo Lema 2.0.4 que a igualdade (1.1) é satisfeita; Em $\mathcal{A}_g = FHe$, $FHe_{i_1} \oplus \cdots \oplus FHe_{i_t}$, e $FHe \oplus FHe_{i_1} \oplus \cdots \oplus FHe_{i_t}$, obtem-se pelo Lema 1.2.3 a validade de (1.1). Agora, como $dim_F J(FH)e = 1$ segue que essa igualdade é válida em $\mathcal{A}_g = J(FH)e$.

Finalmente, seja $\mathcal{A}_g = J(FH)e \oplus FHe_{i_1} \oplus \cdots \oplus FHe_{i_t}$.
Suporemos (para fixar a notação) que $i_1 = 1, \cdots, i_t = t < n$. Como $FHe \simeq FP$ temos que $J(FH)e = J(FHe) \simeq J(FP)$. Assim, sendo $FP = J(FP) \oplus F$ (como $F-$espaços), $FHe = J(FH)e \oplus Fe$ (como $F-$espaços). Sejam $b \in \mathcal{A}_g$, $a, c \in FH$. Escreva $a = a' + a_1 + \cdots + a_t + a_{t+1} + \cdots + a_n$, em que $a' \in FHe$, $a_j \in FHe_j$, $j = 1, \ldots, n$, Seja $\tilde{a} = a_1 + \cdots + a_t$, então

$$\alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}(ab)c\right) = \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a'b)c) + \alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}(\tilde{a}b)c\right).$$

Escrevendo agora $a' = a'' + \lambda e$, em que $a'' \in J(FH)e$, $\lambda e \in Fe$, obtemos

$$\alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}(ab)c\right) = \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a''b)c) + \alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}(\lambda eb)c\right) + \alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}(\tilde{a}b)c\right).$$

Note que $a''b = 0$ pois $(J(FH)e)^2 = 0$ e $J(FH)e \cap (FHe_1 \oplus \cdots \oplus FHe_t) = 0$. Assim, como $\tilde{a} \in \mathcal{A}_g$ temos

$$\alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}(ab)c\right) = 0 + \lambda\alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}(eb)c\right) + \tilde{a}\alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}(b)c\right).$$

Afirmação: $\alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}(eb)c\right) = e\alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}(b)c\right)$.

De fato, escreva $b = b' + b''$, em que $b' \in J(FH)e$, $b'' \in FHe_1 \oplus \cdots \oplus FHe_t$.
1° caso: $b'' = 0$. Então $b = b'$, de modo que $eb = eb' = b'$, pois e é a identidade de $J(FH)e$, e tem-se

$$\alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}(eb)c\right) = \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(eb')c) = \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(b')c).$$

Por outro lado, observe que $\mathcal{A}_{g^{-1}} = J(FH)e \oplus \alpha_{g^{-1}}(FHe_1 \oplus \cdots \oplus FHe_t)$, e que $\alpha_{g^{-1}}\left(FHe_1 \oplus \cdots \oplus FHe_t\right)$ é um ideal da forma $FHe_{j_1} \oplus \cdots \oplus FHe_{j_t}$. Como e é a identidade de $JFHe$, temos que

$$e\alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}(b)c\right) = e\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(b')c) = \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(b')c).$$

Assim,

$$\alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}(eb)c\right) = e\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(b)c).$$

2° caso: $b' = 0$. Então $b = b''$ e $eb = eb'' = 0$, de modo que

$$\alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}(eb)c\right) = \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(eb'')c) = 0.$$

Por outro lado, devido ao isomorfismo

$$\alpha_g : J(FH)e \oplus \alpha_{g^{-1}}(FHe_1 \oplus \cdots \oplus FHe_t) \longrightarrow J(FHe) \oplus FHe_1 \oplus \cdots \oplus FHe_t$$

também temos $e\alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}(b)c\right) = 0$. Logo, vale a afirmação neste caso.

Finalmente, se $b = b' + b''$, $b', b'' \neq 0$, pelos 1° e 2° casos segue que

$$\begin{aligned}
\alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}(eb)c\right) &= \alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}(eb')c\right) + \alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}(eb'')c\right) \\
&= e\alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}(b')c\right) + e\alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}(b'')c\right) \\
&= e\alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}(b' + b'')c\right) \\
&= e\alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}(b)c\right),
\end{aligned}$$

e segue a afirmação. Observe que a demonstração dessa afirmação não depende do índice de nilpotência do radical. Portanto,

$$\begin{aligned}
\alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}(ab)c\right) &= \lambda e\alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}(b)c\right) + \tilde{a}\alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}(b)c\right) \\
&= (a'' + \lambda e)\ \alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}(b)c\right) + \tilde{a}\ \alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}(b)c\right) \\
&= (a' + \tilde{a})\ \alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}(b)c\right) \\
&= a\ \alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}(b)c\right),
\end{aligned}$$

isto é, a igualdade (1.1) é satisfeita em $\mathcal{A}_g = J(FH)e \oplus FHe_{i_1} \oplus \cdots \oplus FHe_{i_t}$. Logo, a condição (1.1) verifica-se, e FH é fortemente associativa.

Suponhamos agora que $|P| = 3$. Aqui, as possibilidades para $\mathcal{A}_g$ são ou FH, FHe, $J(FH)e, (J(FH)e)^2, FHe_{i_1} \oplus \cdots \oplus FHe_{i_k}$, $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$, $FHe \oplus FHe_{i_1} \oplus \cdots \oplus FHe_{i_k}$, $J(FH)e \oplus FHe_{i_1} \oplus \cdots \oplus FHe_{i_k}$, ou $(J(FH)e)^2 \oplus FHe_{i_1} \oplus \cdots \oplus FHe_{i_k}$.

Argumentando de modo análogo à demonstração do caso $|P| = 2$, vemos que em $\mathcal{A}_g = FH, FHe, FHe_{i_1} \oplus \cdots \oplus FHe_{i_k}$, e em $FHe \oplus FHe_{i_1} \oplus \cdots \oplus FHe_{i_k}$, a igualdade (1.1) é satisfeita. Agora, como $dim_F(J(FH)e)^2 = 1$ segue que essa igualdade é válida em $\mathcal{A}_g = (J(FH)e)^2$.

Seja $\mathcal{A}_g = J(FH)e$ e sejam $b \in \mathcal{A}_g$, $a, c \in FH$. Escreva $a = a' + a_1 + \cdots + a_n$, onde $a' \in FHe$, $a_j \in FHe_j$, $j = 1, \cdots, n$.
Então $\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(ab)c) = \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a'b)c)$. Usando que $FHe = J(FH)e \oplus Fe$ (como $F-$espaços), escreva $a' = a'' + \lambda e$, em que $a'' \in J(FH)e, \lambda e \in Fe$, para obter

$$\begin{aligned}
\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(ab)c) &= \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a''b)c) + \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(\lambda eb)c) \\
&= a''\ \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(b)c) + \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(\lambda b)c) \\
&= a''\ \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(b)c) + \lambda\ \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(b)c) \\
&= a''\ \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(b)c) + \lambda e\ \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(b)c) \\
&= (a'' + \lambda e)\ \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(b)c) \\
&= a'\ \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(b)c) \\
&= a\ \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(b)c),
\end{aligned}$$

em que usamos que e é a identidade do ideal $\mathcal{A}_g = J(FH)e$. Logo a igualdade (1.1) verifica-se.

Considere agora $\mathcal{A}_g = J(FH)e \oplus FHe_{i_1} \oplus \cdots \oplus FHe_{i_k}$. Suporemos (para fixar a notação) que $i_1 = 1, \ldots, i_k = k < n$. Sejam $b \in \mathcal{A}_g$, $a, c \in FH$. Escreva $a = a' + a_1 + \cdots + a_k + \cdots + a_n$, em que $a' \in FHe$, $a_j \in FHe_j$, $j = 1, \ldots, n$. Seja $\tilde{a} = a_1 + \ldots + a_k$. Então

$$\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(ab)c) = \alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}(a'b)c\right) + \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(\tilde{a}b)c);$$

usando agora que $FHe = J(FH)e \oplus Fe$, escrevemos $a' = a'' + \lambda e$, em que $a'' \in$

$J(FH)e, \lambda e \in Fe$, e obtemos

$$\alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}(ab)c\right) = \alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}(a''b)c\right) + \alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}(\lambda eb)c\right) + \alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}(\tilde{a}b)c\right).$$

Notando que a'', $\tilde{a} \in \mathcal{A}_g$, segue que

$$\alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}(ab)c\right) = a''\ \alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}(b)c\right) + \lambda\ \alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}(eb)c\right) + \tilde{a}\ \alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}(b)c\right).$$

Agora, escrevendo $b = b' + b''$, em que $b' \in J(FH)e$, $b'' \in FHe_1 \oplus \cdots \oplus FHe_k$, e observando que

$$\mathcal{A}_{g^{-1}} = J(FH)e \oplus \alpha_{g^{-1}}(FHe_1 \oplus \cdots \oplus FHe_k),$$

já vimos anteriormente (caso $|P| = 2$) que

$$\alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}(eb)c\right) = e\ \alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}(b)c\right).$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}(ab)c\right) &= a''\ \alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}(b)c\right) + \lambda e\ \alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}(b)c\right) + \tilde{a}\ \alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}(b)c\right) \\
&= (a'' + \lambda e)\ \alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}(b)c\right) + \tilde{a}\ \alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}(b)c\right) \\
&= a'\ \alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}(b)c\right) + \tilde{a}\ \alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}(b)c\right) \\
&= (a' + \tilde{a})\ \alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}(b)c\right) \\
&= a\ \alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}(b)c\right),
\end{aligned}$$

de modo que a igualdade (1.1) é satisfeita em

$$\mathcal{A}_g = J(FH)e \oplus FHe_{i_1} \oplus \cdots \oplus FHe_{i_k}.$$

Finalmente, seja $\mathcal{A}_g = (J(FH)e)^2 \oplus FHe_{i_1} \oplus \cdots \oplus FHe_{i_k}$ e suponhamos, como antes, que $i_1 = 1, \ldots i_k = k < n$. Sejam $b \in \mathcal{A}_g$, $a, c \in FH$. Escreva $a = a' + a_1 + \cdots + a_k + a_{k+1} + \cdots + a_n$, em que $a' \in FHe$, $a_j \in FHe_j$, $j = 1, \ldots, n$. Seja $\tilde{a} = a_1 + \cdots + a_k$. Então

$$\alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}(ab)c\right) = \alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}(a'b)c\right) + \alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}(\tilde{a}b)c\right);$$

usando que $FHe = J(FH)e \oplus Fe$, escrevemos $a' = a'' + \lambda e$, em que $a'' \in J(FH)e, \lambda e \in Fe$, e obtemos

$$\alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}(ab)c\right) = \alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}(a''b)c\right) + \alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}(\lambda eb)c\right) + \alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}(\tilde{a}b)c\right).$$

Note que $a''b = 0$ pois $(J(FH)e)^3 = 0$ e $J(FH)e \cap (FHe_1 \oplus \cdots \oplus FHe_k) = 0$, e que $\tilde{a} \in A_g$. Assim

$$\alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}(ab)c\right) = 0 + \lambda\ \alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}(eb)c\right) + \tilde{a}\ \alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}(b)c\right).$$

Agora, escrevendo $b = b' + b''$, em que $b' \in (J(FH)e)^2$, $b'' \in FHe_1 \oplus \cdots \oplus FHe_k$, e observando que

$$\mathcal{A}_{g^{-1}} = (J(FH)e)^2 \oplus \alpha_{g^{-1}}(FHe_1 \oplus \cdots \oplus FHe_k),$$

já vimos anteriormente que

$$\alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}(eb)c\right) = e\ \alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}(b)c\right).$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}(ab)c\right) &= 0 + \lambda e\ \alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}(b)c\right) + \tilde{a}\ \alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}(b)c\right) \\
&= (a'' + \lambda e)\ \alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}(b)c\right) + \tilde{a}\ \alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}(b)c\right) \\
&= (a' + \tilde{a})\ \alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}(b)c\right) \\
&= a\ \alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}(b)c\right),
\end{aligned}$$

de modo que a igualdade (1.1) é também satisfeita em

$$\mathcal{A}_g = (J(FH)e)^2 \oplus FHe_{i_1} \oplus \cdots \oplus FHe_{i_k}.$$

Portanto, a condição (1.1) verifica-se, e FH é fortemente associativa. Isso completa a demonstração.

■

Exemplo 3.5.1: *Seja $H = A_4$ o grupo alternado de grau 4. Temos*

$$A_4 =< a, b, c : a^2 = b^2 = c^3 = 1,\ ab = ba,\ cac^{-1} = b,\ cbc^{-1} = ab > .$$

Seja F um corpo de característica $p = 3$. Então A_4 é um grupo de Frobenius com complemento $P =< c >$ e núcleo $M =< a, b >$. Note que P é um $3-$subgrupo de Sylow de A_4. Como $|P| = 3$, segue pelo Teorema 3.5.3 que FA_4 é fortemente associativa.

3.6 O Grupo H é $p-$solúvel e $\Delta(H, 0_{p'}(H))$ é uma $F-$álgebra Semisimples

Iniciamos esta seção com a seguinte

Definição 3.6.1. *Seja p um número primo. Um grupo H é dito $p-$solúvel se H tem uma série subnormal*

$$H_o = H \supseteq H_1 \supseteq H_2 \supseteq \cdots \supseteq H_r = \{1\}$$

tal que H_{i-1}/H_i é um $p-$grupo ou um p'-grupo para cada i.

Observação 3.6.1. *Denotando por $\pi(H)$ o conjunto de primos dividindo $|H|$, é fácil ver que todo grupo solúvel (finito) é $p-$solúvel para todo primo p em $\pi(H)$. Além disso, prova-se (vide [17], p. 170) que todo grupo $p-$solúvel é $p-$restrito.*

Aqui, além de alguns resultados anteriores, usaremos o seguinte

Teorema 3.6.1. *(Wallace (1958) [15], p. 198, Teorema 8.11). Seja P um $p-$subgrupo de Sylow de H. Então $dim_F J(FH) = |P| - 1$, se, e somente se, ou $H = P$ ou H é um grupo de Frobenius com complemento P.*

O próximo resultado obtido é o

Teorema 3.6.2. *Sejam H um grupo $p-$solúvel, P um $p-$subgrupo de Sylow de H e seja F um corpo de característica $p > 0$. Suponha que $\Delta(H, O_{p'}(H))$ é uma $F-$álgebra semisimples. Então a álgebra de grupo FH é fortemente associativa se, e somente se, H é um dos seguintes dois tipos:*
(i) H é cíclico de ordem 2 ou 3;
(ii) H é um grupo de Frobenius com complemento P e núcleo H', $|P| = 2$ ou $|P| = 3$.

Demonstração :
$\Longrightarrow$) Suponha que FH é fortemente associativa. Como H é $p-$solúvel, existe um subgrupo normal M de H tal que H/M é um $p'-$grupo ou H/M tem ordem p.

Se H/M é um $p'-$grupo, então P é um $p-$subgrupo de Sylow de M, de modo que p divide $|M|$. Pelo Lema 3.2.1 segue que FH não é fortemente associativa, o que é uma

contradição. Portanto, $|H/M| = p$ e $p \nmid |M|$. Então $M = O_{p'}(H)$ e $H = MP$, $M \cap P = \{1\}$, $|P| = p$.

Note que sendo H/M abeliano segue que $H' \subseteq M$. Se $H' \subsetneq M$, como $H'P \neq H$ é um subgrupo normal de H e p divide $|H'P| = |H'||P|$, teríamos novamente pelo Lema 3.2.1 que FH não é fortemente associativa, o que é uma contradição. Portato $M = H'$.

Se $H' = \{1\}$, então $H = P$ e pela Proposição 3.1.1 temos que $|H| = 2$ ou $|H| = 3$; logo, H é do tipo (i).

Vamos supor a partir de agora que $H' \neq \{1\}$. Neste caso, note que p divide $|P|$ implica que P não é normal em H, e consequentemente H não é nilpotente. Seja $e_1 = |H'|^{-1} \sum_{h' \in H'} h'$.

Pelo Teorema 3.4.1 segue que

$$FH = FHe_1 \oplus FH(1 - e_1),$$

em que $FHe_1 \simeq F(H/H') \simeq FP$ e $FH(1 - e_1) = \Delta(H, H')$.

Sendo FH fortemente associativa, temos pelo Lema 1.2.2 que FHe_1 é fortemente associativa. Como $FHe_1 \simeq FP$ segue que FP é fortemente associativa. Pelo Proposição 3.1.1 concluimos que $|P| = 2$ ou $|P| = 3$.

Agora, como $\Delta(H, H') = FH(1 - e_1)$ é uma $F-$álgebra semisimples, por hipótese, temos que $J(FH(1 - e_1)) = 0$. Assim,

$$\begin{aligned} J(FH) &= J(FHe_1) \oplus J(FH(1 - e_1)) \\ &= J(FHe_1) \simeq J(FP). \end{aligned}$$

Isso implica que $dim_F J(FH) = |P| - 1$. Como $H \neq P$ (pois $H' \neq \{1\}$), concluimos pelo Teorema 3.6.1 que H é um grupo de Frobenius com complemento P (e núcleo H', pela unicidade do núcleo de Frobenius (observação 3.5.2)). Isso completa a demonstração da parte ´´somente se.´´

$\Longleftarrow$) Reciprocamente, se $|H| = 2$ ou $|H| = 3$ vimos nos Exemplos 2.1.1 e 2.2.1, respectivamente, que FH é fortemente associativa.

Agora, se H é um grupo de Frobenius com complemento P e núcleo H', $|P| = 2$ ou $|P| = 3$, segue pelo Teorema 3.5.3 que FH é fortemente associativa. Isso completa a

demonstração.

■

3.7 Um Tipo Particular de Grupo $p-$Solúvel

Lembremos agora a definição de defeito de um bloco, dada em [15], p. 77.

Definição 3.7.1. *Seja $\mathcal{C}$ uma classe de conjugação de H e seja $h \in \mathcal{C}$. Um $p-$subgrupo de Sylow de $C_H(h)$ é chamado um grupo de defeito de $\mathcal{C}$ (com respeito a p).*

Logo, todos grupos de defeito de $\mathcal{C}$ são conjugados e portanto têm a mesma ordem, digamos p^d. O inteiro d é chamado o defeito de $\mathcal{C}$.

Definição 3.7.2. *Seja e um idempotente de bloco de FH e seja $B = B(e)$ (o bloco contendo o idempotente de bloco e). Como $e \in Z(FH)$, segue que (o suporte de e)*

$$supp\ e = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{C}_r$$

para alguns $\mathcal{C}_i \in Cl(H)$(o conjunto de todas as classes de conjugação de H). O maior dos grupos de defeito de $\mathcal{C}_i$, $1 \leq i \leq r$, é chamado um grupo de defeito de e (ou de B).

Prova-se que todos os grupos de defeito de e são conjugados e portanto têm a mesma ordem, digamos p^d. O inteiro d é chamado o defeito de e (ou de B).

Observação 3.7.1. *Sejam H um grupo (finito) e P um $p-$subgrupo de H. Seja F um corpo de característica p. Temos $P \cdot C_H(P) \subset N(P)$. Sejam $\mathcal{C}_1, \ldots \mathcal{C}_s$ todas as classes de conjugação de H. Defina*

$$\mathcal{C}_i' = \sum_{x \in \mathcal{C}_i \cap C_H(P)} x \qquad 1 \leq i \leq s$$

ou $\mathcal{C}_i' = 0$ se $\mathcal{C}_i \cap C_H(P)$ é vazio. Note que se $\mathcal{C}_i' \neq 0$, então $\mathcal{C}_i'$ é uma soma de elementos os quais constituem determinadas classes de conjugação em $N_H(P)$. Logo cada $\mathcal{C}_i'$ pertence

ao centro de $FN_H(P)$. *É fácil ver que* $\sum_{i=1}^{s} FC_i'$ *é um subanel de* $Z(FN_H(P))$. *Podemos definir um* $F-$*homomorfismo*

$$\begin{aligned} \pi : Z(FH) &\longrightarrow \textstyle\sum_{i=1}^{s} FC_i' \subset Z(FN_H(P)) \\ C_i^+ &\longrightarrow C_i', \ 1 \leq i \leq s. \end{aligned}$$

Prova-se (vide [2], Lema (87.14)) que π *é de fato um homomorfismo de álgebras.* π *é chamado homomorfismo de Brauer.*

Usaremos nesta seção os três seguintes resultados bem conhecidos:

Teorema 3.7.1. *(Correspondência de Brauer, vide [2],p. 625, Teorema (87.29) ou [15],p. 223, Teorema 9.21). Seja* P *um* $p-$*subgrupo de* H. *Então o homomorfismo de Brauer* $\pi : Z(FH) \longrightarrow Z(FN_H(P))$ *determina uma correspondência bijetora entre os idempotentes de blocos de* FH *os quais têm* P *como um de seus grupos de defeito e os idempotentes de blocos de* $FN_H(P)$ *os quais têm* P *como seu único grupo de defeito.*

Definição 3.7.3. *Sejam* H *um grupo finito,* $h \in H$, *seja* p *um primo. Diz-se que* h *é* $p-$*regular se sua ordem é prima com* p. *Uma classe de conjugação* C *de* H *é chamada* $p-$*regular se todos os seus elementos são* $p-$*regulares.*
Sejam $C_1 = \{1\}, C_2, \ldots C_r$ *todas as classes* $p-$*regulares de* H. *O conjunto*

$$S_i = \{h \in H : h_{p'} \in C_i\} \qquad (1 \leq i \leq r),$$

em que $h_{p'}$, *a* p'*-parte de* h, *é um elemento* $p-$*regular, chama-se uma seção* $p-$*regular de* H *associada com* C_i.

Segue imediatamente da definição que
(i) $H = \cup_{i=1}^{r} S_i$ com $S_i \cap S_j = \emptyset$ para $i \neq j$, cada S_i é uma união de classes de conjugação de H e S_1 é uma união de classes de conjugação de $p-$elementos (os quais têm ordens divisíveis por p) de H.
(ii) Uma classe de conjugação C de H é uma seção $p-$regular se, e somente se, C tem $p-$defeito zero.

Teorema 3.7.2. *(Vide [15], p. 179, Teorema 6.4 i). Sejam* $S_1, S_2, \ldots, S_r$ *todas as seções* $p-$*regulares de* H *e seja* $Z_{p'} = \sum_{i=1}^{r} FS_i^+$. *Então :*

(i) $Z_{p'}$ *é um ideal de* $Z(FH)$ *e os idempotentes primitivos de* $Z_{p'}$ *são os idempotentes de blocos de* FH *de defeito zero.*
(ii) Um bloco B *de* FH *é de defeito zero se, e somente se,* B *é uma* $F-$*álgebra simples.*

Lema 3.7.1. *(Vide [15], p. 248, Lema 12.2). Seja* B *o bloco principal de* FH*. Então os* $p-$*subgrupos de Sylow de* H *são grupos de defeito de* B*. Em particular, se* $J(B) = 0$ *então* $J(FH) = 0$.

Usaremos também o Teorema 3.6.2 para demonstrar o seguinte

Teorema 3.7.3. *Seja* H *um grupo* $p-$*solúvel,* $H = MN_H(P)$, $M \cap N_H(P) = \{1\}$, *em que* $M = O_{p'}(H) \neq \{1\}$ *e* P *é um* $p-$*subgrupo de Sylow de* H*, e seja* F *um corpo de característica* $p > 0$*. Então a álgebra de grupo* FH *é fortemente associativa se, e somente se,* H *é um grupo de Frobenius com complemento* P *e núcleo* H', $|P| = 2$ *ou* $|P| = 3$. *(Em particular,* $N_H(P) = P$*).*

Demonstração
$\Longrightarrow$) Suponha que FH é fortemente associativa.

Seja $e_1 = |M|^{-1} \sum_{x \in M} x$. Pelo Troerema 3.4.1 temos que

$$FH = FHe_1 \oplus FH(1 - e_1),$$

em que $FHe_1 \simeq F(H/M) \simeq FN_H(P)$ e $FH(1 - e_1) = \Delta(H, M)$. Sendo FH fortemente associativa, segue pelo Lema 1.2.2 que FHe_1 é fortemente associativa; como $FHe_1 \simeq FN_H(P)$, obtemos que $FN_H(P)$ é fortemente associativa. Isso implica que $N_H(P) = P$, pois se $P \subsetneq N_H(P)$, como p divide $|P|$ e $P \lhd N_H(P)$, teriamos pelo Lema 3.2.1 que $FN_H(P)$ não é fortemente associativa, o que é uma contradição.
Portanto, $N_H(P) = P$. Pelo Teorema 3.3.1 segue que $|P| = 2$ ou $|P| = 3$.

Afirmação: $\Delta(H, O_{p'}(H))$ é uma $F-$álgebra semisimples.

Pela Proposição 3.4.2 (iii) segue que os ideais FHe_1 e $FH(1 - e_1)$ de FH são somas diretas de blocos. Mas, sendo H $p-$solúvel, temos que H é $p-$restrito, e pela Proposição 3.4.4 segue que FHe_1 é o bloco principal de FH. Assim,

$$FH = FHe_1 \oplus FHe_2 \oplus \cdots \oplus FHe_n$$

é a decomposição direta de FH em soma de blocos, em que $e_1, e_2, \ldots, e_n$ são idempotentes centralmente primitivos mutuamente ortogonais.

Porque $|P| = 2$ ou $|P| = 3$, temos pela Definição 3.7.2 que os blocos de FH têm defeito 1 ou 0. Agora, pelo Lema 3.7.1, os $p-$subgrupos de Sylow de H são grupos de defeito do bloco principal FHe_1. Portanto, FHe_1 é um bloco de defeito 1.

Como $FN_H(P) = FP \simeq FHe_1$ segue que $FN_H(P)$ contém somente um bloco, obviamente com grupo de defeito P. Então, pelo Teorema 3.7.1 (de correspondência de Brauer) deduzimos que FH contém somente um bloco com grupo de defeito P, isto é, de defeito 1. Portanto, o bloco principal FHe_1 é o único bloco de FH de defeito 1.

Assim, $FHe_2, \ldots, FHe_n$ são blocos de defeito zero, e portanto, pelo Teorema 3.7.2 (ii), são $F-$álgebras simples, de modo que $J(FHe_i) = 0$, $\forall\, i = 2, \ldots, n$. Portanto,

$$\begin{aligned} J(\Delta(H, O_{p'}(H)) &= J(FHe_2) \oplus \cdots \oplus J(FHe_n) \\ &= 0, \end{aligned}$$

e segue a afirmação,

Agora, como H é $p-$solúvel, e sendo $O_{p'}(H) \neq \{1\}$, temos pelo Teorema 3.6.2 que H é um grupo de Frobenius com complemento P e núcleo H'. Isso completa a demonstração da parte ´´somente se.´´

$\Longleftarrow$) Reciprocamente, se H é um grupo de Frobenius com complemento P e núcleo H', $|P| = 2$ ou $|P| = 3$, segue pelo Teorema 3.5.3 que FH é fortemente associativa. ■

Exemplo 3.7.1: *Seja $H = S_4$ o grupo das permutações de 4 letras. Temos que $|S_4| = 24$ e H é solúvel. Seja F um corpo de característica 3. O grupo de defeito P do bloco principal B_1 é um $3-$subgrupo de Sylow, o qual é gerado por qualquer $3-$ciclo. Temos*

$$N_H(P) = \{(1), (12), (13), (23), (123), (132)\}, \ |N_H(P)| = 6 \text{ e } N_H(P) \simeq S_3.$$

Denotando por $M = \{(1), (12)(34), (14)(23), (13)(24)\}$, vemos facilmente que

$$S_4 = MN_H(P), \ M \cap N_H(P) = \{1\}, \ M = O_{p'}(H) \lhd S_4.$$

Como $N_H(P) \neq P$, segue pelo Teorema 3.7.3 que FS_4 não é fortemente associativa.

3.8 O Grupo é Metabeliano

Definição 3.8.1. *Um grupo H é chamado um grupo metabeliano se H contém um subgrupo normal M tal que M e H/M são ambos abelianos.*

Definição 3.8.2. *Um grupo H é dito $p-$nilpotente se H tem um $p'-$subgrupo normal N, chamado o $p-$complemento normal, tal que H/N é um $p-$grupo.*

Além de alguns resultados anteriores, usaremos nesta seção os seguintes resultados conhecidos:

Teorema 3.8.1. *(Vide [14], p. 198,Teorema 14.9 a), b), c)). Seja F um corpo de característica p. As seguintes condições são equivalentes:*
a) O bloco principal $\mathcal{B}_1$ de H contém somente um (a menos de isomorfismo) $FH-$módulo irredutível.
b) H é $p-$nilpotente.
c) Todo bloco de H contém somente um FH-módulo irredutível.

Teorema 3.8.2. *(Vide [15], p. 153, Teorema 4.12). Seja N um subgrupo normal de H, seja F um corpo algebricamente fechado e seja V um $FH-$módulo irredutível. Se $Car(F) = p > 0$ divide $(H : N)$, suponha que H/N é $p-$solúvel. Então $dim_F V$ divide $(H : N)s$, em que s é a dimensão de uma componente irredutível de V_N.*

Corolário 3.8.1. *(Dade (1968), Swan (1963)),(Vide [15],p. 154). Seja F um corpo algebricamente fechado de característica $p > 0$ e seja A um subgrupo normal abeliano de um grupo $p-$solúvel H. Então as dimensões dos $FH-$módulos irredutíveis dividem $(H : A)$.*

Teorema 3.8.3. *(Vide [15],p.79, Teorema 2.7). Seja F um corpo algebricamente fechado de característica $p > 0$, seja H um grupo de ordem $p^n m$ com $(p, m) = 1$ e seja B um bloco de FH com defeito d. Então d é o menor inteiro tal que p^{n-d} divide as dimensões de todos os FH-módulos irredutíveis em B.*

Assim como 3.7, veremos que 3.8 é um caso particular de 3.6. De fato, obtem-se o seguinte

Teorema 3.8.4. *Seja H um grupo metabeliano e seja F um corpo algebricamente fechado cuja característica p divide a ordem de H. Então a álgebra de grupo FH é fortemente associativa se, e somente se, H é um dos seguintes dois tipos:*
(i) H é cíclico de ordem 2 ou 3;
(ii) H é um grupo de Frobenius com complemento P e núcleo H', em que P é um $p-$subgrupo de Sylow de H, $|P| = 2$ ou $|P| = 3$.

Demonstração

$\Longrightarrow$) Suponha que FH é fortemente associativa. Se H é abeliano, então pelo Teorema 3.3.1, $|H| = 2$ ou $|H| = 3$; logo, H é do tipo (i). Suponha agora que H não é abeliano. Como H é metabeliano, H contém um subgrupo normal M abeliano tal que H/M é também abeliano. Temos que $M \neq \{1\}$ e $|H| = |M||H/M|$. Note que $p \nmid |M|$, pois caso contrário teríamos pelo Lema 3.2.1 que FH não é fortemente associativa, o que é uma contradição. Como p divide $|H|$ segue que p divide $|H/M|$.

Seja $e_1 = |M|^{-1} \sum_{x \in M} x$. Pelo Teorema 3.4.1 temos que

$$FH = FHe_1 \oplus FH(1 - e_1),$$

em que $FHe_1 \simeq F(H/M)$ e $FH(1 - e_1) = \Delta(H, M)$.

Sendo FH fortemente associativa, temos pelo Lema 1.2.2 que FHe_1 é fortemente associativa. De $FHe_1 \simeq F(H/M)$ segue que $F(H/M)$ é fortemente associativa; Como H/M é abeliano e p divide $|H/M|$ temos pelo Teorema 3.3.1 que $|H/M| = 2$ ou $|H/M| = 3$. Então $M = O_{p'}(H)$ e $H = MP$, $M \cap P = \{1\}$, em que P é um $p-$subgrupo de Sylow de H com $p = |P| = 2$ ou $p = |P| = 3$.

Note que p divide $|P|$ implica que P não é normal em H, e consequentemente H não é nilpotente.

Pela Proposição 3.4.2 (iii) segue que os ideais FHe_1 e $FH(1 - e_1)$ de FH são somas diretas de blocos. Mas sendo H metabeliano implica que H é solúvel, logo é $p-$solúvel, e consequentemente H é $p-$restrito, de modo que pela Proposição 3.4.4, FHe_1 é o bloco principal de FH. Assim,

$$FH = FHe_1 \oplus FHe_2 \oplus \cdots \oplus FHe_k$$

é a decomposição direta de FH em soma de blocos, em que $e_1, \ldots, e_k$ são idempotentes centralmente primitivos mutuamente ortogonais.

Pela Definição 3.7.2 temos que os blocos de FH têm defeito $d = 1$ ou $d = 0$. Agora, pelo Lema 3.7.1, os $p-$subgrupos de Sylow de H são grupos de defeito do bloco principal FHe_1. Portanto, FHe_1 é um bloco de defeito 1.

Afirmação: $\Delta(H, O_{p'}(H))$ é uma $F-$álgebra semisimples.

Vamos provar que todo bloco não principal de FH têm defeito zero.

Suponha que existe $j, 2 \leq j \leq k$, tal que FHe_j é um bloco de defeito 1, isto é, FHe_j é um bloco com grupo de defeito P. Observe que H é $p-$nilpotente. Pelo Teorema 3.8.1 segue que todo bloco de FH contém somente um $FH-$módulo irredutível. Assim, o bloco principal FHe_1 contém somente um $FH-$módulo irredutível, o qual é necessariamente o FH-módulo trivial 1_H (o módulo para a $1-$representação ou representação trivial de H de grau 1).

Se L é um corpo, é bem conhecido que existe uma correspondência $1-1$ entre as $L-$representações unidimensionais distintas de H e as $L-$representações unidimensionais distintas de H/H'. De modo análogo à demonstração do Teorema 3.6.2 temos que $M = O_{p'}(H) = H'$.

Como $H/H' \simeq P$ é um p-grupo (abeliano) segue que a única representação modular irredutível de H/H' é a $1-$representação. Logo,

$$\begin{array}{l} \text{existe uma única F-representação unidimensional} \\ \text{de H, a saber a 1-representação.} \end{array} \tag{3.2}$$

Agora, seja W_j o único FH-módulo irredutível contido no bloco FHe_j. Seja $z_j = dim_F W_j$. Como H é $p-$solúvel e $M = O_{p'}(H)$ é abeliano temos pelo Corolário 3.8.1 que z_j divide $(H : M) = p$. Logo, $z_j = 1$ ou $z_j = p$.

Como FHe_j tem defeito $d = 1$, então pelo Teorema 3.8.3, 1 é o menor inteiro tal que $p^{1-1} = 1$ divide z_j. Isso implica que $z_j = 1$, pois caso contrário zero seria o menor inteiro tal que $p^{1-0} = p$ divide z_j, o que é uma contradição. Mas $z_j = 1$ contradiz (3.2), e segue que para todo $i = 2, \cdots, k$, FHe_i tem defeito zero.

Pelo Teorema 3.7.2 (ii) temos que $FHe_2, \ldots, FHe_k$ são $F-$álgebras simples, de modo que $J(FHe_i) = 0$, $\forall i = 2, \cdots, k$. Assim,

$$\begin{aligned} J(\Delta(H, O_{p'}(H)) &= J(FHe_2) \oplus \cdots \oplus J(FHe_k) \\ &= 0, \end{aligned}$$

e segue a afirmação.

Finalmente, como $O_{p'}(H) \neq \{1\}$, segue pelo Teorema 3.6.2 que H é um grupo de Frobenius com complemento P e núcleo H'. Isso completa a demonstração da parte ´´somente se´´.

$\Longleftarrow$) Segue dos Exemplos 2.1.1 e 2.2.1 e do Teorema 3.5.3. Isso completa a demonstração.

■

3.9 O Grupo H é $p-$Solúvel e $\Delta(H, 0_{p'}(H))$ é uma $F-$álgebra não-Semisimples

Iniciamos esta seção lembrando a seguinte

Definição 3.9.1. *Sejam H um grupo (finito), $M \lhd H$ e seja F um corpo. Seja V um $FM-$módulo e seja $h \in H$. Defina ${}^hV$ o FM-módulo cujo espaço sebjacente é V e sobre o qual os elementos $x \in M$ agem de acordo com a regra*

$$x \cdot v = \left(h^{-1}xh\right) v, \ v \in V.$$

Dizemos que dois $FM-$módulos V_1 e V_2 são $H-$conjugados se $V_1 \simeq {}^hV_2$ para algum $h \in H$. Obviamente $H-$conjugação é uma relação de equivalência, de modo que o conjunto de $FM-$módulos é uma união disjunta de classes de $H-$conjugação.

Serão usados também os seguintes resultados:

Teorema 3.9.1. *(Vide [14], p. 233, Teorema 16.10), (Michler, Srinivasan). Suponha que H é $p-$nilpotente e $M = O_{p'}(H)$. Seja F um corpo perfeito de decomposição para M*

de característica p. Seja $f_1, \ldots, f_m$, *um conjunto completo de representantes das classes de* $H-$ *conjugação de idempotentes centrais indecomponíveis em* $Z(FM)$. *Seja*

$$\mathcal{I}_i = \{\ h \in H :\ hf_ih^{-1} = f_i\}$$

o grupo de inércia de f_i, *e seja*

$$H = \bigcup_{j=1}^{p^{a_i}} h_{ij}\ \mathcal{I}_i$$

uma decomposição de H *em classes à esquerda de* $\mathcal{I}_i$.

a) Os elementos

$$e_i = \sum_{j=1}^{p^{a_i}} h_{ij} f_i\ h_{ij}^{-1} \quad (i = 1, \ldots, m)$$

são os idempotentes centrais indecomponíveis de FH. *Em particular,* H *tem exatamente* m *blocos.*

b) Seja $V_1, \ldots, V_m$, *um conjunto completo de representantes das classes de* $H-$*conjugação de* FM*-módulos irredutíveis. Escreva* $P_i = V_i^H$ $(= FH \bigotimes_{FM} V_i)$. *Então a menos de isomorfismo,* $P_1, \ldots, P_m$ *são todos os* $FH-$*módulos projetivos indecomponíveis.*

c) $W_i = P_i/P_iJ(FH)$ *é um* FH*-módulo absolutamente irredutível. Em particular,* F *é um corpo de decomposição para* H.

d) $(W_i)_M \simeq \bigoplus_{j=1}^{p^{a_i}} h_{ij} \bigotimes V_i$.

Em particular, $dim_F W_i = |H : \mathcal{I}_i|\ dim_F V_i$. *Também, o comprimento de composição de* P_i *é* $|\mathcal{I}_i/M|$.

e) Se $|H/M| = p^a$, *então*

$$dim_F FHe_i = (dim_F V_i)^2\ p^{a+a_i}$$

e

$$dim_F J(FHe_i) = (dim_F V_i)^2\ p^{2a_i}(p^{a-a_i} - 1).$$

Observação 3.9.1. *Observe que conjugação por* $h \in H$ *induz uma ação de* H *sobre os conjuntos de todos idempotentes de blocos de* FM *e todos blocos de* FM, *e que* e_i *é exatamente a soma dos elementos na* $H-$*órbita de* f_i. *Nos referimos à* $H-$*órbita de* f_i *como a classe de* $H-$*conjugação de* f_i.

Corolário 3.9.1. *Seja H um grupo p-nilpotete e seja F um corpo algebricamente fechado de característica p. Se B é um bloco de FH com grupo de defeito D, então $B \simeq M_n(FD)$ para algum $n \geq 1$.*

(Esse último resultado é o Corolário 10.10 do Teorem 10.9 de [15],p. 243).

Teorema 3.9.2. *(Vide [15], p.490),(Koshitani). Seja H um grupo $p-$solúvel e seja B um bloco de FH com grupo de defeito D de ordem p^d. Então*
(i) $d(p-1)+1 \leq t(B) \leq p^d$
(ii) $t(B) = p^d$ *se e somente se D é cíclico. Aqui $t(B)$ indica o índice de nilpotência de $J(B)$.*

Teorema 3.9.3. *(Vide [12], p. 87, Teorema 7.12). Suponha que a característica de F é igual a 2 e $2 \nmid dim_F V$ para qualquer $FH-$módulo irredutível V. Então H tem um $2-$subgrupo de Sylow normal.*

Observação 3.9.2. *O Teorema 3.9.3 permanece verdadeiro se substituirmos 2 por qualquer primo ímpar (vide [12], p. 88, Observação 7.13).*

Estamos agora em condições de demonstrar o último resultado desta tese, a saber o

Teorema 3.9.4. *Sejam H um grupo $p-$solúvel, P um p-subgrupo de Sylow de H e seja F um corpo algebricamente fechado de característica $p > 0$. Suponha que $\Delta(H, O_{p'}(H))$ é uma $F-$álgebra não-semisimples. Então a álgebra de grupo FH é fortemente associativa se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas:*
(i) $H = O_{p'}(H)P$ *(produto semidireto),* $O_{p'}(H) = H'$;
(ii) $|P| = 2$ *ou* $|P| = 3$;
(iii) Todo bloco de FH tem defeito 1 ou 0, pelo menos um bloco não principal de FH tem defeito 1 e pelo menos um bloco não principal de FH tem defeito 0;
(iv) Para qualquer bloco FHe_i de FH de defeito 1, tem-se: Para todo grupo G e toda ação parcial $\alpha = (\{A_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$ de G sobre FH,

$$(\alpha_g \circ R_c \circ \alpha_{g^{-1}}) \circ L_{ye_i} = L_{ye_i} \circ (\alpha_g \circ R_c \circ \alpha_{g^{-1}})$$

é válida em todo A_g contendo $J(FH)e_i$ ou $(J(FH)e_i)^2$, para todo $y \in O_{p'}(H)$, $c \in FH$.

Demonstração

$\Longrightarrow$) Suponha que FH é fortemente associativa.

Porque H é $p-$solúvel, obtemos como na demonstração do Teorema 3.6.2 que $H = MP$, $M \cap P = \{1\}$, $M = O_{p'}(H) = H'$, $|P| = p$.

Seja $e_1 = |M|^{-1} \sum_{y \in M} y$. Pelo Teorema 3.4.1 temos que

$$FH = FHe_1 \oplus FH(1 - e_1), \tag{3.3}$$

em que $FHe_1 \simeq F(H/M) \simeq FP$ e $FH(1 - e_1) = \Delta(H, M)$.

Sendo FH fortemente associativa, temos pelo Lema 1.2.2 que FHe_1 é fortemente associativa. Como $FHe_1 \simeq FP$ segue que FP é fortemente associativa. Pela Proposição 3.1.1 concluimos que $|P| = 2$ ou $|P| = 3$.

Como vale (3.3) segue pela Proposição 3.4.2 (iii) que os ideais FHe_1 e $FH(1 - e_1)$ de FH são somas diretas de blocos. Mas, sendo H p-solúvel, temos que H é $p-$restrito, e pela Proposição 3.4.4 obtemos que FHe_1 é o bloco principal de FH. Assim,

$$FH = FHe_1 \oplus FHe_2 \oplus \cdots \oplus FHe_m$$

é a decomposição direta de FH em soma de blocos, em que $e_1, \ldots, e_m$ são idempotentes centralmente primitivos mutuamente ortogonais.

Porque $|P| = 2$ ou $|P| = 3$, segue pela Definição 3.7.2 que os blocos de FH têm defeito $d = 1$ ou $d = 0$. Agora, pelo Lema 3.7.1, os $p-$subgrupos de Sylow de H são grupos de defeito do bloco principal FHe_1. Portanto, FHe_1 é um bloco de defeito 1.

Como $\Delta(H, O_{p'}(H))$ é uma $F-$álgebra não-semisimples, por hipótese, temos que

$$J(\Delta(H, O_{p'}(H))) = J(FHe_2) \oplus \cdots \oplus J(FHe_m) \neq 0.$$

Isso implica que existe $i, 2 \leq i \leq m$, tal que $J(FHe_i) \neq 0$. Segue que o bloco FHe_i não é uma $F-$álgebra simples, e pelo Teorema 3.7.2 (ii) obtemos que FHe_i não tem defeito zero; logo, o bloco FHe_i tem defeito 1, isto é, é um bloco com grupo de defeito P; agora, se todo bloco não principal de FH tem defeito 1, temos que p não divide $dim_F W$ para qualquer FH-módulo irredutível W. De fato, como H é $p-$nilpotente, temos pelo Teorema 3.8.1 que todo bloco de FH possui um único FH-módulo irredutível. Se p divide $dim_F W$

para algum $FH-$módulo irredutível W, então W pertence a um bloco (não principal) de defeito 1, pois FH não possui blocos de defeito zero. Neste caso, zero seria o menor inteiro tal que $p^{1-0} = p$ divide $dim_F W$ e pelo Teorema 3.8.3, isso contradiz o fato que esse bloco tem defeito 1. Então, pelo Teorema 3.9.3 e Observação 3.9.2, P é normal em H, contradizendo (i). Portanto, existe pelo menos um bloco não principal de defeito zero, provando (iii).

Finalmente, seja G um grupo qualquer e $\alpha = (\{\mathcal{A}_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$ uma ação parcial arbitrária de G sobre FH. Seja FHe_i um bloco de defeito 1 e seja $\mathcal{A}_g$ um ideal contendo $J(FH)e_i$ ou $J(FHe_i)^2$. Como FH é fortemente associativa temos pelo Lema 1.2.1 que a condição (1.1) verifica-se, isto é,

$$(\alpha_g \circ R_c \circ \alpha_{g^{-1}}) \circ L_a = L_a \circ (\alpha_g \circ R_c \circ \alpha_{g^{-1}})$$

é válida em $\mathcal{A}_g$ para todo $g \in G$ e todo $a, c \in FH$. Em particular, para $\mathcal{A}_g$ dado acima,

$$(\alpha_g \circ R_c \circ \alpha_{g^{-1}}) \circ L_{ye_i} = L_{ye_i} \circ (\alpha_g \circ R_c \circ \alpha_{g^{-1}})$$

é válida para todo $y \in O_{p'}(H), c \in FH$. Isso completa a demonstração da parte ´´somente se´´.

$\Longleftarrow$) Reciprocamente, se $H = O_{p'}(H)P$, $O_{p'}(H) \cap P = \{1\}$, $|P| = 2$ ou $|P| = 3$, note que H é $p-$nilpotente. Denotemos por $M = O_{p'}(H)$.

Seja $f_1, \ldots, f_m$, um conjunto completo de representantes das classes de $H-$conjugação de idempotentes de blocos de FM, em que por convenção

$$f_1 = |M|^{-1} \sum_{y\in M} y.$$

Agora, seja $V_1, \ldots V_m$, um conjunto completo de representantes das classes de $H-$conjugação de $FM-$módulos irredutíveis. É bem conhecido que

$$FMf_j \simeq M_{n_j}(F),\ j = 1, \ldots, m, \text{ em que } n_j = dim_F V_j. \tag{3.4}$$

Pelo Teorema 3.9.1 (a) temos que

$$e_i = \sum_{j=1}^{p^{a_i}} h_{ij}\ f_i\ h_{ij}^{-1} \quad (i = 1, \cdots, m)$$

são os idempotentes de blocos de FH. Assim,

$$FH = FHe_1 \oplus \cdots \oplus FHe_m$$

é a decomposição direta de FH em soma de blocos.

Observe que $a_i = 0$ ou $a_i = 1$, pois $|P| = 2$ ou $|P| = 3$.

Se e_i tem defeito 1, então $a_i = 0$, pois se $a_i = 1$ teríamos pelo item (e) do Teorema 3.9.1 que $J(FHe_i) = 0$, o que é uma contradição. Assim, nesse caso, $e_i = h_{i1}\, f_i\, h_{i1}^{-1}$, de modo que $e_i = h_{i1}^{-1} e_i h_{i1} = f_i$. Portanto, supondo que e_i tem defeito 1, obtemos por (3.4) que

$$FMe_i \simeq M_{n_i}(F), \quad n_i = dim_F V_i. \tag{3.5}$$

Agora, porque $f_1 = |M|^{-1} \sum_{y \in M} y$ temos que $e_1 = f_1$.

Sendo H $p-$sóluvel, temos que H é $p-$restrito, e como $e_1 = f_1 = |M|^{-1} \sum_{y \in M} y$ obtemos pela Proposição 3.4.4 que FHe_1 é o bloco principal de FH. Pelo Lema 3.8.1, os $p-$subgrupos de Sylow de H são grupos de defeito do bloco principal. Portanto, FHe_1 é um bloco de defeito 1.

Para fixar a notação vamos supor que $FHe_2, \ldots, FHe_r$, $r < m$, são também blocos de defeito 1, isto é, blocos com grupos de defeito P, e $FHe_{r+1}, \ldots, FHe_m$ são blocos de defeito zero, ou seja, são $F-$álgebras simples.

Pelo Corolário 3.9.1, temos para cada $i = 2, \ldots, r$, que

$$FHe_i \simeq M_{k_i}(FP), \text{ para algum } k_i \geq 1. \tag{3.6}$$

Pelo Teorema 3.9.1 (e), segue que $k_i = n_i = dim_F V_i$. Note que $n_i > 1$, pois caso contrário teríamos pelo Teorema 3.9.1 (d) que $dim_F W_i = |H : \mathcal{I}_i| dim_F V_i = p^{a_i} dim_F V_i = 1$ (pois $a_i = 0$). Mas $H/H' \simeq P$ é um $p-$grupo, de modo que H tem uma única representação modular unidimensional, a saber a representação trivial de H de grau 1, o que é uma contradição. Note também que n_i não é divisível por p, pois caso contrário teríamos pelo Teorema 3.9.1 (d) que $dim_F W_i$ é divisível por p, de modo que zero seria o menor inteiro tal que $p^{1-0} = p$ divide $dim_F W_i$, e pelo Teorema 3.8.3, isso contradiz o fato que FHe_i tem defeito 1.

Agora, (3.6) implica em

$$J(FHe_i) \simeq M_{n_i}(J(FP)), \quad i = 2, \ldots, r. \tag{3.7}$$

Por (3.5), temos que

$$FMe_i \simeq M_{n_i}(F), \quad i = 2, \ldots, r. \tag{3.8}$$

Usando que $FP = J(FP) \oplus F$ (soma direta de $F-$espaços) obtemos para cada i, $2 \leq i \leq r$, que

$$M_{n_i}(FP) = M_{n_i}(J(FP)) \oplus M_{n_i}(F) \text{ (soma direta de F-espaços).}$$

Assim, $dim_F M_{n_i}(FP) = dim_F M_{n_i}(J(FP)) + dim_F M_{n_i}(F)$, e por (3.6),(3.7) e (3.8) segue que

$$dim_F FHe_i = dim_F J(FH)e_i + dim_F FMe_i.$$

Como $J(FH)e_i \oplus FMe_i \subseteq FHe_i$, concluimos que

$$FHe_i = J(FH)e_i \oplus FMe_i, \quad i = 2, \ldots, r \tag{3.9}$$

(soma direta de $F-$espaços).

Note que se $i = 1$, então (3.9) torna-se: $FHe_1 = J(FH)e_1 \oplus Fe_1$.

Queremos provar que FH é fortemente associativa. Para isso, seja G um grupo qualquer e $\alpha = (\{\mathcal{A}_g\}_{g \in G}, \{\alpha_g\}_{g \in G})$ uma ação parcial arbitrária de G sobre FH.

Analisemos inicialmente o caso $|P| = 2$. Por simplificação, considere $r = 2$.

Seja $\mathcal{A}_g = J(FH)e_2$. Vamos provar que a igualdade (1.1),

$$\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a\ b)c) = a\ \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(b)c),$$

é válida para todo $b \in \mathcal{A}_g$, $a, c \in FH$. Escreva $a = a_1 + a_2 + \cdots + a_m$, em que $a_j \in FHe_j$, $j = 1, \ldots, m$. Então, $\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a\ b)c) = \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a_2\ b)c)$.

Agora, usando (3.9), *escreva* $a_2 = a_2' + y_2$, *em que* $a_2' \in J(FH)e_2$, $y_2 \in FMe_2$. (3.10)

Assim, usando a hipótese (iv),

$$\begin{aligned}
\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a\ b)c) &= \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a_2'\ b)c) + \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(y_2\ b)c) \\
&= a_2'\ \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(b)c) + y_2\ \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(b)c) \\
&= (a_2' + y_2)\ \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(b)c) \\
&= a_2\ \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(b)c) \\
&= a\ \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(b)c),
\end{aligned}$$

Portanto a igualdade (1.1) é válida em $\mathcal{A}_g$.

Agora, seja $\mathcal{A}_g = J(FH)e_1 \oplus J(FH)e_2$. Sejam $b \in \mathcal{A}_g$, $a, c \in FH$. Escreva $a = a_1 + a_2 + \cdots + a_m$, em que $a_j \in FHe_j$, $j = 1, \ldots, m$. Então,

$$\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a\ b)c) = \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a_1\ b)c) + \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a_2\ b)c).$$

Usando que $FHe_1 = J(FH)e_1 \oplus Fe_1$ (soma direta de $F-$espaços), e utilizando (3.9), escreva $a_1 = a_1' + \lambda e_1$, em que $a_1' \in J(FH)e_1$, $\lambda e_1 \in Fe_1$. Usando (iv), e operando em $J(FH)e_2$ como (3.10), obtemos

$$\begin{aligned}
\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a\ b)c) &= \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a_1'\ b)c) + \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(\lambda\ e_1\ b)c) + \\
&+ \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a_2\ b)c) \\
&= a_1'\ \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(b)c) + \lambda\ e_1\ \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(b)c) \\
&+ a_2\ \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(b)c) \\
&= (a_1' + \lambda\ e_1)\ \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(b)c) + a_2\ \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(b)c) \\
&= a_1\ \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(b)c) + a_2\ \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(b)c) \\
&= (a_1 + a_2)\ \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(b)c) \\
&= a\ \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(b)c).
\end{aligned}$$

Logo, também nesse ideal, a igualdade (1.1) é satisfeita.

Para os ideais $\mathcal{A}_g$ restantes, a validade da igualdade (1.1) é verificada de modo análogo à demonstração da parte ´´se´´ do Teorema 3.5.3

Finalmente, analisemos o caso $|P| = 3$. Novamente, considere $r = 2$.

Seja $\mathcal{A}_g = (J(FH)e_2)^2$. Sejam $b \in \mathcal{A}_g$, $a, c \in FH$. Escreva $a = a_1 + a_2 + \cdots + a_m$, em que $a_j \in FHe_j$, $j = 1, \ldots, m$. Então,

$$\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a\ b)c) = \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a_2\ b)c).$$

Agora usando (3.9) escreva $a_2 = a_2' + y_2$, em que $a_2' \in J(FH)e_2$, $y_2 \in FMe_2$. Como P é cíclico, temos pelo Teorema 3.9.2 (ii) que $t(FHe_2) = 3$. Assim,

$$\begin{aligned}
\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a\ b)c) &= \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a_2'\ b)c) + \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(y_2\ b)c) \\
&= 0 + y_2\ \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(b)c) \\
&= a_2'\ \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(b)c) + y_2\ \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(b)c) \\
&= (a_2' + y_2)\ \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(b)c) \\
&= a_2\ \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(b)c) \\
&= a\ \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(b)c).
\end{aligned}$$

Logo, a igualdade (1.1) é válida em $\mathcal{A}_g = (J(FH)e_2)^2$.

Para os demais ideais $\mathcal{A}_g$ de FH, a validade da igualdade (1.1) segue como na demonstração da parte ´´se´´ do Teorema 3.5.3. Portanto, a condição (1.1) verifica-se, e FH é fortemente associativa. Isso completa a demonstração.

■

CAPÍTULO 4

Caracterizações Para o Grupo Simétrico S_n e Grupos Diedrais D_n de ordem $2n$

Estamos em condições de caracterizar as álgebras de grupo FS_n do grupo simétrico S_n, $n \geq 2$, sobre um corpo F de característica p tal que p divide $|S_n| = n!$.

(i) Para $n = 2$ e $p = 2$, então $|S_2| = 2$ e pelo Exemplo 2.1.1 temos que FS_2 é fortemente associativa;
(ii) Para $n = 3$ e $p = 2$, sabemos que

$$S_3 = \{id, (123), (132), (12), (13), (23)\}$$

é um grupo de Frobenius com complemento $P =< (12) >$, em que P é um 2−subgrupo de Sylow de S_3.
Como $|P| = 2$, segue pelo Teorema 3.5.3 que FS_3 é fortemente associativa;
(iii) Para $n = 3$ e $p = 3$, considere

$$M = \{id, (123), (132)\} \lhd S_3.$$

Note que $p = 3 \Big| \, |M| = 3$, de modo que pelo Lema 3.2.1, FS_3 não é fortemente associativa.
(iv) Para $n = 4$, sabemos que os únicos subgrupos próprios normais do grupo S_4 são A_4,

o grupo alternado de grau 4, e o grupo de Klein

$$K = \{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}.$$

Assim, se $p = 2$ temos $2\Big| \, |K| = 4$ ($2\Big| \, |A_4| = 12$, também), enquanto se $p = 3$, $3\Big| \, |A_4| = 12$. Em ambos os casos segue pelo Lema 3.2.1 que FS_4 não é fortemente associativa.

Também, com $p = 3$ podemos usar o Exemplo 3.7.1 para concluir que FS_4 não é fortemente associativa.

(v) Finalmente, para $n \geq 5$, sabemos que A_n, o grupo alternado de grau n, é o único subgrupo próprio normal de S_n. Note que $p|n!$ implica $p\big||A_n| = \frac{n!}{2}$, e portanto pelo Lema 3.2.1, $FS_n, n \geq 5$, não é fortemente associativa.

Observação 4.0.1. *(v) nos dá exemplos de grupos não solúveis para os quais as álgebras de grupo não são fortemente associativas.*

Passamos agora a caracterizar as álgebras de grupo do grupo diedral $D_n =< a, b : a^n = 1 = b^2, ba = a^{-1}b >$, de ordem $2n$, sobre um corpo F de característica p tal que p divide $2n$.

(i) Se $p = 2$ e n é ímpar, sabemos que D_n é um grupo de Frobenius com complemento $P =< b : b^2 = 1 >$, em que P é um 2−subgrupo de Sylow de D_n.

Como $|P| = 2$, segue pelo Teorema 3.5.3 que FD_n é fortemente associativa.

Agora, considerando $M =< a : a^n = 1 > \lhd D_n$, note que para qualquer outro primo $p > 2$, tal que $p|2n$ implica que $p\big||M|$; Portanto, pelo Lema 3.2.1, FD_n não é fortemente associativa, para esses primos.

(ii) Se n é par, então qualquer $p|2n$ implica $p\big||M|$. Portanto pelo Lema 3.2.1, FD_n não é fortemente associativa.

Referências Bibliográficas

[1] F. Abadie, Enveloping actions and Takai duality for partial actions, *J. Functional Anal.* **197 (1)** (2003), 14–67.

[2] C. Curtis e I. Reiner, *Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras*, New York, Wiley-Interscience, 1962.

[3] M. Dokuchaev e R. Exel, Associativity of crossed products by partial actions, enveloping actions and partial representations, *Trans. Amer. Math. Soc.* **357** (2005), 1931–1952.

[4] M. Dokuchaev, Ruy Exel e Paolo Piccione, Partial representations and partial group algebras, *J. Algebra* **226** (2000), no. 1, 505–532.

[5] M Dokuchaev, M Ferrero e A. Paques, *Partial Galois theory of commutative rings*, Preprint.

[6] M. Dokuchaev e C. Polcino Milies, Isomorphisms of partial group rings, *Glasg. Math. J.* **46** (2004), no. 1, 161–168.

[7] R. Exel, Circle actions on C*-algebras, partial automorphisms and generalized Pimsner-Voiculescu exact sequences, *J. Funct. Anal.* **122** (1994), no. 3, 361–401.

[8] R. Exel, Twisted partial actions: a classification of regular C*-algebraic bundles, *Proc. London Math. Soc.* **74** (1997), no. 3, 417–443.

[9] R. Exel, Partial actions of groups and actions of inverse semigroups, *Proc. Amer. Math. Soc.* **126** (1998), no. 12, 3481–3494.

[10] R. Exel, M. Laca e J. Quigg, Partial dynamical systems and C*- algebras generated by partial isometries, *J. Operator Theory* **47** (2002), no. 1, 169–186.

[11] D. Gorenstein, *Finite Groups*, New York, Harper and Row, 1968.

[12] R. Gow, R. Huppert, R. Knorr, O. Manz e W. Willems, *Representation Theory in Arbitrary Characteristic*, CEDAM, 1993.

[13] B. Huppert, *Endliche Gruppen, 1*, Springer - Verlag, Berlin, 1967.

[14] B. Huppert e N. Blackburn, *Finite Groups. II*, Springer-Verlag, Berlin, 1982.

[15] G. Karpilovsky, *The Jacobson Radical of Group Algebras*, Notas de Matematica, vol. 115, North-Holland Mathematics studies 135, 1987.

[16] J. Kellendonk e M.V. Lawson, Partial actions of groups, *Int. J. Algebra Comp.* **14** (2004), no. 1, 388–413.

[17] M. Suzuki, *Group Theory II*, Springer-Verlag, 1986.