Produto Cruzado de C^*-álgebras por $\mathbb{Z}$ e K-teoria: A Seqüência Exata de Pimsner-Voiculescu

Tadeu Aparecido Pereira da Ponte

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE
MESTRE EM MATEMÁTICA

ORIENTADORA: **Profa. Dra. Cristina Cerri**

São Paulo, fevereiro de 2005

Aos meus pais, à Marta, ao Paulo e à Sofia,
que me inspiraram em cada página
a buscar o meu melhor

Agradecimentos

À Cristina, pela dedicação durante toda a orientação, pela compreensão e respeito com a minha condição de trabalhar e estudar e, principalmente, por não ter deixado que eu desistisse em todas as vezes que isso quase aconteceu.

Ao Fabio, pela ajuda no difícil curso de álgebra, pela paciência nos seminários, pelo exemplo e crescente amizade durante toda trajetória, que me ajudaram a acreditar que seria possível.

Ao Toscano, cuja coragem de proporcionar-nos um curso de K-teoria inspirou a decisão de enveredar por este caminho

Ao David e à Cintia, cuja ajuda nos Seminários e no curso de K-teoria tiveram um valor inestimável para mim.

Aos meus alunos de ontem, hoje e amanhã, por quem vale a pena estudar.

Aos meus filhos Paulo e Sofia, cujo tempo que lhes pertencia foi muitas vezes ocupado pela minha “lição enorme”.

Aos meus pais Antonio e Benedita, tias Isabel e Bernardete e tio Benedito, que moldaram a estrutura de pessoa que me fez chegar até aqui.

À minha irmã Salete, pelo apoio durante momentos muito difícies durante a jornada, que me ajudou a continuar lutando.

À minha esposa Marta, pelo entusiasmo a cada conquista, pela ajuda em cada momento de angústia, por todos os fins de semana cedidos e por todo amor e carinho dispensados nestes anos.

Abstract

Given an unital C^*-algebra A and a $*$-automorphism α of A, the crossed product $A \times_\alpha \mathbb{Z}$ is the enveloping C^*-álgebra of $\ell_1(\mathbb{Z}, A)$. In this work we describe the construction of a six terms exact sequence involving only the K-groups for A and $A \times_\alpha \mathbb{Z}$, the well-known Pimsner-Voiculescu exact sequence. This sequence is derived from the six terms exact sequence of K-theory applied to the Toeplitz-extension associated to $A \times_\alpha \mathbb{Z}$.

Resumo

Dada uma C^*-álgebra com unidade A e um $*$-automorfismo α de A, o produto cruzado $A \times_\alpha \mathbb{Z}$ é a C^*-álgebra envolvente de $\ell_1(\mathbb{Z}, A)$. Neste trabalho, descrevemos a construção de uma seqüência exata de seis termos envolvendo apenas os K-grupos de A e de $A \times_\alpha \mathbb{Z}$, conhecida como Seqüência Exata de Pimsner-Voiculescu. Esta seqüência é derivada da seqüência exata de seis termos da K-teoria aplicada à extensão de Toeplitz associada a $A \times_\alpha \mathbb{Z}$.

Conteúdo

Introdução **vi**

1 C^*-álgebras **1**

1.1 Definições e resultados básicos 1

1.2 C^*-álgebras universais 10

1.3 Álgebra de Toeplitz 18

1.4 O produto cruzado de uma C^*-álgebra com unidade por $\mathbb{Z}$ 39

2 K-teoria para C^*-álgebras **50**

2.1 Definições e resultados básicos 50

2.2 O funtor K_0 59

2.3 O funtor K_1 68

2.4 A seqüência exata de seis termos 76

3 A Seqüência Exata de Pimsner-Voiculescu **84**

3.1 A extensão de Toeplitz associada a $A \times_\alpha \mathbb{Z}$ 84

3.2 Descrição dos geradores de $K_1(A \times_\alpha \mathbb{Z})$ 90

3.3 A Seqüência Exata de Pimsner-Voiculescu 98

A Produto Tensorial de C^*-álgebras **112**

Bibliografia **129**

Introdução

O objetivo deste trabalho é detalhar e tornar acessível a demonstração do Teorema de Pimsner-Voiculescu [14], que relaciona os K-grupos de uma C^*-álgebra com unidade com os K-grupos do produto cruzado dessa C^*-álgebra por $\mathbb{Z}$.

A classe das C^*-álgebras foi introduzida em 1943 por I. Gelfand e M. Naimark em [7] num contexto em que já se estudava a estrutura de conjuntos de operadores num espaço de Hilbert, em especial as álgebras de von Neumann. Já a K-teoria nasceu com os trabalhos de Grothendieck em geometria algébrica, que foram desenvolvidos por Atiyah e Hirzebruch na década de 1960. Na década de 1970 a K-teoria foi introduzida no contexto das C^*-álgebras e, principalmente com os trabalhos de Elliott [6] e Pimsner-Voiculescu [14], revelou-se uma ferramenta poderosa para se obter informações sobre as C^*-álgebras.

A K-teoria é, basicamente, um par de funtores covariantes, denominados por K_0 e K_1, que para cada C^*-álgebra A associam um par de grupos abelianos, que denotamos por $K_0(A)$ e $K_1(A)$. A K-teoria é um poderoso instrumento para o estudo das C^*-álgebras, no sentido em que os K-grupos contêm muita informação sobre a própria C^*-álgebra. Nessa direção, G. Elliott provou no início da década de 1970 que as AF-álgebras (álgebras aproximadamente finitas) são classificadas através dos seus K_0-grupos (ordenados), vide detalhamento em [15, Capítulo 7]. Outra aplicação importante foi obtida com a Seqüência Exata de Pimsner-Voiculescu. O conhecimento dos K-grupos do produto cruzado $C(\mathbb{T}) \times_{\alpha_\theta} \mathbb{Z} = \mathcal{A}_\theta$ possibilitou a classificação dessas álgebras para θ irracional.

Este trabalho trata da K-teoria do produto cruzado de uma C^*-álgebra com unidade A por $\mathbb{Z}$. Especificamente, dado um $*$-automorfismo α de A, o produto cruzado de A por $\mathbb{Z}$, denotado por $A \times_\alpha \mathbb{Z}$, é a C^*-álgebra envolvente de $\ell_1(\mathbb{Z}, A)$, sendo $\ell_1(\mathbb{Z}, A)$ uma $*$-álgebra de Banach com norma dada por

$$||f||_1 = \sum_{m \in \mathbb{Z}} ||f(m)||,$$

produto de convolução dado por

$$f * g(n) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} f(m)\alpha^m(g(n-m))$$

e involução dada por

$$f^*(n) = \alpha^n(f(-n)^*).$$

Para chegar na Seqüência Exata de Pimsner-Voiculescu, precisamos antes construir a Extensão de Toeplitz associada a $A \times_\alpha \mathbb{Z}$. Seja $C^*(S)$ a C^*-álgebra universal gerada pela identidade I e por uma isometria não unitária S e seja $\mathbf{T}$ a C^*-subálgebra de $(A \times_\alpha \mathbb{Z}) \otimes C^*(S)$ gerada por $a \otimes I$ e $u \otimes S$, com $a \in A$ e u o unitário que implementa o $*$-automorfismo α. A Extensão de Toeplitz associada a $A \times_\alpha \mathbb{Z}$ é a seqüência exata

$$0 \longrightarrow A \otimes K(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathbf{T} \longrightarrow A \times_\alpha \mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

em que $K(\mathcal{H})$ é a C^*-álgebra dos operadores compactos sobre o Espaço de Hilbert separável de dimensão infinita $\mathcal{H}$.

Aplicando a seqüência exata de seis termos da K-teoria, usando a estabilidade dos K-grupos de A, isto é

$$K_i(A \otimes K(\mathcal{H})) \cong K_i(A), \ i = 0, 1,$$

e construindo um isomorfismo entre $K_i(\mathbf{T})$ e $K_i(A)$, $i = 0, 1$, M. Pimsner e D. Voiculescu provaram em [14, Teorema 2.4] que

$$\begin{tikzcd}
K_0(A) \arrow[r] & K_0(A) \arrow[r] & K_0(A \times_\alpha \mathbb{Z}) \arrow[d] \\
K_1(A \times_\alpha \mathbb{Z}) \arrow[u] & K_1(A) \arrow[l] & K_1(A), \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

é uma seqüência exata, que ficou conhecida como Seqüência Exata de Pimsner-Voiculescu.

Este trabalho está organizado em três capítulos. No primeiro, abordamos tanto os resultados gerais sobre C^*-álgebras que precisamos utilizar, como a definição das C^*-álgebras universais geradas por elementos e relações, utilizada para construir abstratamente o produto cruzado $A \times_\alpha \mathbb{Z}$ e a C^*-álgebra gerada por uma isometria não unitária, conhecida como Álgebra de Toeplitz. Abordamos também neste primeiro capítulo as construções concretas dessas duas últimas C^*-álgebras e provamos que são isomorfos àquelas que foram construídas abstratamente.

No segundo capítulo, além de comentarmos as propriedades principais dos funtores K_0 e K_1, demonstramos com detalhe que $K_i(A)$ é isomorfo a $K_i(\mathcal{M}_n(A))$ para qualquer C^*-álgebra A, $(i = 0, 1)$. Assumindo resultados sobre limites indutivos, utilizamos este último resultado para construir um isomorfismo entre $K_i(A)$ e $K_i(A \otimes K(\mathcal{H}))$, $(i = 0, 1)$, propriedade que é conhecida como estabilidade desses K-grupos. Apresentamos também neste capítulo a Periodicidade de Bott, a seqüência exata de seis termos e as descrições das conexões entre K_0 e K_1.

É no terceiro capítulo que de fato apresentamos a demonstração da Seqüência Exata de Pimsner-Voiculescu, com a construção da Extensão de Toeplitz associada à $A \times_\alpha \mathbb{Z}$ e dos homomorfismos que identificam $K_i(A)$ com $K_i(\mathbf{T})$, para $i = 0, 1$. Apresentamos também o detalhamento da construção de cada aplicação que conecta os K-grupos na Seqüência Exata de Pimsner-Voiculescu.

Como algumas construções dos Capítulos 2 e 3 envolvem resultados não triviais de produtos tensorial de C^*-álgebras, apresentamos este assunto no Apêndice A.

Capítulo 1

C^*-álgebras

A primeira Seção deste Capítulo é dedicada às principais definições e aos principais resultados sobre C^*-álgebras. Na Seção seguinte, trataremos das C^*-álgebras universais geradas por elementos e relações. Passaremos em seguida à construção concreta da Álgebra de Toeplitz, contemplando inclusive o Teorema de Coburn em que se prova que a Álgebra de Toeplitz, concretamente construída, é $*$-isomorfo a qualquer C^*-álgebra gerada por uma isometria não unitária. No final do capítulo apresentamos uma Seção dedicada à construção do Produto Cruzado de uma C^*-álgebra com unidade por $\mathbb{Z}$.

1.1 Definições e resultados básicos

Nesta Seção faremos as definições básicas das C^*-álgebras, bem como enunciaremos os principais resultados sobre estes objetos, omitindo em geral as demonstrações, que podem encontradas em [11].

Definição 1.1.1. *Uma* álgebra A *é um espaço vetorial complexo, munido de uma multiplicação associativa, satisfazendo* $(\lambda a)b = a(\lambda b)$, *quaisquer que sejam* $\lambda \in \mathbb{C}$ *e* $a, b \in A$. *Se existe* $\mathbf{e} \in A$ *tal que* $\mathbf{e}a = a = a\mathbf{e}$, *para todo* $a \in A$, *então dizemos que* A *é uma* álgebra com unidade *e, neste caso, denotamos a unidade* $\mathbf{e}$ *por* 1_A, *ou simplesmente por* 1. *Se* A *é uma álgebra e existe uma norma* $\|\cdot\|$ *submultiplicativa sobre* A, *isto é, tal que*

$$\|ab\| \leq \|a\|\|b\|, \ \forall a, b \in A,$$

então dizemos que o par $(A, \|\cdot\|)$ *é uma* álgebra normada. *Uma álgebra normada* $(A, \|\cdot\|)$ *é chamada de* álgebra de Banach *se é completa com relação à norma* $\|\cdot\|$. *Denotaremos uma álgebra de Banach* $(A, \|\cdot\|)$ *simplesmente por* A.

Seja A uma álgebra com unidade. Dizemos que um elemento $a \in A$ é *inversível* se existe $b \in A$ tal que $ab = 1 = ba$. Denotaremos o conjunto de todos os elementos inversíveis de A por $\mathrm{Inv}(A)$. Como, quando existe, o inverso de um elemento $a \in A$ é único, vamos denotá-lo por a^{-1}.

Definição 1.1.2. *Seja A uma álgebra de Banach com unidade e considere um elemento $a \in A$. Chamamos de* espectro de a *o conjunto*

$$\sigma(a) = \sigma_A(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda 1 - a \notin \mathrm{Inv}(A)\}.$$

O complementar deste conjunto

$$\rho(a) = \rho_A(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda 1 - a \in \mathrm{Inv}(A)\}$$

é chamado de resolvente de a. *O* raio espectral de a *é definido por*

$$r(a) = \sup_{\lambda \in \sigma(a)} |\lambda|.$$

Com a Proposição abaixo, mostraremos em seguida que o espectro de um elemento de uma C^*-álgebra é limitado.

Proposição 1.1.3 (Critério de Carl-Neumann). *Seja A uma álgebra de Banach com unidade e seja $a \in A$ com $\|a\| < 1$. Então $1 - a$ é inversível com inverso dado por*

$$(1-a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n.$$

Seja A uma álgebra de Banach com unidade e seja $a \in A$. Se $\lambda \in \mathbb{C}$ é tal que $|\lambda| > \|a\|$, daí $\|\lambda^{-1} a\| < 1$, logo $1_A - \lambda^{-1} a$ é inversível, o que implica que $\lambda 1_A - a$ é inversível, e portanto $\lambda \notin \sigma(a)$. Assim, temos que $\sigma(a)$ é limitado, com $r(a) \leq \|a\|$.

Definição 1.1.4. *Uma* involução *sobre uma álgebra (de Banach) A é uma aplicação conjugada-linear de A em A dada por $a \mapsto a^*$ tal que*

$$a^{**} = a \quad e \quad (ab)^* = b^* a^*,$$

quaisquer que sejam $a, b \in A$. Uma álgebra (de Banach) com involução será abreviadamente chamada de $*$-álgebra (de Banach).

Definição 1.1.5. *Seja A uma $*$-álgebra de Banach.*

- *Um elemento $a \in A$ é dito* auto-adjunto *ou* hermitiano *se $a^* = a$.*

- *Um elemento $a \in A$ é dito* normal *se $a^*a = aa^*$.*

- *Um elemento $p \in A$ é chamado de* idempotente *se $p^2 = p$. E dizemos que p é uma* projeção *se, em particular, $p^2 = p = p^*$.*

Suponha agora que A possui unidade.

- *Um elemento $s \in A$ é chamado de* isometria *se $s^*s = 1$. E dizemos que s é um* unitário *se, em particular, $s^*s = 1 = ss^*$.*

Definição 1.1.6. *Sejam A e B $*$-álgebras. Uma aplicação linear $\varphi : A \to B$ é chamada de* $*$-homomorfismo *se*

$$\varphi(a_1a_2) = \varphi(a_1)\varphi(a_2),\ \forall a_1, a_2 \in A \text{ e}$$
$$\varphi(a^*) = \varphi(a)^*,\ \forall a \in A.$$

- *Se A e B possuem unidade, dizemos que φ* preserva unidade *se $\varphi(1_A) = 1_B$.*

- *Se φ é um $*$-homomorfismo bijetivo, então dizemos que φ é um* $*$-isomorfismo.

- *Se $B = A$ e φ é um $*$-isomorfismo, então dizemos que φ é um* $*$-automorfismo.

Definição 1.1.7. *Dada uma $*$-álgebra A, uma* C^*-seminorma *sobre A é uma seminorma $p : A \to \mathbb{R}_+$ que satisfaz*

$$p(ab) \leq p(a)p(b), \qquad p(a^*) = p(a) \quad \text{e} \quad p(a^*a) = p(a)^2,$$

quaisquer que sejam $a, b \in A$. Se, em particular, p é uma norma sobre A, então dizemos que p é uma C^*-norma. Uma C^*-norma p sobre uma $*$-álgebra A é dita completa *se o completamento de A na C^*-norma p é igual a A.*

Definição 1.1.8. *Uma* C^*-álgebra *é uma $*$-álgebra de Banach A tal que*

$$\|a^*a\| = \|a\|^2,\ \forall a \in A.$$

Dada uma C^*-álgebra A, uma subálgebra B de A, fechada (na norma) e auto-adjunta ($B^* = \{b^* : b \in B\} = B$), é também uma C^*-álgebra, que chamamos de *C^*-subálgebra de A*. Dado um subconjunto Y de uma C^*-álgebra A, definimos a C^*-subálgebra de A gerada por Y, denotada por $C^*(Y)$, como a menor C^*-subálgebra de A que contém Y.

Dada uma C^*-álgebra A, dizemos que J é um *ideal* de A se J é um ideal algébrico bilateral de A. Se J é fechado, então o quociente de A por J é a $*$-álgebra dada por

$$A/J = \{a + J : a \in A\},$$

com norma dada por $\|a+J\| = \inf\{\|a+x\| : x \in J\}$, para cada $a \in A$. Vamos definir também a *aplicação quociente* $\pi : A \to A/J$, dada por $\pi(a) = a + J$, qualquer que seja $a \in A$. Assim, pode-se provar que A/J é uma C^*-álgebra e π é um $*$-homomorfismo com $\mathrm{Ker}(\pi) = J$. Uma C^*-álgebra A é dita *simples* se seus únicos ideais fechados são 0 e A.

Seja A uma $*$-álgebra e seja p uma C^*-seminorma sobre A. Claramente o conjunto $N = p^{-1}(0)$ é um ideal auto-adjunto de A. Definindo $\|a + N\| := p(a)$ para todo $a \in A$, obtemos uma C^*-norma sobre o quociente A/N. Se B é o espaço de Banach obtido pelo completamento de A/N, então é fácil ver que a multiplicação e a involução de A se estendem para uma multiplicação e uma involução em B, e com isso B é uma C^*-álgebra. Neste caso, B é chamada de *C^*-álgebra envolvente do par (A,p)*. A aplicação $\iota : A \to B$ dada por $\iota(a) = a + N$, para todo $a \in A$, é chamada de *aplicação canônica* de A e em B. É obvio que $\iota(A)$ é uma $*$-subálgebra densa de B.

Exemplo 1.1.9. *O corpo escalar $\mathbb{C}$ dos números complexos, com as operações usuais e com involução dada pela conjugação, é uma C^*-álgebra com unidade.*

Exemplo 1.1.10. *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert. Denotemos por $B(\mathcal{H})$ o conjunto dos operadores limitados em $\mathcal{H}$, com multiplicação por escalar e soma definidas pontualmente, produto dado pela composição de operadores, involução dada por $< T(x), y >=< x, T^*(y) >$ e norma dada por $\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : \|x\| \leq 1\}$. Então $B(\mathcal{H})$ é uma C^*-álgebra.*

Qualquer C^*-subálgebra de $B(\mathcal{H})$ é chamada de *C^*-álgebra concreta.*

Lembramos que $T \in B(\mathcal{H})$ é um *operador de posto finito* se a imagem de T tem dimensão finita, e que T é um *operador compacto* se o fecho do conjunto $\{T(x) : \|x\| \leq 1\}$ é compacto. Denotaremos o conjunto dos operadores de posto finitos em $\mathcal{H}$ por $F(\mathcal{H})$ e o conjunto dos operadores compactos por $K(\mathcal{H})$. Note que $F(\mathcal{H}) \subset K(\mathcal{H})$.

Os resultados enunciados no Teorema abaixo são bastante conhecidos e as conseqüências que se seguem são muito importantes para este trabalho.

Teorema 1.1.11. *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert.*

(i) $K(\mathcal{H})$ é um ideal fechado de $B(\mathcal{H})$ ([11, Seção 1.4]).

(ii) $F(\mathcal{H})$ é denso em $K(\mathcal{H})$ ([11, Teorema 2.4.5]).

(iii) $F(\mathcal{H})$ é linearmente gerado por projeções de posto 1 ([11, Teorema 2.4.6]).

Exemplo 1.1.12. *$K(\mathcal{H})$ é uma C^*-álgebra.*

Proposição 1.1.16. *Se a é um elemento auto-adjunto de uma C^*-álgebra A, então $r(a) = \|a\|$.*

Note que, se $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ são duas C^*-normas completas sobre uma $*$-álgebra A, então

$$\|a\|_1^2 = \|a^*a\|_1 = r(a) = \|a^*a\|_2 = \|a\|_2^2, \ \forall a \in A.$$

Portanto, existe no máximo uma C^*-norma completa sobre uma $*$-álgebra.

Sejam A $*$-álgebra de Banach e B uma C^*-álgebra. Suponha que $\varphi : A \to B$ é um $*$-homomorfismo. Então φ é norma-decrescente, isto é, $\|\varphi(a)\| \leq \|a\|$, qualquer que seja $a \in A$. De fato, como $\sigma_B(\varphi(a)) \subset \sigma_A(a)$, temos

$$\|\varphi(a)\|^2 = \|\varphi(a)^*\varphi(a)\| = r(\varphi(a^*a)) \leq r(a^*a) = \|a^*a\| = \|a\|^2,$$

para todo $a \in A$. Segue que, se A e uma C^*-álgebra e φ é injetivo, então φ é uma isometria.

Sejam A e B C^*-álgebras. A *soma direta de A com B*, que denotamos por $A \oplus B$, é o conjunto $A \times B$ com as operações algébricas e involução definidas coordenada a coordenada e com norma dada por

$$\|(a,b)\| = \max\{\|a\|, \|b\|\}, \tag{1.2}$$

quaisquer que sejam $a \in A$ e $b \in B$. Como

$$\begin{aligned} \|(a,b)\|^2 &= (\max\{\|a\|, \|b\|\})^2 = \max\{\|a\|^2, \|b\|^2\} = \max\{\|a^*a\|, \|b^*b\|\} \\ &= \|(a^*a, b^*b)\| = \|(a^*, b^*)(a,b)\| = \|(a,b)^*(a,b)\|, \end{aligned}$$

segue que $A \oplus B$ é uma C^*-álgebra. É fácil ver que a norma definida em (1.2) é uma C^*-norma completa, e que a soma direta de C^*-álgebras pode ser naturalmente generalizada para uma quantidade finita de C^*-álgebras.

Dada uma C^*-álgebra A com ou sem unidade, podemos construir uma outra C^*-álgebra com unidade que contém A como ideal. Descreveremos a seguir os passos dessa construção. Considere o conjunto

$$\widetilde{A} = \{(a, \alpha) : a \in A, \ \alpha \in \mathbb{C}\}.$$

Defina adição e multiplicação por escalar coordenada a coordenada em $\widetilde{A}$ e defina produto através de

$$(a, \alpha) \cdot (b, \beta) = (ab + \beta a + \alpha b, \alpha\beta)$$

e adjunto por

$$(a, \alpha)^* = (a^*, \overline{\alpha}),$$

quaisquer que sejam $a, b \in A$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. É fácil ver que, com estas operações, $\widetilde{A}$ é uma $*$-álgebra. Note que

$$(a, \alpha) \cdot (0, 1) = (a, \alpha) = (0, 1) \cdot (a, \alpha),$$

e com isso $\widetilde{A}$ é uma $*$-álgebra com unidade, que é dada por $(0, 1)$. Denotaremos $(0, 1)$ também por $1_{\widetilde{A}}$.

Considere agora a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \iota: & A & \rightarrow & \widetilde{A} \\ & a & \mapsto & (a, 0). \end{array}$$

Note que ι é um $*$-homomorfismo injetor e portanto é uma inclusão de A em $\widetilde{A}$. Omitindo ι, podemos então denotar

$$\widetilde{A} = \{a + \alpha 1_{\widetilde{A}} : a \in A \text{ e } \alpha \in \mathbb{C}\}.$$

Para $x \in \widetilde{A}$, como $ax \in A$, defina

$$|||x|||_{\widetilde{A}} = \sup\{\|ax\|_A : a \in A, \; \|a\|_A \leq 1\},$$

e considere a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \pi: & \widetilde{A} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ & (a, \alpha) & \mapsto & \alpha. \end{array}$$

Claramente π é um $*$-homomorfismo sobrejetor. Assim, dado $x \in \widetilde{A}$, defina

$$\|x\|_{\widetilde{A}} = \max\{|||x|||_{\widetilde{A}}, |\pi(x)|\}.$$

Pode-se provar que $\|\cdot\|_{\widetilde{A}}$ é uma C^*-norma completa sobre $\widetilde{A}$. Com isso, $\widetilde{A}$ é uma C^*-álgebra com unidade.

Definimos o espectro de um elemento a de uma C^*-álgebra A sem unidade por $\sigma_A(a) := \sigma_{\widetilde{A}}(a)$.

Se A é uma C^*-álgebra com unidade, então $f = 1_{\widetilde{A}} - 1_A$ é uma projeção em $\widetilde{A}$. Neste caso, a aplicação

$$\begin{array}{ccc} A \oplus \mathbb{C} & \rightarrow & \widetilde{A} \\ (a, \alpha) & \mapsto & a + \alpha f \end{array}$$

define um $*$-isomorfismo. Entretanto, se A não tem unidade, então $\widetilde{A}$ não é $*$-isomorfa a $A \oplus \mathbb{C}$, dado que, neste caso, $A \oplus \mathbb{C}$ não tem unidade.

O Teorema a seguir determina completamente as C^*-álgebras abelianas. Duas importantes conseqüências deste Teorema são o cálculo funcional contínuo e a aplicação espectral logo em seguida, que são ferramentas importante no estudo de C^*-álgebras não abelianas.

Teorema 1.1.17 (Gelfand). *Toda C^*-álgebra abeliana é isometricamente $*$-isomorfa a $C_0(X)$, para algum espaço de Hausdorff localmente compacto X.*

Teorema 1.1.18 (Cálculo Funcional Contínuo). *Seja A uma C^*-álgebra com unidade. Para cada elemento normal $a \in A$, existe um único $*$-homomorfismo que preserva unidade $\varphi : C(\sigma(a)) \to A$ tal que $\varphi(z) = a$, sendo $z : \lambda \mapsto \lambda$. E mais, φ é um $*$-homomorfismo injetivo isométrico com $\mathrm{Im}(\varphi)$ é a C^*-subálgebra de A gerada por $\{1_A, a\}$.*

Para o Teorema acima, se $f \in C(\sigma(a))$, denotamos $\varphi(f) = f(a)$.

Teorema 1.1.19 (Aplicação Espectral). *Seja a um elemento normal de uma C^*-álgebra com unidade A, e seja $f \in C(\sigma(a))$. Então,*

$$\sigma(f(a)) = f(\sigma(a)).$$

A aplicação que construiremos a seguir é conhecida como *cálculo funcional holomorfo* e os detalhes desta construção podem ser vistos em [9, Seção 3.3]. Seja a um elemento de uma C^*-álgebra A com unidade e seja Ω uma vizinhança aberta de $\sigma(a)$. Tome Γ um contorno de $\sigma(a)$ tal que $\mathrm{Im}(\Gamma) \subset \Omega \setminus \sigma(a)$ e

$$\mathrm{Ind}_\Gamma(z) = \begin{cases} 1, & z \in \sigma(a) \\ 0, & z \in \mathbb{C} \setminus \Omega. \end{cases}$$

Vamos denotar por $H(\Omega)$ o conjunto das funções holomorfas $h : \Omega \to \mathbb{C}$. Definimos

$$h(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma h(z)(z1_A - a)^{-1} dz, \tag{1.3}$$

qualquer que seja $h \in H(\Omega)$. Com isso, temos que $h(a)$ é um elemento de A.

Teorema 1.1.20. *Seja a um elemento de uma C^*-álgebra com unidade e seja Ω uma vizinhança aberta de $\sigma(a)$.*

(i) A aplicação de $H(\Omega)$ em A definida por 1.3 é um homomorfismo de álgebras que preserva unidade.

(ii) Qualquer que seja $h \in H(\Omega)$, temos $\sigma(h(a)) = h(\sigma(a))$.

Comentaremos a seguir a construção da Representação Gelfand-Naimark-Segal, em que obtemos que qualquer C^*-álgebra pode ser identificada com uma C^*-álgebra concreta.

Definição 1.1.21. *Uma* representação de uma C^*-álgebra A *é um par* $(\varphi, \mathcal{H})$ *em que* $\mathcal{H}$ *é um espaço de Hilbert e* $\varphi : A \longrightarrow B(\mathcal{H})$ *é um* $*$*-homomorfismo. Dizemos que uma representação* (φ, H) *de uma* C^**-álgebra* A *é:*

- fiel *se* φ *é injetivo.*
- não degenerada *se, para todo* $x \in \mathcal{H}$ *não nulo, existe* $a \in A$ *tal que* $\varphi(a)(x) \neq 0$.

Seja A uma C^*-álgebra. Um elemento $a \in A$ é dito *positivo* se $\sigma(a) \subset \mathbb{R}_+$. Pode-se provar que todo elemento positivo de uma C^*-álgebra A é da forma x^*x, para algum $x \in A$.

Um *funcional linear* de A é uma aplicação linear $\tau : A \longrightarrow \mathbb{C}$. Temos que τ de A é contínuo se, e somente se, $\|\tau\| = \sup\{|\tau(a)| : a \in A, \ \|a\| \leq 1\} < \infty$. Neste caso $\|\tau\|$ é a norma de τ.

Dizemos que τ é positivo se $\tau(a) \in \mathbb{R}_+$, qualquer que seja a elemento positivo de A.

Um *estado* de A é um funcional linear positivo de A tal que $\|\tau\| = 1$. Denotamos por $S(A)$ o conjunto de todos os estados de A.

Para cada $\tau \in S(A)$, defina

$$N_\tau := \{a \in A : \tau(a^*a) = 0\}.$$

Não é difícil provar que N_τ é um ideal à esquerda fechado de A e que a aplicação

$$\begin{array}{ccc} (A/N_\tau)^2 & \rightarrow & \mathbb{C} \\ (a + N_\tau, b + N_\tau) & \mapsto & \tau(b^*a) \end{array}$$

é um produto interno bem definido sobre A/N_τ. Denotaremos por $\mathcal{H}_\tau$ o espaço de Hilbert obtido pelo completameno de A/N_τ. Agora, para cada $a \in A$, defina um operador em $\varphi(a) \in B(A/N_\tau)$ por

$$\varphi(a)(b + N_\tau) = ab + N_\tau, \ \forall b \in A.$$

Como $\|\varphi(a)\| \leq \|a\|$, $\varphi(a)$ se estende de maneira única a um operador limitado $\varphi_\tau(a)$ sobre H_τ. Dessa forma, a aplicação

$$\begin{array}{cccc} \varphi_\tau : & A & \rightarrow & B(\mathcal{H}_\tau) \\ & a & \mapsto & \varphi_\tau(a) \end{array}$$

é um $*$-homomorfismo. A representação (φ_τ, H_τ) de A é chamada de representação GNS associada a τ.

Para definir a representação universal, precisamos antes definir soma direta de representações. Seja $(\mathcal{H}_i)_{i \in \mathrm{I}}$ uma família de espaços de Hilbert. Definimos $\mathcal{H} = \oplus_{i \in \mathrm{I}} \mathcal{H}_i$ como uma coleção de funções

$$h : \mathrm{I} \rightarrow \bigcup_{i \in \mathrm{I}} \mathcal{H}_i \quad \text{tal que} \ \ h(i) = h_i \in \mathcal{H}_i, \ \forall i \in \mathrm{I},$$

representações dos elementos $g_1, ..., g_n$), uma relação algébrica entre estes elementos é uma relação do tipo

$$p(g_1, ..., g_n, g_1^*, ..., g_n^*) = 0, \tag{1.6}$$

em que p é um polinômio em $2n$ variáveis não comutativas com coeficientes complexos. Observamos que em [1], [2, Apêndice A] e [10, Seção 1] podem ser encontradas construções de C^*-álgebras geradas por elementos e relações em contextos mais gerais.

Seja $G = \{x_\iota, x_\iota^* : \iota \in \mathcal{I}\}$ um conjunto de elementos abstratos, que chamaremos de geradores, com $\mathcal{I}$ um conjunto (não necessariamente finito ou enumerável) de índices. Dadas particulares relações algébricas entre elementos de G, vamos reuní-las num conjunto, que chamaremos de $\mathcal{R}$. Denominaremos $(G, \mathcal{R})$ de *par geradores-relações.*

Definição 1.2.1. *Sejam $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $(G, \mathcal{R})$ um par geradores-relações. Uma* representação $(\pi, \mathcal{H})$ *de $(G, \mathcal{R})$ é um conjunto de operadores limitados $\{\pi(x_\iota), \pi(x_\iota^*) : \iota \in \mathcal{I}\}$ de $\mathcal{H}$, em que $\pi(x_\iota^*) = \pi(x_\iota)^*$, $\forall \iota \in \mathcal{I}$, cujos elementas satisfazem as relações de $\mathcal{R}$.*

Definição 1.2.2. *Diremos que um par geradores-relações $(G, \mathcal{R})$ é* admissível *se, para todo $\iota \in \mathcal{I}$, existe supremo do conjunto*

$$\{\|\pi(x_\iota)\| : (\pi, \mathcal{H}) \text{ é representação de } (G, \mathcal{R})\}.$$

Segue da Definição 1.2.1 que, se $(G, \mathcal{R})$ é admissível, então, para todo $\iota \in \mathcal{I}$, existe supremo do conjunto

$$\{\|\pi(x_\iota^*)\| : (\pi, \mathcal{H}) \text{ é representação de } (G, \mathcal{R})\},$$

dado que $\|\pi(x_\iota^*)\| = \|\pi(x_\iota)^*\| = \|\pi(x_\iota)\|$, qualquer que seja $\iota \in \mathcal{I}$.

Dado um par geradores-relações $(G, \mathcal{R})$ admissível, seja $\mathcal{F}(G)$ a $*$-álgebra livre gerada por G. Se y é um elemento de $\mathcal{F}(G)$, então y é uma soma finita de produtos finitos de elementos de G com coeficientes complexos, mais especificamente y é da forma

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_i, \tag{1.7}$$

em que $p_i = b_{i1} b_{i2} ... b_{im_i}$ é uma palavra formada com elementos de G, isto é, com $b_{i1}, b_{i2}, ..., b_{im_i}$ elementos de G, e cada λ_i é um número complexo. Note que

$$y^* = \sum_{i=1}^{n} \overline{\lambda_i} p_i^*, \tag{1.8}$$

em que $p_i^* = b_{im_i}^* ... b_{i2}^* b_{i1}^*$. Dados dois elementos de $\mathcal{F}(G)$

$$y_1 = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i p_i \quad \text{e} \quad y_2 = \sum_{j=1}^{n} \mu_j q_j, \tag{1.9}$$

com p_i e q_j palavras formadas com elementos de G para $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$, então

$$y_1 y_2 = \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i p_i \right) \left(\sum_{j=1}^{n} \mu_j q_j \right) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \lambda_i \mu_j p_i q_j, \tag{1.10}$$

em que cada $p_i q_j$ é a palavra formada pela simples justaposição das palavras p_i e q_j.

Proposição 1.2.3. *Seja $(\pi, \mathcal{H})$ uma representação de um par admissível $(G, \mathcal{R})$.*

(a) A extensão de π a $\mathcal{F}(G)$ dada por

$$\widetilde{\pi} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \pi(p_i), \tag{1.11}$$

em que $p_i = b_{i1} b_{i2} ... b_{im_i}$ e $\pi(b_{i1} b_{i2} ... b_{im_i}) = \pi(b_{i1}) \pi(b_{i2}) ... \pi(b_{im_i})$, é um $*$-homomorfismo e é única.

(b) Para cada $y \in \mathcal{F}(G)$

$$|||y||| = \sup\{\|\widetilde{\pi}(y)\| : (\pi, \mathcal{H}) \text{ é representação de } (G, \mathcal{R})\}$$

define uma C^*-seminorma sobre $\mathcal{F}(G)$.

Demonstração. (a) A linearidade é fácil de ser provada. Se y é uma elemento de $\mathcal{F}(G)$ então y é da forma dada em (1.7), com y^* na forma dada em (1.8), assim

$$\begin{aligned}
\widetilde{\pi}(y^*) &= \widetilde{\pi} \left(\sum_{i=1}^{n} \overline{\lambda_i} p_i^* \right) = \sum_{i=1}^{n} \overline{\lambda_i} \pi(p_i^*) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \pi(p_i) \right)^* = \left(\widetilde{\pi} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_i \right) \right)^* \\
&= \widetilde{\pi}(y)^*.
\end{aligned}$$

Agora, como dois elementos y_1 e y_2 de $\mathcal{F}(G)$ são da forma dada em (1.9), segue de (1.10) que

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\pi}(y_1y_2) &= \widetilde{\pi}\left(\left(\sum_{i=1}^{m}\lambda_ip_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\mu_jq_j\right)\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\lambda_i\mu_j\pi(p_iq_j)\\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\lambda_i\mu_j\pi(p_i)\pi(q_j) = \left(\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\pi(p_i)\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\mu_j\pi(q_j)\right)\\
&= \widetilde{\pi}\left(\sum_{i=1}^{m}\lambda_ip_i\right)\widetilde{\pi}\left(\sum_{j=1}^{n}\mu_jq_j\right) = \widetilde{\pi}(y_1)\widetilde{\pi}(y_2)
\end{aligned}
$$

Vamos agora provar a unicidade, sejam $\widetilde{\pi}_1$ e $\widetilde{\pi}_2$ $*$-homomorfismos que estendem π e seja $y \in \mathcal{F}(G)$ como em (1.7). Então

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\pi}_1(y) - \widetilde{\pi}_2(y) &= \widetilde{\pi}_1\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_ip_i\right) - \widetilde{\pi}_2\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_ip_i\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\pi(p_i) - \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\pi(p_i) = 0,
\end{aligned}
$$

portanto $\widetilde{\pi}_1(y) = \widetilde{\pi}_2(y)$, e como y foi escolhido arbitrariamente, segue que $\widetilde{\pi}_1 = \widetilde{\pi}_2$.

(b) Claramente $|||\cdot|||$ é uma seminorma. Se $y_1, y_2, y \in \mathcal{F}(G)$, então

$$
\begin{aligned}
|||y_1y_2||| &= \sup\{\|\widetilde{\pi}(y_1y_2)\| : (\pi,\mathcal{H}) \text{ é representação de } (G,\mathcal{R})\}\\
&\leq \sup\{\|\widetilde{\pi}(y_1)\|\|\widetilde{\pi}(y_2)\| : (\pi,\mathcal{H}) \text{ é representação de } (G,\mathcal{R})\}\\
&= |||y_1|||\,|||y_2|||,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|||y^*||| &= \sup\{\|\widetilde{\pi}(y)^*\| : (\pi,\mathcal{H}) \text{ é representação de } (G,\mathcal{R})\}\\
&= \sup\{\|\widetilde{\pi}(y)\| : (\pi,\mathcal{H}) \text{ é representação de } (G,\mathcal{R})\}\\
&= |||y|||
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
|||y|||^2 &= \sup\{\|\widetilde{\pi}(y)\|^2 : (\pi,\mathcal{H}) \text{ é representação de } (G,\mathcal{R})\}\\
&= \sup\{\|\widetilde{\pi}(y)^*\widetilde{\pi}(y)\| : (\pi,\mathcal{H}) \text{ é representação de } (G,\mathcal{R})\}\\
&= \sup\{\|\widetilde{\pi}(y^*y)\| : (\pi,\mathcal{H}) \text{ é representação de } (G,\mathcal{R})\}\\
&= |||y^*y|||.
\end{aligned}
$$

□

Podemos agora apresentar a definição de C^*-álgebra gerada por elementos e relações.

Definição 1.2.4. *Definimos a* C^*-álgebra universal gerada pelos elementos de G satisfazendo as relações de $\mathcal{R}$, *e a denotamos por* $C^*\!< G, \mathcal{R} >$, *como sendo a* C^**-álgebra envolvente do par* $(\mathcal{F}(G), |||\cdot|||)$.

Definição 1.2.5. *Sejam* $(G, \mathcal{R})$ *um par geradores-relações e* A *uma* C^**-álgebra. Suponha que exista um subconjunto* $G_A = \{a_\iota, a_\iota^* : \iota \in \mathcal{I}\}$ *de* A *tal que os elementos de* G_A *satisfazem as relações de* $\mathcal{R}$*. Diremos que* A *satisfaz a* propriedade universal *para o par* $(G, \mathcal{R})$ *se dada uma* C^**-álgebra* B *e dado um subconjunto* $G_B = \{b_\iota, b_\iota^* : \iota \in \mathcal{I}\}$ *de* B *cujos elementos também satisfazem as relações de* $\mathcal{R}$*, então existe um único* $*$*-homomorfismo* $\varphi : A \longrightarrow B$ *tal que* $\varphi(a_\iota) = b_\iota$*, para todo* $\iota \in \mathcal{I}$.

A proposição a seguir nos dá a unicidade, a menos de $*$-isomorfismo, de uma C^*-álgebra que satisfaz a propriedade universal para um par geradores-relações $(G, \mathcal{R})$. A existência, que será condicionada à admissibilidade do par $(G, \mathcal{R})$, provaremos logo em seguida.

Proposição 1.2.6. *Se* A *e* B *são duas* C^**-álgebras que satisfazem a propriedade universal para um dado par geradores-relações* $(G, \mathcal{R})$*, então* A *e* B *são isometricamente* $*$*-isomorfas.*

Demonstração. Sejam $G_A = \{a_\iota, a_\iota^* : \iota \in \mathcal{I}\}$ e $G_B = \{b_\iota, b_\iota^* : \iota \in \mathcal{I}\}$ respectivamente os subconjuntos de A e B que satisfazem as relações de $\mathcal{R}$. Como A e B satisfazem a propriedade universal para $(G, \mathcal{R})$, então existem dois únicos homomorfismos $\varphi : A \longrightarrow B$ e $\psi : B \longrightarrow A$ tais que $\varphi(a_\iota) = b_\iota$ e $\psi(b_\iota) = a_\iota$, qualquer que seja $\iota \in \mathcal{I}$. Segue que

$$\varphi \circ \psi(b_\iota) = b_\iota, \quad \text{e} \quad \psi \circ \varphi(a_\iota) = a_\iota,$$

qualquer que seja $\iota \in \mathcal{I}$. Por outro lado, novamente por causa da propriedade universal, os $*$-homomorfismos id_A e id_B são os únicos que levam a_ι em a_ι e b_ι em b_ι, respectivamente. Portanto, $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_A$ e $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_B$, isto é ψ é inversa de φ e vice-versa. □

Teorema 1.2.7. *Seja* $(G, \mathcal{R})$ *um par geradores-relações admissível. Então* $A = C^*\!< G, \mathcal{R} >$ *satisfaz a propriedade universal para* $(G, \mathcal{R})$.

Demonstração. Suponha que $G = \{x_\iota, x_\iota^* : \iota \in \mathcal{I}\}$ e sejam B uma C^*-álgebra e $G_B = \{b_\iota, b_\iota^* : \iota \in \mathcal{I}\}$ um subconjunto de B cujos elementos satisfazem as relações de $\mathcal{R}$. Defina a aplicação

$$\varphi : G \longrightarrow B$$

dada por

$$\varphi(x_\iota) = b_\iota \text{ e } \varphi(x_\iota^*) = b_\iota^*,$$

e estenda φ a $\mathcal{F}(G)$, preservando linearidade, produto e adjunto. Seja J o ideal de $\mathcal{F}(G)$ dado por $\{y \in \mathcal{F}(G) : |||y||| = 0\}$ e considere agora a aplicação $\widetilde{\varphi} : \mathcal{F}(G)/J \longrightarrow B$ dada por $\widetilde{\varphi}(y + J) = \varphi(y)$. Afirmamos que esta aplicação está bem definida. De fato, segue da construção GNS que existe $\mathcal{H}$ espaço de Hilbert tal que B é isometricamente $*$-isomorfa a uma C^*-subálgebra de $B(\mathcal{H})$. Chamando de ζ este $*$-isomorfismo, obtemos $(\zeta \circ \varphi, \mathcal{H})$ representação de $(G, \mathcal{R})$. Assim, se $y_1 - y_2 \in J$, então

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{\varphi}(y_1 + J) - \widetilde{\varphi}(y_2 + J)\|_B &= \|\widetilde{\varphi}(y_1 - y_2 + J)\|_B \\
&= \|\varphi(y_1 - y_2)\|_B \\
&= \|\zeta \circ \varphi(y_1 - y_2)\|_{B(\mathcal{H})} \\
&\leq |||y_1 - y_2||| = 0,
\end{aligned}$$

isto é, $\widetilde{\varphi}(y_1 + J) = \widetilde{\varphi}(y_2 + J)$.

Vamos denotar agora um elemento do completamento de $\mathcal{F}(G)/J$ na norma $||| \cdot |||$ por $\overline{y}$ e, no caso em que $\overline{y} \in \mathcal{F}(G)/J$, convencionaremos que $\overline{y} = y + J$. Suponha então que $\overline{y}$ é o limite de uma seqüência de Cauchy $\{\overline{y_n}\}_{n \in \mathbf{N}}$ de elementos de $\mathcal{F}(G)/J$ e note que

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{\varphi}(\overline{y_n}) - \widetilde{\varphi}(\overline{y_m})\|_B &= \|\widetilde{\varphi}(\overline{y_n} - \overline{y_m})\|_B = \|\varphi(y_n - y_m)\|_B \\
&= \|\zeta \circ \varphi(y_n - y_m)\|_{B(\mathcal{H})} \leq |||\overline{y_n} - \overline{y_m}|||,
\end{aligned}$$

isto é, $\{\widetilde{\varphi}(\overline{y_n})\}_{n \in \mathbf{N}}$ é uma seqüência de Cauchy em B e portanto converge (para um elemento de B). Assim, obtemos a existência do $*$-homomorfismo $\psi : A \longrightarrow B$ dado por

$$\psi(\overline{y}) := \lim \widetilde{\varphi}(\overline{y_n}),$$

(note que $\psi|_{\mathcal{F}(G)/J} = \widetilde{\varphi}$).

Vamos mostrar agora que ψ é único. Sejam ψ_1 e ψ_2 dois $*$-homomorfismos de A em B tais que

$$\psi_i(\overline{x_\iota}) = b_\iota \text{ e } \psi_i(\overline{x_\iota^*}) = b_\iota^*, \ \forall \iota \in \mathcal{I}, \ i = 1, 2$$

e considere o $*$-homomorfismo dado pela diferença $\psi_1 - \psi_2$. Segue que

$$(\psi_1 - \psi_2)(\overline{x_\iota}) = \psi_1(\overline{x_\iota}) - \psi_2(\overline{x_\iota}) = b_\iota - b_\iota = 0, \forall \iota \in \mathcal{I},$$

logo

$$(\psi_1 - \psi_2)(\overline{y}) = 0, \forall \overline{y} \in \mathcal{F}(G)/J,$$

e portanto

$$(\psi_1 - \psi_2)(\overline{y}) = 0, \forall \overline{y} \in A,$$

isto é, $\psi_1 = \psi_2$. □

Exemplo 1.2.8. *Dada uma C^*-álgebra A, sejam $G = A \bigcup A^* = A$ e $\mathcal{R}$ o conjunto de todas as relações $*$-algébricas entre elementos de A. Então $A \cong C^* < A, \mathcal{R} >$.*

Demonstração. Note que, dada uma representação $(\pi, \mathcal{H})$ de $(G, \mathcal{R})$ e dado $a \in A$, segue de

$$\|\pi(a)\| \leq \|a\|$$

que $(G, \mathcal{R})$ é admissível. Dada uma C^*-álgebra B que contém um conjunto G_B de elementos que satisfazem as relações de $\mathcal{R}$, a inclusão canônica é o único $*$-homomorfismo de A em B que leva cada elemento de A em sua respectiva cópia em B, portanto A satisfaz a propriedade universal para $(G, \mathcal{R})$. Como $C^* < A, \mathcal{R} >$ também satisfaz a propriedade universal para $(G, \mathcal{R})$ por causa do Teorema 1.2.7, segue da Proposição 1.2.6 que $A \cong C^* < A, \mathcal{R} >$. $\square$

Exemplo 1.2.9 (C^*-álgebra gerada por um unitário). *Suponha que $G = \{e, u, u^*\}$ e que*

$$\mathcal{R} = \{u^*u = uu^* = e = e^* = e^2, eu = u = ue, eu^* = u^* = u^*e\}.$$

Então $(G, \mathcal{R})$ é admissível e $C^* < G, \mathcal{R} > \cong C(\mathbb{T})$.

Demonstração. Note que, qualquer que seja uma representação $(\pi, \mathcal{H})$ não degenerada de $(G, \mathcal{R})$, temos

$$\|\pi(e)\|^2 = \|\pi(e)^*\pi(e)\| = \|\pi(e)^2\| = \|\pi(e)\| \Leftrightarrow \|\pi(e)\| = 1,$$

$$\|\pi(u)\|^2 = \|\pi(u)^*\pi(u)\| = \|\pi(e)\| = 1 \Leftrightarrow \|\pi(u)\| = 1,$$

o que é suficiente para que $(G, \mathcal{R})$ seja admissível, garantindo a existência de $C^* < G, \mathcal{R} >$. Basta agora mostrar que $C(\mathbb{T})$ satisfaz a propriedade universal para $(G, \mathcal{R})$, sendo $G_{C(\mathbb{T})} = \{\mathbf{1}, z, \overline{z}\}$, em que $\mathbf{1} : \lambda \mapsto 1$ é a função unidade de $C(\mathbb{T})$, $z : \lambda \mapsto \lambda$ a função inclusão de $\mathbb{T}$ em $\mathbb{C}$, e $z^{-1} = z^* = \overline{z} : \lambda \mapsto \overline{\lambda}$. Note que $\|\mathbf{1}\|_\infty = 1$, $\|z\|_\infty = \sup_{\lambda \in \mathbb{T}} |\lambda| = 1$ e $\|\overline{z}\|_\infty = \sup_{\lambda \in \mathbb{T}} |\overline{\lambda}| = 1$.

Seja B uma C^*-álgebra com unidade 1_B e $v \in B$ um unitário. Como v é unitário, então $\sigma(v) \subset \mathbb{T}$. Vamos denotar por I, Z e $\overline{Z}$, respectivamente, as restrições das funções $\mathbf{1}$, z e $\overline{z}$ a $\sigma(v)$. Segue de 1.1.18 que existe um único $*$-homomorfismo $\varphi : C(\sigma(v)) \to B$ tal que $\varphi(Z) = v$, com φ injetivo. Logo

$$\varphi(\overline{Z}) = \varphi(Z^*) = \varphi(Z)^* = v^*,$$

$$\varphi(I) = \varphi(Z^*Z) = v^*v = 1_B.$$

Se $\psi : C(\mathbb{T}) \to C(\sigma(v))$ denota o $*$-homomorfismo restrição $f \mapsto f_{\sigma(v)}$, então $\phi = \varphi \circ \psi$ é um $*$-homomorfismo de $C(\mathbb{T})$ em B tal que $\phi(z) = v$ e $\phi(\mathbf{1}) = I$. Segue da Proposição 1.2.6 que $C(\mathbb{T}) \cong C^* < G, \mathcal{R} >$. $\square$

Exemplo 1.2.10. *Sejam* $G = \{e, x, x^*\}$ *e*

$$\mathcal{R} = \{e^2 = e^* = e, x^* = x, ex = x = xe, ex^* = x^* = x^*e\}.$$

Note que o conjunto

$$\{\|\pi(x)\| : (\pi, \mathcal{H}) \text{ é representação de } (G, \mathcal{R})\}$$

não admite supremo, portanto o par $(G, \mathcal{R})$ *não é admissível. Para cada representação* $(\pi, \mathcal{H})$ *de* $(G, \mathcal{R})$*, é possível construir a* C^**-subálgebra* $C^*(\pi(x))$ *de* $B(\mathcal{H})$ *gerada por* $\pi(x)$*, entretando dada uma* C^**-álgebra* B *e* $h \in B$ *um elemento auto-adjunto, não é possível garantir a unicidade de um* $*$*-homomorfismo de* $C^*(\pi(x))$ *em* B *que leva* $\pi(x)$ *em* h.

As construções concretas das C^*-álgebras dos próximos exemplos serão detalhadas nas duas seções que se seguem neste capítulo.

Exemplo 1.2.11. *Sejam* $G = \{I, S, S^*\}$ *e o conjunto de relações*

$$\mathcal{R} = \{S^*S = I, I^* = I^2 = I, SI = IS = S, S^*I = IS^* = S^*\}.$$

Note que, qualquer que seja uma representação não degenerada $(\pi, \mathcal{H})$ *de* $(G, \mathcal{R})$*, segue das relações de* $\mathcal{R}$ *que*

$$\|\pi(I)\|^2 = \|\pi(I)^*\pi(I)\| = \|\pi(I)^2\| = \|\pi(I)\| \Leftrightarrow \|\pi(I)\| = 1,$$

$$\|\pi(S)\|^2 = \|\pi(S^*)\pi(S)\| = \|\pi(I)\| = 1 \Leftrightarrow \|\pi(S)\| = 1,$$

e como $\pi(S^*) = \pi(S)^*$*, obtemos também*

$$\|\pi(S^*)\| = 1,$$

portanto o par $(G, \mathcal{R})$ *admissível. Isto nos permite definir* $C^* < G, \mathcal{R} >$*, conhecida como álgebra de Toeplitz e denotada por* $C^*(S)$*. Provaremos na Seção 1.3 que esta* C^**-álgebra é isometricamente* $*$*-isomorfa a qualquer* C^**-álgebra gerada por uma isometria não unitária numa álgebra de operadores limitados num espaço de Hilbert.*

Exemplo 1.2.12. *Seja* A *uma* C^**-álgebra com unidade. Sejam* $G = A \bigcup \{u, u^*\}$ *e* $\mathcal{R}$ *o conjunto de todas as relações* $*$*-algébricas de* A*, das relações* $u^*u = 1 = u^*u$ *(que garantem que* u *é um unitário) e, para cada* $a \in A$*, da relação dada por*

$$uau^* = b, \text{ para algum } b \in A.$$

Assim, define-se um $*$-automorfismo α de A, dado por $\alpha(a) = uau^*$. Dada uma representação não degenerada $(\pi, \mathcal{H})$ de $(G, \mathcal{R})$ e $a \in A$, segue de $\|\pi(u)\| = 1$ e de

$$\begin{aligned} \|\pi(u^m a u^{*n})\| &= \|\pi(u)^m \pi(a) \pi(u)^{*n}\| \leq \|\pi(u)^m\| \|\pi(a)\| \|\pi(u)^{*n}\| \\ &= \|\pi(a)\| \leq \|a\|, \ \forall m, n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

que $(G, \mathcal{R})$ é admissível, o que nos permite definir $B := C < G, \mathcal{R} >$. Provaremos na última seção deste capítulo que B é $*$-isomorfa ao conhecido produto cruzado $A \times_\alpha \mathbb{Z}$ (Teorema 1.4.12).

Exemplo 1.2.13 (Álgebra de Rotação). *Sejam $\theta \in \mathbb{R}$, $G = \{I, U, V, U^*, V^*\}$ e $\mathcal{R}$ o conjunto das relações*

$$IU = U = UI, \ IV = V = VI, \ I^* = I = I^2, \tag{1.12}$$

$$U^*U = I = UU^*, \ VV^* = I = V^*V, \tag{1.13}$$

$$VU = e^{2\pi i\theta} UV. \tag{1.14}$$

As relações dadas em (1.12) garantem que o elemento I é a unidade, as relações dadas em (1.13) nos dão que U e V são unitários e em (1.14) está a relação que caracteriza a álgebra de rotação. Note que o par geradores-relações $(G, \mathcal{R})$ definido acima é admissível. De fato, qualquer que seja $(\pi, \mathcal{H})$ representação de $(G, \mathcal{R})$, segue imediatamente de (1.12) e (1.13) que $\|\pi(U)\| = \|\pi(V)\| = \|\pi(I)\| = 1$.

Chamaremos de $\mathcal{A}_\theta$ a C^*-álgebra universal gerada por G satisfazendo as relações de $\mathcal{R}$.

1.3 Álgebra de Toeplitz

Faremos nesta seção a construção concreta da Álgebra de Toeplitz. Para isso será necessária a construção dos espaços de Hardy H^n que, para $n = 2$, é o espaço de Hilbert sobre o qual definiremos os operadores de Toeplitz. Terminaremos a Seção demonstrando o Teorema de Coburn, em que provamos que a Álgebra de Toeplitz concretamente construída é $*$-isomorfa à qualquer C^*-álgebra gerada por uma isometria não unitária.

Seja $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ a circunferência de raio 1. Equipado com o produto pontual, $\mathbb{T}$ é um grupo. Como $t \mapsto e^{it}$ é uma bijeção entre o intervalo $[0; 2\pi[$ e $\mathbb{T}$, dada uma função $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ podemos definir $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ através de

$$F(t) = f(e^{it}), \tag{1.15}$$

que é uma função 2π-periódica. Reciprocamente, se F é uma função real de período 2π, então existe uma função f sobre $\mathbb{T}$ que satisfaz a igualdade dada em (1.15). Assim, definimos a σ-álgebra $\mathfrak{M}$ dos elementos $Y_X = \{e^{it} : t \in X\}$, para todo $X \in \mathfrak{R}$, sendo $\mathfrak{R}$ a σ-álgebra associada à medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$, que denotaremos aqui por r. Definimos a medida μ sobre $\mathfrak{M}$ através de

$$\mu(Y_X) = \frac{1}{2\pi} r(X).$$

Em outra palavras, definimos a integral de Lebesgue para uma função f definida sobre $\mathbb{T}$ por

$$\int_{\mathbb{T}} f d\mu = \int_{\mathbb{T}} f(\lambda) d\mu(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) dr(t).$$

Note que $\mu(\mathbb{T}) = 1$, isto é, a medida μ está normalizada. Sob estas convenções, uma função $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ será dita *Lebesgue mensurável* se $f^{-1}(V) \in \mathfrak{M}$, para todo V aberto de $\mathbb{C}$. Diremos que uma relação entre duas funções Lebesgue mensuráveis vale *quase sempre* (q.s.) se a relação não vale apenas em um conjunto Y de medida nula (na medida μ), isto é, $\mu(Y) = 0$. Definimos assim uma relação de equivalência no conjunto das funções Lebesgue mensuráveis através de

$$f \sim g \Leftrightarrow f - g = 0 \text{ q.s.},$$

quaisquer que sejam $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ Lebesgue mensuráveis. Neste sentido, denotaremos a classe de uma função $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ Lebesgue mensurável também por f.

Definição 1.3.1. *Para $1 \leq p < \infty$, definimos $L^p(\mathbb{T})$ como a classe de todas as funções $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ Lebesgue mensuráveis tais que a norma definida por*

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{T}} |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{it})|^p dr(t) \right)^{\frac{1}{p}}$$

é finita.

Seja $g : \mathbb{T} \to [0; \infty]$ e seja S o conjunto de todos os números reais α tais que

$$\mu\left(g^{-1}\left(]\alpha, \infty]\right)\right) = 0.$$

Chamamos de *supremo essencial* de g o número dado por

$$\beta(g) = \begin{cases} \infty & \text{se } S = \emptyset \\ \inf S & \text{se } S \neq \emptyset. \end{cases}$$

Definição 1.3.2. *Dada $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$, definimos a* norma do supremo essencial *por*

$$\|f\|_\infty = \beta(|f|).$$

Denotaremos por $L^\infty(\mathbb{T})$ a classe de todas as funções $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ tais que $\|f\|_\infty < \infty$.

$L^\infty(\mathbb{T})$ é uma $*$-álgebra com o produto pontual e com involução dada, para cada $f \in L^\infty(\mathbb{T})$, por

$$f^*(\lambda) = \overline{f(\lambda)}, \ \forall \lambda \in \mathbb{T},$$

e como

$$\sup_{t \in \mathbb{T}} |f(t)| \leq \|f\|_\infty,$$

qualquer que seja $f \in L^\infty(\mathbb{T})$, segue que $C(\mathbb{T}) \subset L^\infty(\mathbb{T})$. Neste caso, como duas funções contínuas que coincidem q.s. são necessariamente iguais, então, para $f \in C(\mathbb{T})$, temos

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{T}} |f(t)|.$$

Observação 1.3.3. *Como $\mathbb{T}$ é compacto, segue da desigualdade de Hölder que, dado $p \in \mathbb{N}^*$,*

$$\begin{aligned} \|f\|_1 &= \int_{\mathbb{T}} |f||1| d\mu \leq \left(\int_{\mathbb{T}} |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{T}} |1|^{\frac{p}{p-1}} d\mu \right)^{\frac{p-1}{p}} \\ &= \|f\|_p \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 1 dt \right)^{\frac{p-1}{p}} = \|f\|_p, \ \forall f \in L^p(\mathbb{T}), \end{aligned}$$

logo $L^p(\mathbb{T}) \subset L^1(\mathbb{T})$. Temos também,

$$\begin{aligned} \|f\|_p &= \left(\int_{\mathbb{T}} |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_{\mathbb{T}} \|f\|_\infty^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|f\|_\infty \left(\int_{\mathbb{T}} |1|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}, \ \forall f \in L^\infty(\mathbb{T}), \end{aligned}$$

e portanto $L^\infty(\mathbb{T}) \subset L^p(\mathbb{T})$, para $1 \leq p < \infty$.

O resultado a seguir é bastante conhecido e sua demonstração pode ser encontrada em [16, Teorema 3.11].

Proposição 1.3.4. *Para $1 \leq p \leq \infty$, $L^p(\mathbb{T})$ é um espaço vetorial completo.*

Em particular, $L^2(\mathbb{T})$ é um espaço de Hilbert com produto interno dado por

$$< f, g >= \int_{\mathbb{T}} f \bar{g} d\mu = \int_{\mathbb{T}} f(\lambda) \overline{g(\lambda)} d\mu(\lambda),$$

para $f, g \in L^2(\mathbb{T})$.

Para $n \in \mathbb{Z}$, definiremos a função

$$\begin{aligned} \epsilon_n : \ \mathbb{T} &\to \mathbb{T} \\ z &\mapsto z^n, \end{aligned}$$

que é evidentemente contínua. Note que

$$\overline{\epsilon_n} = \epsilon_{-n} \quad \text{e} \quad \epsilon_n \epsilon_k = \epsilon_{n+k},$$

e que ϵ_0 é a função identicamente igual a 1.

Denotaremos por Γ o conjunto linearmente gerado pelos elementos ϵ_n, $n \in \mathbb{Z}$. Mais especificamente, se $p \in \Gamma$, então p é da forma $\sum_{k=-n}^{n} \lambda_k \epsilon_k$, para algum $n \in \mathbb{Z}$, sendo cada λ_k um número complexo. Como $z = \cos(\theta) + i\text{sen}(\theta)$ e

$$p(z) = \sum_{k=-n}^{n} \lambda_k z^k = \sum_{k=-n}^{n} \lambda_k (\cos(k\theta) + i\text{sen}(k\theta)),$$

Γ é chamado de conjunto dos *polinômios trigonométricos*.

Proposição 1.3.5. *$(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é uma base ortonormal para $L^2(\mathbb{T})$.*

Demonstração. A ortonormalidade de $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ segue de

$$\begin{aligned} < \epsilon_m, \epsilon_n > &= \int_{\mathbb{T}} \epsilon_m \overline{\epsilon_n} d\mu \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)t} dt = \begin{cases} 1 & \text{se } m = n \\ 0 & \text{se } m \neq n. \end{cases} \end{aligned}$$

Como $\mathbb{T}$ é compacto, Γ é uma $*$-subálgebra de $C(\mathbb{T})$, $1_{C(\mathbb{T})} = \epsilon_0 \in \Gamma$, Γ separa pontos de $\mathbb{T}$ e $\overline{\epsilon_n} = \epsilon_{-n} \in \Gamma$, segue do Teorema de Stone-Weierstrass (vide [3, Teorema 8.1]) que Γ é denso em $C(\mathbb{T})$, na norma dada por

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(z)| : z \in \mathbb{C}\}, \; f \in C(\mathbb{T}),$$

que coincide (em $C(\mathbb{T})$) com a norma $\|\cdot\|_\infty$ da Definição 1.3.2.

Como $C(\mathbb{T})$ é denso em $L^p(\mathbb{T})$ na norma $\|\cdot\|_p$ ([16, Teorema 3.14]) e $\|f\|_p \leq \|f\|_\infty$, $\forall f \in L^p(\mathbb{T})$ (Observação 1.3.3), segue que Γ é denso em $L^p(\mathbb{T})$, nesta mesma norma, para $1 \leq p < \infty$. Em particular, para $p = 2$, esta densidade, juntamente com a ortonormalidade de $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, implica que $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é uma base ortonormal para $L^2(\mathbb{T})$. □

Se $f \in L^1(\mathbb{T})$, então

$$\int_{\mathbb{T}} |f\overline{\epsilon_n}| d\mu \leq \int_{\mathbb{T}} |f| \|\overline{\epsilon_n}\|_\infty d\mu = \int_{\mathbb{T}} |f| d\mu = \|f\|_1,$$

isto é, $f\overline{\epsilon_n} \in L^1(\mathbb{T})$. Isso nos permite definir a transformada de Fourier para um elemento de $L^1(\mathbb{T})$.

Definição 1.3.6. *Dada $f \in L^1(\mathbb{T})$, definimos n-ésimo* coeficiente de Fourier *de f por*

$$\widehat{f}(n) = \int_{\mathbb{T}} f\overline{\epsilon_n} d\mu = \int_{\mathbb{T}} f(\lambda)\bar{\lambda}^n d\mu(\lambda).$$

A função

$$\begin{array}{rcl} \widehat{f}: \mathbb{Z} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ n & \mapsto & \widehat{f}(n) \end{array}$$

é chamada de transformada de Fourier *de f.*

Proposição 1.3.7. *Seja $f \in L^1(\mathbb{T})$. Se $\widehat{f} \equiv 0$, então $f = 0$ q.s..*

Demonstração. Se $\widehat{f} \equiv 0$, então

$$\int_{\mathbb{T}} \left(\sum_{i=-n}^{n} \lambda_i \epsilon_i \right) f d\mu = \sum_{i=-n}^{n} \lambda_i \int_{\mathbb{T}} \epsilon_i f d\mu = 0,$$

quaisquer que sejam $\lambda_{-n}, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$, logo $\int_{\mathbb{T}} g f d\mu = 0$, $\forall g \in \Gamma$. Dados $h \in C(\mathbb{T})$ e $\varepsilon > 0$, tome $g \in \Gamma$ tal que $\|g - h\|_\infty < \frac{\varepsilon}{\|f\|_1}$. Segue que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{T}} h f d\mu \right| &= \left| \int_{\mathbb{T}} (h-g) f d\mu + \int_{\mathbb{T}} g f d\mu \right| \\ &\leq \|h - g\|_\infty \underbrace{\int_{\mathbb{T}} |f| d\mu}_{\|f\|_1} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto, $\int_{\mathbb{T}} h f d\mu = 0$, para todo $h \in C(\mathbb{T})$. Assim, a medida μ_f, definida por

$$\mu_f(E) = \int_E f d\mu = \int_{\mathbb{T}} f \chi_E d\mu, \ \forall E \in \mathfrak{M}$$

e cuja existência decorre de [16, Teorema 1.29], é nula. Isto é, $f = 0$ q.s.. □

Definição 1.3.8. *Dado $1 \leq p \leq \infty$, definimos o* espaço de Hardy de ordem p, *ou simplesmente* espaço de Hardy *como sendo*

$$H^p = \left\{ f \in L^p(\mathbb{T}) : \widehat{f}(n) = 0, \ n < 0 \right\}.$$

Proposição 1.3.9. *H^p é um subespaço vetorial fechado de $L^p(\mathbb{T})$ na norma $\|\cdot\|_p$, para todo $1 \leq p \leq \infty$. E mais, se $1 \leq p < \infty$, então $H^\infty = H^p \bigcap L^\infty(\mathbb{T})$.*

Demonstração. Claramente H^p é um subespaço vetorial de $L^p(\mathbb{T})$. Seja $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de H^p convergente para $f \in L^p(\mathbb{T})$. Vamos mostrar que $f \in H^p$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$m > N \Rightarrow \|f_m - f\|_p < \varepsilon.$$

Por outro lado, se $n < 0$, então

$$\begin{aligned}
|\widehat{f}(n)| &= \left|\int_{\mathbb{T}} f\overline{\epsilon_n}d\mu\right| = \left|\int_{\mathbb{T}} (f - f_m + f_m)\overline{\epsilon_n}d\mu\right| \\
&\leq \left|\int_{\mathbb{T}} (f - f_m)\overline{\epsilon_n}d\mu\right| + \left|\int_{\mathbb{T}} f_m\overline{\epsilon_n}d\mu\right| \\
&\leq \int_{\mathbb{T}} |f - f_m|\, d\mu + \left|\widehat{f_m}(n)\right| \\
&= \|f - f_m\|_1 \leq \|f - f_m\|_p < \varepsilon,
\end{aligned}$$

quando $m > N$. Como ε foi escolhido arbitrariamente, segue que $\widehat{f}(n) = 0$, para todo $n \in \mathbb{Z}_-^*$, portanto $f \in H^p$.

Agora, se $1 \leq p < \infty$ e $f \in H^\infty$, então $f \in L^\infty(\mathbb{T}) \subset L^p(\mathbb{T})$ e, como $\hat{f}(n) = 0$, $\forall n < 0$, obtemos que $f \in H^p$. Portanto $H^\infty \subset H^p \bigcap L^\infty(\mathbb{T})$. Reciprocamente, se $f \in H^p \bigcap L^\infty(\mathbb{T})$, então $f \in L^\infty(\mathbb{T})$ e $\hat{f}(n) = 0$, $\forall n < 0$, de onde segue a inclusão reversa. □

Proposição 1.3.10. *H^2 é um subespaço de Hilbert de $L^2(\mathbb{T})$. E mais, $(\epsilon_n)_{n\geq 0}$ é base de H^2.*

Demonstração. A primeira afirmação segue imediatamente da Proposição 1.3.9. Para provar a segunda, note que, se $m, n \in \mathbb{Z}$, então

$$\widehat{\epsilon_m}(n) = \int_{\mathbb{T}} \epsilon_m\overline{\epsilon_n}d\mu = \int_{\mathbb{T}} \epsilon_m\epsilon_{-n}d\mu = \begin{cases} 1 & \text{se } m = n \\ 0 & \text{se } m \neq n. \end{cases}$$

Daí, se $n < 0$, então $\widehat{\epsilon_n}(n) = 1 \neq 0$, logo $\epsilon_n \in H^2$ se, e somente se, $n \geq 0$. Seja $g \in H^2$, como $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é base de $L^2(\mathbb{T})$ e

$$< g, \epsilon_m >= \int_{\mathbb{T}} g\overline{\epsilon_m}d\mu = \hat{g}(m) = 0, \ \forall m < 0,$$

segue que

$$g = \sum_{n\in\mathbb{Z}} < g, \epsilon_n > \epsilon_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} < g, \epsilon_n > \epsilon_n.$$

□

Lema 1.3.11. *Se $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$, então $\|\varphi f\|_2 \leq \|\varphi\|_\infty \|f\|_2$, $\forall f \in L^2(\mathbb{T})$.*

Demonstração. Se $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$, então

$$\begin{aligned}\|\varphi f\|_2 &= \left(\int_{\mathbb{T}} |\varphi(\lambda)f(\lambda)|^2 d\lambda\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_{\mathbb{T}} \|\varphi\|_\infty^2 |f(\lambda)|^2 d\lambda\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|\varphi\|_\infty \left(\int_{\mathbb{T}} |f(\lambda)|^2 d\lambda\right)^{\frac{1}{2}} = \|\varphi\|_\infty \|f\|_2,\end{aligned}$$

qualquer que seja $f \in L^2(\mathbb{T})$. □

Proposição 1.3.12. *Se $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$, então $\varphi f \in L^2(\mathbb{T})$, $\forall f \in L^2(\mathbb{T})$. Em particular, se, $\varphi \in H^\infty$, então $\varphi f \in H^2$, $\forall f \in H^2$.*

Demonstração. A primeira afirmação decorre imediatamente do Lema 1.3.11.

Para verificar a segunda, vamos mostrar inicialmente que H^2 é fechado com relação ao produto pontual. De fato, se $f, g \in H^2$, então segue de 1.3.10 que f e g se escrevem como

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \epsilon_n \quad \text{e} \quad g = \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m \epsilon_m,$$

logo

$$fg = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \epsilon_n\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} \beta_m \epsilon_m\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \alpha_n \beta_m \epsilon_{n+m} \in H^2.$$

Suponha agora que $\varphi \in H^\infty$, segue da Proposição 1.3.9 que $\varphi \in H^2 \bigcap L^\infty(\mathbb{T})$, e daí $\varphi f \in H^2$, $\forall f \in H^2$, dado que H^2 é fechado com relação ao produto pontual. □

Segue da Proposição 1.3.12 que para cada $\varphi \in L^\infty$, o operador multiplicação dado por

$$\begin{aligned} M_\varphi : \ L^2(\mathbb{T}) &\rightarrow L^2(\mathbb{T}) \\ f &\mapsto \varphi f, \end{aligned}$$

está bem definido, e segue do Lema 1.3.11 que M_φ é limitado, com $\|M_\varphi\| \leq \|\varphi\|_\infty$.

Proposição 1.3.13. *A aplicação*

$$\begin{aligned} M : \ L^\infty(\mathbb{T}) &\rightarrow B(L^2(\mathbb{T})) \\ \varphi &\mapsto M_\varphi, \end{aligned}$$

é um $*$-homomorfismo isométrico. E mais, se $\varphi \in H^\infty$, então H^2 é invariante por M_φ.

Demonstração. Claramente M é linear. Sejam $\varphi_1, \varphi_2 \in L^\infty(\mathbb{T})$ e $f \in L^2(\mathbb{T})$, temos

$$M_{\varphi_1\varphi_2}(f) = \varphi_1\varphi_2 f = M_{\varphi_1}(\varphi_2 f) = M_{\varphi_1}M_{\varphi_2}(f),$$

logo M preserva o produto. Considere agora $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$ e $f,g \in L^2(\mathbb{T})$, daí

$$\begin{aligned} <(M_\varphi)^*(f), g> &= <f, M_\varphi(g)>=<f,\varphi g>= \int_{\mathbb{T}} f\overline{\varphi g}d\mu \\ &= \int_{\mathbb{T}} (\overline{\varphi} f)\overline{g}d\mu =<\overline{\varphi}f, g>=<M_{\overline{\varphi}}(f), g>, \end{aligned}$$

de onde segue que M preserva adjunto. Portanto, M é $*$-homomorfismo.

Segue do Lema 1.3.11 segue que

$$\|M_\varphi(f)\|_2 = \|\varphi f\|_2 \leq \|\varphi\|_\infty \|f\|_2,$$

e portanto,

$$\|M_\varphi\| = \sup\{\|M_\varphi(f)\|_2 : \|f\|_2 = 1\} \leq \|\varphi\|_\infty.$$

Suponha agora que $\|M_\varphi\| < \|\varphi\|_\infty$, então existe $\varepsilon > 0$ tal que $\|M_\varphi\| + \varepsilon < \|\varphi\|_\infty$. Seja $S = \{\omega \in \mathbb{T} : |\varphi(\omega)| \geq \|\varphi\|_\infty - \frac{\varepsilon}{2}\}$, segue da Definição 1.3.2 e da normalização de μ que $0 < \mu(S) \leq 1$. Temos, então, que $\|M_\varphi\| + \frac{\varepsilon}{2} < |\varphi(\omega)|$ para todo $\omega \in S$. Portanto

$$\begin{aligned} \|M_\varphi\|^2 \mu(S) &\geq \|M_\varphi(\chi_S)\|_2^2 = \int_{\mathbb{T}} |\varphi\chi_S|^2 d\mu = \int_S |\varphi|^2 d\mu \\ &\geq \int_S \left|\|M_\varphi\| + \frac{\varepsilon}{2}\right|^2 d\mu = \left(\|M_\varphi\| + \frac{\varepsilon}{2}\right)^2 \mu(S), \end{aligned}$$

que nos dá $\|M_\varphi\| \geq \|M_\varphi\| + \frac{\varepsilon}{2}$, que é absurdo. □

Definição 1.3.14. *Chamamos $V = M_{\epsilon_1}$ de* shift bilateral. *A restrição U de V a H^2 é chamada de* shift unilateral *sobre a base $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Para cada $n \in \mathbb{Z}$, temos que $V(\epsilon_n) = \epsilon_{n+1}$.

V é um $*$-isomorfismo. De fato, se T é um operador de $L^2(\mathbb{T})$ definido por $T(\epsilon_n) = \epsilon_{n-1}$, então

$$T(V(\epsilon_n)) = T(V(\epsilon_{n+1})) = \epsilon_{n+1-1} = \epsilon_n = \epsilon_{n-1+1} = V(T(\epsilon_n)),$$

logo $T = V^{-1}$. Assim, note que $V^m(\epsilon_n) = \epsilon_{n+m}$ vale mesmo quando $m < 0$. Note também que isto não vale para o shift unilateral U. De fato, U não é sobrejetor, dado que $\epsilon_0 \notin U(H^2)$.

Proposição 1.3.15. *Se T é um operador limitado de $L^2(\mathbb{T})$, então T comuta com o* shift *bilateral V se, e somente se, $T = M_\varphi$, para algum $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$.*

Demonstração. Claramente M_φ comuta com V, qualquer que seja $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$. Suponha que T é um operador limitado de $L^2(\mathbb{T})$ tal que $TV = VT$. Lembrando que Γ é o conjunto linearmente gerado pelos elementos ϵ_n, com $n \in \mathbb{Z}$, se $\psi \in \Gamma$, então

$$\psi = \sum_{i=-n}^{n} \lambda_n \epsilon_n.$$

Segue da linearidade do $*$-homomorfismo M que

$$M_\psi = \sum_{i=-n}^{n} \lambda_n M_{\epsilon_n} = \sum_{i=-n}^{n} \lambda_n V^n.$$

Portanto, M_ψ comuta com V.

Considerando agora que $\psi \in L^\infty(\mathbb{T}) \subset L^2(\mathbb{T})$, como Γ é denso em $L^2(\mathbb{T})$ na norma $\|\cdot\|_2$, podemos afirmar que existe uma seqüência $(\psi_n)_{n\geq 1}$ em Γ que converge para ψ na norma $\|\cdot\|_2$. Logo,

$$\lim_{n\to\infty} \|T(\psi_n) - T(\psi)\|_2 = 0,$$

dado que T é um operador limitado, e portanto contínuo

Como $(\psi_n)_{n\geq 1}$ em Γ que converge para ψ, temos que existe uma subseqüência $(\psi_{n_k})_{k\geq 1}$ de $(\psi_n)_{n\geq 1}$ que converge para ψ q.s. (vide [8]). Note que, novamente porque T é contínuo, $(T(\psi_{n_k}))_{k\geq 1}$ converge para $T(\psi)$ na norma $\|\cdot\|_2$. Dessa forma, podemos tomar uma subseqüência $(\psi_{n_{k_l}})_{l\geq 1}$ de $(\psi_{n_k})_{k\geq 1}$ tal que $(T(\psi_{n_{k_l}}))_{l\geq 1}$ converge para $T(\psi)$ q.s... Definindo $\varphi = T(\epsilon_0)$, temos

$$T(\psi_{n_{k_l}}) = T(M_{\psi_{n_{k_l}}}(\epsilon_0)) = M_{\psi_{n_{k_l}}}(T(\epsilon_0)) = M_{\psi_{n_{k_l}}}(\varphi) \text{ q.s..}$$

Portanto $T(\psi) = \psi\varphi$ q.s..

Resta provar que $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$. Seja $E_n = \{\lambda \in \mathbb{T} : |\varphi(\lambda)| > \|T\| + \frac{1}{n}\}$, segue que E_n é um conjunto mensurável. Como

$$\begin{aligned} \|T\|^2\|\chi_{E_n}\|_2^2 &\geq \|T(\chi_{E_n})\|_2^2 = \int_{\mathbb{T}} |T(\chi_{E_n})|^2 d\mu \geq \int_{\mathbb{T}} |T(\epsilon_0)|^2 \chi_{E_n} d\mu \\ &= \int_{\mathbb{T}} |\varphi|^2 \chi_{E_n} d\mu \geq \int_{\mathbb{T}} (\|T\| + \frac{1}{n})^2 \chi_{E_n} d\mu = (\|T\| + \frac{1}{n})^2 \|\chi_{E_n}\|_2^2, \end{aligned}$$

segue que $\|\chi_{E_n}\|_2 = 0$, e então $\mu(E_n) = 0$. Assim, o conjunto dos elementos $\lambda \in \mathbb{T}$ tais que $|\varphi(\lambda)| \geq \|T\|$, que é igual à $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, é um conjunto de medida nula. Segue que $|\varphi(\lambda)| \leq \|T\|$ q.s., e portanto $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$. □

Definição 1.3.16. *Dizemos que um subespaço vetorial fechado K de um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ é* invariante *por um operador $T \in B(\mathcal{H})$ se $T(K) \subset K$, isto é, se $T(x) \in K$, $\forall x \in K$. Se $A \subset B(\mathcal{H})$ é um conjunto de operadores, dizemos que K é invariante por A se K é invariante por T, $\forall T \in A$.*

Note na definição acima que, se P_K é a projeção ortogonal de $\mathcal{H}$ sobre K, então K é invariante por T se, e somente se, $P_K T P_K = T P_K$.

Definição 1.3.17. *Dizemos que um subespaço vetorial fechado K de um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ é* redutível por um operador $T \in B(\mathcal{H})$ *se K e $K^{\perp}$ forem invariantes por T.*

Observação 1.3.18. *A definição dada acima é equivalente à comutatividade de T com P_K, dado que $K^{\perp}$ é invariante por T se, e somente se, K for invariante por T^*.*

Definição 1.3.19. *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e seja A uma C^*-subálgebra de $B(\mathcal{H})$. Dizemos que A é* irredutível para $\mathcal{H}$, *ou que A* age irredutivelmente em $\mathcal{H}$, *se os únicos subespaços de $\mathcal{H}$ que são invariantes por A são 0 e $\mathcal{H}$.*

Lembrando que $K(\mathcal{H})$ denota a C^*-álgebra dos operadores compactos sobre um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, enunciaremos a seguir mais um resultado sobre esta C^*-álgebra, cuja prova pode ser encontrada em [11, Teorema 2.4.9].

Proposição 1.3.20. *Seja A uma C^*-álgebra irredutível sobre um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ tal que $A \bigcap K(\mathcal{H}) \neq \emptyset$. Então $K(\mathcal{H}) \subset A$.*

A menor σ-álgebra em $\mathbb{T}$ que contém todos os seus abertos é chamada de σ-álgebra dos borelianos de $\mathbb{T}$, e é denotada por $\mathfrak{B}$. Note que $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{M}$. Seja E um elemento da σ-álgebra dos borelianos de $\mathbb{T}$. Se $f \in L_2(\mathbb{T})$, então

$$\overline{\chi_E}(\lambda)f(\lambda) = (\chi_E(\lambda))^2 f(\lambda) = \chi_E(\lambda)f(\lambda) = \begin{cases} f(\lambda) & \text{se } \lambda \in E \\ 0 & \text{se } \lambda \notin E, \end{cases}$$

logo, M_{χ_E} é uma projeção sobre $L^2(\mathbb{T})$. A imagem de uma projeção deste tipo é chamada de *subespaço vetorial de Wiener* de $L^2(\mathbb{T})$. Se $K_E = M_{\chi_E}(L^2(\mathbb{T}))$, segue da Proposição 1.3.15 que

$$V(K_E) = V(M_{\chi_E}(L^2(\mathbb{T}))) = M_{\chi_E}(V(L^2(\mathbb{T}))) = M_{\chi_E}(L^2(\mathbb{T})) = K_E. \tag{1.16}$$

Se $\varphi \in L^{\infty}(\mathbb{T})$ é um unitário, então

$$\varphi H^2 = \{\varphi f : f \in H^2\} = \{M_{\varphi}(f) : f \in H^2\} = M_{\varphi}(H^2)$$

é um subespaço vetorial fechado de $L^2(\mathbb{T})$. De fato, se $(f_n)_{n\geq 1}$ é uma seqüência de H^2 tal que $(\varphi f_n)_{n\geq 1}$ converge para $g \in \varphi(H^2)$, então, como φ é unitário, segue que

$$\|f_n\|_2 = \|\varphi f_n\|_2 = \|\overline{\varphi}\varphi f_n\|_2, \ \forall n \geq 1,$$

portanto $(f_n)_{n\geq 1}$ converge para $f := \overline{\varphi} g \in H^2$. Neste caso, o subespaço φH^2 é chamado de *espaço vetorial de Beurling* de $L^2(\mathbb{T})$. Note que φH^2 é invariante pelo *shift* bilateral V e, além disso, $V(\varphi H^2) \neq \varphi H^2$. De fato, segue da Proposição 1.3.15 que

$$V(\varphi H^2) = V(M_{\varphi}(H^2)) = M_{\varphi}(V(H^2)) = M_{\varphi}(U(H^2)) = \varphi U(H^2) \subsetneq \varphi H^2 \tag{1.17}$$

dado que a igualdade implicaria $U(H^2) = H^2$ e daí U seria sobrejetor, o que é falso.

Proposição 1.3.21. *Os subespaços vetoriais fechados de $L^2(\mathbb{T})$ invariantes pelo* shift *bilateral V são somente os espaços vetoriais de Wiener e de Beurling. Se K é um subespaço vetorial fechado de $L^2(\mathbb{T})$ invariante por V, então*

(a) $V(K) = K$ se, e somente se, K é um espaço vetorial de Wiener de $L^2(\mathbb{T})$.

(b) $V(K) \subsetneq K$ se, e somente se, K é um espaço vetorial de Beurling de $L^2(\mathbb{T})$.

Demonstração. Seja K um subespaço vetorial fechado de $L^2(\mathbb{T})$ invariante por V.

(a) Suponha que $V(K) = K$, e considere P_K a projeção de $L^2(\mathbb{T})$ sobre K. Note $K^\perp$ é invariante por V. Com efeito, se $y \in K^\perp$ e $x \in K$, então

$$0 =< x, y >=< x, V^*(V(y)) >=< \underbrace{V(x)}_{\in K}, V(y) >,$$

logo $V(y) \in K^\perp$. Logo, K é redutível por V. Segue da Observação 1.3.18 que P_K comuta com V. Daí, a Proposição 1.3.15 implica a existência de um elemento $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$ tal que $P_K = M_\varphi$. Como P_K é uma projeção, segue que

$$M_\varphi^2 = M_\varphi^* = M_\varphi,$$

em que $M_\varphi^* = M_{\overline{\varphi}}$, daí

$$\varphi^2 f = \overline{\varphi} f = \varphi f, \ \forall f \in L^2(\mathbb{T}),$$

ou seja $\varphi^2 = \overline{\varphi} = \varphi$, de onde segue que, para cada $\lambda \in \mathbb{T}$, $\varphi(\lambda) = 0$ ou $\varphi(\lambda) = 1$, logo $\varphi = \chi_E$ q.s., para E um conjunto mensurável. Logo, $P_K = M_{\chi_E}$ e portanto K é um espaço vetorial de Wiener de $L^2(\mathbb{T})$. A recíproca segue de (1.16) na página 27.

(b) Suponha agora que $V(K) \subsetneq K$. Então existe um vetor unitário $\varphi \in K$ tal que φ é ortogonal a $V(K)$. Como $V^n(\varphi) \in V(K)$, $\forall n > 0$ e como

$$\begin{aligned} V^n(\varphi) &= V^n\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} < \varphi, \epsilon_m > \epsilon_m\right) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} < \varphi, \epsilon_m > \epsilon_{m+n} \\ &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} < \varphi, \epsilon_m > \epsilon_n\epsilon_m = \epsilon_n\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} < \varphi, \epsilon_m > \epsilon_m\right) = \epsilon_n\varphi, \end{aligned}$$

para todo $n > 0$, segue que

$$0 =< V^n(\varphi), \varphi >= \int_{\mathbb{T}} V^n(\varphi)\overline{\varphi} d\mu = \int_{\mathbb{T}} \epsilon_n\varphi\overline{\varphi} d\mu = \int_{\mathbb{T}} \epsilon_n|\varphi|^2 d\mu, \ \forall n > 0.$$

Como $|\varphi(\lambda)|^2 \in \mathbb{R}$, $\forall \lambda \in \mathbb{T}$, então, qualquer que seja $n > 0$,

$$0 =< \epsilon_n, |\varphi|^2 >= \int_{\mathbb{T}} \epsilon_n |\varphi|^2 d\mu = \int_{\mathbb{T}} |\varphi|^2 \overline{\epsilon_{-n}} d\mu =< |\varphi|^2, \epsilon_{-n} >,$$

portanto $|\varphi|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} < |\varphi|^2, \epsilon_n > \epsilon_n =< |\varphi|^2, \epsilon_0 > \epsilon_0$, isto é, $|\varphi|^2 = \alpha$ q.s., para alguma constante α. Como $\|\varphi\|_2 = 1$, segue que $\alpha = 1$. Portanto, φ é um unitário de $L^\infty(\mathbb{T})$ e $\varphi H^2 \subset K$. De fato, se $f \in H^2$, então $f = \sum_{n\geq 0} \lambda_n \epsilon_n$, o que implica

$$\varphi f = \sum_{n\geq 0} \lambda_n \epsilon_n \varphi = \sum_{n\geq 0} \lambda_n M_{\epsilon_n}(\varphi) = \sum_{n\geq 0} \lambda_n V^n(\varphi).$$

Além disso, como φ é unitário, $(\epsilon_n\varphi)_{n\in\mathbb{Z}}$ é uma base ortonormal para $L^2(\mathbb{T})$. De fato,

$$< \varphi\epsilon_m, \varphi\epsilon_n >=< \epsilon_m, \overline{\varphi}\varphi\epsilon_n >=< \epsilon_m, \epsilon_n >= \begin{cases} 1 & \text{se } m = n \\ 0 & \text{se } m \neq n. \end{cases}$$

Agora, se $g \in L^2(\mathbb{T})$, então

$$g = (g\overline{\varphi})\varphi = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} < g\overline{\varphi}, \epsilon_n > \epsilon_n \right) \varphi = \sum_{n\in\mathbb{Z}} < g, \epsilon_n\varphi > \epsilon_n\varphi.$$

Como, para todo $\psi \in K$, temos $< \epsilon_n\varphi, \psi >=< \varphi, \epsilon_{-n}\psi >$, dado que $\epsilon_{-n}\psi \in V(K)$, segue que $\epsilon_n\varphi \in K^\perp$, $\forall n < 0$.

Logo, $(\epsilon_n\varphi)_{n\geq 0}$ é uma base ortonormal para K, e portanto $K = \varphi H^2$. Portanto, K é um espaço vetorial de Beurling de $L^2(\mathbb{T})$. A recíproca segue de (1.17) na página 27.

□

Proposição 1.3.22. *Os únicos subespaços vetorias fechados de H^2 redutíveis pelo* shift *unilateral U são os espaços invariantes 0 e H^2.*

Demonstração. Suponha que K é um subespaço vetorial fechado não trivial próprio de H^2 que seja redutível pelo *shift* unilateral U, isto é, tal que K e $K^\perp$ são invariantes por U. Note que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} V^n(K) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} V^n(H^2) = 0,$$

e que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} V^n(K^\perp) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} V^n(H^2) = 0,$$

com $K \neq 0$. A Proposição 1.3.21 implica que K é um espaço vetorial de Beurling de $L^2(\mathbb{T})$, assim como implica que $H^2 \ominus K = K^\perp$ também é um espaço vetorial de Beurling de $L^2(\mathbb{T})$. Então, existem $\varphi, \psi \in L^\infty(\mathbb{T}) \subset L^2(\mathbb{T})$ vetores unitários tais que $K = \varphi H^2$ e $H^2 \ominus K = \psi H^2$.

Dado $n \geq 0$, temos que $\epsilon_n \varphi \in K$ e $\epsilon_n \psi \in H^2 \ominus K$, daí

$$< \epsilon_n \varphi, \psi >= 0 =< \varphi, \epsilon_n \psi >,$$

ou seja

$$\int_{\mathbb{T}} \epsilon_n \varphi \overline{\psi} d\mu = 0 = \int_{\mathbb{T}} \varphi \epsilon_{-n} \overline{\psi} d\mu,$$

que é equivalente à

$$\widehat{\varphi\overline{\psi}}(-n) = 0 = \widehat{\varphi\overline{\psi}}(n).$$

Como $n \in \mathbb{N}$ foi escolhido arbitrariamente, segue que a transformada de Fourier de $\varphi\overline{\psi}$ é zero. Segue da Observação 1.3.7 que $\varphi\overline{\psi} = 0$ q.s., que é absurdo dado que φ e ψ são vetores unitários de $L^\infty(\mathbb{T})$.

Portanto, K não pode ser um subespaço vetorial fechado não trivial próprio de H^2, isto é, $K = 0$ ou $K = H^2$. $\square$

Definição 1.3.23. *Seja V um operador sobre um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, e seja K um subespaço vetorial fechado de $\mathcal{H}$, chamamos de* compressão de V para K *o operador $P_K V|_K$, isto é, a projeção ortogonal sobre K composta com a restrição de V a K.*

Definição 1.3.24. *Seja P_{H^2} a projeção ortogonal de $L^2(\mathbb{T})$ sobre H^2 e $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$ e considere a compressão de M_φ, $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$, a H^2, dada por*

$$\begin{array}{rccc} T_\varphi: & H^2 & \rightarrow & H^2 \\ & f & \mapsto & P_{H^2}(\varphi f). \end{array}$$

Chamamos T_φ de operador de Toeplitz *com* símbolo φ.

Note que um operador de Toeplitz é sempre limitado e do Lema 1.3.11 temos

$$\|T_\varphi\| \leq \|\varphi\|_\infty.$$

Note também que $T_{\epsilon_1} = U$.

Proposição 1.3.25. *A aplicação*

$$\begin{array}{rccc} T: & L^\infty(\mathbb{T}) & \rightarrow & B(H^2) \\ & \varphi & \mapsto & T_\varphi \end{array}$$

é linear e preserva adjuntos, isto é $T_\varphi^* = T_{\bar{\varphi}}$.

Demonstração. A linearidade de T segue da linearidade de P_{H^2} e da distributividade do produto em $L^\infty(\mathbb{T})$. Quanto ao adjunto, se $f, g \in H^2$, então

$$\begin{array}{rcccl} < T_\varphi^*(f), g > & = & < f, T_\varphi(g) > & = & < f, P_{H^2}(\varphi g) > \\ & = & < P_{H^2}(f), \varphi g > & = & < f, \varphi g > \\ & = & < \bar{\varphi} f, g > & = & < \bar{\varphi} f, P_{H^2}(g) > \\ & = & < P_{H^2}(\bar{\varphi} f), g > & = & < T_{\bar{\varphi}}(f), g > \end{array}$$

portanto $< T_\varphi^*(f) - T_{\bar{\varphi}}(f), g >= 0$, $\forall g \in H^2$, isto é, $T_\varphi^* = T_{\bar{\varphi}}$. □

Segue da Proposição acima que, se $\bar{\varphi} = \varphi$, então T_φ é auto-adjunto.

Note que, para $\varphi = \epsilon_1$ e $\psi = \epsilon_{-1}$, temos $T_\varphi = T_{\epsilon_1} = U$ e $T_\psi = T_{\epsilon_{-1}} = T_{\overline{\epsilon_1}} = U^*$. Como $U^*(\epsilon_0) = 0$, $UU^* \neq 1$, mas $T_{\varphi\psi} = T_{\epsilon_0} = 1$, portanto em geral não temos a igualdade

$$T_\varphi T_\psi = T_{\varphi\psi}.$$

A Proposição 1.3.26 abaixo nos dá condições suficientes para que esta igualdade seja verdadeira.

Proposição 1.3.26. *Se $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$ e $\psi \in H^\infty$, então*

$$T_{\varphi\psi} = T_\varphi T_\psi \text{ e } T_{\bar{\psi}\varphi} = T_{\bar{\psi}} T_\varphi.$$

Demonstração. Como $\psi \in H^\infty$, segue que $\psi H^2 \subset H^2$. Para cada $f \in H^2$, temos que

$$T_\varphi T_\psi(f) = P_{H^2}(\varphi P_{H^2}(\psi(f)) = P_{H^2}(\varphi\psi(f)) = T_{\varphi\psi}(f).$$

Daí, como $\bar{\varphi} \in L^\infty(\mathbb{T})$, segue que

$$T_{\bar{\varphi}} T_\psi = T_{\bar{\varphi}\psi} \Leftrightarrow (T_{\bar{\varphi}} T_\psi)^* = (T_{\bar{\varphi}\psi})^* \Leftrightarrow T_{\bar{\psi}} T_\varphi = T_{\bar{\psi}\varphi}.$$

□

Proposição 1.3.27. *Se $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$, então T_φ é compacto se, e somente se, $\varphi = 0$.*

Demonstração. Seja $U = T_{\epsilon_1}$ o *shift* unilateral. Temos que

$$U^{*n}(\epsilon_m) = \begin{cases} \epsilon_{m-n}, & \text{se } m \geq n \\ 0, & \text{se } m < n. \end{cases}$$

Dada $f \in H^2$, temos

$$\begin{aligned}
\|U^{*n}(f)\|_2^2 &= \left\| U^{*n}\left(\sum_{m=0}^{\infty} < f, \epsilon_m > \epsilon_m\right)\right\|_2^2 = \left\|\sum_{m=0}^{\infty} < f, \epsilon_m > U^{*n}(\epsilon_m)\right\|_2^2 \\
&= \left\|\sum_{m=n}^{\infty} < f, \epsilon_m > (\epsilon_{m-n})\right\|_2^2 = \sum_{m=n}^{\infty} | < f, \epsilon_m > |^2,
\end{aligned}$$

de onde segue que a seqüência $(U^{*n}(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge para zero em $L^2(\mathbb{T})$.

Seja F um operador de posto finito, então existem $f_1, ..., f_n, g_1, ..., g_n \in H^2$ tais que

$$F(h) = \sum_{i=1}^{n} < h, g_i > f_i, \ \forall h \in \mathcal{H}.$$

Assim, dado $m \in \mathbb{N}$ e $h \in H^2$ temos

$$U^{*m}F(h) = \sum_{i=1}^{n} < h, g_i > U^{*m}(f_i),$$

(Observação 1.1.13). Como, para cada $1 \leq i \leq m$,

$$\lim_{m\to\infty} U^{*m}(f_i) = 0,$$

dado $\varepsilon > 0$, existe $N_i \in \mathbb{N}$ tal que

$$m > N_i \Rightarrow \|U^{*m}(f_i)\|_2 < \frac{\varepsilon}{\sum_{j=1}^{n} \|g_j\|_2}.$$

Tome $N = \text{máx}\{N_i : 1 \leq i \leq n\}$. Se $m \geq N$, então

$$\begin{aligned}
\|U^{*m}F\| &= \sup\{\|U^{*m}F(h)\|_2 : \|h\|_2 = 1\} \\
&= \sup\left\{\left\|\sum_{i=1}^{n} < h, g_i > U^{*m}(f_i)\right\|_2 : \|h\|_2 = 1\right\} \\
&\leq \sup\left\{\|h\|_2 \sum_{i=1}^{n} \|g_i\|_2 \left\|U^{*m}(f_i)\right\|_2 : \|h\|_2 = 1\right\} \\
&< \frac{\varepsilon}{\sum_{j=1}^{n} \|g_j\|_2} \sum_{i=1}^{n} \|g_i\|_2 = \varepsilon,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\lim_{m\to\infty} U^{*m}F = 0. \tag{1.18}$$

Como os operadores de posto finito em H^2 são densos em $K(H^2)$ e $\|U^{*m}\| = 1$, para todo $m \in \mathbb{N}^*$, se $K \in K(H^2)$, temos que

$$\lim_{m \to \infty} U^{*m} K = 0.$$

Se $f \in H^2$, então

$$T^*_{\epsilon_1} T_\varphi T_{\epsilon_1}(f) = P_{H^2}(\overline{\epsilon_1} P_{H^2}(\varphi P_{H^2}(\epsilon_1 f)) = P_{H^2}(\overline{\epsilon_1}\varphi\epsilon_1 f) = T_{\overline{\epsilon_1}\varphi\epsilon_1}(f) = T_\varphi(f),$$

daí, por indução, prova-se facilmente que

$$T^{*n}_{\epsilon_1} T_\varphi T^n_{\epsilon_1}(f) = T_\varphi, \ \forall n \geq 1.$$

Segue que

$$\|T_\varphi\| = \|T^{*m}_{\epsilon_1} T_\varphi T^m_{\epsilon_1}\| = \|U^{*m} T_\varphi U^m\| \leq \|U^{*m} T_\varphi\|,$$

para todo $m \in \mathbb{N}$. Portanto, adicionando a hipótese de compacidade para T_φ, obtemos $T_\varphi = 0$, que implica $\varphi = 0$. □

Proposição 1.3.28. *Se $\varphi \in C(\mathbb{T})$ e $\psi \in L^\infty(\mathbb{T})$, então*

$$T_\varphi T_\psi - T_{\varphi\psi} \tag{1.19}$$

e

$$T_\psi T_\varphi - T_{\psi\varphi} \tag{1.20}$$

são operadores compactos.

Demonstração. Como

$$T_\varphi T_\psi - T_{\varphi\psi} = (T_{\bar\psi} T_{\bar\varphi} - T_{\overline{\psi\varphi}})^*,$$

a compacidade do operador dado em (1.19) decorre da compacidade do operador dado em (1.20). Como Γ é denso em $C(\mathbb{T})$ (Proposição 1.3.5), podemos supor que $\varphi \in \Gamma$. E, como a aplicação $\varphi \mapsto T_\varphi$ é linear, sem perda de generalidade, podemos considerar $\varphi = \epsilon_n$, para algum $n \in \mathbb{Z}$. No caso em que $n \geq 0$, segue da Proposição 1.3.26 que $T_\psi T_{\epsilon_n} = T_{\psi\epsilon_n}$, e daí $T_\psi T_{\epsilon_n} - T_{\psi\epsilon_n}$ é o operador nulo, que é compacto.

A prova de que $T_\psi T_{\epsilon_{-k}} - T_{\psi\epsilon_{-k}}$ é um operador compacto para todo $k > 0$ será feita por indução em k, como se segue.

Se $f \in H^2$, então

$$\begin{aligned} T_\psi T_{\epsilon_{-1}}(f) &= P_{H^2}(\psi P_{H^2}(\epsilon_{-1} f)) = P_{H^2}(\psi(\epsilon_{-1} f - < f, \epsilon_0 > \epsilon_{-1})) \\ &= P_{H^2}(\psi\epsilon_{-1} f) - < f, \epsilon_0 > P_{H^2}(\psi\epsilon_{-1}) = T_{\psi\epsilon_{-1}}(f) - < f, \epsilon_0 > P_{H^2}(\psi\epsilon_{-1}), \end{aligned}$$

daí o posto do operador $T_\psi T_{\epsilon_{-1}} - T_{\psi\epsilon_{-1}} = - < f, \epsilon_0 > P_{H^2}(\psi\epsilon_{-1})$ é zero ou um, o que garante que este operador é compacto.

Admita a seguinte hipótese de indução: suponha que para $k \geq 1$ vale que

$$T_\psi T_{\epsilon_{-k}} - T_{\psi\epsilon_{-k}} \in K(H^2),$$

para todo $\psi \in L^\infty(\mathbb{T})$. Como $T_{\psi\epsilon_{-k}} T_{\epsilon_{-1}} - T_{(\psi\epsilon_{-k})\epsilon_{-1}}$ é compacto, segue que

$$\begin{aligned} T_{\psi\epsilon_{-k}} T_{\epsilon_{-1}} - T_{(\psi\epsilon_{-k})\epsilon_{-1}} + (T_\psi T_{\epsilon_{-k}} - T_{\psi\epsilon_{-k}}) T_{\epsilon_{-1}} &= T_\psi T_{\epsilon_{-k}} T_{\epsilon_{-1}} - T_{\psi\epsilon_{-k-1}} \\ &= T_\psi T_{\epsilon_{-k-1}} - T_{\psi\epsilon_{-k-1}} \\ &= T_\psi T_{\epsilon_{-(k+1)}} - T_{\psi\epsilon_{-(k+1)}} \end{aligned}$$

é compacto, dado que $K(H^2)$ é uma $*$-álgebra fechada. □

Definição 1.3.29. *Seja $\mathcal{T}$ a C^*-subálgebra de $B(H^2)$ gerada por todos os operadores de Toeplitz T_φ tais que $\varphi \in C(\mathbb{T})$. Chamamos $\mathcal{T}$ de* álgebra de Toeplitz.

Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert. A Proposição a seguir decorre do fato de que todo ideal não nulo de $B(\mathcal{H})$ contém todas as projeções de posto 1 e do Teorema 1.1.11(iii). Mais detalhes de sua demonstração podem ser encontradas em [11, Teorema 2.4.7].

Proposição 1.3.30. *Se $\mathcal{H}$ é um espaço de Hilbert e I é um ideal não nulo de $B(\mathcal{H})$, então I contém $F(\mathcal{H})$.*

Observação 1.3.31. *Se I é um ideal fechado não nulo de $K(\mathcal{H})$, então I também é um ideal de $B(H)$, e portanto deve conter $F(\mathcal{H})$. Logo, $I = K(\mathcal{H})$, isto é, $K(\mathcal{H})$ é simples.*

Proposição 1.3.32. *O comutador da álgebra de Toeplitz $\mathcal{T}$ é $K(H^2)$.*

Demonstração. Suponha que K é um subespaço vetorial fechado de H^2 que é invariante por T_φ, para todo $T_\varphi \in \mathcal{T}$. Em particular, K é invariante pelo *shift* unilateral U. A Proposição 1.3.22 implica que $K = 0$ ou $K = H^2$. Portanto $\mathcal{T}$ é uma C^*-subálgebra irredutível de $B(H^2)$.

Agora note que $P = I - UU^* \in \mathcal{T}$ é um operador de posto 1, portanto compacto, daí $P \in \mathcal{T} \bigcap K(H^2)$, de onde segue imediatamente que $\mathcal{T} \bigcap K(H^2) \neq \emptyset$. Logo a Proposição 1.3.20 implica que $K(H^2) \subset \mathcal{T}$.

Note que, como $\mathcal{T}$ é gerado por elementos T_φ com $\varphi \in C(\mathbb{T})$, então o quociente $\mathcal{T}/K(H^2)$ é uma C^*-álgebra comutativa e é gerado por elementos $T_\varphi + K(H^2)$ com $\varphi \in C(\mathbb{T})$. Entretanto, segue da Proposição 1.3.28 que, se $\varphi \in C(\mathbb{T})$, então

$$T_\varphi T_\varphi^* - T_{\varphi\overline{\varphi}} = T_\varphi T_{\overline{\varphi}} - T_{\varphi\overline{\varphi}} \in K(\mathcal{H})$$

e

$$T_\varphi^* T_\varphi - T_{\overline{\varphi}\varphi} = T_{\overline{\varphi}} T_\varphi - T_{\overline{\varphi}\varphi} \in K(\mathcal{H}),$$

e como $T_{\overline{\varphi}\varphi} = T_{\varphi\overline{\varphi}}$, as classes de $T_\varphi T_\varphi^*$ e $T_\varphi^* T_\varphi$ coincidem em $\mathcal{T}/K(H^2)$, portanto os geradores são operadores normais. Analogamente obtemos que os geradores comutam entre si.

Segue da Proposição 1.1.15 que $K(H^2)$ contém o comutador I de $\mathcal{T}$. Como

$$P = 1 - UU^* = U^*U - UU^* = [U^*, U] \in I,$$

obtemos que I é não vazio, e conforme Observação 1.3.31, $K(H^2)$ é simples, portanto $I = K(H^2)$.

□

Proposição 1.3.33. *A aplicação*

$$\begin{array}{rccc} \psi: & C(\mathbb{T}) & \rightarrow & \mathcal{T}/K(H^2) \\ & \varphi & \mapsto & T_\varphi + K(H^2) \end{array}$$

é um $*$-isomorfismo.

Demonstração. Segue da Proposição 1.3.25 que ψ é um $*$-homomorfismo. Como a álgebra de Toeplitz $\mathcal{T}$ é gerada pelos elementos T_φ, com $\varphi \in C(\mathbb{T})$, segue que $\mathcal{T}/K(H^2)$ é gerado por $T_\varphi + K(H^2)$, com $\varphi \in C(\mathbb{T})$, e portanto ψ é sobrejetiva. A injetividade segue imediatamente da Proposição 1.3.27.

□

Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert. dizemos que um operador T de $\mathcal{H}$ é uma *isometria*, se $T^*T(h) = h$, para todo $h \in \mathcal{H}$. O Teorema que se segue nos dá uma interpretação precisa de um operador deste tipo. Para prová-lo, no entanto, precisamos fixar algumas definições e notações num contexto geral de Operadores Limitados num espaço de Hilbert.

Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e seja $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma base ortonormal para $\mathcal{H}$. Vamos agora generalizar a definição de *shift* unilateral para $\mathcal{H}$ como sendo o operador $S \in B(\mathcal{H})$ tal que $S(e_n) = e_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, isto é, com a mesma propriedade do operador $U \in B(H^2)$ da Definição 1.3.14.

Seja $(\mathcal{H}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ uma família de espaços de Hilbert e seja $H = \oplus_{i\in\mathrm{I}}\mathcal{H}_i$ a soma direta definida na página 9.

Para cada $i \in \mathrm{I}$, seja $L_i \in B(\mathcal{H}_i)$, e considere $L : H \rightarrow H$ dado por

$$L(h)_i = L_i(h_i) \in \mathcal{H}_i, \ \forall h \in H.$$

Note que L é linear, portanto L é um operador de H. O adjunto do operador L é dado por

$$L^*(h)_i = L_i^*(h_i)$$

e se K e L são operadores deste tipo, então o produto é dado por

$$(KL)(h)_i = K_i L_i(h_i).$$

Afirmamos que $L \in B(H)$ se, e somente se, $\sup_{i\in I} \|L_i\| < \infty$ e, neste caso, $\|L\| = \sup_{i\in I} \|L_i\|$. Com efeito, se $L \in B(H)$, então, para cada $h \in H$,

$$\sup_{i\in I} \|L_i(h_i)\|^2 \leq \|L(h)\|^2,$$

logo

$$\sup_{i\in I} \|L_i\| \leq \|L\| < \infty.$$

Reciprocamente, se $\alpha = \sup_{i\in I} \|L_i\| < \infty$, então

$$\begin{aligned} \|L\|^2 &= \sup \left\{ \sum_{i\in I} \|L_i(h_i)\|^2 : \sum_{i\in I} \|h_i\|^2 \leq 1 \right\} \\ &\leq \sup \left\{ \sum_{i\in I} \|L_i\|^2 \|(h_i)\|^2 : \sum_{i\in I} \|h_i\|^2 \leq 1 \right\} \leq \alpha^2, \end{aligned}$$

daí $\|L\| \leq \sup_{i\in I} \|L_i\|$, o que implica $\|L\| = \sup_{i\in I} \|L_i\|$.

Denotamos $L = \oplus_{i\in I} L_i$ e chamamos L de operador soma direta dos operadores L_i.

Se, em particular temos $L_i = S_i$ um *shift* unilateral para $\mathcal{H}_i$, chamamos $S = \oplus_{i\in I} S_i$ de soma direta de cópias do *shift* unilateral.

Teorema 1.3.34 (Wold-von Neumann). *Seja H um espaço de Hilbert e seja $V \in B(\mathcal{H})$ uma isometria. Então V é um unitário, ou V é uma soma direta de cópias do* shift *unilateral, ou V é a soma direta de um unitário com uma soma direta de cópias do* shift *unilateral.*

Demonstração. Suponha que V não é um unitário e nem a soma de cópias do *shift* unilateral. Seja

$$K = \bigcap_{n=0}^{\infty} V^n(\mathcal{H}),$$

e note que $V(K) = K$. Se P_K é a projeção ortogonal de $\mathcal{H}$ sobre K, então V comuta com P_K, e portanto segue da Observação 1.3.18 que K é redutível por V.

Sejam W a compressão de V para K e W' a compressão de V para $K^{\perp}$. Note que W é uma isometria e que

$$W(K) = P_K V|_K(K) = P_K(K) = K,$$

isto é, W é sobrejetivo, e portanto unitário. Provaremos a seguir que W' é uma soma direta de cópias do *shift* unilateral. Mas para isso, precisamos antes construir uma soma direta de subespaços de $\mathcal{H}$ que seja igual a $K^{\perp}$.

Seja $\mathcal{L} = (V(\mathcal{H}))^{\perp}$. Note que, como $\mathcal{L} \subset \mathcal{H}$, então

$$V(\mathcal{L}) \subset V(\mathcal{H}) \subset \mathcal{H},$$

e como

$$V^{n+1}(\mathcal{L}) \subset V(\mathcal{H}) = \mathcal{L}^{\perp}$$

quando

$$V^{n}(\mathcal{L}) \subset V(\mathcal{H}) \subset \mathcal{H},$$

segue por indução em n que

$$V^{n}(\mathcal{L}) \subset \mathcal{L}^{\perp}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Logo, se $m, n \in \mathbb{N}$ são tais que $m < n$ e $x, y \in \mathcal{L}$, então

$$< V^{m}(x), V^{n}(y) >=< x, V^{*m}V^{n}(y) >=< x, V^{n-m}(y) >= 0, \tag{1.21}$$

dado que $V^{n-m}(y) \in \mathcal{L}^{\perp}$, $\forall y \in \mathcal{L}$. Portanto, $V^{m}(\mathcal{L})$ é ortogonal a $V^{n}(\mathcal{L})$ se $m \neq n$.

Fica assim bem definida a soma ortogonal $\oplus_{n=0}^{\infty} V^{n}(\mathcal{L})$, que afirmamos ser igual a $K^{\perp}$. Com efeito, note que

$$< V^{n}(x), V^{n}(y) >=< x, V^{*n}V^{n}(y) >=< x, y >= 0, \forall x \in \mathcal{L} \text{ e } \forall y \in \mathcal{L}^{\perp},$$

isto é, $V^{n}(\mathcal{L})$ é ortogonal a $V^{n}(\mathcal{L}^{\perp}) = V^{n+1}(\mathcal{H})$, e como $K \subset V^{n+1}(\mathcal{H})$, segue que $V^{n}(\mathcal{L}) \subset K^{\perp}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e portanto $\oplus_{n=0}^{\infty} V^{n}(\mathcal{L}) \subset K^{\perp}$. Basta agora mostrar a inclusão reversa, que é equivalente a mostrar que se $x \in K^{\perp}$ então $x \in V^{n}(\mathcal{L})$, para algum $n \in \mathbb{N}$. Mas isto é equivalente a mostrar que se $x \in V^{n}(\mathcal{L})^{\perp}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então $x \in K$, afirmação que provaremos por indução. Nesse sentido, suponha que

$$x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} (V^{n}(\mathcal{L}))^{\perp},$$

e vamos mostrar que $x \in V^{n}(\mathcal{H})$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Se $n = 0$, então $V^{0}(\mathcal{H}) = \mathcal{H} \ni x$. Se $x \in V^{n}(\mathcal{H})$, então existe $y \in \mathcal{H}$ tal que $x = V^{n}(y)$. Entretanto, como

$$< y, z >=< y, V^{*n}V^{n}(z) >=< V^{n}(y), V^{n}(z) >=< x, V^{n}(z) >= 0, \ \forall z \in \mathcal{L},$$

segue que $y \in \mathcal{L}^{\perp} = V(\mathcal{H})$, e portanto $x \in V^{n+1}(\mathcal{H})$. Acabamos de provar que $x \in V^{n}(\mathcal{H})$, $\forall n \in \mathbb{N}$, de onde segue que $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} V^{n}(\mathcal{H}) = K$.

Seja E uma base ortonormal para $\mathcal{L}$. Segue da afirmação anterior que $\bigcup_{n=0}^{\infty} V^n(E)$ é uma base ortonormal para $K^{\perp}$. Seja $e \in E$ e considere o subespaço de Hilbert $\mathcal{L}_e \subset \mathcal{H}$ gerado por $\{V^n(e) : n \in \mathbb{N}\}$, segue de (1.21) que $(V^n(e))_{n=0}^{\infty}$ é uma base ortonormal para $\mathcal{L}_e$. Então $K^{\perp}$ é a soma ortogonal interna $\oplus_{e\in E}\mathcal{L}_e$, isto é, cada $\mathcal{L}_e$ é subespaço de $K^{\perp}$ e $L_e \perp L_f$ se, e somente se, $e \neq f$. Como cada $\mathcal{L}_e$ é invariante por V, a compressão V_e de V para $\mathcal{L}_e$ é um *shift* unilateral e $W' = \oplus_{e\in E} V_E$. □

O próximo resultado mostra que a álgebra de Toeplitz $\mathcal{T}$ é universal para $(G, \mathcal{R})$, sendo $G = \{I, S, S^*\}$ com

$$\mathcal{R} = \{S^*S = I, I^* = I^2 = I, SI = IS = S, S^*I = IS^* = S^*\}.$$

Teorema 1.3.35 (Coburn). *Seja B uma C^*-álgebra com unidade e seja $v \in B$ uma isometria. Se $U = T_{\epsilon_1} \in \mathcal{T}$, então existe um único $*$-homomorfismo $\varphi : \mathcal{T} \to B$ que preserva a unidade tal que $\varphi(U) = v$. E mais, se $vv^* \neq 1$, então φ é isométrico.*

Demonstração. Considerando a representação universal de B, podemos reduzir esta demonstração para o caso em que B é uma C^*-subálgebra de $B(\mathcal{H})$, para algum espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Segue do Teorema 1.3.34 que podemos escrever $\mathcal{H} = \oplus_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{H}_\lambda$ e $v = \oplus_{\lambda\in\Lambda} v_\lambda$, em que cada v_λ é um unitário ou o *shift* unilateral.

Suponha que v_λ é um unitário. Segue do Exemplo 1.2.9 que existe um único $*$-homomorfismo

$$\phi_\lambda : C(\mathbb{T}) \to B(\mathcal{H}_\lambda)$$

tal que $\phi_\lambda(\epsilon_1) = v_\lambda$. Segue da Proposição 1.3.33 que existe um $*$-isomorfismo

$$\psi : C(\mathbb{T}) \to \mathcal{T}/K(H^2)$$

com $\psi(\epsilon_1) = [T_{\epsilon_1}]$. E a aplicação quociente $q : \mathcal{T} \to \mathcal{T}/K(H^2)$ nos dá $q(U) = q(T_{\epsilon_1}) = [T_{\epsilon_1}]$. Assim, como as aplicações acima preservam unidade, basta fazer $\varphi_\lambda = \phi_\lambda \circ \psi^{-1} \circ q$, que obtemos um homomorfismo que preserva unidade de $\mathcal{T}$ em $B(\mathcal{H}_\lambda)$ satisfazendo $\varphi_\lambda(U) = v_\lambda$.

Suponha agora que v_λ é um *shift* unilateral, isto é, existe $(f_n^\lambda)_{n\in\mathbb{N}}$ base ortonormal de $\mathcal{H}_\lambda$ tal que $v_\lambda(f_n^\lambda) = f_{n+1}^\lambda$. Então existe um operador

$$\begin{array}{rccl} W_\lambda : & H^2 & \to & \mathcal{H}_\lambda \\ & \epsilon_n & \mapsto & f_n^\lambda \end{array},$$

de onde obtemos o operador unitário $v_\lambda = W_\lambda U W_\lambda^*$. Portanto a aplicação

$$\begin{array}{rccl} \varphi_\lambda : & \mathcal{T} & \to & B(\mathcal{H}_\lambda) \\ & a & \mapsto & W_\lambda a W_\lambda^* \end{array}$$

é um $*$-homomorfismo isométrico tal que $\varphi_\lambda(U) = v_\lambda$.

Seja $(\varphi, \mathcal{H})$ a soma direta da família das representações $(\varphi_\lambda, H_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de $\mathcal{T}$. Então $\varphi : \mathcal{T} \to B(\mathcal{H})$ é um $*$-homomorfismo que preserva unidade tal que $\varphi(U) = \oplus_\lambda v_\lambda = v$. E, como $\varphi(U) \in B$ e U gera $\mathcal{T}$, segue que $\varphi(\mathcal{T}) \subset B$.

Suponha agora que $vv^* \neq 1$. Então algum v_{λ_0} é um *shift* unilateral. Daí a representação $(\varphi_{\lambda_0}, \mathcal{H}_{\lambda_0})$ é fiel, e logo $(\varphi, \mathcal{H})$ é fiel. Portanto, φ é isométrico.

A unicidade de φ segue do fato de que U gera $\mathcal{T}$. □

1.4 O produto cruzado de uma C^*-álgebra com unidade por $\mathbb{Z}$

Em geral, para a construção do produto cruzado, são necessários uma C^*-álgebra A, um grupo topológico localmente compacto G e uma ação β de G em A. Uma ação β é um homomorfismo do grupo G no grupo dos $*$-automorfismos de A, denotado por $\mathrm{Aut}(A)$. Equipando o grupo dos $*$-automorfirmos A com a topologia da convergência pontual, exigimos a continuidade da ação β, isto é, exigimos que, dado $a \in A$, a aplicação

$$\begin{array}{rcl} G & \to & A \\ g & \mapsto & \beta_g(a) \end{array}$$

seja contínua. Neste caso, chamamos a terna $\{A, G, \beta\}$ de C^*-sistema dinâmico. Constrói-se uma $*$-álgebra $\mathrm{L}_1(G, A)$ e uma C^*-seminorma sobre $\mathrm{L}_1(G, A)$, e a C^*-álgebra envolvente deste par, denotada por $A \times_\beta G$, é conhecida como o produto cruzado de A por G (implementado pela ação β). Neste trabalho, em particular, vamos considerar A uma C^*-álgebra com unidade e $G = \mathbb{Z}$ (grupo dos inteiros), equipado com a topologia discreta. Neste caso, β é obviamente contínuo.

Proposição 1.4.1. *O homomorfismo $\beta : \mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(A)$ fica unicamente determinado por um único elemento de $\mathrm{Aut}(A)$.*

Demonstração. Tome $\alpha = \beta(1)$, segue imediatamente que

$$\beta(-1) \circ \beta(1) = \beta(0) = \beta(1) \circ \beta(-1) \Leftrightarrow \beta(-1) \circ \alpha = \mathrm{id} = \alpha \circ \beta(-1),$$

isto é, $\alpha^{-1} = \beta(-1)$. Assim, dado m inteiro positivo, temos

$$\beta(m) = \beta(\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{m \text{ vezes}}) = \overbrace{\beta(1) \circ \beta(1) \circ \ldots \circ \beta(1)}^{m \text{ composições}} = (\beta(1))^m = \alpha^m.$$

e, analogamente, $\beta(-m) = \alpha^{-m}$. □

Dessa forma, passaremos a denotar o C^*-sistema dinâmico $\{A, \mathbb{Z}, \beta\}$ simplesmente por $\{A, \alpha\}$, em que $\alpha = \beta(1)$, e o produto cruzado de A por $\mathbb{Z}$ implementado pela ação β, que construiremos a seguir, denotaremos simplesmente por $A \times_\alpha \mathbb{Z}$.

Seja $K(\mathbb{Z}, A)$ o espaço vetorial das funções de $\mathbb{Z}$ em A de suporte finito. Para cada $f \in K(\mathbb{Z}, A)$ defina

$$||f||_1 = \sum_{m \in \mathbb{Z}} ||f(m)||,$$

o que nos dá facilmente uma norma neste espaço vetorial.

Vamos então equipar o espaço vetorial normado $\{K(\mathbb{Z}, A), ||.||_1\}$ com um produto de convolução. Dados $f, g \in K(\mathbb{Z}, A)$, defina, para cada $t \in \mathbb{Z}$,

$$f * g(n) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} f(m)\alpha^m(g(n-m)). \tag{1.22}$$

e observe que este produto de convolução depende do $*$-automorfismo α. Agora, vamos definir neste espaço uma involução. Para cada $f \in K(\mathbb{Z}, A)$ e para cada $n \in \mathbb{Z}$, defina

$$f^*(n) = \alpha^n(f(-n)^*). \tag{1.23}$$

Proposição 1.4.2. $\{K(\mathbb{Z}, A), ||.||_1\}$ *com o produto de convolução definido por* (1.22) *e com a involução dada por* (1.23) *é uma* $*$*-álgebra normada.*

Demonstração. Vamos mostrar inicialmente que o produto de convolução é submultiplicativo. Dados $f, g \in K(\mathbb{Z}, A)$, temos

$$\begin{aligned}
||f * g||_1 &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} ||f * g(n)|| = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left\| \sum_{m \in \mathbb{Z}} f(m)\alpha^m(g(n-m)) \right\| \\
&\leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} ||f(m)\alpha^m(g(n-m))|| \\
&\leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} ||f(m)|| \; ||\alpha^m(g(n-m))|| \\
&= \sum_{m \in \mathbb{Z}} ||f(m)|| \sum_{n \in \mathbb{Z}} ||g(n-m)|| = \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} ||f(m)|| \right) ||g||_1 \\
&= ||f(m)||_1 ||g||_1.
\end{aligned}$$

Vamos mostrar agora que a involução é isométrica. Dado $f \in K(\mathbb{Z}, A)$, temos

$$\begin{aligned}
||f^*||_1 &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} ||f^*(n)|| = \sum_{n \in \mathbb{Z}} ||\alpha^n(f(-n)^*)|| \\
&= \sum_{n \in \mathbb{Z}} ||f(-n)^*|| = \sum_{n \in \mathbb{Z}} ||f(-n)|| = ||f||_1.
\end{aligned}$$

□

Vamos passar a denotar $\{K(\mathbb{Z},A),||.||_1\}$ simplesmente por $K(\mathbb{Z},A)$. É natural agora fazer o completamento desta $*$-álgebra normada para obter uma $*$-álgebra de Banach. Denotaremos por $\ell_1(\mathbb{Z},A)$ o completamento de $K(\mathbb{Z},A)$ na norma $||.||_1$.

Para cada $m \in \mathbb{Z}$ seja $\delta_m \in \ell_1(\mathbb{Z},A)$ tal que

$$\delta_m(n) = \begin{cases} 1_A & \text{se } n = m \\ 0 & \text{se } n \neq m \end{cases},$$

note que $\delta_m^* = \delta_{-m}$ e $\delta_k * \delta_l = \delta_{k+l}$, quaisquer que sejam $k,l,m \in \mathbb{Z}$. Assim,

$$\delta_0 * \delta_n = \delta_n = \delta_n * \delta_0, \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

E, se $n > 0$, então

$$\delta_n = \underbrace{\delta_1 * ... * \delta_1}_{\text{n vezes}},$$

analogamente, se $n < 0$, então

$$\delta_n = \underbrace{\delta_{-1} * ... * \delta_{-1}}_{-\text{n vezes}}.$$

Definindo, para cada $a \in A$ e para cada $n \in \mathbb{Z}$, o elemento $a\delta_n$ através de

$$a\delta_n(m) = \begin{cases} a & \text{se } n = m \\ 0 & \text{se } n \neq m \end{cases},$$

segue que cada elemento $f \in K(\mathbb{Z},A)$ pode ser escrito como soma finita de elementos do tipo $a\delta_n$.

Observe que se $a,b \in A$ e $k,m,n \in \mathbb{Z}$, então

$$a\delta_m * b\delta_n = a\alpha^m(b)\delta_{n+m}. \tag{1.24}$$

Em particular, se $n > 0$, então $a\delta_0 * \delta_1 = a\delta_1$, qualquer que seja $a \in A$, em que $\delta_1 = 1_A\delta_1$.

Das considerações acima e da densidade de $K(\mathbb{Z},A)$ em $\ell_1(\mathbb{Z},A)$ temos o seguinte resultado.

Proposição 1.4.3. *$\ell_1(\mathbb{Z},A)$ é a $*$-álgebra de Banach gerada pelos elementos $a\delta_0$ e $1_A\delta_1$, sendo $1_A\delta_0$ a unidade de $\ell_1(\mathbb{Z},A)$.*

Definição 1.4.4. *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert. Diremos que $(\pi, U, \mathcal{H})$ é uma* representação covariante *do C^*-sistema dinâmico $\{A, \alpha\}$ se, e somente se, $(\pi, \mathcal{H})$ é uma $*$-representação não degenerada de A e $(U, \mathcal{H})$ é uma representação unitária de $\mathbb{Z}$ tais que*

$$U(m)\pi(a)U(m)^* = \pi(\alpha^m(a)),$$

quaisquer que sejam $a \in A$ e $m \in \mathbb{Z}$.

Observação 1.4.5. *Se A é uma C^*-álgebra com unidade, então, para que uma representação $(\pi, \mathcal{H})$ seja não degenerada, é necessário e suficiente que φ preserve unidade. (vide [11, Página 142])*

O próximo resultado dá uma caracterização de todas as representações não degeneradas de $\ell_1(\mathbb{Z}, A)$.

Proposição 1.4.6. *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert.*

(a) Se $(\pi, U, \mathcal{H})$ é uma representação covariante do C^*-sistema dinâmico $\{A, \alpha\}$, então a expressão

$$\rho(f) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \pi(f(n))U(n)$$

define uma $*$-representação não degenerada $(\rho, \mathcal{H})$ de $\ell_1(\mathbb{Z}, A)$.

(b) Reciprocamente, se $(\rho, \mathcal{H})$ é uma $*$-representação não degenerada de $\ell_1(\mathbb{Z}, A)$, então as restrições dadas por

$$\pi(a) = \rho(a\delta_0) \text{ e } U(m) = \rho(\delta_m)$$

determinam uma representação covariante de $\{A, \alpha\}$.

Demonstração. (a) Como $K(\mathbb{Z}, A)$ é denso em $\ell_1(\mathbb{Z}, A)$, vamos começar mostrando que $\rho(K(\mathbb{Z}, A)) \subset B(\mathcal{H})$ e que $\rho|_{K(\mathbb{Z},A)}$ é um $*$-homomorfismo de $*$-álgebras.

Assim, se $f \in K(\mathbb{Z}, A)$, então

$$\begin{aligned} \|\rho(f)\| &= \left\| \sum_{n \in \mathbb{Z}} \pi(f(n))U(n) \right\| \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} \|\pi(f(n))U(n)\| \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \|\pi(f(n))\| \|U(n)\| = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \|\pi(f(n))\| \\ &\leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} \|f(n)\| = \|f\|_1. \end{aligned}$$

Para mostrar que $\rho|_{K(\mathbb{Z},A)}$ é um $*$-homomorfismo, note que a linearidade é imediata e, se $f, g \in K(\mathbb{Z}, A)$, segue que

$$\begin{aligned}
\rho(f * g) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \pi(f * g(n))U(n) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \pi\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} f(m)\alpha^m(g(n-m))\right)U(n) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{m\in\mathbb{Z}} \pi(f(m))\pi(\alpha^m(g(n-m)))U(n) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{m\in\mathbb{Z}} \pi(f(m))U(m)\pi(g(n-m))U(m)^*U(n) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{m\in\mathbb{Z}} \pi(f(m))U(m)\pi(g(n-m))U(n-m) \\
&= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \pi(f(m))U(m)\sum_{n\in\mathbb{Z}} \pi(g(n-m))U(n-m) \\
&= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \pi(f(m))U(m)\sum_{r+m\in\mathbb{Z}} \pi(g(r))U(r) = \rho(f)\rho(g)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\rho(f^*) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \pi(f^*(n))U(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \pi(\alpha^n(f(-n)^*))U(n) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} U(n)\pi((f(-n)^*))U(n)^*U(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} U(-n)^*\pi(f(-n))^* \\
&= \left(\sum_{-n\in\mathbb{Z}} \pi(f(-n))U(-n)\right)^* = \rho(f)^*.
\end{aligned}$$

Como $\|\rho(f)\| \leq \|f\|_1$ qualquer que seja $f \in K(\mathbb{Z}, A)$, segue da densidade de $K(\mathbb{Z}, A)$ em $\ell_1(\mathbb{Z}, A)$ que ρ é um $*$-homomorfismo de $\ell_1(\mathbb{Z}, A)$ em $B(\mathcal{H})$.

Segue da Observação 1.4.5 que π preserva unidade e, como $\rho(1_A\delta_0) = \pi(1_A) = I$, isto implica que ρ também preserva unidade e que $(\rho, \mathcal{H})$ é não degenerada.

(b) Vamos mostrar inicialmente que $(\pi, \mathcal{H})$ é uma $*$-representação não degenerada de A. Se $a, b \in A$, então, segue da equação dada em (1.24), obtemos

$$\pi(ab) = \rho(ab\delta_0) = \rho(a\delta_0 * b\delta_0) = \rho(a\delta_0)\rho(b\delta_0) = \pi(a)\pi(b),$$

e

$$\pi(a^*) = \rho(a^*\delta_0) = \rho((a\delta_0)^*) = \rho(a\delta_0)^* = \pi(a)^*,$$

portanto $(\pi, \mathcal{H})$ é uma $*$-representação de A. Como $\pi(1_A) = \rho(1_A\delta_0) = I$, segue que $(\pi, \mathcal{H})$ é não degenerada.

Vamos mostrar agora que $(U, \mathcal{H})$ é representação unitária de $\mathbb{Z}$. Se $m, n \in \mathbb{Z}$, então

$$U(m+n) = \rho(\delta_{m+n}) = \rho(\delta_m * \delta_n) = \rho(\delta_m)\rho(\delta_n) = U(m)U(n),$$

$$U(-m) = \rho(\delta_{-m}) = \rho(\delta_m^*) = \rho(\delta_m)^* = U^*(m)$$

e

$$\begin{aligned} U(m)^*U(m) &= \rho(\delta_m)\rho(\delta_m)^* = \rho(\delta_m * \delta_m^*) = \rho(\delta_0) = I \\ &= \rho(\delta_m^* * \delta_m) = \rho(\delta_m)^*\rho(\delta_m) = U(m)^*U(m). \end{aligned}$$

Basta agora mostrar que $(\pi, U, \mathcal{H})$ é uma representação covariante do C^*-sistema dinâmico $\{A, \alpha\}$. Com efeito, se $m \in \mathbb{Z}$ e $a \in A$, então, utilizando novamente a observação feita em 1.24, obtemos

$$\begin{aligned} U(m)\pi(a)U(m)^* &= \rho(\delta_m)\rho(a\delta_0)\rho(\delta_{-m}) = \rho(\delta_m)\rho(a\delta_0 * \delta_{-m}) = \rho(\delta_m)\rho(a\delta_{-m}) \\ &= \rho(\delta_m * a\delta_{-m}) = \rho(\alpha^m(a)\delta_{m-m}) = \rho(\alpha^m(a)\delta_0) = \pi(\alpha^m(a)). \end{aligned}$$

□

Definiremos a seguir uma representação especial de $\mathbb{Z}$.

Definição 1.4.7. *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert. A* representação regular à esquerda *de $\mathbb{Z}$ em $\ell_2(\mathbb{Z}, \mathcal{H})$ é o homomorfismo $\Lambda : \mathbb{Z} \to B(\ell_2(\mathbb{Z}, \mathcal{H}))$ tal que*

$$((\Lambda(m))(x))(n) = x(n-m),$$

quaisquer que sejam $m, n \in \mathbb{Z}$ e $x \in \ell_2(\mathbb{Z}, \mathcal{H})$, em que $\ell_2(\mathbb{Z}, \mathcal{H})$ é o espaço de Hilbert de todas as funções $x : \mathbb{Z} \to \mathcal{H}$ tais que

$$\|x\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \|x(n)\|^2 < \infty.$$

Observação 1.4.8. *A representação regular à esquerda é uma representação unitária de $\mathbb{Z}$. De fato, como $\Lambda(m)^* = \Lambda(-m)$, $\forall m \in \mathbb{Z}$, se $m, n \in \mathbb{Z}$ e $x \in \ell_2(\mathbb{Z}, \mathcal{H})$, então*

$$\begin{aligned} ((\Lambda(m)\Lambda(m)^*)(x))(n) &= (\Lambda(m)((\Lambda(m)^*)(x)))(n) = ((\Lambda(-m))(x))(n-m) \\ &= (x)(n-m-(-m)) = x(n) \\ &= (x)(n-(-m)-m) = ((\Lambda(m))(x))(n-(-m)) \\ &= (\Lambda(-m)((\Lambda(m))(x)))(n) = (\Lambda(m)^*((\Lambda(m))(x)))(n) \\ &= (\Lambda(m)^*\Lambda(m))(x))(n). \end{aligned}$$

Proposição 1.4.9. *Se* $\mathbf{R}$ *é o conjunto de todas as* $*$*-representações não degeneradas de* $\ell_1(\mathbb{Z}, A)$*, então* $\mathbf{R}$ *é não vazio. Em particular, existe em* $\mathbf{R}$ *uma* $*$*-representações fiel de* $\ell_1(\mathbb{Z}, A)$.

Demonstração. Sejam $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert, $(\pi, \mathcal{H})$ uma $*$-representação de A e $(\Lambda, \ell_2(\mathbb{Z}, \mathcal{H}))$ a representação regular à esquerda de $\mathbb{Z}$. Defina $(\widetilde{\pi}, \ell_2(\mathbb{Z}, \mathcal{H}))$ a representação de A dada por

$$(\widetilde{\pi}(a)(x))(m) = \pi(\alpha^{-m}(a))(x(m)),$$

quaisquer que sejam $m \in \mathbb{Z}$ e $x \in \ell_2(\mathbb{Z}, \mathcal{H})$.

Vamos mostrar que $(\widetilde{\pi}, \Lambda, \ell_2(\mathbb{Z}, \mathcal{H}))$ é uma representação covariante do C^*-sistema dinâmico $\{A, \alpha\}$. Já observamos em 1.4.8 que a representação $(\Lambda, \ell_2(\mathbb{Z}, \mathcal{H}))$ é unitária. Vamos mostrar agora que $(\widetilde{\pi}, \ell_2(\mathbb{Z}, \mathcal{H}))$ é uma $*$-representação de A. Se $a, b \in A$ e $x \in \ell_2(\mathbb{Z}, \mathcal{H})$, então

$$\begin{aligned}
(\widetilde{\pi}(ab)(x))(m) &= \pi(\alpha^{-m}(ab))(x(m)) = \pi(\alpha^{-m}(a)\alpha^{-m}(b))(x(m)) \\
&= \pi(\alpha^{-m}(a))(\pi(\alpha^{-m}(b))(x(m))) = \pi(\alpha^{-m}(a))(\widetilde{\pi}(b)(x)(m)) \\
&= (\widetilde{\pi}(a)(\widetilde{\pi}(b)(x)))(m) = ((\widetilde{\pi}(a)\widetilde{\pi}(b))(x))(m), \ \forall m \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
(\widetilde{\pi}(a^*)(x))(m) &= \pi(\alpha^{-m}(a^*))(x(m)) = \pi(\alpha^{-m}(a)^*)(x(m)) \\
&= \pi(\alpha^{-m}(a))^*(x(m)) = (\widetilde{\pi}(a)^*(x))(m), \ \forall m \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Vamos agora verificar a condição de covariância: se $m, n \in \mathbb{Z}$, $a \in A$ e $x \in \ell_2(\mathbb{Z}, \mathcal{H})$, então

$$\begin{aligned}
((\Lambda(n)\widetilde{\pi}(a)\Lambda(n)^*)(x))(m) &= (\Lambda(n)(\widetilde{\pi}(a)(\Lambda(n)^*(x))))(m) \\
&= (\widetilde{\pi}(a)(\Lambda(n)^*(x)))(m-n) \\
&= (\pi(\alpha^{-m+n}(a)))((\Lambda(n)^*(x))(m-n)) \\
&= (\pi(\alpha^{-m}(\alpha^n(a))))(x(m)) \\
&= (\widetilde{\pi}(\alpha^n(a))(x))(m),
\end{aligned}$$

isto é, $\Lambda(n)\widetilde{\pi}(a)\Lambda(n)^* = \widetilde{\pi}(\alpha^n(a))$, quaisquer que sejam $n \in \mathbb{Z}$ e $a \in A$.

Segue do item (a) da Proposição 1.4.6 que existe uma $*$-representação $(\rho, \mathcal{H})$ de $\ell_1(\mathbb{Z}, A)$ dada por

$$\rho(f) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widetilde{\pi}(f(n))\Lambda(n).$$

Agora, se tomarmos inicialmente $(\pi_u, \mathcal{H}_u)$ a representação universal de A e repetirmos a mesma construção, obteremos $\widetilde{\pi_u}$ um $*$-homomorfismo injetivo de A em $\ell_2(\mathbb{Z}, \mathcal{H}_u)$, dado que

$\alpha \in \mathrm{Aut}(A)$. Assim, denotando por $(\Lambda_u, \ell_2(\mathbb{Z}, \mathcal{H}_u))$ a representação regular à esquerda de $\mathbb{Z}$ e por ρ_u o correspondente $*$-homomorfismo dado no item (a) da Proposição 1.4.6, temos que ρ_u é injetivo. De fato, se $f \in \mathrm{Ker}(\rho_u)$, então

$$\begin{aligned}
0 = ((\rho_u(f))(x))(m) &= \left(\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widetilde{\pi_u}(f(n))\Lambda_u(n)\right)(x)\right)(m) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} ((\widetilde{\pi_u}(f(n))\Lambda_u(n))(x))(m) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\pi_u(\alpha^{-m}(f(n)))\right)(\Lambda_u(n)(x)(m)) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\pi_u(\alpha^{-m}(f(n)))\right)((x)(m-n))
\end{aligned}$$

quaisquer que sejam $x \in \ell_2(\mathbb{Z}, \mathcal{H}_u)$ e $m \in \mathbb{Z}$. Em particular, dados $\xi \in \mathcal{H}_u$ e $k \in \mathbb{Z}$, se $x = \xi\delta_k$, então

$$\left(\pi_u(\alpha^{-m}(f(m-k)))\right)(\xi) = 0,$$

logo

$$\pi_u(\alpha^{-m}(f(m-k))) = 0,$$

daí

$$\alpha^{-m}(f(m-k)) = 0,$$

e portanto $f(m-k) = 0$. Como k foi escolhido arbitrariamente, segue que $f = 0$. $\square$

Como $(\rho_u, \mathcal{H}_u)$ é uma representação fiel de $\ell_1(\mathbb{Z}, A)$, então

$$\|\rho_u(f)\| = \|f\|_1.$$

Portanto, segue da Proposição 1.4.9 que a aplicação $\gamma : \ell_1(\mathbb{Z}, A) \to \mathbb{R}_+$, dada para cada $f \in \ell_1(\mathbb{Z}, A)$ por

$$\gamma(f) = \sup_{(\rho,\mathcal{H})\in\mathbf{R}} \|\rho(f)\|,$$

está bem definida. Note que γ é uma C^*-norma sobre a $*$-álgebra de Banach $\ell_1(\mathbb{Z}, A)$. De fato, é fácil ver que o produto de convolução é submultiplicativo e que a involução é isométrica com relação a γ. Se $f \in \ell_1(\mathbb{Z}, A)$, então

$$\gamma(f^*f) = \sup_{(\rho,\mathcal{H})\in\mathbf{R}} \|\rho(f^*f)\| = \sup_{(\rho,\mathcal{H})\in\mathbf{R}} \|\rho(f)\|^2 = \gamma(f)^2.$$

E como existe $(\rho_u, \mathcal{H}_u) \in \mathbf{R}$ fiel, se $\gamma(f) = 0$, então $f = 0$.

Definição 1.4.10. *O produto cruzado de A por $\mathbb{Z}$ implementado pelo $*$-automorfismo α é a C^*-álgebra envolvente do par $(\ell_1(\mathbb{Z}, A), \gamma)$, isto é,*

$$A \times_\alpha \mathbb{Z} := \overline{\ell_1(\mathbb{Z}, A)}^{\,\gamma}.$$

Proposição 1.4.11. *Existe uma inclusão isométrica de A em $A \times_\alpha \mathbb{Z}$. E mais, existe um grupo unitário em $A \times_\alpha \mathbb{Z}$ isomorfo a $\mathbb{Z}$.*

Demonstração. Dado $a \in A$, para mostrar a primeira afirmação, basta definir $\iota(a) = a\delta_0$. Com isso, a aplicação $\iota : A \to A \times_\alpha \mathbb{Z}$ é um $*$-homomorfismo injetivo, e portanto isométrico.

Para mostrar a segunda, note que $\{1_A\delta_m : m \in \mathbb{Z}\}$ é um grupo e a aplicação $1_A\delta_m \mapsto m$ nos dá um isomorfismo de grupos entre $\{1_A\delta_m : m \in \mathbb{Z}\}$ e $\mathbb{Z}$. Como $\|1_A\delta_m\| = 1$, para todo $m \in \mathbb{Z}$, então $(\{1_A\delta_m : m \in \mathbb{Z}\}$ é unitário. □

Teorema 1.4.12. *A C^*-álgebra $A \times_\alpha \mathbb{Z}$ é isomorfa a C^*-álgebra universal gerada por A e u satisfazendo $uAu^* = A$, com o $*$-automorfismo α implementado pelo unitário u, ou seja, definido por $\alpha(a) = uau^*$, $\forall a \in A$.*

Demonstração. Vamos mostrar inicialmente que dada uma C^*-álgebra qualquer B e dado um $*$-homomorfismo $\phi : \ell_1(\mathbb{Z}, A) \to B$, existe um único $*$-homomorfismo $\widetilde{\phi} : A \times_\alpha \mathbb{Z} \to B$ que estende ϕ. Com efeito, basta mostrar que ϕ é contínuo, seja $(\pi, \mathcal{H})$ uma $*$-representação fiel de $A \times_\alpha \mathbb{Z}$, segue que π é uma isometria. Logo, $(\pi \circ \phi, \mathcal{H})$ é uma $*$-representação de $\ell_1(\mathbb{Z}, A)$ e daí

$$\|\phi(f)\| = \|\pi(\phi(f))\| \leq \gamma(f), \ \forall f \in \ell_1(\mathbb{Z}, A),$$

isto é, ϕ é contínuo.

Vamos considerar agora que B é a C^*-álgebra universal gerada por A e u satisfazendo $uAu^* = A$, com o $*$-automorfismo α implementado pelo unitário u através de $\alpha(a) = uau^*$, $\forall a \in A$, cuja existência decorre do Teorema 1.2.7. Seja $\phi : \ell_1(\mathbb{Z}, A) \to B$ a aplicação dada por

$$\phi(f) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} f(m)u^m, \ \forall f \in \ell_1(\mathbb{Z}, A). \tag{1.25}$$

Note que a aplicação dada em (1.25) acima está bem definida. De fato, como $\|f(m)u^m\| \leq \|f(m)\|$, segue que

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} \|f(m)u^m\| \leq \|f\|_1, \ \forall f \in \ell_1(\mathbb{Z}, A),$$

o que é suficiente para a convergência da série dada em (1.25). Note também que esta aplicação é um $*$-homomorfismo de uma álgebra de Banach em uma C^*-álgebra. De fato, se

$f, g \in \ell_1(\mathbb{Z}, A)$, então

$$\begin{aligned}
\phi(f * g) &= \sum_{m\in\mathbb{Z}}(f * g)(m)u^m = \sum_{m\in\mathbb{Z}}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)\alpha^n(g(m-n))\right)u^m \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} u^n g(m-n)u^{*n}u^m\right) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)u^n\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} g(m-n)u^{m-n}\right) = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)u^n\right)\phi(g) \\
&= \phi(f)\phi(g)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\phi(f^*) &= \sum_{m\in\mathbb{Z}}(f^*)(m)u^m = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \alpha^m(f(-m)^*)u^m \\
&= \sum_{m\in\mathbb{Z}} u^s f(-m)^* u^{*m}u^m = \sum_{m\in\mathbb{Z}}(f(-m)u^{*m})^* \\
&= \left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} f(-m)u^{-m}\right)^* = \phi(f)^*.
\end{aligned}$$

Logo, o $*$-homomorfidmo definido em (1.25) é contínuo, e portanto se estende de maneira única a $\widetilde{\phi} : A \times_\alpha \mathbb{Z} \to B$. Denote por ι a inclusão de $\ell_1(\mathbb{Z}, A)$ em $A \times_\alpha \mathbb{Z}$, e note que

$$\widetilde{\phi}(\iota(a\delta_0)) = a \text{ e } \widetilde{\phi}(\iota(1_A\delta_1)) = u.$$

Por outro lado,

$$\iota(1_A\delta_1)\iota(a\delta_0)\iota(1_A\delta_1^*) = \iota(1_A\delta_1 * a\delta_0 * 1_A\delta_1^*) = \iota(\alpha(a)\delta_0), \forall a \in A,$$

daí segue da Proposição 1.4.3 que os elementos $a\delta_0$ e $1_A\delta_1$ são geradores de $\ell_1(\mathbb{Z}, A)$, como $*$-álgebra de Banach, e portanto geradores de $A \times_\alpha \mathbb{Z}$. Então, pela propriedade universal de B, existe um único $*$-homomorfismo $\psi : B \to A \times_\alpha \mathbb{Z}$ tal que

$$\psi(a) = a\delta_0 \text{ e } \psi(u) = 1_A\delta_1, \ \forall a \in A.$$

Concluímos então que

$$\psi \circ \widetilde{\phi}(\iota(a\delta_0)) = \iota(a\delta_0) \text{ e } \psi \circ \widetilde{\phi}(\iota(1_A\delta_1)) = \iota(1_A\delta_1),$$

assim como

$$\widetilde{\phi} \circ \psi(a) = a \text{ e } \widetilde{\phi} \circ \psi(u) = u,$$

qualquer que seja $a \in A$, isto é, ψ é inversa de $\widetilde{\phi}$. □

O Exemplo a seguir trata de um particular Produto Cruzado, que será importante para fazermos uma aplicação do principal resultado deste trabalho, a Seqüência Exata de Pimsner-Voiculescu.

Exemplo 1.4.13. *Sejam $\theta \in \mathbb{R}$ e $\alpha_\theta \in \mathrm{Aut}(C(\mathbb{T}))$ dado, para cada $f \in C(\mathbb{T})$, por*

$$\alpha_\theta(f)(\lambda) = f(e^{-2\pi i\theta}\lambda), \ \forall \lambda \in \mathbb{T}.$$

Então $\mathcal{A}_\theta \cong C(\mathbb{T}) \times_{\alpha_\theta} \mathbb{Z}$, sendo $\mathcal{A}_\theta$ a C^*-álgebra definida no Exemplo 1.2.13.

Demonstração. Sejam $\mathbf{I} = \mathbf{1}\delta_0$, $Z = z\delta_0$ e $W = \mathbf{1}\delta_1$, em que $\mathbf{1}, z$ são, respectivamente, as funções $\lambda \mapsto 1$ e $\lambda \mapsto \lambda$ de $C(\mathbb{T})$. Note que W é o unitário que implementa o $*$-automorfismo α_θ. De fato, se $f \in C(\mathbb{T})$, segue da equação (1.24) que

$$\begin{aligned} W * (f\delta_0) * W^* &= (\mathbf{1}\delta_1) * (f\delta_0) * (\mathbf{1}\delta_{-1}) \\ &= (\alpha_\theta(f)\delta_1) * (\mathbf{1}\delta_{-1}) \\ &= \alpha_\theta(f)\delta_0. \end{aligned}$$

Os elementos do subconjunto $G_{C(\mathbb{T})\times_{\alpha_\theta}\mathbb{Z}} = \{\mathbf{I}, Z, W\}$ de $C(\mathbb{T}) \times_{\alpha_\theta} \mathbb{Z}$ satisfazem as relações de $\mathcal{R}$ definidas no Exemplo 1.2.12. Como $\mathcal{A}_\theta$ satisfaz a propriedade universal para o par $(G, \mathcal{R})$ (Exemplo 1.2.12), então existe um único $*$-homomorfismo $\varphi : \mathcal{A}_\theta \to C(\mathbb{T}) \times_{\alpha_\theta} \mathbb{Z}$ tal que $\varphi(I) = \mathbf{I}$, $\varphi(V) = Z$ e $\varphi(U) = W$.

Por outro lado, considere $C^*(V)$ a C^*-subálgebra de $\mathcal{A}_\theta$ gerada por I e V. Como V é unitaário, segue do Exemplo 1.2.9 que $C^*(V) \cong C(\mathbb{T})$. Como

$$VU = e^{2\pi i\theta}UV \Leftrightarrow VUU^* = e^{2\pi i\theta}UVU^* \Leftrightarrow e^{-2\pi i\theta}V = UVU^*,$$

então os elementos de $C^*(V) \bigcup \{U, U^*\}$ satisfazem as relações dadas no Exemplo 1.2.12. Portanto, o $*$-homomorfismo inverso de φ segue do Teorema 1.4.12, e do fato de que a C^*-álgebra do Exemplo 1.2.12 satisfaz a propriedade universal. $\square$

Capítulo 2

K-teoria para C^*-álgebras

Apresentaremos neste capítulo as definições dos funtores K_0 e K_1 associados a uma C^*-álgebra A. Para isso, dedicamos a primeira seção aos requisitos necessários para entender as definições desses funtores, tais como resultados sobre projeções e unitários em $\mathcal{M}_n(A)$ e as definições de categoria e funtor. Nas duas seções seguintes, além das definições de K_0 e K_1, apresentamos também as principais propriedades desses funtores, dedicando especial atenção ao isomorfismo que identifica $K_i(A)$ com $K_i(\mathcal{M}_n(A))$, $i = 0, 1$ e à estabilidade. Na última seção do capítulo, enunciamos a periodicidade de Bott e a seqüência exata de seis termos.

2.1 Definições e resultados básicos

Definição 2.1.1. *Sejam X um espaço topológico e $a, b \in X$. Dizemos que a e b são* homotópicos em X *ou* homotopicamente equivalentes em X *se existe uma função contínua $v : [0; 1] \to X$ tal que $v(0) = a$ e $v(1) = b$. A função v é chamada de* caminho contínuo entre a e b *e é usualmente denotada por $t \mapsto v(t)$ ou ainda $t \mapsto v_t$, ficando implícito que $t \in [0; 1]$. Se a e b são homotopicamente equivalentes em X, então denotamos $a \sim_h b$.*

Note que a referência ao espaço em que a homotopia se realiza é essencial. Considere, por exemplo, que a e b são elementos de uma C^*-álgebra A. A função dada por $t \mapsto (1-t)a + tb$ é obviamente um caminho contínuo de elementos de A. Entretanto se fizermos a suposição adicional de que a e b são projeções em A, não necessariamente teremos $t \mapsto (1-t)a + tb$ um caminho contínuo de projeções de A.

Definição 2.1.2. *Sejam as C^*-álgebras A e B .*

(i) *Dizemos que dois $*$-homomorfismos $\varphi, \psi : A \to B$ são* homotópicos, *e denotamos $\varphi \sim_h \psi$, se existe um caminhos de $*$-homomorfismos $\varphi_t : A \to B$, com $t \in [0;1]$, tal que a aplicação de $[0;1]$ em B dada por $t \mapsto \varphi_t(a)$ é contínua para cada $a \in A$, $\varphi_0 = \varphi$ e $\varphi_1 = \psi$.*

(ii) *Dizemos que as C^*-álgebras A e B são* homotopicamente equivalentes *se existem dois $*$-homomorfismos $\varphi : A \to B$ e $\phi : B \to A$ tais que $\phi \circ \varphi \sim_h \mathrm{id}_A$ e $\varphi \circ \phi \sim_h \mathrm{id}_B$. Neste caso, dizemos que*

$$A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\phi} A$$

é uma homotopia entre A e B.

Sejam A uma C^*-álgebra e $n \in \mathbb{N}^*$. Vamos denotar por $\mathcal{M}_n(A)$ o conjunto de todas as matrizes $n \times n$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

com $a_{ij} \in A$. Denotaremos um elemento como em (2.1) por $(a_{ij})_{n \times n}$, ou simplesmente por (a_{ij}). Equipando $\mathcal{M}_n(A)$ com as operações de espaço vetorial em cada entrada, com o produto usual de matrizes e com involução dada por $(a_{ij}) \mapsto (a_{ji}^*)$, temos que $\mathcal{M}_n(A)$ é uma $*$-álgebra.

Seja $(\pi, \mathcal{H})$ uma representação fiel de A. Para cada $a = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(A)$, defina o operador $\pi_n(a) : \mathcal{H}^n \to \mathcal{H}^n$ por

$$\pi_n(a)(\xi) = \pi_n \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi(a_{11})(\xi_1) + \pi(a_{1n})(\xi_n) \\ \vdots \\ \pi(a_{n1})(\xi_1) + \pi(a_{nn})(\xi_n) \end{pmatrix},$$

qualquer que seja $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n) \in \mathcal{H}^n$. Segue que $\pi_n(a) \in B(\mathcal{H}^n)$ e a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \pi_n : & \mathcal{M}_n(A) & \to & B(\mathcal{H}^n) \\ & a & \mapsto & \pi_n(a) \end{array}$$

é um $*$-homomorfismo. Para cada $a \in \mathcal{M}_n(A)$, defina $\|a\| := \|\pi_n(a)\|_{B(\mathcal{H}^n)}$ e, com isso, $\mathcal{M}_n(A)$ é uma C^*-álgebra. Dado que π é injetivo, e portanto é isométrico, esta norma não depende da escolha de π.

Definição 2.1.3. *Seja φ um $*$-homomorfismo de A em uma C^*-álgebra B. Para cada $n \in \mathbb{N}^*$, defina a aplicação $\varphi_n : \mathcal{M}_n(A) \to \mathcal{M}_n(B)$ por*

$$\varphi_n \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(a_{11}) & \dots & \varphi(a_{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi(a_{n1}) & \dots & \varphi(a_{nn}) \end{pmatrix},$$

para todo $(a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(A)$.

É fácil mostrar que a aplicação φ_n da Definição 2.1.3 é um $*$-homomorfismo.

Utilizaremos a notação

$$\operatorname{diag}(x_1, ..., x_n) = \begin{pmatrix} x_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x_n \end{pmatrix},$$

tanto para $x_i \in \mathbb{C}$ como para $x_i \in A$, $i = 1, ...n$, e com isso denotaremos

$$1_n := \operatorname{diag}(1_A, ..., 1_A) = 1_A \otimes I_n \in A \otimes \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \cong \mathcal{M}_n(A),$$

$$u_n := \operatorname{diag}(u, ..., u) = u \otimes I_n \in B \otimes \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \cong \mathcal{M}_n(B),$$

assim como

$$u_n^* := \operatorname{diag}(u^*, ..., u^*) = u^* \otimes I_n \in B \otimes \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \cong \mathcal{M}_n(B),$$

sendo $I_n = \operatorname{diag}(1, ..., 1) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Sejam $n \in \mathbb{N}^*$ e A uma C^*-álgebra. Denotaremos por $\mathcal{P}(A)$ o conjunto de todas as projeções de A, isto é, $\mathcal{P}(A) = \{p \in A : p = p^2 = p^*\}$. Denotaremos por $\mathcal{P}_n(A)$ o conjunto das projeções em $\mathcal{M}_n(A)$, isto é, $\mathcal{P}_n(A) = \mathcal{P}(\mathcal{M}_n(A))$.

Suponha agora que A tem unidade. Denotaremos por $\mathcal{U}(A)$ o grupo dos elementos unitários de A, isto é, $\mathcal{U}(A) = \{u \in A : u^*u = 1_A = uu^*\}$, denotaremos por $\mathcal{U}_0(A)$ o subconjunto de $\mathcal{U}(A)$ dos elementos que são homotopicamente equivalentes a 1_A e por $\mathcal{U}_n(A)$ o grupo dos unitários de $\mathcal{M}_n(A)$, isto é, $\mathcal{U}_n(A) = \mathcal{U}(\mathcal{M}_n(A))$. Denotaremos por $\operatorname{Inv}_n(A)$ o conjunto dos elementos inversíveis de $\mathcal{M}_n(A)$.

Seja A uma C^*-álgebra. Vamos definir em $\mathcal{P}(A)$ as duas relações de equivalência abaixo.

Equivalência Murray-von Neumann: $p \sim q$ se existe $v \in A$ tal que $p = v^*v$ e $q = vv^*$.

Equivalência unitária: $p \sim_u q$ se existe $u \in \mathcal{U}(\widetilde{A})$ tal que $q = upu^*$. Chamaremos um elemento $v \in A$ tal que $v^*v \in \mathcal{P}(A)$ de *isometria parcial*.

As três Proposições a seguir tratam das implicações entre as relações de equivalência definidas acima. As demonstrações destes resultados podem ser lidas em [15, Proposições 2.2.2, 2.2.7 e 2.2.8].

Proposição 2.1.4. *Sejam p e q projeções em uma C^*-álgebra A com unidade. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) $p \sim_u q$,

(ii) $q = upu^*$ *para algum elemento* $u \in \mathcal{U}(A)$,

(iii) $p \sim q$ *e* $(1_A - p) \sim (1_A - q)$.

Proposição 2.1.5. *Sejam p e q projeções em uma C^*-álgebra A.*

(a) Se $p \sim_h q$, *então* $p \sim_u q$.

(b) Se $p \sim_u q$, *então* $p \sim q$.

Proposição 2.1.6. *Sejam p e q projeções em uma C^*-álgebra A.*

(a) Se $p \sim q$, *então* $\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim_u \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *em* $\mathcal{M}_2(A)$.

(b) Se $p \sim_u q$, *então* $\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *em* $\mathcal{M}_2(A)$.

Vamos agora definir categorias e funtores e, em seguida, iremos tratar resumidamente de limites indutivos, tendo em vista resultados importantes de K-teoria. Como referência básica, usamos [15].

Definição 2.1.7. *Uma* categoria $\mathbf{C}$ *consiste de uma classe* $\mathcal{O}(\mathbf{C})$ *de objetos e, para cada par de objetos* $A, B \in \mathcal{O}(\mathbf{C})$, *um conjunto* $\mathrm{Mor}(A, B)$ *de morfismos (de A em B), com a seguinte regra associativa de composição:*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Mor}(A,B) \times \mathrm{Mor}(B,C) & \to & \mathrm{Mor}(A,C) \\ (\varphi, \psi) & \mapsto & \psi \circ \varphi, \end{array}$$

tal que, quaisquer que sejam A, B objetos de $\mathcal{O}(\mathbf{C})$, *existem elementos* $\mathrm{id}_A \in \mathrm{Mor}(A, A)$ *e* $\mathrm{id}_B \in \mathrm{Mor}(B, B)$ *que satisfazem*

$$\mathrm{id}_B \circ \varphi = \varphi = \varphi \circ \mathrm{id}_A, \ \forall \varphi \in \mathrm{Mor}(A, B).$$

Dizemos que um objeto N numa categoria $\mathbf{C}$ é um *objeto nulo* se $\mathrm{Mor}(A, N)$ e $\mathrm{Mor}(N, A)$ contêm um único elemento para todo objeto $A \in \mathcal{O}(\mathbf{C})$. Denotaremos o objeto nulo de uma categoria $\mathbf{C}$, caso exista, por $\{0\}$, ou simplesmente por 0. Se $A, B \in \mathcal{O}(\mathbf{C})$, denotaremos por $0_{B,A}$ o morfismo que leva todo elemento de A no elemento nulo de B.

As duas categorias importantes para este trabalho são a categoria das C^*-álgebras, cuja classe de objetos é a classe de todas as C^*-álgebras e os morfismos são os $*$-homomorfismos, e a categoria dos grupos abelianos, cuja classe de objetos é a classe de todos os grupos abelianos e os morfismos são os homomorfismos de grupos.

Dizemos que a seqüência (finita ou infinita) de objetos e morfismos de uma categoria

$$\cdots \longrightarrow A_i \xrightarrow{\varphi_i} A_{i+1} \xrightarrow{\varphi_{i+1}} A_{i+2} \longrightarrow \cdots$$

é *exata* se $\mathrm{Im}(\varphi_i) = \mathrm{Ker}(\varphi_{i+1})$, para todo i. Uma seqüência exata da forma

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \longrightarrow 0 \tag{2.2}$$

é chamada de *seqüência exata curta*. Neste caso, dizemos também que B é uma *extensão de A por C*. Dizemos que a seqüência exata curta dada em 2.2 *cinde* se existe $\lambda : C \to B$ tal que $\psi \circ \lambda = \mathrm{id}_C$.

Definição 2.1.8. *Um* funtor covariante *(ou simplesmente* funtor*) F entre duas categorias* $\mathbf{C}$ *e* $\mathbf{D}$ *é uma aplicação $A \mapsto F(A)$ de $\mathcal{O}(\mathbf{C})$ em $\mathcal{O}(\mathbf{D})$ e uma coleção de aplicações $\varphi \mapsto F(\varphi)$ de* $\mathrm{Mor}(A, B)$ *em* $\mathrm{Mor}(F(A), F(B))$, *quaisquer que sejam os objetos $A, B \in \mathcal{O}(\mathbf{C})$, tal que*

(i) $F(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{F(A)}$ *para todo objeto $A \in \mathcal{O}(\mathbf{C})$,*

(ii) se $A, B, C \in \mathcal{O}(\mathbf{C})$, então $F(\psi \circ \varphi) = F(\psi) \circ F(\varphi)$ quaisquer que sejam $\varphi \in \mathrm{Mor}(A, B)$ e $\psi \in \mathrm{Mor}(B, C)$.

Sejam $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ categorias com objetos nulos e seja F um funtor entre estas categorias. Dizemos que F *preserva objetos nulos* se $F(\{0\}) = \{0\}$.

Seja

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0 \tag{2.3}$$

uma seqüência exata curta de objetos de $\mathbf{C}$. Se F preserva objetos nulos, então

$$0 \longrightarrow F(I) \xrightarrow{F(\varphi)} F(A) \xrightarrow{F(\psi)} F(B) \longrightarrow 0 \tag{2.4}$$

é uma seqüência em $\mathbf{D}$. Dizemos que o funtor F é *meio-exato* se $\mathrm{Im}(F(\varphi)) = \mathrm{Ker}(F(\psi))$ e que F é *exato* se a seqüência 2.4 é exata. Dizemos que o funtor F é *exato que cinde* se a seqüência dada em (2.4) cinde quando a seqüência dada em (2.3) cinde.

Uma *seqüência indutiva* numa categoria $\mathbf{C}$ é uma seqüência $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ de objetos de $\mathbf{C}$ e uma seqüência de morfismos $\varphi_n : A_n \to A_{n+1}$, usualmente denotada por

$$A_1 \xrightarrow{\varphi_1} A_2 \xrightarrow{\varphi_2} A_3 \xrightarrow{\varphi_3} \cdots.$$

Vamos denotar por $\varphi_{m,n} : A_n \to A_m$ o morfismo dado pela composição $\varphi_{m,n} = \varphi_{m-1} \circ \varphi_{m-2} \circ \ldots \circ \varphi_n$.

Definição 2.1.9. *Um* limite indutivo *de uma seqüência indutiva*

$$A_1 \xrightarrow{\varphi_1} A_2 \xrightarrow{\varphi_2} A_3 \xrightarrow{\varphi_3} \cdots, \tag{2.5}$$

numa categoria $\mathbf{C}$ *é um sistema* $(A, \{\mu_n\}_{n=1}^{\infty})$*, em que* A *é um objeto de* $\mathbf{C}$ *e, para cada* $n \in \mathbb{N}^*$, $\mu_n : A_n \to A$ *é um morfismo em* $\mathbf{C}$*, satisfazendo as duas condições abaixo.*

(i) Para cada $n \in \mathbb{N}^*$*, o diagrama*

$$\begin{tikzcd} A_n \arrow[rr, "\varphi_n"] \arrow[dr, "\mu_n"'] & & A_{n+1} \arrow[dl, "\mu_{n+1}"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

comuta.

(ii) Se $(B, \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty})$ *é um sistema, em que* B *é um objeto de em* $\mathbf{C}$, $\lambda_n : A_n \to B$ *é um morfismo em* $\mathbf{C}$ *para cada* $n \in \mathbb{N}^*$ *e* $\lambda_n = \lambda_{n+1} \circ \varphi_n$ *para cada* $n \in \mathbb{N}^*$*, então existe um único morfismo* $\lambda : A \to B$ *que faz o diagrama*

$$\begin{tikzcd} & A_n \arrow[dl, "\mu_n"'] \arrow[dr, "\lambda_n"] & \\ A \arrow[rr, "\lambda"'] & & B \end{tikzcd}$$

comutar para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

Se $(A, \{\mu_n\})$ e $(B, \{\lambda_n\})$ são limites indutivos da seqüência dada em (2.5), segue do item (ii) da Definição 2.1.9 que existem dois únicos morfismos $\lambda : A \to B$ e $\mu : B \to A$ tais que os diagramas

$$\begin{tikzcd} & A_n \arrow[dl, "\mu_n"'] \arrow[d, "\lambda_n"] \arrow[dr, "\mu_n"] & \\ A \arrow[r, "\lambda"'] & B \arrow[r, "\mu"'] & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & A_n \arrow[dl, "\mu_n"'] \arrow[dr, "\mu_n"] & \\ A \arrow[rr, "\mathrm{id}_A"'] & & A \end{tikzcd}$$

são comutativos. Com isso, temos $\mu \circ \lambda = \mathrm{id}_A$ e, da mesma forma, obtemos $\lambda \circ \mu = \mathrm{id}_B$. Logo μ e λ são isomorfismo, um sendo inverso do outro. Portanto, quando existem, limites indutivos são únicos. Denotaremos o limite indutivo de uma seqüência indutiva

$$A_1 \xrightarrow{\varphi_1} A_2 \xrightarrow{\varphi_2} A_3 \xrightarrow{\varphi_3} \cdots.$$

também por $\varinjlim(A_n, \varphi_n)$, ou simplesmente $\varinjlim A_n$.

A Proposição 2.1.10 abaixo será importante para mostrarmos logo em seguida que o limite indutivo das matrizes complexas é a C^*-álgebra dos operadores compactos num espaço de Hilbert separável de dimensão infinita. Como referência para sua demonstração, indicamos [15, Proposição 6.2.4].

Proposição 2.1.10. *Toda seqüência indutiva de C^*-álgebras*

$$A_1 \xrightarrow{\varphi_1} A_2 \xrightarrow{\varphi_2} A_3 \xrightarrow{\varphi_3} \cdots.$$

admite um limite indutivo $(A, \{\mu_n\}_{n=1}^{\infty})$. E mais,

$$A = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \mu_n(A_n)}.$$

Proposição 2.1.11. *Considere a seqüência*

$$\mathbb{C} \xrightarrow{\varphi_1} \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \xrightarrow{\varphi_2} \mathcal{M}_3(\mathbb{C}) \xrightarrow{\varphi_3} \cdots,$$

em que, para cada $n \in \mathbb{N}^*$, φ_n é dado por

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \ni a \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C}).$$

O limite indutivo desta seqüência é $K(\mathcal{H})$, a C^*-álgebra dos operadores compactos sobre um espaço de Hilbert separável de dimensão infinita $\mathcal{H}$.

Demonstração. Seja $(e_n)_{n\geq 0}$ uma base ortonormal para $\mathcal{H}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina a projeção $F_n \in B(\mathcal{H})$ dada por

$$F_n(h) = \sum_{i=0}^{n} < h, e_i > e_i, \ \forall h \in \mathcal{H},$$

e considere a aplicação de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$ em $F_n B(\mathcal{H}) F_n$ dada, para cada $(\lambda_{ij}) \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$, por

$$\mu_{n+1}(\lambda_{ij})(h) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} \lambda_{i+1j+1} < h, e_j > e_i, \ \forall h \in \mathcal{H}.$$

Como $F_n B(\mathcal{H}) F_n$ é um ideal bilateral fechado de $B(\mathcal{H})$, segue que é uma C^*-álgebra. Afirmamos que μ_{n+1} é um $*$-isomorfismo de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$ em $F_n B(\mathcal{H}) F_n$. De fato, é fácil ver que

μ_{n+1} é linear e preserva produto. Dados $(\lambda_{ij}) \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$ e $h_1, h_2 \in \mathcal{H}$, temos

$$\begin{aligned}
\left\langle \sum_{i,j=0}^{n} \lambda_{i+1j+1} < h_1, e_j > e_i, h_2 \right\rangle &= \sum_{i,j=0}^{n} \lambda_{i+1j+1} < h_1, e_j >< e_i, h_2 > \\
&= \left\langle h_1, \sum_{i,j=0}^{n} \overline{\lambda_{j+1i+1}} < h_2, e_i > e_j \right\rangle,
\end{aligned}$$

isto é, $\mu_{n+1}(\lambda_{ij}^*) = \mu_{n+1}(\lambda_{ij})^*$, logo μ_{n+1} preserva adjunto. E como

$$\sum_{i,j=0}^{n} \lambda_{i+1j+1} < h, e_j > e_i = 0$$

para todo $h \in \mathcal{H}$ se, e somente se, $(\lambda_{ij}) = 0$, segue que μ_{n+1} é injetiva. Vamos mostrar agora a sobrejetividade de μ_{n+1}. Se $T \in F_n B(\mathcal{H}) F_n$ e $h \in \mathcal{H}$, então

$$\begin{aligned}
T(h) &= (F_n T F_n)(h) = F_n(T(F_n(h))) = F_n\left(T\left(\sum_{i=0}^{n} < h, e_i > e_i\right)\right) \\
&= F_n\left(\sum_{i=0}^{n} < h, e_i > T(e_i)\right) = \sum_{j=0}^{n} \left\langle \sum_{i=0}^{n} < h, e_i > T(e_i), e_j \right\rangle e_j \\
&= \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=1}^{n} < h, e_i >< T(e_i), e_j > e_j \\
&= \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=1}^{n} < T(e_i), e_j >< h, e_i > e_j = \mu_{n+1}(\lambda_{ij})(h),
\end{aligned}$$

com $\lambda_{i+1j+1} =< T(e_i), e_j >$, quaisquer que sejam $i, j = 0, ..., n$. Portanto μ_{n+1} é um $*$-isomorfismo.

Como $\bigcup_{n=0}^{\infty} F_n B(\mathcal{H}) F_n = F(H)$, o conjunto dos operadores de posto finito de $\mathcal{H}$, que é denso em $K(\mathcal{H})$, segue de 2.1.10 que

$$K(\mathcal{H}) = \overline{F(\mathcal{H})} = \overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} F_n B(\mathcal{H}) F_n} = \overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} \mu_{n+1}(\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C}))}.$$

□

A Proposição que se segue, análoga à Proposição 2.1.10, dará sentido à propriedade de continuidade dos funtores K_0 e K_1, que veremos mais a frente.

Proposição 2.1.12. *Toda seqüência indutiva de grupos abelianos*

$$G_1 \xrightarrow{\alpha_1} G_2 \xrightarrow{\alpha_2} G_3 \xrightarrow{\alpha_3} \cdots.$$

admite um limite indutivo $(G, \{\beta_n\}_{n=1}^{\infty})$. E mais,

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} \beta_n(G_n).$$

Seja agora A uma C^*-álgebra e seja $\widetilde{A} = \{a + \alpha 1_{\widetilde{A}} : a \in A \text{ e } \alpha \in \mathbb{C}\}$ sua unitização definida na Seção 1.1. Considere os $*$-homomorfismos

$$\begin{array}{rccc} \iota: & A & \longrightarrow & \widetilde{A} \\ & a & \longmapsto & a + 0 \cdot 1_{\widetilde{A}} \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \pi: & \widetilde{A} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & a + \alpha 1_{\widetilde{A}} & \longmapsto & \alpha \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \lambda: & \mathbb{C} & \longrightarrow & \widetilde{A} \\ & \alpha & \longmapsto & 0 + \alpha 1_{\widetilde{A}} \end{array}.$$

Claramente ι é injetivo, π é sobrejetivo, $\pi \circ \iota = 0$ e $\pi \circ \lambda = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$, logo

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\iota"] & \widetilde{A} \arrow[r, shift left, "\pi"] & \mathbb{C} \arrow[l, shift left, "\lambda"] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \tag{2.6}$$

é uma seqüência exata curta que cinde de C^*-álgebras.

Proposição 2.1.13. *Considere as C^*-álgebras A e B e o $*$-homomorfismo $\varphi : A \longrightarrow B$. Então, existe um único $*$-homomorfismo $\widetilde{\varphi} : \widetilde{A} \to \widetilde{B}$ que faz o diagrama*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\iota_A"] \arrow[d, "\varphi"'] & \widetilde{A} \arrow[r, "\pi_A"] \arrow[d, "\widetilde{\varphi}"] & \mathbb{C} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & B \arrow[r, "\iota_B"'] & \widetilde{B} \arrow[r, "\pi_B"'] & \mathbb{C} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

comutar. E mais, $\widetilde{\varphi}$ é dado por $\widetilde{\varphi}(a + \alpha 1_{\widetilde{A}}) = \varphi(a) + \alpha 1_{\widetilde{B}}$, quaisquer que sejam $a \in A$ e $\alpha \in \mathbb{C}$.

Demonstração. Basta provarmos a unicidade. Se ϕ é um outro $*$-homomorfismo que, no lugar de $\widetilde{\varphi}$, faz o diagrama acima comutar, então

$$\begin{aligned} \phi(a + \alpha 1_{\widetilde{A}}) &= \phi(a + 0 \cdot 1_{\widetilde{A}}) + \phi(0 + \alpha 1_{\widetilde{A}}) = \phi(\iota_A(a)) + (0 + \alpha 1_{\widetilde{B}}) \\ &= \iota_B(\varphi(a)) + (0 + \alpha 1_{\widetilde{B}}) = (\varphi(a) + 0 \cdot 1_{\widetilde{B}}) + (0 + \alpha 1_{\widetilde{B}}) \\ &= \varphi(a) + \alpha 1_{\widetilde{B}} = \widetilde{\varphi}(a + \alpha 1_{\widetilde{A}}), \end{aligned}$$

qualquer que seja $a + \alpha 1_{\widetilde{A}} \in \widetilde{A}$, dado que $\pi_B(\phi(0 + \alpha 1_{\widetilde{A}})) = \pi_A(0 + \alpha 1_{\widetilde{A}}) = \alpha$. □

Corolário 2.1.14. *Se B é uma C^*-álgebra com unidade e A é uma C^*-subálgebra de B tal que $1_B \notin A$, então $\widetilde{A}$ é isomorfo $A + \mathbb{C}1_B$.*

Demonstração. Basta definir $\varphi : A \longrightarrow B$ como sendo o $*$-homomorfimo inclusão e aplicar a Proposição 2.1.13. □

2.2 O funtor K_0

Nesta seção vamos construir o funtor K_0 entre a categoria das C^*-álgebras e a categoria dos grupos abelianos. Enunciaremos as principais propriedades deste funtor e as demonstrações detalhadas destes resultados podem ser encontradas em [15].

Seja A uma C^*-álgebra. Defina

$$\mathcal{P}_\infty(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_n(A),$$

e considere $p, q \in \mathcal{P}_\infty(A)$. Podemos supor que $p \in \mathcal{P}_n(A)$ e que $q \in \mathcal{P}_m(A)$. Diremos que $p \sim_0 q$ se existe $v \in \mathcal{M}_{m\times n}(A)$ tal que $p = v^*v$ e $q = vv^*$, sendo $\mathcal{M}_{m\times n}(A)$ o conjunto de todas as matrizes retangulares $m \times n$ com entradas de A. Defina agora a operação binária $\oplus : \mathcal{P}_\infty(A) \times \mathcal{P}_\infty(A) \to \mathcal{P}_\infty(A)$ por

$$p \oplus q = \mathrm{diag}(p, q) = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}.$$

Note que, se $p \in \mathcal{P}_n(A)$ e $q \in \mathcal{P}_m(A)$, então $p \oplus q \in \mathcal{P}_{n+m}(A)$.

Seja $\mathcal{D}(A) = \mathcal{P}_\infty(A)/\sim_0$. Para cada $p \in \mathcal{P}_\infty(A)$, denotemos por $[p]_\mathcal{D}$ a classe de equivalência de p em $\mathcal{D}(A)$. Definindo em $\mathcal{D}(A)$ a adição dada por

$$[p]_\mathcal{D} + [q]_\mathcal{D} = [p \oplus q]_\mathcal{D},\ p, q \in \mathcal{P}_\infty(A),$$

é fácil ver que $(\mathcal{D}(A), +)$ é um semigrupo abeliano.

A partir de um semi-grupo abeliano $(M, +)$ qualquer, é possível construir um grupo abeliano, como se segue. Considere a relação em $M \times M$ dada por $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ se, e somente se, existe $z \in M$ tal que

$$x_1 + y_2 + z = x_2 + y_1 + z.$$

É fácil ver que $\sim$ é uma relação de equivalência em $M \times M$. Denotaremos por $G(M)$ o espaço quociente $(M \times M)/\sim$ e por $< x, y >$ a classe de equivalência do par (x, y). Com a operação binária em $G(M)$ definida por

$$< x_1, y_1 > + < x_2, y_2 > = < x_1 + x_2, y_1 + y_2 >,$$

quaisquer que sejam $x_1, x_2, y_1, y_2 \in M$, pode-se provar que $(G(M), +)$ é um grupo abeliano, chamado de *grupo de Grothendieck associado ao semi-grupo abeliano M*. Dado um elemento $y \in M$, considere a aplicação $\gamma : M \to G(M)$ dada por $x \mapsto < x + y, y >$. É fácil ver que γ

não depende da escolha de y e é aditiva, isto é, $\gamma(x_1 + x_2) = \gamma(x_1) + \gamma(x_2)$, quaisquer que sejam $x_1, x_2 \in M$. A aplicação γ é conhecida como *aplicação de Grothendieck associado ao semi-grupo abeliano* M. Segue que $G(M) = \{\gamma(x) - \gamma(y) : x, y \in M\}$. De fato, note que $- < y, x > = < x, y >$ e com isso temos

$$< x, y > = < x + y, y > - < x + y, x > = \gamma(x) - \gamma(y).$$

Para mais detalhes sobre esta construção, vide [15] ou [12, Apêndice A].

Definição 2.2.1. *Seja A uma C^*-álgebra com unidade. Definimos $K_0(A)$ como sendo o grupo de Grothendieck de $\mathcal{D}(A)$. Definimos a aplicação*

$$\begin{array}{rccc} [\cdot]_0 : & \mathcal{P}_\infty(A) & \to & K_0(A) \\ & p & \mapsto & \gamma([p]_\mathcal{D}), \end{array}$$

em que $\gamma : \mathcal{D}(A) \to K_0(A)$ é a aplicação de Grothendieck associada a $\mathcal{D}(A)$.

Proposição 2.2.2. *Se A é uma C^*-álgebra com unidade, então*

$$\begin{aligned} K_0(A) &= \{[p]_0 - [q]_0 : p, q \in \mathcal{P}_\infty(A)\} \\ &= \{[p]_0 - [q]_0 : p, q \in \mathcal{P}_n(A), n \in \mathbb{N}^*\}. \end{aligned}$$

A Proposição a seguir é conhecida como *propriedade universal do K_0* e será importante para garantir a funtoriedade de K_0.

Proposição 2.2.3. *Sejam A uma C^*-álgebra com unidade, G um grupo abeliano, e suponha que $\nu : \mathcal{P}_\infty(A) \to G$ é uma aplicação que satisfaz:*

(i) $\nu(p \oplus q) = \nu(p) + \nu(p)$ quaisquer que sejam $p, q \in \mathcal{P}_\infty(A)$,

(ii) $\nu(0_A) = 0$,

(iii) se $p, q \in \mathcal{P}_n(A)$ para algum $n \in \mathbb{N}$ e $p \sim_h q$ em $\mathcal{P}_n(A)$, então $\nu(p) = \nu(q)$.

Então, existe um único homomorfismo de grupos $\alpha : K_0(A) \to G$ que faz o diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P}_\infty(A) \arrow[d, "{[\cdot]_0}"'] \arrow[dr, "\nu"] & \\ K_0(A) \arrow[r, "\alpha"'] & G \end{tikzcd}$$

comutar.

Exemplo 2.2.4. $K_0(\mathbb{C}) = \mathbb{Z}$.

Demonstração. Não é difícil provar que projeções $p, q \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{C})$ são equivalentes se, e somente se, p e q têm o mesmo posto e que, quaisquer que sejam $p, q \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{C})$, temos

$$\text{posto}(p \oplus q) = \text{posto}(p) + \text{posto}(q).$$

Com isso, a aplicação $\tau : \mathcal{D}(\mathbb{C}) \to \mathbb{N}$ definida por

$$\tau([p]_\mathcal{D}) = \text{posto}(p), \ \forall p \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{C}),$$

é aditiva. Assim, τ se estende a um único homomorfismo, que também denotaremos por $\tau : K_0(\mathbb{C}) \to \mathbb{Z}$. Segue da Proposição 2.2.2 que, se $x \in K_0(\mathbb{C})$, então $x = [p]_0 - [q]_0$, com $p, q \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{C})$. Como $1_n \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{C})$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$ e $\tau[1_n]_0 = n$, segue que τ é sobrejetivo. Por outro lado, se $\tau(x) = \tau([p]_0 - [q]_0) = 0$, então $\tau([p]_0) = \tau([q]_0)$, ou seja, p e q têm o mesmo posto, e daí $x = 0$. Logo τ é injetivo, e portanto bijetivo. □

Exemplo 2.2.5. *Se $\mathcal{H}$ é um espaço de Hilbert separável de dimensão infinita, então $K_0(B(\mathcal{H})) = 0$.*

Demonstração. Não é difícil provar que duas projeções de posto finito em $B(\mathcal{H})$ são equivalente se, e somente se, têm o mesmo posto.

Agora, se $P, Q \in \mathcal{P}(B(\mathcal{H}))$ são projeções de posto infinito, então $P \sim_u Q$. De fato, sejam $(e_n)_{n=0}^{\infty}$ e $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ bases de $P(\mathcal{H})$ e $Q(\mathcal{H})$, respectivamente. Seja $V : P(\mathcal{H}) \to Q(\mathcal{H})$ o unitário dado por $V(e_n) = f_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Definindo $U \in B(\mathcal{H})$ por $U = V$ em $P(\mathcal{H})$ e $U = 0$ em $(I - P)(\mathcal{H})$, é fácil ver que $P = U^*U$ e $Q = UU^*$.

É um resultado conhecido que $\mathcal{M}_n(B(\mathcal{H})) \cong B(\mathcal{H}^n)$. Assim, se $P \in \mathcal{P}_\infty(B(\mathcal{H}))$, então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $P \in \mathcal{P}_n(B(\mathcal{H}))$ e, denotando também por P a correspondente projeção de $B(\mathcal{H}^n)$, definimos a aplicação $\tau : \mathcal{P}_\infty(B(\mathcal{H})) \to \mathbb{N} \bigcup \{\infty\}$ dada por

$$\tau(P) = \dim(P(\mathcal{H}^n)).$$

Note que τ é aditiva, sobrejetiva e que $\tau(P \oplus 0) = \tau(P)$, qualquer que $P \in \mathcal{P}_\infty(B(\mathcal{H}))$. Logo, dados $P, Q \in \mathcal{P}_\infty(B(\mathcal{H}))$, $\tau(P) = \tau(Q)$ se, e somente se, $P \sim_0 Q$. Com isso, temos que a aplicação $d : \mathcal{D}(B(\mathcal{H})) \to \mathbb{N} \bigcup \{\infty\}$ dada por $d([p]_\mathcal{D}) = \tau(p)$ está bem definida e é um isomorfismo de semigrupos abelianos.

Como o grupo de Grothendieck de $\mathbb{N} \bigcup \{\infty\}$ é trivial, segue que $K_0(B(\mathcal{H})) = 0$ □

Sejam A e B duas C^*-álgebras com unidade e seja φ um $*$-homomorfismo de A em B. Para cada $n \in \mathbb{N}^*$, considere o $*$-homomorfismo φ_n da Definição 2.1.3. Vamos chamar também de φ a aplicação de $\mathcal{P}_\infty(A)$ em $\mathcal{P}_\infty(B)$ definida como se segue: dado $p \in \mathcal{P}_\infty(A)$, temos que $p \in \mathcal{P}_n(A)$ para algum $n \in \mathbb{N}^*$, assim $\varphi(p) := \varphi_n(p)$. Com isso, seja $\nu : \mathcal{P}_\infty(A) \to K_0(B)$ dada por $\nu(p) = [\varphi(p)]_0$, para cada $p \in \mathcal{P}_\infty(A)$. Segue da Proposição 2.2.3 que existe um único homomorfismo $K_0(\varphi) : K_0(A) \to K_0(B)$ tal que

$$K_0(\varphi)([p]_0) = [\varphi(p)]_0, \ \forall p \in \mathcal{P}_\infty(A).$$

Proposição 2.2.6. *Seja A uma C^*-álgebra com unidade. Então,*

(i) $K_0(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{K_0(A)}$.

(ii) Se B e C também são C^*-álgebras com unidade e $\varphi : A \to B$ e $\psi : B \to C$ são $*$-homomorfismos, então $K_0(\psi \circ \varphi) = K_0(\psi) \circ K_0(\varphi)$.

Isto é, K_0 é um funtor da categoria das C^*-álgebras com unidade na categoria dos grupos abelianos.

Definição 2.2.7. *Seja A uma C^*-álgebra sem unidade e considere a seqüência exata que cinde dada em (2.6), página 58. Definimos*

$$K_0(A) := \mathrm{Ker}(K_0(\pi)).$$

Teorema 2.2.8. *Seja A uma C^*-álgebra.*

(i) Se A é uma C^*-álgebra com unidade, como a seqüência dada em (2.6) na página 58 é exata, segue que $K_0(A) \cong \mathrm{Im}(\iota) = \mathrm{Ker}(\pi)$, isto é, a Definição 2.2.7 generaliza a definição de $K_0(A)$ para A com unidade.

(ii) Para cada $p \in \mathcal{P}_\infty(\widetilde{A})$, como $p \in \mathcal{P}_n(\widetilde{A})$ para algum $n \in \mathbb{N}^*$, defina $s(p) = \lambda_n \circ \pi_n$, sendo $\lambda_n : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\widetilde{A})$ e $\pi_n : \mathcal{M}_n(\widetilde{A}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ os $*$-homomorfismos correpondentes a λ e π, no sentido da Definição 2.1.3. Com isso, pode-se provar que

$$K_0(A) = \{[p]_0 - [s(p)]_0 : p \in \mathcal{P}_\infty(\widetilde{A})\}.$$

(iii) A Proposição 2.2.6 também vale para C^*-álgebras sem unidade, isto é, K_0 é um funtor.

(iv) Se B também é uma C^*-álgebra e $\varphi, \psi : A \to B$ são $*$-homomorfismos homotópicos, então $K_0(\varphi) = K_0(\psi)$. E se A e B são C^*-álgebras homotopicamente equivalentes, então $K_0(A) = K_0(B)$.

(v) K_0 é um funtor exato que cinde. Isto é, se

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \underset{\lambda}{\overset{\psi}{\rightleftarrows}} B \longrightarrow 0$$

é uma seqüência exata que cinde de C^*-álgebras, então

$$0 \longrightarrow K_0(I) \xrightarrow{K_0(\varphi)} K_0(A) \underset{K_0(\lambda)}{\overset{K_0(\psi)}{\rightleftarrows}} K_0(B) \longrightarrow 0$$

é uma seqüência exata que cinde de grupos abelianos.

No Teorema a seguir veremos que o grupo K_0 de uma C^*-álgebra A é isomorfo ao grupo K_0 de $\mathcal{M}_n(A)$, para qualquer $n \in \mathbb{N}^*$. Fazendo o limite indutivo dessas álgebras de matrizes e usando a continuidade do K_0, que será enunciada mais adiante, obteremos a estabilidade do K_0 no fim desta Seção.

Teorema 2.2.9. *Seja A uma C^*-álgebra com unidade e seja $n \in \mathbb{N}^*$. Então $K_0(A)$ é isomorfo a $K_0(\mathcal{M}_n(A))$. Mais especificamente, o $*$-homomorfismo*

$$\begin{array}{rccc} \lambda_{n,A}: & A & \to & \mathcal{M}_n(A) \\ & a & \mapsto & \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

induz um isomorfismo de grupos $K_0(\lambda_{n,A}) : K_0(A) \to K_0(\mathcal{M}_n(A))$.

Demonstração. Vamos provar o Teorema construindo a inversa de $K_0(\lambda_{n,A})$.

Para cada $k \in \mathbb{N}^*$, considere a aplicação $\gamma_{n,k} : \mathcal{M}_k(\mathcal{M}_n(A)) \to \mathcal{M}_{kn}(A)$ definida como se segue: dado $a \in \mathcal{M}_k(\mathcal{M}_n(A))$, então a é da forma

$$a = \begin{pmatrix} a(1,1) & \dots & a(1,k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a(k,1) & \dots & a(k,k) \end{pmatrix},$$

em que cada $a(l,m)$, $1 \leq l, m \leq k$ é uma matriz $n \times n$, cujo elemento da linha i e coluna j

denotaremos por $a(l,m)_{ij}$, $1 \leq i,j \leq n$. Definiremos então

$$\gamma_{n,k}(a) = \begin{pmatrix} a(1,1)_{11} & \dots & a(1,1)_{1n} & & a(1,k)_{11} & \dots & a(1,k)_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \dots\ \dots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a(1,1)_{n1} & \dots & a(1,1)_{nn} & & a(1,k)_{n1} & \dots & a(1,k)_{nn} \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ a(k,1)_{11} & \dots & a(k,1)_{1n} & & a(k,k)_{11} & \dots & a(k,k)_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \dots\ \dots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a(k,1)_{n1} & \dots & a(k,1)_{nn} & & a(k,k)_{n1} & \dots & a(k,k)_{nn} \end{pmatrix}.$$

Note que evidentemente $\gamma_{n,k}$ é um $*$-isomorfismo.

Defina agora a aplicação $\gamma_n : \mathcal{P}_\infty(\mathcal{M}_n(A)) \to K_0(A)$ por $\gamma_n(p) = [\gamma_{n,k}(p)]_0$, qualquer que seja $p \in \mathcal{P}_k(\mathcal{M}_n(A))$, para cada $k \in \mathbb{N}^*$. Segue da Proposição 2.2.3 que existe um único homomorfismo de grupos $\alpha : K_0(\mathcal{M}_n(A)) \to K_0(A)$ tal que $\alpha([p]_0) = [\gamma_{n,k}(p)]_0$, para cada $p \in \mathcal{P}_k(\mathcal{M}_n(A))$.

Afirmamos que α é homomorfismo inverso de $K_0(\lambda_{n,A})$. De fato, seja $\{e_1, ..., e_{kn}\}$ a base canônica de $\mathbb{C}^{kn}$, e seja u um unitário de $\mathcal{M}_{kn}(\mathbb{C})$, sendo $\mathcal{M}_{kn}(\mathbb{C}) \subset \mathcal{M}_{kn}(A)$ via inclusão canônica, tal que

$$ue_{ij} = e_{n(i-1)+j}, \ i = 1, ..., k \text{ e } j = 1, ..., n.$$

Denotando por $(\lambda_{n,A})_k : \mathcal{M}_k(A) \to \mathcal{M}_k(\mathcal{M}_n(A))$ o $*$-homomorfismo correspondente à $\lambda_{n,A}$, note que, se

$$p = \begin{pmatrix} p_{11} & \dots & p_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{k1} & \dots & p_{kk} \end{pmatrix} \in \mathcal{P}_k(A),$$

então

$$\gamma_{n,k}((\lambda_{n,A})_k(p)) = \begin{pmatrix} p_{11} & \dots & 0 & & p_{1k} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \dots\ \dots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & & 0 & \dots & 0 \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ p_{k1} & \dots & 0 & & p_{kk} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \dots\ \dots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

logo

$$u^*\gamma_{n,k}((\lambda_{n,A})_k(p))u = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1k} & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & 0 \\ p_{k1} & \cdots & p_{kk} & & \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ & 0 & & \cdots & 0 \end{pmatrix} = p \oplus 0_{(n-1)k},$$

segue que

$$p \sim_0 u^*\gamma_{n,k}((\lambda_{n,A})_k(p))u \sim_0 \gamma_{n,k}((\lambda_{n,A})_k(p)),$$

e portanto

$$[p]_0 = [\gamma_{n,k}((\lambda_{n,A})_k(p))]_0 = \alpha([(\lambda_{n,A})_k(p)]_0) = (\alpha \circ K_0(\lambda_{n,A}))([p]_0).$$

Como $p \in \mathcal{P}_k(A)$ foi escolhido arbitrariamente, e a igualdade acima vale para todo $k \in \mathbb{N}^*$, segue que

$$\alpha \circ K_0(\lambda_{n,A}) = \mathrm{id}_{K_0(A)}.$$

Por outro lado, note que, se $p \in \mathcal{P}_k(\mathcal{M}_n(A))$, então

$$(\lambda_{n,A})_{kn}(\gamma_{n,k}(p)) = p \oplus 0_{n-1} \sim_0 p,$$

e daí segue que

$$K_0(\lambda_{n,A}) \circ \alpha = \mathrm{id}_{K_0(A)}.$$

□

Corolário 2.2.10. *$K_0(A)$ é isomorfo a $K_0(\mathcal{M}_n(A))$, para qualquer C^*-álgebra A.*

Demonstração. Seja A uma C^*-álgebra sem unidade e sejam π e ι as aplicações da seqüência 2.6 na página 58 e sejam $\pi_n : \mathcal{M}_n(\widetilde{A}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ e $\iota_n : \mathcal{M}_n(A) \to \mathcal{M}_n(\widetilde{A})$ as aplicações correspondentes no sentido da Definição 2.1.3. Sejam $\lambda_{n,A}$, $\lambda_{n,\widetilde{A}}$ e $\lambda_{n,\mathbb{C}}$ aplicações como no Teorema 2.2.9, então o diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\lambda_{n,A}"'] & \widetilde{A} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\lambda_{n,\widetilde{A}}"'] & \mathbb{C} \arrow[r] \arrow[d, "\lambda_{n,\mathbb{C}}"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathcal{M}_n(A) \arrow[r, "\iota_n"] & \mathcal{M}_n(\widetilde{A}) \arrow[r, "\pi_n"] & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

comuta e suas linhas são seqüências exatas curtas que cindem de C^*-álgebras. Segue da funtoriedade do K_0 e do item v do Teorema 2.2.8 que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K_0(A) \arrow[r, "K_0(\iota)"] \arrow[d, "K_0(\lambda_{n,A})"'] & K_0(\widetilde{A}) \arrow[r, "K_0(\pi)"] \arrow[d, "K_0(\lambda_{n,\widetilde{A}})"'] & K_0(\mathbb{C}) \arrow[r] \arrow[d, "K_0(\lambda_{n,\mathbb{C}})"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & K_0(\mathcal{M}_n(A)) \arrow[r, "K_0(\iota_n)"] & K_0(\mathcal{M}_n(\widetilde{A})) \arrow[r, "K_0(\pi_n)"] & K_0(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

também comuta e suas linhas são seqüências exatas que cindem de grupos abelianos. Segue do Teorema 2.2.9 que $K_0(\lambda_{n,\widetilde{A}})$ e $K_0(\lambda_{n,\mathbb{C}})$ são isomorfismos. Se $g \in K_0(A)$ é tal que $K_0(\lambda_{n,A})(g) = 0$, então $K_{(}\iota_n)(K_0(\lambda_{n,A})(g)) = 0$, daí $K_0(\lambda_{n,\widetilde{A}})(K_0(\iota)(g)) = 0$, logo $g = 0$ e portanto $K_0(\lambda_{n,A})$ é injetivo. Por outro lado, se $h \in K_0(\mathcal{M}_n(A))$, então $K_0(\iota_n)(h) \in \operatorname{Ker}(\pi_n)$, daí $K_0(\lambda_{n,\widetilde{A}})^{-1}(K_0(\iota_n)(h)) \in \operatorname{Ker}(\pi) = \operatorname{Im}(K_0(\iota))$, portanto $K_0(\lambda_{n,A})$ é sobrejetivo. □

Corolário 2.2.11. *$K_0(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})) = \mathbb{Z}$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$.*

A Proposição a seguir ([15, Teorema 6.3.2]), conhecida como *continuidade do K_0*, será necessária para obtermos uma generalização do Teorema 2.2.9, com $A \otimes K(\mathcal{H})$ no lugar de $\mathcal{M}_n(A)$. Esta generalização é conhecida como *estabilidade do K_0*.

Proposição 2.2.12. *Para cada seqüência indutiva*

$$A_1 \xrightarrow{\varphi_1} A_2 \xrightarrow{\varphi_2} A_3 \xrightarrow{\varphi_3} \cdots.$$

de C^*-álgebras, $K_0(\varinjlim A_n)$ e $\varinjlim K_0(A_n)$ são isomorfos como grupos abelianos. E mais,

(i) $K_0(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_0(\mu_n)(K_0(A_n))$,

(ii) $\operatorname{Ker}(K_0(\mu_n)) = \bigcup_{m=n+1}^{\infty} \operatorname{Ker}(K_0(\varphi_{m,n}))$ *para cada* $n \in \mathbb{N}^*$.

Observação 2.2.13. *Considere agora a seqüência de C^*-álgebras*

$$A \xrightarrow{\varphi_1} \mathcal{M}_2(A) \xrightarrow{\varphi_2} \mathcal{M}_3(A) \xrightarrow{\varphi_3} \cdots,$$

sendo cada $*$-homomorfismo $\varphi_n : \mathcal{M}_n(A) \to \mathcal{M}_{n+1}(A)$ dado por

$$a \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Segue da Observação A.17 que podemos reescrever esta seqüência usando produtos tensoriais como

$$A \otimes \mathcal{M}_1(\mathbb{C}) \xrightarrow{\mathrm{id}_A \otimes \varphi_1} A \otimes \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \xrightarrow{\mathrm{id}_A \otimes \varphi_2} A \otimes \mathcal{M}_3(\mathbb{C}) \xrightarrow{\mathrm{id}_A \otimes \varphi_3} \cdots, \tag{2.7}$$

em que cada φ_n é agora a aplicação definida no Exemplo 2.1.11. Assim, o limite indutivo desta seqüência é $(A \otimes K(\mathcal{H}), \{\kappa_n\})$, sendo

$$\kappa_n = \mathrm{id}_A \otimes \mu_n : A \otimes \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to A \otimes K(\mathcal{H}),$$

em que μ_n a aplicação dada no Exemplo 2.1.11. A C^*-álgebra $A \otimes K(\mathcal{H})$ é chamada de estabilização de A. *Seja $\kappa = \kappa_1 = \mathrm{id}_A \otimes \mu_1$, e note que κ nos dá uma inclusão de $A \cong A \otimes \mathcal{M}_1(A)$ em $A \otimes K(\mathcal{H})$.*

Teorema 2.2.14 (Estabilidade do K_0). *Seja A uma C^*-álgebra e considere κ a aplicação definida na Observação 2.2.13. Então $K_0(\kappa) : K_0(A) \mapsto K_0(A \otimes K(\mathcal{H}))$ é um isomorfismo de grupos abelianos.*

Demonstração. Note que os $*$-homomorfismos de conexão

$$\mathrm{id}_A \otimes \varphi_{n,1} : A \otimes \mathcal{M}_1(\mathbb{C}) \to A \otimes \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

da seqüência dada em (2.7) coincidem com as aplicações $\lambda_{n,A}$ do Teorema 2.2.9, daí segue que $K_0(\mathrm{id}_A \otimes \varphi_{n,1}) : K_0(A) \to K_0(A \otimes \mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$ é um isomorfismo.

Seja g_0 um elemento de $K_0(A \otimes K(\mathcal{H}))$. Segue da Proposição 2.2.12(i) que $g_0 = K_0(\kappa_n)(g_1)$, para algum $n \in \mathbb{N}^*$ e algum $g_1 \in K_0(A \otimes \mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$. Entretanto, $g_1 = K_0(\mathrm{id}_A \otimes \varphi_{n,1})(g_2)$, para algum $g_2 \in K_0(A)$, e portanto

$$K_0(\kappa)(g_2) = K_0(\kappa_n \circ (\mathrm{id}_A \otimes \varphi_{n,1}))(g_2) = g_0,$$

e portanto $K_0(\kappa)$ é um homomorfismo sobrejetivo.

Suponha agora que g é um elemento de $K_0(A)$ tal que $K_0(\kappa)(g) = 0$. Segue da Proposição 2.2.12(ii) que $K_0(\mathrm{id}_A \otimes \varphi_{n,1})(g) = 0$ para algum $n \geq 2$, logo $g = 0$. Assim, obtemos que $K_0(\kappa)$ é também injetivo. Portanto, $K_0(\kappa)$ é um isomorfismo. □

Corolário 2.2.15. $K_0(K(\mathcal{H})) = K_0(\mathbb{C} \otimes K(\mathcal{H})) = \mathbb{Z}$.

Observação 2.2.16. *Sejam A uma C^*-álgebra com unidade, $p \in \mathcal{P}(A)$, $A \otimes K(\mathcal{H})$ a estabilização de A e $(\epsilon_n)_{n \geq 0}$ uma base ortonormal para $\mathcal{H}$. Denotando por E_{nn} o operador de $K(\mathcal{H})$ dado por*

$$E_{nn}(h) = < h, \epsilon_n > \epsilon_n, \ \forall h \in \mathcal{H},$$

note que, usando a identificação de A com $A \otimes \mathcal{M}_1(\mathbb{C})$ dada por $a \mapsto a \otimes 1$,

$$K_0(\kappa)([p]_0) = [\mathrm{id}_A \otimes \mu_1(p \otimes 1)]_0 = [p \otimes E_{00}]_0.$$

2.3 O funtor K_1

Descreveremos nesta Seção a construção do funtor K_1 entre a categoria das C^*-álgebras e a categoria dos grupos abelianos. Indicamos novamente [15] como referência básica para as demonstrações das propriedades deste funtor que enunciaremos em seguida.

Vamos denotar

$$\mathcal{U}_\infty(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}_n(A)$$

e definir a operação binária $\oplus : \mathcal{U}_\infty(A) \times \mathcal{U}_\infty(A) \to \mathcal{U}_\infty(A)$ dada por

$$u \oplus v = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} \in \mathcal{U}_{m+n}(A),$$

quando $u \in \mathcal{U}_m(A)$ e $v \in \mathcal{U}_n(A)$. Se $u \in \mathcal{U}_m(A)$ e $v \in \mathcal{U}_n(A)$, então para qualquer número natural $k \geq \text{máx}\{m, n\}$ os elementos $u \oplus 1_{k-m}$ e $v \oplus 1_{k-n}$ pertencem a $\mathcal{U}_k(A)$, sendo convencionado que $w \oplus 1_0 = w$ qualquer que seja $w \in \mathcal{U}_\infty(A)$.

Considere agora $u, v \in \mathcal{U}_\infty(A)$. Suponha que $u \in \mathcal{U}_m(A)$ e $v \in \mathcal{U}_n(A)$. Definimos a relação $\sim_1$, e denotamos $u \sim_1 v$, se existe $k \geq \text{máx}\{m, n\}$ tal que

$$u \oplus 1_{k-m} \sim_h v \oplus 1_{k-n},$$

em que a homotopia indicada se refere a um caminho de unitários em $\mathcal{M}_k(A)$.

É fácil ver que a relação $\sim_1$ é uma relação de equivalência associativa, simétrica e transitiva em $\mathcal{U}_\infty(A)$. Note que, por definição, se $u \in \mathcal{U}_\infty(A)$, então $u \sim_1 u \oplus 1_n$, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$. Pode-se provar que se $u, v \in \mathcal{U}_n(A)$, então

$$\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} uv & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} vu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}$$

em $\mathcal{U}_{2n}(A)$ (vide [15, Lema 2.1.5]). Segue que

$$uv \sim_1 vu \sim_1 u \oplus v,$$

quaisquer que sejam $u, v \in \mathcal{U}_\infty(A)$.

Definição 2.3.1 (O Grupo K_1). *Seja A uma C^*-álgebra.*

(a) Se A tem unidade, definimos

$$K_1(A) = \mathcal{U}_\infty(A) / \sim_1,$$

e denotamos por $[u]_1 \in K_1(A)$ a classe de equivalência de $u \in \mathcal{U}_\infty(A)$.

(b) Se A não tem unidade, definimos

$$K_1(A) = \mathcal{U}_\infty(\widetilde{A})/\sim_1,$$

e denotamos por $[u]_1 \in K_1(A)$ a classe de equivalência de $u \in \mathcal{U}_\infty(\widetilde{A})$.

Definimos a relação binária $+ : K_1(A) \times K_1(A) \to K_1(A)$ dada por $[u]_1 + [v]_1 = [u \oplus v]_1$.

Exemplo 2.3.2. $K_1(\mathbb{C}) = 0$.

Demonstração. Não é difícil provar que $\mathcal{U}_0(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})) = \mathcal{U}_n(\mathbb{C})$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$ (vide [15, Corolário 2.1.4]). Com isso, $K_1(\mathbb{C}) = \{[1]_1\} = 0$. □

Sejam A uma C^*-álgebra com unidade, $\widetilde{A}$ sua unitização e $f = 1_{\widetilde{A}} - 1_A$. Note que todo elemento de $\widetilde{A}$ pode ser escrito na forma

$$a + \alpha f,$$

em que $a \in A$ e $\alpha \in \mathbb{C}$. De fato, como

$$\widetilde{A} = \{a + \alpha 1_{\widetilde{A}} : a \in A \text{ e } \alpha \in \mathbb{C}\},$$

se $x \in \widetilde{A}$, então

$$x = a + \alpha 1_{\widetilde{A}} = a + \alpha 1_A + \alpha(1_{\widetilde{A}} - 1_A) = \underbrace{(a + \alpha 1_A)}_{\in A} + \alpha f.$$

Assim, seja $\mu : \widetilde{A} \to A$ a aplicação dada por $\mu(a + \alpha f) = a$, para cada $a \in A$ e $\alpha \in \mathbb{C}$. Note que μ é um $*$-homomorfismo que preserva unidade e que o $*$-homomorfismo $\mu_n : \mathcal{M}_n(\widetilde{A}) \to \mathcal{M}_n(A)$ também preserva unidade, para cada $n \in \mathbb{N}^*$. Com isso, obtemos uma aplicação de $\mathcal{U}_\infty(\widetilde{A})$ em $\mathcal{U}_\infty(A)$, que denotaremos também por μ, definida como se segue. Dado $u \in \mathcal{U}_\infty(\widetilde{A})$, como existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $u \in \mathcal{U}_n(\widetilde{A})$, definimos $\mu(u) = \mu_n(u)$.

A Proposição a seguir será apenas enunciada, uma demonstração pode ser encontrada em [11, Proposição 8.1.6].

Proposição 2.3.3. *Seja A uma C^*-álgebra com unidade. Então existe um isomorfismo $\rho : K_1(A) \to \mathcal{U}_\infty(A)/\sim_1$ que faz o diagrama*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{U}_\infty(\widetilde{A}) \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "{[\cdot]_1}"'] & \mathcal{U}_\infty(A) \arrow[d, "{[\cdot]_1}"] \\
K_1(\widetilde{A}) \arrow[r, "\rho"'] & K_1(A)
\end{tikzcd}$$

comutar.

Segue da Proposicao 2.3.3 que, se uma C^*-álgebra tem unidade, podemos reescrever o item (a) da definição 2.3.1 como

$$K_1(A) = \mathcal{U}_\infty(\widetilde{A})/\sim_1 .$$

Segue também que

$$K_1(\widetilde{A}) \cong K_1(A),$$

qualquer que seja a C^*-álgebra A.

Assim, dada uma C^*-álgebra A, se $u \in \mathcal{U}_n(\widetilde{A})$, então

$$0 = [1_n]_1 = [uu^*]_1 = [u \oplus u^*]_1 = [u]_1 + [u^*]_1,$$

temos que $(K_1(A), +)$ é um grupo abeliano, sendo

$$-[u]_1 = [u^*]_1,$$

com $u \in \mathcal{U}_\infty(A)$. Segue também que

$$K_1(A) = \{[u]_1 : u \in \mathcal{U}_\infty(\widetilde{A})\},$$

e que para $u, v \in \mathcal{U}_\infty(\widetilde{A})$, $[u]_1 = [v]_1$ se, e somente se, $u \sim_1 v$.

A Proposição a seguir, conhecida como *propriedade universal do* K_1, nos dará em seguida que K_1 é de fato um funtor.

Proposição 2.3.4. *Seja A uma C^*-álgebra, seja G um grupo Abeliano e seja $\nu : \mathcal{U}_\infty(\widetilde{A}) \to G$ uma aplicação com as seguintes propriedades:*

(i) $\nu(u \oplus v) = \nu(u) + \nu(v)$, *quaisquer que sejam* $u, v \in \mathcal{U}_\infty(\widetilde{A})$,

(ii) $\nu(e) = 0$, *sendo e a unidade de $\mathcal{U}_n(\widetilde{A})$, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}^*$,*

(iii) se $u, v \in \mathcal{U}_n(\widetilde{A})$ são homotopicamente equivalentes em $\mathcal{U}_n(\widetilde{A})$, então $\nu(u) = \nu(v)$, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}^*$.

Então existe um único homomorfismo de grupos $\alpha : K_1(A) \to G$ que faz o diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{U}_\infty(\widetilde{A}) \arrow[d, "{[\cdot]_1}"'] \arrow[dr, "\nu"] & \\ K_1(A) \arrow[r, "\alpha"'] & G \end{tikzcd}$$

comutar.

Sejam as C^*-álgebras A e B e seja $\varphi : A \to B$ um $*$-homomorfismo. Segue da Proposição 2.1.13 que φ se estende de maneira única ao $*$-homomorfismo

$$\begin{array}{rccc} \widetilde{\varphi}: & \widetilde{A} & \to & \widetilde{B} \\ & a + \alpha 1_{\widetilde{A}} & \mapsto & \varphi(a) + \alpha 1_{\widetilde{B}}. \end{array}$$

Segue da Definição 2.1.3 que, para cada $n \in \mathbb{N}^*$, $\widetilde{\varphi}$ se estende ao $*$-homomorfismo $\widetilde{\varphi}_n : \mathcal{M}_n(\widetilde{A}) \to \mathcal{M}_n(\widetilde{B})$ dado por $\widetilde{\varphi}_n(a_{ij}) = (\widetilde{\varphi}(a_{ij}))$, para cada $(a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\widetilde{A})$. Vamos denotar também por $\widetilde{\varphi}$ a aplicação $\widetilde{\varphi} : \mathcal{U}_\infty(\widetilde{A}) \to \mathcal{U}_\infty(\widetilde{B})$ dada por $\widetilde{\varphi}(u) = \widetilde{\varphi}_n(u)$, sendo u elemento de $\mathcal{U}_n(\widetilde{A})$. Defina $\nu : \mathcal{U}_\infty(\widetilde{A}) \to K_1(B)$ por $\nu(u) = [\widetilde{\varphi}(u)]_1$, qualquer que seja $u \in \mathcal{U}_\infty(\widetilde{A})$. É fácil verificar que a aplicação ν satisfaz as propriedades (i), (ii) e (iii) da Proposição 2.3.4, e portanto existe um único homomorfismo de grupos $K_1(\varphi) : K_1(A) \to K_1(B)$ tal que

$$K_1(\varphi)([u]_1) = [\widetilde{\varphi}(u)]_1, \ \forall u \in \mathcal{U}_\infty(\widetilde{A}).$$

Podemos então enunciar o seguinte resultado.

Proposição 2.3.5. *Seja A uma C^*-álgebra. Então,*

(i) $K_1(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{K_1(A)}$.

(ii) Se B e C também são C^*-álgebras com unidade e $\varphi : A \to B$ e $\psi : B \to C$ são $*$-homomorfismos, então $K_1(\psi \circ \varphi) = K_1(\psi) \circ K_1(\varphi)$.

Dessa forma, K_1 é um funtor da categoria das C^*-álgebras na categoria dos grupos abelianos. E mais, K_1 é um funtor exato que cinde.

Em particular, se A e B são C^*-álgebras com unidade, e $\varphi : A \to B$ é um $*$-homomorfismo que preserva unidade, então $K_1(\varphi)([u]_1) = [\varphi(u)]_1$, qualquer que seja $u \in \mathcal{U}_\infty(A)$.

Enunciamos no Teorema abaixo duas importantes propriedades do funtor K_1.

Teorema 2.3.6. *Seja A uma C^*-álgebra.*

(i) Se B também é uma C^*-álgebra e $\varphi, \psi : A \to B$ são $*$-homomorfismos homotópicos, então $K_1(\varphi) = K_1(\psi)$. E se A e B são C^*-álgebras homotopicamente equivalentes, então $K_1(A) = K_1(B)$.

(ii) K_1 é um funtor exato que cinde.

Seja a um elemento de uma C^*-álgebra A. Denotemos por $|a| = (a^*a)^{\frac{1}{2}}$. Note que, se A tem unidade e $a \in \mathrm{Inv}(A)$, então $|a| \in \mathrm{Inv}(A)$. De fato, é evidente que a^* e a^*a são inversíveis. Com isso, temos que $(a^*a)^{-\frac{1}{2}} = ((a^*a)^{-1})^{\frac{1}{2}}$ é o inverso de $|a|$.

A Proposição a seguir é importante para mostrarmos que poderíamos definir K_1 com inversíveis no lugar de unitários. Sua demonstração pode ser encontrada em [11, Proposição 2.1.8].

Proposição 2.3.7. *Seja A uma C^*-álgebra com unidade. A aplicação*

$$\begin{array}{rccc} \omega: & \mathrm{Inv}(A) & \rightarrow & \mathcal{U}(A) \\ & a & \mapsto & a|a|^{-1} \end{array}$$

é contínua. E mais:

(a) se $u \in \mathcal{U}(A)$, então $\omega(u) = u$.

(b) $\omega(a) \sim_h a$ em $\mathrm{Inv}(A)$, qualquer que seja $a \in \mathrm{Inv}(A)$.

Corolário 2.3.8. *Seja A é uma C^*-álgebra com unidade. Se $u, v \in \mathcal{U}(A)$ são homotopicamente equivalentes em $\mathrm{Inv}(A)$, então u e v também são homotopicamente equivalentes em $\mathcal{U}(A)$.*

Observação 2.3.9. *Seja A uma C^*-álgebra com unidade e seja*

$$\mathrm{Inv}_\infty(\widetilde{A}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{Inv}_n(\widetilde{A}).$$

Segue da Proposição 2.3.7 e do Corolário 2.3.8 que podemos estender a aplicação $[\,\cdot\,]_1 : \mathcal{U}_\infty(\widetilde{A}) \rightarrow K_1(A)$ para uma aplicação

$$[\,\cdot\,]_1 : \mathrm{Inv}_\infty(\widetilde{A}) \rightarrow K_1(A).$$

dada por $[a]_1 = [u]_1$, em que $a \in \mathrm{Inv}_n(\widetilde{A}) \subset \mathrm{Inv}_\infty(\widetilde{A})$ e u é qualquer unitário de $\mathcal{U}_n(\widetilde{A})$ que satisfaça $a \sim_h u$ em $\mathrm{Inv}_n(\widetilde{A})$. Segue da Proposição 2.3.7 que um unitário que satisfaz essa condição pode ser obtido tomando $u = a(a^*a)^{-\frac{1}{2}}$.

No Lema a seguir, $1_{m,X}$ denota o elemento

$$\begin{pmatrix} 1_X & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1_X \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_m(X),$$

em que $m \in \mathbb{N}^*$ e X é uma C^*-álgebra qualquer.

Lema 2.3.10. *Sejam A e B C^*-álgebras com unidade. Seja $\varphi : A \to B$ um $*$-homomorfismo e, para cada $n \in \mathbb{N}^*$, seja $\varphi_n : \mathcal{M}_n(A) \to \mathcal{M}_n(B)$ o $*$-homomorfismo correspondente no sentido da Definição 2.1.3. Seja $u \in \mathcal{U}_\infty(A)$ e suponha que $u \in \mathcal{U}_n(A)$ para algum $n \in \mathbb{N}^*$. Então*

$$\phi([u]_1) = [\varphi_n(u) + 1_{n,B} - \varphi_n(1_{n,A})]_1$$

define um homomorfismo $\phi : K_1(A) \to K_1(B)$ de grupos abelianos.

Demonstração. Vamos mostrar inicialmente que ϕ está bem definido. Dado $u \in \mathcal{U}_n(A)$, temos

$$\begin{aligned}
&(\varphi_n(u) + 1_{n,B} - \varphi_n(1_{n,A}))^*(\varphi_n(u) + 1_{n,B} - \varphi_n(1_{n,A})) \\
= \;& \varphi_n(1_{n,A}) + \varphi_n(u) - \varphi_n(u) + \varphi_n(u)^* + 1_{n,B} \\
& -\varphi_n(1_{n,A}) - \varphi_n(u)^* - \varphi_n(1_{n,A}) + \varphi_n(1_{n,A}) = 1_{n,B},
\end{aligned}$$

assim como $(\varphi_n(u) + 1_{n,B} - \varphi_n(1_{n,A})) \in \mathcal{U}_n(B)$. E se $u, v \in \mathcal{U}_n(A)$ e $u_t : [0;1] \mapsto \mathcal{M}_n(A)$ é um caminho contínuo de unitários entre u e v, então, como φ_n é norma-decrescente,

$$(\varphi_n(u_t) + 1_{n,B} - \varphi_n(1_{n,A})) : [0;1] \to \mathcal{M}_n(B)$$

é um caminho contínuo de unitários que liga

$$(\varphi_n(u) + 1_{n,B} - \varphi_n(1_{n,A})) \quad \text{a} \quad (\varphi_n(v) + 1_{n,B} - \varphi_n(1_{n,A})).$$

Portanto, ϕ está bem definida.

Basta agora mostrar que $\phi([u]_1 + [v]_1) = \phi([u]_1) + \phi([v]_1)$ quaisquer que sejam $u, v \in \mathcal{U}_\infty(A)$. De fato, se $u, v \in \mathcal{U}_\infty(A)$, então existem $m, n \in \mathbb{N}^*$ tais que $u \in \mathcal{U}_m(A)$ e $v \in \mathcal{U}_n(A)$. Daí

$$\begin{aligned}
\phi([u]_1 + [v]_1) &= \phi([u \oplus v]_1) = [\varphi_{m+n}(u \oplus v) + 1_{m+n,B} - \varphi_{m+n}(1_{m+n,A})]_1 \\
&= [\varphi_m(u) \oplus \varphi_n(v) + 1_{m,B} \oplus 1_{n,B} - \varphi_m(1_{m,A}) \oplus \varphi_n(1_{n,A})]_1 \\
&= [(\varphi_m(u) + 1_{m,B} - \varphi_m(1_{m,A})) \oplus (\varphi_n(v) + 1_{n,B} - \varphi_n(1_{n,A}))]_1 \\
&= [\varphi_m(u) + 1_{m,B} - \varphi_m(1_{m,A}))]_1 + [\varphi_n(v) + 1_{n,B} - \varphi_n(1_{n,A})]_1 \\
&= \phi([u]_1) + \phi([v]_1).
\end{aligned}$$

□

Note no Lema 2.3.10 que, se φ é um $*$-homomorfismo que preserva unidade, então ϕ coincide com o homomorfismo natural $K_1(\varphi) : K_1(A) \to K_1(B)$ dado por $K_1(\varphi)([u]_1) = [\varphi_n(u)]_1$, para todo $u \in \mathcal{U}_n(A) \subset \mathcal{U}_\infty(A)$. Vamos então denotar o homomorfismo ϕ do Lema 2.3.10 por $K_1(\varphi)$, para todo $*$-homomorfismo $\varphi : A \to B$.

Teorema 2.3.11. *Seja A uma C^*-álgebra com unidade e seja $n \in \mathbb{N}^*$. Então $K_1(A)$ é isomorfo a $K_1(\mathcal{M}_n(A))$. Mais especificamente, $*$-homomorfismo*

$$\begin{array}{rccl} \lambda_{n,A}: & A & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(A) \\ & a & \longmapsto & \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

induz um isomorfismo de grupos $K_1(\lambda_{n,A}) : K_1(A) \rightarrow K_1(\mathcal{M}_n(A))$.

Demonstração. Seja $K_1(\lambda_{n,A}) : K_1(A) \rightarrow K_1(\mathcal{M}_n(A))$ o homomorfismo dado no Lema 2.3.10. Vamos mostrar que $K_1(\lambda_{n,A})$ é um isomorfismo. Seja $v \in \mathcal{U}_\infty(A)$. Então existe $k \in \mathbb{N}^*$ tal que $v \in \mathcal{U}_k(A)$, logo v se escreve como

$$v = \begin{pmatrix} v_{11} & \dots & v_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{k1} & \dots & v_{kk} \end{pmatrix}.$$

Sejam $\gamma_{n,k} : \mathcal{M}_k(\mathcal{M}_n(A)) \rightarrow \mathcal{M}_{kn}(A)$ o $*$-isomorfismo e u o unitário de $\mathcal{M}_{kn}(\mathbb{C}) \subset \mathcal{M}_{kn}(A)$ definidos na demonstração do Teorema 2.2.9.

Note que

$$\begin{aligned} & u^*\left(\gamma_{n,k}\left((\lambda_{n,A})_k(v) + 1_{k,\mathcal{M}_n(A)} - (\lambda_{n,A})_k(1_{k,A})\right)\right)u \\ = \; & u^* \begin{pmatrix} v_{11} & \dots & 0 & & v_{1k} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \dots\;\dots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1_A & & 0 & \dots & 0 \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ v_{k1} & \dots & 0 & & v_{kk} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \dots\;\dots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & & 0 & \dots & 1_A \end{pmatrix} u = \begin{pmatrix} v_{11} & \dots & v_{1k} & & & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ v_{k1} & \dots & v_{kk} & & & & \\ & \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ & \vdots & & & 1_A & & \vdots \\ & \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ & 0 & & \dots & & & 1_A \end{pmatrix} \\ = \; & v \oplus 1_{k(n-1),A}. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
&\left[u^*\left(\gamma_{n,k}\left((\lambda_{n,A})_k(v) + 1_{k,\mathcal{M}_n(A)} - (\lambda_{n,A})_k(1_{k,A})\right)\right)u\right]_1 \\
= \ & [u^*]_1 + \left[\gamma_{n,k}\left((\lambda_{n,A})_k(v) + 1_{k,\mathcal{M}_n(A)} - (\lambda_{n,A})_k(1_{k,A})\right)\right]_1 + [u]_1 \\
= \ & -[u]_1 + K_1(\gamma_{n,k})\Big([(\lambda_{n,A})_k(v) + 1_{k,\mathcal{M}_n(A)} - (\lambda_{n,A})_k(1_{k,A})]_1\Big) + [u]_1 \\
= \ & [(\lambda_{n,A})_k(v) + 1_{k,\mathcal{M}_n(A)} - (\lambda_{n,A})_k(1_{k,A})]_1 \\
= \ & K_1(\lambda_{n,A})([v]_1),
\end{aligned}$$

dado que $K_1(\gamma_{n,k})$ é um isomorfismo, segue que

$$[v]_1 = [v \oplus 1_{k(n-1),A}]_1 = K_1(\lambda_{n,A})([v]_1).$$

Portanto, $K_1(\lambda_{n,A})$ é um isomorfismo. $\square$

Corolário 2.3.12. $K_1(\mathbb{C}) = 0$.

A Proposição a seguir, conhecida como *continuidade do* K_1, é análoga à Proposição 2.2.12 e também neste caso será necessária para generalizarmos o Teorema 2.3.11, substituindo $\mathcal{M}_n(A)$ por $A \otimes K(\mathcal{H})$. Esta generalização é conhecida como *estabilidade do* K_1.

Proposição 2.3.13. *Seja*

$$A_1 \xrightarrow{\varphi_1} A_2 \xrightarrow{\varphi_2} A_3 \xrightarrow{\varphi_3} \cdots,$$

uma seqüência indutiva de C^*-álgebras com limite indutivo $(A, \{\mu_n\})$, e seja $(G, \{\beta_n\})$ o limite indutivo da seqüência

$$K_1(A_1) \xrightarrow{K_1(\varphi_1)} K_1(A_2) \xrightarrow{K_1(\varphi_2)} K_1(A_3) \xrightarrow{K_1(\varphi_3)} \cdots.$$

Então existe um isomorfismo $\gamma : G \to K_1(A)$ que satisfaz $\gamma \circ \beta_n = K_1(\mu_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}^*$. E mais,

(i) $K_1(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_1(\mu_n)(K_1(A_n))$,

(ii) $\operatorname{Ker}(K_1(\mu_n)) = \bigcup_{m=n+1}^{\infty} \operatorname{Ker}(K_1(\varphi_{m,n}))$ *para cada* $n \in \mathbb{N}^*$.

Teorema 2.3.14 (Estabilidade do K_1). *Seja A uma C^*-álgebra com unidade e considere κ a aplicação definida na Observação 2.2.13. Então $K_1(\kappa) : K_1(A) \mapsto K_1(A \otimes K(\mathcal{H}))$ é um isomorfismo de grupos abelianos.*

Demonstração. Como $A \otimes K(\mathcal{H})$ é uma C^*-álgebra sem unidade, segue que, para cada $n \in \mathbb{N}^*$, $K_1(\kappa_n) : K_1(A \widetilde{\otimes \mathcal{M}}_n(\mathbb{C})) \to K_1(A \otimes K(\mathcal{H}))$ é dado por $K_1(\kappa_n)([u]_1) = [\widetilde{\kappa_n}(u)]$, para cada $u \in \mathcal{U}_\infty(A \otimes \mathcal{M}_n(A))$, em que

$$\widetilde{\kappa_n} : A \otimes \widetilde{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})} \to A \otimes \widetilde{K(\mathcal{H})}$$

é o $*$-homomorfismo dado por

$$\widetilde{\kappa_n}\left((a_{ij}) + \alpha 1_{A \otimes \widetilde{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}}\right) = \kappa_n(a_{ij}) + \alpha 1_{A \otimes \widetilde{K(\mathcal{H})}}.$$

Seja $\rho : K_1(A \otimes \widetilde{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}) \to K_1(A \otimes \mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$ o isomorfismo definido na Proposição 2.3.3. Assim,

$$K_1(\kappa) = K_1(\kappa_1) = K_1(\kappa_n) \circ \rho^{-1} \circ K_1(\lambda_{n,A}),$$

dado que os $*$-homomorfismos de conexão $\mathrm{id}_A \otimes \varphi_{n,1} : A \otimes \mathcal{M}_1(\mathbb{C}) \to A \otimes \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ coincidem com as aplicações $\lambda_{n,A}$ do Teorema 2.3.11.

Seja g_0 um elemento de $K_1(A \otimes K(\mathcal{H}))$. Segue da Proposição 2.3.13(i) que $g_0 = K_1(\kappa_n)(g_1)$, para algum $n \in \mathbb{N}^*$ e algum $g_1 \in K_1(A \otimes \widetilde{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})})$. Entretanto, $g_1 = \rho^{-1} \circ K_1(\mathrm{id}_A \otimes \varphi_{n,1})(g_2)$, para algum $g_2 \in K_1(A)$, e portanto $K_1(\kappa)$ é um homomorfismo sobrejetivo.

Suponha agora que g é um elemento de $K_1(A)$ tal que $K_1(\kappa)(g) = 0$. Segue da Proposição 2.3.13(ii) que $K_1(\mathrm{id}_A \otimes \varphi_{n,1})(g) = 0$ para algum $n \geq 2$, logo $g = 0$. Assim, obtemos que $K_1(\kappa)$ é também injetivo. Portanto, $K_1(\kappa)$ é um isomorfismo. □

Corolário 2.3.15. $K_1(K(\mathcal{H})) = K_1(\mathbb{C} \otimes K(\mathcal{H})) = K_1(\mathbb{C}) = 0.$

Observação 2.3.16. *Seja A uma C^*-álgebra com unidade e seja $u \in \mathcal{U}(A)$. Suponha que $A \otimes K(\mathcal{H})$ é a estabilização de A e seja E_{nn} o operador de $K(\mathcal{H})$ definido na Observação 2.2.16.*

Note que

$$\begin{aligned} K_1(\kappa)([u]_1) &= (K_1(\kappa_1) \circ \rho^{-1})(K_1(\lambda_{1,A})([u]_1)) \\ &= K_1(\kappa_1)(\rho^{-1}([u]_1)) = K_1(\kappa_1)([u + 1_{\widetilde{A}} - 1_A]_1) \\ &= [u \otimes E_{00} + 1_{A \otimes \widetilde{K(\mathcal{H})}} - 1_A \otimes E_{00}]_1. \end{aligned}$$

2.4 A seqüência exata de seis termos

Nesta Seção descreveremos inicialmente a aplicação do índice. Definiremos em seguida a suspensão de uma C^*-álgebra, que é um funtor da categoria das C^*-álgebras nela mesma que nos dá uma conexão entre K_0 e K_1. Com isso, construiremos a aplicação exponencial, com a finalidade de obter a periodicidade de Bott, passando em seguida naturalmente para a seqüência exata (cíclica) de seis termos.

Definição 2.4.1. *Sejam as C^*-álgebras A e B e seja $\varphi : A \to B$ um $*$-homomorfismo sobrejetivo. Para cada elemento $b \in B$, dizemos que $a \in A$ é um* levantamento *de b se $\varphi(a) = b$.*

Note que, se $a \in A$ é um levantamento de um elemento $b \in B$, então o conjunto de todos os levantamentos de b é $a + \mathrm{Ker}(\varphi)$.

A finalidade do lema abaixo é garantir a existência de um determinado levantamento, que será essencial para o Teorema da Aplicação do Índice em seguida.

Lema 2.4.2. *Sejam A e B C^*-álgebras com unidade e seja $\psi : A \to B$ um $*$-homomorfismo sobrejetivo entre A e B que preserva unidade. Então, para cada unitário v de B existe uma isometria parcial w em $\mathcal{M}_2(A)$ tal que*

$$\psi_2(w) = \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Os dois resultados a seguir nos darão mais adiante uma das conxões verticais da seqüência exata de seis termos. Sua demonstração pode ser encontrada em [15, Proposição 9.2.2] e [15, Lemas 9.3.1 e 9.3.2].

Proposição 2.4.3. *Seja*

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\psi} A \xrightarrow{\phi} B \longrightarrow 0 \tag{2.8}$$

uma seqüência exata curta de C^*-álgebras. Sejam $n \leq m$ números naturais, $v \in \mathcal{U}_n(\widetilde{B})$ e w uma isometria parcial em $\mathcal{M}_m(\widetilde{A})$ tal que

$$\widetilde{\phi}_m(w) = \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & 0_{n-m} \end{pmatrix}.$$

Então, existem projeções $p, q \in \mathcal{P}_m(\widetilde{I})$ tais que

$$1_m - w^*w = \widetilde{\psi}_m(p) \text{ e } 1_m - ww^* = \widetilde{\psi}_m(q).$$

Teorema 2.4.4 (Aplicação do Índice). *Sejam v o unitário e p, q as projeções dadas na Proposição 2.4.3. Então existe um homomorfismo $\delta_1 : K_1(B) \to K_0(I)$ dado por*

$$\delta_1([v]_1) = [p]_0 - [q]_0,$$

satisfazendo:

(a) $\delta_1 \circ K_1(\phi) = 0$.

(b) $K_0(\psi) \circ \delta_1 = 0$.

(c) $\mathrm{Ker}(\delta_1) \subset \mathrm{Im}(K_1(\phi))$.

(d) $\mathrm{Ker}(K_0(\psi)) \subset \mathrm{Im}(K_1(\delta_1))$.

O homomorfismo δ_1 do Teorema 2.4.4 é chamado de *aplicação do índice*. Segue do Teorema 2.4.4 que, se a seqüência dada em 2.8 é uma seqüência exata curta de C^*-álgebras, então a seqüência de K-grupos

$$\begin{tikzcd} K_1(I) \arrow[r, "K_1(\varphi)"] & K_1(A) \arrow[r, "K_1(\psi)"] & K_1(B) \arrow[d, "\delta_1"] \\ K_0(B) & K_0(A) \arrow[l, "K_0(\psi)"'] & K_0(I) \arrow[l, "K_0(\varphi)"'] \end{tikzcd} \tag{2.9}$$

é exata.

Vamos agora construir a aplicação exponencial, que fecha o diagrama acima, para obtermos a seqüência exata de seis termos.

Definição 2.4.5. *Seja A uma C^*-álgebra. Definimos o* cone de A *como sendo a C^*-álgebra*

$$CA = \{f \in C([0;1], A) : f(0) = 0\}.$$

Proposição 2.4.6. *$K_0(CA) = K_1(CA) = 0$ para toda C^*-álgebra A.*

Demonstração. CA é homotopicamente equivalente à C^*-álgebra nula, no sentido da Definição 2.1.1ii. De fato, definindo a aplicação $\varphi_t : CA \to CA$ dada por $\varphi_t(f)(s) = f(st)$, para cada $f \in CA$ e para cada $s, t \in [0;1]$, obtemos $t \mapsto \varphi_t$ um caminho contínuo entre $\varphi_0 = 0$ e $\varphi_1 = \mathrm{id}_{CA}$. Logo,

$$CA \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} CA$$

é uma homotopia. Portanto, $K_0(CA) = K_0(0) = 0 = K_1(0) = K_1(CA)$. □

Definição 2.4.7. *Seja A uma C^*-álgebra. Definimos a* supensão de A *como sendo a C^*-álgebra*

$$SA = \{f \in C([0;1], A) : f(0) = f(1) = 0\} = C_0(]0;1[, A).$$

Dado $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, denotaremos $S^n A = S(S^{n-1}A)$.

Dado um $*$-homomorfismo $\varphi : A \to B$ entre duas C^*-álgebras A e B, podemos associar a φ a aplicação

$$S\varphi : SA \to SB$$

dada por

$$((S\varphi)(f))(t) = \varphi(f(t)), \ \forall t \in [0;1],$$

que claramente é um $*$-homomorfismo.

Se id_A denota a aplicação identidade de uma C^*-álgebra A, então

$$((S\mathrm{id}_A)(f))(t) = \mathrm{id}_A(f(t)) = f(t) = (\mathrm{id}_{SA}(f))(t), \ \forall t \in [0;1].$$

E se B, C são C^*-álgebras e $\varphi : A \to B$ e $\psi : B \to C$ são $*$-homomorfismos, então

$$\begin{aligned} ((S(\psi \circ \varphi))(f))(t) &= (\psi \circ \varphi)(f(t)) \\ &= \psi(\varphi(f(t))) \\ &= \psi((S\varphi(f))(t)) \\ &= (S\psi(S\varphi(f)))(t) \\ &= ((S\psi \circ S\varphi)(f))(t), \ \forall t \in [0;1]. \end{aligned}$$

Portanto, S é um funtor da categoria das C^*-álgebras nela mesma. Pode-se provar ainda que S é um funtor exato (vide [15, Proposição 10.1.2]).

Seja $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Vamos definir o funtor K_n da categoria das C^*-álgebras na categoria dos grupos abelianos por $K_n = K_{n-1} \circ S$. Mais especificamente, dada uma C^*-álgebra A, definimos

$$K_n(A) = K_{n-1}(SA),$$

e para cada $*$-homomorfismo $\varphi : A \to B$ entre C^*-álgebras A e B, definimos

$$K_n(\varphi) = K_{n-1}(S\varphi) : K_n(A) \to K_n(B).$$

Note que $K_n(A) = K_1(S^{n-1}A)$.

Observação 2.4.8. *Seja A uma C^*-álgebra. Seja $\iota : SA \to CA$ a inclusão canônica e seja $\pi : CA \to A$ o $*$-homomorfismo dado por $\pi(f) = f(1)$, qualquer que seja $f \in CA$. Note que a seqüência*

$$0 \longrightarrow SA \xrightarrow{\iota} CA \xrightarrow{\pi} A \longrightarrow 0,$$

é uma seqüência exata curta de C^*-álgebras.

O Teorema a seguir decorre do Teorema 2.4.4, da Proposição 2.4.6 e da Observação 2.4.8.

Teorema 2.4.9. *Os grupos $K_1(A)$ e $K_0(SA)$ são isomorfos para toda C^*-álgebra A. E mais, o isomorfismo que identifica $K_1(A)$ com $K_0(SA)$ é a aplicação do índice δ_1 aplicada à seqüência exata da Observação 2.4.8.*

Se SA é a suspensão de uma C^*-álgebra A, então a função

$$\begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{T} \\ t & \mapsto & e^{i2\pi t} \end{array}$$

identifica SA com a C^*-álgebra

$$\{f \in C(\mathbb{T}, A) : f(1) = 0\},$$

que também denotaremos por SA.

A aplicação

$$\begin{array}{rccc} \eta: & C(\mathbb{T}) \otimes A & \to & C(\mathbb{T}, A) \\ & f \otimes a & \mapsto & x \mapsto f(x)a \end{array}$$

é bilinear, multiplicativa e preserva adjunto. Segue da Proposição A.2 que esta aplicação se estende a uma aplicação linear de $C(\mathbb{T}) \otimes A$ em $C(\mathbb{T}, A)$. Claramente η é um $*$-isomorfismo. Temos assim uma identificação $C(\mathbb{T}) \otimes A \cong C(\mathbb{T}, A)$.

Proposição 2.4.10. *Seja A uma C^*-álgebra. Então*

$$K_i(C(\mathbb{T}) \otimes A) \cong K_0(A) \oplus K_1(A), \text{ para } i = 0, 1.$$

Demonstração. Seja ι_A a inclusão natural de SA em $C(\mathbb{T}, A)$ e seja

$$\begin{array}{rccc} \varphi_A: & C(\mathbb{T}, A) & \to & A \\ & f & \mapsto & f(1) \end{array}$$

e note que esta aplicação é um $*$-homomorfismo injetivo. Como

$$\mathrm{Ker}(\varphi_A) = \{f \in C(\mathbb{T}, A) : f(1) = 0\} = SA = \mathrm{Im}(\iota_A),$$

segue que a seqüência

$$0 \longrightarrow SA \xrightarrow{\iota_A} C(\mathbb{T}, A) \xrightarrow{\varphi_A} A \longrightarrow 0$$

é exata.

Note agora que o $*$-homomorfismo inclusão dado por

$$\begin{array}{rccc} \psi_A: & A & \to & C(\mathbb{T}, A) \\ & a & \mapsto & f \equiv a \end{array}$$

satisfaz $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_A$. Obtemos assim a seqüência exata que cinde

$$0 \longrightarrow SA \xrightarrow{\iota_A} C(\mathbb{T}, A) \underset{\psi_A}{\overset{\varphi_A}{\rightleftarrows}} A \longrightarrow 0$$

Segue do Teorema 2.2.8(v) e da Proposição 2.3.5 que

$$0 \longrightarrow K_i(SA) \xrightarrow{K_i(\iota_A)} K_i(C(\mathbb{T}, A)) \underset{K_i(\psi_A)}{\overset{K_i(\varphi_A)}{\rightleftarrows}} K_i(A) \longrightarrow 0$$

é uma seqüência exata que cinde de grupos abelianos, para $i = 0, 1$. Logo,

$$K_i(C(\mathbb{T}, A)) \cong K_i(SA) \oplus K_i(A) \cong K_{1-i}(A) \oplus K_i(A) = K_0(A) \oplus K_1(A),$$

para $i = 0, 1$.

Portanto,

$$K_i(C(\mathbb{T}) \otimes A) \cong K_i(C(\mathbb{T}, A)) \cong K_0(A) \oplus K_1(A),$$

para $i = 0, 1$. □

Corolário 2.4.11. *$K_0(C(\mathbb{T})) = K_1(C(\mathbb{T})) = \mathbb{Z}$. E mais, $[\mathbf{1}]_0$ é o gerador de $K_0(C(\mathbb{T}))$ e $[z]_1$ é o gerador de $K_1(C(\mathbb{T}))$, em que $\mathbf{1}, z$ são, respectivamente, as funções $\lambda \mapsto 1$ e $\lambda \mapsto \lambda$ de $C(\mathbb{T})$.*

Demonstração. Como $K_0(\mathbb{C}) = \mathbb{Z}$ e $K_1(\mathbb{C}) = 0$, segue que

$$K_i(C(\mathbb{T})) = K_0(\mathbb{C}) \oplus K_1(\mathbb{C}) = \mathbb{Z}.$$

Para mostrar a segunda afirmação, vamos reproduzir as seqüências exatas de K-grupos da demonstração da Proposição 2.4.10, aplicadas neste caso:

$$0 \longrightarrow K_1(\mathbb{C}) \xrightarrow{K_i(\iota_\mathbb{C})} K_0(C(\mathbb{T})) \underset{K_i(\psi_\mathbb{C})}{\overset{K_i(\varphi_\mathbb{C})}{\rightleftarrows}} K_0(\mathbb{C}) \longrightarrow 0$$

e

$$0 \longrightarrow K_0(\mathbb{C}) \xrightarrow{K_i(\iota_\mathbb{C})} K_1(C(\mathbb{T})) \underset{K_i(\psi_\mathbb{C})}{\overset{K_i(\varphi_\mathbb{C})}{\rightleftarrows}} K_1(\mathbb{C}) \longrightarrow 0.$$

O gerador de $K_0(\mathbb{C})$ é a classe das projeções de posto 1 (vide Exemplo 2.2.4), ou seja, a classe $[1]_0$. Assim, da primeira seqüência, obtemos que

$$K_0(\psi_\mathbb{C})([1]_0) = [\psi_\mathbb{C}(1)]_0 = [\mathbf{1}]_0.$$

Segue do Teorema 2.4.9 que, na segunda seqüência, o gerador de $K_1(C(\mathbb{T}))$ é $K_1(\iota) \circ \delta_1^{-1}([1]_0) = [z]_1$. □

Seja

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0$$

uma seqüência exata curta de C^*-álgebras. Definiremos a seguir a aplicação

$$\delta_n : K_{n+1}(B) \to K_n(I).$$

Como S é um funtor exato, o que implica que S^n também é um funtor exato, a seqüência

$$0 \longrightarrow S^n I \xrightarrow{S^n\varphi} S^n A \xrightarrow{S^n\psi} S^n B \longrightarrow 0 \tag{2.10}$$

é exata. Segue do Teorema 2.4.9 que existe um isomorfismo

$$\theta_{n-1} : K_n(I) = K_1(S^{n-1}I) \to K_0(S^n I).$$

Se $\overline{\delta_1} : K_1(S^n B) \to K_0(S^n I)$ denota a aplicação do índice associada à seqüência (2.10), definimos $\delta_{n+1} = \theta_{n-1}^{-1} \circ \overline{\delta_1}$.

Suponha que A tem unidade. Dados $n \in \mathbb{N}^*$ e $p \in \mathcal{P}_n(A)$, defina

$$\begin{array}{rccl} f_p : & \mathbb{T} & \to & \mathcal{U}_n(A) \\ & z & \mapsto & zp + (1_n - p). \end{array}$$

Identificando $\mathcal{M}_n(\widetilde{SA})$ com o conjunto das funções $f \in C(\mathbb{T}, \mathcal{M}_n(A))$ tais que $f(1) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}1_A)$, obtemos que $f_p \in \mathcal{U}_n(\widetilde{SA})$. Seja $\nu : \mathcal{P}_\infty(A) \to K_1(A)$ a aplicação dada por $\nu(p) = [f_p]_1$, para cada $p \in \mathcal{P}_\infty(A)$, ou seja, $p \in \mathcal{P}_n(A)$ para algum $n \in \mathbb{N}^*$. Note que esta aplicação satisfaz os itens (i), (ii) e (iii) da Proposição 2.2.3, vamos denotar por $\beta_A : K_0(A) \to K_1(SA)$ o homomorfismo dado por esta Proposição, que é único. A aplicação β_A é chamada de *aplicação de Bott*.

Se A é uma C^*-álgebra sem unidade, definimos $\beta_A : K_0(A) \to K_1(SA)$ como o único homomorfismo que faz o diagrama abaixo comutar.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K_0(A) \arrow[r] \arrow[d, "\beta_A"'] & K_0(\widetilde{A}) \arrow[d, "\beta_{\widetilde{A}}"'] & K_0(\mathbb{C}) \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d, "\beta_{\mathbb{C}}"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & K_1(SA) \arrow[r] & K_1(S\widetilde{A}) & K_1(S\mathbb{C}) \arrow[l] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \tag{2.11}$$

O Teorema a seguir é um resultado muito importante na K-teoria para C^*-álgebras porque implica, conforme esta enunciado no Corolário subseqüente, que os grupos K_n acima descritos se reduzem a K_0 para n par e K_1 para n impar. Para sua demonstração, indicamos [15, Capítulo 11].

Teorema 2.4.12 (Periodicidade de Bott). *A aplicação de Bott $\beta_A : K_0(A) \to K_1(SA)$ definida acima é um isomorfismo para qualquer C^*-álgebra A.*

Corolário 2.4.13. *Se $n \in \mathbb{N}$ e A é uma C^*-álgebra, então*

$$K_{n+2}(A) \cong K_n(A).$$

Demonstração. Para $n = 0$, este resultado segue imediatamente do Teorema 2.4.12. Para $n \geq 1$, temos

$$K_{n+2}(A) = K_{n+1}(SA) \cong K_{n-1}(SA) = K_n(A),$$

e assim o resultado geral segue por indução. □

Definição 2.4.14. *Seja*

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0$$

uma seqüência exata curta de C^*-álgebras. Defina a aplicação exponencial

$$\delta_0 : K_0(A) \to K_1(I)$$

como a composição das aplicações

$$K_0(B) \xrightarrow{\beta_B} K_2(B) \xrightarrow{\delta_2} K_1(I).$$

A aplicação exponencial completa a conexão vertical que estava faltando no diagrama dado em (2.9) na página 78. Assim, este diagrama passa a ser um importante instrumento na K-teoria e, para este trabalho, é fundamental. Enunciamos este resultado no Teorema abaixo, que está demonstrado em [15, Teorema 12.1.2].

Teorema 2.4.15 (Seqüência exata de seis termos). *Para cada seqüência exata curta de C^*-álgebras*

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0$$

a seqüência exata de seis termos associada

$$\begin{tikzcd}
K_0(I) \arrow[r, "K_0(\varphi)"] & K_0(A) \arrow[r, "K_0(\psi)"] & K_0(B) \arrow[d, "\delta_0"] \\
K_1(B) \arrow[u, "\delta_1"] & K_1(A) \arrow[l, "K_1(\psi)"] & K_1(I) \arrow[l, "K_1(\varphi)"]
\end{tikzcd} \tag{2.12}$$

é exata.

Capítulo 3

A Seqüência Exata de Pimsner-Voiculescu

Neste capítulo será provado o teorema principal deste trabalho. Na primeira seção será construída a extensão de Toeplitz associada a um produto cruzado. O objetivo da segunda é caracterizar os geradores de $K_1(A \times_\alpha \mathbb{Z})$, para A uma C^*-álgebra com unidade. Finalmente na terceira seção apresentaremos a prova do Teorema de Pimsner-Voiculescu e aplicaremos este teorema para determinar $K_0(\mathcal{A}_\theta)$ e $K_1(\mathcal{A}_\theta)$.

3.1 A extensão de Toeplitz associada a $A \times_\alpha \mathbb{Z}$

Considere a C^*-álgebra produto cruzado $B = A \times_\alpha \mathbb{Z}$, em que A é uma C^*-álgebra com unidade, α é um $*$-automorfismo de A e $\mathbb{Z}$ é o grupo dos inteiros, construída na Seção 1.4. Conforme foi provado no Teorema 1.4.12, B é $*$-isomorfa à C^*-álgebra universal gerada por A e o unitário u satisfazendo as relações dadas por $uAu^* = A$, apresentada no Exemplo 1.2.12.

Seja $C^*(S)$ a C^*-álgebra universal gerada por uma isometria não unitária S, apresentada no Exemplo 1.2.11, e seja $\mathcal{T}$ a álgebra de Toeplitz da Definição 1.3.29. Segue do Teorema 1.3.35 e da Proposição 1.2.6 que existe um $*$-isomorfismo

$$\phi : \mathcal{T} \to C^*(S)$$

tal que $\phi(U) = S$, em que $U = T_{\epsilon_1}$ é o *shift* unilateral.

Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert separável de dimensão infinita e seja $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma base ortonormal para $\mathcal{H}$. Dados $i, j \geq 0$, defina E_{ij} o operador de $B(\mathcal{H})$ dado por

$$E_{ij}(h) = \langle h, e_j \rangle e_i, \text{ para todo } h \in \mathcal{H}.$$

Observe que $E_{ij}^* = E_{ji}$ e que

$$E_{ij}E_{kl} = \begin{cases} 0 & \text{se } j \neq k \\ E_{il} & \text{se } j = k \end{cases}.$$

Claramente E_{ij} é um operador de posto finito, quaisquer que sejam $i, j \in \mathbb{N}$. Por outro lado, se F é um operador de posto finito de $\mathcal{H}$, então existem $x_1, ..., x_n$ e $y_1, ..., y_n$ elementos de $\mathcal{H}$ tais que

$$F(h) = \sum_{k=1}^{n} < h, y_k > x_k, \ \forall h \in \mathcal{H},$$

(Observação 1.1.13). Como $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma base para $\mathcal{H}$, segue que

$$x_k = \sum_{i\in\mathbb{N}} < x_k, e_i > e_i \quad \text{e} \quad y_k = \sum_{j\in\mathbb{N}} < y_k, e_j > e_j,$$

daí

$$\begin{aligned} F(h) &= \sum_{k=1}^{n} \left\langle h, \sum_{j\in\mathbb{N}} < y_k, e_j > e_j \right\rangle \left(\sum_{i\in\mathbb{N}} < x_k, e_i > e_i \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{i\in\mathbb{N}} < y_k, e_j >< h, e_j >< x_k, e_i > e_i \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{i\in\mathbb{N}} < y_k, e_j >< x_k, e_i > (< h, e_j > e_i) \\ &= \sum_{i\in\mathbb{N}} \sum_{j\in\mathbb{N}} \left(\sum_{k=1}^{n} < y_k, e_j >< x_k, e_i > \right) E_{ij}(h), \ \forall h \in \mathcal{H}, \end{aligned}$$

logo $F(\mathcal{H}) \subset \overline{span\{E_{ij} : i, j \in \mathbb{N}\}} \subset K(\mathcal{H})$, portanto $span\{E_{ij} : i, j \in \mathbb{N}\}$ é um conjunto denso em $K(\mathcal{H})$.

Seja H^2 o espaço de Hardy definido em 1.3.8. Conforme foi provado na Proposição 1.3.10, H^2 é um espaço de Hilbert e, se

$$\begin{aligned} \epsilon_n : \ \mathbb{T} &\to \mathbb{C} \\ \lambda &\mapsto \lambda^n, \end{aligned}$$

então $(\epsilon_n)_{n\geq 0}$ é uma base para H^2.

Dados $i, j \in \mathbb{N}$, denotanto por $\mathcal{E}_{ij}$ o operador de $K(H^2)$ dado por

$$\mathcal{E}_{ij}(f) =< f, \epsilon_j > \epsilon_i, \ \forall f \in H^2,$$

do que foi provado acima, temos que $span\{\mathcal{E}_{ij} : i, j \in \mathbb{N}\}$ é um conjunto denso em $K(H^2)$. Assim, a aplicação $\zeta : K(H^2) \to K(\mathcal{H})$ dada por $\zeta(\mathcal{E}_{ij}) = E_{ij}$ estabelece um $*$-isomorfismo entre $K(H^2)$ e $K(\mathcal{H})$. De fato, note que a aplicação $\mathcal{U} : H^2 \to \mathcal{H}$ definida nos elementos da base de H^2 por

$$\mathcal{U}(\epsilon_n) = e_n, \; \forall n \in \mathbb{N},$$

é uma transformação linear unitária entre os espaços de Hilbert H^2 e $\mathcal{H}$. Assim, se $i, j \in \mathbb{N}$, então

$$\begin{aligned} (\zeta(\mathcal{E}_{ij}))(h) &= E_{ij}(h) =< h, e_j > e_i =< h, \mathcal{U}(\epsilon_j) > \mathcal{U}(\epsilon_i) \\ &= < \mathcal{U}^*(h), \epsilon_j > \mathcal{U}(\epsilon_i) = \mathcal{U}(< \mathcal{U}^*(h), \epsilon_j > \epsilon_i) \\ &= \mathcal{U}(\mathcal{E}_{ij}(\mathcal{U}^*(h))) = (\mathcal{U} \circ \mathcal{E}_{ij} \circ \mathcal{U}^*)(h), \; \forall h \in \mathcal{H}, \end{aligned}$$

isto é,

$$\zeta(\mathcal{E}_{ij}) = \mathcal{U} \circ \mathcal{E}_{ij} \circ \mathcal{U}^*,$$

quaisquer que sejam $i, j \in \mathbb{N}$. Como $\mathcal{U}$ é unitário, segue que ζ é um $*$-isomorfismo.

Seja P a projeção de $C^*(S)$ dada por $I - SS^*$. Note que, como $S^*S = I$, temos que

$$S^*PS = S^*(I - SS^*)S = S^*S - S^*SS^*S = 0,$$

e portanto

$$S^{n*}PS^m = 0$$

quaisquer que sejam $m, n \in \mathbb{N}^*$.

Lema 3.1.1. *Sejam* $\iota : K(H^2) \to \mathcal{T}$ *a inclusão canônica e* $\varphi : K(\mathcal{H}) \to C^*(S)$ *a aplicação dada por* $\varphi(E_{ij}) = S^iPS^{*j}$. *Então o diagrama*

$$\begin{tikzcd} K(H^2) \arrow[r, "\iota"] & \mathcal{T} \arrow[d, "\phi"] \\ K(\mathcal{H}) \arrow[u, "\zeta^{-1}"] \arrow[r, "\varphi"] & C^*(S) \end{tikzcd}$$

é comutativo.

Demonstração. Note que, se $U = T_{\epsilon_1}$ é o *shift* unilateral de H^2, então

$$(I_{H^2} - UU^*)(\epsilon_n) = \begin{cases} \epsilon_0 & \text{se } n = 0 \\ 0 & \text{se } n \geq 1 \end{cases}.$$

Segue que $I_{H^2} - UU^* = \mathcal{E}_{00}$.

Como, dado $f \in H^2$, podemos escrever $f = \sum_{n\in\mathbb{N}} < f, \epsilon_n > \epsilon_n$, temos

$$U^m(f) = T_{\epsilon_m}(f) = \epsilon_m f = \sum_{n\in\mathbb{N}} < f, \epsilon_n > \epsilon_{n+m} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{E}_{(n+m)n}(f)$$

qualquer que seja $m \in \mathbb{N}^*$. Assim, dados $i, j \in \mathbb{N}^*$, temos

$$\mathcal{E}_{ij} = \mathcal{E}_{i0}\mathcal{E}_{00}\mathcal{E}_{0j} = \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{E}_{(k+i)k}\right) \mathcal{E}_{00} \left(\sum_{l\in\mathbb{N}} \mathcal{E}_{(l+j)l}\right)^* = \left(U^i\right) \mathcal{E}_{00} \left(U^j\right)^*.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \varphi(\iota(\zeta^{-1}(E_{ij}))) &= \varphi(\iota(\mathcal{E}_{ij})) = \varphi(\iota(U^i\mathcal{E}_{00}U^{j*})) = \varphi(U^i\mathcal{E}_{00}U^{j*}) \\ &= \varphi(U^i(I_{H^2} - UU^*)U^{*j}) = S^i(I - SS^*)S^{*j} = S^iPS^{*j} \end{aligned}$$

portanto o diagrama comuta. □

Proposição 3.1.2. *A aplicação $\varphi : K(\mathcal{H}) \to C^*(S)$ dada por*

$$\varphi\left(E_{ij}\right) = S^iPS^{*j}$$

é um $*$-homomorfismo injetivo.

Demonstração. Como as aplicações ϕ e ζ do diagrama do Lema 3.1.1 são $*$-isomorfismos e a inclusão ι é um $*$-homomorfismo injetivo, segue que φ é um $*$-isomorfismo injetivo de $K(\mathcal{H})$ em $C^*(S)$. □

Corolário 3.1.3. $C^*(S)/\varphi(K(\mathcal{H})) \cong C(\mathbb{T})$.

Demonstração. Conforme foi demonstrado na Proposição 1.3.33, $\mathcal{T}/K(H^2) \cong C(\mathbb{T})$. Como as flechas verticais do diagrama comutativo apresentado na demonstração do Lema 3.1.1 são $*$-isomorfismos, segue que

$$C^*(S)/\varphi(K(\mathcal{H})) \cong C(\mathbb{T}).$$

□

O Corolário a seguir decorre da Proposição 1.3.33 e do Corolário 3.1.3.

Corolário 3.1.4. *A seqüência*

$$0 \longrightarrow K(\mathcal{H}) \xrightarrow{\varphi} C^*(S) \xrightarrow{p} C(\mathbb{T}) \longrightarrow 0, \tag{3.1}$$

em que p é o $*$-homomorfismo dado por $p(S) = z : \lambda \mapsto \lambda$, é uma seqüência exata curta de C^*-álgebras.

Vamos agora tensorizar por $B = A \times_\alpha \mathbb{Z}$ cada C^*-álgebra da seqüência exata dada em (3.1) na página 87. Sobre produto tensorial de C^*-álgebras, vide o Apêndice A. Como $K(\mathcal{H})$, $C^*(S)$ e $C(\mathbb{T})$ são C^*-álgebras nucleares, (Corolários A.21, A.28 e A.23), segue da Proposição A.25 que

$$0 \longrightarrow B \otimes K(\mathcal{H}) \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\varphi} B \otimes C^*(S) \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes p} B \otimes C(\mathbb{T}) \longrightarrow 0 \tag{3.2}$$

é uma seqüência exata curta de C^*-álgebras.

Seja $\mathbf{T}(A, \alpha)$, ou simplesmente $\mathbf{T}$, a C^*-subálgebra de $B \otimes C^*(S)$ gerada por $A \otimes I$ e $u \otimes S$. Chamamos esta C^*-álgebra de *álgebra de Toeplitz associada ao C^*-sistema dinâmico* $\{A, \alpha\}$.

O objetivo dos próximos resultados desta seção é mostrar que $\mathbf{T}$ é uma extensão de $A \times_\alpha \mathbb{Z}$ por $A \otimes K(\mathcal{H})$.

Seja $J \subset \mathbf{T}$ o ideal bilateral fechado gerado por

$$Q = 1 \otimes I - (u \otimes S)(u \otimes S)^* = 1 \otimes P.$$

Proposição 3.1.5. *Existe um único $*$-homomorfismo $\psi : A \otimes K(\mathcal{H}) \to \mathbf{T}$ satisfazendo*

$$\psi(a \otimes E_{ij}) = (u \otimes S)^i (a \otimes P)(u \otimes S)^{*j} = u^i a u^{*j} \otimes \varphi(E_{ij}).$$

E mais, ψ é injetivo e $\psi(A \otimes K(\mathcal{H})) = J$.

Demonstração. Como $\alpha : a \mapsto uau^*$ é um $*$-automorfismo de A e φ é um $*$-homomorfismo injetivo (Proposição 3.1.2), seguem do Lema A.24 a existência, a unicidade e a injetividade do $*$-homomorfismo ψ satisfazendo

$$\psi(a \otimes E_{ij}) = u^i a u^{*j} \otimes \varphi(E_{ij}) = \alpha(a) \otimes \varphi(E_{ij}).$$

Como $K(\mathcal{H})$ é simples (Observação 1.3.31) e $E_{00} \in K(\mathcal{H})$, se $< E_{00} >$ denota o ideal bilateral fechado de $B(\mathcal{H})$ gerado por E_{00}, então $< E_{00} >= K(\mathcal{H})$. Logo, se $< 1_A \otimes E_{00} >$ denota o ideal bilateral fechado de $A \otimes K(\mathcal{H})$ gerado por $1_A \otimes E_{00}$, então $< 1_A \otimes E_{00} >= A \otimes K(\mathcal{H})$. Agora, como ψ é um $*$-homomorfismo injetivo, ψ é uma isometria, e então $\psi(A \otimes K(\mathcal{H}))$ é o ideal bilateral fechado de $\mathbf{T}$ gerado por $\psi(1 \otimes E_{00}) = 1 \otimes P = Q$. Portanto, $\psi(A \otimes K(\mathcal{H})) = J$.

□

Lema 3.1.6. $(B \otimes \varphi(K(\mathcal{H}))) \cap \mathbf{T} = J$.

Demonstração. Note que $J = \psi(A \otimes K(\mathcal{H})) \subset B \otimes \varphi(K(\mathcal{H})) \bigcap \mathbf{T}$, dado que

$$\psi(a \otimes E_{ij}) = u^i a u^{*j} \otimes \varphi(E_{ij}) = (u \otimes S)^i (a \otimes P)(u \otimes S)^{*j}.$$

Vamos mostrar a inclusão reversa. Se $V = S^k P S^{*l}$, com $k, l \in \mathbb{N}$, e $m \geq \text{máx}\{k, l\}$, então

$$\begin{aligned}
\varphi(E_{00} + \dots + E_{mm}) V \varphi(E_{00} + \dots + E_{mm}) &= \left(\sum_{i=0}^{m} S^i P S^{*i}\right) V \left(\sum_{j=0}^{m} S^j P S^{*j}\right) \\
= \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{m} S^i P S^{*j} S^k P S^{*l} S^j P S^{*j} &= S^k P S^{*l} = V.
\end{aligned}$$

Segue que, qualquer que seja $W \in span\{\varphi(E_{ij}) = S^i P S^{*j} : i, j \in \mathbb{N}\}$, temos

$$W = \varphi(E_{00} + \dots + E_{mm}) W \varphi(E_{00} + \dots + E_{mm}),$$

para m natural suficientemente grande. Como φ é injetivo e o conjunto dos operadores de posto finito é denso em $K(\mathcal{H})$, segue que $span\{\varphi(E_{ij}) = S^i P S^{*j} : i, j \in \mathbb{N}\}$ é denso em $\varphi(K(\mathcal{H}))$. Assim, se

$$W \in \varphi(K(\mathcal{H})) = \overline{span\{\varphi(E_{ij}) = S^i P S^{*j} : i, j \in \mathbb{N}\}},$$

então

$$\lim_{m \to \infty} \|W - \varphi(E_{00} + \dots + E_{mm}) W \varphi(E_{00} + \dots + E_{mm})\|\| = 0.$$

Logo, dado $y \in B \otimes \varphi(K(\mathcal{H}))$, temos

$$\lim_{m \to \infty} ||y - (1_B \otimes \varphi(E_{00} + \dots + E_{mm})) y (1_B \otimes \varphi(E_{00} + \dots + E_{mm}))|| = 0$$

e, se exigirmos também que $y \in \mathbf{T}$, como

$$1_B \otimes \varphi(E_{00} + \dots + E_{mm}) = \psi(1_A \otimes (E_{00} + \dots + E_{mm})) \in J,$$

concluímos que $y \in J$. $\square$

Proposição 3.1.7. *O quociente* $\mathbf{T}/J$ *é* $*$*-isomorfo a* $B = A \times_\alpha \mathbb{Z}$.

Demonstração. Como J é gerado por

$$Q = 1 \otimes P = 1 \otimes (I - SS^*) = (1 \otimes I) - (u \otimes S)(u^* \otimes S^*),$$

se π é a aplicação quociente de $\mathbf{T}$ em $\mathbf{T}/J$, então

$$\begin{aligned}\pi(Q) = 0 &\Leftrightarrow \pi((1\otimes I) - (u\otimes S)(u^*\otimes S^*)) = 0\\ &\Leftrightarrow \pi(1\otimes I) = \pi(u\otimes S)\pi(u^*\otimes S^*)\\ &\Leftrightarrow \pi(1\otimes I) = \pi(u\otimes S)\pi(u\otimes S)^* = \pi(1\otimes SS^*),\end{aligned}$$

isto é, $\pi(u\otimes S)$ é unitário. Logo, $\mathbf{T}/J$ é uma C^*-álgebra gerada por $\overline{A} = \pi(A\otimes I)$ e um unitário $\overline{u} = \pi(u\otimes S)$ satisfazendo

$$\begin{aligned}\overline{u}\overline{A}\overline{u}^* &= \pi(u\otimes S)\pi(A\otimes I)\pi(u\otimes S)^*\\ &= \pi(A\otimes I)\pi(1\otimes SS^*)\\ &= \pi(A\otimes I) = \overline{A}.\end{aligned}$$

Segue do Teorema 1.4.12 e da Proposição 1.2.6 que $\mathbf{T}/J \cong A\times_\alpha \mathbb{Z}$. □

Segue das Proposições 3.1.5 e 3.1.7 que a seqüência

$$0 \longrightarrow A\otimes K(\mathcal{H}) \xrightarrow{\psi} \mathbf{T} \xrightarrow{\pi} A\times_\alpha \mathbb{Z} \longrightarrow 0, \tag{3.3}$$

é uma seqüência exata curta de C^*-álgebras. Esta seqüência é chamada de *extensão de Toeplitz associada a $A\times_\alpha \mathbb{Z}$.*

3.2 Descrição dos geradores de $K_1(A\times_\alpha \mathbb{Z})$

Segue da Observação 2.3.9 que podemos definir $K_1(B)$ como classes de equivalência de inversíveis no lugar de unitários. Utilizaremos esta definição de K_1 no lema abaixo e passaremos à definição com unitários no lema seguinte.

Lema 3.2.1. *O grupo $K_1(B)$ é gerado pelas classes de elementos inversíveis da forma*

$$1_n + xu_n^*,$$

com $x\in \mathcal{M}_n(A)$, para $n\in\mathbb{N}^*$.

Demonstração. Seja $\Gamma \subset K_1(B)$ o subgrupo gerado pelos elementos da forma $[1_n + xu_n^*]_1$, com $1_n + xu_n^*$ inversível.

Afirmamos que $[u]_1 \in \Gamma$. De fato, observe que, como Γ é um grupo e

$$0 = [1_B]_1 = [uu^*]_1 = [u]_1 + [u^*]_1,$$

para que $[u]_1$ pertença a Γ, é necessário e suficiente que $[u^*]$ pertença a Γ. Como

$$[u(1_B + 2u^*)]_1 = 0 \Leftrightarrow [u]_1 + [1_B + 2u^*]_1 = 0 \Leftrightarrow [u^*]_1 = [1_B + 2u^*]_1,$$

basta mostrar que $u(1_B + 2u^*) \sim_h 1_B$. Com este intuito, observamos que

$$u(1_B + 2u^*) = u + 2.1_B = 2\left(\frac{1}{2}u + 1_B\right),$$

com

$$\left\|1_B - \left(\frac{1}{2}u + 1_B\right)\right\| = \left\|\frac{1}{2}u\right\| = \frac{1}{2} < 1.$$

Aplicando o critério de Carl-Neumann (Proposição 1.1.3), obtemos a inversibilidade de $\left(\frac{1}{2}u + 1_B\right)$. Logo, $u(1_B + 2u^*)$ também é inversível. Por outro lado, conforme a Definição 1.1.2 e Proposição 1.1.16, o raio espectral de $\left(\frac{1}{2}u + 1_B\right)$ é dado por

$$\sup\left\{|1-\lambda| : \lambda \in \sigma\left(\frac{1}{2}u + 1_B\right)\right\} = r\left(1_B - \left(\frac{1}{2}u + 1_B\right)\right) = \left\|1_B - \left(\frac{1}{2}u + 1_B\right)\right\| = \frac{1}{2}.$$

Segue que

$$|1-\lambda| \leq \frac{1}{2}, \ \forall \lambda \in \sigma\left(\frac{1}{2}u + 1_B\right),$$

o que nos permite afirmar que $\sigma\left(\frac{1}{2}u + 1_B\right)$ está contido no disco complexo de centro i e raio $\frac{1}{2}$, e portanto

$$\mathbb{R}^*_- \cap \sigma\left(\frac{1}{2}u + 1_B\right) = \emptyset.$$

Agora, se $ln : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^*_- \to \mathbb{C}$ denota o ramo principal da função logarítmo, então existe uma vizinhança aberta de $\sigma\left(\frac{1}{2}u + 1_B\right)$, contida em $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^*_-$, em que podemos restringir a função holomorfa ln. Segue do Teorema 1.1.20 que existe $a \in B$ tal que $a = ln\left(\frac{1}{2}u + 1_B\right)$, logo $\left(\frac{1}{2}u + 1_B\right) = e^a$. Definindo o caminho de unitários $[0;1] \ni t \mapsto e^{ta} \in B$, que é evidentemente contínuo, obtemos $u(1_B + 2u^*) \sim_h 1_B$.

Para cada $p \in \mathbb{N}^*$, temos que os elementos da forma $\sum_{j=s}^{t} a_j u_p^j$, com $s, t \in \mathbb{Z}$, $s \leq t$ e $a_j \in \mathcal{M}_p(A)$, formam um conjunto denso em $\mathcal{M}_p(B)$. Com efeito, como $\mathcal{M}_p(B) \cong B \otimes \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ (Observação A.17), então os elementos da forma $b \otimes X$, com $b \in B$ e $X \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, constituem um conjunto denso em $B \otimes \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. Entretanto, os elementos da forma $\sum_{i=-n}^{n} a_i u^i$, com cada $a_i \in A$, formam um conjunto denso em B. Logo, os elementos da forma

$$\left(\sum_{i=-n}^{n} a_i u^i\right) \otimes X = \sum_{i=-n}^{n} (a_i \otimes X) \underbrace{(u^i \otimes I_p)}_{\overset{\shortparallel}{u_p^i}}$$

são densos em $B \otimes \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, com cada $a_i \otimes X \in A \otimes M_p(\mathbb{C}) \cong \mathcal{M}_p(A)$.

Portanto é suficiente provarmos que as classes dos inversíveis da forma $\sum_{j=s}^{t} a_j u_p^j$ estão todas em Γ. Entretanto, como

$$\left[\sum_{j=s}^{t} a_j u_p^j\right]_1 - s[u_p]_1 = \left[\sum_{i=0}^{t-s} a_i u_p^i\right]_1$$

e $[u_p]_1 = [u]_1 \in \Gamma$, segue que, sem perda de generalidade, podemos supor $s = 0$.

Seja $y = \sum_{j=0}^{t} a_j u_p^j$ um inversível, e considere a seguinte identidade matricial:

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_t \\ -u_p & 1_p & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & -u_p & 1_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1_p & y_1 & \dots & y_t \\ & 1_p & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y & & & 0 \\ & 1_p & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1_p & & & 0 \\ -u_p & 1_p & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & -u_p & 1_p \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

em que

$$y_k = \sum_{j=0}^{t-k} a_{j+k} u_p^j = y_{k+1} u_p + a_k.$$

Note que a primeira e a terceira matriz do lado direito da equação dada em (3.4) são ambas soma da identidade com alguma matriz nilpotente, afirmamos que a correspondente classe no grupo $K_1(B)$ de uma matriz deste tipo é trivial. De fato, seja $I = 1_{p(t+1)}$ e N uma matriz nilpotente de $\mathcal{M}_{p(t+1)}(B)$, daí $-N$ também é nilpotente. Mostraremos que a classe de $I + (-N) = I - N$ é trivial: como existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $N^r = 0$, segue que

$$(I - N)(I + N + \dots + N^{r-1}) = I - N^r = I,$$

logo $I - N$ é inversível. Daí $I - (1 - t)N$ é inversível, $\forall t \in [0; 1]$, e portanto $I \sim_h I - N$, isto é, $[I - N]_1 = 0$.

Segue que $[y]_1$ é igual à classe da matriz do lado esquerdo de 3.4.

Definindo

$$S_\varepsilon = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \varepsilon 1_p \\ -1_p & 0 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & -1_p & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad T = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_t \\ & 1_p & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1_p \end{bmatrix}$$

em que $\varepsilon \in \mathbb{C}$, temos $[y]_1 = [S_0 u_n + T]_1$, em que $n = (t+1)p$. Agora, se $\varepsilon \neq 0$, então S_ε é inversível e $[S_\varepsilon]_1 = 0$. Com efeito, basta observar que $S_\varepsilon \left(S_{\frac{1}{\bar{\varepsilon}}}\right)^* = I = \left(S_{\frac{1}{\bar{\varepsilon}}}\right)^* S_\varepsilon$, lembrando que $\left(S_{\frac{1}{\varepsilon}}\right)^*$ é a matriz transposta conjugada de $S_{\frac{1}{\varepsilon}}$. Daí a trivialidade de $[S_\varepsilon]_1$ segue de

$$S_\varepsilon^{t+1} = \varepsilon I \Leftrightarrow (t+1)[S_\varepsilon]_1 = [\varepsilon I]_1.$$

Como

$$\|(S_\varepsilon u_n + T) - (S_0 u_n + T)\| = \|(S_\varepsilon - S_0)u_n\| \leq \|S_\varepsilon - S_0\| \leq |\varepsilon|,$$

se tomarmos $\varepsilon \neq 0$ suficientemente pequeno, então

$$\begin{aligned}
[y]_1 &= [S_\varepsilon u_n + T]_1 = [S_\varepsilon(u_n + S_\varepsilon^{-1}T)]_1 = [S_\varepsilon]_1 + [u_n + S_\varepsilon^{-1}T]_1 \\
&= [u_n]_1 + [u_n + S_\varepsilon^{-1}T]_1 - [u_n]_1 = [u_n]_1 + [u_n + S_\varepsilon^{-1}T]_1 + [u_n^*]_1 \\
&= [u_n]_1 + [(u_n + S_\varepsilon^{-1}T)u_n^*]_1 = n[u]_1 + [1_n + \underbrace{S_\varepsilon^{-1}T}_{\in \mathcal{M}_n(A)}\ u_n^*]_1
\end{aligned}$$

E como já provamos que $[u]_1 \in \Gamma$, obtemos que $[y]_1 \in \Gamma$. □

Considere a aplicação $\beta : \mathbb{T} \to \mathrm{Aut}(B)$ dada, para cada $\gamma \in \mathbb{T}$, por

$$(\beta(\gamma))(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in A \\ \gamma u & \text{se } x = u. \end{cases}$$

É fácil ver que β é uma ação de $\mathbb{T}$ em B.

Observação 3.2.2. *A é a álgebra dos pontos fixos de β.*

De fato, tome $x \in B$ não nulo tal que $(\beta(\gamma))(x) = x$, qualquer que seja $\gamma \in \mathbb{T}$. Sem perda de generalidade, podemos supor que este elemento é da forma

$$x = \sum_{i=-n}^{n} a_i u^i,$$

com os elementos a_i não todos nulos. Daí,

$$\sum_{i=-n}^{n} a_i u^i = \beta(\gamma)\left(\sum_{i=-n}^{n} a_i u^i\right) = \sum_{i=-n}^{n} \beta(\gamma)(a_i u^i) = \sum_{i=-n}^{n} a_i \gamma^i u^i,$$

que é equivalente a

$$\sum_{i=-n}^{n} (1_B - \gamma^i) a_i u^i = 0,$$

e como esta igualdade vale para todo $\gamma \in \mathbb{T}$, devemos ter $i = 0$.

Lema 3.2.3. *O grupo $K_1(B)$ é gerado pelas classes de elementos unitários da forma*

$$(1_n - F) + Fxu_n^*F, \tag{3.5}$$

em que $F, x \in \mathcal{M}_n(A)$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ e F é uma projeção.

Demonstração. Segue do Lema 3.2.1 que é suficiente provarmos que, dado um elemento inversível

$$y = 1_n + xu_n^*,$$

em que $x \in \mathcal{M}_n(A)$, existe um elemento da forma dada em (3.5) pertencente a mesma classe de y em $K_1(B)$.

Para este fim, vamos primeiramente estudar o espectro de xu_n^*. Segue da inversibilidade de y que $-1 \notin \sigma(xu_n^*)$.

Afirmamos que $\sigma(xu_n^*)$ é invariante pela avaliação de $\beta(\gamma)_n$ em xu_n^*, qualquer que seja $\gamma \in \mathbb{T}$. De fato; sejam γ_1 e γ_2 elementos distintos de $\mathbb{T}$; se λ é um elemento do resolvente de $\beta(\gamma_1)_n(xu_n^*)$, então

$$\lambda 1_n - \beta(\gamma_1)_n(xu_n^*) = \beta(\gamma_1)_n(\lambda 1_n - xu_n^*)$$

é inversível. Como

$$\beta(\gamma_1)_n(\lambda 1_n - xu_n^*) = \beta(\gamma_1\overline{\gamma_2}\gamma_2)_n(\lambda 1_n - xu_n^*) = \gamma_1\overline{\gamma_2}\beta(\gamma_2)_n(\lambda 1_n - xu_n^*),$$

obtemos que

$$\beta(\gamma_2)_n(\lambda 1_n - xu_n^*)$$

é inversível, e portanto λ também é elemento do resolvente de $\beta(\gamma_2)_n(xu_n^*)$.

Como $\beta(\gamma)_n(xu_n^*) = \overline{\gamma}xu_n^*$ e $\beta(1)_n(xu_n^*) = xu_n^*$, temos que, qualquer que seja $\gamma \in \mathbb{T}$, $-1 \notin \sigma(\overline{\gamma}xu_n^*)$, daí $1_n + \overline{\gamma}xu_n^*$ é inversível, segue que $\overline{\gamma}\left(\frac{1}{\overline{\gamma}}1_n + xu_n^*\right) = \overline{\gamma}\left(\gamma 1_n + xu_n^*\right)$ também é inversível, e portanto $\mathbb{T} \subset \rho(xu_n^*)$.

Assim, $G = \sigma(xu_n^*) \cap \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ e $H = \sigma(xu_n^*) \cap \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ são conjuntos disjuntos cuja união é $\sigma(xu_n^*)$. Considere as funções holomorfas g e h tais que

$$g \equiv 1 \text{ em } G \text{ e } g \equiv 0 \text{ em } H$$

e

$$h \equiv 0 \text{ em } G \text{ e } h \equiv 1 \text{ em } H.$$

Aplicando o Teorema 1.1.20, definimos as projeções espectrais

$$P_- = g(xu_n^*) \quad \text{e} \quad P_+ = h(xu_n^*).$$

Observe que $P_- = 1_n - P_+$.

Afirmamos que P_+ e P_- comutam com xu_n^* e que são invariantes por $\beta(\gamma)_n$, para todo $\gamma \in \mathbb{T}$. De fato, temos

$$\begin{aligned} xu_n^* P_+ &= \mathrm{id}(xu_n^*)h(xu_n^*) = (\mathrm{id} \cdot h)(xu_n^*) \\ &= (h \cdot \mathrm{id})(xu_n^*) = h(xu_n^*)\mathrm{id}(xu_n^*) = P_+ xu_n^*, \end{aligned}$$

em que $\mathrm{id} : \sigma(xu_n^*) \to \mathbb{C}$ é a função $\lambda \mapsto \lambda$. E como $\sigma(xu_n^*)$ é invariante pela avaliação de $\beta(\gamma)_n$ em xu_n^*, temos também

$$\beta(\gamma)_n(P_+) = \beta(\gamma)_n(h(xu_n^*)) = h(\beta(\gamma)_n(xu_n^*)) = h(\overline{\gamma} xu_n^*)) = P_+,$$

analogamente para P_-. Segue da Observação 3.2.2 que P_+ e P_- são elementos de $\mathcal{M}_n(A)$.

Considere agora, para $0 \leq \varepsilon \leq 1$, os elementos

$$y_\varepsilon = (\varepsilon P_+ + xu_n^* P_+) + (P_- + \varepsilon xu_n^* P_-),$$

e note que

$$y_1 = (P_+ + P_-) + xu_n^*(P_+ + P_-) = y.$$

Vamos provar que os elementos y_ε são inversíveis, para todo $0 \leq \varepsilon \leq 1$. Considere $(\pi_u, \mathcal{H}_u)$ a representação universal de $\mathcal{M}_n(A)$. Sejam E e F as projeções ortogonais de $\mathcal{H}_u$ sobre $(\pi_u(P_-))(\mathcal{H}_u)$ e $(\pi_u(P_+))(\mathcal{H}_u)$, respectivamente. Vamos denotar $B_1 = B(F(\mathcal{H}_u)) \subset B(\mathcal{H}_u)$ e $B_2 = B(E(\mathcal{H}_u)) \subset B(\mathcal{H}_u)$. Como

$$\sigma_{B_1}(\pi_u(xu_n^* P_+)) \subset H \quad \text{e} \quad \sigma_{B_2}(\pi_u(xu_n^* P_-)) \subset G,$$

então

$$[-1; 0] \subset \rho_{B_1}(\pi_u(xu_n^* P_+))$$

e

$$]-\infty; -1] \subset \rho_{B_2}(\pi_u(xu_n^* P_-)).$$

Portanto

$$\pi_u(xu_n^* P_+ - \lambda P_+) \text{ é inversível em } B_1, \ \forall \lambda \in [-1; 0]$$

e

$$\pi_u(xu_n^* P_- - \mu P_-) \text{ é inversível em } B_2, \ \forall \mu \in]-\infty; -1],$$

dado que $1_{B_1} = \pi_u(P_+)$ e $1_{B_2} = \pi_u(P_-)$.

Se $\varepsilon = 0$, basta tomar $\lambda = 0$ e notar que $\pi_u(0P_+ + xu_n^*P_+) = \pi_u(xu_n^*P_+)$ é um inversível de B_1 e que $\pi_u(P_- + 0xu_n^*P_-) = \pi_u(P_-)$ é inversível B_2, dado que é a unidade. Portanto, como

$$y_0 = (xu_n^*P_+) + (P_-)$$

é o levantamento por π_u da soma direta destes operadores inversíveis, segue que y_0 é inversível. Se $\varepsilon \in]0;1]$, basta tomar $\lambda = -\varepsilon$ e $\mu = -\frac{1}{\varepsilon}$. Daí,

$$(xu_n^*P_+ + \varepsilon P_+) + \varepsilon\left(xu_n^*P_- + \frac{1}{\varepsilon}P_-\right) = (\varepsilon P_+ + xu_n^*P_+) + (P_- + \varepsilon xu_n^*P_-) = y_\varepsilon$$

é inversível.

Concluímos que $[y_0]_1 = [y_1]_1 = [y]_1$. E como $P_- = 1_n - P_+$, usando que $P_+^2 = P_+$ e que P_+ comuta com xu_n^*, obtemos a igualdade

$$[y]_1 = [(1 - P_+) + P_+xu_n^*P_+]_1.$$

Voltando a $B(\mathcal{H}_u)$, note que, se $x \in \mathcal{H}_u$, então, como F é uma projeção ortogonal, podemos escrever $x = x_1 + x_2$, com $x_1 \in F(\mathcal{H}_u)$ e $x_2 \in F(\mathcal{H}_u)^\perp$, de maneira única. Daí

$$(\pi_u(P_+)F)(x) = (\pi_u(P_+))(F(x_1 + x_2)) = (\pi_u(P_+))(x_1) = x_1 = F(x),$$

dado que $x_1 \in F(\mathcal{H}_u) = (\pi_u(P_+))(\mathcal{H}_u)$ e $\pi_u(P_+)^2 = \pi_u(P_+)$, e

$$(F\pi_u(P_+))(x) = F(\underbrace{\pi_u(P_+)(x)}_{\in F(\mathcal{H}_u)}) = (\pi_u(P_+))(x).$$

Como $(\pi_u, \mathcal{H}_u)$ é fiel, vamos omitir π_u e denotar o levantamento de F em $\mathcal{M}_n(B)$ por π_u também por F. Assim, acabamos de mostrar que $P_+F = F$ e $FP_+ = P_+$, e portanto

$$F + FP_+(1_n - F) = F + FP_+ - FP_+F = P_+.$$

E como $F^2 = F^* = F \in \mathcal{M}_n(A)$, temos ainda

$$xu_n^*F = xu_n^*P_+F = P_+xu_n^*P_+F = FP_+xu_n^*P_+F = Fxu_n^*P_+F = Fxu_n^*F.$$

Segue que

$$\begin{aligned}
y_0 &= (1_n - P_+) + xu_n^*P_+ \\
&= (1_n - (F + FP_+(1_n - F))) + xu_n^*(F + FP_+(1_n - F)) \\
&= (1_n - F) + xu_n^*F + xu_n^*FP_+(1_n - F) - FP_+(1_n - F) \\
&= (1_n - F) + Fxu_n^*F + Fxu_n^*FP_+(1_n - F) - FP_+(1_n - F) \\
&= (1_n - F) + Fxu_n^*F + F(xu_n^*FP_+ - P_+)(1_n - F),
\end{aligned}$$

e para simplificar a escrita, denotaremos $S = (xu_n^* F P_+ - P_+)$, daí

$$y_0 = (1_n - F) + Fxu_n^* F + FS(1_n - F).$$

Vamos mostrar agora que $[y_0]_1 = [(1_n - F) + Fxu_n^* F]_1$. Seja

$$z_\varepsilon = (1_n - F) + Fxu_n^* F + \varepsilon FS(1_n - F),$$

temos

$$y_0 - z_\varepsilon = F(S - \varepsilon S)(1_n - F) = (1-\varepsilon)FS(1_n - F),$$

e como $(y_0 - z_\varepsilon)^2 = 0$, temos $a_\varepsilon = 1_n + (y_0 - z_\varepsilon)$ é a identidade adicionada a um nilpotente, e portanto é inversível e homotopicamente equivalente a 1_n, qualquer que seja $\varepsilon \geq 0$, (vide demonstração do lema 3.2.1.)

Temos que z_ε também é inversível. De fato,

$$\begin{aligned}
a_\varepsilon z_\varepsilon &= (1_n + (y_0 - z_\varepsilon))z_\varepsilon \\
&= (1_n + (1-\varepsilon)FS(1_n - F))((1_n - F) + Fxu_n^* F + \varepsilon FS(1_n - F)) \\
&= (1_n - F) + Fxu_n^* F + \varepsilon FS(1_n - F) + (1-\varepsilon)FS(1_n - F) \\
&= (1_n - F) + Fxu_n^* F + FS(1_n - F) = y_0,
\end{aligned}$$

e como y_0 e a_ε são inversíveis, segue que z_ε é inversível. Assim, obtemos

$$[y]_1 = [y_0]_1 = [1_n - F + Fxu_n^* F]_1.$$

Finalizaremos esta demonstração provando que podemos escolher um elemento unitário na classe de z_0 com a mesma forma de z_0. Note que

$$\begin{aligned}
z_0 z_0^* &= (1_n - F + Fxu_n^* F)(1_n - F + Fu_n x^* F) = 1_n - F + Fxu_n^* FFu_n x^* F \\
&= 1_n - F + Fxu_n^* u_n x^* F = 1_n - F + Fxx^* F,
\end{aligned}$$

e como $xx^* > 0$, denotaremos $a^2 = xx^*$. Como

$$(1_n - F + FaF)^2 = 1_n - F + Fa^2 F = z_0 z_0^*,$$

segue que $(z_0 z_0^*)^{\frac{1}{2}} = 1_n - F + FaF \in \mathcal{M}_n(A)$, dado que $a \in A$.

Como z_0 é inversível, e consequentemente z_0^* e $(z_0 z_0^*)^{\frac{1}{2}}$ também são inversíveis, temos que

$$\begin{aligned}
(z_0 z_0^*)(z_0 z_0^*)^{\frac{1}{2}}(z_0^*)^{-1} &= (z_0 z_0^*)^{\frac{1}{2}}(z_0 z_0^*)^{\frac{1}{2}}(z_0 z_0^*)^{\frac{1}{2}}(z_0^*)^{-1} = (z_0 z_0^*)^{\frac{1}{2}} z_0 \\
&= (z_0 z_0^*)^{\frac{1}{2}}(z_0 z_0^*)^{\frac{1}{2}}(z_0 z_0^*)^{-\frac{1}{2}} z_0 = (z_0 z_0^*)(z_0 z_0^*)^{-\frac{1}{2}} z_0,
\end{aligned}$$

o que é equivalente a

$$(z_0z_0^*)^{\frac{1}{2}}(z_0^*)^{-1} = (z_0z_0^*)^{-\frac{1}{2}}z_0. \tag{3.6}$$

Com isso, temos

$$(z_0z_0^*)^{-\frac{1}{2}}z_0((z_0z_0^*)^{-\frac{1}{2}}z_0)^* = (z_0z_0^*)^{-\frac{1}{2}}z_0z_0^*(z_0z_0^*)^{-\frac{1}{2}} = (z_0z_0^*)^{-\frac{1}{2}}(z_0z_0^*)^{\frac{1}{2}}(z_0z_0^*)^{\frac{1}{2}}(z_0z_0^*)^{-\frac{1}{2}} = 1_n$$

e

$$((z_0z_0^*)^{-\frac{1}{2}}z_0)^*(z_0z_0^*)^{-\frac{1}{2}}z_0 = z_0^*(z_0z_0^*)^{-\frac{1}{2}}(z_0z_0^*)^{-\frac{1}{2}}z_0 = z_0^*(z_0^*)^{-1}z_0^{-1}z_0 = z_0^*(z_0z_0^*)^{-1}z_0 = 1_n,$$

isto é, $(z_0z_0^*)^{-\frac{1}{2}}z_0$ é unitário.

Por outro lado, temos

$$z_0^*(1_n - F) = (1_n - F + Fu_nx^*F)(1_n - F) = 1_n - F,$$

o que é equivalente a

$$(z_0^*)^{-1}(1_n - F) = 1_n - F.$$

Temos também

$$z_0F = (1_n - F + Fxu_n^*F)F = Fxu_n^*F.$$

Assim,

$$(z_0z_0^*)^{\frac{1}{2}}(z_0^*)^{-1}(1_n - F) = (1_n - F + FaF)(1_n - F) = 1_n - F,$$

e usando a igualdade dada por (3.6) na página 98, isto equivale a

$$(z_0z_0^*)^{-\frac{1}{2}}z_0(1_n - F) = 1_n - F,$$

portanto

$$\begin{aligned}(z_0z_0^*)^{-\frac{1}{2}}z_0 &= 1_n - F + (z_0z_0^*)^{-\frac{1}{2}}z_0F = 1_n - F + (z_0z_0^*)^{-\frac{1}{2}}Fxu_n^*F \\ &= 1_n - F + F(z_0z_0^*)^{-\frac{1}{2}}xu_n^*F\end{aligned}$$

dado que F é projeção e comuta com z_0, e consequentemente comuta com $(z_0z_0^*)^{-\frac{1}{2}}$. Basta agora tomarmos $x' = (z_0z_0^*)^{-\frac{1}{2}}x$, que é elemento de $\mathcal{M}_n(A)$, e o Lema está provado. □

3.3 A Seqüência Exata de Pimsner-Voiculescu

Seja $\mathcal{H}$ o espaço de Hilbert separável de dimensão infinita fixado no início da seção 3.1. Lembremos que $\mathbf{T}$ é a C^*-subálgebra de $B \otimes C^*(S)$ gerada por $A \otimes I$ e $u \otimes S$, que P denota a projeção de $C^*(S)$ dada por $I - SS^*$ e que $Q = 1 \otimes I - (u \otimes S)(u \otimes S)^* = 1 \otimes P \in B \otimes C^*(S)$.

Considere a inclusão natural

$$\begin{array}{rccc} d: & A & \to & \mathbf{T} \\ & a & \mapsto & a \otimes I \end{array}$$

e note que claramente d é um $*$-homomorfismo.

Seja $i : A \to A \times_\alpha \mathbb{Z}$ a inclusão isométrica dada pela Proposição 1.4.11. Se J é o ideal bilateral fechado de $\mathbf{T}$ gerado por Q, então $\mathbf{T}/J \cong A \times_\alpha \mathbb{Z}$ (Proposição 3.1.7). Seja π o $*$-homomorfismo dado pela composição do $*$-isomorfismo que identifica $\mathbf{T}/J$ com $A \times_\alpha \mathbb{Z}$ com a aplicação quociente de $\mathbf{T}$ em $\mathbf{T}/J$. Como, se $a \in A$, então $\pi(d(a)) = \pi(a \otimes I) = i(a)$, segue que o diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathbf{T} \arrow[r, "\pi"] & A \times_\alpha \mathbb{Z} \\ A \arrow[u, "d"] \arrow[r, equal] & A \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

é comutativo.

Vamos retomar aqui a extensão de Toeplitz associada a $A \times_\alpha \mathbb{Z}$ construída na Seção 3.1:

$$0 \longrightarrow A \otimes K(\mathcal{H}) \xrightarrow{\psi} \mathbf{T} \xrightarrow{\pi} A \times_\alpha \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Aplicando o Teorema 2.4.15, obtemos a seqüência exata de seis termos

$$\begin{tikzcd} K_0(A \otimes K(\mathcal{H})) \arrow[r, "K_0(\psi)"] & K_0(\mathbf{T}) \arrow[r, "K_0(\pi)"] & K_0(A \times_\alpha \mathbb{Z}) \arrow[d, "\delta_0"] \\ K_1(A \times_\alpha \mathbb{Z}) \arrow[u, "\delta_1"] & K_1(\mathbf{T}) \arrow[l, "K_1(\pi)"] & K_1(A \otimes K(\mathcal{H})). \arrow[l, "K_1(\psi)"] \end{tikzcd} \tag{3.7}$$

Lema 3.3.1. *Considere os K-grupos da seqüência dada em* (3.7). *O diagrama*

$$\begin{tikzcd} K_0(A \otimes K(\mathcal{H})) \arrow[r, "K_0(\psi)"] & K_0(\mathbf{T}) \\ K_0(A) \arrow[u, "K_0(\kappa)"] \arrow[r, "K_0(\mathrm{id}_A) - K_0(\alpha^{-1})"'] & K_0(A) \arrow[u, "K_0(d)"'] \end{tikzcd}$$

é comutativo.

Demonstração. Note que, no diagrama acima, devemos trabalhar com elementos dos K_0-grupos associados a A, $A \otimes K(\mathcal{H})$ e $\mathbf{T}$. Por definição, elementos típicos desses K_0-grupos são diferenças entre classes de projeções em

$$\mathcal{M}_n(A),\ \mathcal{M}_p(\widetilde{A \otimes K(\mathcal{H})}) \text{ e } \mathcal{M}_q(\mathbf{T}),$$

com n, p e q naturais não nulos. Sem perda de generalidade, podemos tomar, em cada passagem, $m = \text{máx}\{n, p, q\}$ e trabalhar com classes de projeções em

$$\mathcal{M}_m(A),\ \mathcal{M}_m(\widetilde{A \otimes K(\mathcal{H})}) \text{ e } \mathcal{M}_m(\mathbf{T}).$$

Segue da Observação A.17 que estas C^*-álgebras podem ser vistas como os produtos tensoriais

$$A \otimes \mathcal{M}_m(\mathbb{C}),\ \widetilde{A \otimes K(\mathcal{H})} \otimes \mathcal{M}_m(\mathbb{C}) \text{ e } \mathbf{T} \otimes \mathcal{M}_m(\mathbb{C}),$$

e, neste caso, os $*$-homomorfismos α, id_A, κ, ψ e d se estendem de maneira única aos $*$-homomorfismos $\alpha \otimes \mathrm{id}_m$, $\mathrm{id}_A \otimes \mathrm{id}_m$, $\kappa \otimes \mathrm{id}_m$, $\psi \otimes \mathrm{id}_m$ e $d \otimes \mathrm{id}_m$, respectivamente, em que id_m é a identidade de $\mathcal{M}_m(\mathbb{C})$. Logo, é suficiente provarmos a comutatividade do diagrama considerando $m = 1$.

Seja $q \in A$ uma projeção. Segue da Observação 2.2.16 que

$$K_0(\kappa)([q]_0) = [q \otimes E_{00}]_0.$$

Logo

$$K_0(\psi)([q \otimes E_{00}]_0) = [\psi(q \otimes E_{00})]_0 = [q \otimes P]_0.$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned}\Big(K_0(d) \circ \big(K_0(\mathrm{id}_A) - K_0(\alpha^{-1})\big)\Big)([q]_0) &= K_0(d)\big([\mathrm{id}_A(q)]_0 - [\alpha^{-1}(q)]_0\big)\\ &= K_0(d)([q]_0 - [u^*qu]_0)\\ &= [q \otimes I]_0 - [u^*qu \otimes I]_0.\end{aligned}$$

Considere agora o elemento

$$\Omega = \begin{pmatrix} u \otimes S & Q \\ 0 & u^* \otimes S^* \end{pmatrix}$$

de $\mathcal{M}_2(\mathbf{T})$ e note que

$$\begin{aligned}\Omega\Omega^* &= \begin{pmatrix} u \otimes S & Q \\ 0 & u^* \otimes S^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u^* \otimes S^* & 0 \\ Q & u \otimes S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \otimes SS^* + Q & Q(u \otimes S) \\ (u^* \otimes S^*)Q & (u^* \otimes S^*)(u \otimes S) \end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} 1 \otimes SS^* + 1 \otimes (I - SS^*) & 1 \otimes (I - SS^*)(u \otimes S) \\ (u^* \otimes S^*)(1 \otimes (I - SS^*)) & u^*u \otimes S^*S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \otimes I & 0 \\ 0 & 1 \otimes I \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Como analogamente obtemos $\Omega^*\Omega = \mathrm{diag}(1\otimes I, 1\otimes I)$, segue que Ω é um unitário de $\mathcal{M}_2(\mathbf{T})$.

Segue da Proposição 2.1.5 que

$$\begin{aligned}
[u^*qu\otimes I]_0 &= \left[\Omega\begin{pmatrix} u^*qu\otimes I & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\Omega^*\right]_0\\
&= \left[\begin{pmatrix} u\otimes S & Q\\ 0 & u^*\otimes S^*\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u^*qu\otimes I & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u^*\otimes S^* & 0\\ Q^* & u\otimes S\end{pmatrix}\right]_0\\
&= \left[\begin{pmatrix} q\otimes SS^* & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right]_0 = [q\otimes SS^*]_0 = [q\otimes I]_0 - [q\otimes P]_0\,.
\end{aligned}$$

Com isso, temos

$$(K_0(\psi)\circ K_0(\kappa))([q]_0) = [q\otimes P]_0 = (K_0(d)\circ(K_0(\mathrm{id}) - K_0(\alpha^{-1})))([q]_0).$$

□

Lema 3.3.2. *Considere os K-grupos da seqüência dada em* (3.7).

(a) O diagrama

$$\begin{tikzcd}
K_1(A\otimes K(\mathcal{H})) \arrow[r, "K_1(\psi)"] & K_1(\mathbf{T})\\
K_1(A) \arrow[u, "K_1(\kappa)"] \arrow[r, "K_1(\mathrm{id}_A)-K_1(\alpha^{-1})"'] & K_1(A) \arrow[u, "K_1(d)"']
\end{tikzcd}$$

é comutativo.

(b) O homomorfismo $K_1(d) : K_1(A) \to K_1(\mathbf{T})$ é injetivo.

Demonstração. Note que, nas afirmações (a) e (b), devemos trabalhar com elementos dos K_1-grupos associados a A, $A\otimes K(\mathcal{H})$ e $\mathbf{T}$. Considerando o argumento apresentado no início da demonstração do Lema 3.3.1, é suficiente provarmos os itens (a) e (b) apenas para elementos unitários de A, $A\,\widetilde{\otimes K}(\mathcal{H})$ e $\mathbf{T}$.

(a) Seja $v\in A$ um unitário. Segue da Observação 2.3.16 que

$$K_1(\kappa)([v]_1) = [v\otimes E_{00} + (\widetilde{I} - 1\otimes E_{00})]_1,$$

em que $\widetilde{I} = 1_{\widetilde{A\otimes K(\mathcal{H})}}$. E, da Proposição 2.1.13, segue que $\widetilde{\psi} : A\otimes K(\mathcal{H}) \to \mathbf{T}$ é dado por

$$\widetilde{\psi}(a\otimes E_{ij} + \widetilde{I}) = \psi(a\otimes E_{ij}) + 1_{\widetilde{\mathbf{T}}}.$$

Como $\mathbf{T}$ é uma C^*-álgebra com unidade, segue da Proposição 2.3.3 que existe um único isomorfismo $\rho : K_1(\widetilde{\mathbf{T}}) \to K_1(\mathbf{T})$ tal que

$$\rho([x + \lambda(1_{\widetilde{\mathbf{T}}} - 1_A \otimes I)]_1) = [x]_1,$$

para cada $x \in \mathcal{U}(\mathbf{T})$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. No que se segue, omitiremos ρ e denotaremos simplesmente $[x+\lambda(1_{\widetilde{\mathbf{T}}}-1_A\otimes 6I)]_1 = [x]_1$. Dado que existe uma inclusão isométrica A em B preservando unidade (Proposição 1.4.11), denotaremos também por 1_A a unidade de $B = A \times_\alpha \mathbb{Z}$,

Temos

$$\begin{aligned}
& (K_1(\psi) \circ K_1(\kappa))([v]_1) = K_1(\psi)(K_1(\kappa)([v]_1)) \\
= \; & K_1(\psi)([v \otimes E_{00} + (\tilde{I} - 1_A \otimes E_{00})]_1) = [\widetilde{\psi}(v \otimes E_{00} + \tilde{I} - 1_A \otimes E_{00})]_1 \\
= \; & [\widetilde{\psi}(v \otimes E_{00}) + 1_{\widetilde{\mathbf{T}}} - \widetilde{\psi}(1_A \otimes E_{00})]_1 = [v \otimes P + 1_A \otimes I - 1_A \otimes P + (1_{\widetilde{\mathbf{T}}} - 1_A \otimes I)]_1 \\
= \; & [v \otimes P + (1_A \otimes I - 1_A \otimes P)]_1 = [v \otimes P + (1_A \otimes I - 1_A \otimes (I - SS^*))]_1 \\
= \; & [v \otimes P + 1_A \otimes SS^*]_1.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
& (K_1(d) \circ K_1(\mathrm{id}_A - \alpha^{-1}))([v]_1) = K_1(d)(K_1(\mathrm{id}_A - \alpha^{-1})([v]_1)) \\
= \; & K_1(d)([\mathrm{id}_A(v)]_1 - [\alpha^{-1}(v)]_1) = K_1(d)([v]_1 - [u^*vu]_1) \\
= \; & [d(v)]_1 - [d(u^*vu)]_1 = [v \otimes I]_1 - [u^*vu \otimes I]_1.
\end{aligned}$$

Conforme foi verificado na demonstração do Lema 3.3.1, o elemento

$$\Omega = \begin{pmatrix} u \otimes S & Q \\ 0 & u^* \otimes S^* \end{pmatrix}$$

é unitário de $\mathcal{M}_2(\mathbf{T})$. Logo

$$\begin{aligned}
[u^*vu \otimes I]_1 &= \left[\begin{pmatrix} u^*vu \otimes I & 0 \\ 0 & 1 \otimes I \end{pmatrix}\right]_1 = \left[\Omega \begin{pmatrix} u^*vu \otimes I & 0 \\ 0 & 1 \otimes I \end{pmatrix} \Omega^*\right]_1 \\
&= \left[\begin{pmatrix} u \otimes S & Q \\ 0 & u^* \otimes S^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^*vu \otimes I & 0 \\ 0 & 1 \otimes I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^* \otimes S^* & 0 \\ Q & u \otimes S \end{pmatrix}\right]_1 \\
&= \left[\begin{pmatrix} vu \otimes S & Q \\ 0 & u^* \otimes S^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^* \otimes S^* & 0 \\ Q & u \otimes S \end{pmatrix}\right]_1 \\
&= \left[\begin{pmatrix} v \otimes SS^* + Q & Q(u \otimes S) \\ (u^* \otimes S^*)Q & u^*u \otimes S^*S \end{pmatrix}\right]_1 \\
&= \left[\begin{pmatrix} v \otimes SS^* + Q & 0 \\ 0 & 1 \otimes I \end{pmatrix}\right]_1 = [v \otimes SS^* + Q]_1,
\end{aligned}$$

em que $v \otimes SS^* + Q$ é evidentemente unitário com

$$(v \otimes SS^* + Q)^{-1} = (v \otimes SS^* + Q)^* = v^* \otimes SS^* + Q.$$

Segue que

$$\begin{aligned}
[v \otimes I]_1 - [u^* v u \otimes I]_1 &= [v \otimes I]_1 - [v \otimes SS^* + Q]_1 = [(v \otimes I)(v \otimes SS^* + Q)^{-1}]_1 \\
&= [(v \otimes I)(v^* \otimes SS^* + Q)]_1 = [vv^* \otimes SS^* + (v \otimes I)(1 \otimes P)]_1 \\
&= [1 \otimes SS^* + v \otimes P]_1
\end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned}
(K_1(\psi) \circ K_1(\kappa))([v]_1) &= [v \otimes I]_1 - [u^* v u \otimes I]_1 = [1 \otimes SS^* + v \otimes P]_1 \\
&= (K_1(d) \circ K_1(\mathrm{id}_A - \alpha^{-1}))([v]_1),
\end{aligned}$$

qualquer que seja $[v]_1 \in K_1(A)$.

(b) Como

$$K_1(d)([v]_1) = [d(v)]_1 = [v \otimes I]_1,$$

para provarmos a injetividade do homomorfismo de grupos $K_1(d)$, é suficiente provarmos que se $v_0, v_1 \in A$ são unitários tais que

$$w_0 = v_0 \otimes I \sim_h v_1 \otimes I = w_1,$$

isto é,

$$K_1(d)([v_0]_1) = [w_0]_1 = [w_1]_1 = K_1(d)([v_1]_1),$$

então $[v_0]_1 = [v_1]_1$.

Seja $[0,1] \ni t \mapsto w_t \in \mathbf{T}$ um caminho contínuo de unitários ligando w_0 e w_1 e considere novamente o unitário

$$\Omega = \begin{pmatrix} u \otimes S & Q \\ 0 & u^* \otimes S^* \end{pmatrix}.$$

Seja

$$\begin{aligned}
M &= \begin{pmatrix} w_t & 0 \\ 0 & 1 \otimes I \end{pmatrix} \Omega \begin{pmatrix} \alpha^{-1}(w_t^*) & 0 \\ 0 & 1 \otimes I \end{pmatrix} \Omega^* \\
&= \begin{pmatrix} w_t(u \otimes S) & w_t Q \\ 0 & u^* \otimes S^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (u^* \otimes I) w_t^* (u \otimes I) & 0 \\ 0 & 1 \otimes I \end{pmatrix} \Omega^* \\
&= \begin{pmatrix} w_t(1 \otimes S) w_t^* (u \otimes I) & w_t Q \\ 0 & u^* \otimes S^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^* \otimes S^* & 0 \\ Q & u \otimes S \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} w_t(1 \otimes S) w_t^* (1 \otimes S^*) + w_t Q & 0 \\ 0 & 1 \otimes I \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Como

$$\begin{pmatrix} w_t & 0 \\ 0 & 1 \otimes I \end{pmatrix}, \ \Omega, \ \begin{pmatrix} \alpha^{-1}(w_t^*) & 0 \\ 0 & 1 \otimes I \end{pmatrix} \text{ e } \Omega^*$$

são unitários de $\mathcal{M}_2(\mathbf{T})$, segue que M também é um unitário de $\mathcal{M}_2(\mathbf{T})$, ou seja

$$MM^* = \begin{pmatrix} 1 \otimes I & 0 \\ 0 & 1 \otimes I \end{pmatrix} = M^*M,$$

e portanto, denotando

$$y_t = w_t(1 \otimes S)w_t^*(1 \otimes S^*) + w_t Q,$$

temos que $y_t y_t^* = 1 \otimes I = y_t^* y_t$, isto é y_t é um elemento unitário de $\mathbf{T}$, qualquer que seja $t \in [0;1]$. Note que y_t depende continuamente de $t \in [0,1]$ e que

$$y_0 = 1 \otimes SS^* + v_0 \otimes P \quad \text{e} \quad y_1 = 1 \otimes SS^* + v_1 \otimes P.$$

Vamos mostrar agora que $(y_t - 1 \otimes I) \in J$, sendo J o ideal bilateral fechado gerado por $Q = 1 \otimes P$. Note que

$$\begin{aligned} y_t &= w_t Q + w_t(1 \otimes S)w_t^*(1 \otimes S^*) \\ &= (w_t - 1 \otimes I)Q + (1 \otimes I)Q + w_t(1 \otimes S)w_t^*(1 \otimes S^*) \\ &= (w_t - 1 \otimes I)Q + 1 \otimes I - (1 \otimes S)(1 \otimes S^*) + w_t(1 \otimes S)w_t^*(1 \otimes S^*) \\ &= 1 \otimes I + (w_t - 1 \otimes I)Q - w_t w_t^*(1 \otimes S)(1 \otimes S^*) + w_t(1 \otimes S)w_t^*(1 \otimes S^*) \\ &= 1 \otimes I + (w_t - 1 \otimes I)Q + w_t((1 \otimes S)w_t^* - w_t^*(1 \otimes S))(1 \otimes S^*), \end{aligned}$$

e como $J = (B \otimes \varphi(K(\mathcal{H})))$, conforme foi demonstrado no Lema 3.1.6, é suficiente mostrarmos que $(1 \otimes S)w - w(1 \otimes S) \in B \otimes \varphi(K(\mathcal{H}))$, para todo $w \in \mathbf{T}$. Como a $*$-subálgebra de $B \otimes C^*(S)$ gerada por $A \otimes I$, $u \otimes S$ e $u^* \otimes S^*$ (não completada), é densa em $\mathbf{T}$, basta mostrarmos que $(1 \otimes S)w - w(1 \otimes S) \in B \otimes \varphi(K(\mathcal{H}))$ para w entre estes geradores. Neste sentido note que, se $a \in A$, então

$$(1 \otimes S)(a \otimes I) - (a \otimes I)(1 \otimes S) = 0 \otimes 0 = 0 \otimes \varphi(0),$$

$$(1 \otimes S)(u \otimes S) - (u \otimes S)(1 \otimes S) = 0 \otimes 0 = 0 \otimes \varphi(0) \quad \text{e}$$

$$(1 \otimes S)(u^* \otimes S^*) - (u^* \otimes S^*)(1 \otimes S) = -u^* \otimes P = 0 \otimes \varphi(E_{00}).$$

Como a aplicação $\psi : A \otimes K(\mathcal{H}) \to \mathbf{T}$ definida na Proposição 3.1.5 é injetiva, com $\psi(A \otimes K(\mathcal{H})) = J$, segue que ψ nos dá um $*$-isomorfismo entre $A \otimes K(\mathcal{H})$ e J. Daí os únicos levantamentos de

$$(y_0 - 1 \otimes I) = (v_0 - 1) \otimes P \quad \text{e} \quad (y_1 - 1 \otimes I) = (v_1 - 1) \otimes P$$

por ψ são $v_0 \otimes E_{00}$ e $v_1 \otimes E_{00}$. Segue do Corolário 2.1.14 que $\widetilde{J}$ é isomorfo a $J + \mathbb{C}(1 \otimes I) \subset \widetilde{\mathbf{T}}$. Como y_t, com $t \in [0;1]$, é um caminho de unitários em $J + 1 \otimes I$, dado que $(y_t - 1 \otimes I) \in J$, para todo $t \in [0;1]$, isto implica que

$$[\widetilde{I} - 1 \otimes E_{00} + v_0 \otimes E_{00}]_1 = [\widetilde{I} - 1 \otimes E_{00} + v_1 \otimes E_{00}]_1$$

em $K_1(A \otimes K(\mathcal{H}))$. Mas isto é equivalente a $[v_0]_1 = [v_1]_1$ em $K_1(A)$, e isto prova a injetividade de $K_1(d)$.

$\square$

Lema 3.3.3. *O homomorfismo $K_1(d) : K_1(A) \to K_1(\mathrm{T})$ é um isomorfismo.*

Demonstração. Considere o diagrama

$$\begin{tikzcd}
K_1(A \otimes K(\mathcal{H})) \arrow[r, "K_1(\psi)"] & K_1(\mathrm{T}) \arrow[r, "K_1(\pi)"] & K_1(A \otimes_\alpha \mathbb{Z}) \arrow[r, "\delta_1"] & K_0(A \otimes K(\mathcal{H})) \\
K_1(A) \arrow[u, "K_1(\kappa)"] \arrow[r, "K_1(\mathrm{id}_A) - K_1(\alpha^{-1})"'] & K_1(A) \arrow[u, "K_1(d)"] \arrow[ur, "K_1(i)"'] & &
\end{tikzcd}$$

Observe que o quadrado do diagrama é comutativo, conforme foi demonstrado no Lema 3.3.2(a). Note também que a linha superior do diagrama é uma seqüência exata, dado que é uma parte da seqüência exata de seis termos dada em (3.7).

Assim, como $\mathrm{Ker}(\delta_1) = \mathrm{Im}(K_1(\pi))$ e $K_1(d)$ é injetivo, é suficiente mostrarmos que $\mathrm{Ker}(\delta_1) = \mathrm{Im}(K_1(\pi) \circ K_1(d))$. Segue da funtoriedade do K_1 que, se $i = \pi \circ d$, então $K_1(i) = K_1(\pi) \circ K_1(d)$. Portanto, é suficiente mostrarmos que $\mathrm{Ker}(\delta_1) \subset \mathrm{Im}(K_1(i))$, dado que inclusão reversa é óbvia.

Segue do Lema 3.2.3 que $K_1(B)$ é gerado por classes de elementos unitários da forma

$$(1_n - F) + F x u_n^* F \tag{3.8}$$

em que $F, x \in \mathcal{M}_n(A)$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ e F é uma projeção. Se $F_1, x_1 \in \mathcal{M}_m(A)$ e $F_2, x_2 \in \mathcal{M}_n(A)$, com $m, n \in \mathbb{N}^*$, e F_1 e F_2 são projeções, então

$$\begin{aligned}
&[(1_m - F_1) + F_1 x_1 u_m^* F_1]_1 + [(1_n - F_2) + F_2 x_2 u_n^* F_2]_1 \\
= & \left[\begin{pmatrix} (1_m - F_1) + F_1 x_1 u_m^* F_1 & 0 \\ 0 & 1_n \end{pmatrix}\right]_1 + \left[\begin{pmatrix} 1_m & 0 \\ 0 & (1_n - F_2) + F_2 x_2 u_n^* F_2 \end{pmatrix}\right]_1 \\
= & \left[\begin{pmatrix} (1_m - F_1) + F_1 x_1 u_m^* F_1 & 0 \\ 0 & (1_n - F_2) + F_2 x_2 u_n^* F_2 \end{pmatrix}\right]_1 \\
= & \left[\left(1_{m+n} - \begin{pmatrix} F_1 & 0 \\ 0 & F_2 \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} F_1 & 0 \\ 0 & F_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix} u_{m+n}^* \begin{pmatrix} F_1 & 0 \\ 0 & F_2 \end{pmatrix}\right]_1,
\end{aligned}$$

isto é, a soma de duas classes de geradores com representantes na forma dada em (3.8) também tem esta mesma forma.

Vamos provar que $\delta_1([v]_1) = [F \otimes E_{00}]_0$, para cada unitário v de $A \times_\alpha \mathbb{Z}$ da forma $v = (1_n - F) + Fxu_n^*F$. Para isso, vamos aplicar a Proposição 2.4.3 e o Teorema 2.4.4 e, utilizando novamente o argumento de que poderíamos substituir

$$\{A, \alpha, \mathbf{T}\}$$

por

$$\{\mathcal{M}_n(A), \alpha_n, \mathcal{M}_n(\mathbf{T})\}$$

e obteríamos os mesmos K-grupos, podemos supor que $n = 1$.

Considere o levantamento $w = (1 - F) \otimes I + Fxu^*F \otimes S^* \in \mathbf{T}$ de v por π. Temos que w é uma isometria parcial. De fato,

$$\begin{aligned} ww^* &= ((1-F) \otimes I + Fxu^*F \otimes S^*)((1-F) \otimes I + Fux^*F \otimes S) \\ &= (1-F) \otimes I + Fxu^*ux^*F \otimes S^*S = (1-F) \otimes I + Fxx^*F \otimes I \\ &= ((1-F) + Fxx^*F) \otimes I = vv^* \otimes I = 1 \otimes I \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} w^*w &= ((1-F) \otimes I + Fux^*F \otimes S)((1-F) \otimes I + Fxu^*F \otimes S^*) \\ &= (1-F) \otimes I + Fux^*xu^*F \otimes SS^* + (1-F) \otimes SS^* - (1-F) \otimes SS^* \\ &= (1-F) \otimes (I - SS^*) + ((1-F) + Fux^*xu^*F) \otimes SS^* \\ &= (1-F) \otimes P + v^*v \otimes SS^* = (1-F) \otimes P + 1 \otimes SS^* \end{aligned}$$

são projeções. Tome $p = F \otimes E_{00} \in A \otimes K(\mathcal{H})$, então

$$\psi(p) = 1 \otimes I - w^*w = 1 \otimes I - (1-F) \otimes P - 1 \otimes SS^* = F \otimes P,$$

e como

$$\psi(0) = 1 \otimes I - ww^* = 1 \otimes I - 1 \otimes I = 0,$$

tomando $q = 0$ e aplicando o Teorema 2.4.4 segue que

$$\delta_1([v]_1) = [p]_0 - [q]_0 = [F \otimes E_{00}]_0 - [0]_0 = [F \otimes E_{00}]_0.$$

Se $x \in \mathrm{Ker}(\delta_1)$, então

$$x = [(1_m - F_1) + F_1x_1u_m^*F_1]_1 - [(1_n - F_2) + F_2x_2u_n^*F_1]_1,$$

e com isso $x \in \mathrm{Ker}(\delta_1)$ se, e somente se, $[F_1 \otimes E_{00}]_0 = [F_2 \otimes E_{00}]_0$ em $K_0(A \otimes K(\mathcal{H}))$. Como $K_1(\kappa)$ é um isomorfismo, $x \in \mathrm{Ker}(\delta_1)$ se, e somente se, $[F_1]_0 = [F_2]_0$ em $K_0(A)$.

Tomando

$$F_1' = \begin{pmatrix} 0_p & 0 \\ 0 & F_1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad x_1' = \begin{pmatrix} 1_p & 0 \\ 0 & x_1 \end{pmatrix},$$

temos

$$[(1_m - F_1) + F_1 x_1 u_m^* F_1]_1 = [(1_{m+p} - F_1') + F_1' x_1' u_{m+p}^* F_1]_1,$$

e assim podemos assumir, sem perda de generalidade que $m = n$.

Se

$$F_k'' = \begin{pmatrix} F_k & 0 \\ 0 & 1_p \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad x_k'' = \begin{pmatrix} x_k & 0 \\ 0 & 1_p \end{pmatrix},$$

para $k = 1, 2$, então

$$\begin{aligned}
& [(1_{n+p} - F_1'') + F_1'' x_1'' u_{n+p}^* F_1'']_1 - [(1_{n+p} - F_2'') + F_2'' x_2'' u_{n+p}^* F_2'']_1 \\
= & \left[\begin{pmatrix} (1_n - F_1) + F_1 x_1 u_n^* F_1 & 0 \\ 0 & u_p^* \end{pmatrix}\right]_1 - \left[\begin{pmatrix} (1_n - F_2) + F_2 x_2 u_n^* F_2 & 0 \\ 0 & u_p^* \end{pmatrix}\right]_1 \\
= & \left[\begin{pmatrix} ((1_n - F_1) + F_1 x_1 u_n^* F_1)((1_n - F_2) + F_2 x_2 u_n^* F_2)^* & 0 \\ 0 & u_p^* u_p \end{pmatrix}\right]_1 \\
= & \left[\begin{pmatrix} ((1_n - F_1) + F_1 x_1 u_n^* F_1)((1_n - F_2) + F_2 x_2 u_n^* F_2)^* & 0 \\ 0 & 1_p \end{pmatrix}\right]_1 \\
= & \left[\begin{pmatrix} (1_n - F_1) + F_1 x_1 u_n^* F_1 & 0 \\ 0 & 1_p \end{pmatrix}\right]_1 - \left[\begin{pmatrix} (1_n - F_2) + F_2 x_2 u_n^* F_2 & 0 \\ 0 & 1_p \end{pmatrix}\right]_1 \\
= & [(1_n - F_1) + F_1 x_1 u_n^* F_1]_1 - [(1_n - F_2) + F_2 x_2 u_n^* F_2]_1,
\end{aligned}$$

segue que todo elemento de $\mathrm{Ker}(\delta_1)$ pode ser escrito como

$$\omega = [(1_n - F_1) + F_1 x_1 u_n^* F_1]_1 - [(1_n - F_2) + F_2 x_2 u_n^* F_2]_1,$$

com $[F_1]_0 = [F_2]_0$, e portanto, com $(F_1 \oplus 1_n) = v(F_2 \oplus 1_n)v^*$, para algum unitário $v \in \mathcal{M}_{2n}(A)$ (Proposição 2.1.6). Logo, tomando $k = 2n$ e denotando $F_1 \oplus 1_n$, $F_2 \oplus 1_n$, $x_1 \oplus 1_n$ e $x_2 \oplus 1_n$ também por F_1, F_2, x_1 e x_2, respectivamente, temos

$$\begin{aligned}
\omega &= [(1_k - F_1) + F_1 x_1 u_k^* F_1]_1 - [(1_k - F_2) + F_2 x_2 u_k^* F_2]_1 \\
&= [(1_k - F_1) + F_1 x_1 u_k^* F_1]_1 - [(v^* 1_n v - v^* F_1 v) + v^* F_1 v x_2 u_n^* v^* F_1 v]_1 \\
&= [(1_k - F_1) + F_1 x_1 u_k^* F_1]_1 - [v^*((1_k - F_1) + F_1 v x_2 u_n^* v^* u_n u_k^* F_1) v]_1 \\
&= [(1_k - F_1) + F_1 x_1 u_k^* F_1]_1 - [v^*((1_k - F_1) + F_1 v x_2 \alpha_k^{-1}(v^*) u_k^* F_1) v]_1,
\end{aligned}$$

e portanto, denotando $x_3 = vx_2\alpha_k^{-1}(v^*) \in \mathcal{M}_k(A)$, temos

$$\begin{aligned}
\omega &= [(1_k - F_1) + F_1x_1u_k^*F_1]_1 - [(1_k - F_1) + F_1x_3u_k^*F_1]_1 \\
&= [((1_k - F_1) + F_1x_1u_k^*F_1)((1_k - F_1) + F_1x_3u_k^*F_1)^*]_1 \\
&= [((1_k - F_1) + F_1x_1u_k^*F_1)((1_k - F_1) + F_1u_nx_3^*F_1)]_1 \\
&= [(1_k - F_1) + F_1x_1u_n^*u_nx_3^*F_1)]_1 = [(1_k - F_1) + F_1x_1x_3^*F_1)]_1 \\
&= [(1_k - F_1) + F_1x_1u_nu_k^*x_3^*u_nu_k^*F_1)]_1 = [(1_k - F_1) + F_1\underbrace{x_1u_k\alpha^{-1}(x_3^*)}_{\in\mathcal{M}_k(A)}u_k^*F_1)]_1,
\end{aligned}$$

o que é suficiente para que $\omega \in \mathrm{Im}(K_1(i))$. Portanto, $\mathrm{Ker}(\delta_1) \subset \mathrm{Im}(K_1(i))$. □

Lema 3.3.4. *O homomorfismo $K_0(d) : K_0(A) \to K_0(\mathbf{T})$ é um isomorfismo.*

Demonstração. Se $\mathbf{T}(C(\mathbb{T}) \otimes A, \mathrm{id}_{C(\mathbb{T})} \otimes \alpha)$ é a álgebra de Toeplitz associada ao C^*-sistema dinâmico $\{C(\mathbb{T}) \otimes A, \mathrm{id}_{C(\mathbb{T})} \otimes \alpha\}$, vamos mostrar que

$$\mathbf{T}(C(\mathbb{T}) \otimes A, \mathrm{id}_{C(\mathbb{T})} \otimes \alpha) \cong C(\mathbb{T}) \otimes \mathbf{T}.$$

Os elementos da forma $f\otimes a$, com $f \in C(\mathbb{T})$ e $a \in A$, formam um conjunto denso em $C(\mathbb{T})\otimes A$ e os elementos da forma $\sum_{i=-n}^{n} y_i(\mathbf{1} \otimes u)^i$, com cada $y_i \in C(\mathbb{T}) \otimes A$ e sendo $\mathbf{1} : \lambda \mapsto 1$ a unidade de $C(\mathbb{T})$, são densos em $\overline{B} := (C(\mathbb{T}) \otimes A) \times_{\mathrm{id}_{C(\mathbb{T})}\otimes\alpha} \mathbb{Z}$. Então os elementos da forma $\sum_{i=-n}^{n}(f_i\otimes a_i)(\mathbf{1}\otimes u)^i = \sum_{i=-n}^{n} f_i\otimes(a_iu^i)$ constituem um conjunto denso em $\overline{B}$. Isto implica que os elementos da forma

$$\sum_{j=-m}^{m}\left(f_j \otimes \left(\sum_{i=-n_j}^{n_j} a_{i,j}u^i\right)\right)$$

formam um conjunto denso em $\overline{B}$, portanto $\overline{B} \cong C(\mathbb{T}) \otimes (A \times_\alpha \mathbb{Z})$, devido às construções do produto cruzado e do produto tensorial. Com isso, temos que a C^*-subálgebra de $\overline{B}\otimes C^*(S)$ gerada por $z \otimes A \otimes I$ e $\mathbf{1} \otimes u \otimes S$ é $*$-isomorfa à $C(\mathbb{T}) \otimes \mathbf{T}$, sendo $C(\mathbb{T}) \ni z : \lambda \mapsto \lambda$.

Aplicando o Lema 3.3.3, temos que

$$K_1(\mathrm{id}_{C(\mathbb{T})} \otimes d) : K_1(C(\mathbb{T}) \otimes A) \to K_1(C(\mathbb{T}) \otimes \mathbf{T})$$

é um isomorfismo.

Considere agora o diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & SA & \xrightarrow{\iota_A} & C(\mathbb{T}) \otimes A & \underset{\psi_A}{\overset{\varphi_A}{\rightleftarrows}} & A & \longrightarrow & 0 \\
& & \Big\downarrow{\scriptstyle Sd} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_{C(\mathbb{T})}\otimes d} & & \Big\downarrow{\scriptstyle d} & & \\
0 & \longrightarrow & S\mathbf{T} & \xrightarrow[\iota_{\mathbf{T}}]{} & C(\mathbb{T}) \otimes \mathbf{T} & \underset{\psi_{\mathbf{T}}}{\overset{\varphi_{\mathbf{T}}}{\rightleftarrows}} & \mathbf{T} & \longrightarrow & 0
\end{array} \tag{3.9}$$

em que as linhas são as seqüências exatas que cindem como na demonstração da Proposição 2.4.10. Note que este diagrama é comutativo. Aplicando o funtor K_1 neste diagrama, obtemos o seguinte diagrama de grupos:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K_1(SA) \arrow[r, "K_1(\iota_A)"] \arrow[d, "K_1(Sd)"'] & K_1(C(\mathbb{T}) \otimes A) \arrow[r, shift left, "K_1(\varphi_A)"] \arrow[d, "K_1(\mathrm{id}_{C(\mathbb{T})} \otimes d)"'] & K_1(A) \arrow[l, shift left, "K_1(\psi_A)"] \arrow[r] \arrow[d, "K_1(d)"] & 0 \\
0 \arrow[r] & K_1(S\mathbf{T}) \arrow[r, "K_1(\iota_{\mathbf{T}})"'] & K_1(C(\mathbb{T}) \otimes \mathbf{T}) \arrow[r, shift left, "K_1(\varphi_{\mathbf{T}})"] & K_1(\mathbf{T}) \arrow[l, shift left, "K_1(\psi_{\mathbf{T}})"] \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Como K_1 é um funtor exato que cinde, então este último diagrama é comutativo e suas linhas são seqüências exatas que cindem de grupos abelianos. Logo, $K_1(\iota_A)$ e $K_1(\iota_{\mathbf{T}})$ são homorfismos injetivos. E como $K_1(\mathrm{id}_{C(\mathbb{T})} \otimes d)$ e $K_1(d)$ são isomorfismos, então $K_1(Sd)$ é um homomorfismo injetivo.

Lembremos que, assim como na demonstração da Proposição 2.4.10,

$$SA = \{f \in C(\mathbb{T}, A) : f(1) = 0\} \quad \text{e} \quad S\mathbf{T} = \{f \in C(\mathbb{T}, \mathbf{T}) : f(1) = 0\}$$

e podemos identificar $C(\mathbb{T}) \otimes A$ e $C(\mathbb{T}) \otimes \mathbf{T}$, respectivamente, com $C(\mathbb{T}, A)$ e $C(\mathbb{T}, \mathbf{T})$, via $*$-isomorfismos dados por

$$\eta_A : f \otimes a \mapsto (x \mapsto f(x)a) \quad \text{e} \quad \eta_{\mathbf{T}} : f \otimes m \mapsto (x \mapsto f(x)m).$$

Assim, dado $g \in S\mathbf{T}$ tal que $\iota_{\mathbf{T}}(g) \in \mathrm{Im}(\mathrm{id}_{C(\mathbb{T})} \otimes d)$, sem perda de generalidade, podemos supor que existe $f \in C(\mathbb{T})$ tal que

$$(\mathrm{id}_{C(\mathbb{T})} \otimes d)(f \otimes a) = f \otimes d(a) = \iota_{\mathbf{T}}(g),$$

com $f(1) = 0$, para algum $a \in A$. Mas isso implica que, se $y \in K_1(S\mathbf{T})$, então

$$\Big(K_1(\mathrm{id}_{C(\mathbb{T})} \otimes d)^{-1} \circ K_1(\iota_{\mathbf{T}})\Big)(y) \in \mathrm{Im}(K_1(\iota_A)),$$

o que nos dá a sobrejetividade do homomorfismo $K_1(Sd)$, e portanto sua bijetividade. Segue do Teorema 2.4.9 que isso é equivalente à bijetividade do homomorfismo

$$K_0(d) : K_0(A) \to K_0(\mathbf{T}).$$

$\square$

Teorema 3.3.5 (Pimsner-Voiculescu). *A seqüência*

$$\begin{tikzcd}
K_0(A) \arrow[r, "K_0(\mathrm{id}_A)-K_0(\alpha^{-1})"] & K_0(A) \arrow[r, "K_0(i)"] & K_0(A \times_\alpha \mathbb{Z}) \arrow[d, "K_0(\kappa)^{-1}\circ\delta_0"] \\
K_1(A \times_\alpha \mathbb{Z}) \arrow[u, "K_1(\kappa)^{-1}\circ\delta_1"] & K_1(A) \arrow[l, "K_1(i)"] & K_1(A) \arrow[l, "K_1(\mathrm{id}_A)-K_1(\alpha^{-1})"]
\end{tikzcd}$$

é exata.

Demonstração. Partindo de um segmento da seqüência exata de seis termos obtida a partir da Extensão de Toeplitz associada a $A \times_\alpha \mathbb{Z}$ dada em (3.7), e aplicando o Lema 3.3.2(a) e o Lema 3.3.3, conforme o diagrama

$$\begin{tikzcd}
K_0(A \times_\alpha \mathbb{Z}) \arrow[r, equal] \arrow[d, "\delta_0"] & K_0(A \times_\alpha \mathbb{Z}) \arrow[d, "K_0(\kappa)^{-1}\circ\delta_0"] \\
K_1(A \otimes K(\mathcal{H})) \arrow[r, "K_1(\kappa)^{-1}"] \arrow[d, "K_1(\psi)"] & K_1(A) \arrow[d, "K_1(\mathrm{id}_A)-K_1(\alpha^{-1})"] \\
K_1(\mathbf{T}) \arrow[d, "K_1(\pi)"] & K_1(A) \arrow[l, "K_1(d)"] \arrow[d, "K_1(i)"] \\
K_1(A \times_\alpha \mathbb{Z}) \arrow[r, equal] \arrow[d, "\delta_1"] & K_1(A \times_\alpha \mathbb{Z}) \arrow[d, "K_1(\kappa)^{-1}\circ\delta_1"] \\
K_0(A \otimes K(\mathcal{H})) \arrow[r, "K_0(\kappa)^{-1}"] & K_0(A)
\end{tikzcd} , \tag{3.10}$$

obtemos o seguinte segmento da seqüência exata deste Teorema:

$$\begin{tikzcd}
K_0(A) & & K_0(A \times_\alpha \mathbb{Z}) \arrow[d, "K_0(\kappa)^{-1}\circ\delta_0"] \\
K_1(A \times_\alpha \mathbb{Z}) \arrow[u, "K_1(\kappa)^{-1}\circ\delta_1"] & K_1(A) \arrow[l, "K_1(i)"] & K_1(A) \arrow[l, "K_1(\mathrm{id}_A)-K_1(\alpha^{-1})"]
\end{tikzcd} .$$

Assim, para finalizarmos, basta observar que, com argumento análogo, o Lema 3.3.4 e o Lema 3.3.1 nos dão o diagrama

$$\begin{tikzcd}
K_0(A) \arrow[r, "K_0(\mathrm{id}_A)-K_0(\alpha^{-1})"] & K_0(A) \arrow[r, "K_0(i)"] & K_0(A \times_\alpha \mathbb{Z}) \arrow[d, "K_0(\kappa)^{-1}\circ\delta_0"] \\
K_1(A \times_\alpha \mathbb{Z}) \arrow[u, "K_1(\kappa)^{-1}\circ\delta_1"] & & K_1(A),
\end{tikzcd}$$

completanto a Seqüência Exata de Pimsner-Voiculescu. $\square$

O Corolário abaixo é uma importante aplicação do Teorema 3.3.5.

Corolário 3.3.6. $K_0(\mathcal{A}_\theta) \cong K_1(\mathcal{A}_\theta) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

Demonstração. Segue do Exemplo 1.4.13 que $\mathcal{A}_\theta \cong C(\mathbb{T}) \times_{\alpha_\theta} \mathbb{Z}$. Aplicando o Teorema 3.3.5, obtemos a seqüência exata

$$\begin{tikzcd}
K_0(C(\mathbb{T})) \arrow[r, "K_0(\mathrm{id}_{C(\mathbb{T})})-K_0(\alpha_\theta^{-1})"] & K_0(C(\mathbb{T})) \arrow[r, "K_0(i)"] & K_0(C(\mathbb{T}) \times_{\alpha_\theta} \mathbb{Z}) \arrow[d, "K_0(\kappa)^{-1}\circ\delta_0"] \\
K_1(C(\mathbb{T}) \times_{\alpha_\theta} \mathbb{Z}) \arrow[u, "K_1(\kappa)^{-1}\circ\delta_1"] & K_1(C(\mathbb{T})) \arrow[l, "K_1(i)"'] & K_1(C(\mathbb{T})) \arrow[l, "K_1(\mathrm{id}_{C(\mathbb{T})})-K_1(\alpha_\theta^{-1})"']
\end{tikzcd}$$

Lembramos que $K_i(C(\mathbb{T})) = \mathbb{Z}$ e que $[1]_0$ é o gerador de $K_0(C(\mathbb{T}))$ e $[z]_1$ é o gerador de $K_1(C(\mathbb{T}))$ (Corolário 2.4.11). Assim,

$$(K_0(\mathrm{id}_{C(\mathbb{T})}) - K_0(\alpha_\theta^{-1}))([1]_0) = [1]_0 - [1]_0 = 0$$

e

$$(K_1(\mathrm{id}_{C(\mathbb{T})}) - K_1(\alpha_\theta^{-1}))([z]_0) = [z]_1 - [\alpha_\theta^{-1}(z)]_1 = [z]_1 - [e^{-2\pi i\theta} z]_1 = 0.$$

Logo,

$$0 = \mathrm{Im}(K_i(\mathrm{id}_{C(\mathbb{T})}) - K_i(\alpha_\theta^{-1})) = \mathrm{Ker}(K_i(\iota)),$$

portanto $K_i(\iota)$ é injetivo, $i = 0, 1$. Com isso, temos

$$\mathrm{Im}(K_i(\kappa)^{-1} \circ \delta_i) = \mathrm{Ker}(K_{1-i}(\mathrm{id}_{C(\mathbb{T})}) - K_{1-i}(\alpha_\theta^{-1})) = \mathbb{Z} = \mathrm{Im}(K_i(\iota)) = \mathrm{Ker}(K_i(\kappa)^{-1} \circ \delta_i),$$

para $i = 0$ ou $i = 1$. Portanto, $K_0(\mathcal{A}_\theta) \cong K_1(\mathcal{A}_\theta) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. $\square$

Apêndice A

Produto Tensorial de C^*-álgebras

Faremos neste apêndice uma construção detalhada do produto tensorial de C^*-álgebras. Utilizamos como referências básicas [17] e [11]. A construção desses objetos se segue do produto tensorial algébrico, que é um artifício para "linearizar" aplicações bilineares. A dificuldade aparece no momento de introduzirmos uma norma sobre este produto tensorial algébrico. Em geral, uma C^*-norma sobre o produto tensorial algébrico não é completa e, ao fazer o completamente, podemos obter com isso C^*-álgebras não $*$-isomorfas. Entretanto, existem C^*-álgebras cuja tensorização por qualquer outra C^*-álgebra admite uma (única) C^*-norma completa. As C^*-álgebras com esta propriedade são chamadas de nucleares.

Vamos iniciar este apência apresentando um resumo do produto tensorial algébrico. Se E e F são espaços vetoriais, então o produto cartesiano $E \times F$ é um espaço vetorial definindo soma de vetores e multiplição de vetor por escalar coordenada a coordenada. O produto tensorial algébrico entre E e F é um conjunto construído a partir de $E \times F$, em que seus elementos, denotados por $e \otimes f$, satisfazem as relações

$$\begin{aligned} (e_1 + e_2) \otimes f &= e_1 \otimes f + e_2 \otimes f \quad \text{(distributividade "bilinear" da soma) e} \\ \lambda(e \otimes f) &= \lambda e \otimes f = e \otimes \lambda f \quad \text{(multiplicação "bilinear" por escalar).} \end{aligned}$$

No sentido de construir este conjunto, considere o espaço vetorial $\mathbb{C}^{E\times F}$ de todas as combinações lineares finitas de elementos de $E \times F$ com coeficientes complexos, isto é,

$$\mathbb{C}^{E\times F} = \left\{ \sum_{\lambda\in\Lambda} \lambda(e, f) : e \in E, f \in F \text{ e } \Lambda \text{ é subconjunto finito de } \mathbb{C} \right\}.$$

Em geral, os elementos $(e_1, f) + (e_2, f)$ e $(e_1 + e_2, f)$ são distintos, assim como são diferentes os elementos $\lambda(e, f)$, $(\lambda e, f)$ e $(e, \lambda f)$. A fim estabelecer uma equivalência entre elementos como estes últimos, considere o *espaço nulo* $\mathcal{N}$ de todas as combinações lineares finitas de elementos dos tipos

$$(e_1 + e_2, f) - (e_1, f) - (e_2, f), \tag{A.1}$$

$$(e, f_1 + f_2) - (e, f_1) - (e, f_2), \tag{A.2}$$

$$\lambda(e, f) - (\lambda e, f) \quad \text{e} \quad \lambda(e, f) - (e, \lambda f), \tag{A.3}$$

em que $e, e_1, e_2 \in E$, $f, f_1, f_2 \in F$ e $\lambda \in \mathbb{C}$.

O *produto tensorial algébrico* entre os espaços vetoriais E e F define-se como o espaço vetorial quociente

$$E \odot F = \mathbb{C}^{E \times F}/\mathcal{N}.$$

Se ϕ denota a aplicação quociente de $\mathbb{C}^{E\times F}$ em $E \odot F$, então a avaliação de ϕ em cada um dos elementos dados em A.1 a A.3 resulta no elemento nulo, daí segue que

$$\phi(e_1 + e_2, f) = \phi(e_1, f) + \phi(e_2, f), \tag{A.4}$$

$$\phi(e, f_1 + f_2) = \phi(e, f_1) + \phi(e, f_2) \text{ e} \tag{A.5}$$

$$\lambda\phi(e, f) = \phi(\lambda(e, f)) = \phi(\lambda e, f) = \phi(e, \lambda f). \tag{A.6}$$

Se $e \in E$ e $f \in F$, os elemento $\phi(e, f)$ são chamados de *tensores elementares*, e são denotados por $e \otimes f$. Logo, as relações dadas em A.4 a A.6 se escrevem como

$$(e_1 + e_2) \otimes f = e_1 \otimes f + e_2 \otimes f,$$

$$e \otimes (f_1 + f_2) = e \otimes f_1 + e \otimes f_2 \text{ e}$$

$$\lambda(e \otimes f) = \lambda e \otimes f = e \otimes \lambda f.$$

Note que $0 \otimes 0 = 0 \otimes f = e \otimes 0$, quaisquer que sejam $e \in$ e $f \in F$.

Como a aplicação quociente é sobrejetiva, então todo elemento de $E \odot F$ pode ser escrito como soma finita de tensores elementares. Entretanto esta soma não é necessariamente única, dado que a aplicação quociente não é necessariamente injetiva.

A Proposição a seguir vai nos permitir definir em seguida um produto e uma involução sobre o produto tensorial algébrico de duas $*$-álgebras. Para sua demonstração vide [17, Proposição T.2.4].

Proposição A.1. *Sejam E e F espaços vetoriais e seja $\pi : E \times F \to E \odot F$ a aplicação bilinear canônica (aplicação inclusão composta com a aplicação quociente). Se M é um espaço vetorial e $\psi : E \times F \to M$ é uma aplicação bilinear, então ψ se estende de maneira única a $E \odot F$, isto é, existe uma única aplicação linear $\varphi : E \odot F \to M$ tal que $\varphi \circ \pi = \psi$.*

Vamos agora supor que A e B são $*$-álgebras. Para ter em $A \odot B$ uma estrutura compatível, gostaríamos de obter um produto e uma involução que, nos tensores elementares, satisfaçam

$$(a_1 \otimes b_1)(a_2 \otimes b_2) = (a_1 a_2 \otimes b_1 b_2), \quad (a \otimes b)^* = (a^* \otimes b^*) \quad \text{e}$$

$$(a_1 \otimes b_1 + a_2 \otimes b_2) a_3 \otimes b_3 = a_1 a_3 \otimes b_1 b_3 + a_2 a_3 \otimes b_2 b_3.$$

Para isso iremos aplicar a Proposição A.1.

Dados $a \in A$ e $b \in B$ fixados, considere a aplicação bilinear

$$\begin{array}{rccc} \psi_{a,b}: & A \times B & \longrightarrow & A \odot B \\ & (c,d) & \longmapsto & ac \otimes bd, \end{array}$$

que estende-se de maneira única à $\varphi_{a,b} : A \odot B \longrightarrow A \odot B$, com $\varphi_{a,b} \circ \pi = \psi_{a,b}$, o que torna $\varphi_{a,b}$ a multiplicação à direita pelo tensor elementar $a \otimes b$. Considere agora a aplicação bilinear

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & A \times B & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(A \odot B) \\ & (a,b) & \longmapsto & \varphi_{a,b} \end{array},$$

que se estende de maneira única a uma aplicação linear

$$\mu : A \odot B \longrightarrow \mathrm{Hom}(A \odot B),$$

tal que $\mu \circ \pi = \varphi$. Isto é, se $s = \sum_{i=1}^{m} a_i \otimes b_i$ e $t = \sum_{j=1}^{n} c_j \otimes d_j$ são elementos de $A \odot B$, então

$$\begin{aligned} \mu(s)(t) &= \mu\left(\sum_{i=1}^{m} a_i \otimes b_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} c_j \otimes d_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \varphi(a_i, b_i)\left(\sum_{j=1}^{n} c_j \otimes d_j\right) = \sum_{i=1}^{m} \varphi_{a_i,b_i}\left(\sum_{j=1}^{n} c_j \otimes d_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \varphi_{a_i,b_i}(c_j \otimes d_j) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_i c_j \otimes b_i d_j. \end{aligned}$$

Logo, definindo $s \cdot t := \mu(s)(t)$, temos que $(A \odot B, \cdot)$ é uma álgebra.

Dado um espaço vetorial complexo E, denotaremos por E^c o *espaço vetorial conjugado de* E, que coincide com E como grupo aditivo, mas cuja multiplicação por escalar é dada por $(\lambda, e) \mapsto \bar{\lambda} e$.

Defina a aplicação

$$\begin{array}{ccc} A \times B & \longrightarrow & (A \odot B)^c \\ (a,b) & \longmapsto & a^* \otimes b^*. \end{array}$$

É fácil ver que esta aplicação é bilinear, e portanto estende-se para a aplicação linear $*: A \odot B \to (A \odot B)^c$. Segue que

$$\left(\sum_{i=1}^{m} a_i \otimes b_i\right)^* = \sum_{i=1}^{m} a_i^* \otimes b_i^*.$$

Claramente esta aplicação nos dá uma involução sobre $A \odot B$.

Proposição A.2 (Propriedade Universal). *Sejam A, B e C $*$-álgebras e suponha que a aplicação $\psi : A \times B \to C$ é bilinear, multiplicativa e preserva adjuntos. Então existe uma única extensão $\varphi : A \odot B \to C$ de ψ que é linear, multiplicativa e preserva adjuntos.*

Demonstração. Basta mostrar que a extensão $\varphi : A \odot B \to C$ dada na Proposição A.1 é multiplicativa e preserva adjuntos. Assim, temos

$$\begin{aligned} \varphi((a_1 \otimes b_1)(a_2 \otimes b_2)) &= \varphi(a_1a_2 \otimes b_1b_2) = \psi(a_1a_2, b_1b_2) \\ &= \psi(a_1, b_1)\psi(a_2, b_2) = \varphi(a_1 \otimes b_1)\varphi(a_2 \otimes b_2) \quad \text{e} \end{aligned}$$

$$\varphi(a^* \otimes b^*) = \psi(a^*, b^*) = \psi(a, b)^* = \varphi(a \otimes b)^*,$$

quaisquer que sejam $a, a_1, a_2 \in A$ e $b, b_1, b_2 \in B$. □

Corolário A.3. *Sejam A, B, C, D $*$-álgebras e considere os $*$-homomorfismos $\psi_1 : A \to C$ e $\psi_2 : B \to D$. Então existe um único $*$-homomorfismo*

$$\psi_1 \odot \psi_2 : A \odot B \to C \odot D$$

satisfazendo

$$\psi_1 \odot \psi_2(a \otimes b) = \psi_1(a) \otimes \psi_2(b),$$

quaisquer que sejam $a \in A$ e $b \in B$.

Demonstração. Como ψ_1 e ψ_2 são $*$-homomorfismos, então uma aplicação $\varphi : A \times B \to C \odot D$ satisfazendo $\varphi(a, b) = \psi_1(a) \otimes \psi_2(b)$ é bilinear, preserva produto e preserva involução. Segue da Proposição A.2 que φ se estende unicamente a um $*$-homomorfismo de $A \odot B$ em $C \odot D$, que denotamos por $\psi_1 \odot \psi_2$. □

Exemplo A.4. *Se A é uma $*$-álgebra, então $A \odot \mathbb{C} \cong A$.*

Demonstração. Basta definir a aplicação bilinear $A \times \mathbb{C} \ni (a, \lambda) \mapsto \lambda a \in A$ e estendê-la, aplicando a Proposição A.2, a uma aplicação linear sobrejetiva

$$A \odot \mathbb{C} \ni \sum_{k=1}^{n} a_k \otimes \lambda_k \mapsto \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k \in A.$$

E como

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \otimes \lambda_k = \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k\right) \otimes 1,$$

esta aplicação é claramente injetiva. $\square$

O Lema abaixo vai nos ajudar a construir um $*$-isomorfismo muito importante para este trabalho, apresentado no Exemplo logo em seguida. A demonstração do Lema pode ser encontrada em [17, Lema T.2.8].

Lema A.5. *Suponha que os vetores $f_1, f_2, ..., f_n$ do espaço vetorial F sejam linearmente independentes. Se $e_1, e_2, ..., e_n$ são vetores do espaço vetorial E tais que*

$$\sum_{i=1}^{n} e_i \otimes f_i = 0,$$

então $e_1 = e_2 = ... = e_n = 0$. Em particular, se $\{f_1, ..., f_n\}$ é uma base de F, então todo elemento $t \in E \odot F$ se escreve de maneira única na forma $\sum_{i=1}^{n} e_i \otimes f_i$.

Exemplo A.6 (Álgebras de Matrizes). *Se A é uma $*$-álgebra, então*

$$A \odot \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \cong \mathcal{M}_n(A).$$

Demonstração. Seja $\{E_{ij}\}_{1 \leq i,j \leq n}$ a base canônica de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, isto é, para cada $i, j = 1, ...n$, E_{ij} é uma matriz cuja entrada da linha i e coluna j é igual a 1 e todas as outras entradas são iguais a 0. Segue do Lema A.5 que todo elemento $t \in A \odot \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ pode ser escrito como

$$t = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \otimes E_{ij},$$

em que os elementos $a_{ij} \in A$ são únicos. A aplicação

$$\begin{array}{rccc} \psi: & A \odot \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \to & \mathcal{M}_n(A) \\ & \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \otimes E_{ij} & \mapsto & (a_{ij}), \end{array}$$

é linear, multiplicativa dado que

$$E_{ij} \cdot E_{kl} = \begin{cases} 0 & \text{se } j \neq k \\ E_{il} & \text{se } j = k, \end{cases}$$

preserva adjunto dado que

$$E_{ij}^* = E_{ji}$$

e é evidentemente bijetiva. $\square$

Vamos passar ao estudo dos Produtos Tensoriais entre espaços de Hilbert. Sejam $\mathcal{H}$ e $\mathcal{K}$ espaços de Hilbert. O objetivo é definir um espaço de Hilbert a partir de $\mathcal{H} \odot \mathcal{K}$. Para isso iremos definir um produto interno em $\mathcal{H} \odot \mathcal{K}$.

Dados $h_0 \in \mathcal{H}$ e $k_0 \in \mathcal{K}$, defina a aplicação $\psi(h_0, k_0) : \mathcal{H} \times \mathcal{K} \to \mathbb{C}$ por

$$(h, k) \mapsto < h, h_0 >_{\mathcal{H}} < k, k_0 >_{\mathcal{K}},$$

quaisquer que sejam $h \in \mathcal{H}$ e $k \in \mathcal{K}$. Note que esta aplicação é bilinear, e portanto segue da Proposição A.1 que $\psi(h_0, k_0)$ se estende unicamente a uma aplicação linear definida em $\mathcal{H} \odot \mathcal{K}$, que também chamaremos de $\psi(h_0, k_0)$. Considere então G o espaço vetorial de todos os funcionais conjugados lineares de $\mathcal{H} \odot \mathcal{K}$, isto é,

$$G = \{f : \mathcal{H} \odot \mathcal{K} \to \mathbb{C} : f(\lambda t) = \overline{\lambda} f(t), \ \forall \lambda \in \mathbb{C}, \ \forall t \in \mathcal{H} \odot \mathcal{K}\}.$$

Defina agora a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \eta : & \mathcal{H} \times \mathcal{K} & \to & G \\ & (h_0, k_0) & \mapsto & \overline{\psi(h_0, k_0)}, \end{array}$$

que é bilinear e, novamente aplicando a Proposição A.1, estendemos esta aplicação a $\zeta : \mathcal{H} \odot \mathcal{K} \to G$, que é linear e satisfaz

$$\begin{aligned} \zeta(h_1 \otimes k_1)(h_2 \otimes k_2) &= \overline{\varphi(h_1, k_1)}(h_2 \otimes k_2) = \overline{< h_2, h_1 >_{\mathcal{H}} < k_2, k_1 >_{\mathcal{K}}} \\ &= < h_1, h_2 >_{\mathcal{H}} < k_1, k_2 >_{\mathcal{K}}, \end{aligned}$$

quaisquer que sejam $h_1, h_2 \in \mathcal{H}$ e $k_1, k_2 \in \mathcal{K}$.

Defina agora

$$< t_1, t_2 >_{\mathcal{H} \odot \mathcal{K}} := \overline{\zeta(t_2)}(t_1),$$

em que $t_1, t_2 \in \mathcal{H} \odot \mathcal{K}$. Pode-se provar que $< \cdot, \cdot >_{\mathcal{H} \odot \mathcal{K}}$ é a única forma sesquilinear satisfazendo

$$< h_1 \otimes k_1, h_2 \otimes k_2 >_{\mathcal{H} \odot \mathcal{K}} = < h_1, h_2 >_{\mathcal{H}} < k_1, k_2 >_{\mathcal{K}},$$

e portanto define um produto interno sobre $\mathcal{H} \odot \mathcal{K}$. Daqui em diante, utilizaremos a notação $< \cdot, \cdot >$ tanto para $< \cdot, \cdot >_{\mathcal{H} \odot \mathcal{K}}$, como para $< \cdot, \cdot >_{\mathcal{H}}$ e $< \cdot, \cdot >_{\mathcal{K}}$. Acreditamos que o contexto irá deixar claro qual é o produto interno em questão.

Definição A.7. *Sejam $\mathcal{H}$ e $\mathcal{K}$ espaços de Hilbert. Definimos o* produto tensorial entre $\mathcal{H}$ e $\mathcal{K}$ *como o completamento de $\mathcal{H} \odot \mathcal{K}$ com relação à norma proveniente do único produto interno que satisfaz*

$$< h_1 \otimes k_1, h_2 \otimes k_2 > = < h_1, h_2 > < k_1, k_2 > .$$

Denotamos este completamento por $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$.

Proposição A.8. *Sejam $\mathcal{H}$ e $\mathcal{K}$ são espaços de Hilbert. Então, existe um $*$-homomorfismo injetivo de $B(\mathcal{H}) \odot B(\mathcal{K})$ em $B(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$.*

Demonstração. Sejam $T \in B(\mathcal{H})$ e $S \in B(\mathcal{K})$ operadores arbitrários fixados. Segue da Proposição A.2 que existe uma inclusão $\iota(T,S) : \mathcal{H} \odot \mathcal{K} \to \mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ que é linear e satisfaz $\iota(T,S)\,(h \otimes k) = T(h) \otimes S(k)$. Vamos mostrar que esta aplicação é limitada. Note que

$$\iota(T, I_{\mathcal{K}})\iota(I_{\mathcal{H}}, S) = \iota(T,S),$$

em que $I_{\mathcal{H}}$ e $I_{\mathcal{K}}$ denotam respectivamente os operadores identidade de $\mathcal{H}$ e $\mathcal{K}$. Assim, é suficiente mostrar que as aplicações $\iota(T, I_{\mathcal{K}})$ e $\iota(I_{\mathcal{H}}, S)$ são limitadas.

Se $t \in \mathcal{H} \odot \mathcal{K}$, então t é da forma

$$t = \sum_{j=1}^{m} x_j \otimes y_j.$$

Suponha que $\{k_\iota\}_{\iota \in \mathcal{I}}$ é uma base ortonormal de $\mathcal{K}$. Segue que cada y_j se escreve como

$$y_j = \sum_{\iota \in \mathcal{I}} < y_j, k_\iota > k_\iota.$$

Logo,

$$t = \sum_{j=1}^{m} x_j \otimes \left(\sum_{\iota \in \mathcal{I}} < y_j, k_\iota > k_\iota \right) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{\iota \in \mathcal{I}} < y_j, k_\iota > x_j \otimes k_\iota,$$

e, como $t \in \mathcal{H} \odot \mathcal{K}$ implica que apenas uma quantidade finita dos elementos $< y_j, k_\iota > x_j$ é não nula, podemos reescrever t na forma

$$t = \sum_{i=1}^{n} h_i \otimes k_i,$$

com $k_1, ..., k_n$ dois a dois ortonornais em $\mathcal{K}$, então os vetores $h_1 \otimes k_1, ..., h_n \otimes k_n$ são dois a dois ortogonais em $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$, assim como os vetores $T(h_1) \otimes k_1, ..., T(h_n) \otimes k_n$ também são dois a dois ortogonais em $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$. Segue que

$$\begin{aligned} \|\iota(T, I_{\mathcal{K}})(t)\|^2 &= \left\| \sum_{i=1}^{n} T(h_i) \otimes k_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|T(h_i) \otimes k_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|T(h_i)\|^2 \\ &\leq \|T\|^2 \sum_{i=1}^{n} \|h_i\|^2 = \|T\|^2 \sum_{i=1}^{n} \|h_i \otimes k_i\|^2 \\ &= \|T\|^2 \left\| \sum_{i=1}^{n} h_i \otimes k_i \right\|^2 = \|T\|^2 \|t\|^2, \end{aligned}$$

e portanto $\|\iota(T, I_{\mathcal{K}})(t)\| \leq \|T\|\|t\|$. Analogamente, obtemos $\|\iota(I_{\mathcal{H}}, S)(t)\| \leq \|S\|\|t\|$. Como, nos dois casos, t é arbitrário, segue que as aplicações $\iota(T, I_{\mathcal{K}})$ e $\iota(I_{\mathcal{H}}, S)$ são limitadas.

Vamos considerar agora a única extensão de $\iota(T, S)$ a uma aplicação linear limitada definida em $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$, e vamos denotá-la também por $\iota(T, S)$.

Segue da Proposição A.2 que a aplicação bilinear

$$\mathcal{H} \times \mathcal{K} \ni (T, S) \mapsto \iota(T, S) \in B(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$$

pode ser estendida a um $*$-homomorfismo

$$\iota : B(\mathcal{H}) \odot B(\mathcal{K}) \to B(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$$

que satisfaz

$$\iota\left(\sum_{j=1}^{m} T_j \otimes S_j\right)\left(\sum_{i=1}^{n} h_i \otimes k_i\right) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} T_j(h_i) \otimes S_j(k_i).$$

Vamos agora mostrar que ι é injetivo. Seja $V \in \mathrm{Ker}(\iota)$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $V = \sum_{i=1}^{m} T_i \otimes S_i$, com $\{S_1, ... S_m\}$ linearmente independente em $B(\mathcal{K})$. De fato, escolhendo $V = \sum_{i=1}^{n} R_i \otimes S_i$ arbitrário e reordenando os operadores $S_1, ..., S_n$ obtemos $\{S_1, ..., S_m\}$ linearmente independente com $m < n$. Para cada $i = m+1, ..., n$, temos que

$$S_i = \sum_{j=1}^{m} \lambda_{ij} S_j.$$

Segue que

$$\begin{aligned}
V &= \sum_{i=1}^{n} R_i \otimes S_i = \sum_{i=1}^{m} R_i \otimes S_i + \sum_{i=m+1}^{n} R_i \otimes S_i \\
&= \sum_{i=1}^{m} R_i \otimes S_i + \sum_{i=m+1}^{n} R_i \otimes \left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_{ij} S_j\right) \\
&= \sum_{i=1}^{m} R_i \otimes S_i + \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=m+1}^{n} \lambda_{ij} R_i\right) \otimes S_j \\
&= \sum_{i=1}^{m}\left(R_i + \left(\sum_{k=m+1}^{n} \lambda_{ki} R_k\right)\right) \otimes S_i.
\end{aligned}$$

Basta agora tomar

$$T_i = R_i + \left(\sum_{k=m+1}^{n} \lambda_{ki} R_k\right), \ \forall i = 1, ..., m.$$

Vamos mostrar que $T_1 = ... = T_m = 0$. Fixe $h_0 \in \mathcal{H}$. Repetindo o argumento acima, podemos escrever

$$\sum_{k=1}^{m} T_k(h_0) \otimes S_k = \sum_{l=1}^{p} h_l \otimes R_l \in \mathcal{H} \odot B(\mathcal{K}),$$

com $\{h_1, ..., h_p\}$ conjunto linearmente independente de vetores de $\mathcal{H}$, e $R_i \in B(\mathcal{K})$, para todo $l = 1, ..., p$. Para cada vetor $k \in \mathcal{K}$, a aplicação

$$\mathcal{H} \times B(\mathcal{K}) \ni (h, S) \mapsto h \otimes S(k) \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$$

é bilinear, e portanto segue da Proposição A.1 que se estende a uma aplicação linear de $\mathcal{H} \odot B(\mathcal{K})$ em $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ que satisfaz

$$\sum_{l=1}^{p} h_l \otimes S_l \mapsto \sum_{l=1}^{p} h_l \otimes S_l(k).$$

Segue do Lema A.5 que se

$$0 = \sum_{i=1}^{m} \iota(T_i \otimes S_i)(h_0 \otimes k) = \sum_{i=1}^{m} t_i(h_0) \otimes S_i(k) = \sum_{l=1}^{p} h_l \otimes R_l(k),$$

então $R_l(k) = 0$, para todo $l = 1, ..., p$. Logo, como $k \in \mathcal{K}$ é arbitrário, $R_j = 0$, para todo $j \geq 1$. Daí, segue que

$$\sum_{i=1}^{m} T_i(h_0) \otimes S_i = \sum_{l=1}^{p} h_l \otimes R_l = 0,$$

e portanto $T_i(h_0) = 0$, para todo $i = 1, ..., m$. Como $h_0 \in \mathcal{H}$ também é arbitrário, segue que $T_i = 0$, para todo $i = 1, ..., m$, e portanto $V = 0$. □

Convencionaremos a partir de agora que escreveremos $T \otimes S$ no lugar de $\iota(T \otimes S)$, dado que a todo momento estaremos nos referindo a um elemento de $B(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$ e nunca a um elemento de $B(\mathcal{H}) \odot B(\mathcal{K})$. Assim como no Corolário A.3, se $h \otimes j \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$, então $(T \otimes S)(h \otimes j) = T(h) \otimes S(j)$.

Definição A.9. *Sejam A e B C^*-álgebras e $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert. Chamamos $(\pi, \mathcal{H})$ de* representação algébrica *do produto tensorial algébrico $A \odot B$ se $\pi : A \odot B \to B(\mathcal{H})$ é um $*$-homomorfismo.*

Proposição A.10 (Produto Tensorial de Representações). *Sejam A e B C^*-álgebras. Para cada par de representações $(\pi_1, \mathcal{H}_1)$ e $(\pi_2, \mathcal{H}_2)$ de A e B existe uma única representação algébrica $(\pi_1 \odot \pi_2, \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)$ do produto tensorial algébrico $A \odot B$ satisfazendo*

$$(\pi_1 \odot \pi_2)(a \otimes b) = \pi_1(a) \otimes \pi_2(b),$$

quaisquer que sejam $a \in A$ e $b \in B$. E mais, se π_1 e π_2 são $*$-homomorfismos injetivos, então $\pi_1 \odot \pi_2$ é um $*$-homomorfismo injetivo.

Demonstração. A existência e a unicidade da representação algébrica $(\pi_1 \odot \pi_2, \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)$ satisfazendo

$$(\pi_1 \odot \pi_2)(a \otimes b) = \pi_1(a) \otimes \pi_2(b) \in B(\mathcal{H}_1) \odot B(\mathcal{H}_2) \subset B(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)$$

decorrem do Corolário A.3 e da Proposição A.8. Basta mostrarmos que a injetividade dos $*$-homomorfismos π_1 e π_2 implica a injetividade do $*$-homomorfismo $\pi_1 \odot \pi_2$.

Suponha que π_1 e π_2 sejam injetivos. Tome $t = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \in A \odot B$ e assuma, sem perda de generalidade, que $\{y_1, ..., y_n\}$ um conjunto linearmente independente de B. Segue que $\{\pi_2(y_1), ..., \pi_2(y_n)\}$ é um conjunto linearmente independente de $B(\mathcal{H}_2)$, dado que π_2 é injetivo. Agora, se $(\pi_1 \odot \pi_2)(t) = 0$, então $\sum_{i=1}^{n} \pi_1(x_i) \otimes \pi_2(y_i) = 0$, de onde segue que $\pi_1(x_1) = ... = \pi_1(x_n) = 0$, logo $x_1 = ... = x_n = 0$, e portanto $t = 0$. □

Sejam A e B C^*-álgebras e sejam, respectivamente, $(\pi_u, \mathcal{H}_u)$ e $(\rho_u, \mathcal{K}_u)$ suas representações universais. Como as representações universais são fiéis, segue da Proposição A.10 que existe um único $*$-homomorfismo injetivo $\sigma : A \odot B \to B(\mathcal{H}_u \otimes \mathcal{K}_u)$ tal que

$$\sigma(a \otimes b) = \pi_u(a) \otimes \rho_u(b),$$

quaisquer que sejam $a \in A$ e $b \in B$. Logo, a função

$$\begin{array}{cccc} \|\cdot\|_* : & A \odot B & \to & \mathbb{R}^+ \\ & t & \mapsto & \|\sigma(t)\|_{B(\mathcal{H}_u \otimes \mathcal{K}_u)}, \end{array}$$

é uma C^*-norma sobre $A \odot B$.

Definição A.11. *Sejam A e B C^*-álgebras. Chamamos a C^*-norma $\|\cdot\|_*$ de* C^*-norma espacial. *O completamento de $A \odot B$ com relação a esta norma é chamado de* produto tensorial espacial de A e B, *e é denotado por $A \otimes_* B$.*

Em geral, dadas duas C^*-álgebras A e B, pode existir mais de uma C^*-seminorma sobre o produto tensorial algébrico $A \odot B$, conforme ilustra o Exemplo abaixo. Convencionaremos que, se α é uma C^*-norma sobre $A \odot B$, então denotaremos o completamento de $A \odot B$ com relação a α por $A \otimes_\alpha B$.

Exemplo A.12. *Sejam A e B C^*-álgebras e seja γ a função dada dada por*

$$\gamma(t) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{n} \|a_i\|_A \|b_i\|_B : t = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i \right\}.$$

Então γ é uma C^*-seminorma sobre $A \odot B$.

De fato, se $t = \sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i$ e $s = \sum_{j=1}^m c_j \otimes d_j$, então

$$\sum_{i=1}^{n} \|a_i^*\|_A \|b_i^*\|_B = \sum_{i=1}^{n} \|a_i\|_A \|b_i\|_B$$

nos dá $\gamma(t^*) = \gamma(t)$, e

$$ts = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i\right)\left(\sum_{j=1}^{m} c_i \otimes d_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(a_i c_j) \otimes (b_i d_j).$$

Como

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \|a_i c_j\|_A \|b_i d_j\|_B &\leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \|a_i\|_A \|c_j\|_A \|b_i\|_B \|d_j\|_B \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} \|a_i\|_A \|b_i\|_B\right)\left(\sum_{j=1}^{m} \|c_j\|_A \|d_j\|_B\right),
\end{aligned}$$

segue que $\gamma(ts) \leq \gamma(t)\gamma(s)$, ou seja, γ é submultiplicativa. Em particular, fazendo $t = s^* = \sum_{j=1}^m c_j^* \otimes d_j^*$, obtemos uma igualdade no lugar da desigualdade acima, isto é, obtemos $\gamma(s^*s) = \gamma(s)^2$.

Sejam A e B C^*-álgebras e seja $\mathbf{M}$ o conjunto de todas as C^*-seminormas α sobre $A \odot B$. Considere a função dada por

$$\mu(t) = \sup_{\alpha \in \mathbf{M}} \alpha(t), \ \forall t \in A \odot B.$$

Se $t = \sum_{i=1}^m a_i \otimes b_i$, com $a_i \in A$ e $b_i \in B$, então pode-se provar que, para cada $\alpha \in \mathbf{M}$,

$$\alpha(t) \leq \sum_{i=1}^{m} \alpha(a_i \otimes b_i) \leq \sum_{i=1}^{m} \|a_i\|_A \|b_i\|_B.$$

e portanto $\mu(t) < \infty$. É fácil ver que

$$\begin{array}{rccc} \mu: & A \odot B & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & t & \longmapsto & \mu(t) \end{array} \tag{A.7}$$

é uma C^*-norma sobre o produto tensorial algébrico $A \odot B$.

Definição A.13. *Sejam A e B C^*-álgebras. Chamamamos a C^*-norma dada em* (A.7) *de C^*-*norma maximal. *O completamento de $A \odot B$ nesta norma é chamado de* produto tensorial maximal de A e B, *e é denotado por $A \otimes_\mu B$.*

Definição A.14. *Dizemos que uma C^*-álgebra A é* nuclear *se, para toda C^*-álgebra B, a $*$-álgebra $A \odot B$ admite uma única C^*-norma. Neste caso, denotaremos o completamento de $A \odot B$ nesta única C^*-norma por $A \otimes B$*

Observação A.15. *Sejam A e B C^*-álgebras e suponha que α e β sejam C^*-normas completas sobre $A \odot B$. Segue que a inclusão*

$$\begin{array}{ccc} A \otimes_\alpha B & \to & A \otimes_\beta B \\ t & \mapsto & t \end{array}$$

é um $*$-isomorfismo isométrico, logo $\alpha = \beta$. Assim, se o produto tensorial algébrico da C^*-álgebra A por qualquer C^*-álgebra B admite uma C^*-norma completa, então A é nuclear.

Exemplo A.16. *Para cada $n \geq 1$, a C^*-álgebra $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ é nuclear.*

De fato, seja A uma C^*-álgebra. Segue do Exemplo A.6 que $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \odot A \cong \mathcal{M}_n(A)$. Como a C^*-norma definida sobre $\mathcal{M}_n(A)$ na Seção 2.1 é completa, segue que $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ é nuclear.

Observação A.17. *Não faremos distinção entre os elementos de $A \otimes \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ e $\mathcal{M}_n(A)$. Se $(a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(A)$, então, omitindo o $*$-isomorfismo que identifica $A \otimes \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ com $\mathcal{M}_n(A)$, temos*

$$(a_{ij}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \otimes E_{ij},$$

sendo $E_{ij} = (\lambda_{kl})$, com $\lambda_{kl} = \delta_{ik}\delta_{lj}$.

Se φ é um $*$-homomorfismo de A em uma C^*-álgebra B, denotamos por φ_n o correspondente $*$-homomorfismo de $\mathcal{M}_n(A)$ em $\mathcal{M}_n(B)$. Como

$$\varphi \otimes \mathrm{id_n} \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \otimes E_{ij} \right) = \sum_{i,j=1}^{n} \varphi(a_{ij}) \otimes E_{ij},$$

podemos identificar $\varphi \otimes \mathrm{id}_n$ com o $*$-homomorfismo φ_n definido na Observação 2.1.3, em que id_n representa aqui a identidade de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

O Lema abaixo nos dá uma descrição das C^*-álgebras de dimensão finita, o que nos permitirá provar logo em seguida que estas C^*-álgebras são nucleares. Indicamos [11, Teorema 6.3.8] para uma demonstração deste Lema.

Lema A.18. *Se A é uma C^*-álgebra não nula de dimensão finita, então*

$$A \cong \mathcal{M}_{n_1}(\mathbb{C}) \oplus ... \oplus \mathcal{M}_{n_k}(\mathbb{C}),$$

para $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}^*$.

Proposição A.19. *Se A é uma C^*-álgebra de dimensão finita, então A é nuclear.*

Demonstração. Segue do Lema A.18 que, se A é uma C^*-álgebra de dimensão finita, então $A \cong \mathcal{M}_{n_1}(\mathbb{C}) \oplus ... \oplus \mathcal{M}_{n_k}(\mathbb{C})$. Se B é uma C^*-álgebra, então a única aplicação linear

$$\pi : (\mathcal{M}_{n_1}(\mathbb{C}) \oplus ... \oplus \mathcal{M}_{n_k}(\mathbb{C})) \odot B \to (\mathcal{M}_{n_1}(\mathbb{C}) \odot B) \oplus ... \oplus (\mathcal{M}_{n_k}(\mathbb{C}) \odot B)$$

satisfazendo

$$\pi((a_1, ..., a_k) \otimes b) = (a_1 \otimes b, ..., a_k \otimes b),$$

quaisquer que sejam $a_j \in \mathcal{M}_{n_j}(\mathbb{C})$, $j = 1, ...k$, e $b \in B$, é um $*$-isomorfismo. Como cada $\mathcal{M}_{n_j}(\mathbb{C}) \otimes B \cong \mathcal{M}_{n_j}(B)$, segue que $A \odot B$ admite uma C^*-norma completa. Como a C^*-álgebra B é arbitrária, segue que A é nuclear. □

Para provar que a C^*-álgebra dos operadores compactos num espaço de Hilbert separável de dimensão infinita é nuclear precisamos enunciar a seguinte Proposição. Sua demonstração encontra-se em [11, Teorema 6.3.10].

Proposição A.20. *Seja S um conjunto não vazio de C^*-subálgebras de uma C^*-álgebra A. Suponha que S é parcialmente ordenado pela inclusão, isto é, se $B, C \in \mathrm{S}$, então existe $D \in \mathrm{S}$ tal que $B, C \subset D$. Suponha que $\bigcup_{D \in \mathrm{S}} D$ é denso em A e que todas as C^*-álgebras em S são nucleares. Então A é nuclear.*

Corolário A.21. *Se $\mathcal{H}$ é um espaço de Hilbert separável de dimensão infinita, então o espaço do operadores compactos $K(\mathcal{H})$ é uma C^*-álgebra nuclear.*

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{N}$, a C^*-álgebra $F_n B(\mathcal{H}) F_n$ definida na demonstração da Proposição 2.1.11 é $*$-isomorfa a $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (que tem dimensão finita). Segue da Proposição A.19 que $F_n B(\mathcal{H}) F_n$ é nuclear. Se, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$A_n = F_n B(\mathcal{H}) F_n,$$

então $\mathrm{S} = \{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ é um conjunto de C^*-subálgebras de $K(\mathcal{H})$ parcialmente ordenado pela inclusão, tal que $\bigcup_{i \in \mathrm{I}} A_i$ é o conjunto dos operadores de posto finito de $\mathcal{H}$. Como $F(\mathcal{H})$ é denso em $K(\mathcal{H})$, segue da Proposição A.20 que $K(\mathcal{H})$ é uma C^*-álgebra nuclear. □

Com o Corolário do Teorema abaixo obteremos a nuclearidade de $C(\mathbb{T})$. Como referência para a demonstração do Teorema, indicamos [11, Teorema 6.4.15].

Teorema A.22 (Takesaki). *Toda C^*-álgebra abeliana é nuclear.*

Corolário A.23. *Se X é Hausdorff compacto, então $C(X)$ é nuclear.*

Com o Lema abaixo demonstraremos logo em seguida que tensorizar uma seqüência exata curta de C^*-álgebras nucleares preserva a exatidão da seqüência. A importância disso aparece na obtenção da Extensão de Toplitz associada ao produto cruzado. Indicamos [11, Teorema 6.5.1] para uma demonstração do Lema.

Lema A.24. *Sejam as C^*-álgebras A, B, C e D e sejam $\varphi : A \to C$ e $\psi : B \to D$ $*$-homomorfismos. Então, existe um único $*$-homomorfismo*

$$\pi : A \otimes_* B \to C \otimes_* D$$

satisfazendo $\pi(a \otimes b) = \varphi(a) \otimes \psi(b)$ quaisquer que sejam $a \in A$ e $a \in B$. E mais, se φe ψ são injetivos, então π também é injetivo.

Daqui em diante vamos denotar o $*$-homomorfismo π do Lema A.24 por $\varphi \otimes_* \psi$.

Proposição A.25. *Suponha que*

$$0 \longrightarrow J \xrightarrow{j} A \xrightarrow{\pi} B \longrightarrow 0$$

é uma seqüência exata curta de C^*-álgebras e que B ou D é nuclear. Então, a seqüência

$$0 \longrightarrow J \otimes_* D \overset{j \otimes_* \mathrm{id}_D}{\longrightarrow} A \otimes_* D \overset{\pi \otimes_* \mathrm{id}_D}{\longrightarrow} B \otimes D \longrightarrow 0$$

é exata.

Demonstração. Vamos denotar $\overline{j} = j \otimes_* \mathrm{id}$ e $\overline{\pi} = \pi \otimes_* \mathrm{id}$. Segue do Lema A.24 que $\overline{j}$ é injetivo e note que

$$\overline{\pi}(A \odot D) \subset \pi(A) \odot D = B \odot D,$$

logo $B \odot D \subset \overline{\pi}(A \otimes_* D)$, e portanto $B \otimes_* D \subset \overline{\pi}(A \otimes_* D)$, isto é, $\overline{\pi}$ é sobrejetivo. Como $j(J) = \mathrm{Ker}(\pi)$ é um ideal fechado de A, segue que a C^*-subálgebra $\overline{j}(A \otimes_* D) = j(A) \otimes_* D$ de $A \otimes_* D$ é um ideal desta C^*-álgebra. Seja $\mathcal{Q}$ a C^*-álgebra quociente $A \otimes_* D/\overline{j}(A \otimes_* D)$, e seja $\psi : A \otimes_* D \to \mathcal{Q}$ a aplicação quociente. Como $\overline{\pi}(\overline{j}(A \otimes_* D)) = 0$, segue que existe um único $*$-homomorfismo $\underline{\pi} : \mathcal{Q} \to B \otimes_* D$ tal que $\underline{\pi} \circ \psi = \overline{\pi}$.

É suficiente agora mostrarmos que $\underline{\pi}$ é um $*$-isomorfismo, dado que isto implica a igualdade $\mathrm{Ker}(\overline{\pi}) = \mathrm{Ker}(\psi) = \overline{j}(A \otimes_* D)$, que finaliza nossa demonstração.

Note que a sobrejetividade de $\underline{\pi}$ segue imediatamente da sobrejetividade de $\overline{\pi}$. Vamos mostrar a injetividade de $\underline{\pi}$ construindo a sua inversa a esquerda. Observe que a aplicação

$$\begin{array}{rcl} B \times D & \to & \mathcal{Q} \\ (\pi(a), d) & \mapsto & a \otimes d + \mathrm{Im}(\overline{j}) \end{array}$$

está bem definida e é bilinear. Segue da Proposição A.1 esta aplicação se estende de maneira única a uma aplicação linear $\varphi : B \odot D \to \mathcal{Q}$ tal que $\varphi(\pi(a) \otimes d) = a \otimes d + \mathrm{im}(\overline{j})$, quaisquer que sejam $a \in A$ e $d \in D$. É fácil ver que φ é um $*$-homomorfismo. Assim, a função

$$\begin{array}{ccc} B \odot D & \to & \mathbb{R}_+ \\ t & \mapsto & \max\{\|\varphi(t)\|_{\mathcal{Q}}, \|t\|_*\} \end{array}$$

é uma C^*-norma. Por hipótese, esta C^*-norma é única, logo

$$\max\{\|\varphi(t)\|_{\mathcal{Q}}, \|t\|_*\} = \|t\|_*,$$

e portanto $\|\varphi(t)\|_{\mathcal{Q}} \leq \|t\|_*$, qualquer que seja $t \in B \odot D$. Segue que φ se estende a um $*$-homomorfismo de $B \otimes_* D$ que também denotaremos por φ. Note que, como

$$\varphi(\underline{\pi}(a \otimes d + \mathrm{im}(\overline{j})) = \varphi(\overline{\pi}(a \otimes d)) = \varphi(\pi(a) \otimes d) = \underline{\pi}(a \otimes d + \mathrm{im}(\overline{j})),$$

quaisquer que sejam $a \in A$ e $d \in D$, temos que $\varphi\underline{\pi} = \mathrm{id}_{\mathcal{Q}}$. Logo, $\underline{\pi}$ é injetivo, e portanto um $*$-isomorfismo. □

A Proposição abaixo ([11, Teorema 6.4.18]) será apenas enunciada, e será utilizada na prova do Teorema que segue. Aplicaremos o Teorema para demostrar que a álgebra de Toeplitz é nuclear.

Proposição A.26. *Se A e B são C^*-álgebras, então a norma* espacial $\|\cdot\|_*$ *é a menor C^*-norma sobre $A \odot B$.*

Teorema A.27. *Sejam A uma C^*-álgebra. Suponha que A é uma extensão de B por J, com J e B C^*-álgebras nucleares. Então A é uma C^*-álgebra nuclear.*

Demonstração. Seja D uma C^*-álgebra arbitrária. Como B é nuclear, segue da Proposição A.25 que a seqüência

$$0 \longrightarrow J \otimes_* D \xrightarrow{j \otimes_* \mathrm{id}} A \otimes_* D \xrightarrow{\pi \otimes_* \mathrm{id}} B \otimes_* D \longrightarrow 0,$$

é exata. Vamos denotar $\overline{j} = j \otimes_* \mathrm{id}$ e $\overline{\pi} = \pi \otimes_* \mathrm{id}$. Como $\|\cdot\|_* \leq \|\cdot\|_\mu$, sendo μ a C^*-norma maximal, segue que a aplicação identidade sobre $A \odot D$ se estende unicamente a um $*$-homomorfismo $\varphi : A \otimes_\mu D \to A \otimes_* D$.

Segue da Proposição A.26 e da definição da C^*-norma maximal que é suficiente mostrarmos que $\|\cdot\|_* = \|\cdot\|_\mu$ em $A \odot D$. Logo, é suficiente mostrarmos que φ é injetivo.

Seja $\underline{j} : J \odot D \to A \otimes_\mu D$ tal que $\underline{j}(a \otimes d) = j(a) \otimes d$, quaisquer que sejam $a \in J$ e $d \in D$. Segue da nuclearidade de J que a C^*-norma dada por

$$\begin{array}{ccc} J \odot D & \to & \mathbb{R}_+ \\ t & \mapsto & \max\{\|\underline{j}(t)\|_\mu, \|t\|_*\} \end{array}$$

coincide com a C^*-norma *espacial* sobre $J \odot D$. Logo, $\underline{j}$ é norma-decrescente para $\|\cdot\|_*$, e portanto se estende a um $*$-homomorfismo de $J \otimes_* D$ em $A \otimes_\mu D$, que também denotaremos por $\underline{j}$. Note que $\overline{j} = \varphi \circ \underline{j}$.

Observe também que existe um único $*$-homomorfismo $\underline{\pi} : A \odot D \to B \otimes_* D$ tal que $\underline{\pi}(a \otimes d) = \pi(a) \otimes d$, quaisquer que sejam $a \in A$ e $d \in D$. Como a função dada por

$$\begin{array}{ccc} A \odot D & \to & \mathbb{R}_+ \\ t & \mapsto & \max\{\|\underline{\pi}(t)\|_*, \|t\|_\mu\} \end{array}$$

é uma C^*-norma, segue que

$$\max\{\|\underline{\pi}(t)\|_*, \|t\|_\mu\} \leq \|t\|_\mu, \ \forall t \in A \odot D.$$

Daí, $\underline{\pi}$ é norma-decrescente para $\|\cdot\|_\mu$, e portanto se estende a um $*$-homomorfismo de $A \otimes_\mu D$ em $B \otimes_* D$, que também denotaremos por $\underline{\pi}$.

Seja $\mathcal{Q}$ a álgebra quociente de $A \otimes_\mu D / \underline{j}(J \otimes_* D)$ e seja

$$\psi : A \otimes_\mu D \to A \otimes_\mu D / \underline{j}(J \otimes_* D).$$

a aplicação quociente. Usando a nuclearidade de B para fazer uma construção análoga a que foi apresentada na demonstração da Proposição A.25, obtemos um único $*$-homomorfismo $\theta : B \otimes_* D \to \mathcal{Q}$ tal que $\theta(\pi(a) \otimes (d)) = a \otimes d + \mathrm{Im}(\underline{j})$, quaisquer que sejam $a \in A$ e $d \in D$. Construímos assim o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
J \otimes_* D \arrow[rr, "j \otimes_* \mathrm{id} = \overline{j}"] \arrow[dr, "\underline{j}"'] & & A \otimes_* D \arrow[rr, "\pi \otimes_* \mathrm{id} = \overline{\pi}"] & & B \otimes_* D \arrow[dl, "\theta"] \\
& A \otimes_\mu D \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[urrr, "\underline{\pi}"] \arrow[rr, "\psi"] & & \mathcal{Q} &
\end{tikzcd}$$

.

Suponha agora que $t \in \mathrm{Ker}(\varphi)$. Então

$$0 = \overline{\pi}(\varphi(t)) = \underline{\pi}(t),$$

logo

$$0 = \theta(\underline{\pi}(t)) = \psi(t).$$

Assim, $t = \underline{j}(t_0)$, para algum $t_0 \in J \otimes D$, logo

$$\bar{j}(t_0) = \varphi(\underline{j}(t_0)) = \varphi(t) = 0.$$

Como $\bar{j}$ é injetivo, conforme segue da Proposição A.24, devemos ter $t_0 = 0$, e portanto $t = \underline{j}(t_0) = 0$. Com isso, obtemos que φ é injetivo. $\square$

Corolário A.28. *A álgebra de Toeplitz $\mathcal{T}$ da Definição 1.3.29 é nuclear.*

Demonstração. Segue da Proposição 1.3.32 que o comutador de $\mathcal{T}$ é $K(H^2)$, uma C^*-álgebra nuclear, conforme Corolário A.21. Segue da Proposição 1.3.33 que $\mathcal{T}/K(H^2) \cong C(\mathbb{T})$, que é nuclear, conforme Corolário A.23. É fácil ver que a seqüência

$$0 \longrightarrow K(H^2) \xrightarrow{\iota} \mathcal{T} \xrightarrow{\pi} \mathcal{T}/K(H^2) \longrightarrow 0,$$

em que ι é a inclusão e π é a aplicação quociente, é exata. Segue do Teorema A.27 que $\mathcal{T}$ é nuclear. $\square$

Bibliografia

[1] B. Blackadar, *Shape Theory for C^*-álgebras*, Math. Scand. 56(1985)249-275.

[2] C. Cerri, *Certas Deformações não Comutativas do Toro e sua K-Teoria*, Tese de Doutorado, IME-USP, São Paulo, 1993.

[3] J. Conway, *A course in functional Analysis*, Springer-Verlag, New York, 1990.

[4] K. R. Davidson, *C^*-algebras by Example*, Field Institute Monographs, Americam Mathematical Society, Providence, 1996.

[5] D. P. Dias, *O Produto cruzado de C^*-álgebra por Grupos Mediáveis*, Dissertação de Mestrado, IME-USP, São Paulo, 2000.

[6] G. A. Elliott, *On the classification of inductive limits of sequences of semisimple finite-dimensional algebras*, J. Algebras 38 (1976), 29-44.

[7] I. Gelfand & M. Naimark, *On the embedding of normed rings into the ring of operators i n Hilbert space*, Mat. Sb. 12 (1943), 197-213.

[8] C. S. Hönig, *A integral de Lebesgue e suas aplicações*, 11º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, 1977.

[9] R. Kadison & J. Ringrose, *Fundamentals of the theory of operator algebras*, Academic Press, London, 1983.

[10] M. S. Monteiro, *Weakly stable relations and inductive limits of C^*-álgebras.* Canad. Math. Bull. 46(4) (2003), 588-596.

[11] G. J. Murphy, *C^*-algebras and Operator Theory*, Academic Press, London, 1990.

[12] F. Orfali, *Produto cruzado de uma C^*-álgebra por Endomorfismos*, Dissertação de Mestrado, IME-USP, São Paulo, 2004.

[13] G. K. Pedersen, *C^*-algebra and their Automorphism Groups*, Academic Press, London, 1979.

[14] M. Pismer, D. Voiculescu, *Exact sequence for K-groups and EXT-groups of Certain Cross-Product of C^*-Algebras*, J. Operator Theory 4(1980), 93-118.

[15] M. Rørdam, F. Larsen & N. J. Laustesen, *An Introduction to K-Theory for C^*-Algebras*, Cambridge University, Cambridge, 2000.

[16] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1966.

[17] N. E. Wegge-Olsen, *K-Theory and C^*-Algebras*, Oxford University Press, Oxford, 1993.