

**Variedades centrais, desingularização  
e existência de superfícies Canard**

Gerard John Alva Morales

DISSERTAÇÃO APRESENTADA

AO

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

DA

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PARA

OBTENÇÃO DO TÍTULO DE MESTRE

EM

CIÊNCIAS

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof.Dr. Daniel Cantergiani Panazzolo

São Paulo/SP-Dezembro-2005

# Variedades centrais, desingularização e existência de superfícies Canard

Este exemplar corresponde à redação final  
da dissertação devidamente corrigida e defendida  
por Gerard John Alva Morales e aprovada  
pela comissão julgadora.

São Paulo/SP 9-Dezembro-2005

Banca Examinadora:

Prof.Dr. Daniel Cantergiani Panazzolo(Orientador) -IME-USP

Prof.Dr. Jorge Manuel Sotomayor Tello -IME-USP

Prof.Dr. Paulo Ricardo da Silva -IBILCE-UNESP

Dedico este trabalho  
a meus pais Marco e Georgina  
e a minha irmã Miriam

## Agradecimento

Agradeço:

À Deus, pela oportunidade que me deu de viver conforme a sua bondade.

Ao meu orientador, Prof.Dr. Daniel Cantergiani Panazzolo, pela oportunidade que me deu de conhecer a Matemática sutil e elegante que ele estuda e também pela confiança que depositou no meu esforço e pelas valiosas sugestões aportadas.

Aos professores do Instituto de Matemática e Estatística(IME), em particular aos professores, Dr. Jorge Manuel Sotomayor Tello, pelos conhecimentos e sugestões aportadas nesta área de pesquisa, Dr. Luiz Augusto Fernandes de Oliveira, por ter me encaminhado no início do mestrado e participado na minha formação matemática.

Aos professores:

Elói Medina Galego, José Antonio Verderesi, Luiz Augusto Fernandes de Oliveira, Antonio Carlos Asperti, Odilon Otávio Luciano, Antonio Carlos Brolezzi, Henrique Salvador S. Panzarelli, Martha Salermo, Zara Issa Abud; por terem permitido participar das Monitorias semestrais do IME, Estágios em matemática e pelo apoio moral, o qual foi relevante na realização do Mestrado.

A minha família, pelo apoio moral, confiança e a força incondicional que me proporcionaram durante o mestrado.

E a todos os colegas e amigos, pela amizade.

## Resumo

Neste trabalho usaremos a teoria das Perturbações Singulares e das Variiedades Centrais para estudar o fenômeno Canard numa família de campos de vetores no plano da forma

$$X_{\varepsilon, \alpha}(x, y) = \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} + yF(x, y, \varepsilon, \alpha) \frac{\partial}{\partial y}, \quad \alpha \in \mathbb{R}^n, \varepsilon \in \mathbb{R}_+$$

onde  $F$  é uma função analítica tal que  $F(x, y, 0, 0) = Bx^k + O(x^{k+1}, y)$ , para alguma constante  $B \neq 0$ . Este fenômeno consiste na existência de famílias de soluções regulares da equação diferencial, para valores do parâmetro  $\varepsilon > 0$ , que permanecem próximas de um conjunto normalmente hiperbólico repulsor quando tomamos  $\varepsilon$  tendendo a zero. Para valores  $k > 0$ , a singularidade na origem é usualmente chamada de *turning point*.

## Abstract

In this work we use the theory of Singular Perturbations and Center Manifolds to study the Canard phenomena in a family of planar vector fields of the form

$$X_{\varepsilon,\alpha}(x, y) = \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} + yF(x, y, \varepsilon, \alpha) \frac{\partial}{\partial y}, \quad \alpha \in \mathbb{R}^n, \varepsilon \in \mathbb{R}_+$$

where  $F$  is an analytic function such that  $F(x, y, 0, 0) = Bx^k + O(x^{k+1}, y)$ , for some constant  $B \neq 0$ . This phenomena consists in the existence of families of regular solutions of the differential equation for values of the parameter  $\varepsilon > 0$ , which remain near of a normally hyperbolic repelling set when we take  $\varepsilon$  tending to zero. For  $k > 0$ , the singularity at the origin is usually called a *turning point*.

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>9</b>
<b>2</b>	<b>Conceitos Preliminares</b>	<b>15</b>
2.1	Funções Especiais . . . . .	15
2.1.1	Aplicação Blowing-up . . . . .	15
2.1.2	Extensões Blowing-up $C^k$ . . . . .	19
2.1.3	Funções $\infty$ -Flat . . . . .	20
2.1.4	Blow-down $\infty$ -Flat . . . . .	21
2.2	Campos Singularmente Perturbados . . . . .	24
2.2.1	Classificação das singularidades para $X_{\varepsilon,a}$ . . . . .	25
2.3	Hipóteses Gerais . . . . .	30
2.3.1	Hipóteses para $(X, \Gamma)$ . . . . .	30
2.3.2	Hipóteses de Transversalidade para $(X, 0)$ . . . . .	30
2.3.3	Blowing-up Principal . . . . .	31
<b>3</b>	<b>Variedades Centrais sobre <math>\Gamma \setminus Deg(X)</math></b>	<b>33</b>
3.1	Linearização . . . . .	33
3.2	Variedades Centrais Formais . . . . .	36
3.3	Variedade Central Dinâmica . . . . .	40
<b>4</b>	<b>Geometria no espaço fase de <math>\overline{X}</math></b>	<b>45</b>
4.1	Folheação regular sobre a carta $K_{\bar{\varepsilon}}$ . . . . .	46
4.2	Estudo nas cartas $K_{\pm\bar{x}_{\varepsilon}}$ . . . . .	49
4.3	Relação entre as cartas $K_{\bar{\varepsilon}}, K_{\pm\bar{x}_{\varepsilon}}$ . . . . .	54
<b>5</b>	<b>Dinâmica Assintótica sobre a carta <math>K_{\bar{\varepsilon}}</math></b>	<b>57</b>
5.1	O caso $R_{A,0}(0)$ . . . . .	57
5.1.1	Caso $B_0 > 0$ . . . . .	58
5.1.2	Caso $B_0 < 0$ . . . . .	61
5.2	O caso $R_{A,B}(0)$ . . . . .	63

5.2.1	Caso $\mathcal{B}_0 > 0$ . . . . .	63
5.2.2	Caso $\mathcal{B}_0 < 0$ . . . . .	66
5.3	O caso $R_{0,0}(\mathcal{Q}_0)$ . . . . .	69
5.3.1	Caso $p+1$ par . . . . .	69
5.3.2	Caso $p+1$ ímpar . . . . .	72
5.4	Caso $R_{A,B}(\mathcal{Q}_0)$ . . . . .	76
<b>6</b>	<b>Dinâmica sobre as cartas <math>K_{\pm\bar{\tau}_\varepsilon}</math></b> . . . . .	<b>81</b>
6.1	Região atratora . . . . .	84
6.2	Extensão Dinâmica das variedades Centrais . . . . .	89
6.3	Estimativas para $\mathcal{O}(W_-, W_+)$ . . . . .	93
<b>7</b>	<b>Superfícies Canard</b> . . . . .	<b>97</b>
7.1	Blowing-up e Blowing-down de $\mathcal{O}(W_-, W_+)$ . . . . .	98
7.2	Existência de Superfícies Canard . . . . .	102
7.2.1	$(\mathcal{O}_{\tilde{\Gamma}}, w)$ nos casos $(s, s), (u, u)$ . . . . .	102
7.2.2	$(\mathcal{O}_{\tilde{\Gamma}}, w)$ sobre o caso $(u, s)$ . . . . .	108
7.2.3	$(\mathcal{O}_{\tilde{\Gamma}}, w)$ sobre o caso $(s, u)$ . . . . .	110
7.3	Conclusões . . . . .	115
7.4	Cálculo Assintótico . . . . .	117
7.4.1	Escala de Comparação . . . . .	117
7.4.2	Convergência de Integrais Impróprias relativas a $\mathcal{E}$ . . . . .	119
7.5	Equações Diferenciais . . . . .	125



# Capítulo 1

## Introdução

Nosso principal interesse é o estudo do *fenômeno Canard*, que pode ser observado nos sistemas de equações diferenciais com perturbações singulares.

A abordagem geométrica que utilizaremos neste trabalho baseia-se no artigo [DP]; que nos permitirá introduzir algumas ferramentas da Teoria Geométrica de Perturbações Singulares; referimos também à literatura [NF], [FDR1,2] e [T].

Nos problemas de Relaxação Oscilação, aparecem tipicamente classes especiais de ciclos limites, cujo comportamento qualitativo recai no estudo de problemas de perturbação singular. Vejamos um exemplo:

Tomemos a famosa equação de *Balthasar Van der Pol*.

$$\varepsilon \ddot{x} + (x^2 + x)\dot{x} + x - a = 0, \quad (\varepsilon, a) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Esta equação, através de mudanças de coordenadas adequadas e uma reparametrização do tempo, pode ser olhada no plano  $(x, y)$  como um campo de vetores

$$X_{\varepsilon, a} = \begin{cases} \dot{x} &= (y - F(x)) \\ \dot{y} &= \varepsilon(a - x) \end{cases}$$

onde  $F(x) = \int_0^x (\xi + \xi^2) d\xi = x^2/2 + x^3/3$ ; e  $X_{0, a}$  é o campo horizontal

$$X_{0, a}(x, y) = (y - F(x))(\partial/\partial x)$$

(ver Figura 1.1 (a)). A curva cúbica  $L = \{y = F(x)\}$  é dita variedade lenta de  $X_{\varepsilon, a}$ ; neste contexto, este sistema é chamado de *slow-fast system*.

Para certas curvas no espaço de parâmetros

$$\varepsilon \mapsto a = \gamma(\varepsilon), \quad a(0) = 0$$

é possível mostrar a existência de uma família de curvas fechadas  $\{\Gamma_\varepsilon^\gamma\}$ , tais que  $\Gamma_\varepsilon^\gamma$  é um ciclo limite de  $X_{\varepsilon, \gamma(\varepsilon)}$ , para  $\varepsilon > 0$  e

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Gamma_\varepsilon^\gamma = \Gamma_0^\gamma$$

(na métrica de Hausdorff). O conjunto  $\Gamma_0^\gamma$  é um subconjunto fechado invariante por  $X_{0, a}$ , que contém trechos da curva lenta  $L$ . Fazendo variar  $\gamma(\varepsilon)$ , obtemos várias formas para este limite  $\Gamma_0^\gamma$ , que receberam o nome de *Canards* (ver Figura 1.1 (b)).

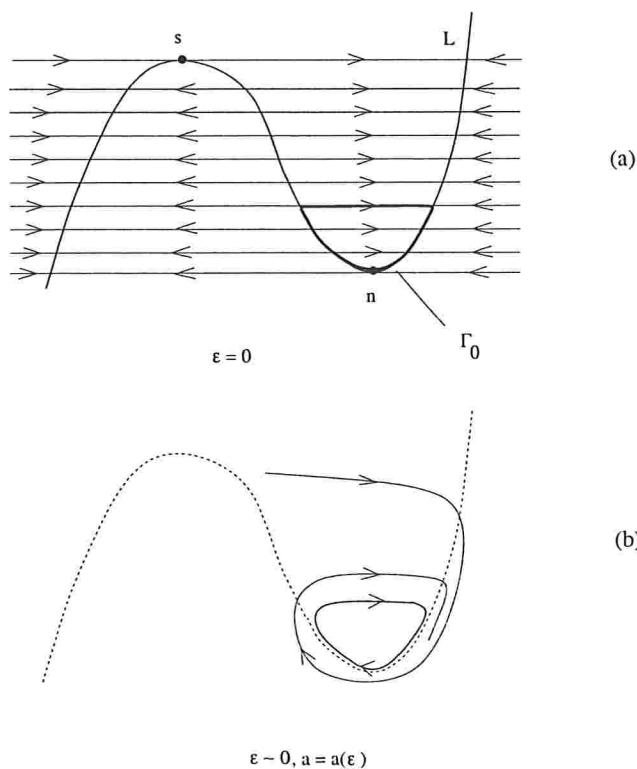


Figura 1.1: Variedade Lenta da Equação de Van der Pol e um Canard.

Um *fenômeno* inesperado pode ser observado neste exemplo. Existe a possibilidade de certos Canards conterem trechos da curva lenta  $L$  formados por pontos *normalmente hiperbólicos repulsores* (ver definição na continuação). Tal fato parece pouco provável, pois próximo a tais pontos existe uma repulsão exponencialmente forte que deveria *empurrar* quase todos os

pontos para longe de  $L$ . O artigo [WE] fornece uma explicação para tal fenômeno utilizando análise assintótica clássica.

Em nosso caso, o Fenômeno Canard será olhado como um problema de intersecção de variedades Centrais do tipo atrator-repulsor, chamadas de Superfícies Canard associadas a uma família analítica de campo de vetores.

Consideremos o campo de vetores analítico

$$X_{\varepsilon,a} = \varepsilon(\partial/\partial x) + F(x, y, \varepsilon, a)(\partial/\partial y), \quad \varepsilon \in \mathbb{R}, a \in (\mathbb{R}^n, 0),$$

sobre um aberto  $U_x \times U_y \subset \mathbb{R}^2$ , tal que  $F(x, y, 0, 0) = yf(x, y)$ , onde  $f(x, y)$  é uma função analítica não divisível por  $y$ .

**Definição 1.0.1** *Seja  $\gamma$  uma curva no espaço de parâmetros  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$*

$$\begin{aligned} \gamma : [0, \delta) &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n, \quad (\delta > 0) \\ \rho &\longmapsto \gamma(\rho) = (\varepsilon(\rho), a(\rho)), \end{aligned}$$

*chamada de curva de controle, satisfazendo*

- $\gamma(0) = 0$ ,
- $\varepsilon(\rho) > 0$  se  $\rho > 0$ .

*Uma Superfície Canard para  $X_{\varepsilon,a}$  é uma variedade contínua 2-dimensional*

$$W^\gamma = \text{graf}\{y = w(x, \rho)\} \subset M, \quad \rho \geq 0$$

*localmente invariante pela família a um parâmetro de campos de vetores*

$$X_\rho^\gamma = X_{\varepsilon(\rho), a(\rho)} = \varepsilon(\rho)(\partial/\partial x) + F(x, y, \varepsilon(\rho), a(\rho))(\partial/\partial y), \quad \rho \in (\mathbb{R}^+, 0),$$

*definida sobre a subvariedade 3-dimensional  $M = U_x \times U_y \times (\mathbb{R}^+, 0)$ , e tal que  $W^\gamma \cap \{\rho = 0\} \subset L = M \cap \text{Sing}(X_{0,0})$ .*

Note que o conjunto de singularidades para o campo restrito  $X_\rho^\gamma$  é dado pela curva  $\Gamma = \{\rho = y = 0\} \subset L$ .

Como a existência de estas Superfícies Canard não está sempre garantida, podemos colocar o seguinte problema:

**Problema Canard Local (PCL):**

*Dada uma família analítica de campos de vetores  $X_{\varepsilon,a}$  como acima, definida sobre  $U_x \times U_y \subset \mathbb{R}^2$  podemos sempre encontrar uma curva de controle  $\rho \longmapsto \gamma(\rho)$  no espaço de parâmetros tal que a família restrita  $X_\rho^\gamma = X_{(\varepsilon(\rho), a(\rho))}$  tenha uma superfície Canard  $W^\gamma$ ?*

Se o conjunto de singularidades  $\text{Sing}(X_{0,0})$  não é normalmente hiperbólico, a resposta para o problema PCL pode ser negativa; como mostra o seguinte exemplo.

**Exemplo 1.0.2** Consideremos a família

$$X_\varepsilon = \varepsilon(\partial/\partial x) + (xy + \varepsilon)(\partial/\partial y), \quad \varepsilon \in \mathbb{R}^+.$$

A curva  $\Gamma = \{y = \varepsilon = 0\}$  é uma curva de singularidades normalmente hiperbólicas exceto em  $x = 0$ . De fato, temos que

$$DX_0(x, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix}$$

Logo,  $(x, 0)$  é atrator se  $x < 0$ , ou repulsor se  $x > 0$ , ou seja  $\Gamma \cap \{x < 0\}$  é o conjunto de singularidades normalmente hiperbólicas atratoras e  $\Gamma \cap \{x > 0\}$  de repulsoras. A repulsão exponencial que existe para  $x > 0$ , impede a existência de Superfícies Canards.

De fato suponha que  $y = w(x, \varepsilon)$  define uma Superfície Canard onde  $w(x, \varepsilon)$  é uma função contínua definida em um domínio da forma  $x \in U_x = (-x_0, x_0)$ ,  $x_0 > 0$   $\varepsilon \in U_\varepsilon = [0, \varepsilon_0)$ . Para  $\varepsilon > 0$  podemos escrever

$$w(x, \varepsilon) = e^{\frac{x^2}{2\varepsilon}} \left( w(-x_0, \varepsilon) e^{-\frac{1}{2\varepsilon}} + \int_{-x_0}^x e^{-\frac{t^2}{2\varepsilon}} dt \right),$$

pois  $w(x, \varepsilon)$  é solução do problema de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}y &= \frac{x}{\varepsilon}y + 1 \\ y(-x_0) &= w(-x_0, \varepsilon) \end{cases}$$

Suponhamos que  $w(x, \varepsilon)$  é uma função contínua sobre qualquer vizinhança da origem contida em  $U_x \times U_\varepsilon$ , tal que  $w(x, 0) = 0$ .

Considerando a curva  $\varepsilon = x^3$ , para  $0 \leq x \leq x_0$ , a função  $h(x) = w(x, x^3)$  dada por

$$h(x) = w(-x_0, \varepsilon) e^{\frac{1}{2x} - \frac{1}{2x^3}} + e^{\frac{1}{2x}} \int_{-x_0}^x e^{-\frac{t^2}{2x^3}} dt$$

também deve ser contínua na origem. Note que para  $t \in [\frac{x}{3}, \frac{x}{2}]$ , vale a relação

$$\frac{-1}{8x} \leq \frac{-t^2}{2x^3} \leq \frac{-1}{18x}$$

Assim o segundo termo da função  $h$  satisfaz à desigualdade

$$e^{\frac{1}{2x}} \int_{-x_0}^x e^{-\frac{t^2}{2x^3}} dt \geq e^{\frac{1}{2x}} \left( \frac{1}{6} x e^{-\frac{1}{8x}} \right).$$

Portanto, quando  $x \rightarrow 0$ , claramente  $h(x) \rightarrow \infty$ . Absurdo.

Na família  $X_{\varepsilon,a}$ , escrevamos para a função  $F = F(x, y, \varepsilon, a)$  a seguinte expansão em série de potências.

$$\begin{aligned} F &= \left( \sum_{i=0}^{2p-1} A_i(\varepsilon, a)x^i + x^{2p} \left( \sum_{i=1}^{\infty} A_{2p+i-1}(\varepsilon, a)x^{i-1} \right) \right) \\ &+ \left( \sum_{j=0}^{p-1} B_j(\varepsilon, a)x^j + B_p(\varepsilon, a)x^p + x^p \left( \sum_{j=2}^{\infty} B_{p+i-1}(\varepsilon, a)x^{j-1} \right) \right) y \\ &+ Q(x, y, \varepsilon, a)y^2. \end{aligned}$$

e consideremos sobre a singularidade degenerada  $x = 0 \in \Gamma$  a seguinte hipótese:

**Hipótese de Transversalidade (HT):**

*Temos  $B_p(0, 0) \neq 0$  e a função analítica*

$$\begin{aligned} \varphi &: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{3p} \\ a &\longmapsto (A_0(0, a), \dots, A_{2p-1}(0, a), B_0(0, a), \dots, B_{p-1}(0, a)), \end{aligned}$$

*é uma submersão numa vizinhança de  $a = 0$ .*

O resultado principal deste trabalho é o seguinte:

**Teorema 1.0.3** *Se a família  $X_{\varepsilon,a}$ , satisfaz a hipótese (HT) na singularidade degenerada  $x = 0 \in \Gamma$ , então o problema (PCL) tem resposta positiva.*

Os passos da demonstração são os seguintes:

1. No capítulo 3, vamos construir variedades centrais dinâmicas  $W$ , invariantes pela família de campos no plano

$$X_{\varepsilon,a} = \varepsilon(\partial/\partial x) + F(x, y, \varepsilon, a)(\partial/\partial y), \quad (\varepsilon, a) \in \mathbb{R}^+ \times (\mathbb{R}^n, 0),$$

onde  $a = ((A, B), \mathcal{A}_r) \in (\mathbb{R}^{3p} \times \mathbb{R}^{n-3p}, 0)$ , definidas sobre conjuntos normalmente hiperbólicos  $\Gamma \setminus \{0\}$ .

2. No capítulo 4, será feita a desingularização da singularidade degenerada

$$x = 0 \in \Gamma \in (\mathbb{R}, 0)$$

pela aplicação Blowing-up  $\Phi$  dada no capítulo 2.

3. Serão construídas, no capítulo 6, variedades centrais dinâmicas  $W^\pm$  sobre o conjunto invariante (divisor excepcional)

$$\Phi^{-1}(0) \Big|_{\{\varepsilon=\mathcal{A}_r=0\}}, \quad (\varepsilon, \mathcal{A}_r) \in \mathbb{R}^+ \times (\mathbb{R}^{n-3p}, 0),$$

com propriedades assintóticas dadas no capítulo 5.

4. Determinamos no capítulo 7, a Região Canard

$$\mathcal{O}_{\tilde{\Gamma}} \subset (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n, 0), \quad \tilde{\Gamma} \subset \Gamma,$$

e conseqüentemente apresentamos a Superfície Canard representada pelo par  $(\mathcal{O}_{\tilde{\Gamma}}, w)$ , em termos das aplicações blowing-up  $\Phi$  e Blowing-down  $\Phi^{-1}$ .

---

## Capítulo 2

# Conceitos Preliminares

### 2.1 Funções Especiais

Com a finalidade de explicar a dinâmica de campos de vetores próxima a singularidades degeneradas, introduzimos uma mudança singular de variáveis, denominada blowing-up.

#### 2.1.1 Aplicação Blowing-up

Dado  $k \in \mathbb{N}$ , seja  $X = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$  um campo de vetores de classe  $C^k$  sobre  $\mathbb{R}^n$ , tal que  $X(0) = 0$ . Então consideremos a seguinte coleção de campos de vetores  $\{V, V_{i,j}\}$ , onde

(a)  $V_{i,j} = \frac{1}{2}(x_i \frac{\partial}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial}{\partial x_i})$ , é um campo vetorial sobre  $\mathbb{R}^n$ , que satisfaz às seguintes fórmulas:

- Para  $n = 2$

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^2 \langle X, V_{ij} \rangle \cdot V_{ij} &= \langle X, V_{12} \rangle \cdot V_{12} + \langle X, V_{21} \rangle \cdot V_{21} \\ &= 2 \langle X, V_{12} \rangle \cdot V_{12} \end{aligned}$$

- Para  $n = 3$

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^3 \langle X, V_{ij} \rangle \cdot V_{ij} &= \langle X, V_{12} \rangle \cdot V_{12} + \langle X, V_{13} \rangle \cdot V_{13} \\ &\quad + \langle X, V_{21} \rangle \cdot V_{21} + \langle X, V_{23} \rangle \cdot V_{23} \\ &\quad + \langle X, V_{31} \rangle \cdot V_{31} + \langle X, V_{32} \rangle \cdot V_{32} \\ &= 2 \langle X, V_{12} \rangle \cdot V_{12} + 2 \langle X, V_{13} \rangle \cdot V_{13} \\ &\quad + 2 \langle X, V_{23} \rangle \cdot V_{23} \end{aligned}$$

- No caso geral, obtemos a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n \langle X, V_{ij} \rangle \cdot V_{ij} &= 2 \sum_{j=2}^n \langle X, V_{1j} \rangle \cdot V_{1j} + \\ &\quad + 2 \sum_{j=3}^n \langle X, V_{2j} \rangle \cdot V_{2j} + \\ &\quad + 2 \sum_{j=4}^n \langle X, V_{3j} \rangle \cdot V_{3j} + \\ &\quad + \dots + 2 \langle X, V_{(n-1)n} \rangle \cdot V_{(n-1)n} \end{aligned}$$

(b)  $V = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ , é um campo vetorial sobre  $\mathbb{R}^n$ , que satisfaz o seguinte:

- $|V|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$
- Para  $n = 2$ , notemos que  $\langle X, V_{12} \rangle = -\frac{1}{2}(x_2 X_1 - x_1 X_2)$ , logo

$$\begin{aligned} \langle X, V \rangle \cdot V &= |V|^2 \cdot X + (x_2 X_1 - x_1 X_2) \cdot V_{12} \\ &= |V|^2 \cdot X - 2 \langle X, V_{12} \rangle \cdot V_{12} \end{aligned}$$

- Para  $n = 3$ , analogamente obtemos:

$$\begin{aligned} \langle X, V \rangle \cdot V &= |V|^2 \cdot X + (x_2 X_1 - x_1 X_2) \cdot V_{12} + \\ &\quad + (x_3 X_1 - x_1 X_3) \cdot V_{13} + (x_3 X_2 - x_2 X_3) \cdot V_{23} \\ &= |V|^2 \cdot X - 2 \langle X, V_{12} \rangle \cdot V_{12} - \\ &\quad - 2 \langle X, V_{13} \rangle \cdot V_{13} - 2 \langle X, V_{23} \rangle \cdot V_{23} \end{aligned}$$

De modo geral, para  $n \in \mathbb{N}$  arbitrário obtemos uma expressão para o campo  $X$  na base  $\{V, V_{i,j}\}$ , dada pela igualdade

$$\langle X, V \rangle \cdot V + \sum_{i < j}^n \langle X, V_{ij} \rangle \cdot V_{ij} = |V|^2 \cdot X$$



Definamos a aplicação

$$\begin{aligned}\Phi : \quad \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (\bar{x}, r) = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, r) &\longrightarrow (r\bar{x}_1, \dots, r\bar{x}_n) = r\bar{x} = x\end{aligned}$$

Onde,  $\mathbb{S}^{n-1} = \{(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \mid \sum_{i=1}^n \bar{x}_i^2 = 1\}$ . Note que  $\Phi(\mathbb{S}^{n-1} \times \{0\}) = 0$ . Esta aplicação faz uma correspondência difeomorfa entre os conjuntos  $\{r \neq 0\}$  e  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

**Observação 2.1.1** Para o caso  $n = 2$ , a aplicação  $\Phi$  corresponde á transformação em coordenadas polares habitual.

$$(\alpha, r) \longrightarrow (r \cos(\alpha), r \sin(\alpha))$$

Note que a coleção de campos de vetores  $\{X, V, V_{i,j}\}$  dados acima, nas coordenadas da aplicação Blowing-up  $\Phi$  satisfaz às seguintes fórmulas:

(1)

$$\begin{aligned}\langle X, V \rangle (\Phi(\bar{x}, r)) &= \sum_{i,j=1}^n X_i x_j \delta_{ij} (\Phi(\bar{x}, r)) \\ &= r \sum_{i=1}^n \bar{x}_i X_i (\Phi(\bar{x}, r))\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\langle X, V_{ij} \rangle (\Phi(\bar{x}, r)) &= \frac{1}{2} \left[ \sum_{k=1}^n X_k x_i \delta_{kj} - \sum_{k=1}^n X_k x_j \delta_{ki} \right] (\Phi(\bar{x}, r)) \\ &= \frac{1}{2} [x_i X_j - x_j X_i] (\Phi(\bar{x}, r)) \\ &= \frac{r}{2} [\bar{x}_i X_j (\Phi(\bar{x}, r)) - \bar{x}_j X_i (\Phi(\bar{x}, r))]\end{aligned}$$

(3)  $|V|^2 = r^2$

**Proposição 2.1.2** Seja  $X$  um campo vetorial de classe  $C^k$  sobre  $\mathbb{R}^n$ , com  $X(0) = 0$ . Então existe um campo vetorial  $\tilde{X}$  de classe  $C^{k-1}$  sobre  $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}^+$ , tal que,  $\Phi_*(\tilde{X}) = X$ , ( $\Phi$  é o Blowing-up considerado).

## DEMONSTRAÇÃO

Consideremos as funções de classe  $C^k$

$$\alpha_r = \langle X, V \rangle: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \alpha_{ij} = \langle X, V_{ij} \rangle: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

Onde

$$V = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad V_{i,j} = \frac{1}{2} \left( x_i \frac{\partial}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial}{\partial x_i} \right)$$

E definamos os campos vetoriais  $\tilde{V}$  e  $\tilde{V}_{ij}$ , como sendo

$$\Phi_*(\tilde{V}) = V, \quad \Phi_*(\tilde{V}_{ij}) = V_{ij}$$

Realmente, verifica-se que  $\tilde{V} = r \frac{\partial}{\partial r}$ , e  $\tilde{V}_{ij}$  são rotações em  $\mathbb{S}^{n-1}$ , sobre o plano  $(\bar{x}_i, \bar{x}_j)$ . Pelas observações anteriores:

$$\Phi_* \left( \frac{1}{r^2} \left\{ \alpha_r(\Phi) \tilde{V} + \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij}(\Phi) \tilde{V}_{ij} \right\} \right) = X$$

Onde,  $\alpha_r(\Phi)$  e  $\alpha_{ij}(\Phi)$  são funções de classe  $C^k$ , sobre  $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}^+$ , as quais se anulam no conjunto  $\{r = 0\}$ , pois

$$X(0) = 0, \quad V(0) = 0, \quad V_{ij}(0) = 0$$

E como

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \alpha_r(\Phi) &= \sum_{i=1}^n \bar{x}_i \frac{1}{r} X_i(\Phi) \\ \frac{1}{r^2} \alpha_{ij}(\Phi) &= \frac{1}{2} \left[ \bar{x}_i \frac{1}{r} X_j(\Phi) - \bar{x}_j \frac{1}{r} X_i(\Phi) \right] \end{aligned}$$

são funções de classe  $C^{k-1}$ , sobre  $\{r \neq 0\}$ ; então temos que

$$\tilde{X} = \frac{1}{r^2} \left\{ \alpha_r(\Phi) \tilde{V} + \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij}(\Phi) \tilde{V}_{ij} \right\}$$

é de fato um campo vetorial de classe  $C^k$  sobre  $(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}^+) \setminus \{r = 0\}$ ; que se estende diferenciavelmente em classe  $C^{k-1}$  a  $D = \{r = 0\}$ .  $\square$

**Definição 2.1.3** Definamos o Blowing-up quasi-homogêneo, como sendo uma aplicação analítica definida como

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (\bar{x}, \tau) := (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n, \tau) &\longmapsto (\tau^{\alpha_1} \bar{x}_1, \tau^{\alpha_2} \bar{x}_2, \dots, \tau^{\alpha_n} \bar{x}_n) := \tau^\alpha \cdot x \end{aligned}$$

onde  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in (\mathbb{Z}^+)^n$  é o vetor de pesos e  $\mathbb{S}^{k-1} = \{(z_1, \dots, z_k) \in \mathbb{R}^k \mid z_1^2 + \dots + z_k^2 = 1\}$ .

Note que quando  $\alpha = (1, 1, \dots, 1)$ , temos o Blowing-up em coordenadas polares. Um resultado análogo à proposição 2.1.2 pode ser provado para blowing-up quasi-homogêneos.

**Observação 2.1.4** Para campos  $X$  tais que  $J^k(X)(0) = 0$ , e  $J^{k+1}(X)(0) \neq 0$ , para algum  $k \geq 0$ , o campo

$$\bar{X} = \frac{1}{r^k} \tilde{X}$$

é diferenciável e não se anula identicamente em  $D = \{r = 0\}$ ; neste caso diremos que a singularidade  $0 \in \mathbb{R}^n$  é de multiplicidade  $k$ , e que  $\bar{X}$  é o transformado estrito de  $X$ .

### 2.1.2 Extensões Blowing-up $C^k$

Seja  $M \subset \mathbb{R}^n$  um subconjunto fechado, denotemos simplesmente por  $C^k(M)$  o espaço vetorial de funções de classe  $C^k$  (no sentido de Whitney) sobre  $M$  (ver [M]).

**Definição 2.1.5** Dado um subconjunto aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$  dizemos que  $f \in C^k(U)$  tem extensão- $C^k$  a  $\bar{U}$  se  $f \in C^k(\bar{U})$ . Equivalentemente  $f \in C^k(U)$  tem extensão  $C^k$  a  $\bar{U}$  se para todo  $x \in \bar{U}$  existe uma vizinhança  $V = V(x)$  de  $x$  tal que  $f \in C^k(\bar{U} \cap \bar{V})$ .

Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um subconjunto aberto e consideremos a decomposição  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$  tal que cada ponto de  $\mathbb{R}^n$  tenha coordenadas  $(x, y)$ .

**Definição 2.1.6** Diremos que uma função  $f \in C^k(U)$ , tem extensão blowing-up  $C^k$  em  $\{x = 0\}$ , se existe um multi-índice  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ , tal que, ao considerar a aplicação de Blowing-up

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{S}^{m-1} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{n-m} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (\bar{x}, \tau, y) &\longmapsto (\tau^{\alpha_1} \bar{x}_1, \dots, \tau^{\alpha_m} \bar{x}_m, y) := (\tau^\alpha \bar{x}, y) \end{aligned}$$

a função  $F = f \circ \phi : \phi^{-1}(U) = \mathcal{U} \longrightarrow U$  tem extensão  $C^k$  a  $\bar{\mathcal{U}}$ , (ou seja  $f \circ \phi \in C^k(\bar{\mathcal{U}})$  no sentido de Whitney).

**Observação 2.1.7** *Este tipo de funções nos permitem estudar localmente os pontos nos quais a diferenciabilidade é perdida. Veremos que as superfícies Canard estudadas adiante pertencem a tais classes.*

**Exemplo 2.1.8** *No aberto  $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ , consideremos a função*

$$f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad \in C^\infty(U)$$

*note que  $f \notin C^\infty(\bar{U})$ . Consideremos a aplicação blowing-up*

$$\begin{aligned} \phi : \quad \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \tau) &\longmapsto (\tau \bar{x}_1, \tau \bar{x}_2) \end{aligned}$$

*claramente temos  $F = f \circ \phi(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \tau) = \tau$ .*

*Note que  $\mathbb{S}^1 = \{\tau = 0\}$ ; se consideramos o aberto*

$$\mathcal{U} = \phi^{-1}(U) = \{(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \tau) | \tau > 0\} = \{\tau > 0\}$$

*então como  $F(\bar{x}, \tau) = \tau \in C^\infty(\mathcal{U})$  temos que  $F \in C^\infty(\bar{\mathcal{U}}) = C^\infty(\tau \geq 0)$ . Portanto,  $f$  tem extensão blowing-up  $C^k$  em  $\{x = 0\}$ .*

**Lema 2.1.9** *Suponha que  $f$  tem extensão blowing-up  $C^k$  em  $\{x = 0\}$  e seja  $\gamma \in C^\infty([0, \delta], \mathbb{R}^n)$  uma curva ( $\delta > 0$ ) tal que  $\gamma((0, \delta)) \subset U \setminus \{x = 0\}$ . Então existe  $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  tal que  $f \circ \gamma =: \tilde{f} \in C^k([0, \delta^{\frac{1}{p}}])$ , (onde  $\tilde{f}(w) = f \circ \gamma(w^p)$ )*

**DEMONSTRAÇÃO**

Seja  $I = (0, \delta)$ ,  $I_p = (0, \delta^{\frac{1}{p}})$ ,  $\mathcal{U} = \phi^{-1}(U)$ . Usando a expressão do blowing-up  $\phi$ , é fácil ver que existe um número natural  $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  e uma curva  $\tilde{\gamma} \in C^\infty(I_p, \mathbb{S}^{m-1} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{n-m})$  tal que  $\gamma \circ \varphi = \phi \circ \tilde{\gamma}$ , onde  $\varphi(w) = w^p$ ,  $w \in I_p$ ,  $w^p \in I$ . Por hipótese  $F = f \circ \phi \in C^k(\bar{\mathcal{U}})$ ; da relação

$$\tilde{f}(w) := f \circ \gamma(w^p) = f \circ \gamma \circ \varphi(w) = f \circ \phi \circ \tilde{\gamma}(w) = F \circ \tilde{\gamma}(w)$$

segue  $\tilde{f} = F \circ \tilde{\gamma} \in C^k(\bar{I}_p)$ . □

### 2.1.3 Funções $\infty$ -Flat

**Definição 2.1.10** *Sejam  $M \subset \mathbb{R}^n$  um subconjunto fechado, e  $U \subset \mathbb{R}^n$  um subconjunto aberto. Dizemos que  $f \in C^k(U)$  é  $\infty$ -flat a  $M$ , denotado por  $f \in C_{\text{flat}}^k(U, M)$ , se para cada subconjunto compacto  $K \subset \mathbb{R}^n$  tal que*

$$K \setminus M \subset U$$

e para cada  $m \in \mathbb{N}$ , existe uma constante  $C = C(K, m) > 0$  tal que

$$|f(x)| \leq C(d(x, M \cap K))^m, \quad \forall x \in K.$$

onde  $d$  é uma métrica em  $\mathbb{R}^n$ .

Em particular se  $M = \{0\}$ ,  $f \in C_{flat}^k(U, 0)$ ; para todo subconjunto compacto  $K \subset \mathbb{R}^n$  com  $K \setminus \{0\} \subset U$ , existem constantes  $m \in \mathbb{N}$  e  $C = C(K, m) > 0$  tal que

$$|f(x)| \leq C(|x|)^m, \quad \forall x \in K.$$

**Exemplo 2.1.11** Vejamos os seguintes exemplos:

1.  $f(x_1, x_2) = F(x_1) \exp(\frac{-1}{|x_2|}) \in C_{flat}^k(U, \{x_2 = 0\})$ , onde  $F \in C^k(\mathbb{R})$  é uma função arbitrária e  $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{x_2 = 0\}$ .

Com efeito, como  $\exp(\frac{1}{|x_2|}) > \frac{1}{|x_2|}$ , e  $F$  sendo limitada em todo compacto  $K \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{x_2 = 0\}$ , existe uma constante  $C = C(K) > 0$ , que depende de  $K$ , tal que

$$|f(x_1, x_2)| \leq C|x_2|, \quad \forall (x_1, x_2) \in K.$$

2.  $f(x) = \exp(\frac{-1}{\|x\|^\alpha}) \in C_{flat}^\infty(U, \{0\})$ , onde  $U = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ .

Com efeito, como  $\exp(\frac{1}{\|x\|^\alpha}) > \frac{1}{\|x\|^\alpha}$ , é imediato ver que

$$|f(x)| \leq \|x\|^\alpha, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}.$$

3.  $f(x, y) = |y| \exp(\frac{-1}{x}) \in C_{flat}^0(U, \{0\})$ , onde  $U = \mathbb{R}^2 \cap \{x > 0\}$ .

De fato para cada  $(x, y) \in K$  com a norma da soma em  $\mathbb{R}^2$ , temos

$$|f(x, y)| \leq |y||x| \leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2 = |(x, y)|^2.$$

**Definição 2.1.12** Seja  $M \subset \mathbb{R}^n$  um subconjunto fechado, e  $U \subset \mathbb{R}^n$  um subconjunto aberto. Para  $\hat{f} \in C^\infty(M)$  considere a extensão Whitney  $f = E(\hat{f}) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Diremos que  $g \in C^\infty(U)$  é  $\infty$ -flat a  $\hat{f}$  denotado por  $g \in C_{flat}^\infty(U, M, \hat{f})$  se  $(g - f) \in C_{flat}^\infty(U, M)$ .

#### 2.1.4 Blow-down $\infty$ -Flat

Consideremos a aplicação blowing-up

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \tau) &\longmapsto (\tau^{\alpha_1} \bar{x}_1, \dots, \tau^{\alpha_n} \bar{x}_n) \end{aligned}$$

onde  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n \setminus \{0\}$ . Utilizaremos as notações  $(\bar{x}, \tau) = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \tau)$ , e  $\tau^\alpha \bar{x} := (\tau^{\alpha_1} \bar{x}_1, \dots, \tau^{\alpha_n} \bar{x}_n)$ .

Seja  $F \in C^k(U)$  uma função arbitrária definida sobre o conjunto aberto  $U = \{(\bar{x}, \tau) \in \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}^+ \mid \tau > 0\}$ , e  $D = \{\tau = 0\} \subset \mathbb{S}^{n-1}$  o *divisor excepcional*. Sendo  $\phi$  um difeomorfismo em  $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}^+ \cap \{\tau > 0\}$ , definamos sobre  $\mathcal{U} = \phi(U) \subset \mathbb{R}^n$  a função

$$\mathcal{F}(x) := F \circ \phi^{-1}(x)$$

de onde  $\mathcal{F} \in C^k(\mathcal{U})$ .

**Lema 2.1.13**  $F \in C_{flat}^\infty(U, D)$  se e só se  $\mathcal{F} \in C_{flat}^\infty(\mathcal{U}, 0)$

DEMONSTRAÇÃO

i) (*Condição Necessária*)

Suponha que  $F \in C_{flat}^\infty(U, D)$ , então por definição, para cada conjunto compacto  $K \subset \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}^+$ , tal que  $K \setminus D \subset U$ , e cada  $n \in \mathbb{N}$ , existe uma constante  $C = C(K, n) > 0$  tal que

$$|F(\bar{x}, \tau)| \leq C(d((\bar{x}, \tau), K \cap D))^n, \quad \forall (\bar{x}, \tau) \in K.$$

Logo como  $d((\bar{x}, \tau), K \cap D) = d(\tau, 0)$ , temos

$$|F(\bar{x}, \tau)| \leq C|\tau|^n, \quad \forall \tau > 0$$

consideramos agora um subconjunto compacto  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$ , tal que

$$\mathcal{K} \setminus \{0\} \subset \mathcal{U} = \phi(U).$$

Logo existe um subconjunto compacto  $K \subset \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}^+$ , tal que

$$\mathcal{K} = \phi(K), \quad K \setminus D \subset U,$$

assim para cada  $x \in \mathcal{K}$ , existe  $(\bar{x}, \tau) \in K$ , tal que  $x = \phi(\bar{x}, \tau) := \tau^\alpha \bar{x}$ .

Observemos dois casos

Se  $0 \leq \tau < 1$ , considere  $a = \max\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ , para obter

$$\begin{aligned} |\tau|^a &= |\tau^a| \|\bar{x}\| = \|\tau^a \bar{x}\| \\ &= \|(\tau^{\alpha_1} \bar{x}_1, \dots, \tau^{\alpha_n} \bar{x}_n)\| \\ &\leq \|(\tau^{\alpha_1} \bar{x}_1, \dots, \tau^{\alpha_n} \bar{x}_n)\| \\ &= \|\tau^\alpha \bar{x}\| = \|x\|. \end{aligned}$$

Se  $\tau \geq 1$ , por compacidade existem constantes  $B = B(\mathcal{K}) > 0, C = C(\mathcal{K}) > 0$  tal que  $|\tau|^a \leq B$  e  $C \leq \|x\|$ , de onde:

$$|\tau|^a \leq \frac{B}{C} \|x\|, \quad \forall x \in \mathcal{K}.$$

Assim resulta

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}(x)| &= |F \circ \phi^{-1}(x)| = |F(\bar{x}, \tau)| \\ &\leq C(K, n) |\tau|^n \leq C(K, n) |\tau|^{na} \\ &\leq C(K, n) C_1(\mathcal{K})^n \|x\|^n, \end{aligned}$$

onde,  $C_1(\mathcal{K}) = \max\{1, \frac{B}{C}\}$ .

Definindo a constante  $\mathcal{C}(\mathcal{K}, n) = C(K, n) C_1(\mathcal{K})^n > 0$ , obtemos

$$|\mathcal{F}(x)| \leq \mathcal{C}(\mathcal{K}, n) \|x\|^n, \quad \forall x \in \mathcal{K} \subset \mathcal{U}.$$

Portanto  $\mathcal{F} \in C_{\text{flat}}^\infty(\mathcal{U}, 0)$ .

ii) (*Condição Suficiente*)

Em forma análoga, observemos os dois casos

Se  $0 \leq \tau < 1$

$$\begin{aligned} \|\tau^\alpha \bar{x}\| &= \|(\tau^{\alpha_1} \bar{x}_1, \dots, \tau^{\alpha_n} \bar{x}_n)\| \\ &\leq |\tau^\alpha| \|\bar{x}\| = |\tau|^a, \end{aligned}$$

onde,  $a = \inf\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ .

Se  $\tau \geq 1$ , é claro que  $|\tau|^a \geq 1$ , e por compacidade existe uma constante  $C_2 = C_2(K) > 0$  tal que  $\|\tau^\alpha \bar{x}\| \leq C_2$ ; assim temos

$$\|\tau^\alpha \bar{x}\| \leq C_2 |\tau|^a, \quad \forall (\bar{x}, \tau) \in K.$$

Logo supondo válido

$$|\mathcal{F}(x)| \leq \mathcal{C}(\mathcal{K}, m) \|x\|^m, \quad \forall x \in \mathcal{K} \subset \mathcal{U}.$$

Consideremos  $K = \phi^{-1}(\mathcal{K})$ , tal que  $K \setminus D \subset U = \phi^{-1}(\mathcal{U})$ , sendo  $\mathcal{F} = F \circ \phi^{-1}$ , temos

$$\begin{aligned} |F(\bar{x}, \tau)| &= |\mathcal{F} \circ \phi(\bar{x}, \tau)| \\ &\leq \mathcal{C}(\mathcal{K}, m) \|\tau^\alpha \bar{x}\|^m \\ &\leq \mathcal{C}(\mathcal{K}, m) C_2(K)^m |\tau|^{am} \end{aligned}$$

Definindo,  $C(K, m) = C(\mathcal{K}, m)C_2(K)^m$ , temos que

$$|F(\bar{x}, \tau)| \leq C(K, m)|\tau|^{am}$$

e como  $d(\tau, 0) = d((\bar{x}, \tau), K \cap D)$ , então vale

$$|F(\bar{x}, \tau)| \leq C(K, m)d((\bar{x}, \tau), K \cap D)^{am}, \quad \forall K \subset \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}^+$$

Portanto  $F \in C_{flat}^\infty(U, D)$ .

□

## 2.2 Campos Singularmente Perturbados

Nosso objetivo principal será estudar a extensão da Teoria Geométrica de Perturbação Singular (TGPS) às singularidades degeneradas. As Variedades Centrais (ver próximas seções) ao longo das variedades lentas constituem elementos relevantes desta teoria.

**Definição 2.2.1** *Uma família  $X_{\varepsilon, a}(x) = X(x, \varepsilon, a)$  de campos vetoriais sobre  $\mathbb{R}^n$ , com parâmetros  $\varepsilon \in \mathbb{R}, a \in (\mathbb{R}^n, 0)$ , será chamada de perturbação singular se o conjunto  $Z = \text{Sing}(X_{0, a})$  de singularidades do campo  $X_{0, a}$  é uma variedade de dimensão  $\geq 1$ . Esta variedade  $Z$  é denominada variedade lenta.*

**Exemplo 2.2.2** *Vejamos alguns exemplos*

(1) *A família planar*

$$X_{\varepsilon, a}(x, y) = (xy + \varepsilon \cos(a))(\partial/\partial x) + (xy + \varepsilon \sin(a))(\partial/\partial y), \quad \varepsilon, a \in \mathbb{R}$$

*é uma perturbação singular com variedade lenta  $Z = \{xy = 0\}$ .*

(2) *A equação de Van der Pol*

$$X_{\varepsilon, a}(x, y) = (y - F(x))(\partial/\partial x) + \varepsilon(a - x)(\partial/\partial y), \quad \varepsilon, a \in \mathbb{R}$$

*onde  $F(x) \in \mathbb{R}[x]$ , é uma perturbação singular com variedade lenta  $Z = \{y = F(x)\}$ .*

(3) *A perturbação singular*

$$X_{\varepsilon, a}(x, y) = (x^2 - y^2 + a\varepsilon)(\partial/\partial x) + \varepsilon(\partial/\partial y), \quad \varepsilon, a \in \mathbb{R}$$

*tem como variedade lenta  $Z = \{(y - x)(y + x) = 0\}$*



(4) *A perturbação singular*

$$X_{\varepsilon,a}(x, y) = (x(y - x^2) + a\varepsilon)(\partial/\partial x) + \varepsilon(\pm 1)(\partial/\partial y), \quad \varepsilon, a \in \mathbb{R}$$

tem variedade lenta  $Z = \{x = 0\} \cup \{y = x^2\}$

Nosso estudo estará concentrado na análise local das singularidades degeneradas, nas perturbações singulares em  $\mathbb{R}^2$  do tipo

$$X_{\varepsilon,a}(x, y) = \varepsilon(\partial/\partial x) + F(x, y, \varepsilon, a)(\partial/\partial y), \quad (\varepsilon, a) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n, 0)$$

onde  $(x, y) \in U_x \times U_y \subset (\mathbb{R}, 0) \times \mathbb{R}$ ,  $F(x, y, \varepsilon, a)$  é uma função analítica em todas as variáveis tal que  $F(x, y, 0, 0) = yf(x, y)$  e  $f$  analítica e não divisível por  $y$ .

**Observação 2.2.3** *Notemos que*

- *Esta família satisfaz*

$$X_{0,0}(x, y) = Y(x, y) = yf(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$$

- *Neste caso, a variedade lenta  $Z = \text{Sing}(X_{0,0})$  é a curva  $\Gamma = \{yf(x, y) = 0\}$  de singularidades não isoladas.*
- *A família  $X_{\varepsilon,a}(x, y)$ , pode ser olhada como sendo um campo vetorial  $X(x, y, \varepsilon, a)$ , sobre um aberto  $U_{x,y,\varepsilon,a} \subset \mathbb{R}^{n+3}$*

$$X = \begin{cases} \dot{y} &= F(x, y, \varepsilon, a) \\ \dot{x} &= \varepsilon \\ \dot{\varepsilon} &= 0 \\ \dot{a} &= 0 \end{cases}$$

### 2.2.1 Classificação das singularidades para $X_{\varepsilon,a}$

#### Singularidades Normalmente Hiperbólicas

Seja  $X$  um campo de vetores num aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$  e  $\Gamma = \text{Sing}(X)$  o seu conjunto de singularidades.

- Um ponto  $q \in \Gamma$  será chamado de singularidade hiperbólica se

$$E\text{spec}(DX(q)) \cap i\mathbb{R} = \phi,$$

ou seja todo autovalor  $\lambda \in E\text{spec}(DX(q))$  é tal que  $\text{Re}(\lambda) \neq 0$ .

- $q \in \Gamma$  será dita Normalmente Hiperbólica se  $DX(q)$  tem pelo menos um autovalor com parte real diferente de zero.

**Exemplo 2.2.4** *Observemos alguns exemplos*

- (1) O conjunto de singularidades  $\Gamma_h = \{y = 0\} \cap \{x | f(x, 0) \neq 0\}$  do campo  $Y(x, y) = yf(x, y)(\partial/\partial y)$  é normalmente hiperbólico pois a parte linear nos pontos  $q = (x, 0) \in \Gamma_h$  é dada por

$$DY(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & f(q) \end{bmatrix}.$$

Ou seja com a condição de que  $F(x, y, 0, 0) = yf(x, y)$ , temos que  $\Gamma = \{y = \varepsilon = a = 0\}$  é uma curva de singularidades normalmente hiperbólicas para o campo  $X_{\varepsilon, a}$  se  $\frac{\partial}{\partial y}F(x, 0, 0, 0) \neq 0$ .

- (2) Para  $\varepsilon = 0$ , o conjunto de singularidades

$$\Gamma_h = \left\{y = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right\} \setminus \{(-1, 1/6), (0, 0)\}$$

para a família Van der Pol

$$X_{\varepsilon, a}(x, y) = \left(y - \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)\right)(\partial/\partial x) + \varepsilon(a - x)(\partial/\partial y), \quad \varepsilon, a \in \mathbb{R}$$

é normalmente hiperbólico.

- (3) Para  $\varepsilon = 0$ , o conjunto de singularidades

$$\Gamma_h = (\{x = 0\} \cup \{y = 0\}) \setminus \{(0, 0)\}$$

da família

$$X_{\varepsilon, a}(x, y) = (xy + \varepsilon \cos(a))(\partial/\partial x) + (xy + \varepsilon \sin(a))(\partial/\partial y), \quad \varepsilon, a \in \mathbb{R}$$

é normalmente hiperbólico.

- (4) Para  $\varepsilon = 0$ , o conjunto de singularidades

$$\Gamma_h = (\{y = x\} \cup \{y = -x\}) \setminus \{(0, 0)\}$$

para a família abaixo

$$X_{\varepsilon, a}(x, y) = (x^2 - y^2 + \varepsilon a)(\partial/\partial x) + \varepsilon(\partial/\partial y), \quad \varepsilon, a \in \mathbb{R}$$

em uma vizinhança da origem é normalmente hiperbólico. Tal família é denominada família Transcrítica.

(5) Para  $\varepsilon = 0$ , o conjunto de singularidades

$$\Gamma_h = (\{x = 0\} \cup \{y = x^2\}) \setminus \{(0, 0)\}$$

para a família abaixo

$$X_{\varepsilon,a}(x, y) = (x(y - x^2) + \varepsilon a)(\partial/\partial x) + \varepsilon(\pm 1)(\partial/\partial y), \quad \varepsilon, a \in \mathbb{R}$$

em uma vizinhança da origem é normalmente hiperbólico. Tal família é denominada família Pitchfork.

### Singularidades Degeneradas

Consideremos novamente a família  $X_{\varepsilon,a} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} + F(x, y, \varepsilon, a) \frac{\partial}{\partial y}$ ; definida em um domínio  $U_x \times \mathbb{R} = U_x \times U_y$ , onde  $U_x \in (\mathbb{R}, 0)$  é uma vizinhança de zero, para cada  $(\varepsilon, a) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ; sendo  $\Gamma = \{y = \varepsilon = a = 0\} \approx U_x$  a curva lenta de  $X_{0,0}$ .

Uma singularidade  $q \in \Gamma = \{y = \varepsilon = a = 0\} = \text{Sing}(X_{0,0})$ , é dita degenerada se não é normalmente hiperbólica. Denotemos por  $\text{Deg}(X_{0,0}) \subset \Gamma$  o conjunto de singularidades degeneradas.

Seja  $B_x := f(x, 0)$ . Então  $B_x$  é o autovalor na direção vertical para o campo  $X_{0,0}$ , em  $x \in \Gamma$ . Logo  $\text{Deg}(X_{0,0}) = \{(x', 0) \in \Gamma \mid B_{x'} = 0\}$

Com a ordenação induzida em  $\Gamma \approx U_x$ , temos transições de sinal para  $B_x$  numa vizinhança  $V(x')$  de  $x' \in \text{Deg}(X_{0,0})$  em  $\Gamma$ .

Vamos estabelecer a seguinte classificação:

(a) *Transição estável-estável (s,s)*

$$\forall x \in (\Gamma \setminus Deg) \cap V(x'), \quad B_x < 0$$

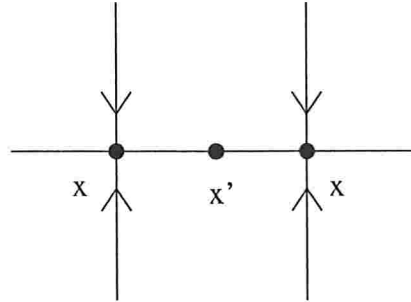


Figura 2.1: Transição estável-estável

(b) *Transição instável-instável (u,u)*

$$\forall x \in (\Gamma \setminus Deg) \cap V(x'), \quad B_x > 0$$

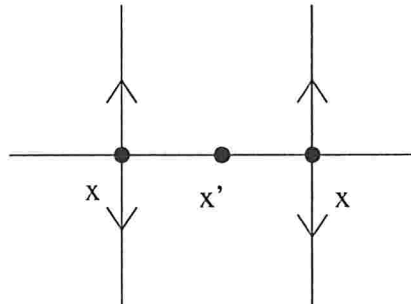


Figura 2.2: Transição instável-instável

(c) *Transição instável-estável (u,s)*

$$\forall x \in (\Gamma \setminus Deg) \cap V(x'), \quad x < x' \text{ (resp. } x' < x), \quad B_x > 0 \text{ (resp. } B_x < 0)$$

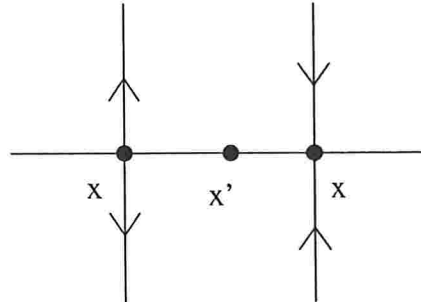


Figura 2.3: Transição instável-estável

(d) *Transição estável-instável*  $(s, u)$ 

$$\forall x \in (\Gamma \setminus \text{Deg}) \cap V(x'), \quad x < x' \text{ (resp. } x' < x), \quad B_x < 0 \text{ (resp. } B_x > 0)$$

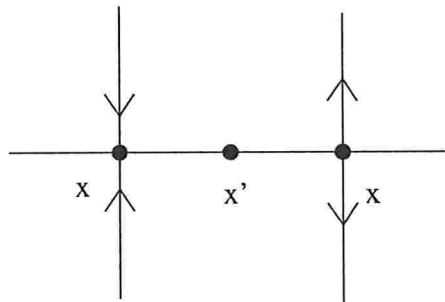


Figura 2.4: Transição estável-instável

**Observação 2.2.5** Estas transições serão estendidas por continuidade, pela aplicação blowing-up  $\Phi$  às singularidades normalmente hiperbólicas do campo  $X \circ \Phi$  nas coordenadas blowing-up.

**Exemplo 2.2.6** Para  $\varepsilon = 0$ , a perturbação singular

$$X_\varepsilon(x, y) = \varepsilon(\partial/\partial x) + (xy + \varepsilon)(\partial/\partial y), \quad \varepsilon \in \mathbb{R}$$

apresenta a transição  $(s, u)$ , na singularidade degenerada  $(0, 0)$ , pois  $B_x = x$ , sendo neste caso  $\Gamma \setminus \text{Deg} = \{y = 0\} \setminus \{(0, 0)\}$  a curva normalmente

hiperbólica.

Similarmente

$$Y_\varepsilon(x, y) = \varepsilon(\partial/\partial x) + (x^2y + \varepsilon)(\partial/\partial y), \quad \varepsilon \in \mathbb{R}$$

apresenta a transição  $(u, u)$ , em  $(0, 0)$  onde  $B_x = x^2$ .

Os campos  $-X_\varepsilon(x, y)$ ,  $-Y_\varepsilon(x, y)$ , apresentam respectivamente as transições  $(u, s)$ ,  $(s, s)$  em  $(0, 0)$ .

## 2.3 Hipóteses Gerais

Sobre um aberto  $U = U_x \times U_y \times U_\varepsilon \times U_a \subset (\mathbb{R}^{n+3}, 0)$ , definamos o campo vetorial analítico singularmente perturbado

$$X = X_{\varepsilon, a}(x, y) = \varepsilon(\partial/\partial x) + F(x, y, \varepsilon, a)(\partial/\partial y)$$

com curva crítica  $\Gamma = \{y = \varepsilon = a = 0\} \approx U_x \subset (\mathbb{R}, 0)$ .

### 2.3.1 Hipóteses para $(X, \Gamma)$

Consideremos a seguinte expansão em potências de  $y$  para  $F(x, y, \varepsilon, a)$

$$F(x, y, \varepsilon, a) = F_0(x, \varepsilon, a) + F_1(x, \varepsilon, a)y + Q(x, y, \varepsilon, a)y^2$$

tal que as funções  $F_0$  e  $F_1$  satisfazem às condições:

- (i)  $F_0(x, 0, 0) = 0, \quad \forall x \in \Gamma$
- (ii)  $F_1(0, 0, 0) = 0$
- (iii)  $F_1(x, 0, 0) \neq 0, \quad \forall x \in \Gamma \setminus Deg$

isto implica que  $Deg = \{0\}$  e  $\Gamma \setminus Deg$  é normalmente hiperbólico.

Definamos agora o inteiro não negativo  $\mu(X)(0) = p$  como sendo a multiplicidade da função  $F_1(x, 0, 0)$  em  $x = 0$ ; o qual implicará que  $\frac{1}{p!} \frac{\partial^p F_1}{\partial x^p}(0, 0, 0) \neq 0$ .

### 2.3.2 Hipóteses de Transversalidade para $(X, 0)$

Consideremos as seguintes expansões em potências de  $x$ .

$$F_0(x, \varepsilon, a) = \sum_{i=0}^{2p-1} A_i(\varepsilon, a)x^i + A_{2p}(\varepsilon, a)x^{2p} + x^{2p} \left( \sum_{i=2}^{\infty} A_{2p+i-1}(\varepsilon, a)x^{i-1} \right),$$

$$F_1(x, \varepsilon, a) = \sum_{j=0}^{p-1} B_j(\varepsilon, a)x^j + B_p(\varepsilon, a)x^p + x^p \left( \sum_{j=2}^{\infty} B_{p+i-1}(\varepsilon, a)x^{j-1} \right).$$

(1) Note que pelas hipóteses (i) e (ii) para  $(X, \Gamma)$ , temos

$$\begin{aligned} A_i(0, 0) &= 0, \quad \forall i \geq 0, \\ B_j(0, 0) &= 0, \quad \forall 0 \leq j \leq p-1, \quad B_p(0, 0) = \frac{1}{p!} \frac{\partial^p F_1}{\partial x^p}(0, 0, 0) \neq 0. \end{aligned}$$

(2) Diremos que a família  $X = X_{\varepsilon, a}$  é transversal a  $\Gamma$  se a função

$$\begin{aligned} \varphi : \quad \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^{3p} \\ a &\longmapsto (A_0(0, a), \dots, A_{2p-1}(0, a), B_0(0, a), \dots, B_{p-1}(0, a)) \end{aligned}$$

for uma submersão em  $a = 0$ . Neste caso, o teorema das funções implícitas garante que, a menos de permutação dos índices, a função  $\Psi(\varepsilon, a) = (\varepsilon, A(\varepsilon, a), B(\varepsilon, a), \mathcal{A}_r)$  é um difeomorfismo local, onde  $\mathcal{A}_r = (a_{3p+1}, \dots, a_n)$  serão ditos de *parâmetros não-essenciais* e os novos parâmetros  $(\varepsilon, a, b, \mathcal{A}_r)$  de *parâmetros adaptados*, onde

$$\begin{cases} a_i &= A_i(\varepsilon, a), \quad 0 \leq i \leq 2p-1 \\ b_j &= B_j(\varepsilon, a), \quad 0 \leq j \leq p-1 \\ \mathcal{A}_r &\in U_{\mathcal{A}_r} \subset (\mathbb{R}^n, 0) \end{cases}$$

### 2.3.3 Blowing-up Principal

Nas condições anteriores, o Blowing-up quase-homogêneo utilizado será

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{S}^{3p+2} \times \mathbb{R}^{n-3p} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{3p} \times \mathbb{R}^{n-3p} \\ ((\bar{x}, \bar{y}, \bar{\varepsilon}, \bar{a}_i, \bar{b}_j), \mathcal{A}_r, \tau) &\longrightarrow ((x, y), \varepsilon, (a_i, b_j), \mathcal{A}_r) \end{aligned}$$

descrito pela correspondência

$$\Phi = \begin{cases} x &= \tau \bar{x} \\ y &= \tau^p \bar{y} \\ \varepsilon &= \tau^{p+1} \bar{\varepsilon} \\ a_i &= \tau^{2p-i} \bar{a}_i, \quad i = 0, \dots, 2p-1 \\ b_j &= \tau^{p-j} \bar{b}_j, \quad j = 0, \dots, p-1 \\ \mathcal{A}_r &= \mathcal{A}_r \end{cases}$$

onde  $p = \mu(X)(0)$ . Tal transformação será chamada de Blowing-up principal. A família  $\bar{X}$  será dada por

$$\bar{X} = \left(\frac{1}{\tau^p}\right) X \circ \Phi$$

No capítulo 4 estudaremos a expressão de  $\bar{X}$  em detalhes.





---

## Capítulo 3

# Variedades Centrais sobre $\Gamma \setminus Deg(X)$

### 3.1 Linearização

Aqui fazemos a construção de variedades invariantes pelo fluxo de um campo vetorial singularmente perturbado  $X$ , da forma  $X = \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} + F(x, y, \varepsilon, \mathcal{A}) \frac{\partial}{\partial y}$  definido num aberto de  $\mathbb{R}^2$ . Tal variedade será definida por uma *função condição inicial*.

Consideremos os seguintes domínios

$$\begin{cases} U_x & \in (\mathbb{R}, 0), \text{ um conjunto aberto e conexo,} \\ U_y & = \mathbb{R}, \\ U_\varepsilon & \in (\mathbb{R}^+, 0), \\ U_{\mathcal{A}} & \in (\mathbb{R}^n, 0). \end{cases}$$

E suponhamos que  $X$  está definido sobre o aberto

$$U = U_x \times U_y \times U_\varepsilon \times U_{\mathcal{A}}$$

satisfazendo as seguintes condições

- (i)  $F \in C^w(U)$ ,
- (ii)  $F(x, 0, 0, 0) \equiv 0$ ,
- (iii)  $B_x = \frac{\partial F}{\partial y}(x, 0, 0, 0)$ , é tal que  $|B_x| > \delta > 0$ , para algum  $\delta > 0$ .

Daqui notemos que

1. (i),(ii) implicam que a subvariedade

$$\Gamma = \{y = \varepsilon = \mathcal{A} = 0\} \approx U_x$$

é uma curva de singularidades de  $X$  em  $U$ .

2. (iii) implica que  $\Gamma$  é uma subvariedade invariante normalmente hiperbólica; para ver isto é suficiente olhar a parte linear do campo no ponto  $(x, 0, 0, 0)$  na base  $\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\}$

$$\mathbf{DX}(x, 0, 0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x}(x, 0, 0, 0) & \frac{\partial F}{\partial y}(x, 0, 0, 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_x \end{bmatrix}.$$

3. Pela conexidade de  $\Gamma \approx U_x$ ,  $B_x$  não muda de sinal, para todo  $x \in \Gamma$
4. O campo  $X = \varepsilon(\partial/\partial x) + F(x, y, \varepsilon, \mathcal{A})(\partial/\partial y)$  tem associado uma equação diferencial de primeira ordem.

$$\begin{cases} \dot{x} = \varepsilon \\ \dot{y} = F(x, y, \varepsilon, \mathcal{A}) \end{cases}$$

para cada  $(x, y) \in U_x \times U_y$ , dependendo analiticamente dos parâmetros  $(\varepsilon, \mathcal{A}) \in U_\varepsilon \times U_{\mathcal{A}}$ .

Equivalentemente podemos escrever a equação diferencial

$$\begin{cases} \dot{x} = \varepsilon \\ \dot{y} = F(x, y, \varepsilon, \mathcal{A}) \\ \dot{\varepsilon} = 0 \\ \dot{\mathcal{A}} = 0 \end{cases}$$

para cada  $(x, y, \varepsilon, \mathcal{A}) \in U_x \times U_y \times U_\varepsilon \times U_{\mathcal{A}}$ . A parte linear de  $X$  no ponto  $(x, 0, 0, 0) \in \Gamma \approx U_x$  é dada por

$$L = \mathbf{DX}(x, 0, 0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & B_x & F_\varepsilon & F_{\mathcal{A}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como  $|B_x| > \delta > 0$ , o espectro de  $L$  no espaço  $\mathbb{R}^{n+3} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+1}$ , pode ser decomposto como

$$\sigma(L) = \sigma_s(L) \cup \sigma_c(L) \cup \sigma_u(L)$$

onde

$$\begin{aligned}\sigma_s(L) &= \{\lambda = \alpha + i\beta : \alpha < 0\}, \\ \sigma_c(L) &= \{\lambda = \alpha + i\beta : \alpha = 0\}, \\ \sigma_u(L) &= \{\lambda = \alpha + i\beta : \alpha > 0\}.\end{aligned}$$

Notemos que o subespaço  $\mathbb{R}_{x,\varepsilon,\mathcal{A}}^{n+2}$  é gerado pelos autovetores correspondentes aos autovalores  $\lambda \in \sigma_c(L)$ , e  $\mathbb{R}_y = \mathbb{R}$  é gerado pelos autovetores correspondentes aos autovalores  $B_x \in \sigma_s(L) \cup \sigma_u(L)$ . Assim

- se  $B_x > 0$ , então  $\sigma_s(L) = \phi$ , e  $\mathbb{R}_y$  é gerado por autovetores correspondentes a  $B_x \in \sigma_u(L)$ .
- se  $B_x < 0$ , então  $\sigma_u(L) = \phi$ , e  $\mathbb{R}_y$  é gerado por autovetores correspondentes a  $B_x \in \sigma_s(L)$ .

Agora colocando  $U_{x,\varepsilon,\mathcal{A}} = U_x \times U_\varepsilon \times U_{\mathcal{A}} = U \cap \{y = 0\}$ , o teorema da variedade central local implica no seguinte resultado:

**Proposição 3.1.1** *Seja  $x \in \Gamma$  um ponto arbitrário. Então para cada  $k \in \mathbb{N}$  existe uma vizinhança  $V_{x,\varepsilon,\mathcal{A}}$  de  $x$  em  $U_{x,\varepsilon,\mathcal{A}}$  e uma função  $C^k(V_{x,\varepsilon,\mathcal{A}}, \mathbb{R})$*

$$\begin{aligned}w &: V_{x,\varepsilon,\mathcal{A}} \longrightarrow U_y \\ (x, \varepsilon, \mathcal{A}) &\longmapsto y = w(x, \varepsilon, \mathcal{A})\end{aligned}$$

tal que

- $w$  é definida em  $V_{x,\varepsilon,\mathcal{A}}$ ,
- $w(x, 0, 0) \equiv 0$ ,
- $W = \text{graf}\{y = w(x, \varepsilon, \mathcal{A})\}$ , é uma variedade invariante por  $X$ .

DEMONSTRAÇÃO

Ver [Ak],[JS].

□

$W$  será dita uma variedade central local em  $x$ .

**Observação 3.1.2** *Consideremos  $X(x, y) = \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y}$ . As variedades invariantes por  $X$ , neste caso*

$$W = \text{graf}\{y = w(x, \varepsilon)\}, \forall x \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$$

são dadas por  $W = \text{graf}\{y = i(\varepsilon)e^{\frac{-x+x_0}{\varepsilon}}\}$ , com  $i(\varepsilon) \in C^\infty$ ,  $i(0) = 0$  e  $x_0 < x$  arbitrário.

### 3.2 Variedades Centrais Formais

**Proposição 3.2.1** *Seja  $x \in \Gamma \approx U_x$ ,  $W = \text{graf}\{y = w(x, \varepsilon, \mathcal{A})\}$  uma variedade central local em  $x$ . Então existem vizinhanças abertas  $U_0$  de  $x$  e  $U_{\mathcal{A}} \in (\mathbb{R}^n, 0)$ , e funções analíticas  $w_i(x, \mathcal{A}) \in C^w(U_x \times U_{\mathcal{A}})$ ,  $i \geq 0$ , definindo uma única série formal*

$$\widehat{W}(x, \varepsilon, \mathcal{A}) = \sum_{i=0}^{\infty} w_i(x, \mathcal{A}) \varepsilon^i, \quad \varepsilon \in U_{\varepsilon} \in (\mathbb{R}^+, 0)$$

tal que  $w \in C_{\text{flat}}^k(U_0 \times U_{\mathcal{A}}, \{\varepsilon = 0\}, \widehat{W})$ .

DEMONSTRAÇÃO

Observe que esta série pode ser escrita como

$$\widehat{W}(x, \varepsilon, \mathcal{A}) = w_0(x, \mathcal{A}) + \widehat{M}(x, \varepsilon, \mathcal{A})$$

onde

$$\widehat{M}(x, \varepsilon, \mathcal{A}) = \sum_{i=1}^{\infty} w_i(x, \mathcal{A}) \varepsilon^i.$$

Assim, usando o *teorema da função implícita* e um argumento indutivo, a demonstração será feita basicamente em dois passos:

1. (*Primeiro Passo*)

Note que para o campo

$$X(x, y, \varepsilon, \mathcal{A}) = \varepsilon(\partial/\partial x) + F(x, y, \varepsilon, \mathcal{A})(\partial/\partial y), \quad \varepsilon \in \mathbb{R}, \mathcal{A} \in (\mathbb{R}^n, 0)$$

o conjunto de singularidades

$$\begin{aligned} Z(X) &= \{(x, y, \varepsilon, \mathcal{A}) : X(x, y, \varepsilon, \mathcal{A}) = 0\} \\ &= \{(x, y, \varepsilon, \mathcal{A}) : \varepsilon = 0, \quad F(x, y, 0, \mathcal{A}) = 0\}, \end{aligned}$$

é uma subvariedade em  $U = U_x \times U_y \times U_{\varepsilon} \times U_{\mathcal{A}}$  de codimensão  $2 = \dim(\{(y, \varepsilon)\})$ , perto de  $\Gamma = \{y = \varepsilon = \mathcal{A} = 0\}$ .

Como o campo  $X$  satisfaz à hipótese  $|\frac{\partial F}{\partial y}(x, 0, 0, 0)| > \delta > 0$ , fixado  $(x, \mathcal{A}) = (x, 0)$  ( $Z(X) \subset \{(x, \mathcal{A})\} = U_x \times \mathbb{R}^n$ ) existe uma vizinhança aberta conexa  $U_{\mathcal{A}}^0 \subset U_{\mathcal{A}}$  de  $\mathcal{A} = 0$ , tal que

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, 0, 0, \mathcal{A}) \neq 0, \quad x \in U_x, \quad \mathcal{A} \in U_{\mathcal{A}}^0,$$

daqui pelo *teorema da função implícita*, existe uma única função analítica  $y = h(x, 0, \mathcal{A})$ , definida sobre  $U_x \times \{0\} \times U_{\mathcal{A}}^0$ , tal que  $F(x, h, \varepsilon, \mathcal{A}) = 0$ . Definindo  $w_0(x, \mathcal{A}) := h(x, 0, \mathcal{A})$ , fica mostrada a existência da função  $w_0$  tal que

$$Z(X) = \{(x, y, \varepsilon, \mathcal{A}) : \varepsilon = 0, \quad y = w_0(x, \mathcal{A})\}.$$

Note que, fazendo a mudança analítica de coordenadas

$$\begin{cases} y &= y' - w_0(x, \mathcal{A}) \\ x &= x' \end{cases}$$

temos  $F(x, y, \varepsilon, \mathcal{A}) = F(x, y' - w_0(x, \mathcal{A}), \varepsilon, \mathcal{A})$ , e na base  $\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y'}\}$ , o campo  $X$  tem a nova expressão

$$X = \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} + F'(x, y, \varepsilon, \mathcal{A}) \frac{\partial}{\partial y'}$$

onde  $F'(x, y, \varepsilon, \mathcal{A}) = F(x, y' - w_0(x, \mathcal{A}), \varepsilon, \mathcal{A}) + (\partial/\partial x)w_0(x, \mathcal{A})\varepsilon$ .  
Daqui claramente obtemos:

$$F'(x, 0, 0, \mathcal{A}) = F(x, 0, 0, \mathcal{A}) = 0 \quad e$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial y'} F'(x, 0, 0, \mathcal{A}) \right| = \left| \frac{\partial}{\partial y} F(x, 0, 0, \mathcal{A}) \right| > \delta.$$

Observamos que as hipóteses para o campo  $X = (\varepsilon, F)$  são preservadas pela mudança analítica no espaço de fase  $(x', y')$  dado acima.

## 2. (Segundo Passo: Existência de $w_i, i \geq 1$ )

Vamos mostrar a existência das funções  $w_i(x, \mathcal{A}), i \geq 1$ , recursivamente. Para tal vamos escrever a série

$$\widehat{M}(x, \varepsilon, \mathcal{A}) = \sum_{i=1}^{\infty} w_i(x, \mathcal{A})\varepsilon^i$$

onde  $w_i \in \mathbb{C}^w(U_x \times U_{\mathcal{A}}^0)$ .

Vamos ilustrar o procedimento calculando  $w_1(x, \mathcal{A})$ .

Consideremos a série(mudança analítica)

$$\widehat{K}(x, y, \varepsilon, \mathcal{A}) = y - \widehat{M}(x, \varepsilon, \mathcal{A}).$$

Olhando o campo  $X$  como operador derivação sobre o conjunto das séries formais, note por um lado que

$$X(\widehat{K})(x, y, \varepsilon, \mathcal{A})|_{y=\widehat{M}(x, \varepsilon, \mathcal{A})} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial x}[y - \widehat{M}] + F \frac{\partial}{\partial y}[y - \widehat{M}] = 0$$

e por outro lado temos

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial}{\partial x}[y - \widehat{M}] &= -\varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \widehat{M}, \\ F \frac{\partial}{\partial y}[y - \widehat{M}] &= F. \end{aligned}$$

Portanto obtemos a relação formal

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \widehat{M}(x, \varepsilon, \mathcal{A}) = F(x, \widehat{M}, \varepsilon, \mathcal{A}).$$

Daqui sendo  $F$  analítica em todos seus termos consideremos a seguinte expansão em  $y$ .

$$F(x, y, \varepsilon, \mathcal{A}) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i(x, \varepsilon, \mathcal{A}) y^i$$

Como  $y = \widehat{M}$ , obtemos

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \widehat{M}(x, \varepsilon, \mathcal{A}) = f_0(x, \varepsilon, \mathcal{A}) + \widehat{M}(x, \varepsilon, \mathcal{A})[f_1(x, \varepsilon, \mathcal{A}) + O(\varepsilon)]$$

Com a finalidade de relacionar coeficientes de ambos lados desta igualdade, tomemos as expansões

$$\begin{aligned} f_0(x, \varepsilon, \mathcal{A}) &= \sum_{j=0}^{\infty} f_{0,j}(x, \mathcal{A}) \varepsilon^j \quad e \\ f_1(x, \varepsilon, \mathcal{A}) &= \sum_{j=0}^{\infty} f_{1,j}(x, \mathcal{A}) \varepsilon^j. \end{aligned}$$

Lembremos que pela primeira parte vale

$$F(x, 0, 0, \mathcal{A}) = 0, \quad \left| \frac{\partial}{\partial y} F(x, 0, 0, \mathcal{A}) \right| > \delta > 0, \quad \mathcal{A} \in U_{\mathcal{A}}^0.$$

De onde obtemos que

$$f_0(x, 0, \mathcal{A}) = 0, \quad (x, \mathcal{A}) \in U_x \times U_{\mathcal{A}}^0$$

e conseqüentemente

$$f_{0,0}(x, \mathcal{A}) = 0, \quad \forall (x, \mathcal{A}) \in U_x \times U_{\mathcal{A}}^0.$$

Notemos também que vale

$$\frac{\partial}{\partial y} F(x, y, \varepsilon, \mathcal{A}) = f_1(x, \varepsilon, \mathcal{A}) + \sum_{i=2}^{\infty} i f_i(x, \varepsilon, \mathcal{A}) y^{i-1}$$

de onde obtemos

$$\frac{\partial}{\partial y} F(x, 0, 0, \mathcal{A}) = f_1(x, 0, \mathcal{A}).$$

Conseqüentemente da expansão de  $f_1$  vale

$$f_{1,0}(x, \mathcal{A}) = f_1(x, 0, \mathcal{A}) = \frac{\partial}{\partial y} F(x, 0, 0, \mathcal{A}) \neq 0.$$

Das expressões acima temos

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \widehat{M} = \varepsilon \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} w_j(x, \mathcal{A}) \varepsilon^j,$$

$$f_0(x, \varepsilon, \mathcal{A}) = \varepsilon f_{0,1}(x, \mathcal{A}) + \varepsilon \sum_{j=2}^{\infty} f_{0,j}(x, \mathcal{A}) \varepsilon^{j-1},$$

$$\widehat{M}(f_1 + O(\varepsilon)) = \varepsilon w_1 f_{1,0} + O(\varepsilon^2).$$

Logo, a equação formal

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \widehat{M} = \widehat{M}(f_1 + O(\varepsilon))$$

pode ser escrita como

$$\varepsilon \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} w_j \varepsilon^j = \varepsilon f_{0,1} + \varepsilon w_1 f_{1,0} + O(\varepsilon^2)$$

ou também como

$$O(\varepsilon^2) = \varepsilon f_{0,1} + \varepsilon w_1 f_{1,0} + O(\varepsilon^2).$$

Agora fazendo  $\varepsilon = 0$ , após uma divisão por  $\varepsilon$  nesta última igualdade, obtemos

$$0 = f_{0,1} + w_1 f_{1,0}.$$

Logo podemos definir  $w_1$  como sendo

$$w_1(x, \mathcal{A}) = \frac{-f_{0,1}(x, \mathcal{A})}{f_{1,0}(x, \mathcal{A})}, \quad \forall (x, \mathcal{A}) \in U_x \times U_{\mathcal{A}}^0.$$

Notemos que  $w_2$  pode-se obter, dependendo de  $w_1$  e dos coeficientes  $f_{ij}, (i, j=0, 1)$ .

De maneira similar é possível determinar recursivamente as funções  $w_i$  dependendo de  $f_{l,j}$  e  $w_j$ , ( $l = 0, 1; j < i$ ) (o fato importante neste procedimento é o uso sucessivo do teorema da função implícita nas mudanças analíticas do plano fase). Isto encerra a demonstração.  $\square$

**Observação 3.2.2** *Em geral, a série formal  $\widehat{W}$  é divergente.*

### 3.3 Variedade Central Dinâmica

**Observação 3.3.1** *Para algum conjunto fechado  $M \subset U_x \times U_{\mathcal{A}}$ , é possível mostrar que sobre o conjunto fechado  $\{\varepsilon = 0\} \times M$  vale*

$$\frac{D^i \widehat{W}}{i!}(x, 0, \mathcal{A}) = w_i(x, \mathcal{A}), \quad \forall (x, \mathcal{A}) \in M, \quad i \geq 0$$

onde  $D^i$  é o operador derivação de ordem  $i$ .

Logo a série  $\widehat{W}(x, \varepsilon, \mathcal{A}) = \sum_{i=0}^{\infty} w_i(x, \mathcal{A}) \varepsilon^i$  identifica-se com um único elemento de  $C^\infty(\{\varepsilon = 0\} \times M)$ .

Assim, para cada ponto  $x' \in \Gamma \approx U_x$ , podemos restringir a variedade central formal  $\widehat{W}(x, \varepsilon, \mathcal{A})$  a  $\{x = x'\}$ , dada pela função

$$\widehat{W}_{x'} := \widehat{W}(x', \varepsilon, \mathcal{A}) = \sum_{i=0}^{\infty} w_i(x', \mathcal{A}) \varepsilon^i, \quad \forall (\varepsilon, \mathcal{A}) \in U_\varepsilon \times U_{\mathcal{A}}.$$

**Definição 3.3.2** - Dado um conjunto aberto  $V \subset (U_\varepsilon \cap \{\varepsilon > 0\}) \times U_{\mathcal{A}}$ . A função  $i : V \rightarrow U_y \in C^\infty$  é chamada função condição inicial para o campo  $X$  em  $x' \in \Gamma$  se

$$i \in C_{\text{flat}}^\infty(V, \{\varepsilon = 0\}, \widehat{W}_{x'})$$

ou seja para algum subconjunto compacto  $K \subset V$

$$|(i - \widehat{W}_{x'}) (\varepsilon, \mathcal{A})| \leq C |(\varepsilon, \mathcal{A}) - (0, \mathcal{A})|^\alpha = C |\varepsilon|^\alpha, \quad \forall (\varepsilon, \mathcal{A}) \in K$$

onde  $C = C(K)$  e  $\alpha$  são constantes positivas, e  $K - \{\varepsilon = 0\} \subset V$



- Para  $x_0, x_1 \in \Gamma$ ,  $x_0 < x_1$ , definimos  $\Gamma_{x_0, x_1} = [x_0, x_1]$

**Proposição 3.3.3** *Seja  $x_0 \in \Gamma$ ,  $i \in C_{flat}^\infty(V, \{\varepsilon = 0\}, \widehat{W}_{x_0})$  uma função condição inicial arbitrária para o campo  $X$  em  $x_0$  e seja  $B_{x_0} < 0$ , (ou seja  $DX(x_0)$  é hiperbólico estável). Então para todo  $x_1 > x_0$  suficientemente próximo, existe uma vizinhança  $N \subset U_{\varepsilon, \mathcal{A}}$  da origem  $(\varepsilon, \mathcal{A}) = (0, 0)$  tal que considerando a restrição de  $i$  ao conjunto*

$$\mathcal{O} := V \cap N$$

existe uma única função  $w(x, \varepsilon, \mathcal{A}) \in C^\infty$  definida sobre  $\Gamma_{x_0, x_1} \times \mathcal{O}$  tal que

- (i)  $w(x_0, \varepsilon, \mathcal{A}) = i(\varepsilon, \mathcal{A})$ ;
- (ii)  $W = \text{graf}(y = w(x, \varepsilon, \mathcal{A}))$ , é uma variedade invariante por  $X$ ;
- (iii)  $w \in C_{flat}^\infty(\Gamma_{x_0, x_1} \times \mathcal{O}, \{\varepsilon = 0\}, \widehat{W})$ .

DEMONSTRAÇÃO

É suficiente considerar alguma  $C^k$  variedade central

$$W' = \text{graf}\{y = h'(x, \varepsilon, \mathcal{A})\}$$

em algum ponto  $x \in \Gamma_{x_0, x_1}$ ; e mostrar que

$$w' = w - h' \in C_{flat}^\infty(U', \{\varepsilon = 0\}), \quad U' \subset \Gamma_{x_0, x_1} \times \mathcal{O}.$$

Com efeito, pela teoria de formas normais para campos singularmente perturbados (ver Apêndice de [DP]), temos que a família de campos de vetores

$$X_{\varepsilon, \mathcal{A}} = \varepsilon(\partial/\partial x) + F(x, y, \varepsilon, \mathcal{A})(\partial/\partial y), \quad \varepsilon \in \mathbb{R}, \mathcal{A} \in (\mathbb{R}^n, 0)$$

é  $C^k$ -equivalente ao campo

$$Y(x', y', \varepsilon') = \varepsilon'(\partial/\partial x') + sy'(\partial/\partial y'), \quad \varepsilon \in \mathbb{R}, s \in \{-1, 1\}$$

por uma mudança local de coordenadas de classe  $C^k$

$$(x, y, \varepsilon, \mathcal{A}) \longrightarrow (x', y', \varepsilon', \mathcal{A}') = (x', y - h', \varepsilon', \mathcal{A}').$$

Nestas coordenadas temos

$$W' = \{y' = 0\}, \quad y'_{\varepsilon', \mathcal{A}'}(x'_0) = i'(\varepsilon', \mathcal{A}'), \quad i' \in C_{flat}^\infty(U', \{\varepsilon' = 0\}).$$

Para  $x'_0 = 0$ , as trajectórias de  $Y$  passando pelo ponto inicial  $(x'_0, y'_0) = (0, i'(\varepsilon', \mathcal{A}'))$  são dadas por

$$\begin{cases} x'(t) &= \varepsilon' t, \\ y'(t) &= \exp(-t) i'(\varepsilon', \mathcal{A}'). \end{cases}$$

Assim  $w' = w - h'$  pode ser definida por

$$w'(x', \varepsilon', \mathcal{A}') = \begin{cases} i'(\varepsilon', \mathcal{A}') & , \text{ se } x' = 0 \\ \exp(-\frac{x'}{\varepsilon'}) i'(\varepsilon', \mathcal{A}') & , \text{ se } x' > 0 \end{cases}$$

Sabemos que a função  $g(x', \varepsilon') = \exp(-\frac{x'}{\varepsilon'})$ , é uniformemente limitada na região  $\{(x', \varepsilon') | x' \leq 0, \varepsilon' \leq 0\}$ ; similarmente suas derivadas parciais

$$\frac{\partial^{s_1+s_2} g}{\partial^{s_1} x' \partial^{s_2} \varepsilon'}$$

são uniformemente limitadas; por exemplo no caso  $s_1 = 2, s_2 = 3$ , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{s_1+s_2} g}{\partial^{s_1} x' \partial^{s_2} \varepsilon'} &\approx g(x', \varepsilon') \left( \frac{x'^3}{\varepsilon'^8} - 12 \frac{x'^2}{\varepsilon'^7} + 36 \frac{x'}{\varepsilon'^6} - 24 \frac{1}{\varepsilon'^5} \right) \\ &= \exp\left(-\frac{x'}{\varepsilon'}\right) P\left(\frac{x'}{\varepsilon'}\right) \frac{1}{\varepsilon'^5} \end{aligned}$$

onde  $\deg(P) = s_2$ , e como é sabido do cálculo que

$$\begin{cases} \exp\left(-\frac{x'}{\varepsilon'}\right) P\left(\frac{x'}{\varepsilon'}\right) \longrightarrow 0 & , \quad x' \longrightarrow +\infty; \\ \exp\left(-\frac{x'}{\varepsilon'}\right) P\left(\frac{x'}{\varepsilon'}\right) \longrightarrow 0 & , \quad \varepsilon' \longrightarrow 0; \\ \exp\left(-\frac{x'}{\varepsilon'}\right) P\left(\frac{x'}{\varepsilon'}\right) \longrightarrow Cte & , \quad \varepsilon' \longrightarrow +\infty; \end{cases}$$

para todo polinomio  $P(\frac{x'}{\varepsilon'})$ , com  $\deg(P) = n \geq \max\{s_1, s_2\}$ ; logo poderíamos obter constantes positivas,  $C = C(s_1, s_2)$ ,  $\alpha = \alpha(s_1, s_2)$ ,  $\beta = \beta(s_1, s_2)$ , tal que

$$\left| \frac{\partial^{s_1+s_2} g}{\partial^{s_1} x' \partial^{s_2} \varepsilon'} \right| \leq \frac{C}{x'^{\alpha} \varepsilon'^{\beta}},$$

Assim, como  $i'(\varepsilon', \mathcal{A}') \in C_{flat}^{\infty}(U', \{\varepsilon' = 0\})$ , temos que

$$i'(\varepsilon', \mathcal{A}') g(x', \varepsilon') \in C_{flat}^{\infty}(U', \{\varepsilon' = 0\}),$$

de onde

$$w - h' = w' \in C_{flat}^{\infty}(U', \{\varepsilon' = 0\}).$$

Isto conclui a prova (veja Figura 3.1). □

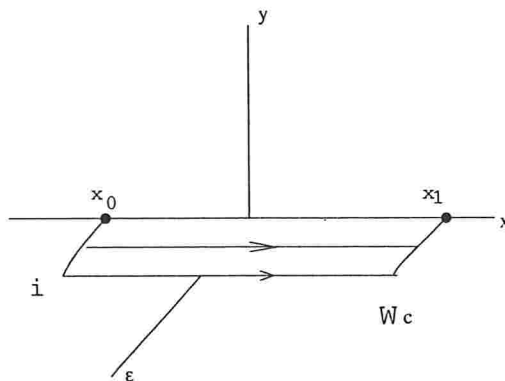


Figura 3.1: Variedade Central Dinâmica Normalmente Hiperbólica.

- Observação 3.3.4**
1. Para cada  $x_1 < x_0$ , com  $B_{x_0} > 0$ , usando o fluxo com tempo negativo mostraríamos o resultado com as mesmas conclusões.
  2. Colocando  $\tilde{\Gamma} = \Gamma_{x_0, x_1}$ , o conjunto  $\mathcal{O}_{\tilde{\Gamma}} \subset U_{\varepsilon, A}$  é chamado de região Canard e  $W_{\tilde{\Gamma}}$  é chamada de variedade central dinâmica sobre  $\tilde{\Gamma}$ .
  3. Para singularidades semi-hiperbólicas sempre existem  $\mathcal{O}_{\tilde{\Gamma}}$  e  $W_{\tilde{\Gamma}}$ .



## Capítulo 4

# Geometria no espaço fase de $\overline{X}$

Daremos explicitamente a estrutura analítica para a família  $X$  no espaço de fase  $U = U_x \times U_y \times U_\varepsilon \times U_{\mathcal{A}}$ .

Consideremos ao longo da sub variedade  $N = \{x = y = \varepsilon = a = b = 0\} \subset U$ ; o Blowing-up

$$\Phi = \begin{cases} x &= \tau \bar{x} \\ y &= \tau^p \bar{y} \\ \varepsilon &= \tau^{p+1} \bar{\varepsilon} \\ a_i &= \tau^{2p-i} \bar{a}_i, \quad i = 0, \dots, 2p-1 \\ b_j &= \tau^{p-j} \bar{b}_j, \quad j = 0, \dots, p-1 \\ \mathcal{A}_r &= \mathcal{A}_r \end{cases}$$

onde  $p$  é a multiplicidade da função  $F_1(x, 0, 0)$  em  $x = 0$ , dado no capítulo 2, seção 2.3; e definamos o campo  $\overline{X}$  sobre o aberto

$$\overline{U} = \Phi^{-1}(U) \in \mathbb{S}^{3p+2} \times (\mathbb{R}^{n-3p}, 0) \times (\mathbb{R}^+, 0).$$

(Aqui,  $(\mathbb{R}^k, 0)$ , representa a família de vizinhanças da origem).

**Observação 4.0.5** *Notemos que*

- O campo  $X|_N$  se anula em  $N$ .
- O campo  $\overline{X}$  se anula sobre o conjunto  $D = \Phi^{-1}(N) = \{\tau = 0\} \cap \overline{U}$ . (isto decorre diretamente da relação  $\overline{X}(\tau) = \tau H(\bar{\varepsilon})$ ) pois  $\tau^{p+1} \bar{\varepsilon}$  é integral primeira para  $\overline{X}$ ; isto mostra que o conjunto  $D$  é invariante por  $\overline{X}$ , e em particular qualquer fatia

$$D_{\mathcal{A}^0} = D \cap \{\mathcal{A}_r = \mathcal{A}_r^0\}$$

é também invariante por  $\bar{X}$ .

A família  $\{\varepsilon, a_i, b_j, \mathcal{A}_r\}$  é uma coleção de integrais primeiras para  $X$  as quais definem uma folheação 2-dimensional  $\mathcal{F} = \{d\varepsilon = da_i = db_j = d\mathcal{A}_r = 0\}$ , sobre  $U \setminus N$ . Sobre  $\bar{U} \setminus D$  o pull-back de tal folheação é dado por  $\bar{\mathcal{F}} = \{d(\tau^{p+1}\bar{\varepsilon}) = d(\tau^{2p-i}\bar{a}_i) = d(\tau^{p-j}\bar{b}_j) = d\mathcal{A}_r = 0\}$ .

O fato relevante é que a folheação  $\bar{\mathcal{F}}$  é estendida ao Divisor Excepcional  $D$ . Esta folheação é definida pelo sistema de equações de Pfaff.

$$\begin{aligned} 0 &= d(\varepsilon) = (p+1)\tau^p \bar{\varepsilon} d(\tau) + \tau^{p+1} d(\bar{\varepsilon}) \\ 0 &= d(a_i) = (2p-i)\tau^{2p-i-1} \bar{a}_i d(\tau) + \tau^{2p-i} d(\bar{a}_i) \\ 0 &= d(b_j) = (p-j)\tau^{p-j-1} \bar{b}_j d(\tau) + \tau^{p-j} d(\bar{b}_j) \\ 0 &= d(\mathcal{A}_r) \end{aligned}$$

Para descrever totalmente esta folheação e a dinâmica do campo  $\bar{X}$  sobre  $D$ , precisaremos de três cartas projetivas que denotaremos por  $K_{\bar{\varepsilon}}$ ,  $K_{\pm\bar{x}_\varepsilon}$  respectivamente.

#### 4.1 Folheação regular sobre a carta $K_{\bar{\varepsilon}}$

Sobre o subconjunto  $U_{\bar{\varepsilon}} = \{\bar{\varepsilon} > 0\} \subset \bar{U} = \Phi^{-1}(U)$ ; existe um difeomorfismo

$$\begin{aligned} \varphi_{\bar{\varepsilon}} : U_{\bar{\varepsilon}} &\longrightarrow \mathbb{R}^{3p+2} \times (\mathbb{R}^+, 0) \times (\mathbb{R}^{n-3p}, 0) \\ ((\bar{x}, \bar{y}, \bar{\varepsilon}, \bar{a}, \bar{b}), \mathcal{A}_r, \tau) &\longmapsto ((\tilde{x}, \tilde{y}), \tilde{\varepsilon}, (A, B), \mathcal{A}_r) \end{aligned}$$

mapeando  $D \cap U_{\bar{\varepsilon}}$ , sobre  $\tilde{D} = \{\tilde{\varepsilon} = 0\} \approx \mathbb{R}^{3p+2} \times (\mathbb{R}^{n-3p}, 0)$ , e tal que, o difeomorfismo  $\Phi_{\bar{\varepsilon}} = \Phi \circ \varphi_{\bar{\varepsilon}}^{-1}$ , é dado por

$$\Phi_{\bar{\varepsilon}} = \begin{cases} x &= \tilde{\varepsilon} \tilde{x} \\ y &= \tilde{\varepsilon}^p \tilde{y} \\ \varepsilon &= \tilde{\varepsilon}^{p+1} \\ a_i &= \tilde{\varepsilon}^{2p-i} A_i, \quad i = 0, \dots, 2p-1 \\ b_j &= \tilde{\varepsilon}^{p-j} B_j, \quad j = 0, \dots, p-1 \\ \mathcal{A}_r &= \mathcal{A}_r \end{cases}$$

Definiremos a carta  $K_{\bar{\varepsilon}}$  pelas coordenadas  $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\varepsilon}, A, B, \mathcal{A}_r)$ , dadas por

$$\varphi_{\tilde{\varepsilon}} = \begin{cases} \tilde{x} &= \bar{x}\tilde{\varepsilon}^{-\frac{1}{p+1}} \\ \tilde{y} &= \bar{y}\tilde{\varepsilon}^{-\frac{p}{p+1}} \\ \tilde{\varepsilon} &= \tau\tilde{\varepsilon}^{\frac{1}{p+1}} \\ A_i &= \bar{a}_i\tilde{\varepsilon}^{-\frac{2p-i}{p+1}}, \quad i = 0, \dots, 2p-1 \\ B_j &= \bar{b}_j\tilde{\varepsilon}^{-\frac{p-j}{p+1}}, \quad j = 0, \dots, p-1 \\ \mathcal{A}_r &= \mathcal{A}_r \end{cases}$$

A folheação  $\overline{\mathcal{F}}$  é descrita nestas coordenadas pelo sistema de Pfaff (restrição à carta  $K_{\tilde{\varepsilon}}$ )

$$\begin{aligned} 0 &= d(\tilde{\varepsilon}^{p+1}) = (p+1)\tilde{\varepsilon}^p d(\tilde{\varepsilon}) \\ 0 &= d(\tilde{\varepsilon}^{2p-i}A_i) = (2p-i)\tilde{\varepsilon}^{2p-i-1}A_i d(\tilde{\varepsilon}) + \tilde{\varepsilon}^{2p-i}d(A_i) \\ 0 &= d(\tilde{\varepsilon}^{p-j}B_j) = (p-j)\tilde{\varepsilon}^{p-j-1}B_j d(\tilde{\varepsilon}) + \tilde{\varepsilon}^{p-j}d(B_j) \\ 0 &= d(\mathcal{A}_r) \end{aligned}$$

o que é equivalente a  $\{d\tilde{\varepsilon} = dA_i = dB_j = d\mathcal{A}_r = 0\}$ . Portanto no aberto  $U_{\tilde{\varepsilon}}$  a folheação  $\mathcal{F}$  é regular (ver Figura 4.1).

Como  $\overline{X}$  é sempre tangente á folheação  $\overline{\mathcal{F}}$ , o campo  $\overline{X}|_{U_{\tilde{\varepsilon}}}$  é de fato uma família analítica regular definida na carta  $K_{\tilde{\varepsilon}}$

$$X \circ \Phi_{\tilde{\varepsilon}} = \begin{cases} \dot{\tilde{x}} &= \tilde{\varepsilon}^p \\ \tilde{\varepsilon}^p \dot{\tilde{y}} &= \tilde{F} \\ \dot{\tilde{\varepsilon}} &= 0 \\ \dot{A}_i &= 0, \quad i = 0, \dots, 2p-1 \\ \dot{B}_j &= 0, \quad j = 0, \dots, p-1 \\ \dot{\mathcal{A}}_r &= 0 \end{cases}$$

tendo espaço fase  $\{(\tilde{x}, \tilde{y})\}$  e parâmetros  $(\tilde{\varepsilon}, A, B, \mathcal{A}_r)$  em  $\varphi_{\tilde{\varepsilon}}(U_{\tilde{\varepsilon}})$ .

Calculemos a expansão  $F = F_0 + F_1y + Qy^2$  na carta  $K_{\tilde{\varepsilon}}$ .

$$\begin{aligned} F_0(x, \varepsilon, \mathcal{A}) &= \sum_{i=0}^{2p-1} a_i(\varepsilon, \mathcal{A})x^i + x^{2p}[a_{2p}(\varepsilon, \mathcal{A}) + \sum_{i=2}^{\infty} a_{2p+i-1}(\varepsilon, \mathcal{A})x^{i-1}] \\ &= \sum_{i=0}^{2p-1} \tilde{\varepsilon}^{2p-i}A_i\tilde{\varepsilon}^i\tilde{x}^i + \tilde{\varepsilon}^{2p}\tilde{x}^{2p}[a_{2p}(\varepsilon, \mathcal{A}) + \tilde{\varepsilon}\sum_{i=2}^{\infty} a_{2p+i-1}(\varepsilon, \mathcal{A})\tilde{\varepsilon}^{i-2}\tilde{x}^{i-1}] \\ &= \tilde{\varepsilon}^{2p}\left[\sum_{i=0}^{2p-1} A_i\tilde{x}^i + a(\mathcal{A}_r)\tilde{x}^{2p} + O(\tilde{\varepsilon})\right] \\ &= \tilde{\varepsilon}^{2p}\tilde{F}_0, \end{aligned}$$

onde  $a_{2p}(\varepsilon, \mathcal{A}) = a(\mathcal{A}_r) + O(\varepsilon)$ . Similarmente obtemos

$$\begin{aligned}
 F_1(x, \varepsilon, \mathcal{A}) &= \sum_{j=0}^{p-1} b_j(\varepsilon, \mathcal{A})x^j + x^p[b_p(\varepsilon, \mathcal{A}) + \sum_{j=2}^{\infty} b_{p+j-1}(\varepsilon, \mathcal{A})x^{j-1}] \\
 &= \sum_{j=0}^{p-1} \tilde{\varepsilon}^{p-j} B_j \tilde{\varepsilon}^j \tilde{x}^j + \tilde{\varepsilon}^p \tilde{x}^p [b_p(\varepsilon, \mathcal{A}) + \tilde{\varepsilon} \sum_{j=2}^{\infty} b_{p+j-1}(\varepsilon, \mathcal{A}) \tilde{\varepsilon}^{j-2} \tilde{x}^{j-1}] \\
 &= \tilde{\varepsilon}^p \left[ \sum_{j=0}^{p-1} B_j \tilde{x}^j + \mathcal{B}(\mathcal{A}_r) \tilde{x}^p + O(\tilde{\varepsilon}) \right] \\
 &= \tilde{\varepsilon}^p \tilde{F}_1,
 \end{aligned}$$

onde  $b_p(\varepsilon, \mathcal{A}) = \mathcal{B}(\mathcal{A}_r) + O(\varepsilon)$ .

Agora considerando a expansão  $Q(x, y, \varepsilon, \mathcal{A}) = Q(\mathcal{A}_r) + O(\varepsilon) = \tilde{Q}$ , o sistema de equações diferenciais associado será

$$X \circ \Phi_{\tilde{\varepsilon}} = \begin{cases} \dot{\tilde{x}} &= \tilde{\varepsilon}^p \\ \dot{\tilde{y}} &= \tilde{\varepsilon}^p [\tilde{F}_0 + \tilde{F}_1 \tilde{y} + \tilde{Q} \tilde{y}^2] \\ \dot{\tilde{\varepsilon}} &= 0 \\ \dot{A}_i &= 0, \quad i = 0, \dots, 2p-1 \\ \dot{B}_j &= 0, \quad j = 0, \dots, p-1 \\ \dot{\mathcal{A}}_r &= 0 \end{cases}$$

Daqui fica claro que o campo  $\tilde{X} = \frac{1}{\tilde{\varepsilon}^p} X \circ \Phi_{\tilde{\varepsilon}}$  é dado por

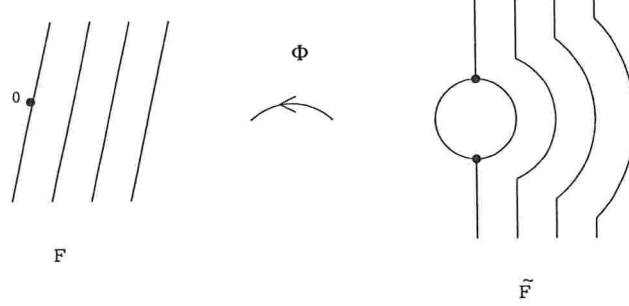
$$\tilde{X} = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + [\tilde{F}_0 + \tilde{F}_1 \tilde{y} + \tilde{Q} \tilde{y}^2] \frac{\partial}{\partial \tilde{y}}.$$

Lembramos que por hipótese  $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}(0) \neq 0$ ,  $a(0) = 0$ , e  $\mathcal{Q}_0 = \mathcal{Q}(0)$ . Em particular, na *fatia*  $\tilde{D}_0 = \tilde{D} \cap \{\mathcal{A}_r = 0\}$  o campo  $\tilde{X}$  é a família de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem

$$R_{A,B}(\mathcal{Q}_0) = \begin{cases} \frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}} &= \tilde{F}_0(\tilde{x}, A) + \tilde{F}_1(\tilde{x}, B) \tilde{y} + \mathcal{Q}_0 \tilde{y}^2 \\ &= [\sum_{i=0}^{2p-1} A_i \tilde{x}^i] + [\sum_{j=0}^{p-1} B_j \tilde{x}^j + \mathcal{B}_0 \tilde{x}^p] \tilde{y} + \mathcal{Q}_0 \tilde{y}^2 \end{cases}$$

Conhecida como uma família Riccati, note que  $R_{A,B}(0)$  é uma família de equações lineares.



Figura 4.1: Folheação Na Carta  $K_\varepsilon$ .

## 4.2 Estudo nas cartas $K_{\pm\bar{x}_\varepsilon}$

Consideremos um subconjunto aberto  $U_{\pm\bar{x}} = \{\pm\bar{x} > 0\} \subset \bar{U} = \Phi^{-1}(U)$  e consideremos o difeomorfismo

$$\begin{aligned} \varphi_{\pm\bar{x}} : U_{\pm\bar{x}} &\longrightarrow (\mathbb{R}^+, 0) \times \mathbb{R}^{3p+2} \times (\mathbb{R}^{n-3p}, 0) \\ ((\bar{x}, \bar{y}, \bar{\varepsilon}, \bar{a}, \bar{b}), \mathcal{A}_r, \tau) &\longmapsto (\hat{x}, (\hat{y}, \hat{\varepsilon}, \hat{a}, \hat{b}), \mathcal{A}_r). \end{aligned}$$

Mapeando  $D \cap U_{\pm\bar{x}}$  em  $\hat{D} = \{\hat{x} = 0\} \approx \mathbb{R}^{3p+2} \times (\mathbb{R}^{n-3p}, 0)$  e tal que o difeomorfismo  $\Phi_{\pm\bar{x}} = \Phi \circ \varphi_{\pm\bar{x}}^{-1}$ , é dado pela correspondência

$$\Phi_{\pm\bar{x}} = \begin{cases} x &= \pm\hat{x} \\ y &= \hat{x}^p \hat{y} \\ \varepsilon &= \hat{x}^{p+1} \hat{\varepsilon} \\ a_i &= \hat{x}^{2p-i} \hat{a}_i, \quad i = 0, \dots, 2p-1 \\ b_j &= \hat{x}^{p-j} \hat{b}_j, \quad j = 0, \dots, p-1 \\ \mathcal{A}_r &= \mathcal{A}_r. \end{cases}$$

Aqui as coordenadas  $(\hat{x}, (\hat{y}, \hat{\varepsilon}, \hat{a}, \hat{b}), \mathcal{A}_r)$ , são definidas por

$$\varphi_{\pm\bar{x}} = \begin{cases} \hat{x} &= \pm\tau\bar{x} \\ \hat{y} &= (\pm)^p \bar{x}^{-p} \bar{y} \\ \hat{\varepsilon} &= (\pm)^{p+1} \bar{x}^{-(p+1)} \bar{\varepsilon} \\ \hat{a}_i &= (\pm)^{2p-i} \bar{x}^{-(2p-i)} \bar{a}_i, \quad i = 0, \dots, 2p-1 \\ \hat{b}_j &= (\pm)^{p-j} \bar{x}^{-(p-j)} \bar{b}_j, \quad j = 0, \dots, p-1 \\ \mathcal{A}_r &= \mathcal{A}_r. \end{cases}$$

Nestas coordenadas observemos que a folheação  $\bar{\mathcal{F}}$  não é regular, pois é definida pelo seguinte sistema de equações de Pfaff.

$$\begin{aligned} 0 &= d(\hat{x}^{p+1}\hat{\varepsilon}) = (p+1)\hat{x}^p\hat{\varepsilon}d(\hat{x}) + \hat{x}^{p+1}d(\hat{\varepsilon}) \\ 0 &= d(\hat{x}^{2p-i}\hat{a}_i) = (2p-i)\hat{x}^{2p-i-1}\hat{a}_id(\hat{x}) + \hat{x}^{2p-i}d(\hat{a}_i) \\ 0 &= d(\hat{x}^{p-j}\hat{b}_j) = (p-j)\hat{x}^{p-j-1}\hat{b}_jd(\hat{x}) + \hat{x}^{p-j}d(\hat{b}_j) \\ 0 &= d(\mathcal{A}_r). \end{aligned}$$

Com a finalidade de descrever melhor tal folheação, consideremos o Blowing-up

$$\begin{aligned} \Psi : \quad \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^{3p} \times (\mathbb{R}^{n-3p}, 0) \times \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{3p} \times \mathbb{R}^{n-3p} \\ ((\hat{x}, \hat{y}), (\check{e}, \check{\alpha}_i, \check{\beta}_j), \mathcal{A}_r, R) &\longmapsto ((\hat{x}, \hat{y}), \hat{\varepsilon}, \hat{a}_i, \hat{b}_j, \mathcal{A}_r). \end{aligned}$$

da subvariedade

$$T = \{\hat{\varepsilon} = \hat{a}_i = \hat{b}_j = 0, \quad 0 \leq i \leq 2p-1, \quad 0 \leq j \leq p-1\}$$

definido pela expressão

$$\Psi = \begin{cases} (\hat{x}, \hat{y}, \mathcal{A}_r) &= (\hat{x}, \hat{y}, \mathcal{A}_r) \\ \hat{\varepsilon} &= R^{p+1}\check{e} \\ \hat{a}_i &= R^{2p-i}\check{\alpha}_i, \quad i = 0, \dots, 2p-1 \\ \hat{b}_j &= R^{p-j}\check{\beta}_j, \quad j = 0, \dots, p-1 \end{cases}$$

Sobre o subconjunto aberto  $U_{\check{e}} = \{\check{e} > 0\} \subset \check{U} = \Psi^{-1}(\varphi_{\pm\bar{x}}(U_{\pm\bar{x}}))$ , consideremos o difeomorfismo

$$\begin{aligned} \varphi_{\check{e}} : \quad U_{\check{e}} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \times (\mathbb{R}^+, 0) \times (\mathbb{R}^{3p}, 0) \times (\mathbb{R}^{n-3p}, 0) \\ ((\hat{x}, \hat{y}), (\check{e}, \check{\alpha}_i, \check{\beta}_j), \mathcal{A}_r) &\longmapsto ((\hat{x}, \hat{y}), e, (A_i, B_j), \mathcal{A}_r). \end{aligned}$$

Mapeamos  $D = \{R = 0\}$  em  $\check{D} = \{e = 0\}$ , e tal que o difeomorfismo  $\Psi_{\check{e}} = \Psi \circ \varphi_{\check{e}}^{-1}$  é dado por

$$\Psi_{\check{e}} = \begin{cases} (\hat{x}, \hat{y}, \mathcal{A}_r) &= (\hat{x}, \hat{y}, \mathcal{A}_r) \\ \hat{\varepsilon} &= e^{p+1} \\ \hat{a}_i &= e^{2p-i}A_i, \quad i = 0, \dots, 2p-1. \\ \hat{b}_j &= e^{p-j}B_j, \quad j = 0, \dots, p-1. \end{cases}$$

Chamaremos as coordenadas  $(\hat{x}, \hat{y}, e, A, B, \mathcal{A}_r)$  de cartas  $K_{\pm\bar{x}_\varepsilon}$  do Blowing-up, que são dadas por

$$\varphi_{\check{e}} = \begin{cases} (\hat{x}, \hat{y}, \mathcal{A}_r) &= (\hat{x}, \hat{y}, \mathcal{A}_r) \\ e &= R\check{e}^{\frac{1}{p+1}} \\ A_i &= \check{e}^{-\frac{2p-i}{p+1}}\check{\alpha}_i, \quad i = 0, \dots, 2p-1. \\ B_j &= \check{e}^{-\frac{p-j}{p+1}}\check{\beta}_j, \quad j = 0, \dots, p-1. \end{cases}$$

Assim obtemos o seguinte difeomorfismo

$$\begin{aligned}\Phi_{\pm\bar{x}_\varepsilon} &= \Phi \circ (\varphi_{\pm\bar{x}}^{-1} \circ \Psi \circ \varphi_{\bar{e}}^{-1}) \\ &= \Phi_{\pm\bar{x}} \circ \Psi_{\bar{e}},\end{aligned}$$

dado pela correspondência

$$\Phi_{\pm\bar{x}_\varepsilon} = \begin{cases} x &= \pm\hat{x} \\ y &= \hat{x}^p \hat{y} \\ \varepsilon &= \hat{x}^{p+1} e^{p+1} \\ a_i &= \hat{x}^{2p-i} e^{2p-i} A_i, \quad i = 0, \dots, 2p-1. \\ b_j &= \hat{x}^{p-j} e^{p-j} B_j, \quad j = 0, \dots, p-1. \\ \mathcal{A}_r &= \mathcal{A}_r \end{cases}$$

Nesta carta, a folheação  $\overline{\mathcal{F}}$  é dada pelo sistema de Pfaff.

$$\begin{aligned}0 &= d(\hat{x}^{p+1} e^{p+1}) = (p+1)(\hat{x}e)^p d(\hat{x}e) \\ 0 &= d(\hat{x}^{2p-i} e^{2p-i} A_i) = (2p-i)(\hat{x}e)^{2p-i-1} A_i d(\hat{x}e) + \hat{x}^{2p-i} e^{2p-i} d(A_i) \\ 0 &= d(\hat{x}^{p-j} e^{p-j} B_j) = (p-j)(\hat{x}e)^{p-j-1} B_j d(\hat{x}e) + \hat{x}^{p-j} e^{p-j} d(B_j) \\ 0 &= d(\mathcal{A}_r)\end{aligned}$$

Que é equivalente a  $\{d(\hat{x}e) = dA_i = dB_j = d\mathcal{A}_r = 0\}$

**Observação 4.2.1** *Notemos que*

- Para cada  $A^0 = (A^0, B^0, \mathcal{A}_r^0) \in U_A$ , a folheação  $\hat{\mathcal{F}}$  é definida pelos níveis da função  $(\hat{x}, e) \mapsto \hat{x}e$ . Assim a folheação

$$\hat{\mathcal{F}}_{\hat{x}e} = \hat{\mathcal{F}} \cup E_{\hat{x}} \cup E_e$$

constitui a extensão de  $\hat{\mathcal{F}}$  ao divisor excepcional  $\hat{D} \cup \check{D}$ , onde

$$\begin{aligned}E_{\hat{x}} &= \hat{D} \cap \{\mathcal{A} = \mathcal{A}^0\} \\ E_e &= \check{D} \cap \{\mathcal{A} = \mathcal{A}^0\}\end{aligned}$$

são sub variedades 2-dimensionais parametrizadas pelas coordenadas  $(\hat{y}, e, \mathcal{A}^0), (\hat{x}, \hat{y}, \mathcal{A}^0)$ , respectivamente.

- A folha limite  $E_{\hat{x}} \cup E_e$  é uma folha singular da função  $(\hat{x}, e) \mapsto \hat{x}e$

Nas cartas  $K_{\pm\bar{x}_\varepsilon}$ , o campo  $\bar{X}|_{U_{\pm\bar{x}}}$  é dado por

$$\begin{aligned}\bar{X}^\pm := \bar{X}|_{U_{\pm\bar{x}}} &= \left(\frac{1}{\hat{x}^p}\right)X \circ \Phi \circ (\varphi_{\pm\bar{x}}^{-1} \circ \Psi \circ \varphi_{\bar{e}}^{-1}) \\ &= \left(\frac{1}{\hat{x}^p}\right)X \circ (\Phi \circ \varphi_{\pm\bar{x}}^{-1}) \circ (\Psi \circ \varphi_{\bar{e}}^{-1}) \\ &= \left(\frac{1}{\hat{x}^p}\right)X \circ (\Phi_{\pm\bar{x}} \circ \Psi_{\bar{e}}) \\ &= \left(\frac{1}{\hat{x}^p}\right)X \circ \Phi_{\pm\bar{x}_\varepsilon},\end{aligned}$$

onde

$$X \circ \Phi_{\pm\bar{x}_\varepsilon} = \begin{cases} \dot{\hat{x}} &= \pm\hat{x}^{p+1}e^{p+1} \\ \hat{x}^p\dot{\hat{y}} &= \hat{F}^\pm \mp p\hat{x}^{2p}e^{p+1}\hat{y} \\ \dot{\hat{e}} &= \mp\hat{x}^pe^{p+2} \\ \dot{A}_i &= 0, \quad i = 0, \dots, 2p-1. \\ \dot{B}_j &= 0, \quad j = 0, \dots, p-1. \\ \dot{A}_r &= 0 \end{cases}$$

Agora observemos na carta  $K_{\pm\bar{x}_\varepsilon}$ , a expansão  $F = F_0 + F_1y + Qy^2$ .

$$\begin{aligned}F_0(x, \varepsilon, \mathcal{A}) &= \sum_{i=0}^{2p-1} a_i(\varepsilon, \mathcal{A})x^i + x^{2p}[a_{2p}(\varepsilon, \mathcal{A}) + \sum_{i=2}^{\infty} a_{2p+i-1}(\varepsilon, \mathcal{A})x^{i-1}] \\ &= \sum_{i=0}^{2p-1} \hat{x}^{2p-i}e^{2p-i}A_i(\pm\hat{x})^i + \\ &\quad + (\pm\hat{x})^{2p}[a_{2p}(\varepsilon, \mathcal{A}) + \hat{x} \sum_{i=2}^{\infty} a_{2p+i-1}(\varepsilon, \mathcal{A})\hat{x}^{i-2}(\pm 1)^{i-1}] \\ &= \hat{x}^{2p} \left[ \sum_{i=0}^{2p-1} (\pm 1)^i A_i e^{2p-i} + a(\mathcal{A}_r) + O(\hat{x}) \right] \\ &= \hat{x}^{2p} \hat{F}_0^\pm,\end{aligned}$$

onde  $a_{2p}(\varepsilon, \mathcal{A}) = a(\mathcal{A}_r) + O(\hat{x})$ . Similarmente obtemos

$$\begin{aligned}
F_1(x, \varepsilon, \mathcal{A}) &= \sum_{j=0}^{p-1} b_j(\varepsilon, \mathcal{A})x^j + x^p[b_p(\varepsilon, \mathcal{A}) + \sum_{j=2}^{\infty} b_{p+j-1}(\varepsilon, \mathcal{A})x^{j-1}] \\
&= \sum_{j=0}^{p-1} \hat{x}^{p-j} e^{p-j} B_j(\pm\hat{x})^j + \\
&\quad + (\pm\hat{x})^p [b_p(\varepsilon, \mathcal{A}) + \hat{x} \sum_{j=2}^{\infty} b_{p+j-1}(\varepsilon, \mathcal{A})(\pm 1)^{j-1} \hat{x}^{j-2}] \\
&= \hat{x}^p \left[ \sum_{j=0}^{p-1} (\pm 1)^j B_j e^{p-j} + (\pm 1)^p \mathcal{B}(\mathcal{A}_r) + O(\hat{x}) \right] \\
&= \hat{x}^p \hat{F}_1^\pm,
\end{aligned}$$

onde  $b_p(\varepsilon, \mathcal{A}) = \mathcal{B}(\mathcal{A}_r) + O(\hat{x})$ .

Da mesma forma,  $Q(x, y, \varepsilon, \mathcal{A}) = Q(\mathcal{A}_r) + O(\hat{x}) = \hat{Q}^\pm$ . Assim, obtemos a expressão

$$\hat{F}^\pm = \hat{x}^{2p} [\hat{F}_0^\pm + \hat{F}_1^\pm \hat{y} + \hat{Q}^\pm \hat{y}^2].$$

Logo, o sistema de equações diferenciais associado a  $X \circ \Phi_{\pm\bar{x}_\varepsilon}$  será

$$X \circ \Phi_{\pm\bar{x}_\varepsilon} = \begin{cases} \dot{\hat{x}} &= \pm \hat{x}^{p+1} e^{p+1} \\ \dot{\hat{y}} &= \hat{x}^p [\hat{F}_0^\pm + (\mp p e^{p+1} + \hat{F}_1^\pm) \hat{y} + \hat{Q}^\pm \hat{y}^2] \\ \dot{e} &= \mp \hat{x}^p e^{p+2} \\ \dot{A}_i &= 0, \quad i = 0, \dots, 2p-1. \\ \dot{B}_j &= 0, \quad j = 0, \dots, p-1. \\ \dot{A}_r &= 0 \end{cases}$$

Portanto, nas cartas  $K_{\pm\bar{x}_\varepsilon}$ , obtemos a família de campos vetoriais  $\bar{X}^\pm$  com espaço fase  $(\hat{x}, \hat{y}, e)$  e parâmetros  $(A, B, \mathcal{A}_r)$  dado por:

$$\begin{aligned}
\bar{X}^\pm &:= (\pm \hat{x} e^{p+1}) \frac{\partial}{\partial \hat{x}} + \bar{F}^\pm(\hat{x}, \hat{y}, e, A, B, \mathcal{A}_r) \frac{\partial}{\partial \hat{y}} + (\mp e^{p+2}) \frac{\partial}{\partial e} \\
&= \pm e^{p+1} \left( \hat{x} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} - e \frac{\partial}{\partial e} \right) + \bar{F}^\pm(\hat{x}, \hat{y}, e, A, B, \mathcal{A}_r) \frac{\partial}{\partial \hat{y}},
\end{aligned}$$

onde  $\bar{F}^\pm = \hat{F}_0^\pm + (\mp p e^{p+1} + \hat{F}_1^\pm) \hat{y} + \hat{Q}^\pm \hat{y}^2$

**Observação 4.2.2** Olhando para o campo  $\bar{X}^\pm$ , note que

A função  $f : (\hat{x}, e) \mapsto \hat{x}e$ , é claramente uma integral primeira para  $\overline{X}^\pm$  pois verifica  $\nabla f \cdot \overline{X}^\pm = \overline{X}^\pm(f) \equiv 0$ ; ou seja a função  $f$  é constante ao longo das curvas integrais de  $\overline{X}^\pm$ . Assim  $\overline{X}^\pm$  é sempre tangente á folheação  $\hat{F}_{\hat{x}e} = \hat{F} \cup E_{\hat{x}} \cup E_e$  e portanto tangente ao divisor excepcional  $\hat{D} = \{\hat{x} = 0\}$  (ver Figura 4.2).

Em particular, tomando  $Q(0) = Q_0, a(0) = 0, B(0) = B_0$ ; sobre o conjunto  $\hat{D}_0 = \hat{D} \cap \{\mathcal{A}_r = 0\}$  temos a família restrita

$$\overline{X}^\pm|_{\hat{D}_0} := \mp e^{p+2} \frac{\partial}{\partial e} + \overline{F}^\pm(0, \hat{y}, e, A, B, 0) \frac{\partial}{\partial \hat{y}},$$

onde

$$\begin{aligned} \overline{F}^\pm(0, \hat{y}, e, A, B, 0) &= \hat{F}_0^\pm(e, A) + (\mp p e^{p+1} + \hat{F}_1^\pm(e, B)) \hat{y} + Q_0 \hat{y}^2 \\ \hat{F}_0^\pm(e, A) &= \sum_{i=0}^{2p-1} (\pm 1)^i A_i e^{2p-i} \\ \hat{F}_1^\pm(e, B) &= \sum_{j=0}^{p-1} (\pm 1)^j B_j e^{p-j} + (\pm 1)^p B_0, \end{aligned}$$

Aqui o espaço fase  $(\hat{y}, e)$  corresponderia à família de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem

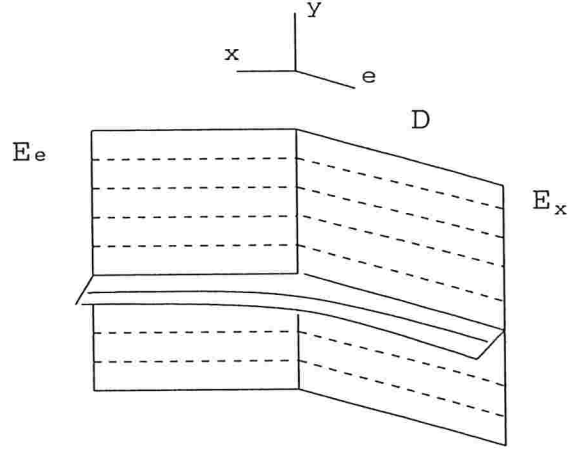
$$C_{A,B}^\pm(Q_0) = \left\{ \frac{d\hat{y}}{de} = \frac{1}{\mp e^{p+2}} \left( [\sum_{i=0}^{2p-1} (\pm 1)^i A_i e^{2p-i}] + [\mp p e^{p+1} + \sum_{j=0}^{p-1} (\pm 1)^j B_j e^{p-j} + (\pm 1)^p B_0] \hat{y} + Q_0 \hat{y}^2 \right) \right\}$$

onde  $(A, B) = (A_0, \dots, A_{2p-1}, B_0, \dots, B_{p-1})$

### 4.3 Relação entre as cartas $K_{\tilde{\varepsilon}}, K_{\pm \tilde{x}_\varepsilon}$

Lembremos que as cartas  $K_{\pm \tilde{x}_\varepsilon}$  e  $K_{\tilde{\varepsilon}}$  estão definidas respectivamente pelas seguintes coordenadas:

$$\Phi_{\pm \tilde{x}_\varepsilon} = \begin{cases} x &= \pm \hat{x} \\ y &= \hat{x}^p \hat{y} \\ \varepsilon &= \hat{x}^{p+1} e^{p+1} \\ a_i &= \hat{x}^{2p-i} e^{2p-i} A_i \\ b_j &= \hat{x}^{p-j} e^{p-j} B_j \\ \mathcal{A}_r &= \mathcal{A}_r \end{cases} \quad \Phi_{\tilde{\varepsilon}} = \begin{cases} x &= \tilde{\varepsilon} \tilde{x} \\ y &= \tilde{\varepsilon}^p \tilde{y} \\ \varepsilon &= \tilde{\varepsilon}^{p+1} \\ a_i &= \tilde{\varepsilon}^{2p-i} A_i \\ b_j &= \tilde{\varepsilon}^{p-j} B_j \\ \mathcal{A}_r &= \mathcal{A}_r, \end{cases}$$


 Figura 4.2: Folheação Na Carta  $K_{-x_{\varepsilon}}$ .

onde  $0 \leq i \leq 2p-1, 0 \leq j \leq p-1$ .

Consideremos o seguinte difeomorfismo

$$\begin{aligned} D_{\bar{\varepsilon}}^{\pm} := D(K_{\bar{\varepsilon}}, K_{\pm\bar{x}_{\varepsilon}}) &= \varphi_{\bar{\varepsilon}} \circ \varphi_{\pm\bar{x}}^{-1} \circ \Psi \circ \varphi_{\bar{\varepsilon}}^{-1} \\ &= (\Phi \circ \varphi_{\bar{\varepsilon}}^{-1})^{-1} \circ (\Phi \circ \varphi_{\pm\bar{x}}^{-1}) \circ (\Psi \circ \varphi_{\bar{\varepsilon}}^{-1}) \\ &= (\Phi_{\bar{\varepsilon}})^{-1} \circ (\Phi_{\pm\bar{x}} \circ \Psi_{\bar{\varepsilon}}) \\ &= (\Phi_{\bar{\varepsilon}})^{-1} \circ \Phi_{\pm\bar{x}_{\varepsilon}} \end{aligned}$$

Onde

$$\Phi_{\bar{\varepsilon}}^{-1} = \begin{cases} \tilde{x} &= \frac{x}{\bar{\varepsilon}} \\ \tilde{y} &= \frac{y}{\bar{\varepsilon}^p} \\ \tilde{\varepsilon} &= \varepsilon^{\frac{1}{p+1}} \\ A_i &= \frac{a_i}{\bar{\varepsilon}^{2p-i}} \\ B_j &= \frac{b_j}{\bar{\varepsilon}^{p-j}} \\ \mathcal{A}_r &= \mathcal{A}_r, \end{cases}$$

Logo os difeomorfismos  $D_{\bar{\varepsilon}}^{\pm}$ , e  $(D_{\bar{\varepsilon}}^{\pm})^{-1}$  são dados pelas seguintes correspondências

$$D_{\bar{\varepsilon}}^{\pm} = \begin{cases} \tilde{x} &= \frac{\pm 1}{\bar{\varepsilon}} \\ \tilde{y} &= \frac{y}{\bar{\varepsilon}^p} \\ \tilde{\varepsilon} &= \hat{x}e \\ (A_i, B_j, \mathcal{A}_r) &= (A_i, B_j, \mathcal{A}_r) \end{cases} \quad (D_{\bar{\varepsilon}}^{\pm})^{-1} = \begin{cases} \hat{x} &= \pm\tilde{\varepsilon}\tilde{x} \\ \hat{y} &= (\pm 1)^p \frac{\tilde{y}}{\tilde{x}^p} \\ e &= \frac{\pm 1}{\tilde{x}} \\ (A_i, B_j, \mathcal{A}_r) &= (A_i, B_j, \mathcal{A}_r) \end{cases}$$

**Observação 4.3.1** *Destas relações temos que*

- *Claramente os difeomorfismos  $D_\varepsilon^\pm$  e  $(D_\varepsilon^\pm)^{-1}$  relacionam as coordenadas  $(\hat{x}, \hat{y}, e, A, B, \mathcal{A}_r), (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\varepsilon}, A, B, \mathcal{A}_r)$  que definem as cartas  $K_{\pm\tilde{x}_\varepsilon}, K_\varepsilon$ .*
- *Os mesmos parâmetros  $(A, B, \mathcal{A}_r)$  correspondem para ambas famílias  $\tilde{X}$  e  $\bar{X}^\pm$ ; portanto também para ambas famílias  $R_{A,B}(\mathcal{Q}_0)$  e  $C_{A,B}^\pm(\mathcal{Q}_0)$ .*

Isso mostra que a família  $C_{A,B}^\pm(\mathcal{Q}_0) \equiv \bar{X}^\pm|_{\hat{D}_0}$ , pode ser vista como uma compactificação da família Riccati  $R_{A,B}(\mathcal{Q}_0) \equiv \tilde{X}|_{\tilde{D}_0}$  em  $\tilde{x} = \pm\infty$ .



## Capítulo 5

# Dinâmica Assintótica sobre a carta $K_{\bar{\varepsilon}}$

Após a desingularização, os campos vetoriais  $\tilde{X}, \overline{X}^{\pm}$ , se correspondem pelas funções  $D_{\bar{\varepsilon}}^{\pm}$  (definidas no capítulo anterior). Sobre divisor  $\tilde{D}_0 = \{\tilde{\varepsilon} = 0\} \cap \{\mathcal{A}_r = 0\}$ , vamos caracterizar o comportamento assintótico das soluções  $\tilde{y}(\tilde{x})$  da família  $R_{A,B}(\mathcal{Q}_0)$  numa vizinhança de  $\tilde{x} = \pm\infty$ . Este comportamento assintótico é equivalente (devido ao difeomorfismo  $(D_{\bar{\varepsilon}}^{\pm})^{-1}$ ) a estudar as soluções de  $C_{A,B}^{\pm}(\mathcal{Q}_0)$  numa vizinhança de  $X = 0$  com espaço fase  $(X = \frac{\pm 1}{\tilde{x}}, Y = (\pm 1)^p \frac{\tilde{y}}{\tilde{x}^p})$  e parâmetros  $(A, B)$ .

A caracterização consistirá em definir adequadamente a condição inicial  $\tilde{y}_0$ , tal que o problema de Cauchy  $[R_{A,B}(\mathcal{Q}_0), \tilde{y}(0) = \tilde{y}_0]$  tenha solução  $\tilde{y}(\tilde{x})$ , satisfazendo  $\tilde{y}(\tilde{x}) = o(\tilde{x}^p)$  ou equivalentemente  $Y(X) = o(1)$ , sobre vizinhanças de  $\tilde{x} = \pm\infty$  e  $X = 0$  respectivamente.

### 5.1 O caso $R_{A,0}(0)$

Vamos começar com o caso especial da família  $R_{A,B}(\mathcal{Q}_0)$  com  $B = 0 = \mathcal{Q}_0$ , neste caso consideremos a família linear de equações diferenciais

$$\frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}} = \left( \sum_{k=0}^{2p-1} A_k \tilde{x}^k \right) + (B_0 \tilde{x}^p) \tilde{y}$$

onde  $A = (A_0, \dots, A_{2p-1})$ ,  $B_0 \neq 0$ .

Pela fórmula de variação das constantes, o problema de Cauchy associado

com condição inicial  $\tilde{y}_0$  tem uma única solução sobre  $\mathbb{R}$  dada por

$$\tilde{y}(\tilde{x}) = e^{\mathcal{B}_0 \frac{\tilde{x}^{p+1}}{p+1}} \left[ \tilde{y}_0 + \sum_{k=0}^{2p-1} A_k J_k(\tilde{x}) \right] \quad (5.1)$$

Onde,  $J_k(\tilde{x}) = \int_0^{\tilde{x}} \tau^k e^{-\mathcal{B}_0 \frac{\tau^{p+1}}{p+1}} d\tau$ ,  $k = 0, 1, \dots, 2p-1$ .

Notemos que o comportamento assintótico destas soluções numa vizinhança de  $\tilde{x} = \pm\infty$  depende da expansão assintótica das integrais  $J_k(\tilde{x})$  quando  $\tilde{x} \rightarrow \pm\infty$ , conseqüentemente dependerá das constantes  $\mathcal{B}_0$  e  $p+1$ .

### 5.1.1 Caso $\mathcal{B}_0 > 0$

Como as funções  $J_k(\tilde{x}) = \int_0^{\tilde{x}} \tau^k e^{-\mathcal{B}_0 \frac{\tau^{p+1}}{p+1}} d\tau$  são crescentes e limitadas para todo  $k = 0, 1, \dots, 2p-1$ , então vale a igualdade

$$J_k(\tilde{x}) = \int_0^\infty \tau^k e^{-\mathcal{B}_0 \frac{\tau^{p+1}}{p+1}} d\tau - \int_{\tilde{x}}^\infty \tau^k e^{-\mathcal{B}_0 \frac{\tau^{p+1}}{p+1}} d\tau.$$

Da proposição 7.4.9 e o exemplo 7.4.6 (ver apêndice 1), valem as seguintes expressões

$$\begin{aligned} c_k(\mathcal{B}_0) &:= \int_0^\infty \tau^k e^{-\mathcal{B}_0 \frac{\tau^{p+1}}{p+1}} d\tau = \mathcal{B}_0^{-\frac{k+1}{p+1}} (p+1)^{\frac{k+1}{p+1}-1} \Gamma\left(\frac{k+1}{p+1}\right) \\ \int_{\tilde{x}}^\infty \tau^k e^{-\mathcal{B}_0 \frac{\tau^{p+1}}{p+1}} d\tau &= \frac{1}{\mathcal{B}_0} \tilde{x}^{k-p} e^{-\mathcal{B}_0 \frac{\tilde{x}^{p+1}}{p+1}} + o(\tilde{x}^{k-p} e^{-\mathcal{B}_0 \frac{\tilde{x}^{p+1}}{p+1}}) \end{aligned}$$

onde,  $\Gamma(x) = \int_0^\infty \tau^{x-1} e^{-\tau} d\tau$  é convergente para  $x > 0$ .

Assim quando  $\tilde{x} \rightarrow +\infty$ ,  $J_k(\tilde{x})$  tem a seguinte expansão

$$J_k(\tilde{x}) = c_k(\mathcal{B}_0) + \left(\frac{-1}{\mathcal{B}_0}\right) \tilde{x}^{k-p} e^{-\mathcal{B}_0 \frac{\tilde{x}^{p+1}}{p+1}} + o(\tilde{x}^{k-p} e^{-\mathcal{B}_0 \frac{\tilde{x}^{p+1}}{p+1}}) \quad (5.2)$$

Logo, temos o resultado

**Lema 5.1.1** *As soluções  $\tilde{y}_\pm(\tilde{x})$  numa vizinhança de  $\tilde{x} = \pm\infty$  do problema de Cauchy  $[R_{A,0}(0), \tilde{y}_0]$ , satisfazem o seguinte*

(i)  $\tilde{y}_+(\tilde{x}) = o(\tilde{x}^p)$ , numa vizinhança de  $\tilde{x} = +\infty$  se e só se

$$\tilde{y}_0 + \sum_{k=0}^{2p-1} c_k(\mathcal{B}_0) A_k = 0$$

onde  $\tilde{y}_0 := \tilde{y}_+(0)$ .

(ii) Se  $p + 1$  é par,  $\tilde{y}_-(\tilde{x}) = o(\tilde{x}^p)$  numa vizinhança de  $\tilde{x} = -\infty$ , se e só mente se

$$\tilde{y}_0 + \sum_{k=0}^{2p-1} (-1)^{k+1} c_k(\mathcal{B}_0) A_k = 0$$

onde  $\tilde{y}_0 := \tilde{y}_-(0)$ .

(iii) Se  $p + 1$  é ímpar,  $\tilde{y}_-(\tilde{x}) = o(\tilde{x}^p)$  numa vizinhança de  $\tilde{x} = -\infty$ , para qualquer vetor  $(\tilde{y}_0, A) := (\tilde{y}_-(0), A_0, \dots, A_{2p-1})$ .

#### DEMONSTRAÇÃO

(i) Substituindo a expressão (5.2) na solução  $\tilde{y}_+(\tilde{x})$  dada em (5.1), resulta a igualdade

$$\begin{aligned} \tilde{y}_+(\tilde{x}) &= e^{\mathcal{B}_0 \frac{\tilde{x}^{p+1}}{p+1}} \left[ \tilde{y}_0 + \sum_{k=0}^{2p-1} c_k(\mathcal{B}_0) A_k \right] + \left( \frac{-1}{\mathcal{B}_0} \right) \sum_{k=0}^{2p-1} A_k \tilde{x}^{k-p} + \\ &+ \sum_{k=0}^{2p-1} o(\tilde{x}^{k-p}), \end{aligned}$$

de onde obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{y}_+(\tilde{x})}{\tilde{x}^p} &= \frac{1}{\tilde{x}^p} e^{\mathcal{B}_0 \frac{\tilde{x}^{p+1}}{p+1}} \left[ \tilde{y}_0 + \sum_{k=0}^{2p-1} c_k(\mathcal{B}_0) A_k \right] + \left( \frac{-1}{\mathcal{B}_0} \right) \sum_{k=0}^{2p-1} A_k \tilde{x}^{k-2p} + \\ &+ \sum_{k=0}^{2p-1} \tilde{x}^{k-2p} \frac{o(\tilde{x}^{k-p})}{\tilde{x}^{k-p}}. \end{aligned}$$

Daqui decorre a condição necessária e suficiente, mostrando (i).

(ii) Se  $p + 1$  é par, vale a relação

$$\begin{aligned} J_k(-\tilde{x}) &= (-1)^{k+1} J_k(\tilde{x}) \\ &= (-1)^{k+1} \left[ c_k(\mathcal{B}_0) + \left( \frac{-1}{\mathcal{B}_0} \right) \tilde{x}^{k-p} e^{-\mathcal{B}_0 \frac{\tilde{x}^{p+1}}{p+1}} + \right. \\ &\quad \left. + o(\tilde{x}^{k-p} e^{-\mathcal{B}_0 \frac{\tilde{x}^{p+1}}{p+1}}) \right] \end{aligned}$$

Logo daqui, definindo  $\tilde{y}_-(\tilde{x}) := \tilde{y}(-\tilde{x})$ , e usando (5.1) obtemos em forma análoga a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{y}_-(\tilde{x})}{\tilde{x}^p} &= \frac{1}{\tilde{x}^p} e^{\mathcal{B}_0 \frac{\tilde{x}^{p+1}}{p+1}} [\tilde{y}_0 + \sum_{k=0}^{2p-1} (-1)^{k+1} c_k(\mathcal{B}_0) A_k] + \\ &+ \left(\frac{-1}{\mathcal{B}_0}\right) \sum_{k=0}^{2p-1} (-1)^{k+1} A_k \tilde{x}^{k-2p} + \sum_{k=0}^{2p-1} x^{k-2p} \frac{o(\tilde{x}^{k-p})}{x^{k-p}}, \end{aligned}$$

onde claramente  $\tilde{y}_0 := \tilde{y}_-(0)$ . Assim, obtemos a condição necessária e suficiente (ii).

(iii) Se  $p+1$  fosse ímpar, obteríamos

$$\begin{aligned} J_k(-\tilde{x}) &= (-1)^{k+1} \int_0^{\tilde{x}} \tau^k e^{\mathcal{B}_0 \frac{\tau^{p+1}}{p+1}} d\tau \\ &= (-1)^{k+1} \left[ \left(\frac{1}{\mathcal{B}_0}\right) \tilde{x}^{k-p} e^{\mathcal{B}_0 \frac{\tilde{x}^{p+1}}{p+1}} + o(\tilde{x}^{k-p} e^{\mathcal{B}_0 \frac{\tilde{x}^{p+1}}{p+1}}) \right]. \end{aligned}$$

Definindo  $\tilde{y}_-(\tilde{x}) := \tilde{y}(-\tilde{x})$ , e usando (5.1), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{y}_-(\tilde{x})}{\tilde{x}^p} &= \frac{1}{\tilde{x}^p} e^{-\mathcal{B}_0 \frac{\tilde{x}^{p+1}}{p+1}} \tilde{y}_0 + \left(\frac{1}{\mathcal{B}_0}\right) \sum_{k=0}^{2p-1} (-1)^{k+1} A_k \tilde{x}^{k-2p} \\ &+ \sum_{k=0}^{2p-1} x^{k-2p} \frac{o(\tilde{x}^{k-p})}{x^{k-p}}, \end{aligned}$$

De onde decorre (iii), para qualquer escolha de vetores  $(\tilde{y}_0, A) := (\tilde{y}_-(0), A_0, \dots, A_{2p-1})$ .

□

### Observação 5.1.2 Neste lema

- As expressões  $\frac{o(\tilde{x}^{k-p})}{x^{k-p}}$  dadas acima denotam funções limitadas numa vizinhança do  $\tilde{x} = \pm\infty$ .
- Na compatificação  $X = \pm\frac{1}{\tilde{x}}$ ,  $Y(X) = X^p \tilde{y}_{\pm}(\pm\frac{1}{X})$ , o resultado acima diz que  $Y(X) = o(1)$ , numa vizinhança do  $X = 0$ .

5.1.2 Caso  $\mathcal{B}_0 < 0$ 

Neste caso as funções  $J_k(\tilde{x}) = \int_0^{\tilde{x}} \tau^k e^{-\mathcal{B}_0 \frac{\tau^{p+1}}{p+1}} d\tau$  quando  $\tilde{x} \rightarrow \infty$  tem a seguinte expansão assintótica

$$J_k(\tilde{x}) = \left(\frac{-1}{\mathcal{B}_0}\right) \tilde{x}^{k-p} e^{-\mathcal{B}_0 \frac{\tilde{x}^{p+1}}{p+1}} + o\left(\tilde{x}^{k-p} e^{-\mathcal{B}_0 \frac{\tilde{x}^{p+1}}{p+1}}\right). \quad (5.3)$$

Por outro lado, se  $p+1$  é par obtemos

$$\begin{aligned} J_k(-\tilde{x}) &= (-1)^{k+1} J_k(\tilde{x}) \\ &= (-1)^{k+1} \left[ \left(\frac{-1}{\mathcal{B}_0}\right) \tilde{x}^{k-p} e^{-\mathcal{B}_0 \frac{\tilde{x}^{p+1}}{p+1}} + o\left(\tilde{x}^{k-p} e^{-\mathcal{B}_0 \frac{\tilde{x}^{p+1}}{p+1}}\right) \right]. \end{aligned} \quad (5.4)$$

E se  $p+1$  fosse ímpar

$$\begin{aligned} J_k(-\tilde{x}) &= (-1)^{k+1} \int_0^{\tilde{x}} \tau^k e^{\mathcal{B}_0 \frac{\tau^{p+1}}{p+1}} \\ &= (-1)^{k+1} \left[ c_k(-\mathcal{B}_0) + \left(\frac{-1}{|\mathcal{B}_0|}\right) \tilde{x}^{k-p} e^{\mathcal{B}_0 \frac{\tilde{x}^{p+1}}{p+1}} + \right. \\ &\quad \left. + o\left(\tilde{x}^{k-p} e^{\mathcal{B}_0 \frac{\tilde{x}^{p+1}}{p+1}}\right) \right]. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Logo daqui, temos o seguinte resultado

**Lema 5.1.3** *As soluções  $\tilde{y}_\pm(\tilde{x})$  numa vizinhança de  $\tilde{x} = \pm\infty$  do problema de Cauchy  $[R_{A,0}(0), \tilde{y}_0]$ , satisfazem o seguinte*

- (i)  $\tilde{y}_+(\tilde{x}) = o(\tilde{x}^p)$ , numa vizinhança de  $\tilde{x} = +\infty$ , para qualquer vetor  $(\tilde{y}_0, A) := (\tilde{y}_+(0), A_0, \dots, A_{2p-1})$ ,
- (ii) Se  $p+1$  é par,  $\tilde{y}_-(\tilde{x}) = o(\tilde{x}^p)$  numa vizinhança de  $\tilde{x} = -\infty$ , para qualquer vetor  $(\tilde{y}_0, A) := (\tilde{y}_-(0), A_0, \dots, A_{2p-1})$ ,
- (iii) Se  $p+1$  é ímpar,  $\tilde{y}_-(\tilde{x}) = o(\tilde{x}^p)$  numa vizinhança de  $\tilde{x} = -\infty$ , se e só mente se

$$\tilde{y}_0 + \sum_{k=0}^{2p-1} (-1)^{k+1} c_k(-\mathcal{B}_0) A_k = 0$$

onde  $\tilde{y}_0 := \tilde{y}_-(0)$ .

DEMONSTRAÇÃO

(i) Substituindo (5.3) em (5.1), obtemos a igualdade

$$\frac{\tilde{y}_+(\tilde{x})}{\tilde{x}^p} = \frac{1}{\tilde{x}^p} e^{\mathcal{B}_0 \frac{\tilde{x}^{p+1}}{p+1}} \tilde{y}_0 + \left(\frac{-1}{\mathcal{B}_0}\right) \sum_{k=0}^{2p-1} A_k \tilde{x}^{k-2p} + \sum_{k=0}^{2p-1} x^{k-2p} \frac{o(\tilde{x}^{k-p})}{x^{k-p}}.$$

Daqui, para escolha arbitrária dos elementos  $(\tilde{y}_0, A) := (\tilde{y}_+(0), A_0, \dots, A_{2p-1})$ , (i) é satisfeito.

(ii) Se  $p+1$  é par, definamos  $\tilde{y}_-(\tilde{x}) := \tilde{y}(-\tilde{x})$  e substituindo (5.4) em (5.1), obtemos analogamente

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{y}_-(\tilde{x})}{\tilde{x}^p} &= \frac{1}{\tilde{x}^p} e^{\mathcal{B}_0 \frac{\tilde{x}^{p+1}}{p+1}} \tilde{y}_0 + \left(\frac{-1}{\mathcal{B}_0}\right) \sum_{k=0}^{2p-1} (-1)^{k+1} A_k \tilde{x}^{k-2p} + \\ &+ \sum_{k=0}^{2p-1} x^{k-2p} \frac{o(\tilde{x}^{k-p})}{x^{k-p}} \end{aligned}$$

satisfazendo (ii), para escolhas arbitrárias de pares  $(\tilde{y}_0, A) := (\tilde{y}_+(0), A_0, \dots, A_{2p-1})$ .

(iii) Se  $p+1$  fosse ímpar, definimos  $\tilde{y}_-(\tilde{x}) := \tilde{y}(-\tilde{x})$  e substituindo (5.5) em (5.1), obtemos a relação

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{y}_-(\tilde{x})}{\tilde{x}^p} &= \frac{1}{\tilde{x}^p} e^{-\mathcal{B}_0 \frac{\tilde{x}^{p+1}}{p+1}} [\tilde{y}_0 + \sum_{k=0}^{2p-1} (-1)^{k+1} c_k(-\mathcal{B}_0) A_k] + \\ &+ \left(\frac{1}{\mathcal{B}_0}\right) \sum_{k=0}^{2p-1} (-1)^{k+1} A_k \tilde{x}^{k-2p} + \sum_{k=0}^{2p-1} x^{k-2p} \frac{o(\tilde{x}^{k-p})}{x^{k-p}} \end{aligned}$$

Assim, (iii) é satisfeito; onde  $\tilde{y}_0 := \tilde{y}_-(0)$ .

□

#### Observação 5.1.4 *Similarmente neste lema*

- As expressões  $\frac{o(\tilde{x}^{k-p})}{x^{k-p}}$ , dadas acima denotam funções limitadas numa vizinhança do  $\tilde{x} = \pm\infty$ ,
- Nas coordenadas  $X = \pm\frac{1}{\tilde{x}}$ ,  $Y(X) = X^p \tilde{y}_{\pm}(\pm\frac{1}{X})$ , o resultado acima diz que  $Y(X) = o(1)$ , numa vizinhança do  $X = 0$ .

## 5.2 O caso $R_{A,B}(0)$

Neste caso consideremos a família linear de equações diferenciais de primeira ordem

$$\frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}} = \left( \sum_{k=0}^{2p-1} A_k \tilde{x}^k \right) + \left( \sum_{j=0}^{p-1} B_j \tilde{x}^j + \mathcal{B}_0 \tilde{x}^p \right) \tilde{y}$$

onde  $(A, B) = (A_0, \dots, A_{2p-1}, B_0, \dots, B_{p-1})$ ,  $\mathcal{B}_0 \neq 0$ .

Pela fórmula de variação das constantes, o problema de cauchy associado com condição inicial  $\tilde{y}_0$ , tem soluções únicas dadas por

$$\tilde{y}(\tilde{x}) = e^{P(\tilde{x})} \left[ \tilde{y}_0 + \sum_{k=0}^{2p-1} A_k J_k^P(\tilde{x}) \right], \quad (5.6)$$

onde

$$\begin{aligned} J_k^P(\tilde{x}) &= \int_0^{\tilde{x}} \tau^k e^{-P(\tau)} d\tau, \quad k = 0, 1, \dots, 2p-1, \\ P(\tilde{x}) &= \int_0^{\tilde{x}} \left( \sum_{j=0}^{p-1} B_j \tau^j + \mathcal{B}_0 \tau^p \right) d\tau \\ &= \mathcal{B}_0 \tilde{x} + B_1 \frac{\tilde{x}^2}{2} + \dots + B_{p-1} \frac{\tilde{x}^p}{p} + \mathcal{B}_0 \frac{\tilde{x}^{p+1}}{p+1} \end{aligned}$$

Observemos que

$$\deg\left(\mathcal{B}_0 \frac{\tilde{x}^{p+1}}{p+1}\right) = \deg(P(\tilde{x})), \quad P(\tilde{x}) = \mathcal{B}_0 \frac{\tilde{x}^{p+1}}{p+1} (o(1) + 1)$$

Como no caso anterior, o comportamento assintótico destas soluções numa vizinhança de  $\tilde{x} = \pm\infty$ , dependerá das expansões assintóticas das integrais  $J_k^P(\tilde{x})$  quando  $\tilde{x} \rightarrow \pm\infty$ ; por tanto das constantes  $\mathcal{B}_0$ , e  $p+1$ .

O estudo é feito em dois casos.

### 5.2.1 Caso $\mathcal{B}_0 > 0$

Neste caso as funções  $J_k^P(\tilde{x}) = \int_0^{\tilde{x}} \tau^k e^{-P(\tau)} d\tau$ , são convergentes numa vizinhança de  $\tilde{x} = \infty$ ; logo vale a igualdade

$$J_k^P(\tilde{x}) = \int_0^{\infty} \tau^k e^{-P(\tau)} d\tau - \int_{\tilde{x}}^{\infty} \tau^k e^{-P(\tau)} d\tau.$$

Como o segundo somando satisfaz

$$\int_{\bar{x}}^{\infty} \tau^k e^{-P(\tau)} d\tau \sim \frac{\bar{x}^k e^{-P(\bar{x})}}{|-P'(\bar{x})|} = \frac{\bar{x}^k e^{-P(\bar{x})}}{B_0 \bar{x}^p (o(1) + 1)} \sim \frac{\bar{x}^{k-p} e^{-P(\bar{x})}}{B_0}$$

então temos a seguinte igualdade

$$J_k^P(\bar{x}) = C_k(B) + \left(\frac{-1}{B_0}\right) \bar{x}^{k-p} e^{-P(\bar{x})} + o(\bar{x}^{k-p} e^{-P(\bar{x})}), \quad (5.7)$$

onde,  $C_k(B) := \int_0^{\infty} \tau^k e^{-P(\tau)} d\tau$  é uma função de classe  $C^\infty$  no parâmetro  $B = (B_0, \dots, B_{p-1})$  e é tal que  $C_k(0) = c_k(B_0)$ .

**Lema 5.2.1** *As soluções  $\tilde{y}_\pm(\bar{x})$  numa vizinhança de  $\bar{x} = \pm\infty$  do problema de Cauchy  $[R_{A,B}(0), \tilde{y}_0]$ , satisfazem o seguinte.*

(i)  $\tilde{y}_+(\bar{x}) = o(\bar{x}^p)$ , numa vizinhança de  $\bar{x} = +\infty$  se e só se

$$\tilde{y}_0 + \sum_{k=0}^{2p-1} C_k(B) A_k = 0,$$

onde  $\tilde{y}_0 := \tilde{y}_+(0)$ ,  $B = (B_0, \dots, B_{p-1})$ .

(ii) Se  $p+1$  é par,  $\tilde{y}_-(\bar{x}) = o(\bar{x}^p)$  numa vizinhança de  $\bar{x} = -\infty$ , se e só se

$$\tilde{y}_0 + \sum_{k=0}^{2p-1} (-1)^{k+1} C_k(\bar{B}) A_k = 0,$$

onde  $\tilde{y}_0 := \tilde{y}_-(0)$ ,  $\bar{B} = (-B_0, \dots, (-1)^{k+1} B_k, \dots, -B_{p-1})$ .

(iii) Se  $p+1$  é ímpar,  $\tilde{y}_-(\bar{x}) = o(\bar{x}^p)$  numa vizinhança de  $\bar{x} = -\infty$ , para qualquer vetor  $(\tilde{y}_0, A, B) := (\tilde{y}_-(0), A_0, \dots, A_{2p-1}, B_0, \dots, B_{p-1})$ .

#### DEMONSTRAÇÃO

(i) Substituindo (5.7) em (5.6), obtemos a solução  $\tilde{y}_+(\bar{x})$  dada por

$$\tilde{y}_+(\bar{x}) = e^{P(\bar{x})} \left[ \tilde{y}_0 + \sum_{k=0}^{2p-1} C_k(B) A_k \right] + \left(\frac{-1}{B_0}\right) \sum_{k=0}^{2p-1} A_k \bar{x}^{k-p} + \sum_{k=0}^{2p-1} o(\bar{x}^{k-p}).$$

Daqui, resulta que

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{y}_+(\bar{x})}{\bar{x}^p} &= \frac{1}{\bar{x}^p} e^{P(\bar{x})} \left[ \tilde{y}_0 + \sum_{k=0}^{2p-1} C_k(B) A_k \right] + \left(\frac{-1}{B_0}\right) \sum_{k=0}^{2p-1} A_k \bar{x}^{k-2p} + \\ &+ \sum_{k=0}^{2p-1} \bar{x}^{k-2p} \frac{o(\bar{x}^{k-p})}{\bar{x}^{k-p}}, \end{aligned}$$

onde,  $\tilde{y}_0 := \tilde{y}_+(0)$ ; logo (i) é satisfeito, para arbitrários  $(A, B) \in \mathbb{R}^{3p}$ .



(ii) Se  $p + 1$  é par, vale

$$-P(-\tilde{x}) = -\sum_{j=0}^{p-1} (-1)^{j+1} B_j \frac{\tilde{x}^{j+1}}{j+1} - B_0 \frac{\tilde{x}^{p+1}}{p+1}.$$

Logo obtemos

$$\begin{aligned} J_k^P(-\tilde{x}) &= (-1)^{k+1} [C_k(\overline{B}) + (\frac{-1}{B_0}) \tilde{x}^{k-p} e^{-P(-\tilde{x})} + \\ &\quad + o(\tilde{x}^{k-p} e^{-P(-\tilde{x})})]. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Onde  $\overline{B} = (-B_0, \dots, (-1)^{k+1} B_k, \dots, -B_{p-1})$ .

Assim definindo  $\tilde{y}_-(\tilde{x}) := \tilde{y}(-\tilde{x})$  e usando (5.6) e (5.8) resulta que

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{y}_-(\tilde{x})}{\tilde{x}^p} &= \frac{1}{\tilde{x}^p} e^{P(-\tilde{x})} [\tilde{y}_0 + \sum_{k=0}^{2p-1} (-1)^{k+1} C_k(\overline{B}) A_k] + \\ &\quad + (\frac{-1}{B_0}) \sum_{k=0}^{2p-1} (-1)^{k+1} A_k \tilde{x}^{k-2p} + \sum_{k=0}^{2p-1} \tilde{x}^{k-2p} \frac{o(\tilde{x}^{k-p})}{\tilde{x}^{k-p}} \\ &= \frac{1}{\tilde{x}^p} e^{P(-\tilde{x})} [\tilde{y}_0 + \sum_{k=0}^{2p-1} (-1)^{k+1} C_k(\overline{B}) A_k] + \\ &\quad + \sum_{k=0}^{2p-1} [\frac{1}{B_0} (-1)^k A_k + O(1)] \tilde{x}^{k-2p}, \end{aligned}$$

onde  $\tilde{y}_0 := \tilde{y}_-(0)$ ; logo (ii) é satisfeito para parâmetros arbitrários  $(A, B) \in \mathbb{R}^{3p}$ .

(iii) Se  $p + 1$  é ímpar vale

$$-P(-\tilde{x}) = -\sum_{j=0}^{p-1} (-1)^{j+1} B_j \frac{\tilde{x}^{j+1}}{j+1} + B_0 \frac{\tilde{x}^{p+1}}{p+1}.$$

Logo obtemos

$$\begin{aligned} J_k^P(-\tilde{x}) &= (-1)^{k+1} [(\frac{1}{B_0}) \tilde{x}^{k-p} e^{-P(-\tilde{x})} + \\ &\quad + o(\tilde{x}^{k-p} e^{-P(-\tilde{x})})]. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Definindo  $\tilde{y}_-(\tilde{x}) := \tilde{y}(-\tilde{x})$  e usando (5.6) e (5.9) resulta que

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{y}_-(\tilde{x})}{\tilde{x}^p} &= \frac{1}{\tilde{x}^p} e^{P(-\tilde{x})} \tilde{y}_0 + \left(\frac{1}{\mathcal{B}_0}\right) \sum_{k=0}^{2p-1} (-1)^{k+1} A_k \tilde{x}^{k-2p} + \\ &\quad + \sum_{k=0}^{2p-1} \tilde{x}^{k-2p} \frac{o(\tilde{x}^{k-p})}{\tilde{x}^{k-p}} \\ &= \frac{1}{\tilde{x}^p} e^{P(-\tilde{x})} \tilde{y}_0 + \sum_{k=0}^{2p-1} \left[\frac{1}{\mathcal{B}_0} (-1)^{k+1} A_k + O(1)\right] \tilde{x}^{k-2p}, \end{aligned}$$

onde  $\tilde{y}_0 := \tilde{y}_-(0)$ ; logo (iii) é satisfeito para arbitrária escolha de vetores  $(\tilde{y}_0, A, B) \in \mathbb{R}^{3p+1}$ .

□

### 5.2.2 Caso $\mathcal{B}_0 < 0$

Neste caso as integrais  $J_k^P(\tilde{x}) = \int_0^{\tilde{x}} \tau^k e^{-P(\tau)} d\tau$ , numa vizinhança de  $\tilde{x} = +\infty$  possuem a seguinte expansão assintótica

$$J_k^P(\tilde{x}) = \left(\frac{-1}{\mathcal{B}_0}\right) \tilde{x}^{k-p} e^{-P(\tilde{x})} + o(\tilde{x}^{k-p} e^{-P(\tilde{x})}). \quad (5.10)$$

**Lema 5.2.2** *As soluções  $\tilde{y}_{\pm}(\tilde{x})$  numa vizinhança de  $\tilde{x} = \pm\infty$  do problema de Cauchy  $[R_{A,B}(0), \tilde{y}_0]$ , satisfazem o seguinte*

- (i)  $\tilde{y}_+(\tilde{x}) = o(\tilde{x}^p)$ , numa vizinhança de  $\tilde{x} = +\infty$ , para qualquer vetor  $(\tilde{y}_0, A, B) := (\tilde{y}_+(0), A_0, \dots, A_{2p-1}, B_0, \dots, B_{p-1})$ .
- (ii) Se  $p+1$  é par,  $\tilde{y}_-(\tilde{x}) = o(\tilde{x}^p)$  numa vizinhança de  $\tilde{x} = -\infty$ , para qualquer vetor  $(\tilde{y}_0, A, B) := (\tilde{y}_-(0), A_0, \dots, A_{2p-1}, B_0, \dots, B_{p-1})$ .
- (iii) Se  $p+1$  é ímpar,  $\tilde{y}_-(\tilde{x}) = o(\tilde{x}^p)$  numa vizinhança de  $\tilde{x} = -\infty$ , se e só se

$$\tilde{y}_0 + \sum_{k=0}^{2p-1} (-1)^{k+1} C_k(\tilde{B}) A_k = 0,$$

onde  $\tilde{y}_0 := \tilde{y}_-(0)$ ,  $\tilde{B} = (-B_0, \dots, (-1)^{k+1} B_k, \dots, B_{p-1})$ .

## DEMONSTRAÇÃO

(i) Usando (5.6) e (5.10) resulta que

$$\begin{aligned}\frac{\tilde{y}_+(\tilde{x})}{\tilde{x}^p} &= \frac{1}{\tilde{x}^p} e^{P(\tilde{x})} \tilde{y}_0 + \left(\frac{-1}{\mathcal{B}_0}\right) \sum_{k=0}^{2p-1} A_k \tilde{x}^{k-2p} + \sum_{k=0}^{2p-1} x^{k-2p} \frac{o(\tilde{x}^{k-p})}{x^{k-p}} \\ &= \frac{1}{\tilde{x}^p} e^{P(\tilde{x})} \tilde{y}_0 + \sum_{k=0}^{2p-1} \left[\left(\frac{-1}{\mathcal{B}_0}\right) A_k + O(1)\right] \tilde{x}^{k-2p},\end{aligned}$$

onde  $\tilde{y}_0 := \tilde{y}_+(0)$ , e assim (i) é satisfeito para qualquer escolha de vetores  $(\tilde{y}_0, A, B) \in \mathbb{R}^{3p+1}$ .

(ii) Se  $p+1$  é par, vale

$$-P(-\tilde{x}) = -\sum_{j=0}^{p-1} (-1)^{j+1} B_j \frac{\tilde{x}^{j+1}}{j+1} - \mathcal{B}_0 \frac{\tilde{x}^{p+1}}{p+1}.$$

Logo obtemos

$$\begin{aligned}J_k^P(-\tilde{x}) &= (-1)^{k+1} \left[ \left(\frac{-1}{\mathcal{B}_0}\right) \tilde{x}^{k-p} e^{-P(-\tilde{x})} + \right. \\ &\quad \left. + o(\tilde{x}^{k-p} e^{-P(-\tilde{x})}) \right].\end{aligned}\tag{5.11}$$

Daqui definindo  $\tilde{y}_-(\tilde{x}) := \tilde{y}(-\tilde{x})$  e usando (5.6) e (5.11) resulta que

$$\begin{aligned}\frac{\tilde{y}_-(\tilde{x})}{\tilde{x}^p} &= \frac{1}{\tilde{x}^p} e^{P(-\tilde{x})} \tilde{y}_0 + \left(\frac{-1}{\mathcal{B}_0}\right) \sum_{k=0}^{2p-1} (-1)^{k+1} A_k \tilde{x}^{k-2p} + \\ &\quad + \sum_{k=0}^{2p-1} x^{k-2p} \frac{o(\tilde{x}^{k-p})}{x^{k-p}} \\ &= \frac{1}{\tilde{x}^p} e^{P(-\tilde{x})} \tilde{y}_0 + \sum_{k=0}^{2p-1} \left[ \frac{1}{\mathcal{B}_0} (-1)^k A_k + O(1) \right] \tilde{x}^{k-2p}.\end{aligned}$$

onde  $\tilde{y}_0 := \tilde{y}_-(0)$ ; logo (ii) é satisfeito para arbitrária escolha de vetores  $(\tilde{y}_0, A, B) \in \mathbb{R}^{3p+1}$ .

(iii) Se  $p+1$  fosse ímpar, então vale

$$-P(-\tilde{x}) = -\sum_{j=0}^{p-1} (-1)^{j+1} B_j \frac{\tilde{x}^{j+1}}{j+1} + \mathcal{B}_0 \frac{\tilde{x}^{p+1}}{p+1}.$$

Logo as integrais  $J_k^P(-\tilde{x}) = \int_0^{-\tilde{x}} \tau^k e^{-P(\tau)} d\tau$  são convergentes, e quando  $\tilde{x} \rightarrow +\infty$ , podemos escrever a seguinte expansão assintótica

$$J_k^P(-\tilde{x}) = (-1)^{k+1} [C_k(\tilde{B}) + (\frac{-1}{|\mathcal{B}_0|}) \tilde{x}^{k-p} e^{-P(-\tilde{x})} + o(\tilde{x}^{k-p} e^{-P(-\tilde{x})})], \quad (5.12)$$

onde  $\tilde{B} = (-B_0, \dots, (-1)^{k+1} B_k, \dots, B_{p-1})$ .

Daqui definindo  $\tilde{y}_-(\tilde{x}) := \tilde{y}(-\tilde{x})$  e usando (5.6) e (5.12) resulta que

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{y}_-(\tilde{x})}{\tilde{x}^p} &= \frac{1}{\tilde{x}^p} e^{P(-\tilde{x})} [\tilde{y}_0 + \sum_{k=0}^{2p-1} (-1)^{k+1} C_k(\tilde{B}) A_k] + \\ &+ (\frac{1}{\mathcal{B}_0}) \sum_{k=0}^{2p-1} (-1)^{k+1} A_k \tilde{x}^{k-2p} + \sum_{k=0}^{2p-1} x^{k-2p} \frac{o(\tilde{x}^{k-p})}{x^{k-p}} \\ &= \frac{1}{\tilde{x}^p} e^{P(-\tilde{x})} [\tilde{y}_0 + \sum_{k=0}^{2p-1} (-1)^{k+1} C_k(\tilde{B}) A_k] + \\ &+ \sum_{k=0}^{2p-1} [\frac{1}{\mathcal{B}_0} (-1)^{k+1} A_k + O(1)] \tilde{x}^{k-2p}, \end{aligned}$$

onde  $\tilde{y}_0 := \tilde{y}_-(0)$ ; logo (iii) é satisfeito para arbitraria escolha de parâmetros  $(A, B) \in \mathbb{R}^{3p}$ .

□

**Observação 5.2.3** *Das seções anteriores, notemos que*

- (1) Se  $\mathcal{B}_0 > 0$ , e  $p+1$  par;  $C_k(B=0) = C_k(\bar{B}=0) = c_k(\mathcal{B}_0)$ ;
- (2) Se  $\mathcal{B}_0 < 0$ , e  $p+1$  ímpar;  $C_k(\tilde{B}=0) = c_k(-\mathcal{B}_0)$ ;
- (3) Para os respectivos casos onde aparecem as funções

$$C_k(B), C_k(\bar{B}), c_k(\mathcal{B}_0), \quad e \quad C_k(\tilde{B}), c_k(-\mathcal{B}_0);$$

as condições iniciais  $\tilde{y}_0 := \tilde{y}_{\pm}(0)$  são funções lineares dos parâmetros  $(A, B)$ .

Por exemplo no caso  $[\mathcal{B}_0 > 0, p+1 \text{ par}]$  do lema 5.2.1 temos que a função  $\tilde{y}_+(0) - \tilde{y}_-(0)$  é dada por

$$\tilde{y}_+(0) - \tilde{y}_-(0) = - \sum_{k=0}^{2p-1} [C_k(B) + (-1)^k C_k(\bar{B})] A_k,$$

para cada  $(A, B)$  no domínio comum de definição contido em  $U \in (\mathbb{R}^{3p}, 0)$ .

### 5.3 O caso $R_{0,0}(\mathcal{Q}_0)$

Neste caso vamos considerar a equação diferencial não linear dada por

$$\frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}} = \mathcal{B}_0 \tilde{x}^p \tilde{y} + \mathcal{Q}_0 \tilde{y}^2,$$

a qual corresponde à família Riccati  $R_{A,B}(\mathcal{Q}_0)$ , situada na origem  $(A, B) = (0, 0)$  do espaço de parâmetros  $\mathbb{R}^{3p}$ .

É claro que uma solução é dada pela função nula  $\tilde{y}(\tilde{x}) = 0$ , outra solução não trivial para o problema de Cauchy  $[R_{0,0}(\mathcal{Q}_0), \tilde{y}_0]$ , com  $\tilde{y}_0 = \tilde{y}(\tilde{x}_0) \neq 0$ , é espresada explicitamente por

$$\tilde{y}(\tilde{x}) = \frac{e^{\mathcal{B}_0 \frac{\tilde{x}^{p+1}}{p+1}}}{\frac{e^{\mathcal{B}_0 \frac{\tilde{x}_0^{p+1}}{p+1}}}{\tilde{y}_0} - \mathcal{Q}_0 \int_{\tilde{x}_0}^{\tilde{x}} e^{\mathcal{B}_0 \frac{t^{p+1}}{p+1}} dt}, \quad (5.13)$$

onde  $\tilde{x}_0 \in (-\infty, +\infty)$ , (ver Apêndice 1).

Esta solução, está bem definida se o denominador é diferente de zero. Nas seções a seguir, vamos fazer um estudo cuidadoso da função

$$L(\tilde{x}, \tilde{x}_0) = \mathcal{Q}_0 \int_{\tilde{x}_0}^{\tilde{x}} e^{\mathcal{B}_0 \frac{t^{p+1}}{p+1}} dt.$$

A seguir, vamos usar este estudo para estimar o intervalo maximal de existência de uma solução de  $R_{A,B}(\mathcal{Q}_0)$  para  $(A, B)$  suficientemente pequenos.

#### 5.3.1 Caso $p+1$ par

Tomemos as integrais  $c_0(\mathcal{B}_0)$  e  $c_0(-\mathcal{B}_0)$  definidas nas seções anteriores, que podem ser escritas como

$$c_0(|\mathcal{B}_0|) = \int_0^\infty e^{-|\mathcal{B}_0| \frac{\tau^{p+1}}{p+1}} d\tau = |\mathcal{B}_0|^{\frac{-1}{p+1}} (p+1)^{\frac{1}{p+1}-1} \Gamma\left(\frac{1}{p+1}\right).$$

Temos as seguintes estimativas para  $L(\tilde{x}, \tilde{x}_0)$ .

**Lema 5.3.1** *Suponha que*

(i) *Se  $[\mathcal{Q}_0 > 0, \mathcal{B}_0 < 0, \tilde{x}_0 \leq 0]$ , ou  $[\mathcal{Q}_0 < 0, \mathcal{B}_0 < 0, \tilde{x}_0 \geq 0]$ , então*

$$-\lambda e^{\mathcal{B}_0 \frac{|\tilde{x}_0|^{p+1}}{p+1}} < L(\tilde{x}, \tilde{x}_0) < 2\lambda;$$

(ii) *Se  $[\mathcal{Q}_0 < 0, \mathcal{B}_0 < 0, \tilde{x}_0 \leq 0]$ , ou  $[\mathcal{Q}_0 > 0, \mathcal{B}_0 < 0, \tilde{x}_0 \geq 0]$ , então*

$$-2\lambda < L(\tilde{x}, \tilde{x}_0) < \lambda e^{\mathcal{B}_0 \frac{|\tilde{x}_0|^{p+1}}{p+1}};$$

onde  $\lambda := |\mathcal{Q}_0|c_0(|\mathcal{B}_0|)$ .

#### DEMONSTRAÇÃO

(i) – Para  $[\mathcal{Q}_0 > 0, \mathcal{B}_0 < 0, \tilde{x}_0 \leq 0]$ , temos as seguintes desigualdades:  
Se  $-\infty < x < x_0$ , com a mudança de variável  $x_0 - t = u$ , obtemos

$$\begin{aligned} L(\tilde{x}, \tilde{x}_0) &= -\mathcal{Q}_0 \int_0^{\tilde{x}_0 - \tilde{x}} e^{\mathcal{B}_0 \frac{(u - \tilde{x}_0)^{p+1}}{p+1}} du \\ &> -\mathcal{Q}_0 \left( \int_0^{\tilde{x}_0 - \tilde{x}} e^{\mathcal{B}_0 \frac{u^{p+1}}{p+1}} du \right) e^{\mathcal{B}_0 \frac{|\tilde{x}_0|^{p+1}}{p+1}} \\ &\geq -|\mathcal{Q}_0| \left( \int_0^\infty e^{\mathcal{B}_0 \frac{u^{p+1}}{p+1}} du \right) e^{\mathcal{B}_0 \frac{|\tilde{x}_0|^{p+1}}{p+1}} \\ &= -|\mathcal{Q}_0|c_0(|\mathcal{B}_0|) e^{\mathcal{B}_0 \frac{|\tilde{x}_0|^{p+1}}{p+1}}. \end{aligned}$$

Por outro lado, se  $\tilde{x}_0 < \tilde{x}$  obtemos

$$\begin{aligned} L(\tilde{x}, \tilde{x}_0) &= \mathcal{Q}_0 \int_{\tilde{x}_0}^{\tilde{x}} e^{\mathcal{B}_0 \frac{t^{p+1}}{p+1}} dt < 2\mathcal{Q}_0 \int_0^\infty e^{\mathcal{B}_0 \frac{t^{p+1}}{p+1}} dt \\ &= 2|\mathcal{Q}_0|c_0(|\mathcal{B}_0|). \end{aligned}$$

Aqui usamos a desigualdade

$$(u - \tilde{x}_0)^{p+1} = (u + |\tilde{x}_0|)^{p+1} \geq u^{p+1} + |\tilde{x}_0|^{p+1}.$$

De forma análoga

- Para  $[\mathcal{Q}_0 < 0, \mathcal{B}_0 < 0, \tilde{x}_0 \geq 0]$ , temos as seguintes desigualdades:  
Se  $-\infty < \tilde{x} < \tilde{x}_0$

$$\begin{aligned} L(\tilde{x}, \tilde{x}_0) &= -\mathcal{Q}_0 \int_{\tilde{x}}^{\tilde{x}_0} e^{\mathcal{B}_0 \frac{t^{p+1}}{p+1}} dt < -2\mathcal{Q}_0 \int_0^\infty e^{\mathcal{B}_0 \frac{t^{p+1}}{p+1}} dt \\ &= 2|\mathcal{Q}_0|c_0(|\mathcal{B}_0|). \end{aligned}$$

Por outro lado, se  $\tilde{x}_0 < \tilde{x}$ , com a mudança de variável  $t - \tilde{x}_0 = u$  obtemos

$$\begin{aligned} L(\tilde{x}, \tilde{x}_0) &= \mathcal{Q}_0 \int_0^{\tilde{x}-\tilde{x}_0} e^{\mathcal{B}_0 \frac{(u+\tilde{x}_0)^{p+1}}{p+1}} du \\ &> \mathcal{Q}_0 \left( \int_0^{\tilde{x}-\tilde{x}_0} e^{\mathcal{B}_0 \frac{u^{p+1}}{p+1}} du \right) e^{\mathcal{B}_0 \frac{|\tilde{x}_0|^{p+1}}{p+1}} \\ &\geq \mathcal{Q}_0 \left( \int_0^\infty e^{\mathcal{B}_0 \frac{u^{p+1}}{p+1}} du \right) e^{\mathcal{B}_0 \frac{|\tilde{x}_0|^{p+1}}{p+1}} \\ &= -|\mathcal{Q}_0|c_0(|\mathcal{B}_0|)e^{\mathcal{B}_0 \frac{|\tilde{x}_0|^{p+1}}{p+1}}. \end{aligned}$$

Aqui usamos a desigualdade

$$(u + \tilde{x}_0)^{p+1} \geq u^{p+1} + |\tilde{x}_0|^{p+1}.$$

- (ii) – Para  $[\mathcal{Q}_0 < 0, \mathcal{B}_0 < 0, \tilde{x}_0 \leq 0]$ , temos as seguintes desigualdades:  
Se  $-\infty < \tilde{x} < \tilde{x}_0$ , com a mudança  $\tilde{x}_0 - t = u$ , obtemos

$$\begin{aligned} L(\tilde{x}, \tilde{x}_0) &= -\mathcal{Q}_0 \int_0^{\tilde{x}_0-\tilde{x}} e^{\mathcal{B}_0 \frac{(u-\tilde{x}_0)^{p+1}}{p+1}} du \\ &< -\mathcal{Q}_0 \left( \int_0^{\tilde{x}_0-\tilde{x}} e^{\mathcal{B}_0 \frac{u^{p+1}}{p+1}} du \right) e^{\mathcal{B}_0 \frac{|\tilde{x}_0|^{p+1}}{p+1}} \\ &\leq -\mathcal{Q}_0 \left( \int_0^\infty e^{\mathcal{B}_0 \frac{u^{p+1}}{p+1}} du \right) e^{\mathcal{B}_0 \frac{|\tilde{x}_0|^{p+1}}{p+1}} \\ &= |\mathcal{Q}_0|c_0(|\mathcal{B}_0|)e^{\mathcal{B}_0 \frac{|\tilde{x}_0|^{p+1}}{p+1}}. \end{aligned}$$

Por outro lado se,  $\tilde{x}_0 < \tilde{x}$

$$\begin{aligned} L(\tilde{x}, \tilde{x}_0) &= \mathcal{Q}_0 \int_{\tilde{x}_0}^{\tilde{x}} e^{\mathcal{B}_0 \frac{t^{p+1}}{p+1}} dt > 2\mathcal{Q}_0 \int_0^\infty e^{\mathcal{B}_0 \frac{t^{p+1}}{p+1}} dt \\ &= -2|\mathcal{Q}_0|c_0(|\mathcal{B}_0|). \end{aligned}$$

De forma análoga

- Para  $[\mathcal{Q}_0 > 0, \mathcal{B}_0 < 0, \tilde{x}_0 \geq 0]$ , temos as seguintes desigualdades:  
Se  $-\infty < \tilde{x} < \tilde{x}_0$ , obtemos

$$\begin{aligned} L(\tilde{x}, \tilde{x}_0) &= \mathcal{Q}_0 \int_{\tilde{x}_0}^{\tilde{x}} e^{\mathcal{B}_0 \frac{t^{p+1}}{p+1}} dt > -2\mathcal{Q}_0 \int_0^{\infty} e^{\mathcal{B}_0 \frac{t^{p+1}}{p+1}} dt \\ &= -2|\mathcal{Q}_0|c_0(|\mathcal{B}_0|). \end{aligned}$$

Por outro lado se,  $\tilde{x}_0 < \tilde{x}$ , com a mudança  $t - \tilde{x}_0 = u$ , obtemos

$$\begin{aligned} L(\tilde{x}, \tilde{x}_0) &= \mathcal{Q}_0 \int_0^{\tilde{x} - \tilde{x}_0} e^{\mathcal{B}_0 \frac{(u + \tilde{x}_0)^{p+1}}{p+1}} du \\ &< \mathcal{Q}_0 \left( \int_0^{\tilde{x} - \tilde{x}_0} e^{\mathcal{B}_0 \frac{u^{p+1}}{p+1}} du \right) e^{\mathcal{B}_0 \frac{|\tilde{x}_0|^{p+1}}{p+1}} \\ &\leq \mathcal{Q}_0 \left( \int_0^{\infty} e^{\mathcal{B}_0 \frac{u^{p+1}}{p+1}} du \right) e^{\mathcal{B}_0 \frac{|\tilde{x}_0|^{p+1}}{p+1}} \\ &= |\mathcal{Q}_0|c_0(|\mathcal{B}_0|)e^{\mathcal{B}_0 \frac{|\tilde{x}_0|^{p+1}}{p+1}}. \end{aligned}$$

□

### 5.3.2 Caso $p+1$ ímpar

Neste caso, temos as seguintes estimativas.

**Lema 5.3.2** *Suponha que*

- (i) Se  $[\mathcal{Q}_0 > 0, \mathcal{B}_0 > 0, \tilde{x}_0 \leq 0]$ , ou  $[\mathcal{Q}_0 < 0, \mathcal{B}_0 < 0, \tilde{x}_0 \geq 0]$ , então

$$L(\tilde{x}, \tilde{x}_0) \geq -\lambda e^{\mathcal{B}_0 \frac{\tilde{x}_0^{p+1}}{p+1}}.$$

- (ii) Se  $[\mathcal{Q}_0 < 0, \mathcal{B}_0 > 0, \tilde{x}_0 \leq 0]$ , ou  $[\mathcal{Q}_0 > 0, \mathcal{B}_0 < 0, \tilde{x}_0 \geq 0]$ , então

$$L(\tilde{x}, \tilde{x}_0) \leq \lambda e^{\mathcal{B}_0 \frac{\tilde{x}_0^{p+1}}{p+1}}.$$

onde  $\lambda := |\mathcal{Q}_0|c_0(|\mathcal{B}_0|)$ .

DEMONSTRAÇÃO



- (i) – Para  $[\mathcal{Q}_0 > 0, \mathcal{B}_0 > 0, \tilde{x}_0 \leq 0]$ , temos as seguintes desigualdades:  
Se  $-\infty < \tilde{x} < \tilde{x}_0$ , com a mudança  $\tilde{x}_0 - t = u$  obtemos

$$\begin{aligned} L(\tilde{x}, \tilde{x}_0) &= -\mathcal{Q}_0 \int_0^{\tilde{x}_0 - \tilde{x}} e^{-\mathcal{B}_0 \frac{(u + |\tilde{x}_0|)^{p+1}}{p+1}} du \\ &\geq -\mathcal{Q}_0 \left( \int_0^{\tilde{x}_0 - \tilde{x}} e^{-\mathcal{B}_0 \frac{u^{p+1}}{p+1}} du \right) e^{-\mathcal{B}_0 \frac{|\tilde{x}_0|^{p+1}}{p+1}} \\ &\geq -\mathcal{Q}_0 \left( \int_0^\infty e^{-\mathcal{B}_0 \frac{u^{p+1}}{p+1}} du \right) e^{\mathcal{B}_0 \frac{\tilde{x}_0^{p+1}}{p+1}} \\ &= -|\mathcal{Q}_0| c_0(|\mathcal{B}_0|) e^{\mathcal{B}_0 \frac{\tilde{x}_0^{p+1}}{p+1}}. \end{aligned}$$

Analogamente

- Para  $[\mathcal{Q}_0 < 0, \mathcal{B}_0 < 0, \tilde{x}_0 \geq 0]$ , temos as seguintes desigualdades:  
Se  $\tilde{x}_0 < \tilde{x}$ , com a mudança  $t - \tilde{x}_0 = u$  obtemos

$$\begin{aligned} L(\tilde{x}, \tilde{x}_0) &= \mathcal{Q}_0 \int_0^{\tilde{x} - \tilde{x}_0} e^{\mathcal{B}_0 \frac{(u + \tilde{x}_0)^{p+1}}{p+1}} du \\ &\geq \mathcal{Q}_0 \left( \int_0^{\tilde{x} - \tilde{x}_0} e^{\mathcal{B}_0 \frac{u^{p+1}}{p+1}} du \right) e^{\mathcal{B}_0 \frac{|\tilde{x}_0|^{p+1}}{p+1}} \\ &\geq -|\mathcal{Q}_0| \left( \int_0^\infty e^{\mathcal{B}_0 \frac{u^{p+1}}{p+1}} du \right) e^{\mathcal{B}_0 \frac{|\tilde{x}_0|^{p+1}}{p+1}} \\ &= -|\mathcal{Q}_0| c_0(|\mathcal{B}_0|) e^{\mathcal{B}_0 \frac{|\tilde{x}_0|^{p+1}}{p+1}}. \end{aligned}$$

- (ii) – Para  $[\mathcal{Q}_0 < 0, \mathcal{B}_0 > 0, \tilde{x}_0 \leq 0]$ , temos as seguintes desigualdades:  
Se  $\infty < \tilde{x} < \tilde{x}_0$ , com a mudança  $\tilde{x}_0 - t = u$  obtemos

$$\begin{aligned} L(\tilde{x}, \tilde{x}_0) &= -\mathcal{Q}_0 \int_0^{\tilde{x}_0 - \tilde{x}} e^{-\mathcal{B}_0 \frac{(u + |\tilde{x}_0|)^{p+1}}{p+1}} du \\ &\leq -\mathcal{Q}_0 \left( \int_0^{\tilde{x}_0 - \tilde{x}} e^{-\mathcal{B}_0 \frac{u^{p+1}}{p+1}} du \right) e^{\mathcal{B}_0 \frac{\tilde{x}_0^{p+1}}{p+1}} \\ &\leq |\mathcal{Q}_0| \left( \int_0^\infty e^{-\mathcal{B}_0 \frac{u^{p+1}}{p+1}} du \right) e^{\mathcal{B}_0 \frac{\tilde{x}_0^{p+1}}{p+1}} \\ &= |\mathcal{Q}_0| c_0(|\mathcal{B}_0|) e^{\mathcal{B}_0 \frac{\tilde{x}_0^{p+1}}{p+1}}. \end{aligned}$$

- Para  $[\mathcal{Q}_0 > 0, \mathcal{B}_0 < 0, \tilde{x}_0 \geq 0]$ , temos as seguintes desigualdades:

Se  $\tilde{x}_0 < \tilde{x}$ , com a mudança  $t - \tilde{x}_0 = u$  obtemos

$$\begin{aligned} L(\tilde{x}, \tilde{x}_0) &= \mathcal{Q}_0 \int_0^{\tilde{x} - \tilde{x}_0} e^{\mathcal{B}_0 \frac{(u + \tilde{x}_0)^{p+1}}{p+1}} du \\ &\leq \mathcal{Q}_0 \left( \int_0^{\tilde{x} - \tilde{x}_0} e^{\mathcal{B}_0 \frac{u^{p+1}}{p+1}} du \right) e^{\mathcal{B}_0 \frac{\tilde{x}_0^{p+1}}{p+1}} \\ &\leq |\mathcal{Q}_0| \left( \int_0^{\infty} e^{\mathcal{B}_0 \frac{u^{p+1}}{p+1}} du \right) e^{\mathcal{B}_0 \frac{\tilde{x}_0^{p+1}}{p+1}} \\ &= |\mathcal{Q}_0| c_0 (|\mathcal{B}_0|) e^{\mathcal{B}_0 \frac{\tilde{x}_0^{p+1}}{p+1}}. \end{aligned}$$

□

Uma conseqüência destas estimativas é o seguinte.

**Corolário 5.3.3** *Seja  $\tilde{y}(\tilde{x})$  uma solução de  $R_{0,0}(\mathcal{Q}_0)$ . Suponha que existe um ponto  $\tilde{x}_0 \in \mathbf{R}$ , no intervalo de definição de  $y(x)$  tal que a lista  $[\mathcal{Q}_0, \mathcal{B}_0, \tilde{x}_0, \tilde{y}_0]$  satisfaz uma das seguintes condições*

(i) *Se  $p + 1$  é par,  $\mathcal{B}_0 < 0$ , e*

a)  $[\mathcal{Q}_0 > 0, \tilde{x}_0 \leq 0]$ , ou  $[\mathcal{Q}_0 < 0, \tilde{x}_0 \geq 0]$ , e

$$\frac{-1}{\lambda} < \tilde{y}(\tilde{x}_0) < \frac{1}{2\lambda} e^{\mathcal{B}_0 \frac{\tilde{x}_0^{p+1}}{p+1}};$$

b)  $[\mathcal{Q}_0 < 0, \tilde{x}_0 \leq 0]$ , ou  $[\mathcal{Q}_0 > 0, \tilde{x}_0 \geq 0]$ , e

$$\frac{-1}{2\lambda} e^{\mathcal{B}_0 \frac{\tilde{x}_0^{p+1}}{p+1}} < \tilde{y}(\tilde{x}_0) < \frac{1}{\lambda};$$

(ii) *Se  $p + 1$  é ímpar, e*

a)  $[\mathcal{Q}_0 > 0, \mathcal{B}_0 > 0, \tilde{x}_0 \leq 0]$ , ou  $[\mathcal{Q}_0 < 0, \mathcal{B}_0 < 0, \tilde{x}_0 \geq 0]$ , e

$$\frac{-1}{\lambda} < \tilde{y}(\tilde{x}_0) \leq 0;$$

b)  $[\mathcal{Q}_0 < 0, \mathcal{B}_0 > 0, \tilde{x}_0 \leq 0]$ , ou  $[\mathcal{Q}_0 > 0, \mathcal{B}_0 < 0, \tilde{x}_0 \geq 0]$ , e

$$0 \leq \tilde{y}(\tilde{x}_0) < \frac{1}{\lambda};$$

Então, a solução  $\tilde{y}(\tilde{x})$  não pode escapar ao infinito em tempo finito.

DEMONSTRAÇÃO

(i) – Do lema 5.3.1, vale a relação

$$-\lambda e^{\mathcal{B}_0 \frac{|\tilde{x}_0|^{p+1}}{p+1}} < L(\tilde{x}, \tilde{x}_0) < 2\lambda.$$

Se,  $L(\tilde{x}, \tilde{x}_0) = \tilde{y}_0^{-1} e^{\mathcal{B}_0 \frac{\tilde{x}_0^{p+1}}{p+1}}$ , vamos precisar ter

$$\tilde{y}_0^{-1} e^{\mathcal{B}_0 \frac{\tilde{x}_0^{p+1}}{p+1}} < -\lambda e^{\mathcal{B}_0 \frac{\tilde{x}_0^{p+1}}{p+1}}, \quad 2\lambda < \tilde{y}_0^{-1} e^{\mathcal{B}_0 \frac{\tilde{x}_0^{p+1}}{p+1}}.$$

Daqui que obtemos

$$\frac{-1}{\lambda} < \tilde{y}(\tilde{x}_0) < \frac{1}{2\lambda} e^{\mathcal{B}_0 \frac{\tilde{x}_0^{p+1}}{p+1}},$$

onde  $\tilde{y}(\tilde{x}_0) = \tilde{y}_0$

– Do lema 5.3.1, vale a relação

$$-2\lambda < L(\tilde{x}, \tilde{x}_0) < \lambda e^{\mathcal{B}_0 \frac{\tilde{x}_0^{p+1}}{p+1}}.$$

Aqui, se  $L(\tilde{x}, \tilde{x}_0) = \tilde{y}_0^{-1} e^{\mathcal{B}_0 \frac{\tilde{x}_0^{p+1}}{p+1}}$ , vamos precisar ter

$$\tilde{y}_0^{-1} e^{\mathcal{B}_0 \frac{\tilde{x}_0^{p+1}}{p+1}} < -2\lambda, \quad \lambda e^{\mathcal{B}_0 \frac{\tilde{x}_0^{p+1}}{p+1}} < \tilde{y}_0^{-1} e^{\mathcal{B}_0 \frac{\tilde{x}_0^{p+1}}{p+1}}.$$

Daqui decorre (i).

(ii) – Do lema 5.3.2, vale

$$L(\tilde{x}, \tilde{x}_0) \geq -\lambda e^{\mathcal{B}_0 \frac{\tilde{x}_0^{p+1}}{p+1}}.$$

Logo vamos precisar ter as desigualdades

$$0 \geq \tilde{y}_0 e^{-\mathcal{B}_0 \frac{\tilde{x}_0^{p+1}}{p+1}} > \frac{-1}{\lambda} e^{-\mathcal{B}_0 \frac{\tilde{x}_0^{p+1}}{p+1}}.$$

– Do lema 5.3.2, vale

$$L(\tilde{x}, \tilde{x}_0) \leq \lambda e^{\mathcal{B}_0 \frac{\tilde{x}_0^{p+1}}{p+1}}.$$

Logo vamos precisar ter as desigualdades

$$0 \leq \tilde{y}_0 e^{-\mathcal{B}_0 \frac{\tilde{x}_0^{p+1}}{p+1}} < \frac{1}{\lambda} e^{-\mathcal{B}_0 \frac{\tilde{x}_0^{p+1}}{p+1}}.$$

Daqui decorre (ii), e portanto é mostrado o corolário. □

## 5.4 Caso $R_{A,B}(\mathcal{Q}_0)$

Aqui enfatizaremos o caso [ $p+1$  par;  $\mathcal{B}_0 > 0$ ], pois este é o caso mais relevante para o trabalho. Definindo  $\mathcal{B}_+ := \mathcal{B}_0$ , e  $\mathcal{B}_- := (-1)^p \mathcal{B}_0$ , o caso da transição  $(s, u)$  é equivalente a ter  $\mathcal{B}_0 > 0$  e  $p+1$  par.

Neste caso consideremos a família não linear de equações diferenciais ordinárias

$$R_{A,B}(\mathcal{Q}_0) : \quad \frac{dy}{dx} = \left( \sum_{i=0}^{2p-1} A_i x^i \right) + \left( \sum_{j=0}^{p-1} B_j x^j + \mathcal{B}_0 x^p \right) y + \mathcal{Q}_0 y^2.$$

Seja  $U \in (\mathbb{R}^{3p}, 0)$ , uma vizinhança aberta de  $(A, B) = (0, 0)$ , e suponha que, para cada  $(A, B) \in U$ , associamos duas soluções da família Riccati  $R_{A,B}(\mathcal{Q}_0)$

$$y_-^{(A,B)} : U_{-\infty} \rightarrow \mathbb{R}, \quad e \quad y_+^{(A,B)} : U_\infty \rightarrow \mathbb{R} \quad (5.14)$$

tais que :

- i)  $U_{-\infty}, U_\infty \subset \mathbb{R}$ , são vizinhanças de  $-\infty$ , e  $+\infty$  respectivamente;
- ii)  $y_+^{(A,B)}(x)$ , e  $y_-^{(A,B)}(x)$  dependem continuamente sobre  $(A, B) \in U$ ;
- iii) Estas soluções tem o comportamento assintótico

$$\lim_{X \rightarrow 0} X^p y_+^{(A,B)}\left(\frac{1}{X}\right) = \lim_{X \rightarrow 0} X^p y_-^{(A,B)}\left(\frac{-1}{X}\right) = 0, \quad (5.15)$$

para cada  $(A, B) \in U$ ; ou equivalentemente  $y_-^{(A,B)}(x) = o(x^p) = y_+^{(A,B)}(x)$ , sobre  $U_{-\infty}, U_\infty$  respectivamente (ver Figura 5.1).

**Lema 5.4.1** *Suponha que  $\mathcal{B}_- < 0$  (resp.  $\mathcal{B}_+ > 0$ ). Então dada qualquer constante  $K > 0$ , arbitrariamente grande, existe uma pequena vizinhança  $N = N(K) \subset U$  de  $(A, B) = (0, 0)$ , tal que para cada  $(A, B) \in N$ , a solução  $y_-^{(A,B)}$  (resp.  $y_+^{(A,B)}$ ) pode ser estendida ao intervalo  $(-\infty, K]$  (resp.  $[-K, \infty)$ ).*

DEMONSTRAÇÃO

Os lemas da seção anterior mostram que as soluções  $y_-^{(A,B)}$ , e  $y_+^{(A,B)}$ , são únicas; realmente para  $\mathcal{B}_- < 0$ , a solução  $y_-^{(A,B)}$  pode ser vista como intersecção da variedade central  $W_-$  com o divisor excepcional  $D$ , ou seja

$$y_-^{(A,B)} = W_- \cap D.$$

(Estes fatos serão precisados no próximo capítulo).

Note que para  $(A, B) = (0, 0)$ ,  $y(x) \equiv 0$  é uma solução de  $R_{A,B}(\mathcal{Q}_0)$ . Assim pela unicidade temos

$$y_-^{(0,0)}(x) \equiv 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Daqui o resultado segue da dependência contínua das variedades centrais sobre os parâmetros  $(A, B)$  (o resultado para  $y_+^{(A,B)}$ , é análogo).  $\square$

Este resultado é estendido como segue.

**Lema 5.4.2** *Seja  $y_-^{(A,B)}$  e  $y_+^{(A,B)}$  como em (5.14). Suponha que existe um ponto  $x_0 \in U_{-\infty}$  (resp.  $x_0 \in U_{\infty}$ ), tal que o valor de  $y_-^{(A,B)}$  (resp.  $y_+^{(A,B)}$ ) para  $x = x_0$ , e  $A = B = 0$*

$$y(x_0) := y_-^{(0,0)}(x_0), \text{ (resp. } y(x_0) := y_+^{(0,0)}(x_0))$$

*verifica uma das condições do corolário 5.3.3, da seção anterior. Então, para cada constante  $K > 0$ , arbitrariamente grande, existe uma pequena vizinhança  $N = N(K) \subset U$  de  $(A, B) = (0, 0)$  tal que, para cada  $(A, B) \in N$ , a solução  $y_-^{(A,B)}(x)$ , (resp.  $y_+^{(A,B)}(x)$ ), pode ser estendida a uma solução de  $R_{A,B}(\mathcal{Q}_0)$  a qual é definida para todo  $x \in (-\infty, K]$  (resp.  $x \in [-K, \infty)$ ).*

DEMONSTRAÇÃO

Supondo que tal vizinhança  $N$  não existe, a continuidade de  $y_{\pm}^{(A,B)}(x)$ , respeito a  $(A, B)$  implicaria que  $y_{\pm}^{(0,0)}(x)$  escapa ao infinito em tempo finito, isto contradiz o corolário 5.3.3; por tanto este resultado é imediata consequência dos lemas da seção anterior.  $\square$

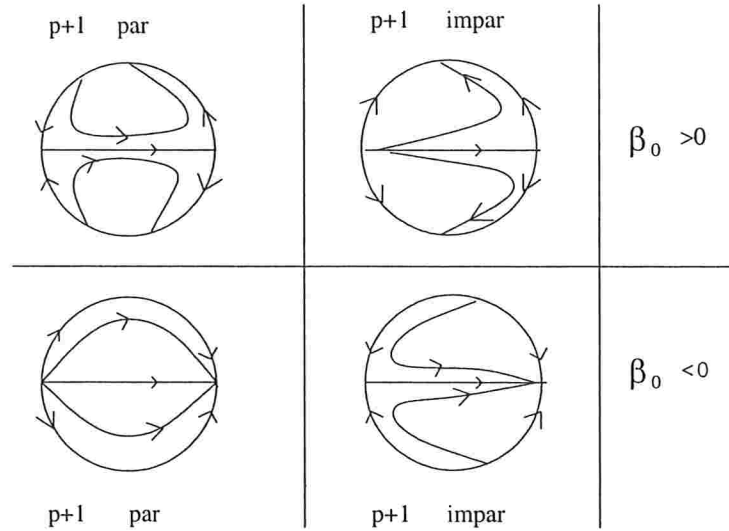


Figura 5.1: Compactificações sobre o Divisor Excepcional  $\tilde{D}$ .

Pela fórmula de variação das constantes, a solução geral do problema de Cauchy  $[R_{A,B}(\mathcal{Q}_0), y_0]$  pode ser dada implicitamente por

$$y(x) = e^{P(x)} \left( y_0 + \int_0^x Q(t) e^{-P(t)} dt + \mathcal{Q}_0 \int_0^x e^{-P(t)} y(t)^2 dt \right) \quad (5.16)$$

onde

$$\begin{aligned} y_0 &= y(x_0) \\ Q(x) &= \sum_{i=0}^{2p-1} A_i x^i \\ P(x) &= B_0 x + B_1 \frac{x^2}{2} + \dots + B_{p-1} \frac{x^p}{p} + B_0 \frac{x^{p+1}}{p+1}. \end{aligned}$$

Considerando o caso  $(s, u)$ ,  $(\mathcal{B}_- < 0, \mathcal{B}_+ > 0)$ , do lema 5.4.1, para  $K = 0$ , existe uma pequena vizinhança  $N \subset (\mathbb{R}^{3p}, 0)$ , de  $(A, B) = (0, 0)$  tal que, para cada  $(A, B) \in N$ , existe soluções únicas  $y_-^{(A,B)}$  e  $y_+^{(A,B)}$ , definidas para todo  $x \in (-\infty, 0]$  e  $x \in [0, \infty)$  respectivamente, com os comportamentos assintóticos (5.15).

Assim como no caso linear, aqui podemos considerar a função distância

$$\begin{aligned} \delta &: N \longrightarrow \mathbb{R} \\ (A, B) &\longmapsto y_+^{(A,B)}(0) - y_-^{(A,B)}(0). \end{aligned}$$

**Lema 5.4.3** *No caso  $(s, u)$ , a função distância  $\delta$  é definida sobre uma pequena vizinhança  $N \subset (\mathbb{R}^{3p}, 0)$  de  $(A, B) = (0, 0)$ , além disso*

$$\frac{\partial \delta}{\partial A_s} = -[C_s(B) - (-1)^{s+1} C_s(\bar{B})] + O(A)$$

para  $s \in \{0, 1, \dots, 2p-1\}$ , onde  $C_s(B)$  e  $C_s(\bar{B})$  são definidas no lema 5.2.1.

DEMONSTRAÇÃO

Definamos as seguintes quantidades

$$\begin{aligned} I_+(A, B) &= \int_0^\infty e^{-P(x)} y_+^{(A,B)}(x)^2 dx, \\ I_-(A, B) &= \int_0^{-\infty} e^{-P(x)} y_-^{(A,B)}(x)^2 dx. \end{aligned}$$

Como  $y_+^{(A,B)}, y_-^{(A,B)} \in C^\infty(N)$  (pelos lemas da seção anterior), então também temos que  $I_+, I_- \in C^\infty(N)$ .

Da solução geral dada em (5.16), usando a compactificação  $x = \frac{1}{X}$ ,  $y = \frac{Y}{X^p}$  e fazendo  $X \rightarrow 0$ , obtemos

$$0 = y_+^{(A,B)}(0) + \sum_{k=0}^{2p-1} C_k(B) A_k + \mathcal{Q}_0 I_+(A, B). \quad (5.17)$$

Similarmente obtemos

$$0 = y_-^{(A,B)}(0) + \sum_{k=0}^{2p-1} (-1)^{k+1} C_k(\bar{B}) A_k + \mathcal{Q}_0 I_-(A, B). \quad (5.18)$$

Como  $y_+^{(0,B)}(x) = y_-^{(0,B)}(x) = 0$ , então temos  $I_+(0, B) = I_-(0, B) = 0$ , e conseqüentemente vale

$$\nabla I_+(0, B) = \left( \frac{\partial I_+}{\partial A_0}, \dots, \frac{\partial I_+}{\partial A_{2p-1}}, \frac{\partial I_+}{\partial B_0}, \dots, \frac{\partial I_+}{\partial B_{p-1}} \right)_{(0,B)} = (0, \dots, 0).$$

Assim, subtraindo (5.18) de (5.17), e derivando com respeito a  $A_s$ , para  $s \in \{0, 1, \dots, 2p-1\}$ , obtemos

$$\frac{\partial \delta}{\partial A_s} = -[C_s(B) - (-1)^{s+1} C_s(\bar{B})] + O(A).$$

□

**Observação 5.4.4** *Como valem as igualdades,*

$$C_s(B = 0) = C_s(\bar{B} = 0) = c_s(\mathcal{B}_0)$$

*então temos a expressão particular*

$$\left. \frac{\partial \delta}{\partial A_s} \right|_{B=0} = -2c_s(\mathcal{B}_0) + O(A)$$

*para todos os índice pares  $s = 0, 2, \dots, 2p - 2$ .*



## Capítulo 6

# Dinâmica sobre as cartas

## $K_{\pm\bar{x}_\varepsilon}$

Aqui vamos estudar as variedades centrais  $W_{\pm}$  próximo ao divisor excepcional  $\hat{D}_0 = \hat{D} \cap \{\mathcal{A}_r = 0\}$ . Escrevamos as coordenadas da carta  $K_{\pm\bar{x}_\varepsilon}$  simplesmente

$$(x, y, e, A, B, \mathcal{A}_r) \in U_{\hat{x}} \times U_{\hat{y}} \times U_e \times U_{A,B} \times U_{\mathcal{A}_r},$$

onde

$$\begin{cases} U_{\hat{x}} & \in (\mathbb{R}^+, 0) \\ U_{\hat{y}} & = \mathbb{R} \\ U_e & = \mathbb{R}^+ \\ U_{A,B} & \in (\mathbb{R}^{3p}, 0) \\ U_{\mathcal{A}_r} & \in (\mathbb{R}^{n-3p}, 0). \end{cases}$$

Nestas coordenadas, o campo  $\overline{X}^{\pm}$ , é dado por

$$\overline{X}^{\pm}(x, y, e, \mathcal{A}) = \pm e^{p+1} \left( x \frac{\partial}{\partial x} - e \frac{\partial}{\partial e} \right) + \hat{F}^{\pm}(x, y, e, \mathcal{A}) \frac{\partial}{\partial y},$$

com  $\hat{F}^{\pm}(x, y, e, \mathcal{A}) = \hat{F}_0^{\pm}(x, e, \mathcal{A}) + \hat{F}_1^{\pm}(x, e, \mathcal{A})y + \hat{Q}^{\pm}(x, y, e, \mathcal{A})y^2$ , definido como

$$\hat{F}_0^{\pm}(x, e, \mathcal{A}) = \sum_{i=0}^{2p-1} (\pm 1)^i A_i e^{2p-i} + O(x),$$

$$\hat{F}_1^{\pm}(x, e, \mathcal{A}) = \mp p e^{p+1} + \sum_{j=0}^{p-1} (\pm 1)^j B_j e^{p-j} + (\pm 1)^p \mathcal{B}(\mathcal{A}_r) + O(x),$$

$$\hat{Q}^{\pm}(x, y, e, \mathcal{A}) = Q(\mathcal{A}_r) + O(x).$$

onde  $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}(0) \neq 0$ ,  $\mathcal{Q}_0 = \mathcal{Q}(0)$  e  $O(x)$  denotam funções analíticas divisíveis por  $x$ .

Para cada parâmetro fixado  $\mathcal{A}_0 = (A, B, \mathcal{A}_r)$ , em uma vizinhança suficientemente pequena de  $\mathcal{A}_r = 0$  os pontos

$$p_{\pm}^{\mathcal{A}_0} = \{x = y = e = 0, \mathcal{A} = \mathcal{A}_0\}$$

são singularidades normalmente hiperbólicas para o campo  $\bar{X}^{\pm}$ , pois a matriz Jacobiana  $D\bar{X}^+(p_+^{\mathcal{A}_0})$ , (resp.  $D\bar{X}^-(p_-^{\mathcal{A}_0})$ ) tem um autovalor não nulo

$$\mathcal{B}_+(\mathcal{A}_r) := \mathcal{B}(\mathcal{A}_r), (\text{resp. } \mathcal{B}_-(\mathcal{A}_r) := (-1)^p \mathcal{B}(\mathcal{A}_r)).$$

Denotaremos as constantes não nulas  $\mathcal{B}_+ := \mathcal{B}_+(0)$ ,  $\mathcal{B}_- := \mathcal{B}_-(0)$ . Logo, o conjunto

$$\text{Sing}(\bar{X}^{\pm}) = \{(x, y, e, A, B, \mathcal{A}_r) | x = y = e = 0\} := P_{\pm} \approx U_{A,B} \times U_{\mathcal{A}_r}$$

é uma subvariedade de codimensão 3, constituída inteiramente de singularidades normalmente hiperbólicas.

O teorema da variedade central, implica a existência de variedades centrais em cada ponto de  $P_{\pm}$ ; em geral estas variedades não são únicas. Mais precisamente temos o seguinte resultado

**Proposição 6.0.5** *Para cada natural  $k \in \mathbf{N}$ , e cada ponto fixo  $p_{\pm} \in P_{\pm}$ , existem vizinhanças  $V_{\pm} \subset U_{\hat{x}, e, A, B, \mathcal{A}_r}$  destes pontos e funções  $C^k$*

$$\begin{aligned} w_{\pm} &: V_{\pm} \longrightarrow \mathbf{R} \\ (x, e, \mathcal{A}) &\longmapsto y = w_{\pm}(x, e, \mathcal{A}) \end{aligned}$$

tais que:

- (i)  $w_{\pm}(x, 0, 0) = 0$ ,
- (ii)  $W_{\pm} = \text{graf}\{y = w_{\pm}(x, e, \mathcal{A})\}$ , são variedades localmente invariantes pelo fluxo de  $\bar{X}^{\pm}$ .

Todas estas variedades satisfazem a seguinte propriedade de unicidade.

**Lema 6.0.6** *Suponha que  $\mathcal{B}_+ > 0$ , (resp.  $\mathcal{B}_- < 0$ ). Então a intersecção de qualquer variedade central local  $W_+$  (resp.  $W_-$ ), de classe  $C^k$  com o divisor excepcional  $D_0 = D \cap \{\mathcal{A}_r = 0\}$*

$$W_+ \cap D_0 = \text{graf}\{y = w_+(0, e, \mathcal{A})\}, (\text{resp. } W_- \cap D_0 = \text{graf}\{y = w_-(0, e, \mathcal{A})\})$$

é única e de classe  $C^{\infty}$ .

DEMONSTRAÇÃO

A variedade  $c := W_{\pm} \cap D_0$  é uma variedade central local de classe  $C^k$  para o campo restrito

$$\overline{X}^{\pm}|_{D_0} = \mp e^{p+2} e \frac{\partial}{\partial e} + \hat{F}^{\pm}(0, y, e, A, B, 0) \frac{\partial}{\partial y}.$$

onde

$$\hat{F}^{\pm} = \left[ \sum_{i=0}^{2p-1} (\pm 1)^i A_i e^{2p-i} \right] + [\mp p e^{p+1} + \sum_{j=0}^{p-1} (\pm 1)^j B_j e^{p-j} + (\pm 1)^p B_0] y + Q_0 y^2.$$

A unicidade decorre do teorema(3.2) em [JS], pois  $B_+ > 0$  (resp.  $B_- < 0$ ). O fato de que  $c \in C^{\infty}$  decorre do teorema (5.1) em [JS].  $\square$

Consideremos agora expansões formais em séries de cada variedade central sobre  $P_{\pm}$ .

**Lema 6.0.7** *Dado um subconjunto aberto arbitrário  $V_A = V_{A,B} \times V_{A_r} \subset U_{A,B} \times U_{A_r}$ , tal que  $V_{A,B} \in (\mathbb{R}^{3p}, 0)$  tem fecho compacto e  $V_{A_r} \in (\mathbb{R}^{n-3p}, 0)$ , existem intervalos  $V_x^{\pm} = [0, x_{\pm}] \subset \mathbb{R}^+$ ,  $(x_+, x_- > 0 \in U_{\hat{x}}$ , dependem sobre  $V_A$ ) e existem séries formais únicas*

$$\widehat{W}_{\pm}(x, e, A) = \sum_{i=0}^{\infty} w_i^{\pm}(x, A) e^i$$

definidas por uma coleção de funções analíticas

$$w_i^{\pm} \in C^w(V_x^{\pm} \times V_A), \quad i \in \mathbb{N}$$

tais que para cada ponto  $p_{\pm} \in P_{\pm} \cap V_A$ , e cada variedade central local  $W_{\pm} = \text{graf}\{y = w_{\pm}(x, e, A)\}$ , definida numa vizinhança  $U$  deste ponto,

$$w_{\pm} \in C_{flat}^k(U, \{e = 0\}, \widehat{W}_{\pm}).$$

DEMONSTRAÇÃO

Como  $B_+(A_r) \neq 0$ , a demonstração é similar à proposição 3.2.1. Os argumentos sobre  $P_-$ , são análogos.  $\square$

**Definição 6.0.8** Dado um ponto arbitrário  $x_0 \in V_x^\pm$ , definimos as restrições

$$\widehat{W}_{\pm, x_0} := \sum_{i=0}^{\infty} w_i^\pm(x_0, \mathcal{A}) e^i$$

da variedade central formal  $\widehat{W}_\pm$ .

## 6.1 Região atratora

Para à construção das Variedades Centrais Dinâmicas sobre  $P_\pm$ , precisamos introduzir o conceito de função condição inicial:

i) Suponha que  $\mathcal{B}_+ > 0$ .

Fixando um subconjunto aberto arbitrário  $V_{\mathcal{A}} \subset U_{\mathcal{A}}$  como no lema 6.0.7, escolhamos um ponto  $x_0 > 0 \in V_x^+$ , e um intervalo  $V_e = (0, e_0)$ , para algum  $e_0 > 0 \in U_e$ .

Uma função

$$\begin{aligned} i^+ &: V_e \times V_{\mathcal{A}} \longrightarrow \mathbf{R} \\ (e, \mathcal{A}) &\longmapsto y = i^+(e, \mathcal{A}) \end{aligned} \quad (6.1)$$

de classe  $C^\infty$ , tal que

$$i^+ \in C_{flat}^\infty(V_e \times V_{\mathcal{A}}, \{e = 0\}, \widehat{W}_{+, x_0})$$

será dita uma função condição inicial para  $\overline{X}^+$  sobre  $P_+$ .

ii) Suponha agora que  $\mathcal{B}_+ < 0$ .

Fixemos um ponto  $e_0 > 0 \in U_e$ . A fim de definir a função condição inicial, necessitamos do seguinte resultado:

**Lema 6.1.1** *Sobre as hipóteses acima, existem constantes  $e_+, y_+ > 0$ , dependendo somente sobre o subconjunto  $V_{\mathcal{A}}$ , tal que para cada ponto dado*

$$q_0 = \{(x, y, e, \mathcal{A}) = (0, y_0, e_0, \mathcal{A})\} \in D,$$

onde  $0 < e_0 < e_+, |y_0| < y_+, \mathcal{A} \in V_{\mathcal{A}}$ ,

a órbita do campo  $\overline{X}^+|_D$ , começando em  $q_0$  tem seu  $\omega$ -limite em  $P_+$ .

## DEMONSTRAÇÃO

Sobre o divisor excepcional  $D = \{x = 0\}$ , o campo  $\bar{X}^+|_D$  é dado por

$$\bar{X}^+|_D = -e^{p+2} \frac{\partial}{\partial e} + \hat{F}^+(0, y, e, \mathcal{A}) \frac{\partial}{\partial y}.$$

Como  $\mathcal{B}_+ < 0$ , para cada  $p \in P_+$ , pelo corolário (13.3) dado em [DP] temos que existe uma  $C^1$ -mudança de coordenadas definida sobre uma vizinhança  $U_p$  de  $p$  tal que  $\bar{X}^+|_D$  é  $C^1$ -equivalente ao campo

$$Y(y, e, \mathcal{A}) = -y \frac{\partial}{\partial y} - e^{p+2} g(e, \mathcal{A}) \frac{\partial}{\partial e}.$$

Para alguma função estritamente positiva  $g(e, \mathcal{A})$  de classe  $C^1$ . Agora sobre a região  $\{e = 0\}$  é claro que a origem  $(e, y) = (0, 0)$  é  $\omega$ -limite para as órbitas de  $Y$ .

Por outro lado como  $V_{\mathcal{A}}$  tem fecho compacto, podemos então cobrir  $V_{\mathcal{A}}$  por um número finito de vizinhanças  $U_p$  de  $p \in P_+$ . De fato podemos escolher as constantes  $e_+, y_+$  de tal maneira que a região

$$R^+ = \{(e, y) | 0 \leq e < e_+, |y| < y_+\} \quad (6.2)$$

esteja contida na intersecção de todos os domínios  $U_p \cap \{\mathcal{A} = \text{const.}\}$

□

Diremos que o conjunto aberto  $R^+$  definido em (6.2), é a *região atratora* para campo vetorial restrito  $\bar{X}^+|_D$ , relativamente ao conjunto  $V_{\mathcal{A}}$  (ver Figura 6.1).

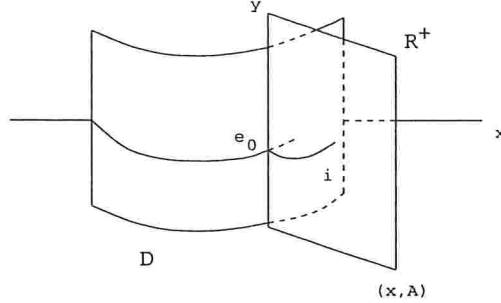
**Definição 6.1.2** *Uma função*

$$\begin{aligned} i &: V_x \times V_{\mathcal{A}} \longrightarrow \mathbf{R} \\ (x, \mathcal{A}) &\longmapsto y = i(x, \mathcal{A}) \end{aligned}$$

de classe  $C^\infty$ , definida sobre um subconjunto aberto  $V_x \times V_{\mathcal{A}}$ , onde  $V_{\mathcal{A}} \subset U_{\mathcal{A}}$  tem fecho compacto e  $V_x := [0, x_0]$  para algum  $x_0 > 0 \in V_x^+$ , será chamada de função condição inicial, (para o caso  $\mathcal{B}_+ < 0$ ) se

$$\sup_{\mathcal{A} \in V_{\mathcal{A}}} ||i(0, \mathcal{A})|| < y_+$$

Agora apresentamos os resultados que definem as Variedades Centrais Dinâmicas.

Figura 6.1: Região Atratora Na Carta  $K_{+x_e}$ .

**Proposição 6.1.3** *Suponha que  $\mathcal{B}_+ > 0$  e sejam  $i(e, \mathcal{A}) \in C_{flat}^\infty(V_e \times V_{\mathcal{A}}, \{e = 0\}, \widehat{W}_{+, x_0})$  uma função condição inicial arbitrária para  $\bar{X}^+$  e  $N_x := [0, x_0] \subset \mathbb{R}^+$ . Então existe um intervalo*

$$N_e := (0, e_1) \subset V_e, \quad (0 < e_1 \leq e_0)$$

e uma única função  $C^\infty$   $w_+(x, e, \mathcal{A})$  definida sobre o conjunto aberto  $N^+ = N_x \times N_e \times V_{\mathcal{A}}$  que verifica as seguintes condições:

- (i)  $w_+(x_0, e, \mathcal{A}) = i(e, \mathcal{A}), \quad \forall (e, \mathcal{A}) \in N_e \times V_{\mathcal{A}},$
- (ii)  $w_+ \in C_{flat}^\infty(N^+, \{e = 0\}, \widehat{W}_+),$
- (iii)  $W_+ = \text{graf}\{y = w_+(x, e, \mathcal{A})\},$  é uma variedade invariante por  $\bar{X}^+.$

DEMONSTRAÇÃO

Consideremos o campo  $-\bar{X}^+$ , dado por

$$-\bar{X}^+ = -e^{p+1} \left( x \frac{\partial}{\partial x} - e \frac{\partial}{\partial e} \right) - \hat{F}^+ \frac{\partial}{\partial y}.$$

Como  $\mathcal{B}_+ > 0$ , pelo corolário 13.3 em [DP], existe uma mudança de coordenadas  $C^k$   $\varphi : (x, y, e, \mathcal{A}) \rightarrow (x', y', e', \mathcal{A}')$  definida sobre alguma vizinhança de  $p \in P_+$ , tal que  $-\bar{X}^+$  é  $C^k$ -equivalente a

$$Y = -y \frac{\partial}{\partial y} - e^{p+1} G(x, e, \mathcal{A}) \left( x \frac{\partial}{\partial x} - e \frac{\partial}{\partial e} \right),$$

para alguma função  $C^k$   $G(x, e, \mathcal{A})$  estritamente positiva.

- Para qualquer  $p \in P_+$ , consideremos uma Variedade central local de classe  $C^k$   $W' = graf\{y = w'(x, e, \mathcal{A})\}$  definida sobre alguma vizinhança  $U'$  de  $p \in P_+$  e mostremos que  $w_+ - w' \in C_{flat}^\infty(U', \{e = 0\})$ . De fato nas coordenadas  $(x', y', e', \mathcal{A}')$  temos que  $W' = graf\{y' = 0\}$  e que  $-\bar{X}^+$  é  $C^k$ -equivalente (eliminando as "primeiras" a

$$Z = -\left(\frac{1}{e^{p+1}G}\right)y \frac{\partial}{\partial y} - \left(x \frac{\partial}{\partial x} - e \frac{\partial}{\partial e}\right), \quad \text{sobre } \{e > 0\}.$$

Agora consideramos a condição inicial

$$\xi_0 = \{(x, y, e, \mathcal{A}) = (x_0, \tilde{i}(e, \mathcal{A}), e, \mathcal{A})\}$$

onde  $\tilde{i} := i \circ \varphi^{-1} \in C_{flat}^\infty(\{e > 0\} \times V_{\mathcal{A}}, \{e = 0\})$ . A solução explicita do problema de Cauchy  $[Z, \xi_0]$  é dada por

$$Z_t(\xi_0) = \begin{cases} e(t) &= e \exp(-t) \\ x(t) &= x_0 \exp(t) \\ y(t) &= \tilde{i}(e(t), \mathcal{A}) \exp\left(-\int_0^t \frac{d\tau}{e(\tau)^{p+1}G}\right). \end{cases}$$

Tomando  $t = \ln\left(\frac{x}{x_0}\right)$  e substituindo nas outras equações, temos a convergência  $y \rightarrow 0, e \rightarrow 0$  juntamente com as derivadas  $\frac{\partial^k y}{\partial e^k}$ ; isto mostra (ii).

- Vamos considerar agora a saturação  $\mathcal{W}$  do conjunto

$$\xi = \bigcup_{(e, \mathcal{A}) \in V_e \times V_{\mathcal{A}}} \{(x, y, e, \mathcal{A}) \mid x = x_0, y = i(e, \mathcal{A})\}$$

pelo fluxo  $Z_t(\xi_0)$  de  $Z \equiv Y \equiv -\bar{X}^+$ .

Logo daqui existem os domínios requeridos  $N_x, N_e$  como acima, tal que a restrição de  $\mathcal{W}$  a  $N^+ = N_x \times N_e \times V_{\mathcal{A}}$  é definida como o gráfico de uma função  $w_+ \in C^\infty(N^+)$ ; daqui são satisfeitas (i), (iii).

□

Para  $\mathcal{B}_+ < 0$ , temos o resultado análogo.

**Proposição 6.1.4** *Suponha que  $\mathcal{B}_+ < 0$ , seja  $i(x, \mathcal{A})$  uma função condição inicial arbitrária para  $\bar{X}^+$  (como na definição 6.1.2), escolhamos um ponto*

$e_0 \in (0, e_+)$  arbitrário ( $e_+$ , definido na região atratora  $R^+$ ) e seja  $N_e := [0, e_0) \subset \mathbf{R}^+$ . Então existe um intervalo

$$N_x = [0, e_1) \subset V_x, (0 < x_1 \leq x_0)$$

e uma única  $C^\infty$ -função  $w_+(x, e, \mathcal{A})$  definida sobre o conjunto aberto  $N^+ = N_x \times N_e \times V_{\mathcal{A}}$  tal que

$$(i) \ w_+(x, e_0, \mathcal{A}) = i(x, \mathcal{A}), \quad \forall (x, \mathcal{A}) \in N_x \times V_{\mathcal{A}},$$

$$(ii) \ w_+ \in C_{flat}^\infty(N^+, \{e = 0\}, \widehat{W}_+),$$

$$(iii) \ W_+ = \text{graf}\{y = w_+(x, e, \mathcal{A})\}, \text{ é uma variedade invariante por } \overline{X}^+.$$

(Veja Figura 6.2)

**Observação 6.1.5** - De forma análoga, definimos  $R^-$  e  $W_-$  sobre  $P_-$ ; assim as variedades invariantes  $W_-, W_+$  construídas no processo acima serão ditas de *Variedades Centrais Dinâmicas locais* sobre  $P_-, P_+$ .

- A classificação das singularidades degeneradas dada na seção 2.2.1 relaciona-se com os sinais de  $\mathcal{B}_-$  e  $\mathcal{B}_+$  da seguinte forma:

$$- \mathcal{B}_- > 0, \mathcal{B}_+ > 0, \text{ se e somente se } 0 \in \Gamma \text{ esta no caso } (u, u)$$

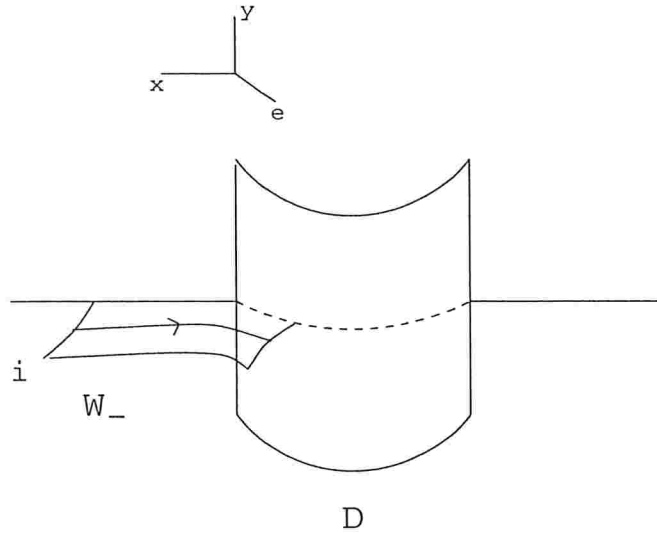
$$- \mathcal{B}_- < 0, \mathcal{B}_+ > 0, \text{ se e somente se } 0 \in \Gamma \text{ esta no caso } (s, u)$$

$$- \mathcal{B}_- > 0, \mathcal{B}_+ < 0, \text{ se e somente se } 0 \in \Gamma \text{ esta no caso } (u, s)$$

$$- \mathcal{B}_- < 0, \mathcal{B}_+ < 0, \text{ se e somente se } 0 \in \Gamma \text{ esta no caso } (s, s)$$

De fato, nas cartas  $K_{\pm x_e}$ , temos que os conjuntos  $P_-, P_+$ , estão sobre a fronteira da contra imagem do blowing-up  $\Psi^{-1}(\Gamma)$ ; logo por continuidade o sinal de  $\mathcal{B}_-$  (resp.  $\mathcal{B}_+$ ) corresponde ao sinal do autovalor  $\mathcal{B}_x \neq 0$  em cada um dos pontos não degenerados  $x \in \Gamma \cap \{x < 0\}$  (resp.  $x \in \Gamma \cap \{x > 0\}$ ).



Figura 6.2: Variedade Central Dinâmica na Carta  $K_{-x_e}$ .

## 6.2 Extensão Dinâmica das variedades Centrais

Sobre  $P_-$ , consideremos uma variedade central local arbitraria  $W_-$ , definida sobre o domínio  $N^- = N_x \times N_e \times V_{\mathcal{A}}$  por

$$W_- = \text{graf}\{y = w_-(x, e, \mathcal{A})\}.$$

Observamos que, se fixamos um ponto arbitrário  $e_1 > 0 \in N_e$ , a intersecção  $W_- \cap \{e = e_1\}$  é dada pela subvariedade de codimensão 2

$$\hat{\xi} := \bigcup_{(x, \mathcal{A}) \in N_x \times V_{\mathcal{A}}} \{(x, y, e, \mathcal{A}) = (x, w_-(x, e_1, \mathcal{A}), e_1, \mathcal{A})\}.$$

Como  $e_1 > 0$ , esta subvariedade está contida no domínio  $U_{\tilde{\varepsilon}} = \{\tilde{\varepsilon} > 0\}$  da carta  $K_{\tilde{\varepsilon}}$ . Na relação feita desta carta com a carta  $K_{-\tilde{x}_{\tilde{\varepsilon}}}$  no capítulo 4, aparecem as igualdades de compactificação

$$\begin{cases} \tilde{x} & = \frac{-1}{\tilde{\varepsilon}} \\ \tilde{y} & = \frac{\tilde{y}}{\tilde{\varepsilon}^p} \\ \tilde{\varepsilon} & = \hat{x}e \\ (A_i, B_j, \mathcal{A}_r) & = (A_i, B_j, \mathcal{A}_r). \end{cases}$$

Daqui  $\hat{\xi}$  pode ser escrito como o conjunto

$$\tilde{\xi} := \bigcup_{(\tilde{\varepsilon}, \mathcal{A}) \in N_{\tilde{\varepsilon}} \times V_{\mathcal{A}}} \{(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\varepsilon}, \mathcal{A}) = \left(\frac{-1}{e_1}, H(\tilde{\varepsilon}, \mathcal{A}), \tilde{\varepsilon}, \mathcal{A}\right)\},$$

onde

$$N_{\tilde{\varepsilon}} = \{\tilde{\varepsilon} \in \mathbf{R}^+ \mid \frac{\tilde{\varepsilon}}{e_1} \in N_x\}, \quad (6.3)$$

$$H(\tilde{\varepsilon}, \mathcal{A}) := e_1^{-p} w_-\left(\frac{\tilde{\varepsilon}}{e_1}, e_1, \mathcal{A}\right). \quad (6.4)$$

Sobre a carta  $K_{\tilde{\varepsilon}}$ , o campo  $\bar{X}$  é dado pela família analítica de equações diferenciais de primeira ordem

$$\frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}} = \tilde{F}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\varepsilon}, \mathcal{A}).$$

Para cada  $q \in \tilde{\xi}$ , seja  $\tilde{y} = \phi(\tilde{x}, q)$  a solução analítica do problema de valor inicial  $[\bar{X}, q]$ , definida sobre seu intervalo maximal  $I(q) = (-\infty, \tilde{x}(q))$ , que depende continuamente de  $q$ .

**Definição 6.2.1** Usando o fluxo de  $\bar{X}$ , definamos o saturado de  $\tilde{\xi}$  em  $U_{\tilde{\varepsilon}}$  dado por

$$\mathcal{W}^- := \bigcup_{q \in \tilde{\xi}, \tilde{x} \in I(q)} \{\tilde{y} = \phi(q, \tilde{x})\}$$

Diremos que  $\mathcal{W}^-$  é a extensão da Variedade Central local  $W_-$ . (Ver Figura 6.3)

Neste sentido, a dependência contínua das soluções sobre as condições iniciais mostra o seguinte resultado de extensão sobre  $I(q)$ .

**Proposição 6.2.2** Existe um subconjunto aberto (possivelmente vazio)  $\mathcal{O}^- \subset N_{\tilde{\varepsilon}} \times V_{\mathcal{A}}$  tal que para cada ponto  $q \in \tilde{\xi}|_{\mathcal{O}^-}$ , o correspondente intervalo maximal de definição  $I(q)$  contem a origem  $\tilde{x} = 0$ .

Assim, chamaremos a  $\mathcal{O}^-$  o domínio maximal de extensão da variedade central local  $W_-$ . Geometricamente temos que cada curva solução começando em  $\tilde{\xi}|_{\mathcal{O}^-}$  corta a secção transversal  $\Sigma := \{\tilde{x} = 0\}$  num único ponto  $q' \in \Sigma$ .

Neste sentido a correspondência  $C^\infty \varphi : (\tilde{\varepsilon}, \mathcal{A}) \mapsto \left(\frac{-1}{e_1}, H(\tilde{\varepsilon}, \mathcal{A}), \tilde{\varepsilon}, \mathcal{A}\right)$ , mostra o seguinte resultado.

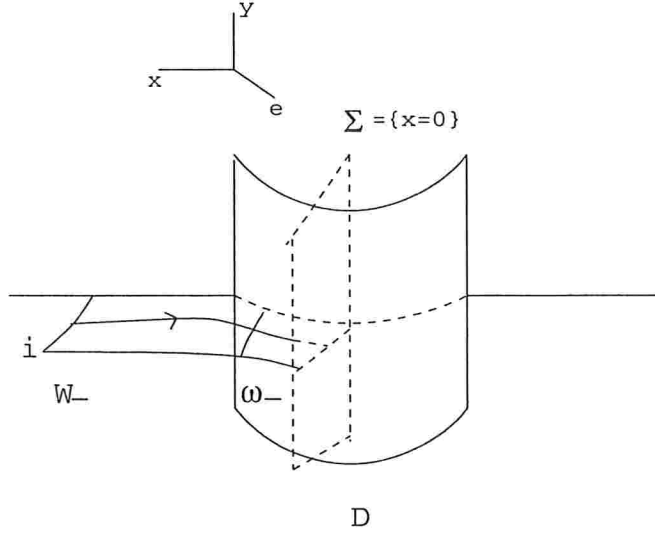


Figura 6.3: Extensão Dinâmica da Variedade Central na Carta  $K_{-x_\epsilon}$ .

**Corolário 6.2.3** *Seja  $q \in \tilde{\xi}|_{\mathcal{O}^-}$  com coordenadas*

$$q = \{(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\varepsilon}, \mathcal{A}) = \left(\frac{-1}{e_1}, H(\tilde{\varepsilon}, \mathcal{A}), \tilde{\varepsilon}, \mathcal{A}\right)\}$$

e seja  $q' = \phi(q, 0) = \{(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\varepsilon}, \mathcal{A}) = (0, y', \tilde{\varepsilon}, \mathcal{A})\}$ , o único ponto onde a órbita  $\{\tilde{y} = \phi(\tilde{x}, q)\}$  começando em  $q$  corta  $\Sigma$ . Então a aplicação

$$\begin{aligned} Y_- &: \mathcal{O}^- \longrightarrow \mathbf{R} \\ (\tilde{\varepsilon}, \mathcal{A}) &\longmapsto y' = Y_-(\tilde{\varepsilon}, \mathcal{A}) \end{aligned}$$

é uma função  $C^\infty(\mathcal{O}^-)$ .

A função  $Y_-$  será chamada de *Função Transporte*

- Similarmente sobre  $P_+$ , temos a extensão dinâmica  $\mathcal{W}^+$  da variedade central local  $W_+$  e o domínio maximal de extensão  $\mathcal{O}^+ \subset N_\varepsilon \times V_{\mathcal{A}}$  de  $W_+$ ; definimos também a correspondente função transporte  $Y_+ : \mathcal{O}^+ \longmapsto \mathbf{R}$ .

Geometricamente, o gráfico destas funções  $Y_-, Y_+$  descreve a intersecção de  $W_-, W_+$  com a secção transversal  $\Sigma$ .

**Definição 6.2.4** Consideremos a função distância  $\Delta \in C^\infty(\mathcal{O}^+ \cap \mathcal{O}^-)$  dada por

$$\begin{aligned} \Delta &: \mathcal{O}^+ \cap \mathcal{O}^- \longrightarrow \mathbf{R} \\ (\bar{\varepsilon}, \mathcal{A}) &\longmapsto \Delta(\bar{\varepsilon}, \mathcal{A}) := Y_+(\bar{\varepsilon}, \mathcal{A}) - Y_-(\bar{\varepsilon}, \mathcal{A}) \end{aligned}$$

relativa às variedades centrais  $W_+, W_-$ .

O subconjunto fechado  $\mathcal{O}(W_-, W_+) \subset \mathcal{O}^+ \cap \mathcal{O}^-$  definido por

$$\mathcal{O}(W_-, W_+) := \{(\bar{\varepsilon}, \mathcal{A}) \in \mathcal{O}^+ \cap \mathcal{O}^- \mid \Delta(\bar{\varepsilon}, \mathcal{A}) = 0\}$$

será chamado de região de colagem das variedades centrais  $W_+, W_-$ .

Agora veremos situações onde é possível obter a igualdade  $\mathcal{O}(W_-, W_+) = \mathcal{O}^+ \cap \mathcal{O}^-$ ; ou seja as variedades  $W_+, W_-$  podem ser coladas.

**Proposição 6.2.5** (Casos  $(s, s), (u, s)$ )

Suponha que  $B_+ < 0$ . Seja  $W_-$  uma variedade central dinâmica local arbitrária em  $P_-$ , definida sobre um domínio  $N_x \times N_e \times V_{\mathcal{A}}$ . Então, existe um subconjunto aberto (possivelmente vazio)

$$N'_x \times V'_{\mathcal{A}} \subset N_x \times V_{\mathcal{A}}, \quad N'_x = [0, x'_0)$$

e uma única variedade central dinâmica local  $W_+$  definida sobre o domínio aberto

$$N'_x \times N'_e \times V'_{\mathcal{A}}, \quad N'_e = [0, e'_0)$$

para algum  $e'_0 > 0$ , tal que  $\mathcal{O}(W_-, W_+) = \mathcal{O}^+ \cap \mathcal{O}^-$

**DEMONSTRAÇÃO**

Consideremos a região atratora

$$R_+ := \{(x, y, e) \mid x = 0, 0 \leq e < e_+, |y| < y_+\},$$

associada a  $P_+$  relativa a  $V_{\mathcal{A}}$ .

Na carta  $K_{\bar{\varepsilon}}$ , a intersecção  $c_- := W_- \cap D$  da variedade central dinâmica local  $W_-$  com o divisor excepcional  $D = \{x = 0\}$ , pode ser escrita como o gráfico de uma função  $C^\infty$

$$c_- := \text{graf}\{\bar{y} = y_-(\bar{x}, \mathcal{A})\}$$

definida para  $\mathcal{A} \in V_{\mathcal{A}}$  e  $\bar{x}$  numa vizinhança de  $\infty$ .

Pela proposição 6.2.2, existe um subconjunto aberto  $V'_{\mathcal{A}}$  tal que para cada

$A \in V'_A$ , a curva  $c_-$  estende-se para uma solução do campo  $\bar{X}|_D$ , a qual entra na região atratora  $R_+$ . Assim, pela continuidade do fluxo de  $\bar{X}|_D$ , existe uma pequena constante  $x'_0 > 0 \in N_x$ , tal que restringindo  $W_-$  ao domínio

$$[0, x'_0) \times N'_e \times V'_A, \quad N'_e = (0, e'_0)$$

temos que  $W_-$  pode ser estendida a uma variedade central  $W_{-, \infty}$ . Tal variedade corta a secção transversal  $\Sigma_{e_+} = \{e = e_+\}$ ; assim a intersecção  $W_{-, \infty} \cap \Sigma_{e_+} = \text{graf}\{i = i(x, A)\}$  define uma função condição inicial  $i$ , para o campo  $\bar{X}^+$ ; logo pela proposição 6.1.4, a função  $i$  define uma variedade central dinâmica local  $W_+$  em  $P_+$ . Esta variedade é tal que para cada  $(\bar{\varepsilon}, A) \in \mathcal{O}^+ \cap \mathcal{O}^-$ ,  $\Delta(\bar{\varepsilon}, A) = 0$ , isto mostra o resultado.  $\square$

Analogamente temos o resultado para  $\mathcal{B}_- > 0$ :

**Proposição 6.2.6** (*Casos  $(u, s), (u, u)$* )

*Suponha que  $\mathcal{B}_- > 0$ . Seja  $W_+$  uma variedade central dinâmica local arbitrária em  $P_+$ , definida sobre algum domínio  $N_x \times N_e \times V_A$ . Então, existe um subconjunto aberto (possivelmente vazio)*

$$N'_x \times N'_e \times V'_A \subset N_x \times N_e \times V_A, \quad N'_x = [0, x'_0), N'_e = [0, e'_0)$$

*e uma única variedade central dinâmica local  $W_-$  definida sobre o domínio aberto  $N'_x \times N'_e \times V'_A$  tal que  $\mathcal{O}(W_-, W_+) = \mathcal{O}^+ \cap \mathcal{O}^-$ .*

DEMONSTRAÇÃO

Dado o conjunto  $V_A$ , definimos a região atratora  $R_-$  para  $P_-$  e usando o campo  $-\bar{X}|_D$ , mostra-se este resultado em forma análoga á anterior proposição.  $\square$

### 6.3 Estimativas para $\mathcal{O}(W_-, W_+)$

Aqui usando as estimativas assintóticas da família Riccati  $R_{A,B}(\mathcal{Q})$  sobre a carta  $K_{\bar{\varepsilon}}$ , aparece a existência de regiões contidas em  $\mathcal{O}(W_-, W_+)$ , sobre as quais tais variedades colam-se. Mais precisamente temos os seguintes resultados.

**Lema 6.3.1** ( *$\mathcal{O}(W_-, W_+)$ , sobre os casos  $(s, s), (u, s)$* )

*Assumamos que  $\mathcal{B}_+ < 0$ , e seja  $W_-$  uma variedade central dinâmica local*

em  $P_-$ , definida sobre um domínio  $N_x \times N_e \times V_A$ , com  $\mathcal{A} = 0 \in V_A$ . Suponha que a curva

$$y_-^{(0,0)} := W_- \cap D|_{\mathcal{A}=0}$$

é uma solução da família Riccati  $R_{A,B}(\mathcal{Q})$  que não escapa ao infinito em tempo finito. Então existe uma variedade central  $W_+$  definida sobre algum domínio  $N'_x \times N'_e \times V'_A$ , tal que  $\mathcal{O}(W_-, W_+)$  contém uma vizinhança aberta  $U$  da origem  $(\tilde{\epsilon}, \mathcal{A}) = (0, 0)$  em  $(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^n, 0)$ .

#### DEMONSTRAÇÃO

Da proposição 6.2.5, segue a existência de  $W_+$  para o qual  $\mathcal{O}(W_-, W_+) = \mathcal{O}^- \cap \mathcal{O}^+$ , e dos lemas 5.4.1 e 5.4.2 temos que  $W_- \cap D$  corta a secção  $\Sigma_{e_+}$ , para parâmetros  $(A, B, \mathcal{A}_r)$  numa vizinhança suficientemente pequena de  $(A, B, \mathcal{A}_r) = (0, 0, 0)$ . O resultado segue se escolhermos  $\tilde{\epsilon} > 0$  suficientemente pequeno. □

Analogamente segue o resultado para  $\mathcal{B}_- > 0$ .

**Lema 6.3.2** ( $\mathcal{O}(W_-, W_+)$ , sobre os casos  $(u, s), (u, u)$ )

Assumamos que  $\mathcal{B}_- > 0$ , e seja  $W_+$  uma variedade central dinâmica local em  $P_+$ , definida sobre um domínio  $N_x \times N_e \times V_A$ , com  $\mathcal{A} = 0 \in V_A$ . Suponha que a curva

$$y_+^{(0,0)} := W_+ \cap D|_{\mathcal{A}=0}$$

é uma solução da família Riccati  $R_{A,B}(\mathcal{Q})$  que não escapa ao infinito em tempo finito. Então existe uma variedade central  $W_-$  definida sobre algum domínio  $N'_x \times N'_e \times V'_A$ , tal que  $\mathcal{O}(W_-, W_+)$  contém uma vizinhança aberta  $U$  da origem  $(\tilde{\epsilon}, \mathcal{A}) = (0, 0)$  em  $(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^n, 0)$ .

#### DEMONSTRAÇÃO

Similarmente, para  $\tilde{\epsilon}$  suficientemente pequeno o resultado segue da proposição 6.2.6 e os lemas 5.4.1 e 5.4.2. □

**Observação 6.3.3** - No caso linear, as soluções da família  $R_{A,B}(0)$  não escapam ao infinito em tempo finito; logo para um conjunto aberto

$V'_{A,B} \subset \mathbf{R}^{3p}$  arbitrário com fecho contido em  $V_A \cap \{A_r = 0\}$ , existem domínios

$$N'_x, N'_e \subset \mathbf{R}^+, V'_{A_r} \in (\mathbf{R}^{n-3p}, 0)$$

tal que as variedades centrais  $W_-, W_+$  definidas sobre  $N'_x \times N'_e \times (V'_{A,B} \times V'_{A_r})$  colam-se em uma região da forma

$$\mathcal{O}(W_-, W_+) = N_{\tilde{\varepsilon}} \times (V'_{A,B} \times V'_{A_r})$$

Onde  $N_{\tilde{\varepsilon}} = [0, \tilde{\varepsilon}_0) \subset \mathbf{R}^+$ .

- Podemos representar com a notação  $W_- \longrightarrow W_+$ , o fato que a variedade central  $W_-$  em  $P_-$ , induz a variedade central  $W_+$  em  $P_+$ ; assim dos lemas 6.3.1 e 6.3.2 temos

- No caso  $(s, s)$ ;  $W_- \longrightarrow W_+$ ,
- No caso  $(u, s)$ ;  $W_- \longrightarrow W_+$  e  $W_+ \longrightarrow W_-$ ,
- No caso  $(u, u)$ ;  $W_+ \longrightarrow W_-$ .

Agora veremos o caso especial de transição  $(s, u)$ , onde a região de colagem  $\mathcal{O}(W_-, W_+)$  é um conjunto fechado de codimensão um, definido pelo gráfico de uma função  $C^\infty$ .

**Lema 6.3.4** *Sejam  $W_-$  e  $W_+$  variedades centrais locais em  $P_-$  e  $P_+$  respectivamente, definidas sobre um comum domínio aberto  $N_x \times N_e \times V_A$  com  $A = 0 \in V_A$ . Então o domínio maximal de extensão comum destas variedades centrais*

$$\mathcal{O}^- \cap \mathcal{O}^+ \subset N_{\tilde{\varepsilon}} \times V_A,$$

onde  $N_{\tilde{\varepsilon}}$  é como em (6.3), contém uma vizinhança aberta  $U$  da origem  $(\tilde{\varepsilon}, A) = (0, 0)$ .

#### DEMONSTRAÇÃO

Fazendo  $K = 0$  no Lema 5.4.1 e para  $(A, B, A_r)$  em algum subconjunto aberto  $N \subset V_A$ , segue que as soluções  $y_- = W_- \cap D, y_+ = W_+ \cap D$  da família Riccati  $R_{A,B}(\mathcal{Q})$  cortam a secção transversal  $\Sigma = \{x = 0\}$ ; logo as variedades centrais  $W_-, W_+$  também cortam transversalmente a secção  $\Sigma$ , para  $\tilde{\varepsilon}$  suficientemente pequeno. □

**Proposição 6.3.5** ( $\mathcal{O}(W_-, W_+)$  sobre o caso  $(s, u)$ )

Usando as notações do lema 6.3.4, fixemos um índice par arbitrário  $s \in \{0, 1, \dots, 2p-1\}$ . Então existe uma vizinhança da origem  $U_s \subset U$  e uma função  $C^\infty$   $a_s : \hat{U}_s \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $a_s(0) = 0$  definida sobre o domínio  $\hat{U}_s := U_s \cap \{A_s = 0\}$ , tal que a restrição da região  $\mathcal{O}(W_-, W_+)$  a  $U_s$  é dada pelo gráfico de  $a_s$

$$\mathcal{O}(W_-, W_+) \cap U_s = \text{graf}\{A_s = a_s(\tilde{\varepsilon}, \hat{A}, B, \mathcal{A}_r)\},$$

onde  $\hat{A} = (A_0, \dots, A_{s-1}, A_{s+1}, \dots, A_{2p-1})$ .

DEMONSTRAÇÃO

Como a função distância  $\Delta : \mathcal{O}^- \cap \mathcal{O}^+ \rightarrow \mathbf{R}$  está definida sobre alguma vizinhança aberta  $U \subset \mathcal{O}^- \cap \mathcal{O}^+$  da origem  $(\tilde{\varepsilon}, \mathcal{A}) = (0, 0)$ , podemos considerar a expansão  $\Delta$  no ponto  $(0, A, B, 0)$

$$\Delta(\tilde{\varepsilon}, A, B, \mathcal{A}_r) = \delta(A, B) + O(\tilde{\varepsilon}, \mathcal{A}_r)$$

Onde  $\delta$  é como no Lema 5.4.3.

Logo o resultado segue do teorema da função implícita pois

$$\left. \frac{\partial \Delta}{\partial A_s} \right|_{D_0} = \frac{\partial \delta}{\partial A_s} \neq 0$$

sobre o divisor excepcional  $D_0 = \{\tilde{\varepsilon} = \mathcal{A}_r = 0\}$ .

□



## Capítulo 7

# Superfícies Canard

Com as hipóteses e notações do capítulo 2, consideremos a família de perturbações singulares

$$X = \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} + F(x, y, \varepsilon, \mathcal{A}) \frac{\partial}{\partial y}$$

definida nas coordenadas  $(x, y, \varepsilon, \mathcal{A})$  sobre o subconjunto  $U = U_x \times U_y \times U_\varepsilon \times U_{\mathcal{A}}$ , onde  $U_x$  é um conjunto aberto conexo,  $\Gamma = \{y = \varepsilon = \mathcal{A} = 0\}$  a curva de singularidades para  $X$ , e  $x = 0$  é uma singularidade degenerada satisfazendo à Hipótese de Transversalidade.

Do capítulo 3, temos que para  $x_0 \neq 0 \in \Gamma$  e qualquer subconjunto aberto  $V \subset U_{\varepsilon, \mathcal{A}}$  podemos considerar uma função condição inicial

$$i \in C_{flat}^\infty(V, \{\varepsilon = 0\}, \widehat{W}_{x_0})$$

para  $X$  em  $x_0$  de maneira que para qualquer ponto  $x_1 \neq x_0$ , tal que

$$\begin{cases} 0 > x_1 > x_0, \text{ se } \mathcal{B}_- < 0 \\ 0 < x_1 < x_0, \text{ se } \mathcal{B}_+ > 0 \end{cases}$$

existe uma única variedade central dinâmica

$$W(\Gamma_{x_0, x_1}) = \text{graf}\{y = w(x, \varepsilon, \mathcal{A})\},$$

definida sobre o domínio  $\Gamma_{x_0, x_1} \times \mathcal{O}_{\Gamma_{x_0, x_1}}$ , (onde  $\mathcal{O}_{\Gamma_{x_0, x_1}} \subset V$ , é um aberto e  $\Gamma_{x_0, x_1} = [x_0, x_1]$ ) e tal que  $w(x_0, \varepsilon, \mathcal{A}) = i(\varepsilon, \mathcal{A})$ .

Com a finalidade de mostrar a existência das Superfícies Canard, vamos considerar alguns resultados de extensão pela aplicação Blowing-up  $\Phi$  definida no capítulo 2, onde as variedades centrais dinâmicas  $W(\Gamma_{x_0, x_1})$  serão estendidas as variedades centrais dinâmicas  $W_-, W_+$  respectivamente.

## 7.1 Blowing-up e Blowing-down de $\mathcal{O}(W_-, W_+)$

Sobre a carta  $K_{\pm\bar{x}_\varepsilon}$ , consideremos o campo  $\bar{X}$  definido pela aplicação Blowing-up principal  $\Phi : \bar{U} \rightarrow U$ .

Nas variáveis adaptadas  $(\varepsilon, a, b, \mathcal{A})$  sobre a carta  $K_\varepsilon$ , restringindo o Blowing-up, obtemos a aplicação polinomial

$$\varphi : (\bar{\varepsilon}, A_i, B_j, \mathcal{A}_r) \longrightarrow (\varepsilon, a_i, b_j, \mathcal{A}_r) = (\bar{\varepsilon}^{p+1}, \bar{\varepsilon}^{2p-i} A_i, \bar{\varepsilon}^{p-j} B_j, \mathcal{A}_r), \quad (7.1)$$

onde  $0 \leq i \leq 2p-1$ ,  $0 \leq j \leq p-1$ .

Similarmente sobre a carta  $K_{\pm\bar{x}_\varepsilon}$ , para cada ponto fixado  $\hat{x} = \hat{x}_0$  o blowing-up restrito às variáveis  $(\varepsilon, a, b, \mathcal{A})$ , é a aplicação polinomial

$$\phi_{\hat{x}_0} : (e, A_i, B_j, \mathcal{A}_r) \longrightarrow (\hat{x}_0^{p+1} e^{p+1}, \hat{x}_0^{2p-i} e^{2p-i} A_i, \hat{x}_0^{p-j} e^{p-j} B_j, \mathcal{A}_r) \quad (7.2)$$

Definindo a constante positiva  $\hat{x}_0 := |x_0|$ ,  $V_{\hat{\mathcal{A}}} := V_{A,B} \times V_{\mathcal{A}_r}$ , onde  $V_{A,B} \subset \mathbb{R}^{3p}$  tem fecho compacto e  $V_{\mathcal{A}_r} \in (\mathbb{R}^{n-3p}, 0)$ , obtemos os seguintes resultados.

**Lema 7.1.1** *Com as notações acima*

- (a) *Suponha que  $\mathcal{B}_- := (-1)^p \mathcal{B}_0 < 0$ ,  $x_0 < 0$  e que existe um subconjunto aberto  $V_e = (0, e_0)$ ,  $e_0 > 0$  tal que  $V_e \times V_{\hat{\mathcal{A}}} \subset \phi_{\hat{x}_0}^{-1}(V)$ , com  $\hat{x}_0 \in V_x$ . Então a aplicação*

$$I(e, \hat{\mathcal{A}}) := \left(\frac{1}{\hat{x}_0^p}\right) i \circ \phi_{\hat{x}_0}(e, \hat{\mathcal{A}})$$

*é uma função condição inicial para  $\bar{X}$  em  $P_-$ , sobre o domínio  $V_e \times V_{\hat{\mathcal{A}}}$ .*

- (b) *Reciprocamente, se  $W_- = \text{graf}\{y = w_-(\hat{x}, e, \hat{\mathcal{A}})\}$  é uma variedade central sobre  $P_-$  definida sobre o domínio  $N_{\hat{x}} \times N_e \times V_{\hat{\mathcal{A}}}$ , tal que  $I(e, \hat{\mathcal{A}}) := w_-(\hat{x}_0, e, \hat{\mathcal{A}})$ ; a aplicação*

$$i(\varepsilon, a, b) := (\hat{x}_0^p) I \circ \phi_{\hat{x}_0}^{-1}(\varepsilon, a, b)$$

*é a função condição inicial para  $X$  em  $x_0 = -\hat{x}_0$ , com domínio de definição  $\phi_{\hat{x}_0}(V_e \times V_{\hat{\mathcal{A}}}) = V$ .*

**DEMONSTRAÇÃO**

Consideremos a expansão formal em serie  $\widehat{W}_{-, \hat{x}_0}$  da variedade central  $W_-$  restrita a  $\hat{x}_0$ , para o campo  $\bar{X}$  em  $P_-$ . Por hipótese temos que

$$i - \widehat{W}_{x_0} \in C_{flat}^\infty(V, \{\varepsilon = 0\}),$$

onde  $\widehat{W}_{x_0}$  é a série formal da variedade central  $W(\Gamma_{x_0, x_1})$  para o campo  $X$  em  $x_0 = -\hat{x}_0$ . Logo pela proposição 2.1.13 obtemos

$$I - \widehat{W}_{-, \hat{x}_0} \in C_{flat}^\infty(V_e \times V_{\hat{A}}, \{e = 0\})$$

e isto mostra o item (a).

O item (b), é análogo

□

O resultado análogo para  $\mathcal{B}_+$  é o seguinte

**Lema 7.1.2** *Aqui*

(a) *Suponha que  $\mathcal{B}_+ > 0$ ,  $x_0 > 0$ . Então a aplicação*

$$I(e, \hat{A}) := \left(\frac{1}{\hat{x}_0^p}\right) i \circ \phi_{\hat{x}_0}(e, \hat{A})$$

*é uma função condição inicial para  $\overline{X}$  em  $P_+$ , sobre o domínio  $V_e \times V_{\hat{A}} \subset \phi_{\hat{x}_0}^{-1}(V)$  com fecho compacto.*

(b) *Reciprocamente, se  $W_+ = \text{graf}\{y = w_+(\hat{x}, e, \hat{A})\}$  é uma variedade central em  $P_+$  definida sobre o domínio  $N_{\hat{x}} \times N_e \times V_{\hat{A}}$ , tal que  $I(e, \hat{A}) := w_+(\hat{x}_0, e, \hat{A})$ ; a aplicação*

$$i(\varepsilon, a, b) := (\hat{x}_0^p) I \circ \phi_{\hat{x}_0}^{-1}(\varepsilon, a, b)$$

*é a função condição inicial para  $X$  em  $x_0 = \hat{x}_0$ , com domínio de definição  $\phi_{\hat{x}_0}(V_e \times V_{\hat{A}}) = V$ .*

**DEMONSTRAÇÃO**

Similar ao lema anterior.

□

Denotemos por  $\Gamma_-, \Gamma_+ \subset \Gamma$ , os intervalos abertos definidos por

$$\Gamma_- := \{x \in U_x | x < 0\}, \quad \Gamma_+ := \{x \in U_x | x > 0\}$$

e  $\mathcal{O} \subset \{(\varepsilon, \hat{A}) | \varepsilon > 0\}$ , um domínio em  $V$ . Dos lemas anteriores, segue os resultados de extensão *blowing-up*, *blowing-down*.

**Proposição 7.1.3** *Suponha que  $\mathcal{B}_- < 0$ , (resp.  $\mathcal{B}_+ > 0$ ) e seja  $W(\tilde{\Gamma} \times \mathcal{O})$  qualquer variedade central com domínio  $\tilde{\Gamma} \times \mathcal{O}$ , onde*

$$\tilde{\Gamma} \subset \Gamma_-, \text{ (resp. } \tilde{\Gamma} \subset \Gamma_+)$$

*é um subintervalo compacto conexo. Então, para qualquer constante positiva suficientemente pequena  $\hat{x}_0 = |x_0| \in U_x$ , e qualquer subconjunto aberto com fecho compacto  $V_e \times V_{\mathcal{A}} = (0, e_0) \times (V_{A,B} \times V_{A,r}) \subset \phi_{\hat{x}_0}^{-1}(V)$ , existe uma pequena constante  $0 < e_1 < e_0$  tal que  $W(\tilde{\Gamma} \times \mathcal{O})$  estende-se unicamente como uma variedade central  $W_-$  em  $P_-$ , (resp.  $W_+$  em  $P_+$ ), definida sobre o domínio*

$$N_{\hat{x}} \times N_e \times V_{\hat{\mathcal{A}}}, \quad N_e := (0, e_1), \quad N_{\hat{x}} := [0, \hat{x}_0].$$

DEMONSTRAÇÃO

Dos lemas 7.1.1(a) e 7.1.2(a), temos que a função  $\phi_{\hat{x}_0}^*(i)$  cujo gráfico é dado por

$$W(\tilde{\Gamma} \times \mathcal{O}) \cap \{x = -\hat{x}_0\}, \text{ (resp. } W(\tilde{\Gamma} \times \mathcal{O}) \cap \{x = \hat{x}_0\})$$

é uma função condição inicial para  $\bar{X}$  em  $P_-$ , (resp.  $\bar{X}$  em  $P_+$ ). Logo da proposição 6.1.3 obtemos a extensão desejada.  $\square$

A extensão recíproca é como segue

**Proposição 7.1.4** *Seja  $W_-$  qualquer variedade central em  $P_-$ , (resp.  $W_+$  em  $P_+$ ) definida sobre o domínio  $N_{\hat{x}} \times N_e \times V_{\hat{\mathcal{A}}}$ . Suponha que  $\mathcal{B}_- > 0$  (resp.  $\mathcal{B}_+ < 0$ ). Então, para qualquer constante positiva  $\hat{x}_0 \in N_{\hat{x}}$  e qualquer subintervalo compacto*

$$\tilde{\Gamma} \subset \Gamma_-, \text{ (resp. } \tilde{\Gamma} \subset \Gamma_+)$$

*existe uma vizinhança  $N = N(\tilde{\Gamma}) \subset U_{\varepsilon, \mathcal{A}}$  da origem  $(\varepsilon, \mathcal{A}) = (0, 0)$  tal que  $W_-$  (resp.  $W_+$ ) estende-se unicamente como uma variedade central  $W(\tilde{\Gamma} \times \mathcal{O})$ , onde*

$$\mathcal{O} := \phi_{\hat{x}_0}(N_e \times V_{\hat{\mathcal{A}}}) \cap N.$$

DEMONSTRAÇÃO

Dos lemas 7.1.1(b) e 7.1.2(b), temos que a função  $(\phi_{\hat{x}_0}^*)^{-1}(I)$  com gráfico

$$W_- \cap \{x = \hat{x}_0\}, \text{ (resp. } W_+ \cap \{x = \hat{x}_0\})$$

é uma função condição inicial para  $X$  em  $\Gamma_-$ , (resp.  $X$  em  $\Gamma_+$ ). Logo por continuidade do blowing-up, da hipótese segue que  $\mathcal{B}_{-\hat{x}_0} > 0$  para qualquer  $x_0 = -\hat{x}_0 < 0 \in \Gamma_-$  (resp.  $\mathcal{B}_{\hat{x}_0} < 0, \forall x_0 = \hat{x}_0 > 0 \in \Gamma_+$ ), assim o resultado segue aplicando proposição 3.3.3. □

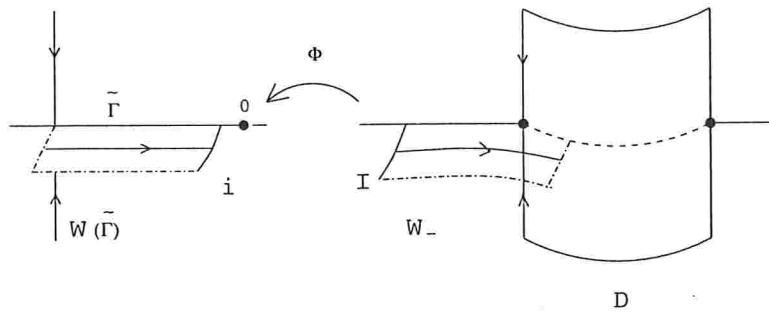


Figura 7.1: Blowing-down para o caso  $\mathcal{B}_- < 0$ .

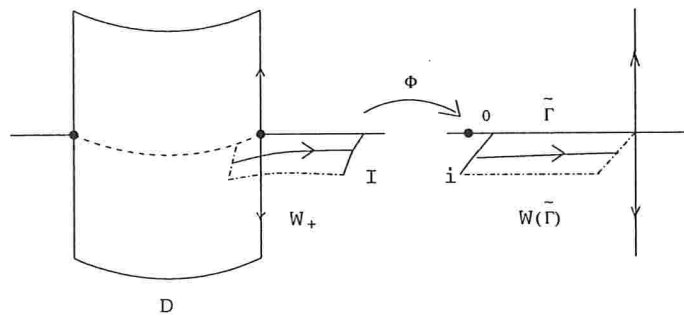


Figura 7.2: Blowing-down para o caso  $\mathcal{B}_+ > 0$ .

**Observação 7.1.5** *Notemos que*

- *Os resultados de extensão acima (ver figuras 7.1 e 7.2), mostram os casos especiais  $(s, u)$ ,  $(u, s)$  respectivamente, que esquematicamente podemos expressar como*

$$\begin{aligned} W(\Gamma_-) &\xrightarrow{\mathcal{B}_- < 0} W_-, & W_+ &\xleftarrow{\mathcal{B}_+ > 0} W(\Gamma_+); \\ W(\Gamma_-) &\xleftarrow{\mathcal{B}_- > 0} W_-, & W_+ &\xrightarrow{\mathcal{B}_+ < 0} W(\Gamma_+). \end{aligned}$$

- Os casos  $(s, s), (u, u)$  são análogos. Com a notação introduzida no capítulo anterior temos o esquema

$$\begin{aligned} W(\Gamma_-) &\xrightarrow{\mathcal{B}_- < 0} W_- \longrightarrow W_+ \xrightarrow{\mathcal{B}_+ < 0} W(\Gamma_+); \\ W(\Gamma_-) &\xleftarrow{\mathcal{B}_- > 0} W_- \longleftarrow W_+ \xleftarrow{\mathcal{B}_+ > 0} W(\Gamma_+). \end{aligned}$$

Agora estamos prontos para abordar os resultados principais deste trabalho.

## 7.2 Existência de Superfícies Canard

Seja  $X$  um campo singularmente perturbado definido sobre o aberto  $U = U_x \times U_y \times U_\varepsilon \times U_{\mathcal{A}}$ , descrito no capítulo 2, seção 2.3 tal que nas coordenadas  $(x, y, \varepsilon, \mathcal{A})$  temos que:

1.  $X$  satisfaz a Hipótese de Transversalidade na única singularidade de-generada

$$x = 0 \in \Gamma = \{y = \varepsilon = \mathcal{A} = 0\} \approx U_x$$

com multiplicidade  $p = \mu(X)$ .

2.  $(\varepsilon, \mathcal{A}) = (\varepsilon, a, b, \mathcal{A}_r) \in U_\varepsilon \times U_{\mathcal{A}}$  são os parâmetros adaptados para  $X$ .

Vamos considerar constantes positivas  $S, R > 0$  tal que

$$\{0 < \varepsilon < R, \|\mathcal{A}\| < S\} \subset V \subset U_\varepsilon \times U_{\mathcal{A}} \cap \{\varepsilon = 0\}, \quad (7.3)$$

e também um subconjunto compacto conexo  $\tilde{\Gamma} \subset \Gamma$  da forma

$$\tilde{\Gamma} = [x_0, x_1], \quad x_0 < 0 < x_1.$$

Vamos escrever mais precisamente no espaço de parâmetros  $U_{\varepsilon, \mathcal{A}}$  as regiões  $\mathcal{O}_{\tilde{\Gamma}} \subset V$  para as quais existem as Superfícies Canard  $\{y = w(x, \varepsilon, \mathcal{A})\}$ , em cada caso de transição  $(s, s), (u, u), (u, s), (s, u)$  para  $x = 0$ . O par  $(\mathcal{O}_{\tilde{\Gamma}}, w)$ , denotará tal superfície.

### 7.2.1 $(\mathcal{O}_{\tilde{\Gamma}}, w)$ nos casos $(s, s), (u, u)$

No caso  $(s, s)$  consideramos o ponto base  $x = x_0 \in \tilde{\Gamma}$ , a partir do qual será definida a variedade central formal

$$\widehat{W}(x, \varepsilon, \mathcal{A}) = \sum_{i=0}^{\infty} w_i(x, \mathcal{A}) \varepsilon^i.$$

O caso  $(u, u)$  pode ser tratado analogamente, considerando o campo  $-X$  sobre o ponto base  $x = x_1 \in \tilde{\Gamma}$

**Teorema 7.2.1** *Suponha que  $X$  está no caso  $(s, s)$  e seja  $i \in C_{flat}^\infty(V, \{\varepsilon = 0\}, \widehat{W}_{x_0})$  uma função condição inicial para  $X$  em  $x = x_0$ . Então existem uma coleção de constantes estritamente positivas  $\{m, r, k_i, l_j\}$  definindo a Região Canard  $\mathcal{O}_{\tilde{\Gamma}}$  como um conjunto aberto da forma*

$$\mathcal{O}_{\tilde{\Gamma}} = \begin{cases} 0 < \varepsilon < r \\ |a_i| < k_i |\varepsilon|^{\frac{2p-i}{p+1}} & 0 \leq i \leq 2p-1 \\ |b_j| < l_j |\varepsilon|^{\frac{p-j}{p+1}} & 0 \leq j \leq p-1 \\ |\mathcal{A}_r| < m \end{cases}$$

e uma única função  $C^\infty$

$$w : \tilde{\Gamma} \times \mathcal{O}_{\tilde{\Gamma}} \longrightarrow \mathbf{R} \\ (x, (\varepsilon, \mathcal{A})) \longmapsto y = w(x, \varepsilon, \mathcal{A})$$

satisfazendo o seguinte

- (i)  $w(x_0, \varepsilon, \mathcal{A}) = i(\varepsilon, \mathcal{A}), \forall (\varepsilon, \mathcal{A}) \in \mathcal{O}_{\tilde{\Gamma}}$ ;
- (ii)  $W(\tilde{\Gamma}) := \text{graf}\{y = w(x, \varepsilon, \mathcal{A})\}$  é uma variedade invariante por  $X$ ;
- (iii) -  $w$  tem extensão contínua ao fecho de  $\tilde{\Gamma} \times \mathcal{O}_{\tilde{\Gamma}}$ , tal que  $w(x, 0, 0) \equiv 0$ ;
- $w$  tem uma extensão blowing-up  $C^\infty$  em  $\{x = \varepsilon = 0\}$ .

**DEMONSTRAÇÃO**

Da última observação, o resultado é mostrado pelo esquema

$$W(\Gamma_-) \xrightarrow{\mathcal{B}^- < 0} W_- \longrightarrow W_+ \xrightarrow{\mathcal{B}^+ < 0} W(\Gamma_+),$$

onde o par  $(\mathcal{O}_{\tilde{\Gamma}}, w)$  é construído como segue.

**Passo 1** Para cada  $x'_0 \in U_x$ , com  $x_0 < x'_0 < 0$ , definamos o subintervalo compacto  $\Gamma_0 := [x_0, x'_0]$ . Pela Proposição 3.3.3, existem uma vizinhança  $N_0 \subset U_{\varepsilon, \mathcal{A}}$  da origem  $(\varepsilon, \mathcal{A}) = (0, 0)$  e uma função  $C^\infty$

$$w_0 : \Gamma_0 \times \mathcal{O}_0 \longrightarrow \mathbf{R} \\ (x, \varepsilon, \mathcal{A}) \longmapsto y = w_0(x, \varepsilon, \mathcal{A}),$$

onde  $\mathcal{O}_0 := V \cap N_0$ , tal que

- (i)  $w_0(x_0, \varepsilon, \mathcal{A}) = i(\varepsilon, \mathcal{A}), \forall (\varepsilon, \mathcal{A}) \in \mathcal{O}_0$ ;

- (ii)  $W(\Gamma_0) := \text{graf}\{y = w_0(x, \varepsilon, \mathcal{A})\}$  é uma variedade invariante por  $X$ ;
- (iii)  $w_0 \in C_{\text{flat}}^\infty(\Gamma_0 \times \mathcal{O}_0, \{\varepsilon = 0\}, \widehat{W})$ .

Considerando  $\hat{x}'_0 = |x'_0|$  suficientemente pequeno, de (7.3) existe sobre a carta  $K_{-\hat{x}_\varepsilon}$  uma vizinhança aberta da origem  $(e, \hat{\mathcal{A}}) = (0, 0)$  contida no conjunto  $\phi_{\hat{x}'_0}^{-1}(\mathcal{O}_0)$ .

Como  $\mathcal{B}_- < 0$ , segue da proposição 7.1.3 que a variedade  $W(\Gamma_0)$  é estendida unicamente como uma variedade central

$$W_- := \text{graf}\{\hat{y} = \hat{w}_-(\hat{x}, e, \hat{\mathcal{A}})\}.$$

Em  $P_-$ , definida sobre o domínio  $N_{\hat{x}} \times N_e \times V_{\hat{\mathcal{A}}}$ , onde

$$N_{\hat{x}} := [0, \hat{x}'_0], \quad N_e := (0, e_0), \quad V_{\hat{\mathcal{A}}} \in (\mathbf{R}^n, 0).$$

Passo 2 Como  $\mathcal{B}_+ < 0$ , o Lema 6.3.1 implica que  $W_-$  induz uma única variedade central em  $P_+$

$$W_+ := \text{graf}\{\hat{y} = \hat{w}_+(\hat{x}, e, \hat{\mathcal{A}})\}$$

definida sobre o domínio  $N'_x \times N'_e \times V'_{\hat{\mathcal{A}}}$ , onde

$$N'_x := [0, \hat{x}'_1], \quad N'_e = (0, e_1), \quad V'_{\hat{\mathcal{A}}} \subset V_{\hat{\mathcal{A}}}.$$

A região de colagem  $\mathcal{O}(W_-, W_+)$  contém uma vizinhança aberta da origem  $(\tilde{\varepsilon}, \tilde{\mathcal{A}}) = (0, 0)$  em  $U_{\tilde{\varepsilon}, \tilde{\mathcal{A}}}$ ; daqui podemos escolher as constantes  $r, m, k_i, l_j$  estritamente positivas tal que o conjunto

$$\Omega = \begin{cases} 0 < \tilde{\varepsilon} < r^{\frac{1}{p+1}} \\ |A_i| < k_i & 0 \leq i \leq 2p-1 \\ |B_j| < l_j & 0 \leq j \leq p-1 \\ |\mathcal{A}_r| < m \end{cases}$$

é estritamente contido em  $\mathcal{O}(W_-, W_+)$ . Além disso vale

$$W_- \equiv W_+ = \text{graf}\{\tilde{y} = \tilde{w}(\tilde{x}, \tilde{\varepsilon}, \tilde{\mathcal{A}})\}$$

para alguma função  $\tilde{w} \in C^\infty(\mathbf{R} \times \mathcal{O}(W_-, W_+))$ .



Passo 3 Da Proposição 7.1.4, existe uma vizinhança  $N_1 \subset U_{\varepsilon, \mathcal{A}}$  da origem  $(\varepsilon, \mathcal{A}) = (0, 0)$  e uma única função  $C^\infty$  definida por

$$\begin{aligned} w_1 &: \Gamma_1 \times \mathcal{O}_1 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, \varepsilon, \mathcal{A}) &\longmapsto y = w_1(x, \varepsilon, \mathcal{A}); \end{aligned}$$

onde  $\Gamma_1 := [x'_1, x_1]$ ,  $\mathcal{O}_1 = N_1 \cap \phi_{x'_1}(N'_e \times V'_\mathcal{A})$  tal que  $W_+$  estende-se unicamente como a variedade central

$$W(\Gamma_1) := \text{graf}\{y = w_1(x, \varepsilon, \mathcal{A})\}.$$

Verificando as propriedades análogas de  $W(\Gamma_0)$

- (i)  $w_1(x_1, \varepsilon, \mathcal{A}) = i(\varepsilon, \mathcal{A}), \forall (\varepsilon, \mathcal{A}) \in \mathcal{O}_1$ ,
- (ii)  $W(\Gamma_1)$  é uma variedade invariante por  $X$ ,
- (iii)  $w_1 \in C_{flat}^\infty(\Gamma_1 \times \mathcal{O}_1, \{\varepsilon = 0\}, \widehat{W})$ .

Como na carta  $K_{\tilde{\varepsilon}}$ , vale  $\varepsilon = \tilde{\varepsilon}^{p+1}$ , de um cálculo direto obtemos a Região Canard  $\mathcal{O}_{\tilde{\Gamma}}$  definida por

$$\mathcal{O}_{\tilde{\Gamma}} := \varphi(\Omega)$$

sendo  $\varphi$  a função polinomial dada em (7.1); e ajustando as constantes  $r, m, k_i, l_j$  podemos conseguir a inclusão

$$\mathcal{O}_{\tilde{\Gamma}} \subset \mathcal{O}_0 \cap \mathcal{O}_1.$$

Neste caso, sobre este domínio consideremos o Blowing-down das funções  $\hat{w}_-, \tilde{w}, \hat{w}_+$ ; dadas nas coordenadas  $(x, \varepsilon, \mathcal{A})$  por

$$\begin{aligned} w_-(x, \varepsilon, \mathcal{A}) &:= |x|^p \hat{w}_-(|x|, \phi_{x'_0}^{-1}(\varepsilon, \mathcal{A})), \\ w_\sim(x, \varepsilon, \mathcal{A}) &:= \varepsilon^{\frac{p}{p+1}} \tilde{w}(x \varepsilon^{\frac{-1}{p+1}}, \varphi^{-1}(\varepsilon, \mathcal{A})), \\ w_+(x, \varepsilon, \mathcal{A}) &:= x^p \hat{w}_+(x, \phi_{x'_1}^{-1}(\varepsilon, \mathcal{A})). \end{aligned}$$

Aqui usamos as relações  $\varepsilon = \tilde{\varepsilon}^{p+1}$ ,  $\tilde{x} = x \tilde{\varepsilon}^{-1}$ .

Desta construção, sobre o domínio  $\tilde{\Gamma} \times \mathcal{O}_{\tilde{\Gamma}}$  definimos a função  $C^\infty$

$$\begin{aligned} w &: \tilde{\Gamma} \times \mathcal{O}_{\tilde{\Gamma}} \longrightarrow \mathbf{R} \\ (x, \varepsilon, \mathcal{A}) &\longmapsto y = w(x, \varepsilon, \mathcal{A}) \end{aligned}$$

como sendo

$$w(x, \varepsilon, \mathcal{A}) := \begin{cases} w_0(x, \varepsilon, \mathcal{A}), & x \in \Gamma_0 := [x_0, x'_0] \\ w_-(x, \varepsilon, \mathcal{A}), & x \in [x'_0, 0) \\ w_\sim(x, \varepsilon, \mathcal{A}), & x = 0 \\ w_+(x, \varepsilon, \mathcal{A}), & x \in (0, x'_1] \\ w_1(x, \varepsilon, \mathcal{A}), & x \in \Gamma_1 := [x'_1, x_1]. \end{cases}$$

Claramente  $w$  assim construída satisfaz os item (i), (ii) do enunciado; e o item (iii) decorre como consequência direta da forma da região Canard  $\mathcal{O}_{\bar{\Gamma}}$ . Isto mostra o Teorema.

□

No caso  $(u, u)$ , usamos o campo  $-X$  sobre a condição inicial  $i \in C_{flat}^\infty(\Gamma_1 \times \mathcal{O}_1, \{\varepsilon = 0\}, \widehat{W}_{x_1})$ . A construção do par  $(\mathcal{O}_{\bar{\Gamma}}, w)$  é completamente análoga ao caso  $(s, s)$  (veja figuras 7.3 e 7.4).

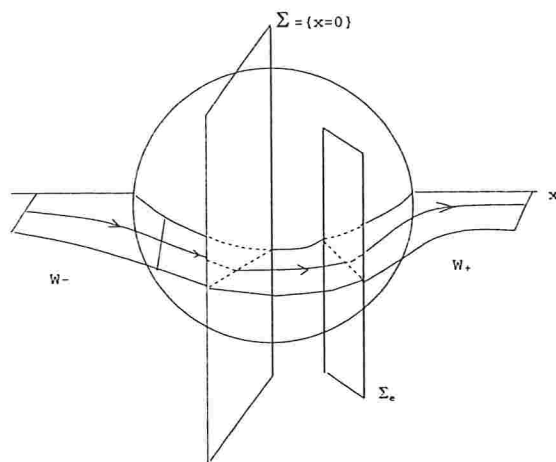


Figura 7.3: Superfície Canard no caso (s,s).

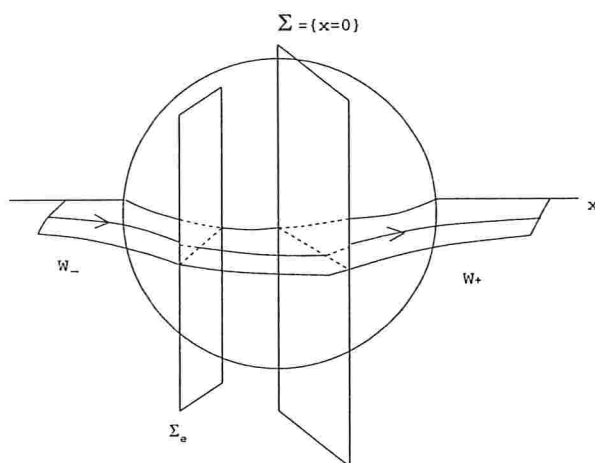


Figura 7.4: Superfície Canard no caso (u,u).

7.2.2  $(\mathcal{O}_{\tilde{\Gamma}}, w)$  sobre o caso  $(u, s)$ 

Como no teorema anterior, temos o seguinte resultado:

**Teorema 7.2.2** *Suponha que o campo  $X$  está no caso  $(u, s)$ . Então existem uma coleção de constantes estritamente positivas  $\{m, r, k_i, l_j\}$  definindo a Região Canard  $\mathcal{O}_{\tilde{\Gamma}}$  como um conjunto aberto da forma*

$$\mathcal{O}_{\tilde{\Gamma}} = \begin{cases} 0 < \varepsilon < r \\ |a_i| < k_i |\varepsilon|^{\frac{2p-i}{p+1}} & 0 \leq i \leq 2p-1 \\ |b_j| < l_j |\varepsilon|^{\frac{p-j}{p+1}} & 0 \leq j \leq p-1 \\ |\mathcal{A}_r| < m \end{cases}$$

e uma função  $C^\infty$

$$w : \tilde{\Gamma} \times \mathcal{O}_{\tilde{\Gamma}} \longrightarrow \mathbf{R} \\ (x, (\varepsilon, \mathcal{A})) \longmapsto y = w(x, \varepsilon, \mathcal{A})$$

satisfazendo o seguinte:

- (i)  $w(0, \varepsilon, \mathcal{A}) \equiv 0$ ;
- (ii)  $W(\tilde{\Gamma}) := \text{graf}\{y = w(x, \varepsilon, \mathcal{A})\}$  é uma variedade invariante por  $X$ ;
- (iii) -  $w$  tem extensão contínua ao fecho de  $\tilde{\Gamma} \times \mathcal{O}_{\tilde{\Gamma}}$ , tal que  $w(x, 0, 0) \equiv 0$ ;
- $w$  tem uma extensão blowing-up  $C^\infty$  em  $\{x = \varepsilon = 0\}$ .

## DEMONSTRAÇÃO

Da observação anterior, este Teorema segue dos esquemas

$$W(\Gamma_-) \xleftarrow{\mathcal{B}_- > 0} W_- \rightleftharpoons W_+ \xrightarrow{\mathcal{B}_+ < 0} W(\Gamma_+)$$

onde  $\rightleftharpoons$  significa que as variedades  $W_-, W_+$  se induzem uma da outra respectivamente (ver figura 7.5). Logo a existência de  $(\mathcal{O}_{\tilde{\Gamma}}, w)$  é detalhado como segue.

Passo 1 Do Lema 6.3.2, existe uma vizinhança aberta  $U$  da origem  $(\tilde{\varepsilon}, \tilde{\mathcal{A}}) = (0, 0)$  sobre a carta  $K_{\tilde{\varepsilon}}$ , e únicas variedades centrais  $W_-$  em  $P_-$  e  $W_+$  em  $P_+$  definidas sobre o domínio comum  $N'_x \times N'_e \times V'_{\tilde{\mathcal{A}}}$ , onde

$$N'_x = [0, x'_0], \quad N'_e = (0, e'_0), \quad V'_{\tilde{\mathcal{A}}} \in (\mathbf{R}^n, 0).$$

Tal que sobre a secção transversal  $\Sigma = \{x = 0\}$  temos

$$\begin{aligned} W_- \cap \Sigma &= W_+ \cap \Sigma = \text{graf}\{y = Y(\tilde{\varepsilon}, \hat{\mathcal{A}})\}, \\ U &\subset \mathcal{O}^- \cap \mathcal{O}^+ = \mathcal{O}(W_-, W_+). \end{aligned}$$

Onde  $Y(\tilde{\varepsilon}, \hat{\mathcal{A}})$  é uma função  $C^\infty$  arbitraria definida sobre  $U$  com  $Y(0, 0) = 0$ . Daqui segue o item (i) para o caso particular  $Y \equiv 0$  sobre alguma vizinhança da origem  $(\tilde{\varepsilon}, \hat{\mathcal{A}}) = (0, 0)$ .

Além disso, como no Teorema 7.2.1 podemos escolher  $\{m, r, k_i, l_j\}$  tal que a inclusão  $\Omega \subset \mathcal{O}(W_-, W_+)$  seja estrita e definir a Região Canard como

$$\mathcal{O}_{\tilde{\Gamma}} := \varphi(\Omega),$$

o qual tem a forma do enunciado.

Passo 2 Da Proposição 7.1.4, podemos respectivamente estender as variedades centrais  $W_-, W_+$  unicamente como variedades centrais

$$\begin{aligned} W(\Gamma_0) &:= \text{graf}\{y = w_0(x, \varepsilon, \mathcal{A})\}, \quad x \in \Gamma_0 := [x_0, x'_0], \\ W(\Gamma_1) &:= \text{graf}\{y = w_1(x, \varepsilon, \mathcal{A})\}, \quad x \in \Gamma_1 := [x'_1, x_1]. \end{aligned}$$

Para funções  $C^\infty$   $w_0, w_1$  definidas sobre  $\Gamma_0 \times \mathcal{O}_0$  e  $\Gamma_1 \times \mathcal{O}_1$  respectivamente, onde

$$\mathcal{O}_0 := N \cap \phi_{\hat{x}'_0}(N'_e \times V'_{\hat{\mathcal{A}}}), \quad (\text{resp. } \mathcal{O}_1 := N \cap \phi_{\hat{x}'_1}(N'_e \times V'_{\hat{\mathcal{A}}}))$$

para alguma vizinhança  $N$  da origem  $(\varepsilon, \mathcal{A}) = (0, 0)$ .

Controlando as constantes  $\{m, r, k_i, l_j\}$ , podemos obter a inclusão

$$\mathcal{O}_{\tilde{\Gamma}} \subset \mathcal{O}_0 \cap \mathcal{O}_1$$

Logo os item (ii), (iii) são satisfeitos, pela construção feita no Teorema 7.2.1 da função  $w \in C^\infty(\tilde{\Gamma} \times \mathcal{O}_{\tilde{\Gamma}})$ , onde

$$\tilde{\Gamma} = \Gamma_0 \cup [x'_0, 0] \cup \{0\} \cup (0, x'_1] \cup \Gamma_1.$$

□

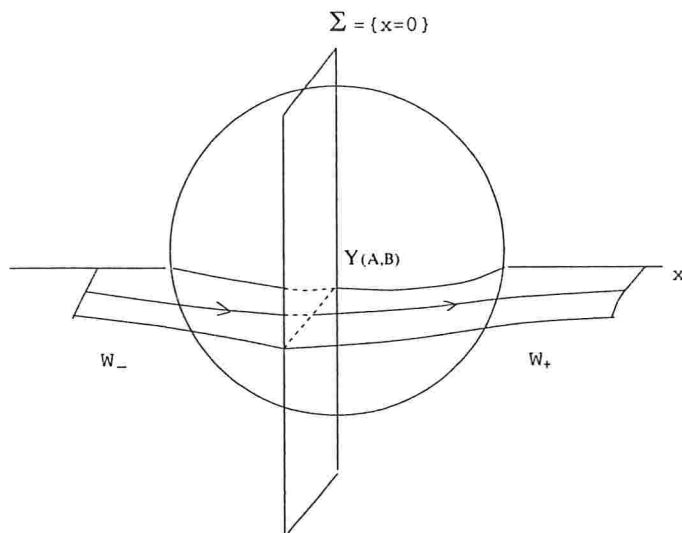


Figura 7.5: Superfície Canard no caso (u,s).

### 7.2.3 $(\mathcal{O}_{\tilde{\Gamma}}, w)$ sobre o caso $(s, u)$

Finalmente vamos estudar o caso da transição  $(s, u)$ .

**Teorema 7.2.3** *Suponha que o campo  $X$  está no caso  $(s, u)$  e sejam*

$$\begin{aligned} i_0 &\in C_{flat}^{\infty}(V, \{\varepsilon = 0\}, \widehat{W}_{x_0}), \\ i_1 &\in C_{flat}^{\infty}(V, \{\varepsilon = 0\}, \widehat{W}_{x_1}). \end{aligned}$$

*funções condição inicial arbitrárias para  $X$  em  $x = x_0$  e  $x = x_1$  respectivamente. Então para cada índice par  $s \in \{0, 1, 2, \dots, 2p-1\}$  existem:*

1. *Uma coleção de constantes estritamente positivas  $\{m, r, k_i, l_j\}$  definindo um conjunto aberto da forma*

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{array}{ll} 0 < \varepsilon < r & \\ |a_i| < k_i |\varepsilon|^{\frac{2p-i}{p+1}} & 0 \leq i \leq 2p-1 \\ |b_j| < l_j |\varepsilon|^{\frac{p-j}{p+1}} & 0 \leq j \leq p-1 \\ |\mathcal{A}_r| < m & \end{array} \right. ,$$

2. Uma única subvariedade fechada de codimensão 1

$$\mathcal{O}_{\tilde{\Gamma}} := \text{graf}\{a_s = \alpha_s(\varepsilon, \hat{a}, b, \mathcal{A}_r)\},$$

onde  $\alpha_s : \mathcal{C}_s := \mathcal{C} \cap \{a_s = 0\} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função  $C^\infty$  e  $\hat{a} := (a_0, \dots, a_{s-1}, a_{s+1}, \dots, a_{2p-1})$ .

3. Uma única função  $C^\infty$

$$\begin{aligned} w &: \tilde{\Gamma} \times \mathcal{O}_{\tilde{\Gamma}} \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, (\varepsilon, \mathcal{A})) &\mapsto y = w(x, \varepsilon, \mathcal{A}) \end{aligned}$$

satisfazendo o seguinte

- (i)  $w(x_k, \varepsilon, \mathcal{A}) = i_k(\varepsilon, \mathcal{A}), \quad \forall (\varepsilon, \mathcal{A}) \in \mathcal{O}_{\tilde{\Gamma}}, \quad k = 0, 1;$
- (ii)  $W(\tilde{\Gamma}) := \text{graf}\{y = w(x, \varepsilon, \mathcal{A})\}$  é uma variedade invariante por  $X$ ;
- (iii)  $\alpha$  tem extensão blowing-up  $C^\infty$  em  $\{\varepsilon = 0\}$ ;
- (iv) -  $w$  tem extensão continua ao fecho de  $\tilde{\Gamma} \times \mathcal{O}_{\tilde{\Gamma}}$ , tal que  $w(x, 0, 0) \equiv 0$ ;
- $w$  tem uma extensão blowing-up  $C^\infty$  em  $\{x = \varepsilon = 0\}$ .

#### DEMONSTRAÇÃO

Este resultado é mostrado pelo esquema seguinte

$$W(\Gamma_-) \xrightarrow{\mathcal{B}_- < 0} W_- \rightsquigarrow W_+ \xleftarrow{\mathcal{B}_+ > 0} W(\Gamma_+)$$

onde  $\rightsquigarrow$ , significa que o contato das variedades centrais  $W_-, W_+$  é tal que sobre a secção transversal  $\Sigma = \{x = 0\}$  valem

- $W_- \cap \Sigma \equiv W_+ \cap \Sigma$ , ou
- $\Delta(\tilde{\varepsilon}, \tilde{\mathcal{A}}) \equiv 0, \quad \forall (\tilde{\varepsilon}, \tilde{\mathcal{A}}) \in \mathcal{O}_{\tilde{\Gamma}}$ .

Ver figuras 7.6 e 7.7.

Mais precisamente os detalhes da construção de  $(\mathcal{O}_{\tilde{\Gamma}}, w)$  e  $\alpha_s$  são como segue:

Passo 1 Da Proposição 7.1.3, segue que as variedades centrais  $W(\Gamma_0), W(\Gamma_1)$  se estendem unicamente como variedades centrais

$$\begin{aligned} W_- &:= \text{graf}\{\hat{y} = \hat{w}_-(\hat{x}, e, \hat{\mathcal{A}})\}, \quad \text{em } P_-, \\ W_+ &:= \text{graf}\{\hat{y} = \hat{w}_+(\hat{x}, e, \hat{\mathcal{A}})\}, \quad \text{em } P_+, \end{aligned}$$

respectivamente definidas sobre domínios  $N_{\hat{x}} \times N_e \times V_{\hat{\mathcal{A}}}$ , onde, em cada caso,

$$\begin{aligned} N_{\hat{x}} &:= [0, \hat{x}'_0], & N_e &= (0, e_0), \\ N_{\hat{x}} &:= [0, \hat{x}'_1], & N_e &= (0, e_1), \\ V_{\hat{\mathcal{A}}} &\in (\mathbb{R}^n, 0). \end{aligned}$$

Da definição das variedades  $W(\Gamma_0), W(\Gamma_1)$ , segue o item (i). Os itens restantes serão satisfeitos após caracterização da Região de Colagem  $\mathcal{O}(W_-, W_+)$ .

Passo 2 Do Lema 6.3.4, existe um subconjunto aberto  $U \subset \mathcal{O}^- \cap \mathcal{O}^+$  vizinhança da origem  $(\tilde{\varepsilon}, \tilde{\mathcal{A}}) = (0, 0)$ , sobre a carta  $K_{\tilde{\varepsilon}}$ .

Da Proposição 6.3.5, para cada índice par  $s \in \{0, 1, 2, \dots, 2p-1\}$ , existe uma pequena vizinhança  $U_s \subset U$  da origem  $(\tilde{\varepsilon}, \tilde{\mathcal{A}}) = (0, 0)$ , e uma única função  $C^\infty$

$$a_s : U_s \cap \{A_s = 0\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad a_s(0) = 0,$$

tal que a região de colagem  $\mathcal{O}(W_-, W_+)$ , é definida como

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(W_-, W_+) \cap U_s &:= \text{graf}\{A_s = a_s(\tilde{\varepsilon}, \hat{\mathcal{A}}, B, \mathcal{A}_r)\}, \\ \hat{\mathcal{A}} &:= (A_0, \dots, A_{s-1}, A_{s+1}, \dots, A_{2p-1}). \end{aligned}$$

Agora como no Teorema 7.2.1, escolhamos a coleção  $\{m, r, k_i, l_j\}$ , de maneira que a inclusão

$$\Omega \subset U_s$$

seja estrita, e além disso

$$\mathcal{O}(W_-, W_+) \cap \Omega_s := \text{graf}\{A_s = a_s|_{\Omega_s}\} \subset \Omega,$$

onde

$$\Omega_s := \Omega \cap \{A_s = 0\} \subset U_s \cap \{A_s = 0\}$$

Assim, basta definir

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &:= \varphi(\Omega), \\ \mathcal{O}_{\tilde{\Gamma}} &:= \varphi(\mathcal{O}(W_-, W_+) \cap \Omega_s). \end{aligned}$$



Onde  $\varphi$  é a função polinomial dada em (7.1).

E considerando o Blowing-down da função  $a_s$ , obtemos nas coordenadas  $(\varepsilon, \hat{a}, b, \mathcal{A}_r)$  a função  $\alpha_s$  definida por

$$\alpha_s(\varepsilon, \hat{a}, b, \mathcal{A}_r) := \varepsilon^{\frac{2p-s}{p+1}} a_s \circ \varphi^{-1}(\varepsilon, \hat{a}, b, \mathcal{A}_r).$$

Da construção feita no Teorema 7.2.1 para a função  $w \in C^\infty(\tilde{\Gamma} \times \mathcal{O}_{\tilde{\Gamma}})$ , temos a existência de  $(\mathcal{O}_{\tilde{\Gamma}}, w)$  satisfazendo o enunciado deste Teorema.

□

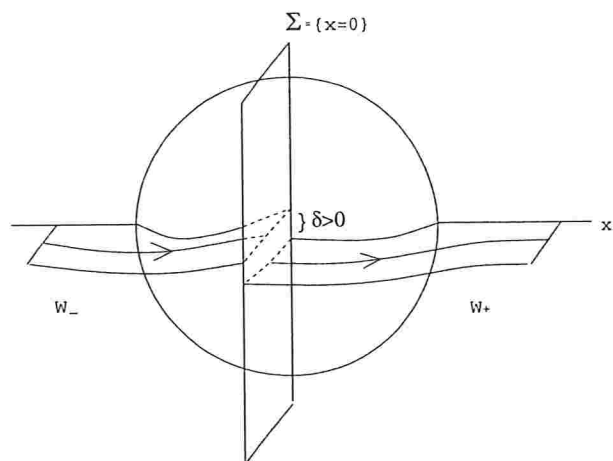


Figura 7.6: Transição Canard no caso (s,u).

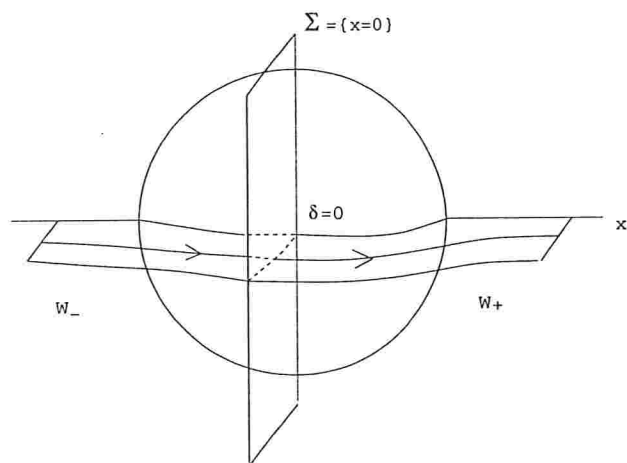


Figura 7.7: Superfície Canard no caso (s,u).

**Observação 7.2.4** No caso linear  $Q_0 = 0$ , observemos que

- Nos casos  $(s, s)$ ,  $(u, u)$ ,  $(u, s)$ , a Região Canard  $\mathcal{O}_{\bar{\Gamma}}$  existe para uma arbitrária escolha das constantes  $\{m, r, k_i, l_j\}$ ; com  $m, r$  suficientemente pequenos.
- No caso  $(s, u)$ , a expressão da função distância  $\delta(A, B)$  sobre o divisor excepcional  $D_0 = \{\varepsilon = A_r = 0\}$  é dada por

$$\delta(A, B) = [C_s(B) + (-1)^s C_s(\bar{B})]A_s + \sum_{k=0, k \neq s}^{2p-1} [C_k(B) + (-1)^k C_k(\bar{B})]A_k.$$

De onde pelo teorema da função implícita fica definida a função

$$A_s = a_s(\varepsilon, \hat{A}, B, A_r)$$

dada no teorema anterior, que tem a seguinte expressão

$$a_s|_{D_0} = \frac{-1}{C_s(B) + (-1)^s C_s(\bar{B})} \sum_{k=0, k \neq s}^{2p-1} [C_k(B) + (-1)^k C_k(\bar{B})]A_k.$$

E em particular para  $s$  par e  $B = \bar{B} = 0$  temos

$$a_s|_{D_0} = \frac{-1}{c_s(B_0)} \sum_{k=0, k \neq s}^{2p-1} c_k(B_0)A_k.$$

### 7.3 Conclusões

1. Se o conjunto de singularidades degeneradas  $Deg(X)$  para o campo  $X$ , satisfaz à Hipótese de Transversalidade (HT), então existem Superfícies Canard sobre  $Deg(X) \subset \Gamma$ . Sendo  $X$  o campo de vetores

$$X(x, y) = yf(x, y) \frac{\partial}{\partial y} \in \mathcal{X}^w(\mathbb{R}^2, 0).$$

E  $f(x, y)$  não divisível por  $y$ .

2. A existência das Superfícies Canard para campos dados acima, é mostrada usando a Teoria Geométrica das Perturbações Singulares (TGPS), a qual constitui a técnica principal neste trabalho para dar solução ao Problema Canard local (PCL).

3. O uso da aplicação Blowing-up  $\Phi$ , constitui de fato uma ferramenta nova e de força relevante na pesquisa atual no meio matemático. Em particular o uso desta ferramenta em nosso trabalho (PCL) teve principal importância no estudo das Superfícies Canard para classes de campos de vetores dados acima.

# Apêndice 1

## 7.4 Cálculo Assintótico

Provaremos propriedades assintóticas sobre algumas funções conhecidas e estudaremos a convergência de algumas integrais impróprias.

### 7.4.1 Escala de Comparação

Uma vizinhança de  $+\infty$  (resp. de  $-\infty$ ) é um intervalo da forma  $[A, +\infty)$  (resp.  $(-\infty, A]$ ), para alguma constante  $A > 0$ . Temos por objetivo o estudo de funções contínuas  $f$  numa vizinhança de  $+\infty$ ; para isto será preciso considerar o conjunto  $\mathcal{E}$ , que chamaremos *Escala de Comparação* o qual esta constituído por funções de um dos seguintes tipos:

$$1, \quad x^\alpha (\alpha \neq 0), \quad (\log(x))^\beta (\beta \neq 0), \quad e^{cx^\gamma} (c \neq 0, \gamma > 0)$$

assim como também os produtos delas, tais como

$$g(x) = x^\alpha (\log(x))^\beta e^{cx^\gamma}, \quad \alpha, \beta, c, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Este conjunto  $\mathcal{E}$  satisfaz a seguintes propriedades:

- (i)  $g > 0$ , numa vizinhança de  $+\infty$ , para cada  $g \in \mathcal{E}$ ,
- (ii)  $g = 1$ , ou  $g \rightarrow 0$ , ou  $g \rightarrow \infty$ , quando  $x \rightarrow \infty$ , para cada  $g \in \mathcal{E}$ ,
- (iii) Se  $h, g \in \mathcal{E}$ , então  $hg \in \mathcal{E}$  e  $h/g \in \mathcal{E}$ .

Com estas considerações poderíamos encontrar dois casos

1. Dada uma função contínua  $f$ , poderíamos encontrar funções  $g \in \mathcal{E}$  conhecidas numa vizinhança de  $+\infty$  tal que  $f/g \rightarrow c (c \neq 0, \text{ finito})$ ,

quando  $x \rightarrow \infty$ .

Neste caso escreveremos

$$f \sim cg, \quad \text{ou} \quad f(x) \sim cg(x)$$

e chamaremos  $cg$  a *parte principal* de  $f$ ; no caso  $c = 1$ , diremos que  $f$  e  $g$  são equivalentes, ficando claro a transitividade de  $\sim$ .

2. Também poderíamos encontrar funções  $g \in \mathcal{E}$  conhecidas numa vizinhança de  $+\infty$  tal que  $f/g \rightarrow 0$  ou  $|f|/g \rightarrow \infty$ .

**Exemplo 7.4.1**  $x + \frac{1}{2}\sin(\pi x) \sim x$ .

Para abreviar expressões numa vizinhança de  $+\infty$ , introduzimos notações devidas a Landau, relativas a  $\mathcal{E}$ .

**Definição 7.4.2** Dada uma função contínua  $f$  numa vizinhança de  $+\infty$ , e  $g \in \mathcal{E}$ .

- (i) Se  $|f|/g$  é majorada por uma constante finita e diferente de zero, numa vizinhança de  $+\infty$  escreveremos

$$f = O(g).$$

- (ii) Se  $f/g \rightarrow 0$ , quando  $x \rightarrow +\infty$ , escreveremos

$$f = o(g).$$

**Observação 7.4.3** - Os casos particulares,  $f = O(1)$  e  $f = o(1)$  são obviamente entendidos,

$$- f \sim cg \iff f = cg + o(g) \quad \text{ou} \quad f - cg = o(g).$$

**Exemplo 7.4.4**  $x\sin(x) = O(x)$ ,  $xe^{-x} = o(x)$

Algumas propriedades relativas a  $\mathcal{E}$ :

1. Se  $f = O(g)$  e  $g = O(h)$ , então  $f = O(h)$ ;  
Se  $f = o(g)$  e  $g = O(h)$ , então  $f = o(h)$ .
2.  $O(g) + O(g) = O(g)$ ,  $c.O(g) = O(g)$ ;  
 $o(g) + o(g) = o(g)$ ,  $c.o(g) = o(g)$ .

$$3. O(g_1)O(g_2) = O(g_1g_2), \quad o(g_1)O(g_2) = o(g_1g_2); \\ |O(g)|^\lambda = O(g^\lambda), \quad |o(g)|^\lambda = o(g^\lambda), \lambda > 0.$$

$$4. \text{ Se } f_1 \sim c_1g, \text{ e } f_2 \sim c_2g, (c_1, c_2 \neq 0), g \in \mathcal{E}, \text{ então} \\ (f_1 + f_2) \sim (c_1 + c_2)g, \quad c_1 + c_2 \neq 0; \\ f_1 + f_2 = o(g), \quad c_1 + c_2 = 0.$$

$$5. \text{ Se } f_1 \sim c_1g_1, \text{ e } f_2 \sim c_2g_2, (c_1, c_2 \neq 0), g_1, g_2 \in \mathcal{E}, \text{ então} \\ (f_1f_2) \sim (c_1c_2)(g_1g_2), \quad f_1/f_2 \sim (c_1/c_2)(g_1/g_2) \\ f^\lambda \sim c^\lambda g^\lambda, \quad (c > 0, \lambda > 0).$$

$$6. \text{ Se } f = o(g), \text{ e } g \longrightarrow +\infty, \text{ quando } x \longrightarrow +\infty, \text{ então para cada } \delta > 0$$

$$\exp(-\delta g) = o(\exp(f)), \quad \exp(f) = o(\exp(\delta g))$$

7. A relação  $f \sim g$  ou  $f = o(g)$  é de equivalência e constitui uma ordem total em  $\mathcal{E}$ .

#### 7.4.2 Convergência de Integrais Impróprias relativas a $\mathcal{E}$

Para uma função contínua  $f(> 0)$  sobre  $[a, +\infty)$ , temos que para cada  $x > a$ , podemos escrever

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$$

onde

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

é tal que:

(i)  $F$  é monótona crescente;

(ii)  $F'(x) = f(x)$ .

E portanto  $\int_a^{+\infty} f(t)dt$  sempre existe. Tal integral é finita se e só se  $F$  é limitada superiormente.

Dos exemplos seguintes

$$\begin{aligned}\int_a^x t^\alpha dt &= \frac{1}{\alpha+1}(x^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}), \alpha \neq -1; \\ \int_a^x t^{-1} dt &= \log(x) - \log(a); \\ \int_a^x t^{-1}(\log(t))^\beta dt &= \frac{1}{\beta+1}(\log(x))^{\beta+1} - (\log(a))^{\beta+1}, \beta \neq -1; \\ \int_a^x t^{-1}(\log(t))^{-1} dt &= \log(\log x) - \log(\log a); \\ \int_a^\infty e^{ct^\gamma} dt &< \infty \text{ se } c < 0 (> \infty \text{ se } c > 0); \end{aligned}$$

obtemos os seguintes critérios de convergência :

- (i) Se  $f(x) = O(x^\alpha(\log x)^\beta)$ , com  $\alpha \leq -1$ , e  $\beta < -1$ , então a integral  $\int_a^\infty f(t)dt$  é finita.
- (ii) Se  $f(x) \geq x^\alpha(\log x)^\beta$ , com  $\alpha \geq -1$ , e  $\beta \geq -1$ , então a integral  $\int_a^\infty f(t)dt$  é infinita.
- (iii) Se  $f(x) = O(e^{ct^\gamma})$ ,  $c < 0$ , então  $\int_a^\infty f(t)dt$  é finita;  
Se  $f(x) \geq e^{ct^\gamma}$ ,  $c > 0$ , então  $\int_a^\infty f(t)dt$  é infinita.

**Exemplo 7.4.5** Para a função  $f(t) = t^{x-1}e^{-t}$ , a integral imprópria  $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ , é finita para cada  $x$  real, pois  $f \in \mathcal{E}$  e  $e^{-t} \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$ .

Analogamente para integrais de funções sobre  $(a, b]$

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{a+h}^b f(t)dt.$$

Se o limite existir será chamada integral imprópria de  $f$  em  $a$ .

**Exemplo 7.4.6** Para a função  $f(t) = t^{x-1}e^{-t}$ , a integral imprópria em 0

$$\int_0^1 f(t)dt \sim \int_0^1 t^{x-1} dt = \lim_{h \rightarrow 0} \int_h^1 t^{x-1} dt = \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{h^x}{x} \right)$$

é finita se  $x > 0$ .



para  $x > 0$ , a integral

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

é finita. E conseqüentemente também a integral

$$\int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-ct^\beta} dt, \quad c > 0, \quad \beta \neq 0, \alpha \in \mathbf{N}$$

a qual, é igual a:

$$(\beta c^{\frac{\alpha+1}{\beta}})^{-1} \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right).$$

**Proposição 7.4.7** *Sejam  $f, g$  duas funções contínuas por partes em  $[a, +\infty)$  e  $g > 0$  sobre  $[a, +\infty)$ . Então*

(a) *Se  $\int_a^{+\infty} g(t) dt = +\infty$ , então numa vizinhança de  $+\infty$ :*

a.1) *Se  $f = O(g)$ , então  $\int_a^x f(t) dt = O(\int_a^x g(t) dt)$ ;*

a.2) *Se  $f = o(g)$ , então  $\int_a^x f(t) dt = o(\int_a^x g(t) dt)$ ;*

a.3) *Se  $f \sim cg$  ( $c \neq 0$ , constante), então  $\int_a^x f(t) dt \sim c \int_a^x g(t) dt$ .*

(b) *Se  $\int_a^{+\infty} g(t) dt$  é finita, então numa vizinhança de  $+\infty$ :*

b.1) *Se  $f = O(g)$ , então  $\int_x^{+\infty} f(t) dt = O(\int_x^{+\infty} g(t) dt)$ ;*

b.2) *Se  $f = o(g)$ , então  $\int_x^{+\infty} f(t) dt = o(\int_x^{+\infty} g(t) dt)$ ;*

b.3) *Se  $f \sim cg$  ( $c \neq 0$ , constante), então  $\int_x^{+\infty} f(t) dt \sim c \int_x^{+\infty} g(t) dt$ .*

#### DEMONSTRAÇÃO

b.2)  $f = o(g)$  então, para cada  $\varepsilon > 0$ , existe  $x_0 = x_0(\varepsilon) > a$  tal que para  $x \geq x_0$ ,  $|f(x)| \leq \varepsilon g(x)$ . Logo do teorema do valor médio.

$$\left| \int_{x_0}^x f(t) dt \right| \leq \varepsilon \int_{x_0}^x g(t) dt$$

Como  $\int_a^x g(t)dt$  é finita, então  $\int_{x_0}^x g(t)dt$  é também finita quando  $x \rightarrow +\infty$ . Assim para  $x \geq x_0$ :

$$\begin{aligned} \left| \int_x^{+\infty} f(t)dt \right| &= \left| \int_{x_0}^{+\infty} f(t)dt - \int_{x_0}^x f(t)dt \right| \\ &\leq \lim_{b \rightarrow +\infty} \left| \int_{x_0}^b f(t)dt \right| + \left| \int_{x_0}^x f(t)dt \right| \\ &\leq \varepsilon \left( \lim_{b \rightarrow +\infty} \left| \int_{x_0}^b g(t)dt + \int_x^{x_0} -g(t)dt \right| \right) \\ &\leq \varepsilon \left( \int_{x_0}^{+\infty} g(t)dt + \int_x^{x_0} g(t)dt \right) \\ &= \varepsilon \int_x^{+\infty} g(t)dt. \end{aligned}$$

b.1) É análogo

b.3) Como  $f \sim cg$  é equivalente a  $f - cg = o(g)$ , temos por (b.2) que (b.3) é verdadeiro.

□

**Observação 7.4.8** Seja  $g > 0$ , continuamente diferenciável,  $\frac{1}{x} = o\left(\left|\frac{g'(x)}{g(x)}\right|\right)$ , e suponha que  $g'(x)$  não muda de sinal numa vizinhança de  $+\infty$ .

(i) Se  $g'(x) > 0$  então  $g/g'$  está definida numa vizinhança de  $+\infty$ . Da proposição anterior, a hipótese implica que

$$\log(x) = o(\log(|g(x)|))$$

Como  $g > 0$  e  $g' > 0$ ,  $g(x) \rightarrow +\infty$ , logo  $\log(|g(x)|) \rightarrow +\infty$ , numa vizinhança de  $+\infty$ ; assim pela observação 6 da seção anterior, existe  $\alpha > 0$  tal que

$$e^{-\alpha \log(|g(x)|)} = o(e^{\log(x)}), \quad e^{\log(x)} = o(e^{\alpha \log(|g(x)|)}).$$

Assim vale a relação

$$x^{1/\alpha} = o(g(x)), \quad 1/\alpha > 0,$$

e a integral  $\int_a^{+\infty} g(t)dt$  é infinita.

(ii) Se  $g'(x) < 0$ , a condição  $\frac{1}{x} = o(-\frac{g'(x)}{g(x)})$ , implica imediatamente (pela proposição anterior) que

$$\log(x) = o(\log(\frac{1}{g(x)}))$$

como  $g' < 0$  e  $g > 0$ ,  $\log(\frac{1}{g(x)}) \rightarrow +\infty$ ,  $x \rightarrow +\infty$ . Analogamente existe  $\beta > 0$ , tal que numa vizinhança de  $+\infty$ , temos

$$e^{-\beta \log(1/g(x))} = o(e^{\log(x)}), \quad e^{\log(x)} = o(e^{\beta \log(1/g(x))}),$$

e vale a relação

$$g(x) = o(x^{-1/\beta}), \quad 1/\beta > 0,$$

de onde a integral  $\int_a^{+\infty} g(t)dt$  é finita.

(iii) Se  $h'(x) = o(1)$ , a proposição anterior implica que  $h(x) = o(x)$ .

**Proposição 7.4.9** Nas condições da observação anterior para  $g(x)$  e  $g'(x)$ ; suponha que  $h(x) = \frac{g(x)}{g'(x)}$  é continuamente diferenciável na vizinhança de  $+\infty$  e satisfaz  $h'(x) = o(1)$ . Então

(i) Se  $g'(x) > 0$  numa vizinhança de  $+\infty$ , a integral  $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ , é infinita e

$$\int_a^x g(t)dt \sim \frac{(g(x))^2}{g'(x)}.$$

(ii) Se  $g'(x) < 0$  numa vizinhança de  $+\infty$ , a integral  $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ , é finita e

$$\int_x^{+\infty} g(t)dt \sim \frac{(g(x))^2}{|g'(x)|}.$$

#### DEMONSTRAÇÃO

(ii) Como  $g'(x) < 0$  e  $h'(x) = o(1)$ , da observação anterior temos que a integral  $\int_a^{+\infty} g(t)dt$  é finita e

$$\int_x^{+\infty} g(t)dt \sim \int_a^{+\infty} (1 + h'(t))g(t).$$

Integrando por partes, esta última integral é igual a

$$\begin{aligned} &= \lim_{b \rightarrow +\infty} (b \cdot g(b) \cdot \frac{h(b)}{b}) - g(x)h(x) \\ &= \frac{(g(x))^2}{-g'(x)} \\ &= \frac{(g(x))^2}{|g'(x)|} \end{aligned}$$

(i) É similar. □

**Exemplo 7.4.10** 1) Na integral  $\int_x^{+\infty} e^{-t^2}$ , as funções  $g(t) = e^{-t^2}$ ,  $g'(t) = -2te^{-t^2}$ ,  $h(t) = -1/2t$ , e  $h'(t) = 1/2t^2$ , satisfazem as hipóteses da proposição; logo vale a relação

$$\int_x^{+\infty} e^{-t^2} \sim \frac{e^{-x^2}}{2x}.$$

2) Na integral  $\int_x^{+\infty} t^q e^{-ct^p} dt$ , ( $c > 0$ ), as funções  $g(x) = x^q e^{-cx^p}$ ,  $g'(x) = g(x)(qx^{-1} - cpx^{p-1})$ ,  $h(x) = \frac{1}{qx^{-1} - cpx^{p-1}}$  e  $h'(x) = \frac{q+cp(p-1)x^p}{(q-cpx^p)^2}$ ; satisfazem as hipóteses da proposição; assim como  $\frac{1}{x} = o(1)$ , vale a relação

$$\begin{aligned} \int_x^{+\infty} t^q e^{-ct^p} dt &\sim \frac{g(x)^2}{g'(x)} \\ &= \frac{g(x)^2}{|g(x)(qx^{-1} - cpx^{p-1})|} \\ &= \frac{g(x)}{|qx^{-1} - cpx^{p-1}|} \\ &\sim \frac{g(x)}{|-cpx^{p-1}|} \\ &= \frac{x^q e^{-cx^p}}{|(-cx^p)'|}. \end{aligned}$$

#### Observação 7.4.11

- Uma opção alternativa no último exemplo seria usar integração por partes várias vezes no segundo termo da igualdade:

$$\int_x^{+\infty} t^q e^{-ct^p} dt = \frac{x^q e^{-cx^p}}{cpx^{p-1}} - \int_x^{+\infty} e^{-ct^p} d\left(\frac{t^q}{-cpt^{p-1}}\right)$$

diminuindo as potências  $x^q$ , e comprovando que

$$\int_x^{+\infty} e^{-ct^p} d\left(\frac{t^q}{-cpt^{p-1}}\right) = o\left(\frac{x^q e^{-cx^p}}{cpx^{p-1}}\right)$$

- Para  $g(x) = x^q e^{P(x)}$ , onde  $P(x) = c_1 x^{p_1} + c_2 x^{p_2} + \dots + c_k x^{p_k}$ , com  $c_1 < 0$ ,  $p_1 > p_2 > \dots > p_k$ , vale a relação

$$\int_x^{+\infty} t^q e^{P(t)} dt \sim \frac{x^q e^{P(x)}}{|P'(x)|}$$

## 7.5 Equações Diferenciais

Veremos alguns conceitos elementares da teoria das equações diferenciais ordinárias com a finalidade de simplificar o desenvolvimento do trabalho. Seja  $I = I(t_0, y_0) \subseteq \mathbb{R}$  um intervalo e  $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  um conjunto aberto; consideremos a matriz real  $A(t) \in M(n \times n)$  contínua e definida em  $t \in I$ . Em geral estaremos interessados em estudar equações diferenciais da forma

$$y' = A(t)y + N(t, y)$$

onde  $N(t, y)$  é uma função contínua sobre  $\Omega$ .

É conhecido que se  $N(t, y) = D(t)$  é um vetor de  $M(n \times 1)$ , para cada  $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^n$  existe uma única solução  $\varphi(t) = \varphi(t, t_0, y_0)$ , definida em  $I$ , do problema de Cauchy  $y' = A(t)y + D(t)$ ,  $y(t_0) = y_0$ .

Vejam outras propriedades destas soluções

**Lema 7.5.1** *Sejam,  $\Phi(t), \Psi(t)$  soluções fundamentais da equação diferencial  $y' = A(t)y$ . Então existe uma matriz constante não singular  $C$ , tal que  $\Psi(t) = \Phi(t)C$ .*

DEMONSTRAÇÃO

Esta propriedade decorre trivialmente da igualdade  $(\Psi(t)^{-1}\Phi(t))' = 0$ . □

Neste caso uma solução fundamental é escrita como  $\exp(\int_{t_0}^t A(\tau)d\tau)$ .

**Lema 7.5.2** *Sejam,  $\Phi(t)$  uma solução fundamental da equação diferencial  $y' = A(t)y$ . Então a solução  $\varphi(t) = \varphi(t, t_0, x_0)$ , do problema de Cauchy*

$$y' = A(t)y + D(t), \quad y(t_0) = y_0$$

*é dada pela fórmula*

$$\varphi(t, t_0, x_0) = \Phi(t) \left\{ \Phi^{-1}(t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau)D(\tau)d\tau \right\}.$$

DEMONSTRAÇÃO

Pelo lema anterior, podemos colocar  $\varphi(t) = \Phi(t)C(t)$ ; a substituição desta igualdade na equação não homogênea implica resolver o problema de Cauchy

$$C'(t) = \Phi^{-1}(t)D(t), \quad C(t_0) = \Phi^{-1}(t_0)x_0$$

De onde decorre a demonstração. □

**Exemplo 7.5.3** Para funções contínuas  $p(x), q(x)$  de valor real, definidas sobre  $I(x_0, y_0) \subseteq \mathbb{R}$ ; considere o problema de Cauchy

$$\mathbf{B}(m) = \begin{cases} y' = p(x)y + q(x)y^m, & m \in \mathbf{N} \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Tomando  $z = y^{1-m}$ , este problema é equivalente a

$$\begin{cases} z' = (1-m)p(x)z + (1-m)q(x), & m \in \mathbf{N} \\ z(x_0) = z_0 = y_0^{1-m} \end{cases}$$

Como  $\Phi(x) = \exp((1-m) \int_{x_0}^x p(t)dt)$ , é a solução fundamental de

$$z' = (1-m)p(x)z.$$

Então usando os lemas anteriores temos que a solução de  $\mathbf{B}(m)$  é dada pela fórmula

$$y(x, x_0, y_0) = \left[ \frac{\Phi^{-1}(x)}{\frac{1}{y_0^{m-1}} + (1-m) \int_{x_0}^x \Phi^{-1}(t)q(t)dt} \right]^{\frac{1}{m-1}}.$$

Em particular se por exemplo  $p(x) = \sum_{l=0}^N c_l x^l$  e  $q(x) = \sum_{k=0}^M d_k x^k$ , são dois polinômios reais, então teríamos

$$y(x, x_0, y_0) = \left[ \frac{\exp((m-1)P(x))}{\frac{1}{y_0^{m-1}} + (1-m) \sum_{k=0}^M d_k J_k(x)} \right]^{\frac{1}{m-1}}$$

onde

$$P(x) = \sum_{l=0}^N c_l \frac{x^{l+1}}{l+1} - \sum_{l=0}^N c_l \frac{x_0^{l+1}}{l+1}, \quad J_k(x) = \int_{x_0}^x t^k \exp((m-1)P(t))dt$$

---

# Bibliografia

- [AK] Al Kelley; The Stable, Center-Stable, Center, Center-Unstable, Unstable Manifolds; *Journal of Differential Equations* 3, 546-570(1967).
- [CLW] Shui Nee Chow, Chengzhi Li, Duo Wang; *Normal Forms and Bifurcation of Planar Vector Fields*; Cambridge University Press, 1994.
- [DP] Daniel Panazzolo; On the Existence of Canard Solutions; *Publicacions Matemàtiques*, Vol.44(2000), 503-592.
- [FD] Freddy Dumortier; Singularities of Vector Fields on the Plane; *Journal of Differential Equations* 23, 53-106(1977).
- [FDR1] F.Dumortier, R.Roussarie; Geometric singular perturbation theory beyond normal hyperbolicity; *Prepublication ou Rapport de Recherche*, no 163(1998), France.
- [FDR2] Freddy Dumortier, Robert Roussarie; Canard Cycles and Center Manifold; *Mem. Amer. Math. Soc.*, 121(577)(1996).
- [HW] H.Whitney; Analytic Extensions of Differentiable Functions Defined in Closet Sets; *Trans. Amer. Soc.*, 36(1)(1934), 63-89.
- [JD] Jean Dieudonné; *Infinitesimal Calculus*; Hermann Paris, 1971.
- [JS] Jan Sijbrand; Properties of Center Manifolds; *Trans. Amer. Math. Soc.*, 289(2)(1985), 431-469.
- [KS] M Krupa and P Szmolyan; Extending Slow Manifolds near Transcritical and Pitchfork Singularities; *Nonlinearity* 14(2001) 1473-1491.
- [M] Bernard Malgrange; *Ideals of Differentiable Functions*; Tata Institute of Fundamental Research, Oxford University Press, Bombay(India), 1966.

- [NF] Neil Fenichel; Geometric Singular Perturbation theory for Ordinary Differential Equation; *Journal of Differential Equations*, 31, 53-98(1979).
- [S] Sotomayor J.; *Lições de Equações Diferenciais Ordinarias*; Projeto Euclides IMPA, 1979.
- [T] Floris Takens; Singularities of Vector Fields; *Institut des Hautes Études Scientifiques*; *Publications Mathématiques*, No 43(47-100), 1974.
- [WE] Wiktor Eckhaus; Relaxation Oscillations Including a Standar Chase on French Ducks; In *Asymptotic Analysis II*, Springer Lect. Notes in Math. 985, 449-494, 1983.