Espaços de Banach hereditariamente finitamente decomponíveis

Julio Pereira Neto

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DE GRAU
DE
MESTRE EM MATEMÁTICA

Área de Concentração : **Análise**
Orientador : **Prof. Dr. Elói Medina Galego**

SÃO PAULO - MARÇO - 2006

Espaços de Banach hereditariamente finitamente decomponíveis

Este exemplar corresponde a redação
final da dissertação devidamente
corrigida e defendida por
Julio Pereira Neto
e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, março de 2006

Banca examinadora :

- Prof. Dr. Elói Medina Galego (Orientador) - IME - USP
- Prof. Dr. Chaim Samuel Hönig - IME - USP
- Prof. Dr. Raymundo Luiz Alencar - ITA

AGRADECIMENTOS

- Ao Prof. Elói Medina Galego, não só pela sua paciente orientação, como também pelo incentivo e força nos momentos em que mais precisei.

- A minha esposa Erika e meus filhos Julio e Luis pela compreensão, paciência e amor durante todos os momentos em que estava realizando o trabalho.

- Aos meus pais e irmãs.

- Ao Prof. Valentin Ferenczi pelas dúvidas esclarecidas.

- Ao Carlos pelo apoio com o editor de texto.

- A todos aqueles que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

- Ao Senhor, por ter me dado paz e saúde para trilhar essa caminhada.

Resumo

O objetivo desse trabalho é apresentar algumas propriedades e resultados sobre ESPAÇOS DE BANACH HEREDITARIAMENTE FINITAMENTE DECOMPONÍVEIS, introduzido por V. Ferenczi em 1997. Estudaremos suas ligações com espaços de Banach hereditariamente indecomponíveis. Em particular, mostraremos que em um espaço de Banach sobre os reais hereditariamente indecomponível, o quociente do espaço de operadores por espaço de operadores estritamente singulares é um anel de divisão isomorfo ou aos reais, ou aos complexos, ou ao anel de divisão dos quatérnios.

Todos esses resultados foram provados também por V. Ferenczi e publicados em Studia Math. 123 (2) (1997) 135-149.

Abstract

The aim of this work is to present some properties and results about HEREDITARILY FINITELY DECOMPOSABLE BANACH SPACES, introduced by V. Ferenczi in 1997. We will study their links with hereditarily indecomposable Banach spaces. In particular, we will show that in a real hereditarily indecomposable Banach space, the quotient of the space of operators by the space of strictly singular operators is a division ring isomorphic either to real, complex, or the quaternionic division ring.

All these results were proved by V.Ferenczi and published in Studia Math. 123 (2) (1997) 135-149.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Abaixo apresentamos a motivação para se estudar em detalhes o artigo *"Hereditarily finitely decomposable Banach spaces"*. Studia Math. 123(2) 1997 do Prof. *Valentin Ferenczi* que será o tema principal da dissertação em questão.

DEFINIÇÃO 1. Seja X um espaço de Banach. Uma sequência $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos em X é uma *base de Schauder* para X se para todo $x \in X$, existe uma única sequência de escalares $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \lambda_i \cdot e_i$.

Um problema que ficou em aberto durante anos é o seguinte :

PROBLEMA 2. Todo espaço de Banach separável tem uma base de Shauder?

Este problema foi resolvido negativamente por *Enflo* em 1973 ([2]). *Mazur*, no entanto, já havia provado o seguinte :

TEOREMA 3. Todo espaço de Banach de dimensão infinita tem um subespaço de dimensão infinita possuindo uma base de Shauder.

Agora, lembrando a definição abaixo,

DEFINIÇÃO 4. Uma base de Schauder $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de um espaço de Banach é *incondicional* se existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $\|\sum\limits_{i\in E} \lambda_i \cdot e_i\| \leq C\|\sum\limits_{i=1}^{\infty} \lambda_i \cdot e_i\|$, $\forall E$ finito, $E \subset \mathbb{N}$ e $\forall \lambda_i \in \mathbb{K}$.

Segue naturalmente, tendo em mente o Problema 2 e o Teorema 3, o seguinte problema :

PROBLEMA 5. Todo espaço de Banach de dimensão infinita possui um subespaço de dimensão infinita com base incondicional ?

Este problema só foi resolvido negativamente em 1993 ([9]) por *W. T. Gowers* e *B. Maurey*. Ao resolverem o Problema 5, esses matemáticos também contribuíram para a resolução do seguinte problema que estava em aberto desde 1968:

PROBLEMA 6. Existe espaço de Banach que seja indecomponível ?

Lembremos que um espaço de Banach X é *indecomponível* se ele não pode ser escrito como soma direta de dois de seus subespaços de dimensão infinita.

Eles deram, na verdade, a seguinte definição :

DEFINIÇÃO 7. Um espaço de Banach X é *hereditariamente indecomponível* ($H.I.$) se nenhum subespaço de X é soma direta de dois subespaços de dimensão infinita.

E provaram,

TEOREMA 8. Existe um espaço $H.I.$

Ainda mais, o próprio *W.T.Gowers* ([8]) provou o seguinte teorema de dicotomia em espaços de Banach:

TEOREMA 9. Seja X um espaço de Banach. Então X contém um subespaço com base incondicional ou X contém um subespaço $H.I.$

A partir desse resultado os espaços $H.I.$ começaram a desempenhar um papel importante na geometria de espaços de Banach.

Um dos objetivos desta dissertação é mostrar que o seguinte resultado de *W.T.Gowers* e *B.Maurey* ([9]) sobre espaços $H.I.$ não caracteriza esses espaços.

TEOREMA 10. Seja X um espaço $H.I.$ Então X não tem nenhum subespaço com base incondicional.

Para mostrarmos que existem espaços de Banach que não são $H.I.$ e satisfazem a tese do Teorema 10, estudaremos os espaços HD_n introduzidos em 1997 por *V. Ferenczi* no Artigo ([4]).

DEFINIÇÃO 11. Seja X um espaço de Banach e $n \in \mathbb{N}^*$. Dizemos que X é HD_n se contém um número máximo de n subespaços de dimensão infinita que formam uma soma direta e finita em X.

Segue das Definições 7 e 11, que um espaço de Banach é $H.I.$, se, e somente se, é HD_1. Mostraremos que a soma direta finita de espaços $H.I.$ é um espaço HD_n, quando se tem $n-$somandos (Corolário 3.2.3).

Pois bem, os principais resultados ([4]) que apresentaremos em detalhes nesta dissertação são:

TEOREMA 12. (veja respectivamente Teorema 3.3.1 e Teorema 5.1.2) Seja X um espaço HD_n. Então,

(i) X não contém nenhum subespaço de dimensão infinita com base incondicional;

(ii) para $X = \bigoplus_{i=1}^{n} X_i$ um espaço HD_n fundamental sobre os complexos temos que todo operador de Y, subespaço de dimensão infinita de X, tem a forma $\sum_{i \simeq j} \lambda_{ij} p_{ij} + S$ onde λ_{ij} é uma constante, p_{ij} é uma projeção e S é estritamente singular.

Indicando por $L(X)$ o conjunto dos operadores lineares em X e por $S(X)$ o conjunto dos operadores estritamente singulares em X foi provado :

TEOREMA 13. (veja Teorema 5.2.1) Se X é um espaço HD_n sobre os números complexos, então $\dim(L(X)/S(X)) \leq n^2$.

E também, o Teorema Principal,

TEOREMA 14. (veja Teorema 7.1.1) Se X é um espaço de Banach $H.I.$ sobre os números reais então $L(X)/S(X)$ é um anel de divisão isomorfo a $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ou ao anel dos quatérnios.

PRELIMINARES

1.1 Notações

Denotaremos por $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos, $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais, $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais, $\mathbb{R}_+$ o conjunto dos números reais não negativos, $\mathbb{R}_+^*$ o conjunto dos números reais estritamente positivos, $\mathbb{H}$ o anel de divisão dos quatérnios, e $\mathbb{K}$ os corpos $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Denotaremos por $\overline{\mathbb{A}}$ o fecho do conjunto $\mathbb{A}$ qualquer. vspace-0.2 cm

O símbolo ■ denota o fim de uma demonstração, e σ o vetor nulo de um espaço.

A menos que mencionemos ao contrário, todos os espaços e subespaços de Banach considerados nesta dissertação serão de dimensão infinita e fechado. A dimensão de um espaço de Banach X será denotada por $\dim(X)$.

Sejam X e Y espaços normados. $L(X,Y)$ denotará o espaço de Banach dos operadores lineares contínuos de X em Y com a norma $\|T\| = sup\{\|T(x)\| : \|x\| \leq 1\}$. Lembremos que um operador linear T é contínuo se, e somente se, existe $M > 0$ tal que $\|T(x)\| \leq M\|x\|$, $\forall x \in X$. Denotaremos por $D(T)$ o domínio do operador T, por $Im(T)$ a imagem do operador T, isto é, $Im(T) = \{T(x) : x \in X\}$ e por $Ker(T)$, o Kernel desse operador, ou seja, $Ker(T) = \{x \in X : T(x) = \sigma\}$. Se $Y = X$, então denotaremos $L(X,Y) = L(X)$.

Sejam X um espaço de Banach e E um subespaço de X. Denotaremos por Id, o operador identidade $Id : X \to X$ definido por $Id(x) = x, \forall x \in X$, e por $I_{E,X}$, a inclusão canônica de E em X definida por $I_{E,X}(e) = e$, $\forall e \in E$. Também denotaremos por O, o operador nulo $O : X \to X$ definido por $O(x) = \sigma$, $\forall x \in X$.

Um operador linear $T : X \to Y$ é um isomorfismo se, se somente se, existirem M e N números reais positivos tais que $N\|x\| \leq \|T(x)\| \leq M\|x\|$, $\forall x \in X$. Nesse caso, dizemos que X e Y são isomorfos e denotaremos $X \simeq Y$.

Dada uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em um espaço de Banach, usaremos a notação $x_n \to x$ para denotar que a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para x quando $n \to \infty$.

As demais notações serão indicadas no decorrer das definições e resultados desse e dos demais capítulos.

1.2 Definições e resultados

A seguir apresentaremos algumas definições e resultados básicos envolvendo ***espaços de Banach***.

Definição 1.2.1 *Seja X um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$, a aplicação $p : X \to \mathbb{R}_+$ é uma semi-norma sobre X se :*

- $p(\lambda x) = |\lambda| \cdot p(x),\ \forall x \in X, \forall \lambda \in \mathbb{K}$;
- $p(x+y) \leq p(x) + p(y)\ , \forall x, y \in X$;

Se $p(x) = 0$ implicar $x = 0$, então p é uma norma em X.

Definição 1.2.2 *Um espaço X é um espaço de Banach se :*

- *X é um espaço vetorial.*
- *X é normado.*
- *X é completo em relação a essa norma.*

Definição 1.2.3 *Sendo X e Y espaços de Banach, definimos a soma direta externa de X com Y por $X \oplus Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$.*

Observação 1.2.4 *A aplicação $\|\cdot\|_\infty : X \oplus Y \to \mathbb{R}_+$ definida abaixo é uma norma em $X \oplus Y$.*

$$\|(x, y)\|_\infty = \text{máx}\{\|x\|, \|y\|\}$$

Proposição 1.2.5 *Denotando por $X \overset{\oplus}{\underset{\infty}{}} Y$ o espaço $X \oplus Y$ da definição 1.2.3 com a norma definida na observação 1.2.4 temos que $X \overset{\oplus}{\underset{\infty}{}} Y$ é um espaço de Banach.*

Prova : verificação imediata

Proposição 1.2.6 *A soma de dois subespaços fechados de um espaço vetorial normado é fechado quando um dos subespaços é de dimensão finita.*

Prova: Sugerimos [7], pág.16.

Definição 1.2.7 *Sejam X um espaço de Banach e Y um subespaço de X. Dizemos que Y é complementado em X, se existe um subespaço vetorial W de X tal que :*

(i) $Y \cap W = \{\sigma\}$.

(ii) $\forall x \in X, \exists!\ y \in Y$ *e* $\exists!\ w \in W : x = y + w$.

(iii) A aplicação linear $p_1 : X \to Y$ *definida por* $p_1(x) = y$ *é contínua.*

(iv) A aplicação linear $p_2 : X \to W$ *definida por* $p_2(x) = w$ *é contínua.*

Observação 1.2.8 *Em relação a definição anterior ainda temos que :*

(i) Y *e* W *são chamados suplementares topológicos, e escrevemos* $X = Y \oplus W$.

(ii) p_1 *é chamada projeção de* X *sobre* Y *e vale:*
(a)$p_1^2 = p_1$ (b)$\|p_1\| \geq 1$ (c)$(Id - p_1)^2 = Id - p_1$

Proposição 1.2.9 *Se o subespaço (a princípio não fechado)* Y *é complementado em um espaço de Banach* X*, então* Y *é fechado.*

Prova : Seja Y o subespaço vetorial complementado do espaço de Banach X da hipótese. Logo, existe $p : X \to Y$, uma projeção sobre Y.

Seja $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de Y que converge para x. Se $p(y_n) \longrightarrow p(x)$ e $p(y_n) = y_n \longrightarrow x$, então $x = p(x)$. Logo, $x \in Y$. ∎

Proposição 1.2.10 *Sejam* X *um espaço de Banach e* M *um subespaço fechado de* X*. Então* M *é complementado em* X *se, e somente se , existe um subespaço fechado* N *de* X *tal que* $X = M \oplus N$.

Prova : Sugerimos [7], pág.48.

Definição 1.2.11 *Seja R um conjunto finito. Então, definimos por $|R|$ a cardinalidade de R.*

Definição 1.2.12 *Dados subespaços $(X_i)_{i \in R}$ de um espaço de Banach X, onde R é um conjunto finito de índices, definimos que a soma deles é direta se para todo i, a projeção p_i de $\sum_{i \in R} X_i$ para X_i é contínua. Nesse caso, a soma é denotada por $\oplus_{i \in R} X_i$ ou X_R e para todo operador T sobre X_R, vamos denotar $T_{|R}$ a restrição de T à X_R (se $R = \{i\}$, então escrevemos $T_{|i}$ para $T_{|_{\{i\}}}$). Considerando a soma direta X_R e dada outra soma direta X'_R, definimos que X'_R é menor do que X_R se existe uma permutação δ em R tal que para todo $i \in R$, $X'_i \subset X_{\delta(i)}$.*

Definição 1.2.13 *Dois espaços de Banach X e Y são totalmente incomparáveis se nenhum subespaço de X é isomorfo a algum subespaço de Y.*

Vejamos agora algumas definições e resultados sobre ***operadores***.

Definição 1.2.14 *Seja $T : X \longrightarrow Y$ um operador linear, onde X e Y são espaços vetoriais normados. O gráfico $G(T)$ de T é o subconjunto $\{(x, T(x) : x \in X\}$ de $X \oplus Y$. Se $G(T)$ é fechado em $X \oplus Y$ então T é dito um operador fechado.*

Observação 1.2.15 *Sejam X e Y espaços vetoriais normados e $T : X \longrightarrow Y$ um operador linear. Então, valem as seguintes afirmações:*

(i) *T é fechado se, e somente se, para qualquer sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em X, com $x_n \longrightarrow x$ e $T(x_n) \longrightarrow y \in Y$, temos que $y = T(x)$;*

(ii) *Se T é fechado e injetor então T^{-1} é fechado;*

(iii) *Se T é fechado então $Ker(T)$ é um subespaço fechado.*

Teorema 1.2.16 (Teorema da aplicação aberta) *Seja T uma aplicação linear contínua de um espaço de Banach X sobre um espaço de Banach Y. Para todo conjunto aberto $W \subset X$, $T(W)$ é aberto.*

Prova : Sugerimos [10], pág.245.

Corolário 1.2.17 *Sejam X e Y espaços de Banach e $T \in L(X,Y)$ bijetora. Então T é bicontínua, isto é, T^{-1} é contínua.*

Prova : Sugerimos [10], pág.245.

Teorema 1.2.18 (Teorema do gráfico fechado) *Sejam X e Y espaços de Banach e $T : X \to Y$ uma aplicação linear. Então, T é contínua se, e somente se, o seu gráfico é fechado.*

Prova : Sugerimos [10], pág. 251.

Corolário 1.2.19 *Sejam E um espaço de Banach, F um espaço normado e $B = \{f_\alpha : \alpha \in A\} \subset L(E,F)$ tal que para todo $x \in E$ tenhamos $\sup\{\|f_\alpha(x)\| : \alpha \in A\} < +\infty$. Então $\sup\{\|f_\alpha\| : \alpha \in A\} < +\infty$.*

Prova : Sugerimos.[10], pág.217.

Lema 1.2.20 *Sejam X e Y espaços de Banach e $T : D(T) \subset X \longrightarrow Y$ um operador fechado. Então T possui um operador inverso contínuo se, e somente se, T é injetor e possui uma imagem fechada.*

Prova : Sugerimos [13], pág.17.

Lema 1.2.21 *Sejam X e Y espaços de Banach seja $T : X \longrightarrow Y$ um operador fechado com imagem fechada. Se M é um subespaço (não necessariamente fechado) de X tal que*

$M + Ker(T)$ é fechado, então $T(M)$ é fechado. Em particular, se M é fechado e $Ker(T)$ é de dimensão finita, então $T(M)$ é fechado.

Prova : Sugerimos [13], pág. 25.

Lema 1.2.22 *Sejam X e Y espaços de Banach e V um subespaço de dimensão finita de $X \oplus Y$. Então $V = V_X \oplus V_Y$, onde V_X e V_Y são subespaços de dimensão finita de X e Y respectivamente.*

Prova: Imediata.

Lema 1.2.23 *Se V_1 e V_2 são dois subespaços fechados de um espaço de Banach X, de $dim(X/V_1) = dim(X/V_2) < \infty$ então existe um isomorfismo de X em X que leva V_1 sobre V_2 (o isomorfismo pode ser escolhido sendo o operador identidade sobre $V_1 \cap V_2$ desde que $dim[V_1/V_1 \cap V_2] < \infty$).*

Prova : Sugerimos [13], pág.59.

Proposição 1.2.24 *Todo subespaço de dimensão finita de um espaço linear normado é fechado.*

Prova : Sugerimos [7], pág. 16.

Proposição 1.2.25 *Sejam $X_1, X_2, \cdots, X_n$ subespaços do espaço de Banach X. Se $T : X_1 \underset{\infty}{\oplus} X_2 \underset{\infty}{\oplus} \cdots \underset{\infty}{\oplus} X_n \longrightarrow X_1 + X_2 + \cdots + X_n \subset X$ é um isomorfismo de $X_1 \underset{\infty}{\oplus} \cdots \underset{\infty}{\oplus} X_n$ sobre $X_1 + \cdots + X_n$, então $X_1 + \cdots + X_n$ é uma soma direta.*

Prova : Podemos afirmar que $X_1 \cap [X_2 + \cdots + X_n] = \{\sigma\}$ pois, se $x_1 = x_2 + \cdots + x_n$ e $x_1 \in X_1 \cap [X_2 + \cdots + X_n]$ então $x_1 - x_2 - \cdots - x_n = \sigma$. E, do isomorfismo temos que $(x_1, -x_2, \cdots, -x_n) = \sigma$.

Seja agora $p_1 : X_1 + \cdots + X_n \longrightarrow X_1$ tal que $p_1(X_1 + \cdots + X_n) = X_1$.

Seja $(X_1 + \cdots + X_n) \xrightarrow{T^{-1}} X_1 \underset{\infty}{\oplus} \cdots \underset{\infty}{\oplus} X_n \xrightarrow{Q_1} X_1$ tal que $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \longmapsto (x_1, x_2, \cdots, x_n) \longmapsto x_1$. Então $p_1(x_1 + \cdots + x_n) = Q \circ T^{-1}(x_1 + \cdots + x_n)$. Logo, p_1 é contínua, pois é uma composta das contínuas Q e T^{-1}.

■

Definição 1.2.26 *Uma cisão de um espaço métrico M é uma decomposição $M = A \cup B$, onde A e B são dois subconjuntos abertos disjuntos de M. A cisão $M = A \cup B$ diz-se trivial quando um dos abertos é vazio. Um espaço métrico M é dito conexo quando a única cisão possível de M é a trivial. Um caminho num espaço métrico M é uma aplicação contínua $f : [0,1] \longrightarrow M$. Os pontos $a = f(0)$ e $b = f(1)$ são os extremos do caminho f. Um espaço métrico M é dito conexo por caminhos se quaisquer dois pontos de M podem ser unidos por um caminho contido em M.*

1.3 Bases em espaços de dimensão infinita

Nesta seção daremos algumas definições e resultados sobre base em espaços de dimensão infinita. Detalhes sobre essas noções podem ser achados em [12].

Definição 1.3.1 *Num espaço de Banach de dimensão infinita X, uma sequência $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é dita ser uma base de Schauder se todo vetor x em X pode ser escrito unicamente na forma $x = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i e_i$, onde $\lambda_i' s$ são escalares (DEFINIÇÃO 1 da Introdução).*

Observação 1.3.2 *Nem todo espaço de Banach tem uma base de Schauder de acordo com o contra-exemplo de P. Enflo em 1973 ([2]).*

Observação 1.3.3 *Foi provado por Mazur que todo espaço de Banach de dimensão infinita tem um subespaço de diminsão infinita possuindo uma base de Schauder (TEOREMA 3 da Introdução).*

Defnição 1.3.4 *Num espaço de Banach de dimensão infinita X, uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é dita ser uma base incondicional se existe uma constante C tal que a desigualdade $\| \sum_{i\in E}\lambda_i x_i\| \leq C\cdot \| \sum_{i=0}^{\infty}\lambda_i x_i\|$, é satisfeita para todo subconjunto finito E de $\mathbb{N}$ e qualquer coeficiente λ_i (DEFINÇÃO 4 da Introdução).*

Observação 1.3.5 *Os espaços clássicos l_p para $p \geq 1$ contém uma base incondicional, enquanto L_1 não contém nenhuma.*

Definição 1.3.6 *Uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência básica (respectivamente uma sequência básica incondicional) se é uma base (respectivamente uma base incondicional) do subespaço fechado gerado por ela, isto é, por $[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]$.*

Proposição 1.3.7 *$(x_n)_n$ é base de Schauder de um espaço de Banach X, se e somente se,*

(i) $x_n \neq \sigma$, $\forall n \in \mathbb{N}$;

(ii) $\exists M \in \mathbb{R}_+^*$ *tal que* $\|\sum\limits_{i=1}^{m} a_i x_i\| \leq M\|\sum\limits_{i=1}^{n+p} a_i x_i\|$, $\forall n, p \in \mathbb{N}$;

(iii) $[(x_n)_n] = X$.

Prova : Sugerimos [12], pág. 2.

Proposição 1.3.8 *Seja X um espaço de Banach com base de Schauder $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Então os operadores $p_n : X \longrightarrow X$, $n \in \mathbb{N}$ definido por $p_n(\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i x_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i$ são projeções e* $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\|p_n\| < +\infty$

Prova : Segurimos (EM), pág. 47.

Definição 1.3.9 *Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma base de Schauder para o espaço de Banach X. Então $K = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\|p_n\|$ é chamada constante básica de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Proposição 1.3.10 *Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma base de Schauder normalizada de um espaço de Banach X, então para todo $x = \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ em X temos que $|a_n| \leq 2K\|x\|$, $\forall n \in \mathbb{N}$.*

Prova : Seja o natural fixado $n \in \mathbb{N}^*$. Então temos que $|a_n| = |a_n| \cdot \|x_n\| = \|a_n x_n\| = \|p_n(x) - p_{n-1}(x)\| \leq \|p_n(x)\| + \|p_{n-1}(x)\| = \|p_n\|\|x\| + \|p_{n-1}\|\|x\| \leq 2K\|x\|$. ■

Proposição 1.3.11 *Sejam Y um subespaço de dimensão infinita de um espaço de Banach X, e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ base de Schauder de X. Então para todo inteiro positivo p, existe $y \in Y$ com $\|y\| = 1$ e da forma $y = \sum\limits_{n=p+1}^{\infty} a_n x_n$.*

Prova : Sugerimos [6], pág. 52.

Lema 1.3.12 *Sejam W um subespaço de dimensão infinita de um espaço de Banach Z com base de Schauder $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Então para todo inteiro positivo p, o subespaço W_{p+1} de W cujos os elementos são da forma $\sum\limits_{i=p+1}^{\infty} a_i x_i$ para algumas sequências de escalares $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$, é de dimensão inifinita.*

Prova : Sejam W um subespaço de dimensão infinita de um espaço de Banach Z, e $(x_n)_n$ base de Schauder de X. Então pela Proposição 1.3.11 segue que para todo inteiro p existe $w_1 \in W_{p+1}$ com $\|w_1\| = 1$ e da forma $w_1 = \sum\limits_{i=p+1}^{\infty} a_i^1 x_i$.

Seja $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\|\sum\limits_{i=p+1}^{n_1} a_i^1 x_i\| \geqslant 1/2$. Então, novamente pela Proposição 1.3.11, existem $w_2 = \sum\limits_{i=n_1+1}^{\infty} a_i^2 x_i$.

Seja $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $\|\sum\limits_{i=n_1+1}^{n_2} a_i^2 x_i\| \geqslant 1/2$. Então continuando por indução encontramos um sequência de números inteiros $p = n_0 < n_1 < n_2 < \cdots$ e vetores $w_j = \sum\limits_{i=n_{j-1}+1}^{\infty} a_i^j x_i$.

É claro que $(y_j)_{j\in\mathbb{N}}$ é $L.I.$ com $\|\sum\limits_{i=n_{j-1}+1}^{n_j} a_i^j x_i\| \geq 1/2$. ■

Proposição 1.3.13 *Se X é um espaço de Banach e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ base de Schauder de X, então $(\frac{x_n}{\|x_n\|})_{n\in\mathbb{N}}$ é uma base normalizada de X com a mesma constante básica.*

Prova : Segue diretamente da Proposição 1.3.7.

Definição 1.3.14 *Sejam X um espaço de Banach, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência básica em X, $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência estritamente crescente de inteiros positivos e $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de escalares. Uma sequência $(u_j)_j$ dada por $u_j = \sum_{n=p_j+1}^{P_{j+1}} a_n x_n$, com $u_j \neq 0$, $\forall j \in \mathbb{N}$, é chamada de base de bloco de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Proposição 1.3.15 *Uma base de bloco $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de uma sequência básica $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de um espaço de Banach X, é uma sequência básica, cuja constante básica é menor ou igual a constante básica de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Prova : Sugerimos [12], pág. 6.

1.4 Espaço quociente

A seguir definimos espaço quociente. Sugerimos também [15], pág. 8.

Definição 1.4.1 *Seja E um subespaço do espaço de Banach X. Denotamos por X/E o espaço de Banach quociente $\{[x] : x \in X\}$, onde $[x]$ denota a classe de equivalência $x + E$ de x com a norma $\|[x]\| = \inf\{\|x - e\| : e \in E\}$.*

Definição 1.4.2 *Denotaremos por $codim(E)$ a codimensão do subespaço E no espaço de Banach X, isto é, a dimensão do espaço quociente X/E. Indicaremos que E tem codimensão finita em X pela notação $codim(E) < +\infty$.*

Notação 1.4.3 *Por Q_E denotaremos a aplicação quociente canônica de X em X/E definida por $Q_E(x) = [x]$, $\forall x \in X$.*

Proposição 1.4.4 *Sejam X e Y espaços de Banach e $T : X \longrightarrow Y$ um operador fechado. Se $Im(T)$ possui codimensão finita em Y então $Im(T)$ é um subespaço fechado.*

Prova : Sugerimos [13], pág.22.

Proposição 1.4.5 *Todo subespaço de codimensão finita de um espaço de Banach X é complementado em X.*

Prova : Sugerimos [14], pág.373.

Proposição 1.4.6 *Sejam X um espaço de Banach e M um subespaço fechado de codimensão finita em X. Então.*

(i) para qualquer subespaço V de X, existe um subespaço de dimensão finita N contido em V tal que $\overline{V} = (\overline{V} \cap M) \oplus N$;

(ii) Se V é denso em X, então $V \cap M$ é denso em M.

Prova : Sugerimos [13], pág.24.

1.5 Operadores estritamente singulares, operadores compactos e operadores de Fredholm

Nesta seção daremos algumas definições e resultados envolvendo operadores estritamente singulares, operadores compactos e operadores de Fredholm.

1.5.1 Operadores estritamente singulares

Definição 1.5.1.1 *Um operador S de Z para X é dito ser estritamente singular se para todo subespaço W de Z, a restrição $S|_W$ de S para W não é um isomorfismo sobre a imagem.*

Observação 1.5.1.2 *Denotamos por $S(X,Y)$ o espaço das aplicações lineares e contínuas $S : X \longrightarrow Y$, que são estritamente singulares.*

Vamos caracterizar os operadores estritamente singulares.

Proposição 1.5.1.3 *Sejam X e Y espaços normados de dimensão infinita. Um operador $T : X \longrightarrow Y$ é estritamente singular se, e somente se, $\forall \mathcal{E} > 0$, para qualquer W subespaço de dimensão infinita de X, existe $x \in W$ tal que $\|T(x)\| < \mathcal{E}\|x\|$.*

Prova : Sugerimos [15], pág. 26.

Proposição 1.5.1.4 *Sejam X e Y espaços de Banach de dimensão infinita. Seja $S : X \longrightarrow Y$ um operador linear e contínuo. S é estritamente singular se, e somente se, para todo subespaço de dimensão infinita W de X e para todo $\mathcal{E} > 0$, existe W' subespaço de dimensão infinita de W, tal que $\|S|_{W'}\| \leq \mathcal{E}$.*

Prova : Sugerimos [12], pág. 76.

Corolário 1.5.1.5 *Sejam S_1 e $S_2 \in S(X,Y)$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. Então temos $(S_1 + S_2) \in S(X,Y)$ e $(\alpha S_1) \in S(X,Y)$.*

Prova : Sugerimos [15], pág. 27.

Proposição 1.5.1.6 *Seja S um operador estritamente singular. Sejam T e U operadores lineares contínuos, para os quais TS e SU estão definidos. Então TS e SU são operadores estritamente singulares.*

Prova : Sugerimos [15], pág. 28.

Proposição 1.5.1.7 *$S(X,Y)$ é um espaço fechado de $L(X,Y)$.*

Prova : Sugerimos [15], pág. 29.

1.5.2 Operadores Compactos

Vejamos agora, a definição e alguns resultados sobre operadores compactos.

Proposição 1.5.2.1 *Sejam X e Y espaços normados e $T : X \to Y$ uma aplicação linear. São equivalentes as seguintes propriedades:*

(i) T leva a bola unitária B de X num conjunto relativamente compacto de Y, isto é, $\overline{T(B)}$ é compacto.

(ii) T leva os conjuntos limitados de X em conjuntos relativamente compactos de Y.

(iii) Toda sequência limitada $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de pontos em X contém uma subsequência x_{n_k} tal que a sequência $(T(x_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ é convergente em Y.

Prova : Sugerimos [11], pág. 302.

Definição 1.5.2.2 *Dizemos que um operador linear $T : X \to Y$ é compacto se satisfaz as condições equivalentes citadas na proposição anterior.*

Proposição 1.5.2.3 *Sejam X e Y espaços normados e $T : X \to Y$ um operador linear e contínuo, cuja imagem tem dimensão finita. Então T é compacto.*

Prova : Sugerimos [11] pág. 303.

Definição 1.5.2.4 *Sejam X e Y espaços normados, T e $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ um sequência de operadores lineares. Dizemos que T_n converge uniformemente para T se $\forall \mathcal{E} > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall x \in X$, $\|x\| \leq 1$ temos $\|T_n(x) - T(x)\| \leq \mathcal{E}$, $\forall n \geq n_0$.*

Proposição 1.5.2.5 *Sejam X um espaço normado, Y um espaço de Banach e $T_n : X \to Y$, $n \in \mathbb{N}$, uma sequência de operadores compactos tal que T_n converge uniformemente para T. Então T é compacto.*

Prova: Sugerimos [11], pág. 312.

É bem conhecido (veja [12], pág. 76) que existem operadores estritamente singulares que não são operadores compactos, no entanto, temos :

Proposição 1.5.2.6 *Sejam X e Y espaços normados de dimensão infinita. Se $K : X \to Y$ é um operador compacto, então K é estritamente singular.*

Prova : Sugerimos [15], pág. 31.

Proposição 1.5.2.7 *Sejam X e Y espaços de Banach de dimensão infinita. Assuma que $T : X \to Y$ seja um operador tal que a restrição de T para nenhum subespaço de X de codimensão finita é um isomorfismo. Então, para todo $\mathcal{E} > 0$, existe um subespaço Z de dimensão infinita de X tal que $T|_Z$ é compacto e $\|T_{|Z}\| \leq \mathcal{E}$.*

Prova : Sugerimos [12], pág. 76.

Observação 1.5.2.8 *Sejam X e Y espaços de Banach de dimensão infinita e T um operador linear contínuo de X e Y. Se para algum subespaço X_0 de X, de codimensão finita, a restrição de T à X_0 é um isomorfismo sobre a imagem, então $T(X)$ é fechado em Y.*

1.5.3 Operadores de Fredholm

Vamos apresentar agora algumas definições e um resultado sobre operadores de Fredholm.

Definição 1.5.3.1 *Sejam X e Y espaços de Banach e $T \in L(X,Y)$ um operador com imagem fechada. Definimos o índice do núcleo e o índice de deficiência de T, respectivamente por :*

$\alpha(T) = \dim(\ker(T))$ *e* $\beta(T) = \dim(Y/Im(T)) = dimcoker(T)$.

Definição 1.5.3.2 *Sejam X e Y espaços de Banach. Então um operador $T \in L(X,Y)$ é dito ser semi-Fredholm superior se sua imagem $Im(T)$ é fechada e $\alpha(T) < \infty$. O conjunto de todos os operadores semi-Fredholm superior é denotado por $\Phi_+(X,Y)$. Um operador $T \in L(X,Y)$ é dito ser semi-Fredholm inferior se $\beta(T) < \infty$ (neste caso, $Im(T)$ é fechado pela Proposição 1.4.4). O conjunto de todos os operadores semi-Fredholm inferior é denotado por $\Phi_-(X,Y)$.*

Definição 1.5.3.3 *Sejam X e Y espaços de Banach e $T \in L(X,Y)$ um operador semi-Fredholm superior ou semi-Fredholm inferior. Definiremos o índice de :*

$$T \in \Phi_+(X,Y) \cup \Phi_-(X,Y) \quad \textit{por} \quad i(T) = \alpha(T) - \beta(T).$$

Definição 1.5.3.4 *Sejam X e Y espaços de Banach e $T \in L(X,Y)$. Então T é chamado operador de Fredholm se $i(T) < \infty$, ou equivalentemente, se T é um operador semi-Fredholm superior e semi-Fredholm inferior.*

O conjunto de todos os operadores Fredholm é denotado por $\Phi(X,Y)$.

Proposição 1.5.3.5 *Sejam X e Y espaços de Banach e $T \in L(X,Y)$ um operador com imagem fechada para o qual $\alpha(T) < +\infty$. Seja $S : X \to Y$ um operador estritamente singular. Então $\alpha(T+S) < \infty$, $T+S$ tem imagem fechada e $i(T+S) = i(T)$.*

Prova : Sugerimos [12], pág. 79.

Proposição 1.5.3.6 *Sejam $T : X \longrightarrow Y$ um operador Fredholm e $S : X \longrightarrow Y$ um operador tal que $\dim(T(X)) < +\infty$. Então $T+S$ é um operador Fredholm e $i(T+S) = i(T)$.*

Prova : Sugerimos [12], pág.77.

Observação 1.5.3.7 *Denotando por L a classe de todos os operadores lineares contínuos entre espaços de Banach arbitrários podemos definir que um ideal de operadores U é uma subclasse de L tal que dados espaços de Banach X e Y as componentes $U(X,Y) = U \cap L(X,Y)$,* *satisfazem as seguintes condições:*

(i) $Id_E \in U$, *onde* E *denota o espaço de Banach de dimensão 1;*

(ii) Se $S_1, S_2 \in U(X,Y)$ *então* $S_1 + S_2 \in U(X,Y)$;

(iii) Sejam X_0 *e* Y_0 *espaços de Banach de* $T \in L(X_0, X), S \in U(X,Y)$ *e* $R \in L(Y, Y_0)$ *então* $RST \in U(X_0, Y_0)$.

Se $X = Y$ *denotamos a componente* $U(X,Y)$ *por* $U(X)$.

Definição 1.5.3.8 *Sejam* X *um espaço de Banach e os operadores* $T \in L(X)$. *Então, definimos a álgebra de Calkin por* $L(X)/K(X)$ *onde* $K(X)$ *é o ideal de todos os operadores compactos sobre o espaço de Banach* X. *Denotaremos por* Q, *a aplicação quociente* $Q : L(X) \longrightarrow L(X)/K(X)$ *definida por* $Q(T) = [T], \forall T \in L(X)$.

Proposição 1.5.3.9 *Seja* X *um espaço de Banach e* $T : X \longrightarrow Y$. *Um operador* $T \in L(X)$ *é Fredholm se, e somente se* $[T]$ *é invertível na álgebra de Calkin* $L(X)/K(X)$.

Prova : Sugerimos [13], pág.47.

Proposição 1.5.3.10 *Sejam* X *e* Y *espaços de Banach e* $T : X \longrightarrow Y$, *um operador para o qual* $i(T)$ *é definido. Existe um número* $\lambda(T) > 0$ *tal que se* $S : X \longrightarrow Y$ *satisfaz* $\|S\| < \lambda(T)$ *então :*

(i) $\alpha(T + S) \leq \alpha(T)$;

(ii) $T + S$ *tem uma imagem fechada e* $\beta(T + S) \leq \beta(T)$;

(iii) $i(T + S) = i(T)$.

Prova: Sugerimos [12], pág. 78.

1.6 Operadores da forma $Id + S$

Veremos nessa seção um resultado que caracteriza os operadores da forma $(Id + S)$ e definições decorrentes.

Proposição 1.6.1 *Sejam Z um subespaço de um espaço de Banach X e $A \in L(Z, X)$. Se A é da forma $Id + S$, onde S é estritamente singular, então A é um isomorfismo sobre algum subespaço de codimensão finita de Z.*

Prova : Seja $A \in L(Z, X)$, onde Z é um subespaço de dimensão infinita do espaço de Banach X tal que a restrição de A para algum subespaço Z' de codimensão finita de Z não é um isomorfismo.

Então, pela Proposição 1.5.2.7 temos que para todo $\mathcal{E} > 0$ existe um subespaço Z'' de Z tal que $A|_{Z''}$ é compacto. E mais pela Proposição 1.5.2.6, $A|_{Z''}$ é estritamente singular.

Assim, se considerarmos A na forma $(Id + S)$ onde S é estritamente singular teremos : $A|_{Z''} = Id|_{Z''} + S|_{Z''}$, ou melhor $A|_{Z''} - S|_{Z''} = Id|_{Z''}$.

Segue pelo Corolário 1.5.1.5, que $Id|_{Z''}$ é estritamente singular, o que é uma contradição , pois o operador identidade é bijetor e bicontínuo e portanto, um isomorfismo sobre a sua imagem.

Logo, se A é da forma $(Id + S)$, então A é um isomorfismo sobre algum subespaço de codimensão finita. ∎

Definição 1.6.2 *Se cada operador $A \in L(Z, X)$ é um isomorfismo sobre Z na forma da Proposição 1.6.1, dizemos que A é um $(Id + S)$-isomorfismo.*

Logo se existe $A \in L(Z, X)$, $(Id + S)$-isomorfismo, então o isomorfismo inverso A^{-1} de A definido sobre $A(Z)$ satisfaz $A^{-1} - Id = (Id - A)A^{-1}$. Sendo assim temos: $A^{-1} = Id + (Id - A)A^{-1}$, portanto A^{-1} é um $(Id + S)$-isomorfismo sobre $A(Z)$.

Definição 1.6.3 *Dois subespaços Y e Z de um espaço de Banach X são ditos serem $(Id + S)$-isomorfos se existe um $(Id + S)$-isomorfismo de Y para Z.*

Definição 1.6.4 *Substituindo o operador estritamente singular S por um operador compacto K na Proposição 1.6.1, também se define A como $(Id+K)$-isomorfismo e consequentemente na definição 1.6.3, subespaços $(Id + K)$-isomorfos.*

Lembremos a Proposição 1.5.2.6 que afirma que todo operador compacto é estritamente singular.

1.7 Espaços de Banach hereditariamente indecomponíveis (ou $H.I.$)

O objetivo dessa seção é definir e apresentar resultados que caracterizam os espaços de Banach hereditariamente indecomponíveis.

Definição 1.7.1 *Um espaço de Banach de dimensão infinita que pode ser escrito como uma soma de pelo menos dois subespaços de dimensão infinita é dito ser decomponível.*

Definição 1.7.2 *Um espaço de Banach de dimensão infinita é indecomponível se não pode ser escrito como soma direta de seus subespaços de dimensão infinita.*

Definição 1.7.3 *Um espaço de Banach de dimensão infinita é hereditariamente indecomponível (ou H.I.) se nenhum subespaço dele é soma direta de dois subespaços de dimensão infinita, ou seja, não admite subespaço de dimensão infinita decomponível (DEFINIÇÃO 7 da Introdução).*

Observação 1.7.4 *Gowers e Maurey, em 1993, construíram o primeiro espaço de Banach H.I. chamado X_{GM}, veja [9] (TEOREMA 8 da Introdução).*

Definição 1.7.5 *Sejam Y e Z subespaços fechados de dimensão infinita,*

$$\gamma(Y, Z) = \inf\{\|z - y\| : \|z\| = \|y\| = 1, y \in Y \text{ e } z \in Z\},$$

é definido como sendo o ângulo entre os subespaços Y e Z.

Lema 1.7.6 *Sejam Y e Z subespaços fechados de dimensão infinita de um espaço de Banach X, tal que $Y \cap Z = \{\sigma\}$. Então $Y + Z$ é fechado, se e somente se, $\gamma(Y, Z) > 0$.*

Prova : Sugerimos [15], pág. 12.

Proposição 1.7.7 *(Caracterização geométrica dos espaços de Banach H.I.) Seja X um espaço de Banach. X é H.I. se, e somente se, para quaisquer Y e Z subespaços fechados de dimensão infinita de X, e para qualquer $\mathcal{E} > 0$, existe $y \in Y$ e $z \in Z$ com $\|y\| = \|z\| = 1$ tal que $\|y - z\| < \mathcal{E}$.*

Prova : Sugerimos [15], pág.14.

Muitos resultados conhecidos nos espaços H.I. são sobre operadores em espaços complexos H.I.. Em particular, Gowers e Maurey mostraram em [9] que se X é um espaço complexo H.I., então todo operador sobre X é a soma de um operador estritamente singular com uma múltipla identidade.

Teorema 1.7.8 *(Generalização do resultado de Gowers e Maurey) Sejam X um espaço complexo H.I. e Y um subespaço de X. Então cada operador de Y para X é da forma $\lambda I_{Y,X} + S$, onde λ é uma constante complexa, a aplicação $I_{Y,X}$ é a inclusão conônica de Y para X, e S é um operador estritamente singular.*

Prova : Sugerimos [3].

1.8 Álgebras normadas

Nesta seção apresentaremos alguns conceitos e resultados que serão úteis na prova do Teorema Principal (Teorema 7.1.1 do Capítulo 7).

Definição 1.8.1 *Uma álgebra normada sobre um corpo $\mathbb{K}$ é um espaço vetorial normado A, sobre $\mathbb{K}$, no qual definimos uma operação de multiplicação interna, satisfazendo os seguintes axiomas:*

(i) $(xy)z = x(yz), \forall x, y, z \in A$;

(ii) $x(y+z) = xy + xz$ e $(y+z)x = yx + zx$, $\forall x, y, z \in A$;

(iii) $\lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y), \forall x, y, z \in A$ e $\forall \lambda \in \mathbb{K}$;

(iv) $\|xy\| \leq \|x\| \cdot \|y\|, \forall x, y \in A$.

Observação 1.8.2 *Considerando a definição anterior temos que :*

(i) Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}, A$ é chamada álgebra normada real, e se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, álgebra normada complexa;

(ii) Uma álgebra normada é comutativa se $xy = yx$ $\forall x, y \in A$;

(iii) Se A é um espaço vetorial completo em relação à norma $\|\cdot\|$ e é uma álgebra normada, então dizemos que A é uma Álgebra de Banach.

Definição 1.8.3 *Um elemento* $\mathbf{e}$ *de uma álgebra normada A é chamado unidade de A se, e somente se,* $\mathbf{e} \neq 0$, $\mathbf{e}x = x\mathbf{e} = x$, $\forall x \in A$ e $\|\mathbf{e}\| = 1$.

Observação 1.8.4 *Em relaçã a Definição 1.8.3 temos que :*

(i) A é uma álgebra normada com unidade se existe em A o elemento unidade;

(ii) É posssível mostrar que o elemento unidade quando existe é único;

(iii) Sendo A uma álgebra normada com unidade, denotaremos o elemento unidade por $\mathbf{1}$.

Definição 1.8.5 *Sejam A uma álgebra normada com unidade e $x \in A$. Dizemos que x é invertível se existe $y \in A$ tal que $xy = 1$ e $yx = 1$. O elemento y será chamado inverso de x e o denotaremos por x^{-1}.*

Definição 1.8.6 *Uma álgebra normada com divisão é uma álgebra normada A com unidade tal que todo elemento não nulo é invertível.*

Teorema 1.8.7 (Caso Complexo do Teorema de Gelfand-Mazur) *Seja A uma álgebra de Banach complexa com divisão, então A é isométricamente isomorfo a $\mathbb{C}$.*

Prova : Sugerimos [15], pág.16.

Definição 1.8.8 *Seja A uma álgebra real. A complexificação A_C de A é o conjunto $A \times A$ para o qual definimos, para todo $a, b, c, d \in A$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, as seguintes operações:*

(i) $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$;

(ii) $(\alpha + \beta i)(a, b) = (\alpha a - \beta b, \alpha b + \beta a)$;

(iii) $(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.

Definição 1.8.9 *É fácil verificar que A_C possui estrutura de álgebra complexa e que a aplicação $a \longrightarrow (a, 0)$ é um monomorfismo de A em A_C.*

Lembramos que para A e B álgebras sobre um corpo $\mathbb{K}$ um monomorfismo de A em B é um homomorfismo injetivo de A em B. Relembrando que homomorfismo de A em B é uma aplicacção $\Phi \in L(A, B)$ tal que $\Phi(xy) = \Phi(x) \cdot \Phi(y)$, $\forall x, y \in A$.

Definição 1.8.10 *Seja A uma álgebra normada real, então temos:*

(i) A tem unidade se e somente se A_C tem unidade. Se $\mathbf{1}$ é a unidade de A, então $(\mathbf{1}, 0)$ é a unidade de A_C.

(ii) $a \in A$ é invertível se e somente se $(a, 0) \in A_C$ é invertível, e $(a, 0)^{-1} = (a^{-1}, 0)$.

Prova : Sugerimos [1], pág. 69.

Definição 1.8.11 *Sejam* $1, i, j, k$ *a base usual de vetores do* $\mathbb{R}^4$, *isto é,* $1 = (1,0,0,0), i = (0,1,0,0), j = (0,0,1,0), k = (0,0,0,1)$. *A álgebra dos quatérnios sobre* $\mathbb{R}$, *denotada por* $\mathbb{H}$ *é o espaço vetorial* $\mathbb{R}^4$ *com o produto interno definido sobre os vetores da base da seguinte forma:*

$$1^1 = 1, \qquad 1i = i1 = i, \quad 1j = j1 = j, \quad 1k = k1 = k,$$

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j.$$

Observação 1.8.12 *Estendendo a multiplicação anterior, por linearidade, para as combinações lineares dos elementos da base e considerando a norma definida por* $|x| = \left(\sum_{m=1}^{4} x_m^2\right)^{\frac{1}{2}}$, *onde* $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{H}$, *é possível mostrar através de cálculos rotineiros que* $\mathbb{H}$ *é álgebra sobre* $\mathbb{R}$, *e que* $|xy| = |x||y|\ \forall x, y \in \mathbb{H}$, *e portanto que* $\mathbb{H}$ *é uma álgebra normada sobre* $\mathbb{R}$.

Observação 1.8.13 *O elemento* 1 *é a unidade de* $\mathbb{H}$, *pois dado* $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{H}$ *temos:*
$1x = (1,0,0,0)(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1+0i+0j+0k)(x_1+x_2i+x_3j+x_4k) = x_1+x_2i+x_3j+x_4k = x$ *e de forma análoga podemos mostrar que* $x1 = x$.

Observação 1.8.14 *Sejam* $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ *e* $x^* = (x_1, -x_2, -x_3, -x_4)$ *em* $\mathbb{H}$. *Então* $xx^* = (x_1, x_2, x_3, x_4)(x_1, -x_2, -x_3, -x_4) = (x_1 + x_2i + x_3j + x_4k)(x_1 - x_2i - x_3j - x_4k) = 1|x|^2 + 0i + 0j + 0k = |x|^2$. *Assim, sendo* $x \neq 0$, *podemos considerar o elemento* $x^{-1} = \frac{1}{|x|^2}x^*$ *tal que* $xx^{-1} = x \cdot (\frac{1}{|x|^2}x^*) = \frac{1}{|x|^2}(xx^*) = 1$. *De forma análoga podemos mostrar que* $x^{-1}x = 1$. *Logo* $\mathbb{H}$ *é uma álgebra normada sobre* $\mathbb{R}$ *com divisão.*

Teorema 1.8.15 *(caso real do Teorema de Gelfand-Mazur) Seja* A *uma álgebra normada real, com divisão. Então* A *é isomorfo a* $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ *ou* $\mathbb{H}$.

Prova : Sugerimos [15], pág.23.

1.9 Isomorfismo entre os espaços quocientes E e E_Y

1.9.1 O espaço quociente E_Y

No que segue na Seção 1.9, X será espaço de Banach de dimensão infinita, e o conjunto dos subespaços fechados de dimensão infinita de X será denotado por G_X. Também no que segue consideramos para cada $Y \in G_X$ a aplicação $\|\cdot\|_Y$ definida sobre $L(Y,X)$ por $\|T\|_Y = \underset{Z' \subset Y}{sup}\, \underset{Z \subset Y}{inf} \|T|_{Z'}\|$.

Observação 1.9.1.1 *Em relação a norma acima mencionada temos:*

(i) $\|T\|_Y = 0$ se, e somente se, T é estritamente singular;

(ii) se X é *H.I.*, então para todo $T \in L(Y,X)$ e para todo $Z \subset Y$ temos : $\|T\|_Y = \underset{Z' \subset Z}{inf} \|T|_{Z'}\|$.

Prova : Sugerimos [15], respectivamente pág. 41 e 46 para as observações *i)* e *ii)*.

A seguir nesta seção (1.9), X será um espaço de Banach hereditariamente indecomponível.

Definição 1.9.1.2 *Para cada $Y \in G_X$ denotamos por E_Y o espaço quociente de $L(Y,X)$ pelo Kernel da aplicação $\|\cdot\|_Y$, isto é, $E_Y = L(Y,X)/S(Y,X)$. Denotamos por α_Y um elemento de E_Y, e para todo $T \in L(Y,X)$, denotamos por $\overline{T}$ a classe de T em E_Y, isto é $\overline{T} = \{U \in L(Y,X) : U - T \in S(Y,X)\}$. Consideramos a seguinte aplicação $|||\cdot|||_Y : E_Y \longrightarrow \mathbb{R}_+$ dada por $|||\alpha_Y|||_Y = \|T\|_Y, \forall T \in \alpha_Y$, que é uma norma em E_Y.*

Definição 1.9.1.3 *Sejam $Z, Y \in G_X$ tal que Z é um subespaço de Y. Existe Y' subespaço de Y tal que $Y' = (I_Z + S)(Z)$ onde $I_Z + S$ é um isomorfismo. Definimos então a seguinte aplicação de E_Y em E_Z : $P_{YZ} : E_Y \longrightarrow E_Z$ tal que $\overline{T} \longmapsto \overline{T(I_Z + S)}$.*

Lema 1.9.1.4 *Sejam Y e Z em G_X tal que Z é um subespaço de Y. Então P_{YZ} é uma isometria linear.*

Prova : Sugerimos [15], pág.50.

1.9.2 O espaço quociente E

Definição 1.9.2.1 *Definimos em X, o espaço vetorial normado*
$l_\infty((E_Y)_{Y\in G_X}) = \{(\alpha_Y)_{Y\in G_X}/\exists M \in \mathbb{R}_+^* : |||\alpha_Y|||_Y \leq M, \forall Y \in G_X\}$,
onde : $\|(\alpha_Y)_Y\| = \sup\limits_{Y\in G_X} |||\alpha_Y|||_Y$.

Proposição 1.9.2.2 *Denotamos por $\Omega = \{(\alpha_Y)_{Y\in G_X} \in l_\infty((E_Y)_{Y\in G_X})$ se existe $Y_0 \in G_X$ tal que para todo Y subespaço de Y_0 temos $\alpha_Y = P_{Y_0Y}(\alpha_{Y_0})\}$. Afirmamos que Ω é um espaço linear.*

Prova : Sugerimos [15], pág.57.

Definição 1.9.2.3 *Dado $(\alpha_Y)_{Y\in G_X} \in \Omega$ segue do Lema 1.9.1.4 que $|||\alpha_Y|||_Y = |||\alpha_{Y_0}|||_{Y_0}$, para todo Y subespaço de Y_0, pois $\alpha_Y = P_{Y_0Y}(\alpha_{Y_0})$ e P_{Y_0Y} é uma isometria. Assim podemos definir a seguinte aplicação em Ω :*
$\Psi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}_+$ definida por $(\alpha_Y)_Y \longmapsto \Psi((\alpha_Y)_Y) = |||\alpha_{Y_0}|||$.

Observação 1.9.2.4 *Denotamos por $\Gamma = \{(\alpha_Y)_{Y\in G_X} \in \Omega : \Psi((\alpha_Y)_Y) = 0\}$ o subespaço fechado de Ω.*

Prova : Sugerimos [15], pág.60.

Definição 1.9.2.5 *Definimos o espaço quociente $E = \Omega/\Gamma$ tal que $\alpha = \overline{(\alpha_Y)_{Y\in G_X}} \in E$ onde a aplicação $\|\cdot\| : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ dada por $\|\alpha\| = \Psi((\alpha_Y)_Y)$, $\forall(\alpha_Y)_Y \in \alpha$ é uma norma em E (veja [15], pág 61).*

1.9.3 Isometria entre E e E_Y

Os próximos resultados ajudam a provar no Capítulo 7 que o espaço E_Y é isometricamente isomorfo aos espaços $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ e $\mathbb{H}$.

Definição 1.9.3.1 *Sejam α e $\beta \in E$. Então definimos $\alpha\beta \in E$ por $\overline{(\alpha_{Y_0} \otimes \beta_{Z \subseteq Z_1})}$ onde $Y_0, Z_1 \in G_X$ são tais que $\alpha_Y = P_{Y_0 Y}(\alpha_{Y_0}), \forall Y$ subespaço de Y_0 e $\beta_z \in E_{ZY_0}, \forall Z$ subespaço de Z_1.*

Proposição 1.9.3.2 *O espaço E com a multiplicação dada na definição* 1.9.3.1 *e norma definida em* 1.9.2.5 *possui estrutura de álgebra normada com unidade.*

Prova : Sugerimos [15], pág.67.

Definição 1.9.3.3 *Seja X um espaço de Banach H.I. . Para cada $Y \in G_X$ definimos a seguinte aplicação linear $\mathbf{e} : L(Y, X) \longrightarrow E$ tal que $T \longmapsto \mathbf{e}(T) = \overline{(P_{YZ}(T))_Z}$, onde Z é subespaço de Y. Observando que E é completo e todo elemento não nulo de E é invertível em relação ao produto definido em* 1.9.3.1 *(veja [15], pág. 75 e 77).*

Proposição 1.9.3.4 *Seja X um espaço de Banach complexo HI. Então o espaço E com a multiplicação dada na definição* 1.9.3.1 *é uma álgebra de Banach com unidade.*

Prova : Sugerimos [15], pág.79.

Proposição 1.9.3.5 *Sejam X um espaço de Banach HI e Y um subespaço qualquer de X com dimensão infinita. Então o espaço E_Y é isométrico a um subespaço de E.*

Prova : Sugerimos [15], pág.79.

Proposição 1.9.3.6 *Seja X um espaço de Banach complexo H.I.. Então, o espaço é dado na Definição 1.9.2.5 é isométrico à $\mathbb{C}$.*

Prova : Sugerimos [15], pág. 79.

Corolário 1.9.3.7 *Seja X um espaço de Banach complexo H.I.. Então, E possui dimensão 1.*

Prova : Sugerimos [15], pág. 79.

QUASI-MAXIMALIDADE DE SUBESPAÇOS

Neste capítulo introduziremos o conceito de subespaços quasi-maximais para em seguida demonstrarmos o Lema 2.2.1 sobre soma direta e subespaços $Id + K$-isomorfos, de grande importância na prova do Lema 3.2.2, que por sua vez auxiliará na demonstração do Teorema Principal (Teorema 7.1.1). Terminaremos este capítulo com as demonstrações dos Lemas 2.4.1 e 2.4.2 sobre as relações da quasi-maximalidade de subespaços e operadores estritamente singulares, que desempenham papel importante nas demonstrações do Teorema 12 (ii) e do Teorema 13 que foram enunciados na Introdução.

2.1 Quasi-maximalidade

Definição 2.1.1 *Sejam X um espaço de Banach e Y um subespaço de X. Y é dito quasi-maximal se para todo subespaço Z de X, a soma $Y + Z$ não é direta.*

2.2 Soma não direta e subespaços $Id + k$-isomorfos

Lema 2.2.1 *Sejam X um espaço de Banach, Y e Z subespaços de X. Se para todo subespaço W de Z, a soma $Y + W$ não é direta, então Y e Z têm subespaços $Id + K$-ismorfos.*

Prova : Sejam Y e Z subespaços de X satisfazendo as hipóteses do lema. Pela Observação 1.3.3 podemos assumir que Z tem uma base de Schauder $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$, com projeções $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Começamos provando a seguinte afirmação: " $\forall\mathcal{E} > 0$ e para algum subespaço W de Z, se a soma $Y + W$ não é direta, então existem vetores unitários, $y \in Y$ e $w \in W$ tais que $||y - w|| \leq \mathcal{E}$ ".

Supondo que não, ou seja, existem $\mathcal{E} > 0$ e $y \in Y$ e $w \in W$, vetores unitários tais que $||y - w|| > \mathcal{E}$ temos que :

1. $Y \cap W = \{\sigma\}$. De fato, se $Y \cap W \neq \{\sigma\}$ então existe $x \neq \sigma$, $x \in Y \cap W$ e $0 = ||\frac{x}{||x||} - \frac{x}{||x||}|| > \mathcal{E}$, o que contraria a hipótese;

2. Pela Definição 1.7.5 podemos concluir que :
   $\gamma(Y,W) = inf\{\|y-w\| : \|y\| = \|w\| = 1, y \in Y \text{ e } w \in W\} > \mathcal{E} > 0$;

3. Pelo Lema 1.7.6 temos que $(Y+W)$ é fechado;

4. Seja $p_Y : Y+W \longrightarrow Y$, a projeção definida por $p_Y(y+w) = y$. Se $y_n + w_n \overset{Y+W}{\longrightarrow} \sigma$ e $p_Y(y_n+w_n) \overset{Y}{\longrightarrow} y$, então $\sigma \in D_{p_Y}$ e $w_n \longrightarrow -y$. Logo, como W é fechado temos que $-y \in Y \cap W$, e assim $y = \sigma$. Portanto, pela Observação 1.2.15.(i) e pelo Teorema do Gráfico Fechado (1.2.18), p_Y é fechado e consequentemente p_Y é contínuo.

5. Segue, pela Definição 1.2.12, que $(Y+W)$ é a soma direta o que é uma contradição. Desse modo $\|y-w\| \leq \mathcal{E}$, isto é, a afirmação é verdadeira.

Agora provaremos que é possível escolher uma base de bloco normalizada $(z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ em Z e uma sequência $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ em Y tal que $\sum\limits_{i\in\mathbb{N}}\|z_i - y_i\| \leq 1$.

De fato, pela afirmação anterior existem $y_1' \in Y$ e $z_1' \in Z$ com $\|y_1'\| = 1$, $\|z_1'\| = 1$ e $\|z_1' - y_1'\| \leq \frac{1}{8}$. Como $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ é base de Z, temos que existe uma sequência de escalares $(a_i^1)_{i\in\mathbb{N}}$ tais que $z_1' = \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i^1 e_i$.

Seja $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que : $(a)\ \|\sum\limits_{i=n_1+1}^{\infty} a_i^1 e_i\| \leq \frac{1}{8}$ e $(b)\ \|\sum\limits_{i=1}^{n_1} a_i^1 e_i\| \geq \frac{1}{2}$.

Sejam $\overline{z_1} = \sum\limits_{i=1}^{n_1} a_i^1 e_i$, $z_1 = \frac{\overline{z_1}}{\|\overline{z_1}\|}$ e $y_1 = \frac{y_1'}{\|\overline{z_1}\|}$. Logo $\|z_1\| = 1$ e $\|z_1 - y_1\| = \|\frac{\overline{z_1}}{\|\overline{z_1}\|} - \frac{y_1'}{\|\overline{z_1}\|}\| = \frac{1}{\|\overline{z_1}\|}\cdot\|\overline{z_1} - y_1'\| \overset{(b)}{\leq} 2\cdot\|\overline{z_1} - y_1'\| = 2\cdot\|\overline{z_1} - z_1' + z_1' - y_1'\| \leq 2\cdot[\|\overline{z_1} - z_1'\| + \|z_1' - y_1'\|] \overset{(a)}{\leq} 2\cdot(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}) = \frac{1}{2}$.

Seja $Z_2 = \{(\sum\limits_{i=n_1+1}^{\infty} a_i e_i) \in Z\}$. Então pelo Lema 1.3.12 Z é de dimensão infinita. Logo pela hipótese $Z_2 + Y$ não é soma direta e pela afirmação inicial existem $y_2' \in Y$ e $z_2' \in Z$ com $\|y_2'\| = 1$, $\|z_2'\| = 1$ e $\|z_2' - y_2'\| \leq \frac{1}{16}$, sendo $z_2' = \sum\limits_{i=n_1+1}^{\infty} a_i^2 e_i$ para alguma sequência de escalares $(a_i^2)_{i\in\mathbb{N}}$.

Seja $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que : $(a)\|\sum\limits_{i=n_2+1}^{\infty} a_i^2 e_i\| \leq \frac{1}{16}$ e $(b)\|\sum\limits_{i=n_1+1}^{n_2} \geq \frac{1}{2}$.

Sejam $\overline{z_2} = \sum\limits_{i=1}^{n_2} a_i^2 e_i$, $z_2 = \frac{\overline{z_2}}{\|\overline{z_2}\|}$ e $y_2 = \frac{y_2'}{\|\overline{z_2}\|}$. Logo $\|z_2\| = 1$ e $\|z_2 - y_2\| - \|\frac{\overline{z_2}}{\|\overline{z_2}\|} - \frac{y_2'}{\|\overline{z_2}\|}\| = \frac{1}{\|\overline{z_2}\|}\cdot\|\overline{z_2} - y_2'\| \leq 2\cdot\|\overline{z_2} - y_2'\| = 2\cdot\|\overline{y_2} - z_2' + z_2' - y_2'\| \leq 2\cdot[\|\overline{z_2} - z_2'\| + \|z_2' - y_2'\|] \leq 2\cdot(\frac{1}{16} + \frac{1}{16}) = \frac{1}{4}$.

Portanto, como anteriormente, temos que $\|z_2 - y_2\| \leq \frac{1}{4}$. Consequentemente, por indução, existe uma base de bloco normalizada $(z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ em Z e uma sequência $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ em Y tal que $\sum\limits_{i\in\mathbb{N}} \|z_i - y_i\| \leq 1$.

Seja agora Z' o subespaço de Z gerado por $(z_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Como $(z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ é uma base de bloco normalizada de $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ segue pela Proposição 1.3.15 que $(z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ é base de Schauder de Z'.

Definimos então o operador $A : Z' \longrightarrow Y$ tal que $A(\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i z_i) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i y_i$. Notemos que A está bem definido, pois sendo C a constante básica de $(z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ pela Proposição 1.3.10 segue que a série $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i(y_i - z_i)$ converge. De fato, mostraremos abaixo que tal série é de Cauchy.

$$\|\sum_{i=n+1}^{n+p} a_i y_i\| = \|\sum_{i=n+1}^{n+p} a_i(y_i - z_i) + \sum_{i=n+1}^{n+p} a_i z_i\| \leq$$
$$\leq 2C\|\sum_{i=1}^{\infty} a_i z_i\|(\sum_{i=n+1}^{n+p} \|y_i - z_i\|) + \sum_{i=n+1}^{n+p} \|a_i z_i\| \leq$$
$$\leq 2C\|\sum_{i=1}^{\infty} a_i z_i\|(\sum_{i=n+1}^{n+p} \|y_i - z_i\|) + (p-1)2C\|\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i z_i\| \leq$$
$$\leq 2C\|\sum_{i=1}^{\infty} a_i z_i\|(p-1) + (p-1)2C\|\sum_{i=1}^{\infty} a_i z_i\| = 4C(p-1)\|\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i z_i\|$$

Mais ainda, definimos $K : Z' \longrightarrow X$ sendo $K(\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i z_i) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i(z_i - y_i)$. Como anteriormente, temos que K está bem definido. E também para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $K_n : Z' \longrightarrow X$ de modo que $K_n(\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i z_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i(z_i - y_i)$. Sendo K_n operadores com imagens de dimensão finita segue pela Proposição 1.5.2.3 que eles são compactos.

Notemos que K_n converge uniformemente para K.

De fato, seja $z = \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i z_i \in Z'$ com $\|z\| = 1$. Logo pela Proposição 1.3.10 temos que $|a_i| \leq 2C$, onde C é constate básica de $(z_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Então dado $\mathcal{E} > 0$ existe n_0 tal que para $n \geq n_0$ temos $\sum\limits_{i=n+1}^{\infty} \|z_i - y_i\| \leq \frac{\mathcal{E}}{2C}$. Portanto, para $n \geq n_0$ segue que $\|K_n(z) - K(z)\| = \|\sum\limits_{i=n+1}^{\infty} a_i(z_i - y_i)\| \leq 2C \sum\limits_{i=n+1}^{\infty} \|z_i - y_i\| \leq \mathcal{E}$.

Sendo $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de operadores compactos, pela Proposição 1.5.2.5, concluimos que K é compacto.

Finalmente observe que $A = Id + K$, onde $Id : Z' \longrightarrow Z'$ é o operador identidade.

Em particular, pela Proposição 1.5.2.6 A é da forma $Id + S$, onde S é um operador estritamente singular. Logo a Proposição 1.6.1 implica que A é um isomorfismo sobre a imagem do operador restrito a um subespaço Z'' de Z' de codimensão finita. Portanto Z'' e $A(Z'')$ são $Id + K$-isomorfos. ■

Lema 2.2.2 *Sejam E e Z subespaços de um espaço de Banach X tais que E e Z têm subespaços $(Id + S)$-isomorfos. Então $E + Z$ não é uma soma direta.*

Prova : Seja a aplicação $(e, z) \in (E \times Z) \longmapsto (e - z) \in (E + Z)$ tal que $\|(e, z)\|_1 = \|e\| + \|z\|$. (1)

Suponhamos, por absurdo que $E + Z$ seja uma soma direta.

Logo, exitem constantes não nulas c_1 e c_2 tais que $c_1\|(e, z)\|_1 \leq \|e - z\| \leq c_2\|(e, z)\|_1$, $\forall e \in E$ e $\forall z \in Z$ (veja [15], pág.12, prova do Lema 1.7.6). (2)

Sejam E' e Z' subespaços respectivamente de E e Z tais que existe um operador singular S, com $(Id + S) : E' \longrightarrow Z'$ sendo um isomorfismo sobre a imagem em Z'.

Em particular existem constante não nulas c_3 e c_4 tais que $c_3\|e'\| \leq \|(Id + S)(e')\| \leq c_4\|e'\|$, $\forall e' \in E'$. (3)

Como S é estritamente singular e tomando $\mathcal{E} = (1 + c_3).\frac{c_1}{2}$, temos pela Proposição 1.5.2.4, que existe um subespaço de dimensão infinita F em E' tal que $\|S|_F\| \leq \mathcal{E}$, $\forall \mathcal{E} > 0$. (4)

Logo de (2) em (4) temos que para $f \in F$ com $\|f\| = 1$

$$c_1\|(f, (Id + S)(f))\| \leq \|f - (Id + S)(f)\| = \|S(f)\| \leq \mathcal{E}.$$

Então, aplicando (1) na desigualdade acima temos

$$c_1(\|f\| + \|(Id + S)(f)\|) \leq \mathcal{E}$$

E tomando $\mathcal{E} = (1 + c_3)\frac{c_1}{2}$ e aplicando (3) na desigualdade anterior temos

$$c_1(1 + c_3) \leq c_1(\|f\| + \|(Id + S)(f)\|) \leq \mathcal{E} = (1 + c_3)\frac{c_1}{2}, \text{ absurdo.}$$

Portanto, $E + Z$ não é uma soma direta. ∎

2.3 Subespaços quasi-maximais e subespaços $Id + K$-isomorfos

Nesta seção obtemos dos Lemas 2.2.1 e 2.2.2 o Corolário 2.3.1 que será aplicado nas demonstrações dos próximos Lemas 2.4.1 e 2.4.2.

Corolário 2.3.1 *Sejam X um espaço de Banach e E um subespaço de X. Então E é* quasi-maximal *se, e somente se, para qualquer subespaço Z de X, Z e E têm subespaços $(Id + S)$-isomorfos.*

Prova : Seja Z um subespaço qualquer de X. Consequentemente, se E é um subespaço *quasi-maximal* de X, então pela Definição 2.1.1, para qualquer outro subespaço Z de X, a soma $E + Z$ não é direta. Dessa maneira, pelo Lema 2.2.1 E e Z têm subespaços $(Id + K)$-isomorfos.

Mas pela Proposição 1.5.2.6 todo operador compacto é estritamente singular, logo temos que E e Z têm subespaços $(Id + S)$-isomorfos.

Reciprocamente, se para qualquer subespaço Z de X, Z e E têm subespaços $(Id + S)$-isomorfos, então pelo Lema 2.2.2 $E + Z$ não é soma direta. Desse modo concluímos, pela Definição 2.1.1 que E é um subespaço quasi-maximal de X. ∎

Observação 2.3.2 *O Corolário 2.3.1 também é verdadeiro se substituírmos $(Id + S)$ por*

$(Id+K)$, pois todo operador compacto é também um operador estritamente singular (Proposição 1.5.2.6).

2.4 Quasi-maximalidade de subespaços e operadores estritamente singulares

Nesta seção demonstraremos os importantes Lemas 2.4.1 e 2.4.2 que serão utilizados nas provas dos Teoremas 12 (ii) e 13 que foram enunciados na Introdução.

Lema 2.4.1 *Sejam X um espaço de Banach e E um subespaço quasi-maximal em X. Sejam Z um espaço de Banach e $T \in L(X, Z)$. Então T é estritamente singular se, e somente se, a restrição $T_{|E}$ de T para E é estritamente singular.*

Prova : Por um lado se T é estritamente singular então é imediato pela própria definição que $T_{|_E}$ também o seja.

Por outro lado, suponha $T_{|E}$ um operador estritamente singular.

Seja Y um subespaço de X. Então pelo Corolário 2.3.1, se existe um subespaço Y' de Y e um isomorfismo $A = Id_{|Y'} + S$ de Y' para E, isso implica que :

$$T_{|E}A = T_{|E}(Id_{|_{Y'}} + S). \qquad (1)$$

Segue de (1) que, $T_{|Y'} = T(Id_{|Y'} + S - S) = T_{|E}A - TS$.

Como $T_{|E}$ e S são estritamente singulares, segue pela Proposição 1.5.1.6 que $T_{|E}A$ e TS também são estritamente singulares. Logo, pelo Corolário 1.5.1.5, $T|_{Y'}$ também é estritamente singular.

Em particular, pela Proposição 1.5.1.4 isso equivale a dizer que $\forall \mathcal{E} > 0$, $\exists y' \in Y'$, $\|y'\| = 1$ tal que $\|T(y')\| \leq \mathcal{E}$. Portanto, como Y é arbitrário temos pela Proposição 1.5.1.3 que T é estritamente singular. ∎

Lema 2.4.2 *Sejam X um espaço de Banach e E um subespaço quasi-maximal de X. Sejam Z um espaço de Banach e $T \in L(Z, X)$. Então, existem $Z' \subset Z$ e $T' \in L(Z', X)$ com $ImT' \subset E$ tal que $(T_{|Z'} - T')$ é estritamente singular.*

Prova : Seja $T \in L(Z, X)$. Então temos duas possibilidades para T.

Se T é estritamente singular, então basta $Z' = Z$ e $T' = 0$ para que $ImT' \subset E$ e que $T_{|Z'} - T' = T_{|Z} - 0 = T_Z$, que é estritamente singular pelo Lema 2.4.1.

Caso contrário, T não é estritamente singular, ou seja, existe um subespaço de Z tal que T é um isomorfismo desse subespaço sobre a sua imagem que está em X.

Portanto pelo Corolário 2.3.1 aplicado à $T(Z)$ e E, existe um subespaço Z' de Z tal que através de um isomorfismo da forma $A = (Id + S)$, $T(Z')$ é isomorfo a um subespaço de E.

Seja $T' = AT_{|Z'}$. Então, $T' = (Id + S)T_{|Z'} = T_{|Z'} + ST_{|Z'}$ onde tanto $T_{|Z'}$ como $ST_{|Z'}$ estão contidos em E. Logo, $ImT' \subset E$.

Além disso, pela Proposição 1.5.1.6 e 1.5.1.5 temos que $ST_{|Z'}$ é estritamente singular e consequentemente $ST_{|Z'} = (T_{|Z'} - T)$ também o é. ∎

Observação 2.4.3 *O Lema 2.4.2 também é válido se substituírmos no enunciado operador estritamente singular por operador compacto, pois pela Proposição 1.5.2.7 segue que para todo operador S estritamente singular sobre Z, existe um subespaço W de Z tal que $S_{|W}$ é compacto.*

ESPAÇOS DE BANACH HD_n

Neste capítulo apresentaremos o espaço de Banach HD_n e seus primeiros resultados que serão úteis nos outros capítulos. Consequentemente, estaremos em condições de provar o primeiro resultado (Teorema 3.3.1) dessa dissertação, sobre a caracterização da inexistência de sequência básica incondicional em espaços de Banach HD_n, Teorema 12 (i) enunciado na Introdução.

3.1 Espaço de Banach hereditariamente finitamente decomponível

Nesta seção além de definirmos os espaços de Banach HD_n, observamos algumas relações com espaços de Banach hereditariamente indecomponíveis e a quasi-maximalidade.

Definição 3.1.1 *Um espaço de Banach X é hereditariamente finitamente decomponível se o número máximo de subespaços de dimensões infinitas de X formando uma soma direta em X é finito. Para um natural $n \geq 1$, X é HD_n* se esse número de somandos é igual a n.

Observações 3.1.2 *Decorre da definição anterior que :*

(i) um espaço de Banach é HD_1 se, e somente se, ele é H.I. (hereditariamente indecomponível);

(ii) um espaço de Banach é HD_n se, e somente se, contém somas diretas de n subespaços e toda tal soma é quasi-maximal. Em particular, X é um espaço de Banach H.I. se, e somente se, todo subespaço fechado de dimensão infinita de X é quasi-maximal;

(iii) todo subespaço Y fechado de dimensão infinita de um espaço de Banach HD_n é HD_m para algum $m \leq n$.

A seguir na próxima seção (3.2) demonstraremos os primeiros resultados em espaços de Banach HD_n.

3.2 Somas entre espaços HD_n

O resultado (Proposição 3.2.2) da soma de espaços HD_n será demonstrado utilizando o Lema 2.2.1 e a Proposição 3.2.1 que provaremos a seguir.

Proposição 3.2.1 *Se X é um espaço de Banach HD_m e $s \in \mathbb{N}^*$, então $X \oplus \mathbb{R}^s$ é HD_m.*

Prova : Seja $X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_p$ uma soma direta em $X \oplus \mathbb{R}^s$. Então pela proposição 1.4.6 $X_i = Y_i \oplus F_i$, onde F_i são subespaços de dimensão finita de X_i e $Y_i \subset X_i$, $\forall\ 1 \leq i \leq s$.

Logo, $X_1 \oplus \cdots \oplus X_p = Y_1 \oplus \cdots \oplus Y_p \oplus F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$ e pelas Proposições 1.2.9 e 1.2.10 $Y_1 \oplus \cdots \oplus Y_p$ é uma soma direta em X.

Como X é HD_m , temos que $p \leq m$. Consequentemente $X \oplus \mathbb{R}^s$ é HD_m. ∎

Proposição 3.2.2 *Sejam X um espaço de Banach HD_m e Y outro espaço de Banach HD_n. Então $X \oplus Y$ é HD_{m+n}.*

Prova : Sejam X e Y espaços de Banach, respectivamente HD_m e HD_n.

Das hipóteses temos que existem m subespaços de X e n subespaços de Y formando respectivamente uma soma direta em X e outra em Y. Além do que, a soma de todos esses subespaços é uma soma direta de $(m+n)$ subespaços de $X \oplus Y$.

Seja o conjunto de índices $K = \{1, ..., k\}$ tal que Z_k representa uma soma direta em $X \oplus Y$. Então temos que provar que $k \leq m + n$.

Sejam as projeções $p : X \oplus Y \longrightarrow X$ e $q : X \oplus Y \longrightarrow Y$. Então vamos começar provando a afirmação : "cada $p|_i$ e cada $q|_i$ é ou estritamente singular ou um isomorfismo em subespaço Z_i, com $1 \leq i \leq k$".

Seja I_X o conjunto de i tal que $p|_i$ é um isomorfismo, de modo que para $i \in I_X$ temos $X_i = p(Z_i)$. Seja $\mathfrak{R}$ o conjunto de subconjuntos R de I_X tal que p é um isomorfismo sobre

Z_R ou sobre alguma soma menor (Preliminar 1.2.12).

Seja $r = \text{máx}\ \{|R| : R \in \mathfrak{R}\}$. Como X é HD_m temos que $r \leq m$. Podemos assumir agora que r está fixado para $R = [1, r]$ tal que $p_{|_R}$ é um isomorfismo para uma soma menor de $Z_i's$. Seja $p_{|R}^{-1}$ o isomorfismo inverso de $p_{|R}$.

Seja $i \in I_X \setminus R$. Então pela definição de r, p não é um isomorfismo sobre $Z_r \oplus Z_i$, ou sobre alguma soma menor. Isso implica, em particular, que nenhum subespaço de X_i forma uma soma direta com X_R, caso contrário, se existe $X_i' \subset X_i$, tal que X_i' e X_R formam uma soma direta, e supondo $Z_i' = p^{-1}(X_i')$, então sobre $Z_R \oplus Z_i'$, p é um isomorfismo, o que seria uma contradição.

Logo pelo Lema 2.2.1 e consequentemente pela Proposição 1.5.2.6 segue que algum subespaço de X_i é $Id{+}S$-isomorfo a um subespaço de X_R onde S é um operador estritamente singular. Portanto, para um subespaço X_i' de Z_i temos que X_i' é isomorfo na imagem em X_R por um operador da forma $Id_{|i} + S_i$.

Isso produz um isomorfismo de Z_i na sua imagem em Z_R da forma $b_i = p_{|R}^{-1}(Id_{|i} + S_i)p_{|i}$. Para $i \notin R$ e não pertecente a I_X, admitimos $b_i = 0$.

Seja b o operador de $Z_{K\setminus R}$ para Z_R cuja matriz de ordem $(r, k - r)$ é $[b_{r+1}, \ldots, b_k]$.

Seja agora uma outra decomposição $Z_K' = Z_1' \oplus \ldots \oplus Z_k'$ de Z_K, definida por $Z_i' = Z_i$ para $1 \leq i \leq r$ e $Z_i' = \{(-b_i z_i, z_i) : z_i \in Z_i\}$ para $r + 1 \leq i \leq k$. Então vamos mostrar que a restrição de p para $Z_{K\setminus R}'$ é estritamente singular.

Seja $i \in K \setminus R$. Então , ou $i \in I_X$ e então a restrição de p para Z_i' é definida por $p(-b_i z_i, z_i) = -(Id + S_i)pz_i + pz_i = -S_i p z_i$, logo pela Proposição 1.5.1.6 a restrição de p para Z_i' é estritamente singular; ou $i \notin I_X$ e então a restrição de p para Z_i' é definida por $p(-b_i z_i, z_i) = p_{|_i} z_i$ (onde $p_{|_i}$ é esritamente singular).

Portanto, p é estritamente singular quando restrito a $Z_{K\setminus R}'$.

Logo, a afirmação é verdadeira, e como $q = Id - p$, segue pela Proposição 1.6.1 que a restrição de q para algum subespaço de codimensão finita de $Z_{K\setminus R}'$ é um isomorfismo, isto é, existe um subespaço W de codimensão finita de $Z'_{K\setminus R}$ tal que $W \hookrightarrow Y$, ou seja W é isomorfo a um subespaço de Y.

Considerando fixado um W definido no parágrafo anterior seja agora $V \subset Z_{K\setminus R}$ tal que $Z_{K\setminus R} = W \oplus V$ e $\varphi : V \longrightarrow \mathbb{R}^s$ um isomorfismo sobrejetor, onde $s = dimV$. Então, $(q_{|_W}, \varphi) : Z_{K\setminus R} \longrightarrow Y \oplus \mathbb{R}^s$ definido por $(q,\varphi)(\omega, v) = (q(\omega), \varphi(v))$ é um isomorfismo sobre a imagem, isto é $Z_{K\setminus R} = W \oplus V \hookrightarrow Y \oplus \mathbb{R}^s$.

Como Y é HD_n segue pela Proposição 3.2.1 que $Y \oplus \mathbb{R}^s$ também é HD_n. Portanto, $k - r \leq n$, ou melhor $k = k - r + r \leq n + r \leq n + m$. ∎

Corolário 3.2.3 *Sejam X_i's espaços de Banach H.I. para os naturais $i = 1, ..., n$. Então o espaço $\bigoplus_{i=1}^n X_i$ é HD_n.*

Prova : Da hipótese temos que cada espaço X_i é $H.I.$. Segue da Observação 3.1.2.(i) que um espaço $H.I.$ é um espaço HD_1. Consequentemente, como $\bigoplus_{i=1}^n X_i = X_1 \oplus \cdots \oplus X_n$ é uma soma direta de espaços $H.I.$, temos que $\bigoplus_{i=1}^n X_i$ é uma soma direta de espaços HD_1.

Logo, aplicando a Proposição 3.2.2 temos que $\bigoplus_{i=1}^n X_i$ é um espaço HD_n. ∎

O Corolário 3.2.3 acima nos proporciona o primeira exemplo de espaços HD_n para $n \geq 2$. Contudo, a soma direta de n espaços H.I. não é o único exemplo de espaços HD_n. Um espaço HD_n não dessa forma foi construído em [5] por uma diferente resolução.

Dois resultados que já eram conhecidos para espaços H.I., também são verdadeiros para espaços HD_n. Vamos demonstrá-los na próxima seção (3.3).

3.3 Inexistência de base incondicional em espaços de Banach HD_n

Já estamos em condições de provar o Teorema 3.3.1 que foi enunciado como Teorema 12 (i) na Introdução .

Teorema 3.3.1 *Todo espaço de Banach hereditariamente finitamente decomponível não contém nenhuma sequência básica incondicional.*

Prova: Seja X um espaço de Banach HD_m. Por absurdo, vamos supor que X contém uma sequência básica incondicional $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Então, para todo natural fixado $n \geq 1$, X contém a soma direta $\bigoplus_{j=1}^{n} E_j^n$, onde E_j^n é o espaço definido por $(e_{ni+j})_{i\in\mathbb{N}}$.

Logo, como $\mathbb{N}$ é infinito , podemos obter um natural $n = m + 1$ que determina uma soma direta de $(m+1)$ espaços para X. Consequentemente, descaracteriza X como HD_m, o que é uma contradição. ■

Proposição 3.3.2 *Seja X um espaço HD_n. Se $X^k \sim X^l$ então $k = l$.*

Prova : Pela proposição 3.2.2 se X é HD_n então X^k é HD_{nk} enquanto X^l é HD_{nl}.

Como ambos são isomorfos, temos $nk = nl$, e assim $k = l$. ■

ESPAÇOS DE BANACH HD_n FUNDAMENTAIS

Um tipo particular de espaços HD_n chamados espaços de Banach HD_n fundamentais será apresentado neste capítulo, que também tem por proposito demonstrar o Lema 4.3.2 sobre operadores em espaços HD_n fundamentais. Esse Lema será de grande importância para provarmos dois dos principais resultados desta dissertação, ou seja, os Teoremas 5.1.2 e 5.2.1 no Capítulo 5 (Teoremas 12(ii) e 13 enunciados na Introdução).

Antes daremos na seção 4.1 a definição sobre os espaços HD_n fundamentais, além das notações e observações que auxiliam nos resultados da seção 4.2

4.1 Espaços HD_n fundamentais

Definição 4.1.1 *Um espaço de Banach X é um espaço HD_n fundamental se ele é a soma direta de n espaços HI que tomados dois a dois são ou isomorfos ou totalmente incomparáveis.*

Lembramos que dois espaços são ditos totalmente incomparáveis se nenhum subespaço do primeiro é isomorfo a algum subespaço do segundo (Definição 1.2.13).

Notações 4.1.2 *Seja $\mathcal{F}$ um espaço HD_n fundamental da forma $\mathcal{F} = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i$. Então :*

(i) para i, j em $\{1, \dots, n\}$, denotamos por $i \simeq j$ se F_i e F_j são isomorfos;

(ii) para cada i, denotamos por p_i, a projeção $\mathcal{F} \to F_i$;

(iii) para cada $i \simeq j$, denotamos por α_{ij} um isomorfismo estabelecido de F_i para F_j, e por p_{ij} a imagem $\alpha_{ij} p_i$ de $\mathcal{F}$ para F_j;

(iv) denotamos por $\alpha(\mathcal{F})$ o conjunto das classes de equivalência de índices para a relação $\simeq$;

(v) definimos o conjunto $s(\mathcal{F})$ como a sequência finita das classes de equivalência ordenadas por cardinalidade decrescente; também definimos o número positivo $n(\mathcal{F})$ por $n(\mathcal{F})^2 = \sum_{s \in s(F)} |s|^2$.

Escrevendo esses números como funções de $\mathcal{F}$ é um abuso de notação, porque a "priori", eles dependem da escolha de decomposição de $\mathcal{F}$ como $\bigoplus_{i=1}^{n} F_i$. Permitimos essa notação porque veremos que $s(\mathcal{F})$ e $n(\mathcal{F})$ são fatores unicamente determinados por $\mathcal{F}$. Até então , pensaremos em s e n como funções de $\mathcal{F}$ sujeitas a uma decomposição particular.

Veremos que $s(\mathcal{F})$ e $n(\mathcal{F})$ caracterizam de uma maneira o espaço de operadores sobre $\mathcal{F}$. Nota-se também que $n(\mathcal{F}) \leq n$.

Observação 4.1.3 *Seja $\mathcal{F}$ um espaço HD_n fundamental. Então uma soma menor do que $\mathcal{F}$ pode sempre ser escolhida fundamental (se dois espaços não são totalmente incomparáveis, então passando para subespaços podemos assumir que eles são isomorfos; repetindo esse procedimento, finalizamos com uma soma fundamental). Escolheremos sempre tais somas menores, sem necessariamente dizê-las.*

É claro que ambos, $s(\mathcal{F})$ e $n(\mathcal{F})$, são preservados quando aplicamos um isomorfismo para $\mathcal{F}$. Nota-se também que nem $s(\mathcal{F})$ nem $n(\mathcal{F})$ mudam quando passamos para uma soma menor; novamente isso é um abuso de notação, mas podemos permiti-lo aqui porque a comparação de duas somas fundamentais é por definição a comparação de duas decomposições de somas. A prova é a seguinte :

Sejam $\mathcal{F}$ uma soma fundamental e G uma soma menor e para simplificar a notação, assuma que $\forall i, G_i \subset F_i$. Então se F_i e F_j são totalmente incomparáveis, também são os subespaços G_i e G_j.

Se F_i e F_j são isomorfos, então pela propriedade da quasi-maximalidade em subespaços $H.I.$, isto é, aplicando o Corolário 2.3.1 concluímos que G_i e G_j não são totalmente incomparáveis, portanto precisam ser isomorfos.

4.2 Espaços HD_n fundamentais, espaços HD_n e subespaços quasi-maximais

Esta seção é necessária para estabelecer algumas relações dos espaços HD_n fundamentais com espaços HD_n e com subespaços quasi-maximais, o que nos permitirá utilizá-las nas demonstrações dos Teoremas 12(ii) e 13 enunciados na Introdução.

Vejamos então a relação dos espaços HD_n fundamentais com espaços HD_n.

Lema 4.2.1 *Todo espaço HD_n contém um espaço HD_n fundamental.*

Prova: Seja X, um espaço de Banach HD_n. Então X por definição contém uma soma direta de no máximo n subespaços. Cada um desses subespaços precisam ser $H.I.$, do contrário X deverá conter uma soma direta de no mínimo $n+1$ subespaços.

Por observação anterior (4.1.3), passando para subespaços apropriados, podemos assumir que essa soma é um espaço HD_n fundamental. ∎

Observação 4.2.2 *Se X é um espaço de Banach HD_n, então todo subespaço HD_n fundamental $\mathcal{F}$ de X é quasi-maximal em X. Essa é uma importante observação com respeito aos Lemas 2.4.1 e 2.4.2.*

4.3 Operadores em espaços de Banach HD_n fundamentais

No que segue seja X um espaço de Banach HD_n. Estudaremos agora a posição relativa de subespaços fundamentais de X. Fixaremos também notações que nos ajudam na prova do Lema 4.3.2.

Notação 4.3.1 *Sejam $\mathcal{F} = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i$ um espaço fundamental e $\mathcal{G} = \bigoplus_{i=1}^{m} G_i$ um subespaço HD_m fundamental de $\mathcal{F}$. Denotamos por $I_{\mathcal{G},\mathcal{F}}$ a injeção de $\mathcal{G}$ na imagem em $\mathcal{F}$, escrita como uma matriz $n \times m$ com coeficientes em $L(G_j, F_i)$, para $1 \leq j \leq m$ e $1 \leq i \leq n$.*

Para $1 \leq i \leq n$, lembramos que p_i denota a projeção sobre F_i, e de acordo com a notação definida em 1.2.12 $p_{i|j}$ é o coeficiente da i-ésima linha e j-ésima coluna da matriz $I_{G,F}$.

Lema 4.3.2 *Sejam $\mathcal{F} = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i$ um espaço HD_n fundamental e $\mathcal{G} = \bigoplus_{i=1}^{m} G_i$, um subespaço fundamental de $\mathcal{F}$. Então existe uma soma $\mathcal{H}$ menor do que $\mathcal{G}$, um isomorfismo L de $\mathcal{H}$ para $\mathcal{G}$ e uma permutação matricial E em $\mathcal{F}$ tal que $EI_{\mathcal{G},\mathcal{F}}L = \binom{D+S}{V}$ onde D representa a matriz diagonal de bloco (m, m) de um isomorfismo, S a matriz (m, m) de um operador estritamente singular e V alguma matriz $(n - m, m)$.*

Prova: Seja H uma soma menor de um subespaço fundamental G do espaço de Banach HD_n fundamental F, tal como descritos nas hipóteses.

Vamos primeiro definir que a matriz de um operador de H para F é da forma Gaussiana sobre as k primeiras linhas se ela é da forma $\begin{pmatrix} D+S & S' \\ V & V' \end{pmatrix}$, onde D é a matriz diagonal de bloco (k, k) de um isomorfismo, S (respectivamente S') a matriz (k, k) (respectivamente $(k, m - k)$) de um operador estritamente singular, e V (respectivamente V') alguma matriz $(n - k, k)$ (respectivamente $(n - k, m - k)$).

Seja A_{k-1} uma matriz da forma Gaussiana sobre as $(k-1)$ primeiras linhas e também a matriz de um isomorfismo. Então existem uma soma H_{k-1} menor do que G_{k-1}, um isomorfismo $L_{k-1} : H_{k-1} \longrightarrow G$, e uma permutação E_{k-1} sobre F tal que $E_{k-1} \cdot I_{G,F} \cdot L_{k-1} = A_{k-1}$.

Seja um automorfismo B sobre H_{k-1}. Então,
$E \cdot A_{k-1} \cdot B = E \cdot (E_{k-1} \cdot I_{G,F} \cdot L_{k-1}) \cdot B = (E \cdot E_{k-1}) \cdot I_{G,F} \cdot (L_{k-1} \cdot B) = E_k \cdot I_{G,F} \cdot L_k = A_k$ onde E é uma permutação sobre $F_i's$ e L_K é um automorfismo de H_k em G. Logo, segue que A_k é da forma Gaussiana sobre as k primeiras linhas e representa um isomorfismo.

Repetindo esse procedimento até $k = m$, obtemos o resultado esperado. Portanto precisamos determinar B tal que $A_{k-1} \cdot B = A_k$.

Sejam $N = \{1, \cdots, n\}$ e $M = \{1, \cdots, m\}$. Então pelo fato de A_{k-1} ser um isomorfismo, temos que a restrição de A_{k-1} para H_k não é estritamente singular. Logo existe i tal que a restrição $p_{i|k}$ (Notação 4.3.1) de H_k para $p_i(H_k)$ não é estritamente singular. Pela nossa hipótese sobre a forma Gaussiana de A_{k-1}, temos que $i \geq k$. Consequentemente também é possível afirmar que a menos de uma permutação sobre os F_i's, podemos assumir que $i = k$.

Passando para uma soma menor, podemos assumir que para cada j a restrição $p_{k|j}$ de H_j para $p_k(H_j)$ é estritamente singular ou um isomorfismo.

Seja J o conjunto de j tais que $p_{k|j}$ é um isomorfismo. Em particular, $k \in J$. Seja $C_j = p_k(H_j)$, para cada j em J. Então C_j e C_k são subespaços de dimensões infinitas do espaço hereditariamente indecomponível F_k. Logo, aplicando o corolário 2.3.1, C_j e C_k têm subespaços $(Id + S)$-isomorfos passando para uma soma menor, podemos assumir que $C_k = (Id + s_j)(C_j)$. Em particular, escolhemos $s_k = 0$.

Seja b_j o operador $p_{k|k}^{-1}(Id_{|j} + s_j)p_{k|j}$ de H_j para H_k com $j \in J$, ou $b_j = 0$ para $j \notin J$. Então a matriz $[b_1, \cdots, b_m]$ é matriz do operador b de H_M para H_k.

Desse modo, B é o automorfismo sobre H_M com matriz $\begin{pmatrix} Id_{k-1} & 0 & 0 \\ -b_{|[1,k-1]} & Id & -b_{|[k+1,m]} \\ 0 & 0 & Id_{m-k} \end{pmatrix}$.

Vamos agora verificar se $A_k = A_{k-1} \cdot B$.

Como A_{k-1} é da forma $\begin{pmatrix} diag(p_i)_1^{k-1} + S_1 & S_2 & S_3 \\ p_{k|[1,k-1]} & p_{k|k} & p_{k|[k+1,m]} \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{pmatrix}$ segue que A_k é da forma $\begin{pmatrix} diag(p_i)_1^{k-1} + S_1' & S_2 & S_3' \\ (p_k - p_k b)_{|[1,k-1]} & p_{k|k} & (p_k - p_k b)_{k|[k+1,m]} \\ V_1' & V_2 & V_3' \end{pmatrix}$ onde todos os coeficientes da k-ésima linha exceto $p_{k|k}$ são agora estritamente singulares.

Realmente, seja $j \neq k$; então ou $j \notin J$ e então $(p_k - p_k b)$ é equivalente a $p_{|j}$ estritamente singular, ou $j \in J$ e então $(p_k - p_k b)_{|j} = p_{k|j} - (Id_{|j} + s_j)p_{k|j} = -s_j p_{k|j}$, tal que é também estritamente singular.

Portanto, A_k é da forma Gaussiana sobre as k primeiras linhas, e também é a matriz de um isomorfismo. ∎

Corolário 4.3.3 *Sejam $\mathcal{F} = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i$ um espaço de Banach HD_n fundamental e $\mathcal{G} = \bigoplus_{i=1}^{m} G_i$ um subespaço HD_m fundamental de $\mathcal{F}$. Então existem uma soma $\mathcal{H}$ menor do que $\mathcal{G}$, um subconjunto M' de $\{1, \ldots, n\}$ de cardinalidade m e um isomorfismo A sobre $\mathcal{H}$ tal que $A(\mathcal{H})$ é menor do que $F_{M'}$.*

Prova : Sejam F e G tal como na hipótese enunciada. Então, fixado um $M' = \{1, \cdots, m\}$ contido em $\{1, \cdots, n\}$, e aplicando o Lema 4.3.2 determina-se que existe uma soma H menor do que G, um automorfismo B sobre H e um isomorfismo $L : H \longrightarrow \sum_{i=1}^{m} F_i$ que compostos a menos de uma permutação sobre $F_i's$, finalizada num conjunto M' de cardinalidade m determina $Z = LB(H)$ menor do que $\bigoplus_{i=1}^{m} F_i = F_{M'}$. ∎

Proposição 4.3.4 *Sejam X um espaço de Banach HD_n e $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}'$ subespaços HD_n fundamentais de X. Então existem um $\mathcal{G}$ subespaço HD_n fundamental de $\mathcal{F}$ e respectivamente $\mathcal{G}'$ de $\mathcal{F}'$ tais que $\mathcal{G}$ e $\mathcal{G}'$ são isomorfos.*

Prova : Seja X um espaço de Banach HD_n. Sejam $F = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i$, e $F' = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i'$ subespaços HD_n fundamentais de X.

Seja a soma G menor do que F. Então pela Observação 3.1.2.(ii), G é quasi-maximal e consequentemente aplicando Corolário 2.3.1, G e F' têm subespaços $(Id + S)$-isomorfos.

Como F' é fundamental em X, temos pela Observação 3.1.2.(ii) que F' é quasi-maximal. Logo, aplicando o Corolário 2.3.1, $\forall i \in \{1, \cdots, n\}$, achamos G_i de F_i que isomorfa com um subespaço de F' por um operador da forma $(Id + S)$, isto é, existe $(B_i = Id + S_i)_{|G_i}$.

Assim a soma $G = \bigoplus_{i=1}^{n} G_i$ que é menor do que F, isomorfa com uma soma em F' por um operador B da forma $Id + S$, ou seja, $B : G \longrightarrow F'$ tal que $B = \{B_1, \cdots, B_n\}$, para cada subespaço de codimensão finita de G, pela Proposição 1.6.1.

Seja $Z = B(G)$. Então, como $G \subset F$ podemos aplicar o Corolário 4.3.3, sem perda de generalidade, tendo uma nova restrição dos $F_i's$ que é um isomorfismo L tal que $L(Z_i)$ é menor do que F_i'.

Portanto a soma $G' = L(Z) = LB(G)$ é menor do que F' e isomorfa com G. ■

Agora somos capazes para estudar o espaço de operadores sobre um espaço complexo HD_n fundamental, e então um espaço complexo HD_n em geral. Isto será feito no próximo capítulo.

OPERADORES EM ESPAÇOS DE BANACH COMPLEXO HD_n

No presente capítulo demonstraremos os Teoremas 12(ii) e 13 mencionados na Introdução (respectivamente Teoremas 5.1.2 e 5.2.1, neste capítulo). Ambos são sobre os espaços de operadores em espaços de Banach HD_n.

5.1 Operadores em subespaços de um espaço de Banach complexo HD_n fundamental

Nesta seção 5.1 provaremos o Teorema 5.1.2, onde usaremos os Lemas 2.4.1 e 4.3.2. Além desses resultados faz-se necessário lembrarmos primeiro o Teorema 5.1.1 demonstrado em [3].

Teorema 5.1.1 *Sejam X um espaço de Banach complexo H.I. e Y um subespaço de X. Então cada operador de Y para X é da forma $\lambda I_{Y,X} + S$, onde $\lambda \in \mathbb{C}$, $I_{Y,X}$ é a imagem da inclusão canônica de Y em X, e S é um operador estritamente singular.*

No que segue nesta seção, seja $\mathcal{E} = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$ um espaço de Banach complexo HD_n fundamental. Lembremos que p_{ij} denota $\alpha_{ij}p_i$, onde p_i é a projeção sobre E_i, e α_{ij} um isomorfismo dado de E_i para E_j (Notação 4.1.2.(iii)). Denotamos por $\sum_{i \simeq j}$ a soma $\sum_C \sum_{i,j \in C}$, onde C percorre as classes de índices com $\simeq$ (Notação 4.1.2.(ii) e (iv)).

Teorema 5.1.2 *Sejam $\mathcal{E} = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$ um espaço de Banach complexo HD_n fundamental e Y um subespaço de dimensão infinita de $\mathcal{E}$. Então todo operador de Y tem a forma $\sum_{i \simeq j} \lambda_{ij} p_{ij} + S$, onde λ_{ij} é uma constante e S é um operador estritamente singular.*

Prova : Sejam Y satisfazendo as hipóteses e S um operador estritamente singular em Y. . Logo, Y é HD_m com $m \leq n$.

Seja $\mathcal{F} = \bigoplus_{i=1}^{m} F_i$ um subespaço HD_m fundamental de Y. Então conforme o Lema 4.3.2, nós podemos, renumerando os $E_i^{\prime}s$, assumir que a matriz $I_{\mathcal{F},\mathcal{E}}$ de injeção de $\mathcal{F}$ em $\mathcal{E}$ é da forma $\binom{D+S}{V}$, onde D é a matriz diagonal de blocos (m,m) de um isomorfismo, S é a matriz (m,m) de um operador estritamente singular, e V é alguma matriz $(n-m,m)$.

Podemos também assumir, passando para uma soma menor, que para todo $i \in \{1,\ldots,m\}$, $p_{i|i}$ é um isomorfismo. Para todo tal i, seja $H_i = p_i(F_i)$. Seja $p_{i|i}^{-1}$ o operador inverso de $p_{i|i}$ definido sobre H_i.

Seja agora T um operador de Y para $\mathcal{E}$. Para cada $j \simeq i$, Hi é isomorfo por α_{ij} a um subespaço de E_j, portanto pelo Teorema 5.1.1, cada operador de Hi para E_j é da forma $\lambda\alpha_{ij} + S$; enquanto para todo $j \not\simeq i$, H_i e E_j são totalmente incomparáveis, portanto cada operador de H_i para E_j é estritamente singular.

Como o operador $Tp_{i|i}^{-1}$ é de H_i para $\mathcal{E}$, temos que $Tp_{i|i}^{-1}$ é da forma $\sum_{i\simeq j}\lambda_{ij}\alpha_{ij} + S_i$, onde S_i é um operador estritamente singular. Segue que para cada $i \leq m$, $T_{|F_i}$ é da forma $(\sum_{j\simeq i}\lambda_{ij}p_{ij})_{|F_i} + S_i$. Se $\lambda_{ij} = 0$ para todo $i \geq m+1$, então $T_{|\mathcal{Y}} = \sum_{i\simeq j}\lambda_{ij}p_{ij} + S$.

Portanto a restrição para $\mathcal{F}$ do operador S definido por $S = T - \sum_{i\simeq j}\lambda_{ij}p_{ij}$ é estritamente singular. Consequentemente, pelo Lema 2.4.1, S é também estritamente singular sobre Y. ∎

No que segue apresentaremos na próxima seção 5.2 o Teorema 5.2.1 ou Teorema 13 como está enunciado na Introdução.

5.2 Dimensão do espaço quociente entre operadores de subespaços de um espaço de Banach complexo HD_n e seus operadores estritamente singulares

Para a demonstração do Teorema 5.2.1, além do resultado obtido na seção anterior (Teorema 5.1.2), usaremos também os Lemas 2.4.1, 2.4.2 e 4.3.2.

Teorema 5.2.1 *Seja X um espaço de Banach complexo HD_n. Então :* $dim(L(X)/S(X)) \leq n(X)^2 \leq n^2$.

Prova : Vejamos a afirmação abaixo.

" Sejam X um espaço de Banach complexo HD_n e Y subespaç HD_m de X. Então $\dim(L(Y,X)/S(Y,X)) \leq n(Y) \cdot n(X) \leq m \cdot n$".

Nota-se que provando a afirmação acima, a demonstração do Teorema é imediata, pois como por corolário basta fazermos $Y = X$.

Sejam X e Y como descriminados na afirmação. Sejam $\mathcal{F} = \bigoplus_{i=1}^{m} F_i$ um subespaço HD_m fundamental de Y e $\mathcal{E} = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$ um subespaço HD_n fundamental de X contendo $\mathcal{F}$. Sem perda de generalidade, podemos também assumir que a injeção de $\mathcal{F}$ para $\mathcal{E}$ é da forma dada pelo Lema 4.3.2.

Seja $T \in L(\mathcal{F}, X)$. Como $\mathcal{E}$ é quasi-maximal em X, para $1 \leq i \leq m$, podemos aplicar o Lema 2.4.2 onde $Z = F_i$; obtendo $F_i' \subset F_i$ e T_i' uma perturbação estritamente singular de $T_{|F_i'}$ com $ImT_i' \subset \mathcal{E}$.

Seja $\mathcal{F}' = \sum_{i=1}^{m} F_i'$. Então podemos assumir que $\mathcal{F}'$ é fundamental e T' é o único operador sobre $\mathcal{F}'$ tal que $T'_{|F_i'} = T_i'$ toma seus valores em $\mathcal{E}$ para todo i e T' é uma perturbação estritamente singular de $T_{|\mathcal{F}'}$.

Logo, as mesmas formas de T' e $T_{|\mathcal{F}'}$ são dadas pelo Teorema 5.1.2.

Como $\mathcal{F}'$ é quasi-maximal em $\mathcal{F}$, temos pelo Lema 2.4.1 que T é da mesma forma sobre a totalidade de $\mathcal{F}$. Agora por causa da forma de $\mathcal{F}$, os elementos de alguma classe de equivalência em $\alpha(\mathcal{F})$ são isomorfos com os elementos de uma e somente uma classe de equivalência em $\alpha(\mathcal{E})$. Isso define uma imagem da aplicação quociente e de $\alpha(\mathcal{F})$ para $\alpha(\mathcal{E})$. Segue que $dim(L(\mathcal{F},X)/S(\mathcal{F},X)) = \sum_{\alpha \in \alpha(\mathcal{F})} |\alpha| \cdot |e(\alpha)|$, portanto pela desigualdade de Cauchy-Schywarz $dim(L(\mathcal{F},X)/S(\mathcal{F},X)) \leq n(\mathcal{F}) \cdot n(\mathcal{E})$.

Agora para Z subespaço fechado de dimensão infinita de X e $U \in L(Z,X)$, seja $\tilde{U}$ a classe de operadores módulo U estritamente singulares. Definimos uma imagem

$\delta : L(Y,X)\diagup S(Y,X) \rightarrow L(\mathcal{F},X)\diagup S(\mathcal{F},X)$ por $\delta(\tilde{T}) = \tilde{T_{|\mathcal{F}}}$. É claro que δ é um a aplicação linear e pelo Lema 2.4.1 é uma injeção. Logo, segue que :
$dim(L(Y,X)\diagup S(Y,X)) \leq n(Y)n(X) \leq m \cdot n$. ■

TEORIA ESPECTRAL EM ESPAÇOS HD_n

Neste capítulo estudaremos a teoria espectral em espaços HD_n para demonstrar o Lema 6.3.1 sobre operadores semi-Fredhom e Fredholm em espaços de Banach HD_n. Esse lema irá desempenhar um papel importante na demonstração do Teorema Principal (Teorema 7.1.1).

Primeiramente relembremos algumas definições na Seção 6.1 que são necessárias para os resultados da teoria espectral em espaços HD_n que serão demonstrados na Seção 6.2.

6.1 Definições na teoria espectral em espaços HD_n

Definição 6.1.1 *Sejam X, espaço de Banach e $T \in L(X)$. Já vimos que T é Fredholm se sua imagem é fechada, e seus kernel e cokernel têm dimensões finitas. Dizemos ainda que T é semi-Fredholm se sua imagem é fechada, e seu kernel ou cokernel tem dimensão finita. Por fim, relembramos que o índice generalizado de Fredholm determinado por $i(T) = \dim(KerT) - \dim(coKerT)$, é definido e adiante provamos que é contínuo sobre o conjunto de operadores semi-Fredholm.*

Denotamos agora, por $S(T)$ o espectro essencial de T assim definido $\{ \lambda \in \mathbb{C} : \exists (T - \lambda Id) : X \longrightarrow X$, operador contínuo que não é Fredholm $\}$, e por $\delta S(T)$ a fronteira de $S(T)$.

Lembremos da Proposição 1.5.3.9 onde afirma que operadores de Fredholm $T \in L(X)$ são exatamente $[T]$ invertíveis, isto é, a classe de operadores compactos invertíveis na Álgebra de Calkin $L(X)/K(X)$ (Definição 1.5.3.8). Logo, pela definição o espectro essencial de T é o espectro da classe de operadores T não invertíveis na Álgebra de Calkin.

Definição 6.1.2 *Sejam X um espaço de Banach e $T \in L(X)$. Então, o operador T é dito infinitamente singular se para cada subespaço X' de codimensão finita de X, a restrição de T para X' não é um isomorfismo, o que equivale a dizer pela Proposição 1.5.2.7 que para todo $\mathcal{E} > 0$, existe um subespaço Y de dimensão infinita de X tal que $\|T_{|_Y}\| \leq \mathcal{E}$.*

Definição 6.1.3 *Um escalar λ é infinitamente singular para um operador T de $L(X)$, onde X é um espaço de Banach, se $T - \lambda Id$ é infinitamente singulares. Denotamos por $I(T)$ o conjunto de valores infinitamente singulares para T.*

Na seção a seguir serão apresentados os resultados envolvendo espectro essencial de operadores sobre espaços de Banach, que serão úteis na prova do Lema 6.3.1.

6.2 Características do espectro essencial de um operador sobre espaços de Banach

Inicialmente vamos demonstrar um resultado sobre continuidade no índice generalizado de Fredholm.

Proposição 6.2.1 *Sejam X um espaço de Banach e $T \in L(X)$. Então, o índice generalizado de Fredholm para operadores $(T - \lambda Id) \in L(X)$ denotado por $i(T - \lambda Id)$ é definido e contínuo sobre o conjunto dos operadores $(T - \lambda Id)$ semi-Fredholm, onde $\lambda \in A \subset \mathbb{C}$ tem valor discreto.*

Prova : Primeiramente observe que $A = \{\lambda \in \mathbb{C} / (T - \lambda Id)$ ou é um operador Fredholm ou semi-Fredholm $\}$.

Seja φ uma função sobre A a valores em $\mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\}$ definida por $\varphi(\lambda) = i(T - \lambda Id)$. Observa-se, por definição do índice generalizado de Fredholm que $(T - \lambda Id)$ ou é Fredholm ou semi-Fredholm. Para provarmos que φ é contínua, vamos decompô-la em duas funções a saber,
$f : A \longrightarrow L(X)$ e $g : L(X) \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\}$, definidas respectivamente por $f(\lambda) = T - \lambda Id$ e $g(T - \lambda Id) = i(T - \lambda Id)$, $\forall T \in L(X)$ tais que $\varphi = g \circ f$.

Podemos afirmar que f é contínua $\forall \lambda \in A$, pois fixado um λ_0 arbitrariamente pertencente a A e um $T \in L(X)$ temos que $\forall \mathcal{E}_f > 0$, $\exists \delta_f > 0$ tal que se $\|\lambda - \lambda_0\| < \delta_f$ então $\|f(\lambda) - f(\lambda_0)\| = \|(T - \lambda Id) - (T - \lambda_0 Id)\| = |\lambda - \lambda_0| < \delta_f$, $\forall \lambda \in A$, portanto basta $\mathcal{E}_f = \delta_f$.

Também podemos afirmar que g é contínua $\forall F \in Imf$, onde $Imf = Dg$, pois fixado um $T \in L(X)$ e um F_0 qualquer da Imf temos que $\forall \mathcal{E}_g > 0$, $\exists \delta_g > 0$ tal que se $\|F - F_0\| = \|H\| < \delta_g$ então $|g(F_0 + H) - g(F_0)| = |i(F_0 + H) - i(F_0)|, \forall F \in Dg$. (1)

Uma vez que (1) é verdade, segue da proposição 1.5.3.10.(iii) que $|i(F_0 + H) - i(F_0)| = |i(F_0) - i(F_0)| = 0 < \mathcal{E}_g$, qualquer que seja $\delta_g > 0$.

Logo, como ambas funções são contínuas, temos que a função composta $\varphi = g \circ f$ é também contínua para todo $\lambda \in A \subset \mathbb{C}$. ∎

Vejamos agora a Proposição 6.2.2, que junto com a proposição anterior são usadas nas demonstrações dos próximos resultados.

Proposição 6.2.2 *Sejam X um espaço de Banach e $T \in L(X)$. Então o espectro essencial de T, $S(T)$, é fechado.*

Prova : Considerando X e T como nas hipóteses, vamos provar que o complemento algébrico de $S(T)$, isto é, $\mathbb{C} \setminus S(T)$ é aberto.

Como pela Proposição 6.2.1. o índice generalizado de Fredholm, definido num subconjunto $A \subset \mathbb{C}$ que caracteriza os $\lambda \in \mathbb{C}$ tais que os operadores da forma $(T - \lambda Id)$ são Fredholm ou são semi-Fredholm, apresenta-se como um função contínua, temos que $\mathbb{C} \setminus S(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}/(T - \lambda Id)$ é Fredholm $\}$, contido em A é aberto. Provemos tal afirmação.

Supondo por absurdo que $\mathbb{C} \setminus S(T)$ é fechado, seja $\lambda \in \delta(\mathbb{C} \setminus S(T))$. Então, existe $i(T - \lambda Id)$.

Por outro lado, temos que $i(T - \lambda Id)$ não está definido $\forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus A$.

Uma vez que são verdades as afirmações acima, segue que $\forall r > 0$, pela Proposição 6.2.1 existe uma bola de raio r e centro em λ contendo um conjunto $\{\lambda' \in A : i(T - \lambda' Id) = \infty\}$. Além disso pela continuidade da mesma Proposição 6.2.1 temos que $\forall \mathcal{E} > 0$, existe λ tal que $\forall \lambda' \in B_r(\lambda)$, se $\|\lambda - \lambda'\| \leq r$ então $\forall k \in \mathbb{N}$ temos

$|i(T - \lambda Id) - i(T - \lambda' Id)| = |K - \infty| < \mathcal{E}$, absurdo.

Portanto, $\mathbb{C} \setminus S(T)$ é aberto. ∎

Provaremos agora os Lemas 6.2.3 e 6.2.4 sobre respectivamente a fronteira e a cardinalidade do espectro essencial de um operador sobre espaço de Banach que nos auxiliarão na demonstração do Lema 6.3.1

Lema 6.2.3 *Sejam X um espaço de Banach e $T \in L(X)$. Então, $\delta S(T) \subset I(T)$.*

Prova : Sejam X e T tal como nas hipóteses. Então, pela definição do espectro essencial de T, $S(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (T - \lambda I)$ operador contínuo que não é Fredholm $\}$, e pela Proposição 1.5.3.9 $(T - \lambda Id)$ não é invertível na álgebra de Calkin $L(X)/K(X)$.

Seja agora $\lambda \in \delta S(T)$. Então, como $S(T)$ é fechado, ou seja, $\delta S(T) \subset S(T)$, temos que $(T - \lambda Id)$ também não é Fredholm. E nem é semi-Fredholm, pois senão, pela continuidade demonstrada na Proposição 6.2.1 na função de imagem $i(T - \lambda Id)$ existiria λ' em uma vizinhança de λ tal que $(T - \lambda' Id)$ seria semi-Fredholm de índice infinito, contrariando a hipótese de $\lambda \in \delta S(T) \subset S(T)$.

Uma vez que a afirmação anteiror é verdadeira segue da Definição 6.1.1 que $\forall \lambda \in \delta S(T)$ ou $\dim Ker(T - \lambda Id) = \infty$ ou $(T - \lambda Id)$ não é fechado.

Vamos caracterizar um subespaço de X de acordo com a Definição 6.1.2.

Seja X' subespaço fechado de dimensão infinita e de codimensão finita de X. Então, pela Proposição 1.4.5, X' é complementado em X. Logo, pelas Proposições 1.2.10 e 1.4.6.(i) existe um subespaço N de dimensão finita n de X tal que $X = X' \oplus N$.

No caso da $\dim Ker(T - \lambda Id) = \infty$, seja H um subespaço de dimensão infinita tal que $H \subset Ker(T - \lambda Id)$. Então, $H \cap X' \neq \{\sigma\}$.

Portanto, existe $x \in H \cap X'$ e $x \neq \sigma$ tal que $(T - \lambda Id)(x) = \sigma$. Assim, $(T - \lambda Id)$

não é injetor. Logo, $(T - \lambda Id)$ não possui um isomorfismo.

Dessa maneira, $T - \lambda Id$ pelas Definições 6.1.2 e 6.1.3 é infinitamente singular e $\lambda \in I(T)$.

Agora, no caso em que $(T - \lambda Id)(X)$ não é fechado, considerando a mesma decomposição $X = X' \oplus N$, temos $(T - \lambda Id)(X) = (T - \lambda Id)(X' + N) = (T - \lambda Id)(X') + (T - \lambda Id)(N)$.

Supondo por absurdo que $(T - \lambda Id)_{|_{X'}}$ é um isomorfismo temos pelas Proposições 1.2.18 e 1.2.14 que $(T - \lambda Id)_{|_{X'}}$ é fechado.

Supondo agora que para toda a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em X, com $x_n \longrightarrow x$ e $(T - \lambda Id)(x_n) \longrightarrow y \in X$, temos inicialmente que $x \in D(T - \lambda Id)_{|_{X'}}$, pois X' é fechado por hipótese e N é fechado pela Proposição 1.2.24. Como $x_n \longrightarrow x$, temos que $(T - \lambda Id)(x - x_n) \longrightarrow \sigma$, logo $(T(x) - T(x_n)) - \lambda(x - x_n) \longrightarrow \sigma$. Dessa maneira, $T(x) \to T(x_n)$, portanto $T(x) \to y$.

Logo pela Proposição 1.2.15.(i) $(T - \lambda Id)(N)$ é fechado e pela Proposição 1.2.6 $(T - \lambda Id)(X)$ é fechado , o que é uma contradição.

Portanto, não existe X', subespaço de X tal que $T_{|_{X'}}$ seja um isomorfismo.

Desse modo, em ambos os casos $(T - \lambda Id)$ é infinitamente singular e assim $\lambda \in I(T)$. ∎

Proposição 6.2.4 *Sejam X um espaço de Banach complexo HD_n e $T \in L(X)$. Então a cardinalidade de $S(T)$ satisfaz $|S(T)| \leq n$.*

Prova : Para isto é suficiente provar que $|I(T)| \leq n$. Realmente, disto logo segue pela Proposição 6.2.3 que $|\delta S(T)| \leq n$, de modo que $S(T)$ contém no máximo n pontos isolados.

Das Definição 6.1.2 e 6.1.3 temos que para cada λ em $I(T)$ e cada $\mathcal{E} > 0$ existe um subespaço $\mathcal{Y}_\lambda(\mathcal{E})$ de X, de codimensão finita sobre o qual $\|(T - \lambda Id)_{|_{\mathcal{Y}_\lambda(\mathcal{E})}}\| \leq \mathcal{E}$.

Paralelamente, podemos assumir que a aplicação $\mathcal{E} \longmapsto \mathcal{Y}_\lambda(\mathcal{E})$ é crescente, $\forall \lambda \in I(T)$, usando uma sequência básica normalizada $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de valores tais que $\|T(y_n) - \lambda y_n\| \leq 2^{-n}$. Senão vejamos :

Sejam $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência básica normalizada e escalares $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tais que $\forall y \in \mathcal{Y}_\lambda(\mathcal{E}_k)$, com $\lambda \in I(T)$ fixado e $\mathcal{E}_k > 0$ para um finito k, temos $\|T(y_n) - \lambda y_n\| < 2^{-n}$ e $\|(T - \lambda Id)_{|\mathcal{Y}_\lambda(\mathcal{E}_k)}\| < \mathcal{E}_k$. Então temos que :
$\|(T - \lambda Id)(y)\| \leq |\alpha_1| \cdot \|(T(y_1) - \lambda y_1)\| + \cdots + |\alpha_k| \cdot \|T(y_k) - \lambda y_k\| + \cdots \leq |\alpha_1| \cdot 2^{-1} + \cdots + |\alpha_k| \cdot 2^{-k} + \cdots \leq \underset{i\in\mathbb{N}}{max}|\alpha_i| = \mathcal{E}_k$

Sejam $\mathcal{E}_{k+1} > \mathcal{E}_k > 0$. Então, provamos que $\exists \mathcal{Y}(\mathcal{E}_{k+1})$ tal que $\mathcal{Y}_\lambda(\mathcal{E}_k) \subset \mathcal{Y}_\lambda(\mathcal{E}_{k+1})$ e $\|(T - \lambda Id)_{|\mathcal{Y}_\lambda(\mathcal{E}_{k+1})}\| \leq \mathcal{E}_{k+1}$, $\forall y \in \mathcal{Y}_\lambda(\mathcal{E}_{k+1})$.

Se existe um $y \in \mathcal{Y}_\lambda(\mathcal{E}_k)$ tal que $y \notin \mathcal{Y}_\lambda(\mathcal{E}_{k+1})$ então, $\mathcal{E}_{k+1} < \|(T - \lambda Id)(y)\| \leq \underset{i\in\mathbb{N}}{max}|\alpha_i| = \mathcal{E}_k$, contradição. Logo $\mathcal{Y}_\lambda(\mathcal{E}_k) \subset \mathcal{Y}_\lambda(\mathcal{E}_{k+1})$.

Agora provaremos que se M é um subconjunto finito de $I(T)$, então para algum $\mathcal{E} > 0$, os espaços $(\mathcal{Y}_\lambda(\mathcal{E}))_{\lambda\in M}$ formam uma soma direta, e então do fato de X ser HD_n, segue claramente que $|I(T)| \leq n$.

Assumamos que a propriedade é falsa, isto é, para M subconjunto finito de $I(T)$ de mínima cardinalidade entre aqueles contradizendo a propriedade, os espaços $(\mathcal{Y}_\lambda(\mathcal{E}))_{\lambda\in M}$ não formam soma direta, ou seja, $\forall \mathcal{E} > 0$, $\mathcal{Y}_{\lambda_1}(\mathcal{E}) + \cdots + \mathcal{Y}_{\lambda_n}(\mathcal{E})$ em X não é uma soma direta. É claro que $|M| \geq 2$.

Seja agora a aplicação T do subespaço $\mathcal{Y}_{\lambda_1}(\mathcal{E}) \oplus \cdots \oplus \mathcal{Y}_{\lambda_n}(\mathcal{E})$ para $\mathcal{Y}_{\lambda_1}(\mathcal{E}) + \cdots + \mathcal{Y}_{\lambda_n}(\mathcal{E})$ definida por $T(y_{\lambda_1}, \cdots, y_{\lambda_n}) = y_{\lambda_1} + \cdots + y_{\lambda_n}$. Considere sobre o domínio a norma $\underset{0\leq i\leq n}{\sup} \|y_{\lambda_i}\|$, $\forall (y_{\lambda_1}, \cdots, y_{\lambda_n}) \in D_T$. Então vejamos que :

- T é contínua pois :
  $\|T(y_{\lambda_1}, \cdots, y_{\lambda_n})\| = \|y_{\lambda_1} + \cdots + y_{\lambda_n}\| \leq \|y_{\lambda_1}\| + \cdots + \|y_{\lambda_n}\| \leq |M| \underset{1\leq i\leq n}{sup} \|y_{\lambda_i}\|$, $\forall y \in D_T$.
- T é sobrejetora. De fato, seja $\alpha \in \mathcal{Y}_{\lambda_1}(\mathcal{E}) + \cdots + \mathcal{Y}_{\lambda_n}(\mathcal{E})$. Daí temos $\alpha = y_{\alpha_{\lambda_1}}(\mathcal{E}) + \cdots + y_{\alpha_{\lambda_n}}(\mathcal{E})$. Assim considerando o elemento $(y_{\alpha_{\lambda_1}}, \cdots, y_{\alpha_{\lambda_n}}) \in \mathcal{Y}_{\lambda_1}(\mathcal{E}) \oplus \cdots \oplus \mathcal{Y}_{\lambda_n}(\mathcal{E})$, temos $T(y_{\alpha_{\lambda_1}}, \cdots, y_{\alpha_{\lambda_n}}) = \alpha$.

- T é injetora, pois dado $(y_{\lambda_1}, \cdots, y_{\lambda_n}) \in KerT$ temos que : $T(y_{\lambda_1}, \cdots, y_{\lambda_n}) = y_{\lambda_1} + \cdots + y_{\lambda_n} = \sigma \Longrightarrow y_{\lambda_1} = -y_{\lambda_2} - \cdots - y_{\lambda_n}$. Mas por hipótese temos $Y_{\lambda_1}(\mathcal{E}) \cap (\mathcal{Y}_{\lambda_2}(\mathcal{E}) \oplus \cdots \oplus \mathcal{Y}_{\lambda_n}(\mathcal{E})) = \{\sigma\}$. Logo, $y_{\lambda_1} = \sigma = -y_{\lambda_2} - \cdots - y_{\lambda_n}$, e assim sucessivamente temos que $Ker(T) = \{\sigma\}$, o que implica T ser injetora.

Portanto, podemos afirmar que T é contínua, injetora e sobrejetora.

Por outro lado, segue do resultado da Proposição 1.2.25 que se $\mathcal{Y}_{\lambda_1}(\mathcal{E}) + \cdots + \mathcal{Y}_{\lambda_n}\mathcal{E})$ não é direta, então $T : \mathcal{Y}_{\lambda_1}(\mathcal{E}) \oplus \cdots \oplus \mathcal{Y}_{\lambda_n}(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathcal{Y}_{\lambda_1}(\mathcal{E}) + \cdots + \mathcal{Y}_{\lambda_n}(\mathcal{E})$ não é um isomorfismo.

Uma vez que as afirmações acima são verdadeiras, segue que $T^{-1} : (\mathcal{Y}_{\lambda_1}(\mathcal{E}) + \cdots + \mathcal{Y}_{\lambda_n}(\mathcal{E})) \longrightarrow \mathcal{Y}_{\lambda_1}(\mathcal{E}) \oplus \cdots \oplus \mathcal{Y}_{\lambda_n}(\mathcal{E})$ definida por $T^{-1}(y_{\lambda_1} + \cdots + y_{\lambda_n}) = (y_{\lambda_1}, \cdots, y_{\lambda_n})$ não é contínua . Logo não existe constante K tal que $K\|(y_{\lambda_1}, \cdots, y_{\lambda_n})\| \leq \|T(y_{\lambda_1}, \cdots, y_{\lambda_n})\|$. Portanto, só podemos afirmar que $\forall \mathcal{E} > 0$, $\|T(y_{\lambda_1}, \cdots, y_{\lambda_n})\| \leq \mathcal{E}\|(y_{\lambda_1}, \cdots, y_{\lambda_n})\|$, ou seja, $\frac{\|T_y\|}{\|y\|} \leq \mathcal{E}$.

Dessa maneira para os vetores $y_\lambda \in \mathcal{Y}_\lambda(\mathcal{E})$, $\max_{\lambda \in N} \|y_\lambda\| = 1$ temos $\|\Sigma_{\lambda \in M}\, y_\lambda\| \leq \mathcal{E}$.
(1)

Aplicando T na desigualdade abaixo, obtemos :
$\|\Sigma_{\lambda \in M} \lambda y_\lambda\| = \|\lambda_1 y_{\lambda_1} + \cdots + \lambda_n y_{\lambda_n}\| = \|\lambda_1 y_{\lambda_1} + \cdots + \lambda_n y_{\lambda_n} + T(y_{\lambda_1}) - T(y_{\lambda_1}) + \cdots + T(y_{\lambda_n}) - T(y_{\lambda_n})\| \leq \|T(y_{\lambda_1}) - \lambda_1 y_{\lambda_1}\| + \cdots + \|T(y_{\lambda_n}) - \lambda_n y_{\lambda_n}\| + \|T(y_{\lambda_1} + \cdots + y_{\lambda_n})\| = |M|\mathcal{E} + \|T\| \cdot \|y_{\lambda_1} + \cdots + y_{\lambda_n}\| \overset{(1)}{\leq} |M|\mathcal{E} + \|T\|\mathcal{E} = (|M| + \|T\|) \cdot \mathcal{E}$.

Seja $c = min_{\lambda \neq \lambda' \in M}|\lambda - \lambda'|$ e $C = max_{\lambda \in M}|\lambda|$.

Seja $\lambda_\mathcal{E}$ em M tal que $max_{\lambda \neq \lambda_\mathcal{E}}\|y_\lambda\| = 1$ (tal número existe porque $|M| \geq 2$). Então, temos :
$\|\Sigma_{\lambda \neq \lambda_\mathcal{E}}(\lambda - \lambda_\mathcal{E})y_\lambda\| = \|(\lambda_1 - \lambda_\mathcal{E})y_{\lambda_1} + \cdots + (\lambda_n - \lambda_\mathcal{E})y_{\lambda_n}\| = \|\lambda_1 y_1 - \lambda_\mathcal{E} y_{\lambda_1} + \cdots + \lambda_n y_{\lambda_n} - \lambda_\mathcal{E} y_{\lambda_n}\| \leq \|\lambda_1 y_{\lambda_1} + \cdots + \lambda_n y_{\lambda_n}\| + \|(-\lambda_\mathcal{E})(y_{\lambda_1} + \cdots + y_{\lambda_n})\| \overset{(1)}{\leq} (\|T\| + |M|) \cdot \mathcal{E} + |\lambda_\mathcal{E}|\mathcal{E} = (|\lambda_\mathcal{E}| + \|T\| + |M|) \cdot \mathcal{E}$ enquanto $\max_{\lambda \neq \lambda_\mathcal{E}} \|(\lambda - \lambda_\mathcal{E})y_\lambda\| \geq c = \min_{\lambda \neq \lambda' \in M} |\lambda - \lambda'|$.

Visto que $\mathcal{E} \longmapsto \mathcal{Y}_\lambda(\mathcal{E})$ é crescente para cada λ fixado, e que $\lambda_\mathcal{E}$ torna M com um número finito de valores, podemos assumir que $\lambda_\mathcal{E}$ é constantemente igual para algum λ_0 tal que obtemos vetores y'_λ para $\lambda \neq \lambda_0$ com $y'_\lambda \in \mathcal{Y}_\lambda(\mathcal{E})$, $\|\sum\limits_{\lambda\neq\lambda_0} y'_\lambda\| \leq (C + \|T\| + |M|) \cdot \mathcal{E}$, e $\max\limits_{\lambda\neq\lambda_0}\|y'_\lambda\| \geq c$.

Novamente, se $\mathcal{E} \longmapsto \mathcal{Y}_\lambda(\mathcal{E})$ é crescente, a soma de $(\mathcal{Y}_\lambda(\mathcal{E}))$ para $\lambda \neq \lambda_0$ não é direta, e isso mantém para algum $\mathcal{E} > 0$ uma contradição com a minimalidade de M, pois ao diminuirmos os valores de $\mathcal{E} > 0$ podemos obter um M' tal que $|M'| < |M|$, onde $(\mathcal{Y}_\lambda(\mathcal{E}_{M'}))$ continua como uma soma não direta, o que contradiz com a suposição feita para M. ■

Finalmente estamos em condições de demonstrar o principal resultado deste capítulo, o Lema 6.3.1 que terá um papel fundamental na demonstração do Teorema Principal (Teorema 7.1.1).

6.3 Operadores semi-Fredholm e Fredholm em espaços de Banach HD_n

Lema 6.3.1 *Seja X um espaço de Banach HD_n. Então todo operador semi-Fredholm sobre X é Fredholm com índice zero.*

Prova : Seja T um operador semi-Fredholm sobre um espaço de Banach X. Consideremos primeiro o caso em que seja o espaço de Banach X complexo HD_n. Então, da Proposição 6.2.4 $S(T)$ é quando muito um conjunto com n pontos isolados.

Se T é semi-Fredholm com $i(T) = \infty$, então pela continuidade do índice generalizado de Fredholm, para $\lambda \in S(T)$ temos que $(T - \lambda Id)$ é semi-Fredholm, o que contradiz o Lema 6.2.3 onde prova-se que $(T - \lambda Id)$ não é semi-Fredholm e nem Fredholm para $\lambda \in \delta S(T) = S(T)$. Portanto T é Fredholm.

Como $S(T)$ é finito, temos pela Definição 1.2.26 que o aberto $\mathbb{C} \setminus S(T)$ é conexo (por caminhos), e isso implica que $i(T - \lambda Id)$ é constantemente igual à $i(T)$ para λ em $\mathbb{C} \setminus S(T)$ pela Proposição 6.2.1.

Além disso, quando $|\lambda| \longrightarrow \infty$, $T - \lambda Id = -\lambda(Id - T/\lambda)$ está próximo à λId, senão vejamos:

Seja o operador $Id : X \longrightarrow X$, para o qual $i(Id)$ é definido, existe $\mathcal{E} > 0$ tal que $(-\frac{T}{\lambda}) : X \longrightarrow X$ satisfaz $\| - \frac{T}{\lambda}\| < \mathcal{E}$. Então, pela Proposição 1.5.3.10.(iii) temos que:

$$i(T - \lambda Id) = i(Id - \tfrac{T}{\lambda}) = i(Id) = \alpha(Id) - \beta(Id) = 0 - 0 = 0.$$

Portanto, $(T - \lambda Id)$ é Fredholm com índice zero, por consequência de continuidade $ind(T) = 0$.

Assumamos agora que X é um espaço de Banach real HD_n e considere sua complexificação $X_{\mathbb{C}}$.

Lembremos que $X_{\mathbb{C}}$, complexificação de X, é definida por $X_{\mathbb{C}} = X \oplus X$ com a lei $i(x, y) = (-y, x)$ (ver Definição 1.8.8).

Então pela Proposição 3.2.2 $X_{\mathbb{C}}$ é um espaço de Banach real HD_{2n} e como todo subespaço complexo de X_C é também um subespaço real, temos que X_C é um espaço de Banach complexo HD_m para algum $m \leq 2n$.

Seja i_T o índice generalizado de Fredholm de T. A complexificação de T sobre $X_{\mathbb{C}}$, $T \oplus T$ é também semi-Fredholm com índice i_T (as dimensões na definição do índice de $T \oplus T$ são sobre $\mathbb{C}$).

Como $X_{\mathbb{C}}$ é hereditariamente finitamente decomponível e pela primeira parte dessa prova temos que i_T é igual a zero. ∎

Observação 6.3.2 *Podemos obter por corolário, do Lema 6.3.1, que se X é um espaço de Banach hereditariamente finitamente decomponível, então X não é isomorfo a nenhum subespaço próprio.*

O TEOREMA PRINCIPAL

Neste último capítulo faremos a demonstração do Teorema Principal (Teorema 7.1.1) de nossa dissertação. Sobre um espaço de Banach real hereditariamente indecomponível, o quociente do espaço de seus operadores pelo espaço de seus operadores estritamente singulares será caracterizado e sua dimensão limitada.

7.1 Operadores em espaço de Banach real $H.I.$

Na demonstração do Teorema Principal (Teorema 7.1.1) usaremos as Proposições 1.5.2.7, 1.8.15, 1.9.3.5 e os Lemas 2.4.1 e 6.3.1.

Teorema 7.1.1 *Seja X um espaço de Banach real hereditariamente indecomponível. Então, para todo subespaço de dimensão infinita Y de X, a $dim(L(Y,X)/S(Y,X)) \leq 4$. Além disso, $L(X)/S(X)$ é um anel de divisão isomorfo a $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$.*

Prova : Sejam X um espaço de Banach real $H.I.$, Y um subespaço fechado de dimensão infinita de X, e $T \in L(Y,X)$. Denotamos E_Y o espaço quociente de $L(Y,X)$ pelo Kernel da aplicação $\|\cdot\|_Y$ definida sobre $L(Y,X)$, isto é, por $\|T\|_Y = \inf_{Z' \subset Z} \|T_{|_{Z'}}\|$ (veja a Observação 1.9.1.1.(ii)).

Segue da Observação 1.9.1.1 (i) que o kernel das aplicações de $L(Y,X)$ são operadores estritamente singulares. Dessa maneira $E_Y = L(Y,X)/S(Y,X)$, tal como na Definição 1.9.1.2.

Segue também que é possível construir a partir de E_Y um espaço quociente E com norma indicada na Definição 1.9.2.5 e completo (observação da Definição 1.9.3.3) tal que pela Observação 1.8.2.(iii), E é uma Álgebra de Banach.

Por outro lado, com a multiplicação dada na Definição 1.9.3.1, E possui estrutura de álgebra normada com unidade (Proposição 1.9.3.2) e por todo elemento não nulo de E ser invertível (observação da Definição 1.9.3.3) segue que E é um anel de divisão.

Uma vez que as afirmações acima são verdades, segue pelo Teorema 1.8.15, caso real do Teorema de Gelfand-Mazur, que E é isomorfo ou a $\mathbb{R}$, ou a $\mathbb{C}$, ou a $\mathbb{H}$, e portanto que $dim E \leq 4$.

Agora, como E_Y é isomorfo a um subespaço de E (veja Proposição 1.9.3.5), segue que a dimensão do espaço E_Y é no máximo igual a 4.

A afirmação relativa ao caso $Y = X$ pode ser provada diretamente como segue.

Seja T um operador não estritamente singular sobre X. Então, pelo Lema 2.4.1, nenhuma restrição de T para um subespaço de X é estritamente singular.

Pela Proposição 1.5.2.7, a restrição de T para algum subespaço de codimensão finita de X é um isomorfismo na sua imagem, e portanto T é semi-Fredholm.

Finalmente, pelo Lema 6.3.1, temos que T é Fredholm.

Isso significa que todo operador sobre X é ou estritamente singular ou Fredholm.

Como os operadores Fredholm são da classe dos operadores invertíveis do módulo dos operadores estritamente singulares, temos que isso é equivalente para dizer que $L(X)/S(X)$ é um anel de divisão, e portanto pelo Teorema de Gelfand-Mazur (Teorema 1.8.15) ele é isomorfo ou aos reais, ou aos complexos, ou ao anel dos quatérnios. ■

Finalmente observamos que o seguinte problema está em aberto :

Problema : *Fixe $n \in \mathbb{N}^*$. Para todo $m \in \mathbb{N}^*$, $m \leq n^2$, existe X_m HD_n tal que*

$$\dim(L(X_m)/S(X_m)) = m?$$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Bonsall F.F. e Ducan J., Complete Normed Algebras. Springer-Verlag, New York, 1973.

[2] Enflo, P., A counterexample to the approximation property in Banach spaces. Acta Math. 130 (1973), 309 - 317.

[3] Ferenczi, V., Operators on subspaces of hereditarily indecomposable Banach spaces. Bull. London Math. Soc. 29, (1996), 338 - 344.

[4] Ferenczi, V., Hereditarily finitely decomposable Banach spaces. Studia Mathematica 123 (2) (1997), 135 - 149.

[5] Ferenczi, V., Quotient hereditarily indecomposable Banach spaces. Canad. J. Math. 51 (3)(1999), 566-584.

[6] Galego, E.M., Alguns aspectos da teoria geométrica de espaços de Banach através de $c_o(\mathbb{N})$. 43º. Seminário Brasileiro de Análise, IME-USP, 1996.

[7] Goldberg, S., Unbounded Linear Operators. Theory and Applications. McGraw-Hill, inc., 1966.

[8] Gowers, W.T., A new dichotomy for Banach spaces,

[9] Gowers, W.T. e Maurey, B., The inconditional basic sequence problem. J. Amer. Math. Soc. 6 (1993), 851 - 874.

[10] Hönig, C.S., Análise Funcional e Aplicações. V.1, IME-USP, 1970.

[11] Hönig, C.S., Análise Funcional e Aplicações. V.2, IME-USP, 1970.

[12] Lindenstrauss, J e Tzafriri, L., Classical Banach Spaces, V.1, New York, Springer, 1977.

[13] Jesus, O.S., Subespaços Complementados na Soma de Espaços de Banach. IME-USP, 2002 (Dissertação de Mestrado).

[14] Semadeni, Z., Banach spaces of continous functions. PWN, Warszawa, 1971.

[15] Silva, R.R., Operadores em subespaços de espaços de Banach hereditariamente indecomponíveis. IME-USP, 2004 (Dissertação de Mestrado).