

**Um problema isoperimétrico de
bordo livre no plano e no
espaço hiperbólico**

Márcio Fabiano da Silva

**TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR
EM
CIÊNCIAS**

**Área de concentração: Matemática
Orientadora: Profa. Dra. Rosa Maria dos Santos Barreiro Chaves**

Durante a elaboração deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES/CNPq.

São Paulo, setembro de 2006.

Um problema isoperimétrico de bordo livre no plano e no espaço hiperbólico

Este exemplar corresponde à redação
final da tese devidamente corrigida
e defendida por Márcio Fabiano da Silva
e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, setembro de 2006.

Banca examinadora:

- Profa. Dra. Rosa Maria dos Santos Barreiro Chaves (orientadora) - IME-USP
- Prof. Dr. Paolo Piccione -IME-USP
- Prof. Dr. Armando Caputi - DM - UFABC - SP
- Prof. Dr. Jorge Herbert Soares de Lira - DM -UFC
- Prof. Dr. Renato H. L. Pedrosa - IME-UNICAMP

Dedico esta tese ao presente mais valioso que recebi de Deus: minha família,
que sempre orou por mim diante dos momentos mais difíceis.

Ainda que eu falasse a língua dos homens e dos anjos, se não tiver caridade, sou como o bronze que soa, ou como o címbalo que retine. Mesmo que eu tivesse o dom da profecia, e conhecesse todos os mistérios e toda a ciência; mesmo que eu tivesse toda a fé, a ponto de transportar montanhas, se não tiver caridade, não sou nada. Ainda que distribuísse todos os meus bens em sustento dos pobres, e ainda que eu entregasse o meu corpo para ser queimado, se não tiver caridade, de nada valeria!

A caridade é paciente, a caridade é bondosa. Não tem inveja. A caridade não é orgulhosa. Não é arrogante, nem escandalosa. Não busca os seus próprios interesses, não se irrita, não guarda rancor. Não se alegra com a injustiça, mas se rejubila com a verdade. Tudo desculpa, tudo crê, tudo espera, tudo suporta.

A caridade jamais acabará. As profecias desaparecerão, o dom das línguas cessará, o dom da ciência findará. A nossa ciência é parcial, a nossa profecia é imperfeita. Quando chegar o que é perfeito, o imperfeito desaparecerá. Quando eu era criança, falava como criança, pensava como criança, raciocinava como criança. Desde que me tornei homem, eliminei as coisas de criança. Hoje vemos como que por um espelho, confusamente; mas então veremos face a face. Hoje conheço em parte; mas então conhecerei totalmente, como eu sou conhecido.

Por ora subsistem a fé, a esperança e a caridade - as três. Porém, a maior delas é a caridade.

1Cor 13,1-13.

Agradecimentos

Agradeço à minha orientadora, Profa. Rosa Chaves, pela orientação, confiança, amizade e paciência. Tenho uma grande admiração por esta pessoa tão especial, que tanto se dedica para que seus orientandos tenham condições de realizar um bom trabalho.

Agradeço ao Prof. Renato Pedrosa, do IME-UNICAMP, por ter co-orientado esta tese e por ter me recebido sempre tão gentilmente na UNICAMP. Embora a co-orientação não tenha sido oficializada, por motivos burocráticos, sua colaboração foi valiosa e fundamental para a realização deste trabalho.

Agradeço aos professores do IME-USP, a quem devo grande parte da minha formação matemática. Em particular, aos professores Daniel Tausk, Paolo Piccione, Cláudia Cueva, Maria Elisa, Sérgio Alves, Asperti, Iole e Francisco Rui.

Agradeço ao Prof. Luiz Amâncio Machado de Sousa Júnior, do DME- UNIRIO, pela sugestão dada para a prova do Lema 3.6.4.

Agradeço aos meus queridos professores da escola pública Dr. Clóvis de Arruda Campos, “Paraisão”, na qual passei 12 anos de minha vida. Eles também são responsáveis por

hoje eu realizar mais esse sonho.

Agradeço aos funcionários do IME-USP: da secretaria, da sala do café (embora eu não tome café), da sala dos computadores (do IME-USP e do IME-UNICAMP), da CPG, da gráfica e da biblioteca, pelas inúmeras vezes que me atenderam.

Agradeço à minha assistente social, Fátima, por ter me dado a oportunidade de morar no CRUSP desde a minha graduação.

Agradeço aos meus queridos amigos do IME-USP e do CRUSP, que foram minha família em São Paulo. Em especial, à Fernanda, Aldemir, Cléber, Wellington, Neuza, Marcelo, Andréia, Pathy, Hilde, Renata e Alexandre.

Agradeço aos meus inúmeros amigos em Araçatuba, que sempre torceram por mim e me apoiaram quando precisei.

Agradeço à CAPES por ter financiado este projeto durante 3 anos e ao CNPq por ter financiado o meu último ano como bolsista.

Resumo

Neste trabalho, estudamos o seguinte problema isoperimétrico: “minimizar a área da fronteira de uma região no espaço hiperbólico tridimensional que fica entre duas horoesferas paralelas, fixado o volume, descontando-se a área da parte da fronteira da região contida nas horoesferas”. Reduzimos o problema à análise das regiões invariantes por rotação e obtemos as possíveis soluções isoperimétricas através do comportamento das curvas geratrizes das superfícies rotacionais com curvatura média constante no espaço hiperbólico. Estudamos também a versão deste problema no caso do plano hiperbólico, determinando o seu perfil isoperimétrico.

Abstract

In this work we investigate the following isoperimetric problem: “to minimize the area of the boundary of a region in the three-dimensional hyperbolic space between two parallel horospheres with a prescribed volume, without counting the area of the part of the boundary contained in the horospheres”. We reduce the problem to the study of rotationally invariant regions and get the possible isoperimetric solutions through the behaviour of the generating curves of the constant mean curvature rotational surfaces in the hyperbolic space. We also study the version of this problem in the hyperbolic plane and determine its isoperimetric profile.

Palavras-chave

Espaço hiperbólico; plano hiperbólico; problema isoperimétrico; superfícies com curvatura média constante; superfícies rotacionais.

Key words

Hyperbolic space; hyperbolic plane; isoperimetric problem; constant mean curvature surfaces; rotational surfaces.

Índice

Lista de Figuras	x
Introdução	1
1 Preliminares	5
1.1 Geometria do espaço hiperbólico	5
1.2 Coordenadas cilíndricas no espaço hiperbólico	9
1.3 H -superfícies rotacionais	11
2 Caracterizações iniciais das soluções do problema isoperimétrico	15
2.1 As fronteiras das regiões isoperimétricas são H -superfícies perpendiculares às horoesferas ao longo do bordo	15
2.2 As fronteiras das regiões isoperimétricas são superfícies rotacionais	23
3 Um caso preliminar: o caso do plano hiperbólico	29
3.1 Geometria do plano hiperbólico	29
3.2 Coordenadas polares em \mathbb{R}_+^2	31
3.3 Expressão para o perímetro e a área de uma seção	33
3.4 Expressão para o perímetro e a área de um meio disco geodésico	35

3.5	Expressão para o perímetro e a área de um meio disco equidistante	41
3.6	Perfil isoperimétrico da região entre dois horociclos paralelos em \mathbb{R}_+^2 . . .	44
4	Um problema de bordo livre para superfícies entre duas horoesferas paralelas	65
4.1	O problema isoperimétrico em \mathbb{R}_+^3 entre duas horoesferas paralelas	65
4.2	Existência de tangência vertical	67
4.3	Tangência vertical para as curvas geratrizes das superfícies rotacionais com $H = 1$	71
4.4	Tangência vertical para as curvas geratrizes das superfícies rotacionais com $0 \leq H < 1$	77
4.5	Tangência vertical para as curvas geratrizes das superfícies rotacionais com $H > 1$	82

Lista de Figuras

1.1	Orientação de \vec{H} para uma esfera geodésica.	7
1.2	Orientação de \vec{H} para uma horoesfera.	8
1.3	Orientação de \vec{H} para uma superfície equidistante.	8
1.4	Superfície rotacional em \mathbb{R}_+^3	9
1.5	Coordenadas cilíndricas em \mathbb{R}_+^3	10
2.1	Posição do plano P em relação às horoesferas Π_1 e Π_2 e à superfície Σ . . .	24
2.2	Representação da possibilidade em que $x_0 \in \overset{o}{\Sigma}$	25
2.3	Representação da possibilidade em que $x_0 \in \partial\Sigma$	26
2.4	Representação de uma situação em que $\Sigma \cap \mathcal{H}$ consiste de duas circunferências concêntricas, sendo x_0 o primeiro ponto de contato.	27
3.1	Coordenadas polares em \mathbb{R}_+^2	31
3.2	Comprimento e área em função do ângulo central.	32
3.3	Seção entre os horociclos.	34
3.4	Relações entre os raios e os centros de S e de $S_{\mathcal{H}}$	35
3.5	Arco de circunferência geodésica subentendido por um ângulo central θ . . .	37
3.6	Perímetro e área de meio discos geodésicos.	38
3.7	Perímetro e área de um meio disco equidistante.	41
3.8	Perfil isoperimétrico da região entre dois horociclos paralelos.	46
3.9	Caso 1.	50

3.10	Caso 2.	52
3.11	Caso 3.	54
3.12	Caso 4.	55
3.13	Caso $c < e$	59
3.14	Caso $c = e$	60
3.15	Caso $c > e$	62
3.16	Caso excluído: situação em que a região minimizante seria constituída de duas seções.	63
3.17	Caso excluído: situação em que a região minimizante seria constituída de dois meio discos geodésicos de mesmo raio.	63
4.1	Curva geratriz para $H = 1$ e $a = -0, 2$	72
4.2	Superfície rotacional com $H = 1$ e $a = -0, 2$	72
4.3	Curva geratriz para $H = 1$ e $a = -\frac{1}{4}$	73
4.4	Caso excluído: superfície rotacional com $H = 1$ e $a = -\frac{1}{4}$	73
4.5	Curva geratriz para $H = 1$ e $a = 0$	74
4.6	Superfície rotacional com $H = 1$ e $a = 0$	74
4.7	Comportamento de $\lambda(s)$	75
4.8	Curva geratriz para $H = 1$ e $a = 1$	76
4.9	Caso excluído: pedaço da sup. rotacional fora da região entre as horoesferas.	76
4.10	Curva geratriz para $H = 0, 5$ e $a = -0, 25$	78
4.11	Superfície rotacional com $H = 0, 5$ e $a = -0, 25$	78
4.12	Curva geratriz para $H = 0, 5$ e $a = -0, 5$	79
4.13	Caso excluído: superfície rotacional com $H = 0, 5$ e $a = -0, 5$	79
4.14	Curva geratriz para $H = 0, 5$ e $a = 0$	80
4.15	Superfície rotacional com $H = 0, 5$ e $a = 0$	80
4.16	Curva geratriz para $H = 0, 5$ e $a = 1$	81
4.17	Caso excluído: superfície rotacional com $H = 0, 5$ e $a = 1$	81
4.18	Curva geratriz para $H = 0$ e $a = -0, 5$	82
4.19	Curva geratriz para $H = 0$ e $a = 1$	82

4.20 Ondulária hiperbólica para $H = 3$ e $a = -0,05$	84
4.21 Ondulóide hiperbólico com $H = 3$ e $a = -0,05$	85
4.22 Curva geratriz para $H = 2$ e $a = 0$	85
4.23 Regiões isoperimétricas com $H > 1$ e $a = 0$	86
4.24 Comportamento de $\rho(s)$ e $\lambda(s)$	87
4.25 Nodária hiperbólica para $H = 1,5$ e $a = 0,5$	88
4.26 Caso excluído: nodóide hiperbólico.	89

Introdução

Problemas isoperimétricos constituem um tópico clássico em Geometria e têm sido abordados por muitos autores, sob diferentes condições. Um apanhado histórico é dado no trabalho [16], de Ritoré e Ros. Para uma variedade Riemanniana M^n , ele tem a seguinte formulação: classificar, a menos de um grupo de isometrias de M , as regiões $\Omega \subseteq M$ que minimizam área com volume fixado. Essas regiões são chamadas regiões isoperimétricas. Muitas vezes chamamos as regiões isoperimétricas de soluções isoperimétricas, por serem soluções de um problema isoperimétrico.

No caso em que a variedade M é o espaço euclidiano \mathbb{R}^3 , Maria Athanassenas [2] e Tomas Vogel [19] determinaram, independentemente, as regiões isoperimétricas que ficam limitadas por dois planos paralelos e para as quais não é contada a área da parte da fronteira da região que fica contida nos planos paralelos. Athanassenas mostrou que os pontos críticos da área quando o volume está fixado (superfícies estacionárias) são superfícies rotacionais com curvatura média constante (superfícies de Delaunay) que encontram perpendicularmente os planos paralelos. Analisando-se tais superfícies, apenas a (semi)-esfera, o cilindro e o ondulóide ocorrem como fronteiras das possíveis soluções do problema. No entanto, quando se analisa a estabilidade de tais superfícies (como em [2] e [5]), o ondulóide é descartado por ser instável. Dependendo da relação entre o volume pré-fixado e a distância entre os planos paralelos, o cilindro ou a semi-esfera minimiza a área. Pedrosa e Ritoré mostraram em [15] que este resultado vale em \mathbb{R}^{n+1} , $n \leq 7$, mas não para $n \geq 9$.

Tal problema isoperimétrico foi nosso objeto de estudo na dissertação de mestrado [17] e isto nos motivou a estudá-lo no caso do espaço hiperbólico de curvatura seccional

constante igual a -1 , que denotamos por $\mathcal{H}^3(-1)$. Muitos resultados já foram obtidos para o espaço hiperbólico, quando o bordo das superfícies está fixado ou para superfícies sem bordo. Por exemplo, R. López analisou em [9] o problema procurando determinar superfícies mergulhadas com bordo fixo em uma horoesfera e com curvatura média constante $H \in [0, 1]$.

Observamos que no caso euclidiano, as soluções globais do problema isoperimétrico eram dadas em função da distância entre os planos paralelos (ver Capítulo 6 de [17]). Como esperamos o comportamento análogo no espaço hiperbólico, é preciso que a distância hiperbólica entre as subvariedades que conterão o bordo das soluções isoperimétricas seja constante. Escolhemos para fazer o papel dos planos paralelos (no caso euclidiano) duas horoesferas paralelas, que no modelo do semi-espaço superior \mathbb{R}_+^3 serão representadas como dois planos euclidianos horizontais paralelos em \mathbb{R}_+^3 . Embora faça sentido analisar o problema isoperimétrico que estamos considerando escolhendo-se outras superfícies umbílicas ao invés de horoesferas, não é verdade que a distância hiperbólica entre duas esferas geodésicas ou entre duas superfícies totalmente geodésicas é constante, de modo que estas situações não nos interessam. No caso de duas superfícies equidistantes, a distância hiperbólica entre elas é constante, mas a classificação das superfícies rotacionais com curvatura média constante que encontram duas superfícies equidistantes perpendicularmente é mais complicada do que no caso das horoesferas.

Morgan (conforme [11], [12]) garantiu a existência de soluções isoperimétricas para a classe de espaços Riemannianos (M, g) nos quais o grupo de isometrias G de M é co-compacto, isto é, M/G é um espaço topológico compacto. Na nossa abordagem, analisamos o problema isoperimétrico numa região \mathcal{F} entre duas horoesferas. Assim, G é o grupo das isometrias de M que deixa \mathcal{F} invariante, ou seja, são as rotações ao redor de uma geodésica vertical e as translações horizontais, de modo que \mathcal{F}/G é compacto, pois é homeomorfo ao intervalo $[0, 1]$, o que garante a existência de soluções para o nosso caso.

Veremos no Teorema 2.1.6 que as superfícies estacionárias para o problema isoperimétrico considerado são superfícies com curvatura média constante que encontram duas horoesferas paralelas perpendicularmente. Nesta tese, determinamos as variações que são pontos críticos do funcional área e deixam o volume fixado. As superfícies que são dadas por estes pontos críticos são as fronteiras das possíveis soluções isoperimétricas. Para saber quais dentre estas superfícies minimizam a área, quando o volume permanece constante,

é necessário ainda analisar a sua estabilidade, que se define de modo análogo ao caso euclidiano, descartando aquelas que são instáveis. Como não foi possível fazer tal análise no caso tridimensional, até o momento da conclusão da tese, o estudo da estabilidade das superfícies no contexto que estamos considerando será alvo de nossa pesquisa no futuro breve, visto que as ferramentas necessárias para esse estudo já foram obtidas durante a realização deste trabalho.

A fim de apresentar os resultados que obtivemos, a tese será organizada como a seguir.

No Capítulo 1, tratamos da geometria do espaço hiperbólico tridimensional. Descrevemos o modelo do semi-espaço superior \mathbb{R}_+^3 para o espaço hiperbólico e caracterizamos suas geodésicas, superfícies totalmente geodésicas, superfícies umbílicas, bem como as isometrias que deixam \mathbb{R}_+^3 invariante. Damos a definição de superfície rotacional no espaço hiperbólico como aparece em [6]. Apresentamos as coordenadas cilíndricas em \mathbb{R}_+^3 , a parametrização natural das superfícies rotacionais do espaço hiperbólico com curvatura média constante e alguns resultados a respeito de sua geometria que nos serão úteis, cujos detalhes podem ser vistos em [3].

No Capítulo 2, obtemos nossos primeiros resultados para o problema isoperimétrico tridimensional. Mostramos que há uma equivalência entre as variações que são pontos críticos da área e que deixam o volume fixo e as superfícies com curvatura média constante que encontram as horoesferas perpendicularmente ao longo do seu bordo. Pelo Princípio de Reflexão de Alexandrov [1] para planos euclidianos verticais (superfícies totalmente geodésicas de \mathbb{R}_+^3), vemos que tais superfícies são rotacionais esféricas. Assim, concluímos que as fronteiras das regiões isoperimétricas são superfícies rotacionais (esféricas) do espaço hiperbólico com curvatura média constante e que encontram as horoesferas perpendicularmente ao longo do seu bordo.

No Capítulo 3, formulamos o problema isoperimétrico para o plano hiperbólico, visto como um caso preliminar ao estudo do caso tridimensional. Adaptando os resultados obtidos no Capítulo 2 (caso tridimensional) para o caso plano, vemos que as soluções isoperimétricas são regiões delimitadas por curvas de curvatura geodésica constante, que foram caracterizadas em [8], que intersectam dois horociclos paralelos perpendicularmente, quando a intersecção for não-vazia. Descrevemos o sistema de coordenadas polares no plano hiperbólico e obtemos as expressões para o perímetro e a área das possíveis regiões isoperimétricas. Comparamos ainda as áreas de tais regiões, no caso em que elas têm o

mesmo perímetro. Descrevemos, no Teorema 3.6.1, o perfil isoperimétrico da região entre dois horociclos paralelos no plano hiperbólico.

Finalmente, no Capítulo 4, classificamos as superfícies Σ rotacionais (esféricas) do espaço hiperbólico com curvatura média constante entre duas horoesferas Π_1 e Π_2 , orientáveis, mergulhadas, compactas, conexas, com bordo livre $\partial\Sigma \subset \Pi_1 \cup \Pi_2$ e intersectando as horoesferas perpendicularmente ao longo do seu bordo. Mais precisamente, no Teorema 4.1.1, obtemos uma família de superfícies do tipo “prima do catenóide” para $H = 1$, do tipo “equidistante” para $0 \leq H < 1$, do tipo “ondulóide” para $H > 1$, ou umbílica, para qualquer $H \geq 0$, como as fronteiras das possíveis soluções do problema isoperimétrico.

Preliminares

Neste capítulo, introduzimos algumas notações e tratamos dos resultados básicos e necessários aos capítulos posteriores.

1.1 Geometria do espaço hiperbólico

Sejam $\mathcal{L}^4 = (\mathbb{R}^4, g_{-1})$ o espaço de Lorentz de dimensão 4, munido da métrica de Lorentz dada por $g_{-1}(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - x_4y_4$. Chamamos de espaço hiperbólico (tridimensional com curvatura seccional constante igual a -1) ao conjunto

$$\mathcal{H}^3(-1) := \{p = (x, y, z, w) \in \mathcal{L}^4 : g_{-1}(p, p) = -1, w > 0\}.$$

Em [18], são descritos alguns modelos do espaço hiperbólico, as isometrias entre eles, além das expressões das métricas induzidas por estas isometrias. Para nossas finalidades, o modelo mais adequado é o modelo do semi-espaço superior, definido como

$$\mathbb{R}_+^3 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z > 0\},$$

dotado da métrica

$$\langle, \rangle = ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{z^2}. \quad (1.1)$$

Em nosso trabalho, vamos tratar das superfícies com curvatura média constante H que possuem bordo contido em horoesferas. Seja $\phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}_+^3$ uma imersão isométrica de uma superfície compacta Σ com bordo $\partial\Sigma \neq \emptyset$. Seja Γ uma subvariedade com dimensão

1 contida em \mathbb{R}_+^3 . Dizemos que Γ é o bordo de ϕ se ϕ é um difeomorfismo de $\partial\Sigma$ sobre Γ . Dizemos que Σ é uma H -superfície com bordo Γ se ϕ tem curvatura média constante H e Γ é o bordo de ϕ . Identificamos Σ por sua imagem por ϕ e $\partial\Sigma$ com a curva Γ .

O plano $z = 0$ é chamado bordo no infinito de \mathbb{R}_+^3 e é denotado por $\partial_\infty\mathbb{R}_+^3$. As geodésicas de \mathbb{R}_+^3 são as retas euclidianas verticais e as semicircunferências perpendiculares a $\partial_\infty\mathbb{R}_+^3$ contidas em \mathbb{R}_+^3 ; enquanto que as superfícies totalmente geodésicas são os planos euclidianos verticais e as semi-esferas perpendiculares a $\partial_\infty\mathbb{R}_+^3$ contidas em \mathbb{R}_+^3 . As superfícies totalmente geodésicas têm curvatura média constante $H = 0$.

As isometrias de \mathbb{R}_+^3 são as aplicações conformes de \mathbb{R}^3 que deixam \mathbb{R}_+^3 invariante. Assim, as translações euclidianas horizontais e as rotações ao redor de uma geodésica vertical são isometrias de \mathbb{R}_+^3 ; associadas a um ponto $p_0 \in \partial_\infty\mathbb{R}_+^3$, temos duas famílias de isometrias: as chamadas translações hiperbólicas ao longo de uma geodésica α perpendicular a $\partial_\infty\mathbb{R}_+^3$ em p_0 , que são homotetias euclidianas centradas em p_0 com fator $k > 0$

$$(x_1, x_2, x_3) = (p', x_3) \longrightarrow (k(p' - p_0), kx_3),$$

e as reflexões hiperbólicas com respeito a uma superfície totalmente geodésica P . Quando P é uma semi-esfera perpendicular a $\partial_\infty\mathbb{R}_+^3$ centrada em p_0 e com raio $r > 0$, as reflexões hiperbólicas são inversões euclidianas centradas em p_0 que fixam P

$$(p', x_3) \longrightarrow (p_0, 0) + \frac{r^2(p' - p_0, x_3)}{|p' - p_0|^2 + x_3^2}.$$

Quando P é um plano euclidiano vertical, as reflexões hiperbólicas são reflexões euclidianas com respeito a P .

Observemos que existem isometrias de \mathbb{R}_+^3 que levam um tipo de superfície totalmente geodésica no outro tipo. Por isto, escolhemos aquele que seja mais adequado ao que se pretende fazer.

Uma técnica importante em nosso estudo é o chamado Princípio da Tangência, que nos permite comparar localmente duas superfícies de curvatura média constante, tangentes em um mesmo ponto p . Como temos uma única direção normal em nosso caso, vamos orientar as superfícies em \mathbb{R}_+^3 de modo que elas tenham $H > 0$.

Princípio da Tangência: Sejam Σ_1 e Σ_2 superfícies orientadas em \mathbb{R}_+^3 com curvaturas médias H_1 e H_2 , respectivamente, e $H_1 \leq H_2$. Se Σ_1 e Σ_2 têm um ponto de tangência

p comum, no interior ou no bordo (analítico), e se Σ_1 está acima de Σ_2 em uma vizinhança de p , então Σ_1 coincide com Σ_2 em uma vizinhança de p .

Sabe-se que as superfícies umbílicas têm curvatura média constante. Em [18], encontramos uma descrição detalhada destas superfícies no espaço hiperbólico. A seguir, descrevemos as superfícies umbílicas no nosso modelo e damos suas representações, quando cortadas por um plano euclidiano vertical.

- a) *Totalmente geodésicas*: já descritas na página 6;
- b) *esferas geodésicas*: definimos uma esfera geodésica como o conjunto de pontos que equidistam, na métrica dada por (1.1), de um ponto fixo, chamado centro hiperbólico. Elas são as esferas euclidianas inteiramente contidas em \mathbb{R}_+^3 . Sua curvatura média satisfaz $H > 1$ e o vetor curvatura média aponta para o interior delas. Se ρ denota o raio hiperbólico de uma esfera geodésica, então $H = \coth \rho$;

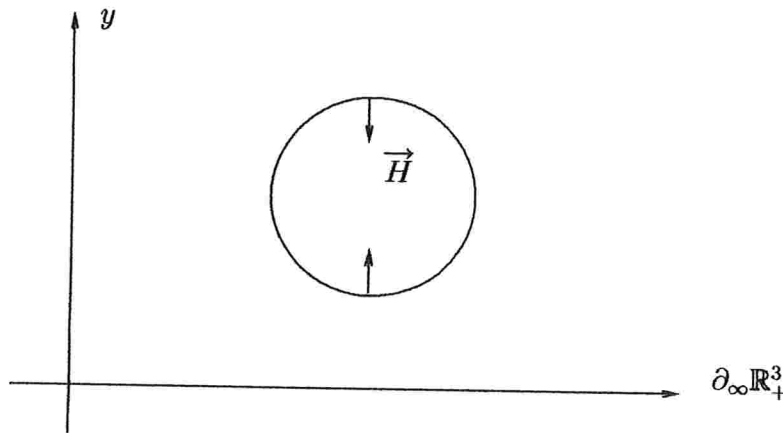


Figura 1.1: Orientação de \vec{H} para uma esfera geodésica.

- c) *horoesferas*: uma horoesfera pode ser vista como uma esfera geodésica com centro hiperbólico em $\partial_\infty \mathbb{R}_+^3$. Elas são representadas por planos euclidianos horizontais de \mathbb{R}_+^3 e esferas euclidianas de \mathbb{R}_+^3 tangentes a $\partial_\infty \mathbb{R}_+^3$. Observemos que existem isometrias de \mathbb{R}_+^3 que levam um tipo no outro. Sua curvatura média satisfaz $H = 1$ e o vetor curvatura média aponta para cima no primeiro caso (planos horizontais) e para o interior no segundo caso (esferas);

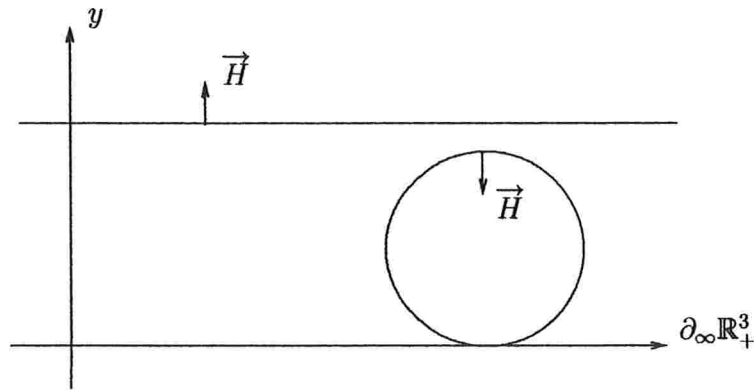


Figura 1.2: Orientação de \vec{H} para uma horoesfera.

- d) *superfícies equidistantes*: são superfícies que equidistam, na métrica (1.1), de uma superfície totalmente geodésica. São dadas pela interseção de \mathbb{R}_+^3 com os planos de \mathbb{R}^3 que não são paralelos nem perpendiculares ao plano $z = 0$ e pelas esferas euclidianas que não estão inteiramente contidas em \mathbb{R}_+^3 e não são tangentes nem perpendiculares ao plano $z = 0$. Observemos que existem isometrias de \mathbb{R}_+^3 que levam um tipo no outro. Sua curvatura média satisfaz $0 < H < 1$ e o seu vetor curvatura média aponta para a superfície totalmente geodésica da qual elas equidistam.

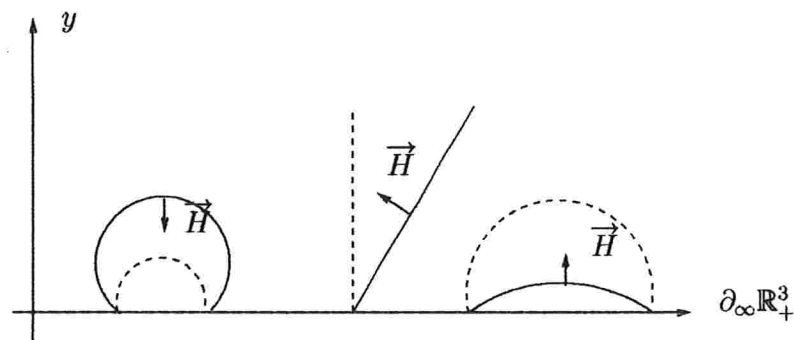


Figura 1.3: Orientação de \vec{H} para uma superfície equidistante.

Superfícies Rotacionais de \mathbb{R}_+^3

Definição: Uma superfície rotacional esférica no espaço hiperbólico \mathbb{R}_+^3 é uma superfície invariante por um subgrupo de isometrias cujas órbitas principais (paralelos) são circunferências (euclidianas). Se os paralelos são curvas equidistantes ou horociclos, a superfície rotacional é chamada de hiperbólica ou parabólica, respectivamente.

Através do Princípio de Reflexão de Alexandrov e do Princípio do Máximo, veremos que as superfícies interessantes para o nosso estudo são as rotacionais esféricas. Neste caso, o grupo de isometrias de \mathbb{R}_+^3 fixa uma geodésica γ (eixo de rotação) e os paralelos são esferas geodésicas α com codimensão 2 (circunferências) com centro em γ , cada uma delas contida em uma subvariedade totalmente geodésica P ortogonal a γ . A partir de agora neste trabalho, superfície rotacional significa superfície rotacional esférica.

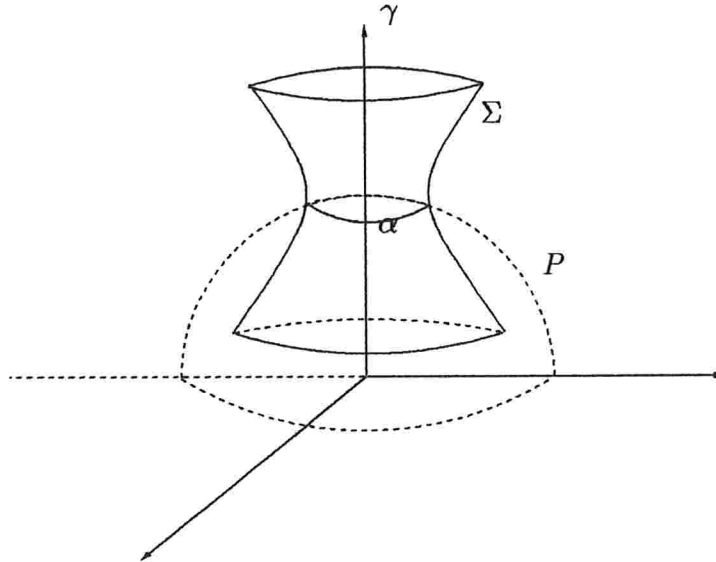


Figura 1.4: Superfície rotacional em \mathbb{R}_+^3 .

1.2 Coordenadas cilíndricas no espaço hiperbólico

Sejam $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ as coordenadas cartesianas em \mathbb{R}_+^3 . Fixamos a geodésica γ em \mathbb{R}_+^3 , dada pelo eixo $\bar{z} > 0$. Sejam P' a semi-esfera euclidiana de raio 1 e centro na origem de \mathbb{R}^3

perpendicular a $\partial_\infty \mathbb{R}_+^3$, que é uma superfície totalmente geodésica e seja $O = \gamma \cap P'$ a origem do sistema de coordenadas. Em P' , fixamos um raio geodésico γ^+ com origem em O , contido no plano euclidiano $\bar{y} = 0$, dado por $\{\bar{x}^2 + \bar{z}^2 = 1; 0 < \bar{z} \leq 1\}$. Seja $p \in \mathbb{R}_+^3$ um ponto qualquer. Tomamos a curva α equidistante de γ passando por p (que é a semi-reta por p e pela origem de \mathbb{R}^3) e seja $\{p'\} = \alpha \cap P'$. Tomamos as coordenadas polares (ρ, θ) de p' , onde ρ é a distância hiperbólica de p' a O e θ é o ângulo entre γ^+ e o arco Op' , medido no sentido anti-horário. Sejam P a superfície totalmente geodésica que passa por p e é ortogonal a γ e z a distância hiperbólica do ponto Q a O , onde $\{Q\} = P \cap \gamma$.

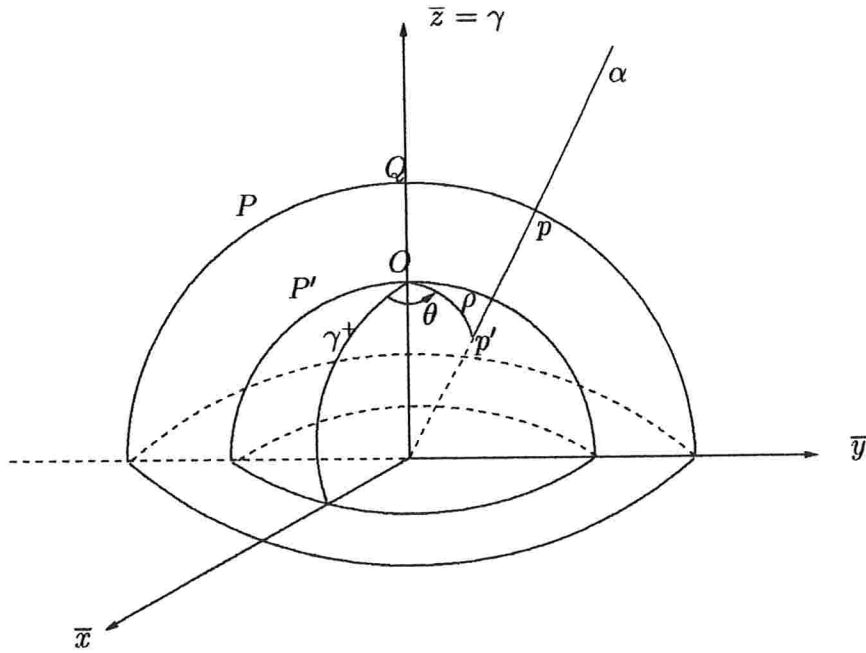


Figura 1.5: Coordenadas cilíndricas em \mathbb{R}_+^3 .

Assim, as coordenadas cilíndricas de p são dadas por (ρ, θ, z) .

Em \mathbb{R}_+^3 , a relação entre as coordenadas cartesianas e cilíndricas é então

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = e^z (\tanh \rho \cos \theta, \tanh \rho \sin \theta, \operatorname{sech} \rho), \quad (1.2)$$

de onde segue que a métrica (1.1), em coordenadas cilíndricas, é

$$d\sigma^2 = d\rho^2 + \sinh^2 \rho d\theta^2 + \cosh^2 \rho dz^2. \quad (1.3)$$

A órbita de $p = (\rho_0, \theta_0, z_0)$ é obtida por $R_\varphi(p) = (\rho_0, \theta_0 + \varphi, z_0)$, onde $R_\varphi(p)$ é a rotação de p de ângulo φ em torno do eixo \bar{z} . Se Σ é uma superfície rotacional que tem o eixo \bar{z} como eixo de rotação, é possível (a menos de isometrias) parametrizar Σ por $\mathcal{X}(s, t) = R_t(c(s))$, onde $c(s)$ é a sua curva geratriz parametrizada pelo comprimento de arco, de modo que a métrica de Σ é

$$d\sigma^2 = ds^2 + U^2(s) dt^2, \quad (1.4)$$

onde $U = U(s)$ é uma função positiva. Esta parametrização é chamada natural.

Supondo que a curva geratriz seja, localmente, um gráfico $z = \lambda = \lambda(\rho)$ no plano $\theta = 0$, mostra-se em [3] que os parâmetros naturais podem ser definidos pelas relações

$$ds = \sqrt{1 + \dot{\lambda}^2(\rho)} \cosh^2 \rho \, d\rho \quad e \quad dt = d\varphi. \quad (1.5)$$

Seguem então as relações

$$U^2(s) = \sinh^2 \rho(s) \quad e \quad \dot{\lambda}^2(s) = \frac{1 + U^2(s) - \dot{U}^2(s)}{(1 + U^2(s))^2}. \quad (1.6)$$

Assim, a parametrização natural de uma superfície rotacional em coordenadas cilíndricas é dada por

$$\begin{cases} \sinh^2 \rho(s) = U^2(s), \\ \lambda(s) = \int_0^s \frac{\sqrt{1 + U^2(t) - \dot{U}^2(t)}}{1 + U^2(t)} dt, \\ \varphi(t) = t. \end{cases} \quad (1.7)$$

1.3 *H*-superfícies rotacionais

O estudo das superfícies rotacionais com curvatura média constante no espaço hiperbólico, que chamamos de *H*-superfícies rotacionais, é um tema já bem explorado por muitos autores. Para nossas finalidades, o trabalho de Barrientos [3] se mostra muito interessante. Nesta seção, descrevemos, de forma resumida, os principais resultados a respeito das *H*-superfícies rotacionais que nos serão úteis, cujos detalhes podem ser vistos em [3].

Uma superfície rotacional no espaço hiperbólico gerada por uma curva $c(s) = (\rho(s), 0, \lambda(s))$, que identificaremos como $c(s) = (\rho(s), \lambda(s))$ tem curvatura média dada por

$$H(s) = \frac{-1}{2U(s)\dot{U}(s)} \frac{d}{ds} \left(U(s) \sqrt{1 + U^2(s) - \dot{U}^2(s)} \right). \quad (1.8)$$

Chamando $z(s) = U^2(s)$, obtemos a equação diferencial para uma H -superfície rotacional no espaço hiperbólico

$$\frac{\dot{z}^2}{4} = (1 - H^2)z^2 + (1 + 2aH)z - a^2, \quad (1.9)$$

onde a é uma constante de integração.

Como $\frac{\dot{z}^2}{4} \geq 0$, estudam-se separadamente os casos $\dot{z} = 0$ e $\dot{z} > 0$.

No primeiro caso, conclui-se que $\rho(s) = \rho$ é constante e, conseqüentemente, a superfície rotacional gerada por $c(s) = (\rho, \lambda(s))$ é um cilindro de rotação (hiperbólico).

No outro caso, estudam-se separadamente as superfícies com $H = 1$, $0 \leq H < 1$ e $H > 1$. Observemos que a orientação do vetor normal à superfície foi tomada de modo que $H \geq 0$.

A parametrização natural de uma H -superfície rotacional em \mathbb{R}_+^3 , com $H = 1$, gerada por uma curva $c(s) = (\rho(s), \lambda(s))$ é dada por

$$\begin{cases} \sinh^2 \rho(s) = \frac{a^2 + (1 + 2a)^2 s^2}{1 + 2a}, \\ \lambda(s) = \int_0^s \frac{\sqrt{1 + 2a}(-a(1 + a) + (1 + 2a)^2 t^2) \sqrt{a^2 + (1 + 2a)^2 t^2}}{(-a(1 + a) + (1 + 2a)^2 t^2)^2 + (1 + 2a)^4 t^2} dt, \\ \varphi(t) = t \end{cases} \quad (1.10)$$

Barrientos mostrou em [3] que $\rho(s)$ é uma função ilimitada, par, com um único ponto de mínimo em $s = 0$ e que $\lambda(s)$ é ímpar, de onde concluiu que $c(s) = (\rho(s), \lambda(s))$ é simétrica em relação ao raio geodésico ρ . Além disto, o comportamento das curvas geratrizes está determinado pelo parâmetro a , que neste caso, por (1.9), é tal que $a > -\frac{1}{2}$. Mais precisamente,

1. se $-\frac{1}{2} < a < 0$, vale que $\dot{\lambda}(s) > 0$ e as curvas são mergulhadas (primas da catenária);

2. se $a = 0$, as curvas são duas porções de horociclos tangentes na origem;
3. se $a > 0$, as curvas possuem uma única auto-intersecção.

No caso $0 \leq H < 1$, a parametrização natural de uma H -superfície rotacional, com geratriz $c(s) = (\rho(s), \lambda(s))$, é dada por

$$\left\{ \begin{array}{l} \sinh^2 \rho(s) = \frac{-A + B \cosh(2\alpha s)}{2\alpha^2}, \\ \lambda(s) = \int_0^s \frac{\sqrt{2\alpha(-2a + H(-1 + B \cosh(2\alpha t)))} \sqrt{-A + B \cosh(2\alpha t)}}{(-2a + H(-1 + B \cosh(2\alpha t)))^2 + \alpha^2 B^2 \sinh^2(2\alpha t)} dt, \\ \varphi(t) = t, \end{array} \right. \quad (1.11)$$

onde $A = 1 + 2aH$, $B = \sqrt{1 + 4aH + 4a^2}$ e $\alpha = \sqrt{1 - H^2}$.

Neste caso, $\rho(s)$ é uma função par, ilimitada, com um único ponto de mínimo em $s = 0$, enquanto que $\lambda(s)$ é uma função ímpar, limitada e possui limite finito quando $|s| \rightarrow +\infty$. Conclui-se então que a curva geratriz é simétrica em relação ao raio geodésico ρ , com bordo assintótico constituído de um ou dois pontos. O parâmetro a está definido para todo número real, por (1.9), e para $0 < H < 1$, tem-se que

1. se $a < 0$, vale que $\dot{\lambda}(s) > 0$ e as curvas geratrizes são mergulhadas;
2. se $a = 0$, as curvas são duas porções de curvas equidistantes (hiperciclos) tangentes na origem;
3. se $a > 0$, temos que $\dot{\lambda}(s) = 0$ tem duas soluções: $s_1 = \frac{1}{2\alpha} \operatorname{arccosh}\left(\frac{2a + H}{HB}\right)$ e $s_2 = -s_1$. Neste caso, existem curvas mergulhadas e não mergulhadas na superfície.

Em particular, para o caso $H = 0$,

1. se $a < 0$, vale que $\dot{\lambda}(s) > 0$ e se $a > 0$, vale que $\dot{\lambda}(s) < 0$, ou seja, $\lambda(s)$ é estritamente monótona. As curvas geratrizes estão todas mergulhadas na superfície (catenóides hiperbólicos);
2. se $a = 0$, tem-se $\lambda(s) = 0$ e a curva geratriz é o raio $\rho = (\rho(s), 0)$, gerando um plano totalmente geodésico.

Finalmente, no caso $H > 1$, a parametrização natural de uma H -superfície rotacional, com geratriz $c(s) = (\rho(s), \lambda(s))$, é dada por

$$\begin{cases} \sinh^2 \rho(s) = \frac{A + B \sin(2\alpha s)}{2\alpha^2}, \\ \lambda(s) = \int_0^s \frac{\sqrt{2}\alpha(2a + H(1 + B \sin(2\alpha t)))\sqrt{A + B \sin(2\alpha t)}}{(2a + H(1 + B \sin(2\alpha t)))^2 + \alpha^2 B^2 \cos^2(2\alpha t)} dt, \\ \varphi(t) = t, \end{cases} \quad (1.12)$$

onde $A = 1 + 2aH$, $B = \sqrt{1 + 4aH + 4a^2}$ e $\alpha = \sqrt{H^2 - 1}$.

Em [3], mostra-se que as funções $\rho(s)$ e $\dot{\lambda}(s)$ são periódicas de período $\frac{\pi}{\alpha}$ e, a partir disto, que a curva geratriz $c(s) = (\rho(s), \lambda(s))$ é periódica de período $\tilde{A} = \lambda(\frac{\pi}{\alpha})$. Por (1.9), temos que o parâmetro a , nesse caso, é tal que $a \geq \frac{-H + \sqrt{H^2 - 1}}{2}$. Mais precisamente,

1. se $a = \frac{-H + \sqrt{H^2 - 1}}{2}$, tem-se que $\dot{z} = 0$ em (1.9) e, como observamos no início desta seção, disto segue que $\rho(s) = \rho$ é constante e a superfície rotacional é um cilindro de rotação (hiperbólico);
2. se $\frac{-H + \sqrt{H^2 - 1}}{2} < a < 0$, vale que $\dot{\lambda}(s) > 0$ (corrigindo um pequeno erro em [3]), e as curvas geratrizes são os ondulóides hiperbólicos;
3. se $a = 0$, as curvas são semicircunferências tangentes entre si ao longo do eixo de rotação;
4. se $a > 0$, temos que $\dot{\lambda}(s) = 0$ tem infinitas soluções, que são pontos de máximo e mínimo, que se alternam consecutivamente; as curvas geratrizes são os nodóides hiperbólicos.

Caracterizações iniciais das soluções do problema isoperimétrico

Neste capítulo, mostramos que as soluções do problema isoperimétrico “minimizar a área da fronteira de uma região entre duas horoesferas paralelas, que é uma superfície com bordo contido na reunião das horoesferas, quando uma certa função volume está fixada”, são regiões delimitadas por H -superfícies rotacionais que intersectam as horoesferas perpendicularmente ao longo de seu bordo.

2.1 As fronteiras das regiões isoperimétricas são H -superfícies perpendiculares às horoesferas ao longo do bordo

Apresentamos as definições necessárias para caracterizar o problema isoperimétrico que estamos considerando. Observemos que todos os resultados, que serão obtidos nesta seção para \mathbb{R}_+^3 , podem ser generalizados naturalmente para hipersuperfícies em \mathbb{R}_+^{n+1} .

Seja $\Pi = \Pi_1 \cup \Pi_2$, onde Π_1 e Π_2 são horoesferas representadas por planos euclidianos horizontais paralelos e distintos. Notemos que as horoesferas são paralelas no sentido que a distância hiperbólica entre elas é constante. Seja $\phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}_+^3$ uma imersão de uma superfície conexa, compacta, mergulhada, de classe C^2 , orientável, com bordo $\Gamma = \partial\Sigma$ e tal que ϕ aplica Γ em Π .

Como é usual em teoria de imersões, identificamos (localmente) Σ com $\phi(\Sigma)$ e $X(p) \in T_p\Sigma$ com $d\phi_p(T_p\Sigma) \subset \mathbb{R}_+^3$. Assim, temos uma decomposição ortogonal

$$T_p(\mathbb{R}_+^3) = T_p(\Sigma) \oplus N_p(\Sigma),$$

nos espaços tangente e normal a Σ em p , respectivamente. No contexto de superfícies, sabemos que existe uma única direção normal à superfície em cada ponto. Assim, fixemos N um campo unitário normal à imersão ϕ . Se $X(p) \in T_p(\mathbb{R}_+^3)$, podemos decompô-lo como

$$X(p) = X(p)^T + X(p)^N = X(p)^T + \alpha N(p),$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}$.

Denotemos por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a métrica em Σ induzida pela imersão $\phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}_+^3$, por $\bar{\nabla}$ a conexão Riemanniana de \mathbb{R}_+^3 e por ∇ a conexão Riemanniana de Σ . Logo, se $p \in \Sigma$, $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, onde $\mathfrak{X}(\Sigma)$ é o conjunto dos campos vetoriais diferenciáveis de Σ definidos em uma vizinhança de p , então

$$\nabla_X Y = (\bar{\nabla}_X Y)^T$$

$$B(X, Y) = (\bar{\nabla}_X Y)^N.$$

B é chamada a **segunda forma fundamental** da imersão ϕ .

O operador de Weingarten de ϕ em relação ao campo normal unitário N , denotado por A_N , é definido como sendo o endomorfismo linear $A_N : T\Sigma \rightarrow T\Sigma$ dado por

$$A_N(Y) = -(\bar{\nabla}_Y N)^T. \quad (2.1)$$

A curvatura média H da imersão ϕ é definida por

$$H = \frac{1}{2} \text{traço}(A_N). \quad (2.2)$$

O operador de Weingarten A_N e a segunda forma fundamental B da imersão ϕ são relacionados por

$$\langle A_N(X), Y \rangle = \langle B(X, Y), N \rangle.$$

Definição 2.1.1. *Uma variação de ϕ é uma aplicação C^∞ , $F : (-\epsilon, \epsilon) \times \Sigma \rightarrow \mathbb{R}_+^3$, tal que $\phi_t : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}_+^3$, $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, definida por $\phi_t(p) = F(t, p)$, $\forall p \in \Sigma$,*

(a) *é uma imersão;*

(b) $\phi_0 = \phi$.

Se $p \in \Sigma$, $X(p) = \frac{\partial \phi_t}{\partial t} \Big|_{t=0}$ é o campo variacional de ϕ e $f(p) = \langle X(p), N(p) \rangle$ é a componente normal do vetor-variação.

A variação é dita **normal** se o campo variacional X é, em cada ponto, normal à imersão ϕ .

Dizemos que a variação F tem suporte compacto quando X tem suporte compacto. Para uma variação com suporte compacto e valores pequenos de t , temos que ϕ_t é uma imersão de Σ em \mathbb{R}_+^3 . Neste caso, definimos a **função área** $A : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$A(t) = \int_{\Sigma} dA_t = \int_{\Sigma} \sqrt{\det[(d\phi_t)^*(d\phi_t)]} dA,$$

onde dA é o elemento de área de Σ . $A(t)$ mede, em cada instante t , a área de Σ com a métrica induzida pela imersão ϕ_t . Definimos também a **função volume** $V : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$V(t) = - \int_{[0,t] \times \Sigma} F^* d(\mathbb{R}_+^3),$$

onde $d(\mathbb{R}_+^3)$ é o elemento de volume canônico de \mathbb{R}_+^3 e $F^* d(\mathbb{R}_+^3)$ é o pull-back de $d(\mathbb{R}_+^3)$ por F . $V(t)$ mede, em cada instante t , o volume com sinal encerrado pelas imersões ϕ e ϕ_t .

Definição 2.1.2. *Seja $F : (-\epsilon, \epsilon) \times \Sigma \rightarrow \mathbb{R}_+^3$ uma variação de ϕ .*

- (i) F preserva volume se $V(t) = V(0) (= 0), \forall t \in (-\epsilon, \epsilon)$;
- (ii) F é admissível se $F(\partial\Sigma) \subset \Pi, \forall t \in (-\epsilon, \epsilon)$.

Definição 2.1.3. *A imersão ϕ é dita estacionária se $A'(0) = 0$, para todas variações admissíveis que preservam volume.*

Proposição 2.1.4. (1ª Variação da Área) *Seja F uma variação de ϕ com campo variacional X e suporte compacto em Σ . Então*

$$A'(0) = -2 \int_{\Sigma} H f dA + \int_{\Gamma} \langle X, \nu \rangle d\Gamma, \quad (2.3)$$

onde ν é o conormal (vetor no plano tangente a Σ num ponto $p \in \Gamma$, perpendicular ao vetor tangente a Γ em p) unitário exterior ao longo do bordo Γ , dA é o elemento de área de Σ e $d\Gamma$ é o elemento de comprimento de Γ , induzido por ϕ .

Prova: Segue da definição de $A(t)$ que

$$A'(t) = \int_{\Sigma} \frac{1}{2\sqrt{\det[(d\phi_t)^*d\phi_t]}} \left(\det[(d\phi_t)^*d\phi_t] \right) \text{traço} \left([(d\phi_t)^*d\phi_t]^{-1} \circ \frac{d}{dt} \left((d\phi_t)^*d\phi_t \right) \right) dA.$$

Como ϕ_0 é a inclusão de Σ em \mathbb{R}_+^3 , temos que $d\phi_0$ é a inclusão dos respectivos espaços tangentes e $d\phi_0^*$ é a projeção ortogonal em $T\Sigma$ e, assim,

$$(d\phi_0)^*d\phi_0 = Id.$$

Calculando em $t = 0$, obtemos

$$A'(0) = \int_{\Sigma} \frac{1}{2} \text{traço} \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} [(d\phi_t)^*d\phi_t] \right) dA.$$

Usando o Lema de Simetria de ∇^ϕ , que denota a conexão ao longo da imersão ϕ , temos que

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (d\phi_t) = \nabla^\phi \frac{\partial \phi_t}{\partial t} \Big|_{t=0} = \nabla^\phi X.$$

Portanto,

$$A'(0) = \int_{\Sigma} \frac{1}{2} \text{traço} \left((\nabla^\phi X)^* \Big|_{T\Sigma} + \text{proj}_{T\Sigma} \nabla^\phi X \right) dA = \int_{\Sigma} \text{traço} \left(\text{proj}_{T\Sigma} \nabla^\phi X \right) dA,$$

onde $\text{proj}_{T\Sigma}$ denota a projeção sobre o fibrado tangente a Σ .

Decompondo o campo variacional como

$$X = X^T + X^N,$$

temos que as projeções das componentes tangente e normal (por (2.1)) de $\nabla^\phi(X)$ sobre $T\Sigma$ são

$$\text{proj}_{T\Sigma} \nabla^\phi(X^T) = \nabla(X^T)$$

$$\text{proj}_{T\Sigma} \nabla^\phi(X^N) = -A_{X^N}.$$

Portanto, usando (2.2), temos que

$$A'(0) = \int_{\Sigma} \left(\text{div} X^T - 2 \langle X^N, H N \rangle \right) dA.$$

Pelo Teorema de Stokes, segue que

$$A'(0) = \int_{\Gamma} \langle X^T, \nu \rangle d\Gamma - 2 \int_{\Sigma} \langle X^N, H N \rangle dA =$$

$$\begin{aligned} &= -2 \int_{\Sigma} H \langle X, N \rangle dA + \int_{\Gamma} \langle X, \nu \rangle d\Gamma = \\ &= -2 \int_{\Sigma} H f dA + \int_{\Gamma} \langle X, \nu \rangle d\Gamma. \end{aligned}$$

■

Proposição 2.1.5. (1ª Variação do Volume) *Seja F uma variação de ϕ com campo variacional X e suporte compacto em Σ . Então*

$$V'(0) = - \int_{\Sigma} f dA, \quad (2.4)$$

onde $f(p) = \langle X(p), N(p) \rangle$, como antes.

Prova: Adaptamos a prova do Lema (2.1) de [5] e Lema 3.6 de [13]. Fixe $p \in \Sigma$ e tome um referencial ortonormal adaptado positivo $\{e_1, e_2, N\}$ ao redor de $\phi(p)$. Assim,

$$F^* d(\mathbb{R}_+^3) = a(t, p) dt \wedge dA,$$

onde

$$\begin{aligned} a(t, p) &= \det \left(\frac{\partial \phi_t}{\partial t}, d\phi_t(e_1), d\phi_t(e_2) \right) \\ &= \text{vol} \left(\frac{\partial \phi_t}{\partial t}, d\phi_t(e_1), d\phi_t(e_2) \right) \\ &= \left\langle \frac{\partial \phi_t}{\partial t}, b(t, p) N_t \right\rangle \\ &= b(t, p) f_t, \end{aligned}$$

onde $b(t, p) = \text{vol}(d\phi_t(e_1), d\phi_t(e_2), N_t)$.

Portanto, como $b(0, p) = 1$ e $f_0 = f$, segue que

$$V'(0) = - \int_{\Sigma} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \left(\int_{[0,t]} b(t, p) f_t dt \right) dA = - \int_{\Sigma} b(0, p) f dA = - \int_{\Sigma} f dA.$$

■

Formulamos melhor nosso problema isoperimétrico: “minimizar a área da fronteira de uma região Ω entre duas horoesferas Π_1 e Π_2 em \mathbb{R}_+^3 , com volume (com sinal) $|\Omega| = V$ prescrito, descontando-se a área da parte da fronteira contida nas horoesferas. Supomos que a parte da fronteira que não está contida nas horoesferas seja uma superfície conexa, mergulhada, orientável, de classe C^2 , compacta e com bordo contido em $\Pi = \Pi_1 \cup \Pi_2$. Caracterizamos os pontos estacionários de A segundo a Definição 2.1.3. Mais precisamente, mostramos no próximo teorema que as fronteiras das regiões isoperimétricas são

H -superfícies que encontram as horoesferas Π_1 e Π_2 perpendicularmente ao longo de seu bordo.

Teorema 2.1.6. *Uma imersão $\phi : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}_+^3$ é estacionária se e somente se ϕ tem curvatura média constante e intersecta Π ortogonalmente ao longo de $\Gamma = \partial\Sigma$.*

Prova: Adaptamos a prova da Proposição (2.7) de [4]. Suponha que ϕ tem curvatura média constante e encontra Π ortogonalmente ao longo de Γ . Seja Φ uma variação admissível de ϕ que preserva volume. Consequentemente,

$$0 = V'(0) = - \int_{\Sigma} f \, dA. \quad (2.5)$$

Além disto, como ϕ encontra Π perpendicularmente, temos que o conormal exterior ν ao longo de Γ é perpendicular a Π . Como a variação é admissível, segue que $\phi_t(\Gamma) \subset \Pi$ e, portanto, $X(p) \in T_p\Pi, \forall p \in \Gamma$. Logo,

$$\left. \langle X, \nu \rangle \right|_{\Gamma} = 0. \quad (2.6)$$

Portanto, como H é constante, temos por (2.5) e por (2.6) que

$$A'(0) = -2H \int_{\Sigma} f \, dA = 0.$$

Reciprocamente, suponha que ϕ é estacionária. Primeiramente, mostremos que ϕ tem curvatura média constante. Sejam $p \in \overset{\circ}{\Sigma}$, onde $\overset{\circ}{\Sigma}$ denota o interior de Σ e a bola geodésica $B = B_p(r) \subset \overset{\circ}{\Sigma}$ de centro em p e raio r , que é um aberto contendo p .

Defina

$$H_0 = \frac{1}{A(B)} \int_B H \, dB.$$

Suponha, por absurdo, que existe $\tilde{p} \in B$ tal que $H(\tilde{p}) > H_0$. Sejam

$$D^+ = \{q \in B : H(q) > H_0\};$$

$$D^- = \{q \in B : H(q) < H_0\}.$$

Como $\tilde{p} \in D^+$ e pela definição de H_0 , segue que $D^+ \neq \emptyset$ e $D^- \neq \emptyset$.

Seja $U^+ = B \setminus \{\tilde{p}\}$. Assim, $U^+ \cup D^+ = B$. Tomando uma partição da unidade em $U^+ \cup D^+ = B$, segue que existe uma função não-negativa τ_1 tal que $\tilde{p} \in \text{supp } \tau_1 \subset D^+$.

Sejam $q \in D^-$ e $U^- = B \setminus \{q\}$. Assim, $U^- \cup D^- = B$ e tomando uma partição da unidade em $U^- \cup D^- = B$, segue que existe uma função não-negativa ψ_1 tal que $q \in \text{supp } \psi_1 \subset D^-$.

Sejam

$$\begin{aligned} a_1 &= \int_B \tau_1 (H - H_0) dB; \\ b_1 &= \int_B \psi_1 (H - H_0) dB. \end{aligned}$$

Pela construção de τ_1 e ψ_1 , temos que $a_1 > 0$ e $b_1 < 0$. Seja $c := -\frac{a_1}{b_1}$.

Consideremos agora as funções não-negativas τ e ψ dadas por $\tau = \tau_1$ e $\psi = c\psi_1$. Definimos a função $u := (\tau + \psi) \cdot (H - H_0)$. Então

$$\int_B u dB = 0. \quad (2.7)$$

Consideremos uma variação F com suporte compacto Λ contido em B e cuja componente normal do vetor-variação é a função u definida acima. Podemos estendê-la a uma variação em Σ de modo a coincidir com F em Λ e não variar fora de Λ . Assim, temos que $X \Big|_{\Gamma} = 0$,

de onde segue que

$$\langle X, \nu \rangle \Big|_{\Gamma} = 0. \quad (2.8)$$

Portanto, temos uma variação admissível que preserva volume (por (2.7)) definida em Σ e, como ϕ é estacionária, temos por (2.3) e (2.8) que

$$0 = A'(0) = -2 \int_{\Sigma} Hu dB. \quad (2.9)$$

Logo, por (2.9) e (2.7)

$$\int_{\Sigma} (H - H_0)u dB = \int_{\Sigma} HudB - H_0 \int_{\Sigma} u dB = 0.$$

Por outro lado,

$$\int_{\Sigma} (H - H_0)u dB = \int_{\Sigma} (\tau + \psi) \cdot (H - H_0)^2 dB > 0,$$

o que é uma contradição. Segue que $H = H_0$ em B . Como Σ é conexa, segue que H é constante em Σ , isto é, ϕ tem curvatura média constante.

Agora, mostremos que ϕ intersecta Π ortogonalmente ao longo de Γ .

Seja Φ uma variação admissível qualquer que preserve volume com campo variacional X . Seja $p_0 \in \partial\Sigma$. Suponha, por absurdo, que $\langle X(p_0), \nu(p_0) \rangle \neq 0$. Por continuidade, podemos garantir que existe uma vizinhança $U \subset \partial\Sigma$ de p_0 tal que $\langle X(p), \nu(p) \rangle > 0$, $\forall p \in U$, onde $U = W_1 \cap \partial\Sigma$ e W_1 é uma vizinhança de p_0 em Σ . Sejam $q \in \overset{\circ}{\Sigma} \setminus W_1$ e W_2 uma vizinhança de q , disjunta de W_1 . Tomando uma partição da unidade associada $W_1 \cup W_2$, existe uma função $\xi_1 : W_1 \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável tal que $\xi_1(W_1) \subset [0, 1]$, com suporte $\text{supp } \xi_1 \subset W_1$ e podemos tomar W_2 e a função $\xi_2 : W_2 \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável de modo a satisfazerem $\xi_2(W_2) \subset [0, 1]$, $\text{supp } \xi_2 \subset W_2$ e

$$\int_{W_1} \xi_1 f dW_1 + \int_{W_2} \xi_2 f dW_2 = 0. \quad (2.10)$$

Consideremos a variação $\Phi_\xi : (-\epsilon, \epsilon) \times \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$, com suporte contido em $W_1 \cup W_2$ e tal que

$$\Phi_\xi^t(p) = \Phi_\xi(t, p) = \begin{cases} \Phi(\xi_1 t, p), & p \in W_1, \\ \Phi(\xi_2 t, p), & p \in W_2. \end{cases}$$

Vamos provar que Φ_ξ é, de fato, uma variação.

- Fixando $t = t_0$, temos

$$d(\Phi_\xi^{t_0})(v) = t_0 \left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_{t=0} (\xi(p), t_0, p) d\xi_p(v) + d\Phi_{(\xi(p)t_0, p)} v.$$

Observemos que $d\Phi_{(\xi(p)t_0, p)} v \neq 0$, pois Φ é imersão. Consequentemente,

$$|d(\Phi_\xi^{t_0})(v)| \leq |t_0| |X_{t_0}(p)| |\nabla \xi| |v| + |d\Phi_{(\xi(p)t_0, p)} v|,$$

onde ∇ denota o gradiente. Assim, tomando t_0 suficientemente pequeno, diminuindo o intervalo $(-\epsilon, \epsilon)$ se necessário, podemos garantir que

$$|t_0| |X_{t_0}(p)| |\nabla \xi| |v| + |d\Phi_{(\xi(p)t_0, p)} v| \neq 0,$$

de onde segue que Φ_ξ^t é uma imersão, $\forall t \in (-\epsilon, \epsilon)$;

- $\Phi_\xi^0 = \Phi$, por construção.

Mostremos que Φ_ξ é uma variação admissível que preserva volume.

2.2 As fronteiras das regiões isoperimétricas são superfícies rotacionais 23

1. $\frac{\partial \Phi_\xi}{\partial t} = \xi_1(p) \frac{\partial \Phi}{\partial t}$, se $p \in W_1$. Como Φ é admissível, segue que Φ_ξ é admissível.
2. Temos que o vetor-variação de Φ_ξ é

$$\begin{aligned} X_\xi(p) &= \left. \frac{\partial \Phi_\xi}{\partial t} \right|_{t=0}(p) = \xi_1(p) \left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_{t=0}(p) = \xi_1(p) X(p), \quad p \in W_1; \\ X_\xi(p) &= \xi_2(p) X(p), \quad p \in W_2. \end{aligned}$$

Conseqüentemente, a componente normal do vetor-variação de Φ_ξ é

$$\begin{aligned} f_\xi(p) &= \xi_1(p) \langle X(p), N(p) \rangle = \xi_1(p) f(p), \quad p \in W_1; \\ f_\xi(p) &= \xi_2(p) \langle X(p), N(p) \rangle = \xi_2(p) f(p), \quad p \in W_2; \\ f_\xi(p) &= 0, \quad p \notin W_1 \cup W_2. \end{aligned}$$

Portanto, por (2.10), temos que

$$\int_{\Sigma} f_\xi dA = \int_{W_1} \xi_1(p) f(p) dW_1 + \int_{W_2} \xi_2(p) f(p) dW_2 = 0, \quad (2.11)$$

ou seja, Φ_ξ preserva volume.

Para esta variação, como supomos ϕ estacionária e já mostramos que tem H constante, temos por (2.3), (2.11), que

$$0 = A'(0) = -2H \int_{\Sigma} f_\xi dA + \int_{W_1} \xi_1 \langle X, \nu \rangle d\Gamma = \int_{W_1} \xi_1 \langle X, \nu \rangle d\Gamma. \quad (2.12)$$

Como $\xi_1(W_1) \subset [0, 1]$ e $\langle X, \nu \rangle > 0$ em W_1 , então $\int_{W_1} \xi_1 \langle X, \nu \rangle d\Gamma > 0$, o que é uma contradição com (2.12), que surgiu por termos suposto que $\langle X(p_0), \nu(p_0) \rangle \neq 0$. Assim, $\forall p \in \partial\Sigma$, temos que $\langle X, \nu \rangle(p) = 0$. ■

2.2 As fronteiras das regiões isoperimétricas são superfícies rotacionais

Nesta seção, mostramos que as fronteiras das soluções isoperimétricas são superfícies rotacionais. Para isto, vamos usar o que já provamos acima: que elas são H -superfícies. Como este é um tema bem explorado, não vamos repetir aqui as provas dos Princípios do Máximo no interior e no bordo, mas apenas enunciá-los.

Consideramos planos euclidianos verticais P , que são planos totalmente geodésicos em \mathbb{R}_+^3 e reflexões euclidianas em relação a estes planos, que são isometrias de \mathbb{R}_+^3 . Descrevemos, a seguir, o método do Princípio de Reflexão de Alexandrov.

Tomamos uma reta euclidiana r qualquer em uma das horoesferas Π_1 ou Π_2 e P um plano perpendicular à reta r obtido da seguinte maneira: consideramos um feixe F de planos (paralelos) perpendiculares a r e escolhemos para ser o plano P aquele plano de F que primeiro tangenciar a superfície. Desta forma, temos que P é perpendicular a Π_1 e a Π_2 e é um plano suporte de Σ .

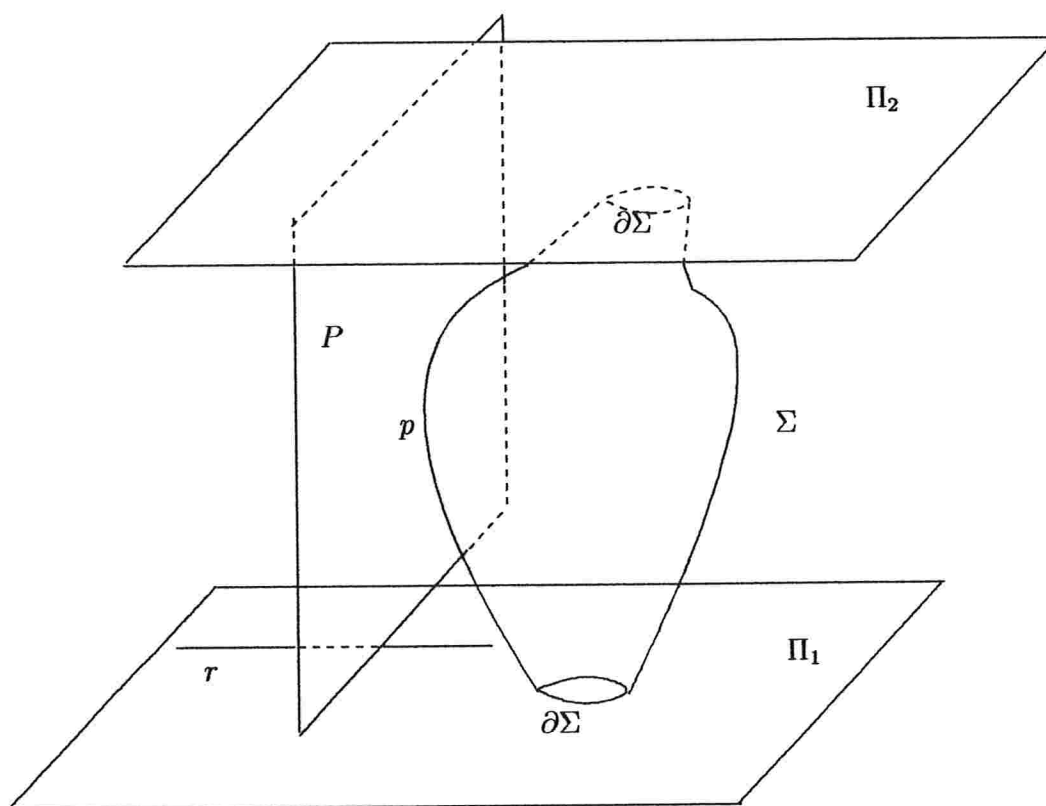


Figura 2.1: Posição do plano P em relação às horoesferas Π_1 e Π_2 e à superfície Σ .

Como Σ delimita um sólido compacto K em \mathbb{R}_+^3 , movemos então o plano P paralelamente de modo a cruzar o sólido K . Em cada posição de P , refletimos em relação a P a parte de Σ já cruzada e a denotamos por Σ_r . Para pequenos deslocamentos de P , temos que Σ_r pertence ao interior de K .

2.2 As fronteiras das regiões isoperimétricas são superfícies rotacionais 25

Mais precisamente, enunciamos o **Princípio de Reflexão de Alexandrov**.

Seja Σ uma superfície compacta, orientável, conexa, mergulhada em \mathbb{R}_+^3 , que está localizada entre duas horoesferas Π_1 e Π_2 e com bordo contido na união das horoesferas. Assuma que Σ tem curvatura média constante H . Sejam P e K um plano totalmente geodésico e um sólido, respectivamente, determinados como descrevemos acima. Seja P^δ o plano obtido quando deslocamos P a uma distância euclidiana δ , de modo a cruzar K . Sejam $\{P^\delta\}$ a família de planos paralelos a P assim obtidos e $\{\Sigma_r^\delta\}$ a família formada pelas partes refletidas (euclidianamente) de Σ em relação a P^δ . Definimos:

$$\delta^* := \sup\{\delta : \delta = \text{dist}(P^\delta, P), \Sigma_r^\delta \subset K\},$$

onde $\text{dist}(P^\delta, P)$ denota a distância euclidiana entre P^δ e P . Continuamos com o processo de reflexão até o momento em que obtemos P^{δ^*} e $\Sigma_r^{\delta^*}$ que, por motivo de simplificação, chamamos novamente de P e Σ_r . Pela hipótese de *compacidade* de Σ , temos que para este δ^* , Σ_r e a parte $\tilde{\Sigma}$ de Σ que está do mesmo lado de P que Σ_r têm, no mínimo, um ponto x_0 em comum. Além disto, Σ_r e $\tilde{\Sigma}$ têm o mesmo plano tangente neste ponto x_0 . Por esta razão, x_0 é denominado o 1º ponto de contato.

Como Σ está entre duas horoesferas, x_0 pode ocorrer no interior ou no bordo da superfície (como nas figuras 2.2 e 2.3). Ver detalhes na Seção 3.2 de [17].

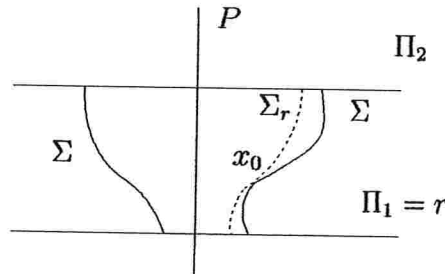


Figura 2.2: Representação da possibilidade em que $x_0 \in \overset{\circ}{\Sigma}$.

Antes de aplicar o Princípio de Reflexão no espaço hiperbólico, vamos apresentar alguns resultados e definições que nos serão úteis e que aparecem em [7].

Seja P o plano $\{x = 0\}$ em \mathbb{R}_+^3 . Dado um domínio D em P e uma função $u : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$, definimos o **gráfico horizontal** de u por

$$G(u) = \{(u(y, z), y, z); (0, y, z) \in \overline{D}\}.$$

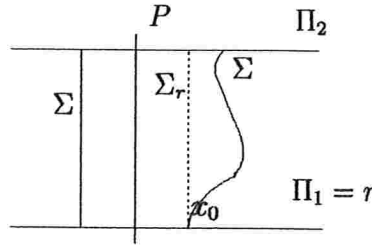


Figura 2.3: Representação da possibilidade em que $x_0 \in \partial\Sigma$.

Em [7], é mostrado que a equação da curvatura média para um gráfico horizontal (hiperbólico) é

$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{W(u)}\right) = \frac{2}{z} \left(H + \frac{u_2}{W(u)}\right), \quad (2.13)$$

onde ∇u é o gradiente euclidiano de u , $W(u) = (1 + u_1^2 + u_2^2)^2$ e u_1, u_2 são as derivadas parciais de u em relação a y e z , respectivamente.

Sejam Σ_1 e Σ_2 duas superfícies conexas em \mathbb{R}_+^3 , tangentes e com o mesmo normal unitário em um ponto p . Escolhemos coordenadas locais para \mathbb{R}_+^3 de modo que o plano tangente P comum, em p , seja o plano $\{x = 0\}$ e o vetor normal comum seja $(1, 0, 0)$. Assim, em uma vizinhança de p , Σ_1 e Σ_2 são gráficos horizontais de funções u e v definidas em um aberto D de P . Dizemos que Σ_1 está acima de Σ_2 se $u \geq v$ e denotamos por $\Sigma_1 \geq \Sigma_2$. Temos então os Princípio do Máximo no Interior e no Bordo.

Princípio do Máximo no Interior: Sejam Σ_1 e Σ_2 superfícies em \mathbb{R}_+^3 , como acima. Sejam H_1 e H_2 suas respectivas curvaturas médias. Se numa vizinhança de um ponto de tangência comum no interior das superfícies tivermos $\Sigma_1 \geq \Sigma_2$ e $H_1 \leq H_2$, então $\Sigma_1 = \Sigma_2$ nesta vizinhança.

Princípio do Máximo no Bordo: Sejam Σ_1 e Σ_2 superfícies com bordo diferenciável em \mathbb{R}_+^3 como acima. Sejam H_1 e H_2 suas respectivas curvaturas médias. Se numa vizinhança de um ponto de tangência comum no bordo das superfícies tivermos $\Sigma_1 \geq \Sigma_2$ e $H_1 \leq H_2$, então $\Sigma_1 = \Sigma_2$ na vizinhança (que tem p em seu bordo).

Vamos omitir as provas destes princípios, observando que elas são exatamente as mesmas que aparecem no caso euclidiano em [17], visto que os argumentos não dependem da geometria das superfícies, mas basicamente de Análise. Outra referência, para maiores detalhes, é o Capítulo 3 de [7].

2.2 As fronteiras das regiões isoperimétricas são superfícies rotacionais 27

No nosso caso, temos Σ_1 é a reflexão da superfície Σ , que chamamos de Σ_r , em relação a um plano euclidiano vertical e Σ_2 é a parte de Σ que não foi refletida, Σ' . Como elas têm a mesma curvatura média, é conhecido que estas superfícies são analíticas. Assim, como elas coincidem em um aberto, então elas coincidem em toda a sua intersecção. Isto faz com que $\Sigma_r = \Sigma'$, provando que P é um plano de simetria de Σ . Como a reta r era arbitrária, concluimos que Σ tem, em cada direção horizontal, um plano de simetria, de onde segue que a superfície Σ é rotacional (esférica) e tem uma reta euclidiana vertical (geodésica de \mathbb{R}_+^3) como eixo de simetria. Os detalhes das afirmações acima podem ser vistos em [17], visto que a situação é análoga ao caso euclidiano.

Com isto, ficou provado o seguinte resultado.

Teorema 2.2.1. *Seja Σ uma superfície mergulhada em \mathbb{R}_+^3 , de classe C^2 , orientável, conexa e compacta, que está localizada entre as horoesferas paralelas Π_1, Π_2 e com bordo $\partial\Sigma \subset \Pi_1 \cup \Pi_2$. Se tivermos ainda que a curvatura média H de Σ é constante então Σ é rotacionalmente simétrica ao redor de um eixo perpendicular a Π_1 e a Π_2 .*

Observação 2.2.2. *O corte da superfície Σ com uma horoesfera \mathcal{H} , dada por um plano euclidiano horizontal, é formado por uma única circunferência euclidiana. De fato, se o corte fosse constituído de duas circunferências concêntricas (conforme figura 2.4) e a região isoperimétrica fosse aquela delimitada pelas respectivas circunferências então, pelo Princípio de Reflexão de Alexandrov, seria possível obter um plano totalmente geodésico P , dado por um plano euclidiano vertical, que seria um plano de simetria, mas não conteria o eixo de simetria, obtendo assim uma contradição.*

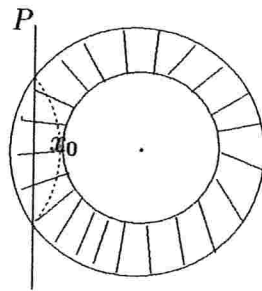


Figura 2.4: Representação de uma situação em que $\Sigma \cap \mathcal{H}$ consiste de duas circunferências concêntricas, sendo x_0 o primeiro ponto de contato.

Um caso preliminar: o caso do plano hiperbólico

Neste capítulo, estudamos o problema isoperimétrico para o caso do plano hiperbólico.

3.1 Geometria do plano hiperbólico

Nesta seção, apresentamos algumas definições e resultados, cujas provas serão, em geral, omitidas, pois podem ser encontradas em [8]. Chamamos de plano hiperbólico o conjunto definido por

$$\mathbb{R}_+^2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > 0\},$$

dotado da métrica

$$\langle, \rangle = ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}. \quad (3.1)$$

A reta euclidiana $\{y = 0\}$ é chamada bordo no infinito de \mathbb{R}_+^2 e é denotada por $\partial_\infty \mathbb{R}_+^2$.

A seguir, descrevemos as curvas de curvatura geodésica constante $k \geq 0$ em \mathbb{R}_+^2 , que foram caracterizadas no Capítulo 6 de [8] (nesta referência, a curvatura é chamada de hiperbólica).

- a) *Geodésicas*: são representadas por retas euclidianas verticais contidas em \mathbb{R}_+^2 e semi-circunferências euclidianas perpendiculares a $\partial_\infty \mathbb{R}_+^2$ e contidas em \mathbb{R}_+^2 . Neste caso, $k = 0$;

- b) *circunferências geodésicas*: são as circunferências euclidianas inteiramente contidas em \mathbb{R}_+^2 . Neste caso, $k > 1$ e o vetor curvatura aponta para o interior delas. Se ρ denota o raio hiperbólico de uma circunferência geodésica então $k = \coth \rho$;
- c) *horociclos*: são representados por retas euclidianas horizontais de \mathbb{R}_+^2 e circunferências euclidianas de \mathbb{R}_+^2 tangentes a $\partial_\infty \mathbb{R}_+^2$. Neste caso, $k = 1$ e o vetor curvatura aponta para cima no primeiro caso (retas horizontais) e para o interior no segundo caso (circunferências).
- d) *curvas equidistantes*: são curvas que equidistam, na métrica dada por (3.1), de uma geodésica. São dadas pela interseção de \mathbb{R}_+^2 com as retas de \mathbb{R}^2 que não são paralelas nem perpendiculares à reta $\{y = 0\}$ e pelas circunferências euclidianas que não estão inteiramente contidas em \mathbb{R}_+^2 e não são tangentes nem perpendiculares à reta $\{y = 0\}$. Neste caso, $0 < k < 1$ e o seu vetor curvatura aponta para a geodésica da qual elas equidistam.

As isometrias de \mathbb{R}_+^2 foram descritas detalhadamente nos Capítulos 1 e 4 de [8]. Elas são as transformações de Möbius de \mathbb{R}^2 que deixam \mathbb{R}_+^2 invariante. Destacamos, para nossos objetivos, as translações euclidianas horizontais, as reflexões euclidianas em relação à uma geodésica vertical, as homotetias euclidianas e as inversões euclidianas (relativas a circunferências centradas em $\{y = 0\}$).

Para \mathbb{R}_+^2 , o problema isoperimétrico tem a seguinte versão: “minimizar o perímetro de uma região contida entre dois horociclos paralelos (representados por retas euclidianas horizontais paralelas), fixada a área, descontando-se a parte da fronteira da região que está contida nos horociclos”. Quando falamos em perímetro de uma região, queremos dizer o comprimento da fronteira da região.

Como a homotetia euclidiana é uma isometria de \mathbb{R}_+^2 , tomamos o horociclo inferior como sendo a reta $\{y = 1\}$ para estudar o problema isoperimétrico e as outras soluções são então obtidas por homotetia.

Adaptando a prova do Teorema 2.1.6 para o caso plano, temos que as soluções do problema isoperimétrico são regiões cujas fronteiras são curvas de curvatura geodésica constante que encontram os horociclos perpendicularmente (quando a interseção for não-vazia). A existência e regularidade das soluções isoperimétricas é garantida por resultados

que aparecem nos trabalhos de Morgan (ver [11] e [12]), observando que as isometrias de \mathbb{R}_+^2 que deixam a região \mathcal{F} entre os horociclos paralelos invariante são as translações euclidianas horizontais e as reflexões euclidianas em relação a uma geodésica vertical, de modo que se G é o grupo de tais isometrias então \mathcal{F}/G é compacto, pois é homeomorfo ao intervalo $[0, 1]$.

Nas próximas seções, nosso objetivo é obter as expressões para a área e o perímetro das possíveis soluções isoperimétricas.

3.2 Coordenadas polares em \mathbb{R}_+^2

Sejam (x, y) as coordenadas cartesianas em \mathbb{R}_+^2 . Fixamos a geodésica γ em \mathbb{R}_+^2 , dada pelo eixo $y > 0$. Seja $O = (0, 1)$ a origem do sistema de coordenadas. Fixamos um raio geodésico γ^+ com origem em O , dado pela reta euclidiana $\{x = 0; y \geq 1\}$. Seja $p \in \mathbb{R}_+^2$ um ponto qualquer. As coordenadas polares (ρ, θ) de p são definidas como: ρ é a distância hiperbólica de p a O e θ é o ângulo entre γ^+ e a geodésica que passa por O e p , medido no sentido anti-horário.

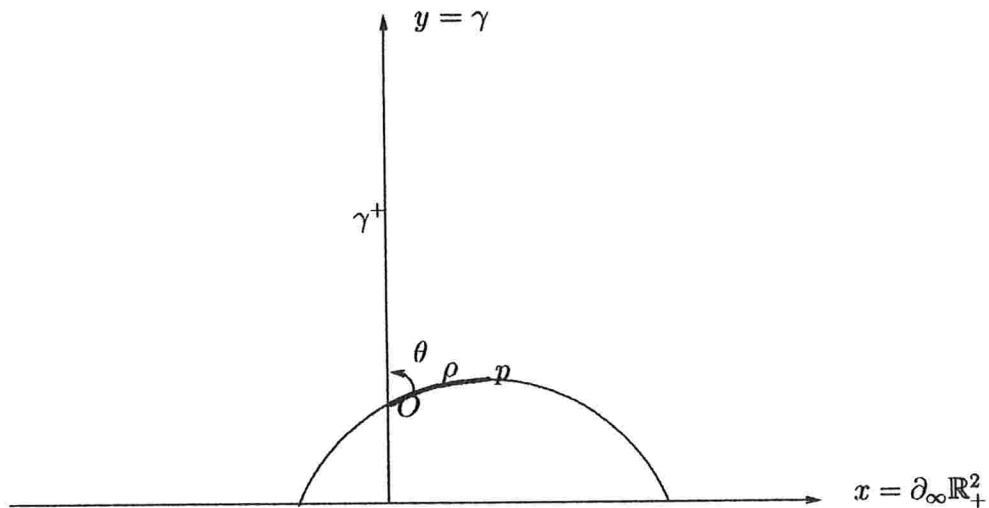


Figura 3.1: Coordenadas polares em \mathbb{R}_+^2 .

Usando trigonometria hiperbólica, mostramos que a relação entre as coordenadas carte-

sianas e as polares é

$$(x, y) = \frac{1}{\cosh \rho - \sinh \rho \cos \theta} (\sinh \rho \sin \theta, 1), \quad (3.2)$$

e que a métrica de \mathbb{R}_+^2 , dada por (3.1), em coordenadas polares, é

$$d\sigma^2 = d\rho^2 + \sinh^2 \rho d\theta^2. \quad (3.3)$$

Conseqüentemente, podemos obter as expressões para o comprimento de arco de uma circunferência geodésica e para a área de um setor em função do ângulo central β .

Para simplificar, tomamos a circunferência de raio hiperbólico ρ e centro hiperbólico como sendo o ponto O .

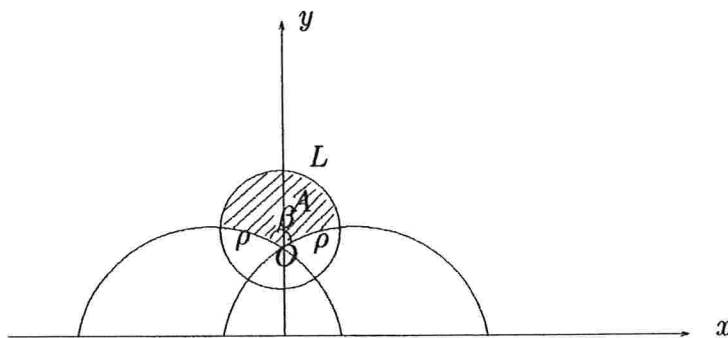


Figura 3.2: Comprimento e área em função do ângulo central.

A circunferência geodésica pode ser parametrizada por

$$\alpha(\theta) = (\rho, \theta),$$

com ρ constante e $0 \leq \theta \leq \beta$.

Logo, em coordenadas polares,

$$d\sigma^2(\alpha') = \sinh^2 \rho.$$

Portanto, o comprimento de arco (na métrica hiperbólica) que subentende um ângulo central β é

$$L(\alpha) = \int_0^\beta \sqrt{d\sigma^2(\alpha')} d\theta = \beta \sinh \rho. \quad (3.4)$$

Na métrica dada em (3.1), a área A de uma região \mathcal{R} no plano hiperbólico é definida por

$$A = \int_{\mathcal{R}} \frac{1}{y^2} dx dy. \quad (3.5)$$

Usando a métrica em coordenadas polares dada por (3.3), temos que a área A do setor de disco geodésico que subentende um ângulo central β é dada por

$$A = \int_0^\beta \int_0^\rho \sinh \rho d\rho d\theta = \beta (\cosh \rho - 1). \quad (3.6)$$

Como já vimos, as fronteiras das soluções do problema isoperimétrico são curvas de curvatura geodésica constante que encontram os horociclos perpendicularmente (adaptação do Teorema 2.1.6 para o caso plano). As possibilidades são, então, geodésicas verticais, circunferências geodésicas, horociclos representados por circunferências euclidianas de \mathbb{R}_+^2 tangentes a $\partial_\infty \mathbb{R}_+^2$ e curvas equidistantes representadas por circunferências euclidianas que não estão inteiramente contidas em \mathbb{R}_+^2 e não são tangentes nem perpendiculares à reta $\{y = 0\}$. As regiões no plano limitadas pelo horociclo $\{y = 1\}$ e pelas circunferências geodésicas, horociclos e curvas equidistantes que encontram perpendicularmente o horociclo serão chamadas, respectivamente, de **meio disco geodésico**, **meio disco horociclo** e **meio disco equidistante**. A região delimitada pelos horociclos e por duas geodésicas verticais será chamada de **seção**. Meio disco superior e inferior a um horociclo significará a porção do meio disco, com centro euclidiano no horociclo, que está, respectivamente, acima e abaixo do horociclo.

3.3 Expressão para o perímetro e a área de uma seção

Sejam $c > 1$ e $x_0 < x_1$ constantes reais. Para simplificar, consideremos as geodésicas verticais $\{x = x_0\}$ e $\{x = x_1\}$, contidas em \mathbb{R}_+^2 , e os horociclos paralelos $\{y = 1\}$ e $\{y = c\}$.

Usando a métrica hiperbólica dada por (3.1), calculamos a seguir o perímetro e a área desta seção.

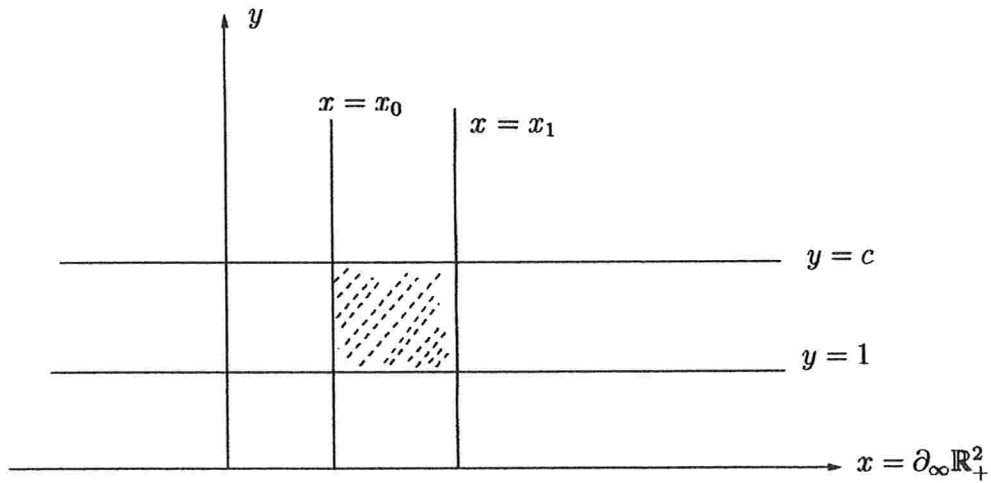


Figura 3.3: Seção entre os horociclos.

Lema 3.3.1. *Com as notações introduzidas acima, o perímetro e a área da seção são, respectivamente, dados por*

$$\begin{aligned} L &= 2 \ln c, \\ A &= (x_1 - x_0) \left(\frac{-1}{c} + 1 \right). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Prova: Como o comprimento de um segmento geodésico vertical, com $1 < y < c$ é

$$\ln\left(\frac{c}{1}\right) = \ln c,$$

então

$$L = 2 \ln c.$$

Por (3.5), a área é calculada como

$$A = \int_{x_0}^{x_1} \int_1^c \frac{1}{y^2} dy dx = (x_1 - x_0) \left(\frac{-1}{c} + 1 \right).$$

■

3.4 Expressão para o perímetro e a área de um meio disco geodésico

Sejam $c \in \mathbb{R}_+^*$ e $\{y = c\}$ um horociclo em \mathbb{R}_+^2 . Para simplificar, consideramos a circunferência euclidiana S de centro $(0, c)$ e raio $r < c$. Assim, S também pode ser vista como uma circunferência geodésica $S_{\mathcal{H}}$ de centro hiperbólico $C_{\mathcal{H}} = (0, h)$ e raio hiperbólico ρ . Determinemos as relações entre os raios e os centros de S e de $S_{\mathcal{H}}$.

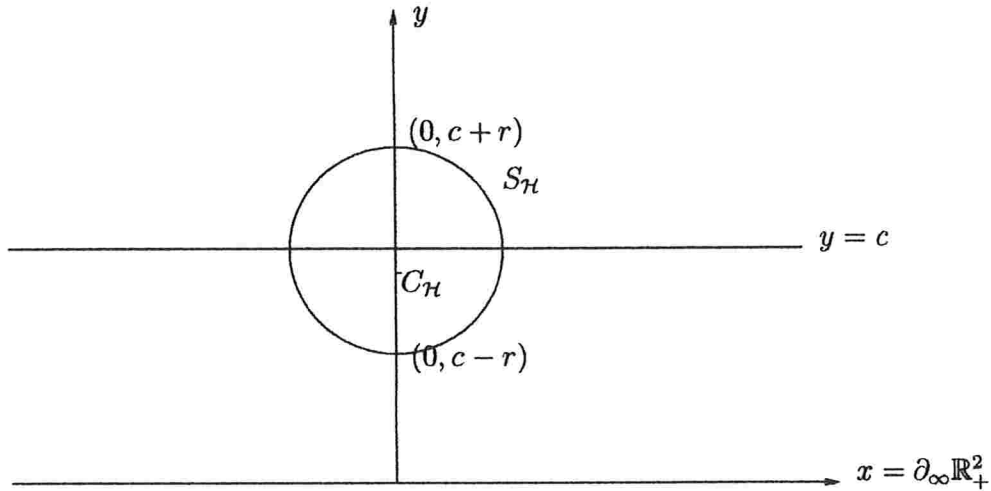


Figura 3.4: Relações entre os raios e os centros de S e de $S_{\mathcal{H}}$.

Como $C_{\mathcal{H}} = (0, h)$ equidista, na métrica (3.1), dos pontos de coordenadas $(0, c - r)$ e $(0, c + r)$, então parametrizando o segmento vertical com extremidades nestes pontos por $\alpha(t) = (0, t)$, com $c - r \leq t \leq c + r$ e calculando a distância entre o centro hiperbólico e as extremidades do segmento, temos que

$$\int_{c-r}^h \frac{1}{t} dt = \int_h^{c+r} \frac{1}{t} dt,$$

de onde segue a relação

$$h = \sqrt{c^2 - r^2}. \tag{3.8}$$

Logo, $C_{\mathcal{H}} = (0, \sqrt{c^2 - r^2})$ e o raio hiperbólico é

$$\rho = \int_{c-r}^h \frac{1}{t} dt = \ln \frac{h}{c-r} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{c+r}{c-r} \right). \tag{3.9}$$

Segue desta última relação que

$$\frac{r}{c} = \frac{e^{2\rho} - 1}{e^{2\rho} + 1} = \tanh \rho. \quad (3.10)$$

Uma informação que nos será útil no futuro é a relação entre as áreas hiperbólicas dos meio discos geodésicos superior e inferior ao horociclo $\{y = c\}$, denotadas por A^+ e A^- , respectivamente. Por (3.5), temos que

$$A^+ = 2 \int_0^r \int_c^{c+\sqrt{r^2-x^2}} \frac{1}{y^2} dy dx = \frac{2}{c} \int_0^r \frac{\sqrt{r^2-x^2}}{c+\sqrt{r^2-x^2}} dx. \quad (3.11)$$

e

$$A^- = 2 \int_0^r \int_{c-\sqrt{r^2-x^2}}^c \frac{1}{y^2} dy dx = \frac{2}{c} \int_0^r \frac{\sqrt{r^2-x^2}}{c-\sqrt{r^2-x^2}} dx. \quad (3.12)$$

Comparando os integrandos de A^+ e A^- em (3.11) e (3.12), resulta que

$$A^- > A^+. \quad (3.13)$$

De modo análogo, mostramos que os comprimentos de arco da circunferência geodésica acima e abaixo do horociclo, L^+ e L^- , respectivamente, são tais que

$$L^- > L^+. \quad (3.14)$$

Seja θ o ângulo determinado pela semi-reta $\{x = 0, y \geq h\}$ e pela geodésica \tilde{S} que passa por $C_{\mathcal{H}} = (0, h)$ e pelo ponto (r, c) (ver figura 3.5). Assim, θ mede a metade do ângulo central que subentende o arco da meia circunferência geodésica superior ao horociclo $\{y = c\}$ e \tilde{S} tem centro $(r, 0)$ e raio c .

Como a métrica hiperbólica é conforme à métrica euclidiana (por (3.1)), θ pode ser medido pela métrica euclidiana. Para isto, parametrizamos \tilde{S} por $\alpha(t) = (c \sin t + r, c \cos t)$, com $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$. Observemos que

$$C_{\mathcal{H}} = (0, h) = (0, \sqrt{c^2 - r^2}) = \alpha(t_0) = (c \sin t_0 + r, c \cos t_0),$$

de onde segue que

$$\sin t_0 = -\frac{r}{c}. \quad (3.15)$$

Assim, calculando o ângulo θ entre os vetores tangentes a $\alpha(t)$ e ao eixo y (no sentido crescente), resulta que

$$\cos \theta = -\sin t_0 = \frac{r}{c}. \quad (3.16)$$

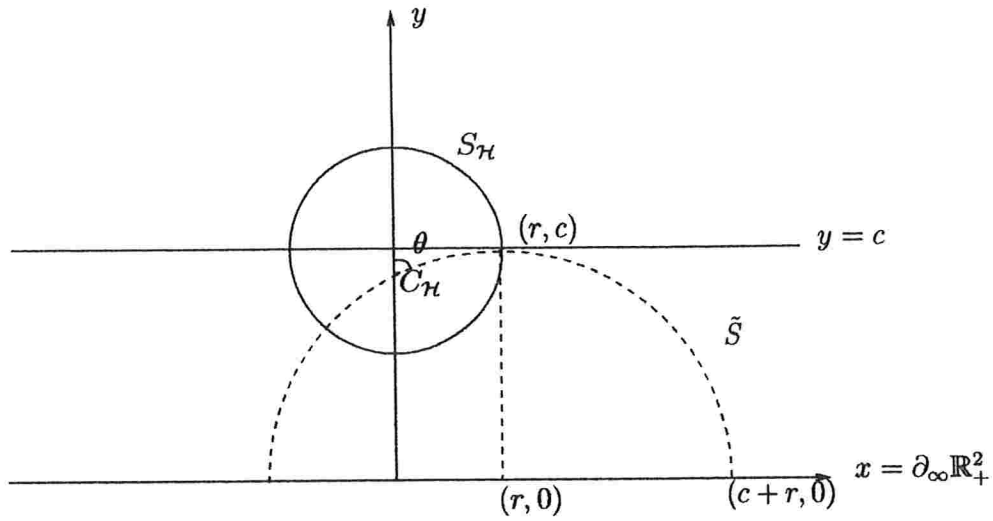


Figura 3.5: Arco de circunferência geodésica subentendido por um ângulo central θ .

De modo geral, a área da região limitada por \tilde{S} , pelo eixo y e pelo horociclo $\{y = c\}$ pode ser calculada como (vista como sendo a área sob o gráfico de $x = x(y)$)

$$A = \int_h^c \frac{r - \sqrt{c^2 - y^2}}{y^2} dy = -\frac{r}{c} + \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{h}{c}\right). \quad (3.17)$$

Suponha $c > 1$. Consideremos os horociclos $\{y = 1\}$ e $\{y = c\}$ e as circunferências euclidianas S_1 , com centro $(0, 1)$ e raio $r_1 < 1$ e S_2 , com centro $(0, c)$ e raio $r_2 < c - 1$ (ver figura 3.6). Por (3.8) e (3.9), S_1 também pode ser vista como uma circunferência geodésica $S_{\mathcal{H}}^1$ de centro hiperbólico $(0, h_1) = (0, \sqrt{1 - r_1^2})$ e raio hiperbólico $\rho_1 = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + r_1}{1 - r_1}\right)$, enquanto que S_2 também pode ser vista como uma circunferência geodésica $S_{\mathcal{H}}^2$ de centro hiperbólico $(0, h_2) = (0, \sqrt{c^2 - r_2^2})$ e raio hiperbólico $\rho_2 = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{c + r_2}{c - r_2}\right)$.

Sejam β_1 e β_2 os ângulos centrais de $S_{\mathcal{H}}^1$ e $S_{\mathcal{H}}^2$ correspondentes aos arcos superior a $\{y = 1\}$ e inferior a $\{y = c\}$, respectivamente. Por (3.16), temos que

$$\begin{aligned} \beta_1 &= 2 \arccos(r_1) \\ \beta_2 &= 2\pi - 2 \arccos\left(\frac{r_2}{c}\right). \end{aligned} \quad (3.18)$$

O seguinte resultado reúne as informações acerca dos perímetros e áreas de meio discos geodésicos.

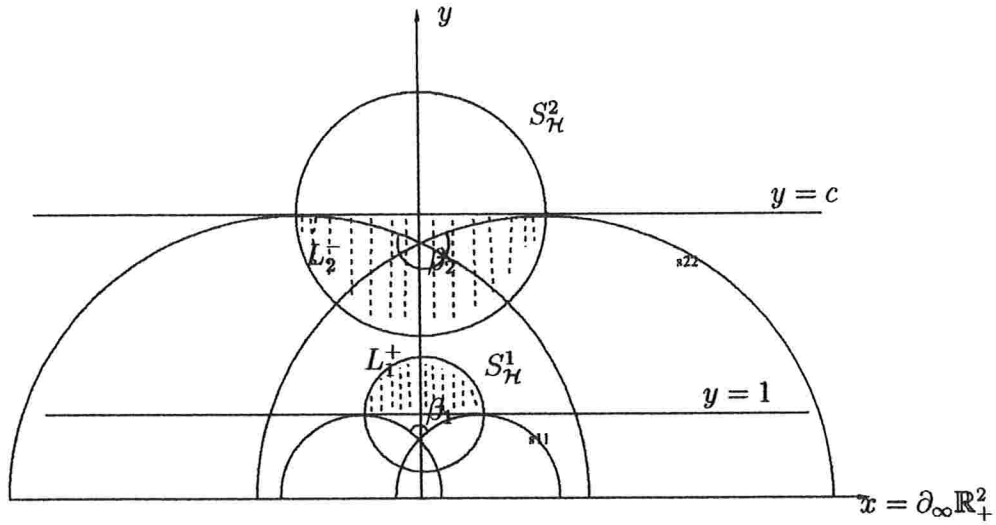


Figura 3.6: Perímetro e área de meio discos geodésicos.

Lema 3.4.1. *Com as notações introduzidas acima, sejam \tilde{S}_1 a geodésica que passa por $C_{\mathcal{H}}^1 = (0, h_1)$ e pelo ponto $(r_1, 1)$ e \tilde{S}_2 a geodésica que passa por $C_{\mathcal{H}}^2 = (0, h_2)$ e pelo ponto (r_2, c) . Sejam $\theta_1 = \frac{1}{2}\beta_1$ e $\theta_2 = \pi - \frac{1}{2}\beta_2$, $0 < \theta_1, \theta_2 < \frac{\pi}{2}$. Sendo $L_1 = L_1^+$ e $A_1 = A_1^+$ o perímetro e a área, respectivamente, do meio disco geodésico delimitado por $S_{\mathcal{H}}^1$ e superior a $\{y = 1\}$ e $L_2 = L_2^-$ e $A_2 = A_2^-$ o perímetro e a área, respectivamente, do meio disco geodésico delimitado por $S_{\mathcal{H}}^2$ e inferior a $\{y = c\}$. Então*

$$\begin{aligned} L_1 &= 2\theta_1 \cot \theta_1, \\ L_2 &= 2(\pi - \theta_2) \cot \theta_2, \end{aligned} \quad (3.19)$$

e

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{2\theta_1}{\sin \theta_1} - \pi + 2 \cos \theta_1, \\ A_2 &= \frac{2(\pi - \theta_2)}{\sin \theta_2} - \pi - 2 \cos \theta_2. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Prova: Por (3.4), os comprimentos de arcos determinados por β_1 e β_2 medem, respectivamente

$$\begin{aligned} L_1 &= \beta_1 \sinh \rho_1, \\ L_2 &= \beta_2 \sinh \rho_2. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Por (3.9), temos que

$$\begin{aligned}\sinh \rho_1 &= \sinh \left(\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+r_1}{1-r_1} \right) \right) = \frac{r_1}{\sqrt{1-r_1^2}}, \\ \sinh \rho_2 &= \sinh \left(\frac{1}{2} \ln \left(\frac{c+r_2}{c-r_2} \right) \right) = \frac{r_2}{\sqrt{c^2-r_2^2}}.\end{aligned}\tag{3.22}$$

Por (3.16),

$$\begin{aligned}\cot \theta_1 &= \frac{r_1}{\sqrt{1-r_1^2}}, \\ \cot \theta_2 &= \frac{r_2}{\sqrt{c^2-r_2^2}}.\end{aligned}\tag{3.23}$$

Assim, por (3.21) e (3.23), provamos (3.19).

Passemos, agora, aos cálculos das áreas A_1 e A_2 . Observemos que

$$\frac{1}{2}A_1 = \tilde{A}_1 - \overline{A}_1,$$

onde \tilde{A}_1 é a área do setor correspondente ao ângulo θ_1 e \overline{A}_1 é a área da região limitada por \tilde{S}_1 , pelo eixo y e pelo horociclo $\{y = 1\}$. De modo análogo,

$$\frac{1}{2}A_2 = \tilde{A}_2 + \overline{A}_2,$$

onde \tilde{A}_2 é a área do setor correspondente ao ângulo $\frac{1}{2}\beta_2 = \pi - \theta_2$ e \overline{A}_2 é a área da região limitada por \tilde{S}_2 , pelo eixo y e pelo horociclo $\{y = c\}$.

Assim, por (3.6) e (3.17), temos que

$$\begin{aligned}A_1 &= 2\theta_1 (\cosh \rho_1 - 1) - 2 \left(-r_1 + \frac{\pi}{2} - \arcsin(h_1) \right), \\ A_2 &= 2(\pi - \theta_2) (\cosh \rho_2 - 1) + 2 \left(-\frac{r_2}{c} + \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{h_2}{c}\right) \right).\end{aligned}\tag{3.24}$$

Mas, por (3.9),

$$\begin{aligned}\cosh \rho_1 &= \cosh \left(\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+r_1}{1-r_1} \right) \right) = \frac{1}{\sqrt{1-r_1^2}}, \\ \cosh \rho_2 &= \cosh \left(\frac{1}{2} \ln \left(\frac{c+r_2}{c-r_2} \right) \right) = \frac{c}{\sqrt{c^2-r_2^2}}.\end{aligned}\tag{3.25}$$

Como

$$r_1^2 + \left(\sqrt{1-r_1^2} \right)^2 = 1,$$

e

$$\left(\frac{r_2}{c}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{c^2 - r_2^2}}{c}\right)^2 = 1,$$

então, por (3.8), temos

$$\begin{aligned} \arccos(r_1) &= \arcsin(\sqrt{1 - r_1^2}) = \arcsin(h_1), \\ \arccos\left(\frac{r_2}{c}\right) &= \arcsin\left(\frac{\sqrt{c^2 - r_2^2}}{c}\right) = \arcsin\left(\frac{h_2}{c}\right). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Além disto, por (3.16),

$$\cos \theta_1 = r_1,$$

e

$$\cos \theta_2 = \frac{r_2}{c};$$

então

$$\begin{aligned} \sin \theta_1 &= \sqrt{1 - r_1^2}, \\ \sin \theta_2 &= \frac{\sqrt{c^2 - r_2^2}}{c}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Juntando (3.24), (3.25), (3.26) e (3.27), provamos (3.20). ■

Como consequência do Lema 3.4.1, obtemos no próximo corolário o perímetro e a área de um meio disco horociclo, visto que um horociclo \mathbb{H} é uma circunferência geodésica com centro hiperbólico em $\partial_\infty \mathbb{R}_+^2$. Por (3.16), temos que $\cos \theta_1 = r_1$ e o horociclo é obtido no caso limite em que r_1 tende a 1, ou seja, θ_1 tende a 0.

Corolário 3.4.2. *Seja \mathbb{H} um horociclo representado por uma circunferência euclidiana com centro $(0, 1)$ e raio igual a 1. Sejam $L_{\mathbb{H}}$ e $A_{\mathbb{H}}$ o perímetro e a área, respectivamente, do meio disco horociclo superior ao horociclo $\{y = 1\}$. Então*

$$\begin{aligned} L_{\mathbb{H}} &= 2, \\ A_{\mathbb{H}} &= 4 - \pi. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Prova: Basta calcular as expressões de L_1 e A_1 em (3.19) e (3.20) no caso limite em que $\theta_1 \rightarrow 0$. ■

3.5 Expressão para o perímetro e a área de um meio disco equidistante

Seja \mathbb{E} uma curva equidistante representada por uma circunferência euclidiana com centro $(0, 1)$ e raio $r > 1$. Estamos interessados em calcular o perímetro e a área da região limitada por \mathbb{E} superior ao horociclo $\{y = 1\}$, que chamamos de meio disco equidistante.

Euclidianamente, \mathbb{E} tem equação

$$x^2 + (y - 1)^2 = r^2.$$

Logo,

$$\mathbb{E} \cap \partial_\infty \mathbb{R}_+^2 = \{(-\sqrt{r^2 - 1}, 0), (\sqrt{r^2 - 1}, 0)\}.$$

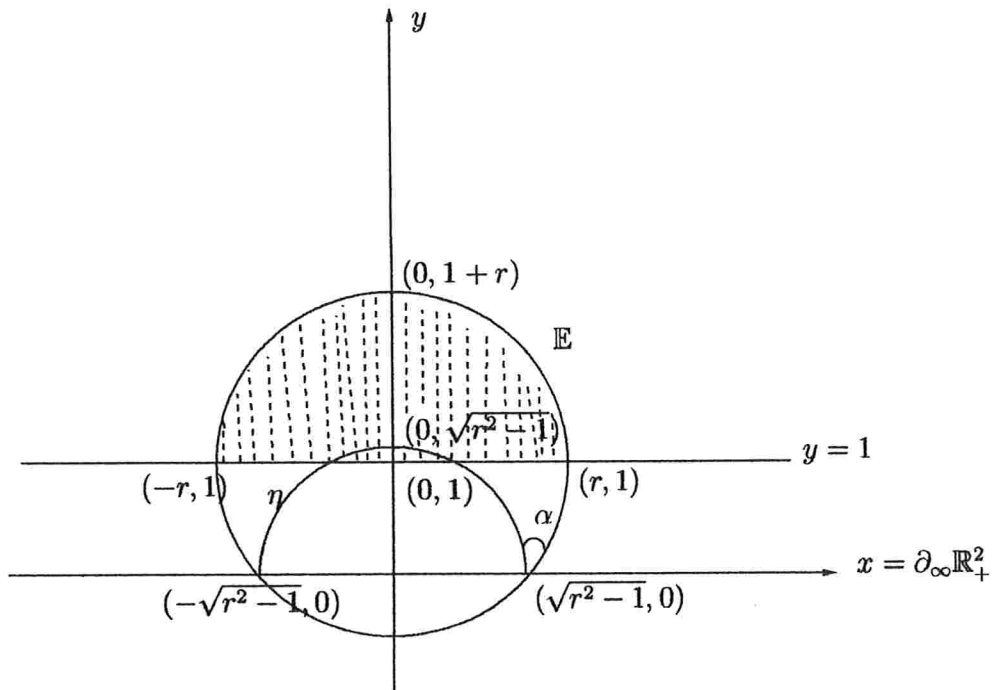


Figura 3.7: Perímetro e área de um meio disco equidistante.

Observemos que a geodésica η da qual \mathbb{E} equidista tem equação

$$x^2 + y^2 = r^2 - 1.$$

Se ρ denota a distância hiperbólica entre \mathbb{E} e η , temos que ρ pode ser calculado como a distância hiperbólica entre os pontos $(0, 1+r)$ e $(0, \sqrt{r^2-1})$; logo,

$$\rho = \ln \left(\frac{r+1}{r-1} \right)^{\frac{1}{2}},$$

de onde segue que

$$r = \coth \rho. \quad (3.29)$$

Se α é o ângulo (não-orientado) entre \mathbb{E} e η , $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, então usando trigonometria hiperbólica, pode-se mostrar que (ver, por exemplo, Proposição 3 do Capítulo 5 de [8])

$$\tanh \rho = \sin \alpha. \quad (3.30)$$

O seguinte lema é o principal resultado desta seção e apresenta as expressões do perímetro e da área para um meio disco equidistante.

Lema 3.5.1. *Com as notações acima, consideremos \mathbb{E} uma curva equidistante representada por uma circunferência euclidiana com centro $(0, 1)$ e raio $r > 1$. Sejam $L_{\mathbb{E}}$ e $A_{\mathbb{E}}$ o perímetro e a área, respectivamente, do meio disco equidistante superior ao horociclo $\{y = 1\}$. Então*

$$L_{\mathbb{E}} = \frac{2}{\cos \alpha} \ln \left(\frac{1}{\sin \alpha} + \cot \alpha \right), \quad (3.31)$$

$$A_{\mathbb{E}} = \frac{2}{\sin \alpha} - \pi + \frac{2}{\cot \alpha} \ln \left(\frac{1}{\sin \alpha} + \cot \alpha \right).$$

Prova: Para calcular $L_{\mathbb{E}}$, parametrizamos \mathbb{E} por

$$\beta(t) = (r \cos t, 1 + r \sin t), \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

Assim,

$$L_{\mathbb{E}} = 2 \int_0^{\pi} \frac{r}{1 + r \sin t} dt.$$

Lembrando que

$$\sin t = \frac{2 \tan \frac{t}{2}}{1 + (\tan \frac{t}{2})^2} = \frac{2 \tan \frac{t}{2}}{(\sec \frac{t}{2})^2},$$

3.5 Expressão para o perímetro e a área de um meio disco equidistante 43

segue que

$$\frac{r}{1+r \sin t} = \frac{r(\sec \frac{t}{2})^2}{(r + \tan \frac{t}{2})^2 - (r^2 - 1)}.$$

Para fazer o cálculo da integral acima, fazemos a substituição

$$u := r + \tan \frac{t}{2}.$$

Após alguns cálculos, resulta que

$$\begin{aligned} L_{\mathbb{E}} &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r}{1+r \sin t} dt \\ &= \frac{2r}{\sqrt{r^2-1}} \ln \left(\frac{r + \tan \frac{t}{2} - \sqrt{r^2-1}}{r + \tan \frac{t}{2} + \sqrt{r^2-1}} \right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{2r}{\sqrt{r^2-1}} \ln \left(\frac{r+1+\sqrt{r^2-1}}{r+1-\sqrt{r^2-1}} \right). \end{aligned}$$

Mas,

$$\frac{r+1+\sqrt{r^2-1}}{r+1-\sqrt{r^2-1}} = r + \sqrt{r^2-1}.$$

Então,

$$L_{\mathbb{E}} = \frac{2r}{\sqrt{r^2-1}} \ln(r + \sqrt{r^2-1}).$$

Por (3.29) e (3.30), temos que

$$r = \frac{1}{\sin \alpha},$$

de onde segue que

$$\sqrt{r^2-1} = \cot \alpha,$$

visto que $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Portanto,

$$L_{\mathbb{E}} = \frac{2}{\cos \alpha} \ln \left(\frac{1}{\sin \alpha} + \cot \alpha \right),$$

o que prova a primeira parte de (3.31).

Passemos ao cálculo da área do meio disco equidistante. Por (3.5),

$$A_{\mathbb{E}} = 2 \int_0^r \int_1^{1+\sqrt{r^2-x^2}} \frac{1}{y^2} dy dx = 2 \int_0^r \frac{\sqrt{r^2-x^2}}{1+\sqrt{r^2-x^2}} dx.$$

Após uma série de cálculos e simplificações, concluímos finalmente que

$$\begin{aligned} & \int_0^r \frac{\sqrt{r^2-x^2}}{1+\sqrt{r^2-x^2}} dx = \\ & \left(x - \arcsin\left(\frac{x}{r}\right) + \frac{1}{2\sqrt{r^2-1}} \left(\ln(r^2\sqrt{r^2-1} + \sqrt{r^2-1}\sqrt{r^2-x^2} + (r^2-1)x) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \ln\left|r^2\sqrt{r^2-1} + \sqrt{r^2-1}\sqrt{r^2-x^2} - (r^2-1)x\right| \right) \right) \Big|_0^r. \end{aligned}$$

Conseqüentemente,

$$A_{\mathbb{E}} = 2 \int_0^r \frac{\sqrt{r^2-x^2}}{1+\sqrt{r^2-x^2}} dx = 2r - \pi + \frac{1}{\sqrt{r^2-1}} \ln \left| \frac{r\sqrt{r^2-1} + (r^2-1)}{r\sqrt{r^2-1} - (r^2-1)} \right|.$$

Observamos que

$$\frac{r\sqrt{r^2-1} + (r^2-1)}{r\sqrt{r^2-1} - (r^2-1)} = (r + \sqrt{r^2-1})^2.$$

Disto, de (3.29) e de (3.30), segue a área do meio disco equidistante, em função do ângulo de equidistância α , é

$$A_{\mathbb{E}} = \frac{2}{\sin \alpha} - \pi + \frac{2}{\cot \alpha} \ln \left(\frac{1}{\sin \alpha} + \cot \alpha \right),$$

o que prova a segunda parte de (3.31). ■

3.6 Perfil isoperimétrico da região entre dois horociclos paralelos em \mathbb{R}_+^2

Nesta seção, obtemos o perfil isoperimétrico da região \mathcal{F} entre dois horociclos paralelos em \mathbb{R}_+^2 . Para nossas finalidades, estudamos as regiões Ω contidas na região \mathcal{F} que são 2(-dimensional)-retificáveis (em relação à medida de Hausdorff) com fronteira 1(-dimensional)-retificável. Para mais detalhes, ver [12].

3.6 Perfil isoperimétrico da região entre dois horociclos paralelos em \mathbb{R}_+^2 45

Teorema 3.6.1. *Sejam $c > 1$, $\mathcal{F}_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : 1 \leq y \leq c\}$ e A uma constante real positiva. Seja $\mathcal{C}_{c,A} = \{\Omega \subset \mathcal{F}_c, \text{ com área } |\Omega| = A \text{ e perímetro } L(\Omega \cap \overset{\circ}{\mathcal{F}}_c) < \infty\}$.*

Seja $L_{c,A} = \inf\{L(\Omega \cap \overset{\circ}{\mathcal{F}}_c) : \Omega \in \mathcal{C}_{c,A}\}$. Então

1. *existe $\Omega \in \mathcal{C}_{c,A}$ tal que $L(\Omega \cap \overset{\circ}{\mathcal{F}}_c) = L_{c,A}$;*
2. *a região Ω minimizante é constituída de uma única componente conexa e é*
 - (a) *ou um meio disco (geodésico, horociclo, equidistante) superior a $\{y = 1\}$;*
 - (b) *ou uma seção de \mathcal{F}_c da forma*

$$S_{[x_0, x_1]} = [x_0, x_1] \times [1, c].$$

Mais explicitamente, sendo d a distância hiperbólica entre os horociclos, temos que

1. *se $d < 1$, existe $A_0(c)$ tal que*
 - *se $A < A_0(c)$ então Ω é um meio disco geodésico;*
 - *se $A = A_0(c)$ então Ω é um meio disco geodésico ou uma seção;*
 - *se $A > A_0(c)$ então Ω é uma seção;*
2. *se $d = 1$, existe $A_0(c)$ tal que*
 - *se $A < A_0(c)$ então Ω é um meio disco geodésico;*
 - *se $A = A_0(c)$ então Ω é um meio disco horociclo ou uma seção;*
 - *se $A > A_0(c)$ então Ω é uma seção;*
3. *se $d > 1$, existem duas constantes $A_0(c) < A_1(c)$ tais que*
 - *se $A < A_0(c)$ então Ω é um meio disco geodésico;*
 - *se $A = A_0(c)$ então Ω é um meio disco horociclo;*
 - *se $A_0(c) < A < A_1(c)$ então Ω é um meio disco equidistante;*
 - *se $A = A_1(c)$ então Ω é um meio disco equidistante ou uma seção;*
 - *se $A > A_1(c)$ então Ω é uma seção.*

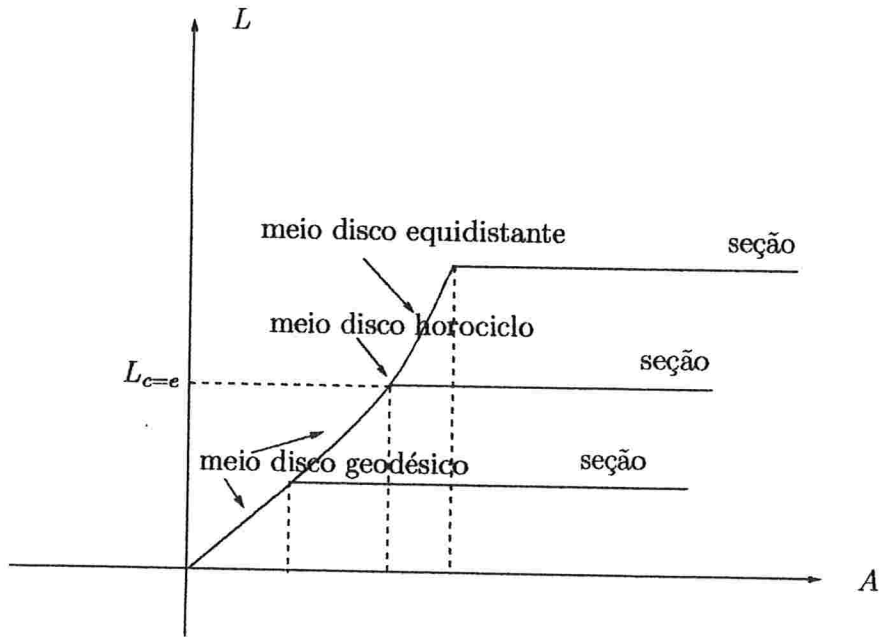


Figura 3.8: Perfil isoperimétrico da região entre dois horociclos paralelos.

Para provarmos o teorema, analisamos o comportamento do perímetro e da área das regiões que têm como fronteira as curvas de curvatura geodésica constante.

No teorema, comparamos a distância d com 1, visto que a discussão dos casos depende da constante c tal que se $L_{\mathbb{H}}$ é o perímetro do meio disco horociclo e se L_c é o perímetro da seção em \mathcal{F}_c então $L_{\mathbb{H}} = L_c$. Por (3.28), isto significa que

$$2 = 2 \ln c,$$

de onde obtemos que $c = e$, ou seja, $d = 1$.

Seja S_1 uma semicircunferência euclidiana de centro $(0, 1)$ e raio r_1 , que está acima do horociclo $\{y = 1\}$. Quando $0 < r_1 < 1$, S_1 delimita um meio disco geodésico. Para os casos limites, isto é, $\theta_1 \rightarrow 0$ e $\theta_1 \rightarrow \frac{\pi}{2}$, que ocorrem, por (3.16), quando o meio disco geodésico se degenera em um meio disco horociclo ($r_1 \rightarrow 1$) e um ponto ($r_1 \rightarrow 0$), respectivamente, temos por (3.19),

3.6 Perfil isoperimétrico da região entre dois horociclos paralelos em \mathbb{R}_+^2 47

$$\begin{aligned}\lim_{\theta_1 \rightarrow 0} L_1 &= 2, \\ \lim_{\theta_1 \rightarrow \frac{\pi}{2}} L_1 &= 0.\end{aligned}\tag{3.32}$$

Por (3.2), temos

$$\begin{aligned}\lim_{\theta_1 \rightarrow 0} A_1 &= 4 - \pi, \\ \lim_{\theta_1 \rightarrow \frac{\pi}{2}} A_1 &= 0.\end{aligned}\tag{3.33}$$

Assim, o perímetro L_1 de um meio disco geodésico superior a $\{y = 1\}$ cresce de 0 a 2, quando este passa de um ponto a um horociclo, isto é, quando r_1 passa de 0 a 1, enquanto que a área A_1 cresce de 0 a $4 - \pi$.

Continuando a aumentar r_1 , se $r_1 > 1$ obtemos um meio disco equidistante. Por (3.29) e (3.30), o caso limite $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}$ equivale a $r_1 \rightarrow 1$; assim, o meio disco horociclo é também um limite de um meio disco equidistante. O outro limite, obtido para $\alpha \rightarrow 0$, equivale a $r_1 \rightarrow \infty$. Por (3.31), temos que o perímetro e a área dos limites de um meio disco equidistante superior a $\{y = 1\}$ são, respectivamente,

$$\begin{aligned}\lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}} L_{\mathbb{E}} &= 2, \\ \lim_{\alpha \rightarrow 0} L_{\mathbb{E}} &= \infty.\end{aligned}\tag{3.34}$$

e

$$\begin{aligned}\lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}} A_{\mathbb{E}} &= 4 - \pi, \\ \lim_{\alpha \rightarrow 0} A_{\mathbb{E}} &= \infty.\end{aligned}\tag{3.35}$$

Desta forma, vemos por que o perímetro e a área de um meio disco equidistante superior a $\{y = 1\}$ crescem infinitamente, à medida que r_1 cresce.

Sendo $c > 1$, consideremos S_2 uma semicircunferência euclidiana de centro $(0, c)$ e raio r_2 , que está abaixo do horociclo $\{y = c\}$. Quando $0 < r_2 < c$, S_2 delimita um meio disco

geodésico. Por (3.16), o caso limite $\theta_2 \rightarrow 0$ corresponde a $r_2 \rightarrow c$ e $\theta_2 \rightarrow \frac{\pi}{2}$ corresponde a $r_2 \rightarrow 0$. Por (3.19), temos que, nestes casos, os perímetros são

$$\begin{aligned} \lim_{\theta_2 \rightarrow 0} L_2 &= \infty \\ \lim_{\theta_2 \rightarrow \frac{\pi}{2}} L_2 &= 0, \end{aligned} \tag{3.36}$$

e, por (3.20), as áreas são

$$\begin{aligned} \lim_{\theta_2 \rightarrow 0} A_2 &= \infty \\ \lim_{\theta_2 \rightarrow \frac{\pi}{2}} A_2 &= 0. \end{aligned} \tag{3.37}$$

Concluimos que L_2 e A_2 crescem infinitamente, à medida que $r_2 \rightarrow c$. Se $r_2 \geq c$, S_2 delimita um meio disco horociclo ou um meio disco equidistante. Por (3.36) e (3.37), temos que se $r_2 \geq c$ então o perímetro e área do meio disco inferior a $\{y = c\}$ tendem ao infinito.

Em vista da análise que fizemos para os perímetros e as áreas das possíveis soluções isoperimétricas, temos os seguintes casos a considerar.

1. Comparamos um meio disco geodésico superior a $\{y = 1\}$ com um disco geodésico inteiramente contido na região entre os horociclos $\{y = 1\}$ e $\{y = c\}$;
2. comparamos um meio disco geodésico superior a $\{y = 1\}$ com um meio disco geodésico inferior a $\{y = c\}$;
3. comparamos um meio disco horociclo superior a $\{y = 1\}$ com um meio disco geodésico inferior a $\{y = c\}$;
4. comparamos um meio disco equidistante superior a $\{y = 1\}$ com um meio disco geodésico inferior a $\{y = c\}$.

Para provar o Teorema 3.6.1, queremos determinar as regiões de perímetro mínimo, quando elas têm uma área pré-fixada. Isto será feito na prova do teorema. No entanto, para determinar quais são as possíveis soluções isoperimétricas, vamos seguir uma estratégia diferente, porém equivalente. Vamos comparar as áreas das possíveis regiões isoperimétricas, quando elas têm mesmo perímetro, e queremos determinar aquelas cuja

3.6 Perfil isoperimétrico da região entre dois horociclos paralelos em \mathbb{R}_+^2 49

área seja a máxima. Na verdade, para os nossos objetivos, basta mostrar que se uma região tem área máxima, dentre aquelas que têm um perímetro dado, então ela tem perímetro mínimo, dentre aquelas que têm esta mesma área. Como todas as possíveis soluções isoperimétricas, além da seção, estão descritas nos casos acima, provamos esta última afirmação, escolhendo o caso 2 (Lema 3.6.2), no qual são comparados dois meio discos geodésicos. De modo análogo, provamos o que foi afirmado logo acima para os outros casos. Supomos, sem perda de generalidade, que o meio disco superior a $\{y = 1\}$ tenha área máxima, quando comparado a qualquer meio disco geodésico inferior a $\{y = c\}$, que tenha mesmo perímetro que ele.

Lema 3.6.2. *Seja Ω_0 o meio disco geodésico superior a $\{y = 1\}$ com área $A(\Omega_0) \geq A(\Omega)$, sempre que $L(\Omega) = L(\Omega_0)$, para qualquer meio disco geodésico Ω inferior a $\{y = c\}$, $c > 1$. Assim, se Ω_1 é um meio disco geodésico inferior a $\{y = c\}$ com $A(\Omega_0) = A(\Omega_1)$ então $L(\Omega_0) \leq L(\Omega_1)$.*

Prova: Suponha, por absurdo, que $L(\Omega_0) > L(\Omega_1)$. Aumentamos o raio da circunferência euclidiana que representa Ω_1 até obtermos um meio disco geodésico Ω' tal que $L(\Omega') = L(\Omega_0)$, o que é possível por (3.36). Por (3.37), vimos que a área aumenta à medida que o raio aumenta. Assim, $A(\Omega') > A(\Omega_1) = A(\Omega_0)$ e $L(\Omega') = L(\Omega_0)$, o que é absurdo, pois, por hipótese, Ω_0 maximiza área, quando comparada a regiões de mesmo perímetro. ■

Passemos a comparar as áreas das possíveis soluções isoperimétricas, quando elas têm o mesmo perímetro.

No caso 1, comparamos a área de um meio disco geodésico superior a $\{y = 1\}$ com a de um disco geodésico inteiramente contido na região entre os horociclos $\{y = 1\}$ e $\{y = c\}$, quando eles têm o mesmo perímetro. Sejam $1 < y_2 < c$ e S a circunferência euclidiana de raio r_2 , com $0 < r_2 < y_2 - 1$ e centro $(0, y_2)$, que delimita o disco geodésico.

Sendo $\theta_2 \in]0, \frac{\pi}{2}[$ tal que $\cos \theta_2 = \frac{r_2}{c}$, então por (3.4), (3.6) e (3.9), temos que o perímetro e a área de disco geodésico (que corresponde a um ângulo central de medida 2π) são dados por, respectivamente, $L_2 = 2\pi \cot \theta_2$ e $A_2 = \frac{2\pi}{\sin \theta_2} - 2\pi$.

Sendo L_1 e A_1 o perímetro e a área, respectivamente, de um meio disco geodésico superior ao horociclo $\{y = 1\}$, então por (3.19), por (3.20) e pelas informações acima, mostramos no próximo Lema que $A_1 > A_2$ quando $L_1 = L_2$.

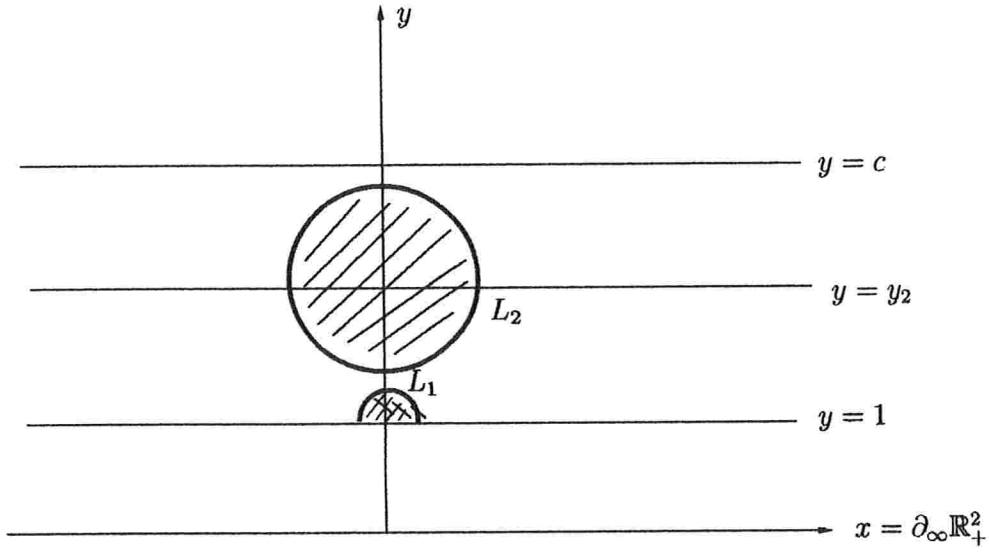


Figura 3.9: Caso 1.

Lema 3.6.3. *Sejam $\theta_1, \theta_2 \in]0, \frac{\pi}{2}[$ tais que*

$$\theta_1 \cot \theta_1 = \pi \cot \theta_2. \quad (3.38)$$

Então,

$$\frac{2\theta_1}{\sin \theta_1} + 2 \cos \theta_1 - \pi > \frac{2\pi}{\sin \theta_2} - 2\pi. \quad (3.39)$$

Prova: Para $\theta_2 \in]0, \frac{\pi}{2}[$, elevando os membros de (3.38) ao quadrado e usando que $\cos^2 \theta_2 = 1 - \sin^2 \theta_2$, temos então que

$$\frac{1}{\sin \theta_2} = \frac{\sqrt{\theta_1^2 \cot^2 \theta_1 + \pi^2}}{\pi}. \quad (3.40)$$

Assim, como $\cos^2 \theta_1 = 1 - \sin^2 \theta_1$,

$$\frac{2\pi}{\sin \theta_2} - 2\pi = 2\sqrt{\left(\frac{\theta_1}{\sin \theta_1}\right)^2 - \theta_1^2 + \pi^2} - 2\pi. \quad (3.41)$$

Consideremos a diferença dos termos de (3.39), substituindo o segundo por (3.41). Seja $A(\theta_1)$ essa diferença.

$$A(\theta_1) = \frac{2\theta_1}{\sin \theta_1} + 2 \cos \theta_1 - \pi - 2\sqrt{\left(\frac{\theta_1}{\sin \theta_1}\right)^2 - \theta_1^2 + \pi^2} + 2\pi. \quad (3.42)$$

3.6 Perfil isoperimétrico da região entre dois horociclos paralelos em \mathbb{R}_+^2 51

Observemos que

$$\begin{aligned} \lim_{\theta_1 \rightarrow 0} A(\theta_1) &= 4 + \pi - 2\sqrt{\pi^2 + 1} > 0, \\ \lim_{\theta_1 \rightarrow \frac{\pi}{2}} A(\theta_1) &= 0. \end{aligned} \tag{3.43}$$

Além disto,

$$\frac{dA(\theta_1)}{d\theta_1} = \frac{2 \cos \theta_1 (\sin \theta_1 \cos \theta_1 - \theta_1)}{\sin^2 \theta_1} \left\{ 1 - \frac{\theta_1}{\sqrt{\theta_1^2 + (\pi^2 - \theta_1^2) \sin^2 \theta_1}} \right\} < 0, \tag{3.44}$$

pois para $\theta_1 \in]0, \frac{\pi}{2}[$, temos $\cos \theta_1 > 0$, $\sin \theta_1 \cos \theta_1 - \theta_1 < 0$ e

$$0 < \frac{\theta_1}{\sqrt{\theta_1^2 + (\pi^2 - \theta_1^2) \sin^2 \theta_1}} < 1.$$

Com isto, $A(\theta_1)$ decresce em $]0, \frac{\pi}{2}[$. Por (3.43), concluímos que $A(\theta_1) > 0$ em $]0, \frac{\pi}{2}[$, de onde segue (3.39). ■

Segue do Lema 3.6.3 que a área de um meio disco geodésico superior a $\{y = 1\}$ é maior que a área do disco geodésico delimitado por S , quando eles têm o mesmo perímetro. Consequentemente, o meio disco geodésico é melhor, como solução isoperimétrica, quando comparado ao disco geodésico.

No caso 2, comparamos a área A_1 de um meio disco geodésico superior a $\{y = 1\}$ com a área A_2 de um meio disco geodésico inferior a $\{y = c\}$, quando eles têm o mesmo perímetro. Por (3.19) e (3.20), mostramos nos próximos Lema e Corolário que $A_1 > A_2$, quando $L_1 = L_2$. Na figura 3.10, a circunferência tracejada foi obtida da inferior por uma homotetia euclidiana, de modo que os respectivos meio discos geodésicos têm mesmo perímetro. Por (3.14), o meio disco geodésico inferior a $\{y = c\}$ tem perímetro maior que o do meio disco geodésico superior a $\{y = 1\}$. Para que $L_1 = L_2$, é necessário então diminuir o raio do meio disco geodésico inferior a $\{y = c\}$.

Lema 3.6.4. *Sejam $\theta_1, \theta_2 \in]0, \frac{\pi}{2}]$ tais que*

$$\theta_1 \cot \theta_1 = (\pi - \theta_2) \cot \theta_2. \tag{3.45}$$

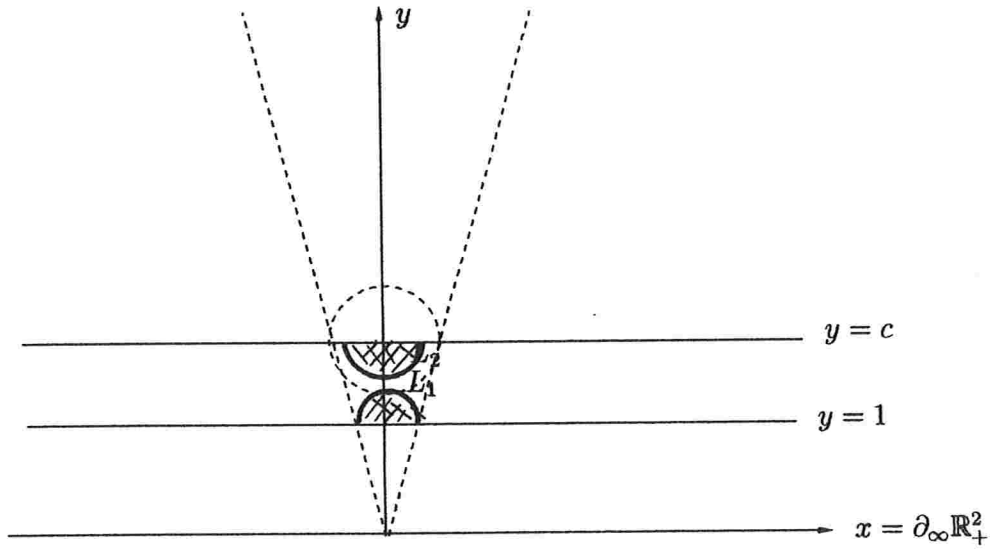


Figura 3.10: Caso 2.

Então,

$$\frac{\theta_1}{\sin \theta_1} + \cos \theta_1 \geq \frac{\pi - \theta_2}{\sin \theta_2} - \cos \theta_2. \quad (3.46)$$

Prova: Para $\theta_1, \theta_2 \in]0, \frac{\pi}{2}]$, definimos $f(\theta_1) = \frac{\theta_1}{\sin \theta_1} + \cos \theta_1$ e $F(\theta_1, \theta_2) = f(\theta_1) + f(\theta_2) - \frac{\pi}{\sin \theta_2}$. Nosso objetivo é provar que $F(\theta_1, \theta_2) \geq 0$. Por (3.45), podemos definir θ_1 implicitamente em função de θ_2 , ou seja, obter uma função g tal que $\theta_1 = g(\theta_2)$. Sejam $h_1(\theta_2) = F(g(\theta_2), \theta_2)$ e $h_2(\theta_2) = h_1(\theta_2) \sin \theta_2 + \pi = \sin \theta_2 f(g(\theta_2)) + \sin \theta_2 f(\theta_2)$.

A função $h_2(\theta_2)$ é de classe C^∞ e

$$h_2'(\theta_2) = \cos \theta_2 f(\theta_1) + \sin \theta_2 f'(\theta_1) g'(\theta_2) + \cos \theta_2 f(\theta_2) + \sin \theta_2 f'(\theta_2). \quad (3.47)$$

Temos

$$f'(\theta_1) = \frac{\sin \theta_1 - \theta_1 \cos \theta_1}{\sin^2 \theta_1} - \sin \theta_1 = \frac{-\cos \theta_1 (2\theta_1 - \sin 2\theta_1)}{2 \sin^2 \theta_1}. \quad (3.48)$$

A derivada $g'(\theta_2)$ pode ser obtida através do Teorema das Funções Implícitas. Neste caso,

$$g'(\theta_2) = \frac{-\cot \theta_2 - (\pi - \theta_2) \csc^2 \theta_2}{\cot \theta_1 - \theta_1 \csc^2 \theta_1}. \quad (3.49)$$

3.6 Perfil isoperimétrico da região entre dois horociclos paralelos em \mathbb{R}_+^2 53

Observe que $\cot \theta_1 - \theta_1 \csc^2 \theta_1 = \frac{\sin 2\theta_1 - 2\theta_1}{2 \sin^2 \theta_1}$. Portanto,

$$g'(\theta_2) = \frac{2(\pi - \theta_2) + \sin 2\theta_2}{2 \sin^2 \theta_2} \frac{2 \sin^2 \theta_1}{2\theta_1 - \sin 2\theta_1}. \quad (3.50)$$

Substituindo (3.48) e (3.50) em (3.47), obtemos

$$h_2'(\theta_2) = 2 \cos^2 \theta_2 + \frac{\theta_1 \cos \theta_2}{\sin \theta_1} - \frac{(\pi - \theta_2) \cos \theta_1}{\sin \theta_2}. \quad (3.51)$$

Como $h_2'(\theta_2) = h_1'(\theta_2) \sin \theta_2 + h_1(\theta_2) \cos \theta_2$, resulta de (3.51) que

$$\begin{aligned} h_1'(\theta_2) \sin \theta_2 &= 2 \cos^2 \theta_2 + \frac{\theta_1 \cos \theta_2}{\sin \theta_1} - \frac{(\pi - \theta_2) \cos \theta_1}{\sin \theta_2} - F(\theta_1, \theta_2) \cos \theta_2 \\ &= \cos^2 \theta_2 - \cos \theta_2 \cos \theta_1 - \frac{(\pi - \theta_2)}{\sin \theta_2} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \\ &= (\cos \theta_2 - \cos \theta_1) \left(\cos \theta_2 + \frac{\pi - \theta_2}{\sin \theta_2} \right). \end{aligned} \quad (3.52)$$

Para $\theta_1, \theta_2 \in]0, \frac{\pi}{2}]$, temos $\theta_1 \leq \pi - \theta_2$, resultando de (3.45) que

$$\cot \theta_1 = \left(\frac{\pi - \theta_2}{\theta_1} \right) \cot \theta_2 \geq \cot \theta_2 \Rightarrow \theta_1 \leq \theta_2 \Rightarrow \cos \theta_1 \geq \cos \theta_2. \quad (3.53)$$

Segue-se de (3.52) e (3.53) que $h_1'(\theta_2) \leq 0$. Isto implica que $F(\theta_1, \theta_2) = F(g(\theta_2), \theta_2) = h_1(\theta_2)$ é uma função decrescente para $\theta_2 \in]0, \frac{\pi}{2}]$. Por (3.45), para $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$ e $\theta_1 = g(\frac{\pi}{2})$, resulta que $\cos(g(\frac{\pi}{2})) = 0$ e, portanto, $g(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$. Como

$$h_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = F\left(g\left(\frac{\pi}{2}\right), \frac{\pi}{2}\right) = F\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

temos que, em particular,

$$F(\theta_1, \theta_2) \geq F\left(g\left(\frac{\pi}{2}\right), \frac{\pi}{2}\right) = 0. \quad (3.54)$$

Isto implica que

$$f(\theta_1) + f(\theta_2) \geq \frac{\pi}{\sin \theta_2}, \quad (3.55)$$

de onde segue (3.46).

A igualdade ocorre se, e somente se, $\theta_1 = \theta_2 = \frac{\pi}{2}$. ■

Corolário 3.6.5. *Sejam $\theta_1, \theta_2 \in]0, \frac{\pi}{2}[$ tais que*

$$\theta_1 \cot \theta_1 = (\pi - \theta_2) \cot \theta_2. \quad (3.56)$$

Então,

$$\frac{\theta_1}{\sin \theta_1} + \cos \theta_1 > \frac{\pi - \theta_2}{\sin \theta_2} - \cos \theta_2. \quad (3.57)$$

Pelo Corolário 3.6.5, mostramos que o meio disco geodésico superior a $\{y = 1\}$ é a melhor solução para o problema isoperimétrico, neste caso.

No caso 3, comparamos a área $A_{\mathbb{H}}$ de um meio disco horociclo superior a $\{y = 1\}$ com a área A_2 de um meio disco geodésico inferior a $\{y = c\}$, quando eles têm o mesmo perímetro. Por (3.28), (3.19) e (3.20), mostramos no próximo Lema que $A_{\mathbb{H}} > A_2$, quando $L_{\mathbb{H}} = L_2$. Ilustramos o caso 3 na figura 3.11.

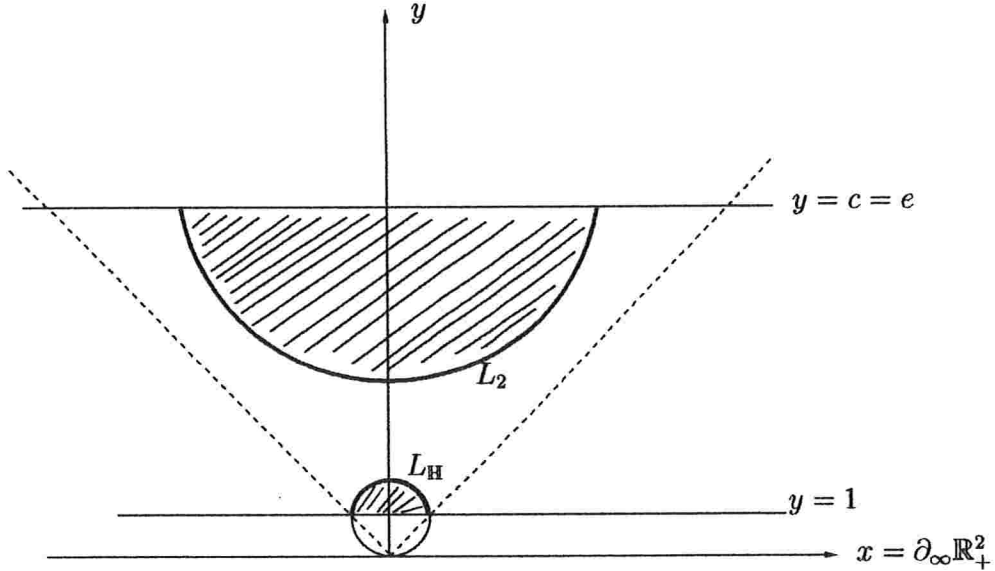


Figura 3.11: Caso 3.

Lema 3.6.6. *Seja $\theta_2 \in]0, \frac{\pi}{2}[$ tal que*

$$1 = (\pi - \theta_2) \cot \theta_2. \quad (3.58)$$

Então,

$$2 > \frac{\pi - \theta_2}{\sin \theta_2} - \cos \theta_2. \quad (3.59)$$

3.6 Perfil isoperimétrico da região entre dois horociclos paralelos em \mathbb{R}_+^2 55

Prova: Como o horociclo é obtido fazendo-se $\theta_1 \rightarrow 0$ no meio disco geodésico superior a $\{y = 1\}$, então basta fazer $\theta_1 \rightarrow 0$ em (3.56) e em (3.57) e o resultado segue pela continuidade das funções envolvidas. ■

Assim, o meio disco horociclo superior a $\{y = 1\}$ é melhor quando comparado ao meio disco geodésico inferior a $\{y = c\}$.

No caso 4, comparamos a área A_E de um meio disco equidistante superior a $\{y = 1\}$ com a área A_2 de um meio disco inferior a $\{y = c\}$, quando eles têm o mesmo perímetro. Por (3.31), (3.19) e (3.20), mostramos no próximo Lema que $A_E > A_2$, quando $L_E = L_2$. Na figura 3.12, a circunferência tracejada foi obtida da inferior por uma homotetia euclidiana e assim o meio disco equidistante superior a $\{y = 1\}$ tem mesmo perímetro que o do meio disco tracejado. Logo, é necessário diminuir o raio do meio disco inferior a $\{y = c\}$ para que $L_E = L_2$.

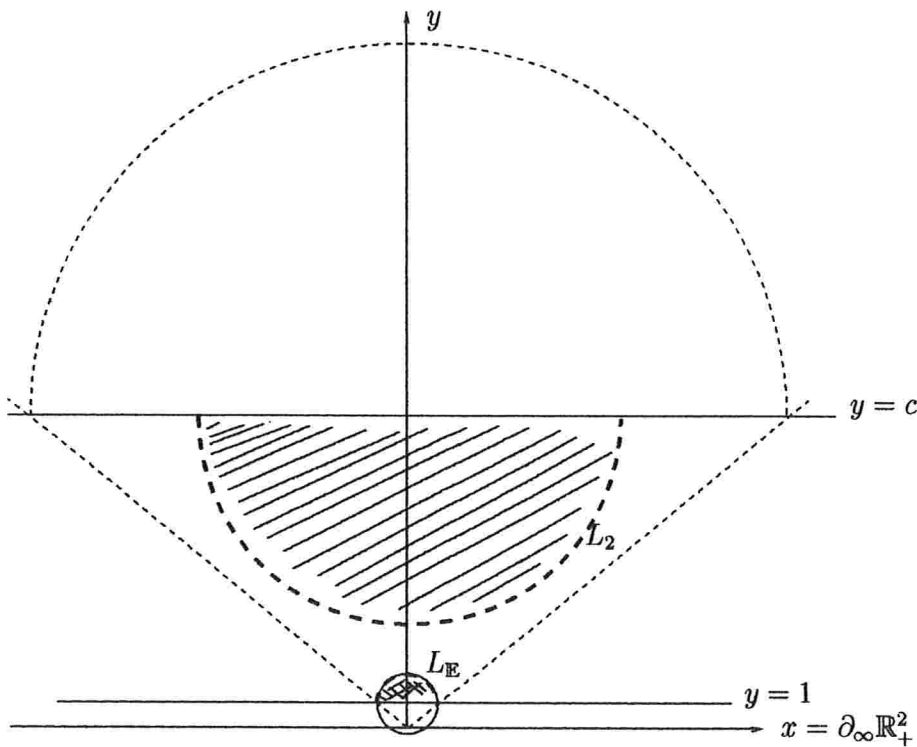


Figura 3.12: Caso 4.

Lema 3.6.7. *Sejam $\alpha, \theta_2 \in]0, \frac{\pi}{2}[$ tais que*

$$\frac{1}{\cos \alpha} \ln \left(\frac{1}{\sin \alpha} + \cot \alpha \right) = (\pi - \theta_2) \cot \theta_2. \quad (3.60)$$

Então,

$$\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\cot \alpha} \ln \left(\frac{1}{\sin \alpha} + \cot \alpha \right) \geq \frac{\pi - \theta_2}{\sin \theta_2} - \cos \theta_2. \quad (3.61)$$

Prova: Para $\alpha, \theta_2 \in]0, \frac{\pi}{2}[$, definimos

$$F(\alpha, \theta_2) = \frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\cot \alpha} \ln \left(\frac{1}{\sin \alpha} + \cot \alpha \right) + \frac{\theta_2}{\sin \theta_2} + \cos \theta_2 - \frac{\pi}{\sin \theta_2}.$$

Por (3.60), podemos definir θ_2 implicitamente em função de α , ou seja, obter uma função g tal que $\theta_2 = g(\alpha)$. Sejam

$$\begin{aligned} h_1(\alpha) &= F(\alpha, g(\alpha)), \\ h_2(\alpha) &= h_1(\alpha) \sin \alpha. \end{aligned}$$

Logo,

$$h_2(\alpha) = \left(\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\cot \alpha} \ln \left(\frac{1}{\sin \alpha} + \cot \alpha \right) \right) \sin \alpha - \left(\frac{\pi - g(\alpha)}{\sin g(\alpha)} - \cos g(\alpha) \right) \sin \alpha.$$

A função $h_2(\alpha)$ é de classe C^∞ e

$$\begin{aligned} h_2'(\alpha) &= \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} \ln \left(\frac{1}{\sin \alpha} + \cot \alpha \right) - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \sin \alpha \ln \left(\frac{1}{\sin \alpha} + \cot \alpha \right) + \\ &+ g'(\alpha) \frac{\cos \theta_2 (\sin(2\theta_2) + 2(\pi - \theta_2))}{2 \sin^2 \theta_2} \sin \alpha - \frac{(\pi - \theta_2)}{\sin \theta_2} \cos \alpha + \cos \theta_2 \cos \alpha. \end{aligned} \quad (3.62)$$

A derivada $g'(\alpha)$ pode ser obtida através do Teorema das Funções Implícitas. Neste caso,

$$g'(\alpha) = - \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} \ln \left(\frac{1}{\sin \alpha} + \cot \alpha \right) - \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha}}{\cot \theta_2 + (\pi - \theta_2) \csc^2 \theta_2}. \quad (3.63)$$

Observe que $\cot \theta_2 + (\pi - \theta_2) \csc^2 \theta_2 = \frac{\sin 2\theta_2 + 2(\pi - \theta_2)}{2 \sin^2 \theta_2}$. Portanto,

$$g'(\alpha) = \left(\frac{2 \sin^2 \theta_2}{\sin 2\theta_2 + 2(\pi - \theta_2)} \right) \left(\frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} - \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} \ln \left(\frac{1}{\sin \alpha} + \cot \alpha \right) \right). \quad (3.64)$$

3.6 Perfil isoperimétrico da região entre dois horociclos paralelos em \mathbb{R}_+^2 57

Substituindo (3.64) em (3.62), obtemos

$$h'_2(\alpha) = \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} \ln \left(\frac{1}{\sin \alpha} + \cot \alpha \right) - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \sin \alpha \ln \left(\frac{1}{\sin \alpha} + \cot \alpha \right) + \frac{\cos \theta_2}{\cos \alpha} - \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \cos \theta_2 \ln \left(\frac{1}{\sin \alpha} + \cot \alpha \right) - \frac{(\pi - \theta_2)}{\sin \theta_2} \cos \alpha + \cos \theta_2 \cos \alpha. \quad (3.65)$$

Como $h'_2(\alpha) = h'_1(\alpha) \sin \alpha + h_1(\alpha) \cos \alpha$, resulta de (3.65) que

$$h'_1(\alpha) \sin \alpha = \frac{1 - \sin \alpha \cos \theta_2}{\cos \alpha} \left(\tan \alpha \ln \left(\frac{1}{\sin \alpha} + \cot \alpha \right) - \frac{1}{\sin \alpha} \right). \quad (3.66)$$

Para $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$, se

$$l(\alpha) = \tan \alpha \ln \left(\frac{1}{\sin \alpha} + \cot \alpha \right),$$

então

$$l'(\alpha) = \sec^2 \alpha k(\alpha),$$

onde

$$k(\alpha) = \ln \left(\frac{1}{\sin \alpha} + \cot \alpha \right) - \cos \alpha.$$

Como $k'(\alpha) = -\frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha} < 0$ então $k(\alpha)$ é decrescente em $]0, \frac{\pi}{2}[$ e $\lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}} k(\alpha) = 0$. Assim,

$k(\alpha) > 0$ em $]0, \frac{\pi}{2}[$. Consequentemente, $l(\alpha)$ é crescente em $]0, \frac{\pi}{2}[$. Como, $\lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}} l(\alpha) = 1$,

então $l(\alpha) < 1$ e, portanto,

$$\tan \alpha \ln \left(\frac{1}{\sin \alpha} + \cot \alpha \right) - \frac{1}{\sin \alpha} < 0.$$

Além disto, para $\alpha, \theta_2 \in]0, \frac{\pi}{2}[$, temos que $0 < \sin \alpha \cos \theta_2 < 1$. Assim, para $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$, concluímos que $h'_1(\alpha) \sin \alpha < 0$ e, portanto, $h'_1(\alpha) < 0$. Logo, h_1 é decrescente em $]0, \frac{\pi}{2}[$.

Em particular,

$$h_1(\alpha) \geq \lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}} h_1(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}} F(\alpha, g(\alpha)) = 2 - \left(\frac{\pi - \beta}{\sin \beta} - \cos \beta \right), \quad (3.67)$$

onde $\beta = \lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}} g(\alpha)$. Por (3.28),

$$\frac{A_{\mathbb{H}} + \pi}{2} = 2,$$

onde \mathbb{H} é um meio disco horociclo superior a $\{y = 1\}$ e por (3.20),

$$\frac{A_{\mathbb{G}} + \pi}{2} = \frac{\pi - \beta}{\sin \beta} - \cos \beta,$$

onde \mathbb{G} é um meio disco geodésico que tem o mesmo perímetro que \mathbb{H} (basta fazer $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}$ em (3.60) e tomar $\theta_2 = \beta$). Mas, em vista do Lema 3.6.6, concluímos que

$$h_1(\alpha) = 2 - \left(\frac{\pi - \beta}{\sin \beta} - \cos \beta \right) > 0, \quad (3.68)$$

de onde segue (3.61). ■

Pelo Lema 3.6.3, Corolário 3.6.5, Lema 3.6.6 e Lema 3.6.7, vimos que a família de meio discos geodésicos, horociclos e equidistantes, superiores ao horociclo $\{y = 1\}$, são soluções melhores para o problema isoperimétrico, quando comparados com os meio discos geodésicos inferiores ao horociclo $\{y = c\}$, $c > 1$.

Agora, passemos à prova do resultado principal deste capítulo.

Prova do Teorema 3.6.1: O item 1 do teorema trata da existência de soluções para o problema isoperimétrico. Como vimos na Seção 3.1, isto decorre do fato de \mathcal{F}_c/G ser compacto, onde G é o grupo das isometrias de \mathbb{R}_+^2 que deixam a região \mathcal{F}_c , entre os horociclos paralelos, invariante.

Para provar o item 2, usamos o resultado bem conhecido da teoria de problemas isoperimétricos que garante que as componentes conexas de uma solução isoperimétrica têm como fronteira curvas de mesma curvatura geodésica constante (ver, por exemplo, Lema 2.2 de [10]). Antes de mostrar que uma região minimizante é constituída de uma única componente conexa, mostramos que uma componente conexa de uma região isoperimétrica pode ser somente ou uma seção ou um meio disco superior ao horociclo $\{y = 1\}$. As informações contidas em (3.32), (3.33), (3.34), (3.35), (3.36) e (3.37) são fundamentais para a compreensão da prova do teorema. Observemos que para cada c fixado, o perímetro da seção entre os horociclos $\{y = 1\}$ e $\{y = c\}$ está bem determinado e é igual a $2 \ln c$.

1. Suponha $d < 1$, onde d é a distância hiperbólica entre os horociclos. Neste caso, consideramos um horociclo $\{y = c\}$, com $1 < c < e$. Seja $A_0(c)$ a área do meio disco geodésico S_0 superior a $\{y = 1\}$, centrado em $(0, 1)$ e com raio euclidiano $r_0(c)$,

3.6 Perfil isoperimétrico da região entre dois horociclos paralelos em \mathbb{R}_+^2 59

que tem perímetro igual ao perímetro de uma seção qualquer e seja T_0 a seção com área $A_0(c)$ (ver figura 3.13). Neste caso em que $c < e$, observamos que o perímetro da seção T_0 é menor que 2, que é o perímetro do meio disco horociclo superior a $\{y = 1\}$. Lembremos que, à medida que o raio euclidiano r do disco varia de 0 a 1, o perímetro do meio disco geodésico superior a $\{y = 1\}$ cresce de 0 a 2, enquanto a área cresce de 0 a $4 - \pi$.

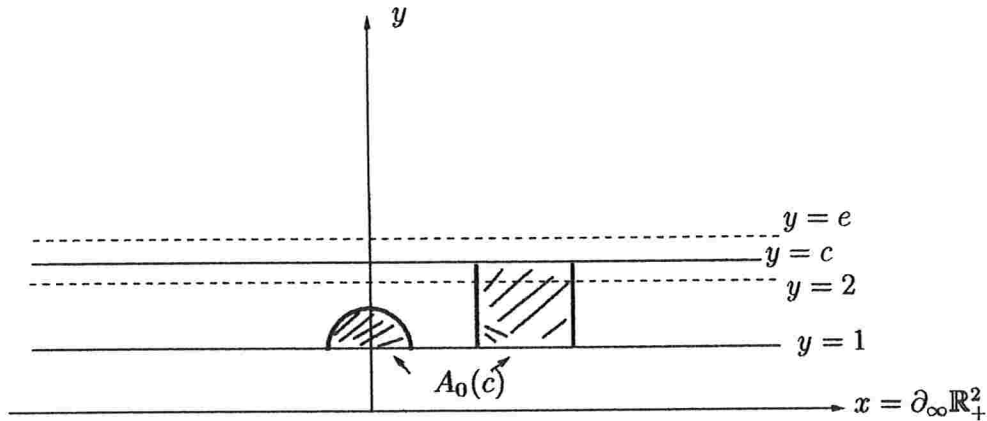
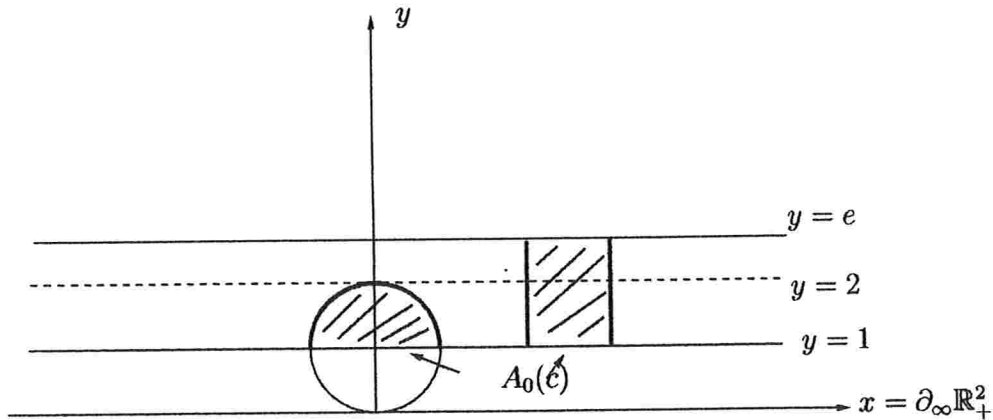


Figura 3.13: Caso $c < e$.

Conseqüentemente, temos que

- se a área A dada for tal que $A = A_0(c)$, temos que S_0 e a seção T_0 têm o mesmo perímetro e a mesma área dada. Assim, a região minimizante Ω é um meio disco geodésico ou uma seção;
- se $A < A_0(c)$, temos que a região Ω tem área A menor que a área de S_0 . Seja S_1 um meio disco geodésico de área A , centrado em $(0, 1)$ e com raio euclidiano r_1 . Conseqüentemente, como a área e o perímetro de um meio disco geodésico decrescem à medida que o seu raio euclidiano decresce, temos que $r_1 < r_0(c)$ e que o perímetro de S_1 é menor que o de S_0 . Seja T_1 a seção de área A . Logo, S_1 e T_1 têm a mesma área dada A , mas o perímetro de S_1 é menor que o de T_1 , pois T_1 tem o mesmo perímetro de T_0 e S_0 . Então Ω minimizante é um meio disco geodésico. Observamos que como, neste caso, a região Ω tem área A menor que a do meio disco geodésico S_0 , não é possível que Ω seja um meio disco horociclo ou um meio disco equidistante;

- se $A > A_0(c)$, temos que a região Ω tem área A maior que a área de S_0 . Seja S_2 um meio disco geodésico de área A , centrado em $(0, 1)$ e com raio euclidiano r_2 . Consequentemente, como a área e o perímetro de um meio disco geodésico crescem à medida que o seu raio euclidiano cresce, temos que $r_2 > r_0(c)$ e que o perímetro de S_2 é maior que o de S_0 . Seja T_2 a seção de área A . Logo, S_2 e T_2 têm a mesma área dada A , mas o perímetro de S_2 é maior que o de T_2 , pois T_2 tem o mesmo perímetro de T_0 e S_0 . Então Ω minimizante é uma seção.
2. Suponha $d = 1$. Consideramos um horociclo $\{y = c\}$, com $c = e$. Seja $A_0(c) = 4 - \pi$ a área do meio disco horociclo S_0 superior a $\{y = 1\}$, centrado em $(0, 1)$ e com raio euclidiano $r_0(c) = 1$, que tem perímetro igual ao perímetro de uma seção qualquer e seja T_0 a seção com área $A_0(c)$ (ver figura 3.14). Neste caso, observamos que o perímetro de T_0 é igual a 2, que é o perímetro do meio disco horociclo superior a $\{y = 1\}$.

Figura 3.14: Caso $c = e$.

Consequentemente, temos que

- se a área dada A for tal que $A = A_0(c)$, temos que S_0 e a seção T_0 têm o mesmo perímetro e a mesma área dada. Assim, Ω minimizante é um meio disco horociclo ou uma seção;
- se $A < A_0(c)$, temos que a região Ω tem área A menor que a área de S_0 . Seja S_1 um meio disco geodésico de área A , centrado em $(0, 1)$ e com raio euclidiano

3.6 Perfil isoperimétrico da região entre dois horociclos paralelos em \mathbb{R}_+^2 61

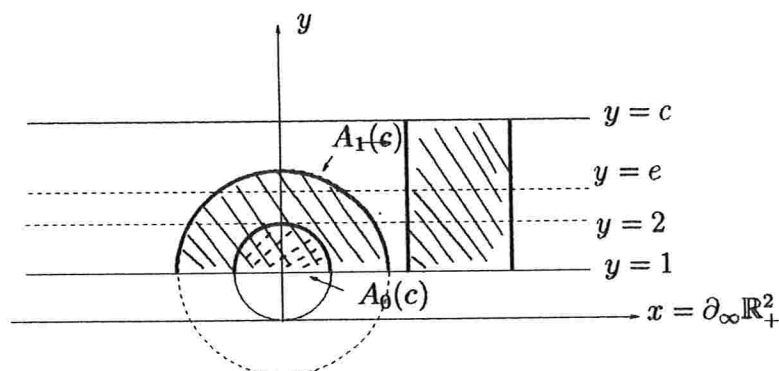
r_1 . Como a área e o perímetro de um meio disco geodésico crescem à medida que o seu raio euclidiano cresce, até que o disco geodésico se torne um disco horociclo, temos que $r_1 < 1$ e que o perímetro de S_1 é menor que o de S_0 . Seja T_1 a seção de área A . Logo, S_1 e T_1 têm a mesma área dada A , mas o perímetro de S_1 é menor que o de T_1 , pois T_1 tem o mesmo perímetro de T_0 e S_0 . Então Ω minimizante é um meio disco geodésico;

- se $A > A_0(c)$, temos que a região Ω tem área A maior que a área de S_0 . Seja S_2 um meio disco equidistante de área A , centrado em $(0, 1)$ e com raio euclidiano r_2 . Como o perímetro e área de um meio disco equidistante superior a $\{y = 1\}$ crescem infinitamente (a partir de um meio disco horociclo) à medida que o seu raio euclidiano cresce, temos que $r_2 > 1$ e que o perímetro de S_2 é maior que o de S_0 . Seja T_2 a seção de área A . Logo, S_2 e T_2 têm a mesma área dada A , mas o perímetro de S_2 é maior que o de T_2 , pois T_2 tem o mesmo perímetro de T_0 e S_0 . Então Ω minimizante é uma seção.

3. Suponha $d > 1$. Consideramos um horociclo $\{y = c\}$, com $c > e$. Seja $A_0(c) = 4 - \pi$ a área do meio disco horociclo S_0 superior a $\{y = 1\}$, centrado em $(0, 1)$ e com raio euclidiano $r_0(c) = 1$, que tem perímetro igual a 2. Seja T_0 a seção de área $A_0(c)$. Seja $A_1(c)$ a área do meio disco equidistante S_1 superior a $\{y = 1\}$, centrado em $(0, 1)$ e com raio euclidiano $r_1(c)$, que tem perímetro igual ao perímetro de uma seção qualquer e seja T_1 a seção com área $A_1(c)$ (ver figura 3.15). Neste caso, observamos que o perímetro de T_1 é maior que 2, que é o perímetro do meio disco horociclo superior a $\{y = 1\}$. Lembramos que o perímetro do meio disco equidistante superior a $\{y = 1\}$, cresce infinitamente a partir de 2, à medida que o seu raio euclidiano cresce.

Consequentemente, temos que

- se $A = A_0(c) = 4 - \pi$, temos que S_0 e T_0 têm a mesma área A dada, mas o perímetro da seção T_0 é maior que 2, que é o perímetro de S_0 . Assim, Ω minimizante é um meio disco horociclo;
- se $A = A_1(c)$, temos que S_1 e a seção T_1 têm a mesma área A e o mesmo perímetro. Assim, Ω minimizante é um meio disco equidistante ou uma seção;
- se $A < A_0(c)$, temos que a região Ω tem área A menor que a área de S_0 . Seja

Figura 3.15: Caso $c > e$.

S_2 um meio disco geodésico de área A , centrado em $(0, 1)$ e com raio euclidiano r_2 . Assim, temos que $r_2 < r_0(c)$ e que perímetro de S_2 é menor que o de S_0 . Seja T_2 a seção de área A . Logo, S_2 e T_2 têm a mesma área dada A , mas o perímetro de S_2 é menor que o de T_2 , pois T_2 tem o mesmo perímetro de T_0 e S_0 . Então Ω minimizante é um meio disco geodésico;

- se $A_0(c) < A < A_1(c)$, temos que a região Ω tem área A maior que a área de S_0 , mas menor que a de S_1 . Seja S_3 um meio disco equidistante de área A , centrado em $(0, 1)$ e com raio euclidiano r_3 . Assim, temos que $r_0(c) < r_3 < r_1(c)$ e que o perímetro de S_3 é menor que o de S_1 . Seja T_3 a seção de área A . Logo, S_3 e T_3 têm a mesma área dada A , mas o perímetro de S_3 é menor que o de T_3 , pois T_3 tem o mesmo perímetro de T_1 e S_1 . Então Ω minimizante é um meio disco equidistante;
- se $A > A_1(c)$, temos que a região Ω tem área A maior que a área de S_1 . Seja S_4 um meio disco equidistante de área A , centrado em $(0, 1)$ e com raio euclidiano r_4 . Assim, temos que $r_4 > r_1(c)$ e que o perímetro de S_4 é maior que o de S_1 . Seja T_4 a seção de área A . Logo, S_4 e T_4 têm a mesma área dada A , mas o perímetro de S_4 é maior que o de T_4 , pois T_4 tem o mesmo perímetro de T_1 e S_1 . Então Ω minimizante é uma seção.

■

Mostramos agora que uma região minimizante é constituída de uma única componente conexa. Basta ver que não podem ocorrer duas componentes conexas. Conforme obser-

3.6 Perfil isoperimétrico da região entre dois horociclos paralelos em \mathbb{R}_+^2 63

vamos no começo da prova deste teorema, as duas componentes conexas deveriam ter a mesma curvatura geodésica. Seja $A > 0$ e consideremos a região Ω' de área A formada por duas seções disjuntas (ver figura 3.16). Vemos que “colando” uma à outra, obteríamos uma outra seção de mesma área A , mas com perímetro menor, pois o comprimento de duas geodésicas verticais não seria mais contado. Assim, a região Ω' não é minimizante.

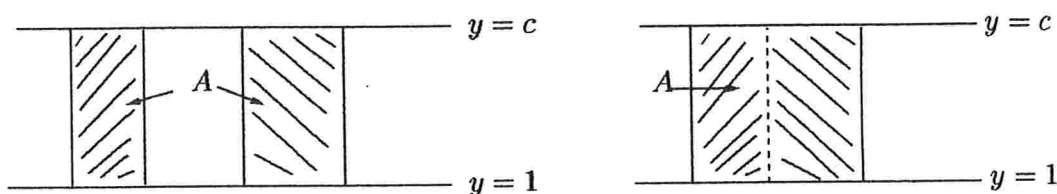


Figura 3.16: Caso excluído: situação em que a região minimizante seria constituída de duas seções.

O outro caso a ser estudado é quando as duas componentes conexas são formadas por meio discos superiores a $\{y = 1\}$ de mesmo raio euclidiano (para que tenham a mesma curvatura geodésica; ver figura 3.17). Neste caso, usamos um argumento clássico a respeito da regularidade das soluções isoperimétricas que garante que uma região não-regular não é minimizante: seja $A > 0$ e suponha que Ω' seja uma região de área A formada por dois meio discos geodésicos disjuntos superiores a $\{y = 1\}$. Deslizando um meio disco sobre $\{y = 1\}$ até tocar o outro (lembramos que translação horizontal é uma isometria no plano hiperbólico), obtemos uma região Ω'' não-regular de área A . Assim, Ω'' não é uma região que minimiza perímetro, dentre todas as regiões de área A . Como Ω' tem a mesma área que Ω'' , segue que Ω' não é uma região minimizante.

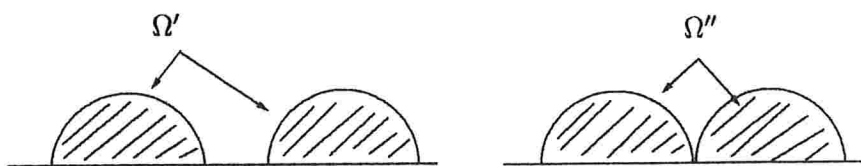


Figura 3.17: Caso excluído: situação em que a região minimizante seria constituída de dois meio discos geodésicos de mesmo raio.

Portanto, uma região minimizante é formada por uma única componente conexa.

Um problema de bordo livre para superfícies entre duas horoesferas paralelas

Neste capítulo, estudamos as H -superfícies rotacionais do espaço hiperbólico que estão entre duas horoesferas paralelas dadas, com bordo livre contido nas horoesferas, e que as encontram perpendicularmente ao longo de seu bordo.

4.1 O problema isoperimétrico em \mathbb{R}_+^3 entre duas horoesferas paralelas

Na Seção 1.3, apresentamos alguns resultados a respeito das H -superfícies rotacionais do espaço hiperbólico, que foram obtidos em [3]. Com as notações e hipóteses introduzidas naquela seção, temos, por (1.2), que a parametrização, em coordenadas cartesianas, de uma curva geratriz de uma H -superfície rotacional, em \mathbb{R}_+^3 , é dada por:

$$c_+(s) = e^{\lambda(s)}(\tanh \rho(s), \operatorname{sech} \rho(s)). \quad (4.1)$$

Para $H = 1$, $\rho(s)$ e $\lambda(s)$ são dados por (1.10) e o parâmetro a é tal que $a > -\frac{1}{2}$. Quando $-\frac{1}{2} < a < 0$, chamamos a família das rotacionais geradas por estas curvas de **superfícies do tipo prima do catenóide** e quando $a = 0$, temos as umbílicas com $H = 1$.

Para $0 \leq H < 1$, $\rho(s)$ e $\lambda(s)$ são dados por (1.11) e o parâmetro a está definido para todo real. Quando $a < 0$, chamamos a família das rotacionais geradas por estas curvas de **superfícies do tipo equidistante** e quando $a = 0$, temos as umbílicas com $0 \leq H < 1$.

Para $H > 1$, $\rho(s)$ e $\lambda(s)$ são dados por (1.12) e o parâmetro a é tal que $a \geq \frac{-H + \sqrt{H^2 - 1}}{2}$. Quando $\frac{-1}{4H} < a < 0$, chamamos a família das rotacionais geradas por estas curvas de **superfícies do tipo ondulóide** e quando $a = 0$, temos as umbílicas com $H > 1$.

Observamos que a curva geratriz $c_+(s)$ de uma rotacional depende dos parâmetros H , a e r , onde r é o raio de uma geodésica perpendicular ao eixo \bar{z} , que chamamos de raio geodésico. Assim, para H e r fixados, obtemos uma família de H -superfícies rotacionais. Pela homotetia euclidiana \mathcal{H}_r , com fator r ,

$$\mathcal{H}_r(c_+(s)) = e^{\lambda(s)}(r \tanh \rho(s), r \operatorname{sech} \rho(s)),$$

obtemos as outras famílias de curvas geratrizes das H -superfícies rotacionais. Tomamos $r = 1$.

Com o que introduzimos na Seção 2.1, queremos provar o seguinte resultado.

Teorema 4.1.1. *Sejam c_1, c_2 , A constantes reais positivas, com $c_1 < c_2$ e $\mathcal{F}_{c_1, c_2} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}_+^3 : c_1 \leq z \leq c_2\}$. Sejam*

$$\mathcal{C}_{c_1, c_2, V} = \{\Omega \subset \mathcal{F}_{c_1, c_2}, \text{ com volume } |\Omega| = V \text{ e área } A(\Omega \cap \mathcal{F}_{c_1, c_2}^\circ) < \infty\},$$

onde a região Ω é suposta conexa, compacta, 3(-dimensional)-retificável em \mathcal{F}_{c_1, c_2} (em relação à medida de Hausdorff) em e tem como fronteira (entre as horoesferas) uma superfície mergulhada, orientável, de classe C^2 , 2(-dimensional)-retificável (ver [12]).

Seja $A_{c_1, c_2, V} = \inf\{A(\Omega \cap \mathcal{F}_{c_1, c_2}^\circ) : \Omega \in \mathcal{C}_{c_1, c_2, V}\}$. Então

1. existe $\Omega \in \mathcal{C}_{c_1, c_2, V}$ tal que $A(\Omega \cap \mathcal{F}_{c_1, c_2}^\circ) = A_{c_1, c_2, V}$;
2. se Ω é minimizante então Ω tem como fronteira (entre as horoesferas) uma superfície
 - (a) ou do tipo prima do catenóide ou umbílica com $H = 1$;
 - (b) ou do tipo equidistante ou umbílica com $0 < H < 1$;
 - (c) ou do tipo ondulóide ou umbílica com $H > 1$.

Prova: Conforme observamos na introdução da tese, a afirmação 1 do teorema (existência de soluções) segue do fato de $\mathcal{F}_{c_1, c_2}/G$ ser compacto, onde G é o grupo de isometrias de \mathbb{R}_+^3 cujos elementos deixam a região \mathcal{F}_{c_1, c_2} , entre as horoesferas, invariante, ou seja, as rotações ao redor de uma geodésica vertical e as translações horizontais.

Pelos Teoremas 2.1.6 e 2.2.1, temos que as fronteiras das soluções isoperimétricas são H -superfícies rotacionais que intersectam as horoesferas $\{z = c_1\}$ e $\{z = c_2\}$ perpendicularmente ao longo de seu bordo. Nas próximas seções, estudamos as H -superfícies rotacionais e determinamos aquelas para as quais existem horoesferas paralelas de modo que as superfícies encontrem as horoesferas perpendicularmente. Faremos esta análise procurando as tangências verticais das curvas geratrizes das superfícies rotacionais. Mostramos que as H -superfícies rotacionais que intersectam perpendicularmente duas horoesferas paralelas são aquelas descritas no teorema anterior.

4.2 Existência de tangência vertical

Começamos definindo tangência vertical.

Definição: Considere $c_+(s)$ uma curva parametrizada por (4.1). Dizemos que um ponto $c_+(s)$, com abuso de notação, é de tangência vertical se o vetor tangente em $c_+(s)$ satisfaz $\dot{c}_+(s) = (0, b)$, onde $b \in \mathbb{R}^*$, ou seja,

$$e^{\lambda(s)}(\tanh \rho(s)\dot{\lambda}(s) + \operatorname{sech}^2 \rho(s)\dot{\rho}(s)) = 0, \quad (4.2)$$

$$e^{\lambda(s)}(\operatorname{sech} \rho(s)\dot{\lambda}(s) - \operatorname{sech} \rho(s) \tanh \rho(s)\dot{\rho}(s)) = b. \quad (4.3)$$

Como $e^{\lambda(s)} > 0$, a condição (4.2) pode ser substituída por

$$\tanh \rho(s)\dot{\lambda}(s) + \operatorname{sech}^2 \rho(s)\dot{\rho}(s) = 0. \quad (4.4)$$

Na verdade, a condição (4.4) garante que o ponto é de tangência vertical, enquanto (4.3) dá o sentido em que o vetor tangente vertical aponta.

Substituindo (1.6) em (4.4), temos que se um ponto é de tangência vertical, com $U(s) \neq 0$, então ele satisfaz

$$U^2(s) = \dot{U}^2(s). \quad (4.5)$$

Assim, as raízes de (4.5) dão os possíveis pontos de tangência vertical.

Para $H = 1$, temos por (1.10) que

$$U^2(s) = \frac{a^2 + (1 + 2a)^2 s^2}{1 + 2a}, \quad \dot{U}^2(s) = \frac{(1 + 2a)^3 s^2}{a^2 + (1 + 2a)^2 s^2}. \quad (4.6)$$

Substituindo (4.6) em (4.5), obtemos

$$(1 + 2a)^4 s^4 + \left(2a^2(1 + 2a)^2 - (1 + 2a)^4\right) s^2 + a^4 = 0. \quad (4.7)$$

Chamando $t = s^2$ em (4.7), obtemos uma equação do 2º grau, cujo discriminante é

$$\Delta = (1 + 2a)^6(4a + 1). \quad (4.8)$$

Como, para $H = 1$, $1 + 2a > 0$ então

- se $-\frac{1}{2} < a < -\frac{1}{4}$, (4.7) não tem raízes reais, de onde segue que não há pontos de tangência vertical neste caso;
- se $a = -\frac{1}{4}$, existem, no máximo, dois pontos de tangência vertical

$$s = \pm \frac{1}{2}; \quad (4.9)$$

- se $a > -\frac{1}{4}$, existem, no máximo, quatro pontos de tangência vertical, que após simplificações, são dados por

$$s_1 = \frac{1 + 2a + \sqrt{1 + 4a}}{2(1 + 2a)}, \quad s_2 = -s_1, \quad (4.10)$$

$$s_3 = \frac{1 + 2a - \sqrt{1 + 4a}}{2(1 + 2a)}, \quad s_4 = -s_3.$$

Para $0 \leq H < 1$, temos por (1.11) que

$$U^2(s) = \frac{-A + B \cosh(2\alpha s)}{2\alpha^2}, \quad \dot{U}^2(s) = \frac{B^2 \sinh^2(2\alpha s)}{2(-A + B \cosh(2\alpha s))}. \quad (4.11)$$

Substituindo (4.11) em (4.5), obtemos

$$B^2 H^2 \cosh^2(2\alpha s) - 2AB \cosh(2\alpha s) + A^2 + \alpha^2 B^2 = 0. \quad (4.12)$$

Chamando $t = \cosh(2\alpha s)$ em (4.12), obtemos uma equação do 2º grau, cujo discriminante é

$$\Delta = 4B^2(1 - H^2)^2(1 + 4aH). \quad (4.13)$$

Como, para $0 < H < 1$, $B > 0$ então

- se $a < -\frac{1}{4H}$, não há pontos de tangência vertical;
- se $a = -\frac{1}{4H}$, existem, no máximo, dois pontos de tangência vertical

$$s = \pm \frac{1}{2\alpha} \operatorname{arccosh}\left(\frac{1}{H}\right); \quad (4.14)$$

- se $a > -\frac{1}{4H}$, existem, no máximo, quatro pontos de tangência vertical

$$s_1 = \frac{1}{2\alpha} \operatorname{arccosh}\left(\frac{A + (1 - H^2)\sqrt{1 + 4aH}}{BH^2}\right), \quad s_2 = -s_1, \quad (4.15)$$

$$s_3 = \frac{1}{2\alpha} \operatorname{arccosh}\left(\frac{A - (1 - H^2)\sqrt{1 + 4aH}}{BH^2}\right), \quad s_4 = -s_3.$$

Em particular, se $H = 0$, (4.12) se torna

$$2B \cosh(2s) - 1 - B^2 = 0, \quad (4.16)$$

cujas soluções são

$$s = \pm \frac{1}{2} \operatorname{arccosh}\left(\frac{B^2 + 1}{2B}\right). \quad (4.17)$$

Para $H > 1$, temos por (1.12) que

$$U^2(s) = \frac{A + B \sin(2\alpha s)}{2\alpha^2}, \quad \dot{U}^2(s) = \frac{B^2 \cos^2(2\alpha s)}{2(A + B \sin(2\alpha s))}. \quad (4.18)$$

Substituindo (4.18) em (4.5), obtemos

$$B^2 H^2 \sin^2(2\alpha s) + 2AB \sin(2\alpha s) + A^2 - \alpha^2 B^2 = 0. \quad (4.19)$$

Chamando $t = \sin(2\alpha s)$ em (4.19), obtemos uma equação do 2º grau, cujo discriminante é

$$\Delta = 4B^2(H^2 - 1)^2(1 + 4aH). \quad (4.20)$$

Como, para $H > 1$, $B > 0$ então

- se $a < -\frac{1}{4H}$, não há pontos de tangência vertical;
- se $a = -\frac{1}{4H}$, existem infinitas possibilidades para tangência vertical

$$s_k = s_0 + \frac{k\pi}{\alpha}, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{4.21}$$

$$\tilde{s}_k = \tilde{s}_0 + \frac{k\pi}{\alpha}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

onde

$$s_0 = \frac{1}{2\alpha} \arcsin\left(\frac{1}{H}\right), \quad -\frac{\pi}{2} < 2\alpha s_0 < \frac{\pi}{2},$$

$$\tilde{s}_0 = \frac{1}{2\alpha} \arcsin\left(\frac{1}{H}\right), \quad \frac{\pi}{2} < 2\alpha \tilde{s}_0 < \frac{3\pi}{2}.$$

- se $a > -\frac{1}{4H}$, existem infinitas possibilidades de tangência vertical

$$S_k = S_0 + \frac{k\pi}{\alpha}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\tilde{S}_k = \tilde{S}_0 + \frac{k\pi}{\alpha}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$s_k = s_0 + \frac{k\pi}{\alpha}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\tilde{s}_k = \tilde{s}_0 + \frac{k\pi}{\alpha}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

(4.22)

onde

$$S_0 = \frac{1}{2\alpha} \arcsin\left(\frac{-A + (H^2 - 1)\sqrt{1 + 4aH}}{BH^2}\right), \quad -\frac{\pi}{2} < 2\alpha S_0 < \frac{\pi}{2},$$

$$\tilde{S}_0 = \frac{1}{2\alpha} \arcsin\left(\frac{-A + (H^2 - 1)\sqrt{1 + 4aH}}{BH^2}\right), \quad \frac{\pi}{2} < 2\alpha \tilde{S}_0 < \frac{3\pi}{2},$$

$$s_0 = \frac{1}{2\alpha} \arcsin\left(\frac{-A - (H^2 - 1)\sqrt{1 + 4aH}}{BH^2}\right), \quad -\frac{\pi}{2} < 2\alpha s_0 < \frac{\pi}{2},$$

$$\tilde{s}_0 = \frac{1}{2\alpha} \arcsin\left(\frac{-A - (H^2 - 1)\sqrt{1 + 4aH}}{BH^2}\right), \quad \frac{\pi}{2} < 2\alpha \tilde{s}_0 < \frac{3\pi}{2}.$$

Analisamos, a seguir, o comportamento das curvas geratrizes das H -superfícies rotacionais, adaptando os resultados e as provas que descrevemos na Seção 1.3, obtidos por Barrientos em [3].

4.3 Tangência vertical para as curvas geratrizes das superfícies rotacionais com $H = 1$

Em coordenadas cilíndricas, o raio geodésico é dado por $\{\lambda = 0\}$. Por (4.1), em \mathbb{R}_+^3 , ele é dado pela curva $c_+(s) = (\tanh \rho(s), \operatorname{sech} \rho(s))$, que denotamos por c_g . Temos o seguinte resultado.

Teorema 4.3.1. *Se $c_+(s) = e^{\lambda(s)}(\tanh \rho(s), \operatorname{sech} \rho(s))$, com $\rho(s), \lambda(s)$ dados por (1.10), é a parametrização da curva geratriz de uma H -superfície rotacional em \mathbb{R}_+^3 , com $H = 1$, então $c_+(s)$ é simétrica em relação ao raio geodésico c_g .*

Prova: Por (1.10), $\lambda(0) = 0$. Assim, $c_+(0) \in c_g$. Além disto, se I denota a inversão euclidiana em relação a c_g , então como $\rho(s)$ é par e $\lambda(s)$ é ímpar, segue que

$$I(c_+(s)) = c_+(-s).$$

■

Por definição, $\rho(s) \geq 0$. Assim, $\sinh \rho(s) \geq 0$. Além disto, por (1.10),

$$\sinh \rho(s) = 0 \iff a = 0 \text{ e } s = 0. \tag{4.23}$$

Assim, se a e s não forem simultaneamente nulos, temos que $\tanh \rho(s) > 0$. Sempre temos $\operatorname{sech} \rho(s) > 0$. Na Seção 1.3, vimos também que $s = 0$ é o único ponto de mínimo de $\rho(s)$. Deste modo, pela análise que fizemos para (4.8), estudamos as tangências verticais pela variação do parâmetro a .

1. Se $-\frac{1}{4} \leq a < 0$, temos que $\dot{\lambda}(s) > 0$. Assim, se $s \geq 0$ então

$$\tanh \rho(s) \dot{\lambda}(s) + \operatorname{sech}^2 \rho(s) \dot{\rho}(s) > 0$$

e, portanto, (4.4) não ocorre, ou seja, não há pontos de tangência vertical nestes casos. Como $1 + 2a > 0$, as raízes s_1, s_3 de (4.5), que estão dadas em (4.10), são estritamente positivas. Logo, não são pontos de tangência vertical. As outras raízes $s_2, s_4 < 0$ são os pontos de tangência vertical. Analisando (4.3), concluímos que $b > 0$, ou seja, os tangentes verticais apontam para cima. Na figura 4.1, ilustramos a curva geratriz para $H = 1$ e $a = -0,2$ e os horociclos que passam pelos pontos de tangência vertical. Na figura 4.2, vemos duas horoesferas paralelas e o pedaço da superfície rotacional que fica entre as horoesferas e as encontra perpendicularmente.

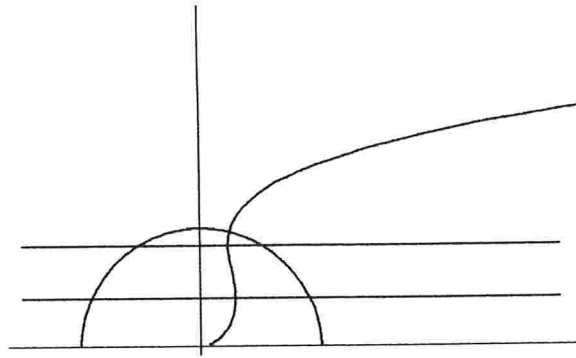


Figura 4.1: Curva geratriz para $H = 1$ e $a = -0,2$.

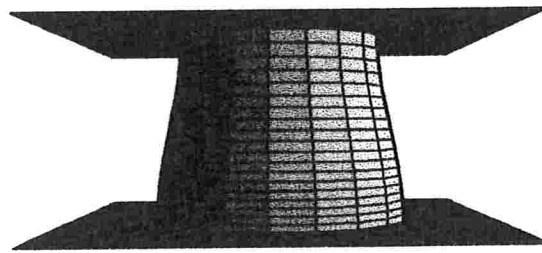


Figura 4.2: Superfície rotacional com $H = 1$ e $a = -0,2$.

Em particular, se $a = -\frac{1}{4}$ então a raiz $s = \frac{1}{2}$ positiva de (4.5) que foi obtida em (4.9) não serve como tangência vertical. Neste caso, há somente um ponto de tangência vertical $s = -\frac{1}{2}$. No entanto, das informações sobre $\rho(s)$ e $\lambda(s)$, temos que

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} e^{\lambda(s)} \tanh \rho(s) = 0, \quad \lim_{s \rightarrow -\infty} e^{\lambda(s)} \operatorname{sech} \rho(s) = 0, \tag{4.24}$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} e^{\lambda(s)} \tanh \rho(s) = \infty, \quad \lim_{s \rightarrow \infty} e^{\lambda(s)} \operatorname{sech} \rho(s) = \infty.$$

Portanto, este caso não nos interessa, pois não é possível encontrar duas horoesferas de modo que a superfície rotacional as intersecte perpendicularmente ao longo de seu bordo. Na figura 4.3, representamos a curva geratriz para $H = 1$ e $a = -\frac{1}{4}$, e o horociclo que passa pelo ponto de tangência vertical. Na figura 4.4, vemos uma horoesfera e um pedaço da superfície rotacional que a encontra perpendicularmente.

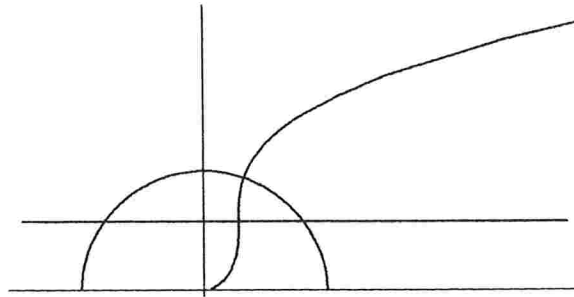


Figura 4.3: Curva geratriz para $H = 1$ e $a = -\frac{1}{4}$.

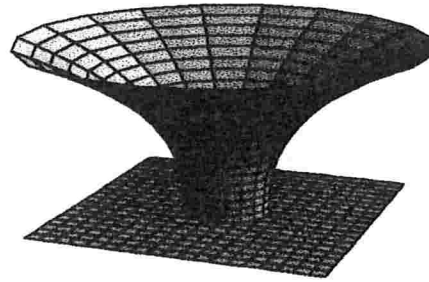


Figura 4.4: Caso excluído: superfície rotacional com $H = 1$ e $a = -\frac{1}{4}$.

2. Se $a = 0$, temos duas porções de horociclos tangentes no ponto $(0, 1)$, que geram as superfícies umbílicas com $H = 1$, representadas pelo plano euclidiano $\{z = 1\}$ e pela

esfera euclidiana de raio igual a $\frac{1}{2}$, tangente a $\partial\mathbb{R}_+^3$ no ponto $(0, 0, 0)$. Observamos que, neste caso, as tangências verticais ocorrem somente para as curvas geratrizes das superfícies umbílicas representadas pela esfera euclidiana, embora haja uma isometria de \mathbb{R}_+^3 que leva um tipo noutro. Na figura 4.5, vemos o par de curvas que geram as superfícies umbílicas com $H = 1$ e o horociclo que contém o ponto de tangência vertical. Na figura 4.6, ilustramos uma horoesfera e um pedaço da superfície umbílica representada pela semi-esfera euclidiana que a encontra perpendicularmente.

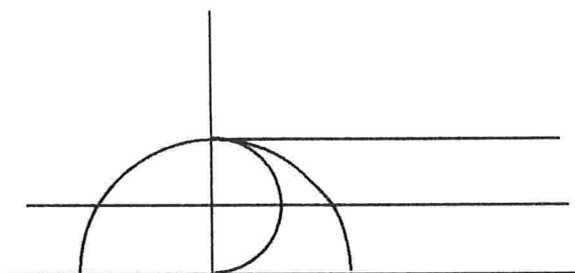


Figura 4.5: Curva geratriz para $H = 1$ e $a = 0$.



Figura 4.6: Superfície rotacional com $H = 1$ e $a = 0$.

3. Se $a > 0$, vimos na Seção 1.3 que as curvas geratrizes possuem uma única auto-intersecção. No entanto, se $c_+(s_i) = c_+(s_j)$ é uma auto-intersecção, então de (4.1) segue que $s_i = \pm s_j$. Como as curvas são simétricas em relação a c_g , segue que as auto-intersecções ocorrem em c_g . Isto implica que $\lambda(s_i) = \lambda(s_j) = 0$. Por (1.10), mostramos que $\lambda(s)$ tem um ponto de máximo em $-\frac{\sqrt{a(1+a)}}{1+2a}$ e de mínimo em

$\frac{\sqrt{a(1+a)}}{1+2a}$. Em [3], foi mostrado que

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \lambda(s) = \infty.$$

Como $\lambda(0) = 0$ e $\lambda(s)$ é uma função ímpar, temos que $\lambda(s)$ tem o comportamento da figura 4.7.

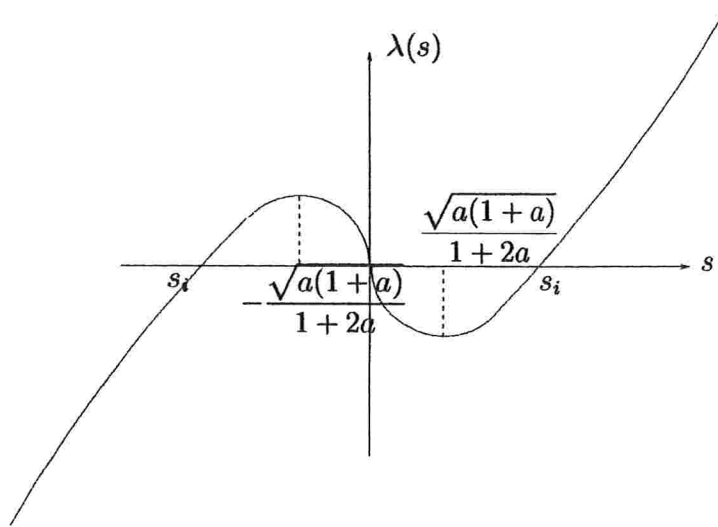


Figura 4.7: Comportamento de $\lambda(s)$.

Lembremos que $\rho(s)$ tem um único ponto de mínimo em $s = 0$. Assim, temos que se $s > \frac{\sqrt{a(1+a)}}{1+2a} > 0$ então $\dot{\rho}(s), \dot{\lambda}(s) > 0$, o que implica

$$\tanh \rho(s) \dot{\lambda}(s) + \operatorname{sech}^2 \rho(s) \dot{\rho}(s) > 0,$$

enquanto que se $-\frac{\sqrt{a(1+a)}}{1+2a} < s < 0$, temos $\dot{\rho}(s), \dot{\lambda}(s) < 0$, o que implica

$$\tanh \rho(s) \dot{\lambda}(s) + \operatorname{sech}^2 \rho(s) \dot{\rho}(s) < 0.$$

Em ambos os casos não vale (4.4), ou seja, não ocorre tangência vertical. Como $a > 0$, é possível mostrar que as raízes s_1, s_2, s_3, s_4 de (4.5), que estão dadas em

(4.10), são tais que

$$s_1 > \frac{\sqrt{a(1+a)}}{1+2a}, \quad s_2 < -\frac{\sqrt{a(1+a)}}{1+2a},$$

$$0 < s_3 < \frac{\sqrt{a(1+a)}}{1+2a}, \quad -\frac{\sqrt{a(1+a)}}{1+2a} < s_4 < 0.$$

Portanto, s_1 e s_4 são excluídos das possibilidades de tangência vertical. Assim, as tangências verticais ocorrem em s_2 e s_3 . Temos que $\dot{\rho}(s_2) < 0$ e $\dot{\lambda}(s_2) > 0$, o que implica, por (4.3), que em s_2 , o tangente vertical aponta para cima. No entanto, $\dot{\rho}(s_3) > 0$ e $\dot{\lambda}(s_3) < 0$, o que implica, por (4.3), que em s_3 , o tangente vertical aponta para baixo. Este caso também não vai nos interessar, pois se as tangentes verticais não ocorrem na mesma altura, então um pedaço da curva geratriz fica fora da região entre os horociclos, aos quais a curva é perpendicular, como ilustramos na figura 4.8. Na figura 4.9, vemos duas horoesferas paralelas, destacando o pedaço da superfície rotacional que fica fora da região entre as horoesferas e que as encontra perpendicularmente.

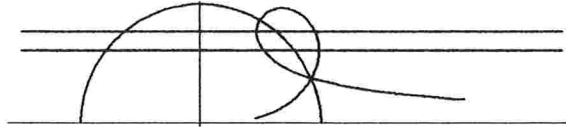


Figura 4.8: Curva geratriz para $H = 1$ e $a = 1$.

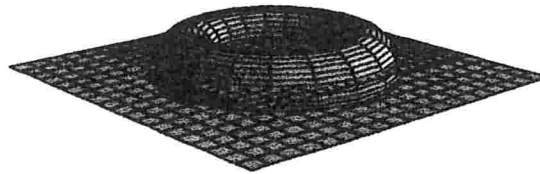


Figura 4.9: Caso excluído: pedaço da sup. rotacional fora da região entre as horoesferas.

No entanto, se as tangências verticais ocorrem na mesma altura, o corte da H -superfície rotacional com horoesferas dadas por planos euclidianos horizontais seriam duas circunferências concêntricas, o que não pode ocorrer, pela Observação 2.2.2.

Concluimos, finalmente, que para $H = 1$, a fronteira de Ω pode ser uma superfície do tipo prima do catenóide (ver figura 4.2) ou umbílica (ver figura 4.6), o que prova a afirmação 2.(a) do Teorema 4.1.1.

4.4 Tangência vertical para as curvas geratrizes das superfícies rotacionais com $0 \leq H < 1$

Começamos com o seguinte resultado

Teorema 4.4.1. *Se $c_+(s) = e^{\lambda(s)}(\tanh \rho(s), \operatorname{sech} \rho(s))$, com $\rho(s), \lambda(s)$ dados por (1.11), é a parametrização da curva geratriz de uma H -superfície rotacional em \mathbb{R}_+^3 , com $0 \leq H < 1$, então*

- $c_+(s)$ é simétrica em relação ao raio geodésico c_g ;
- o bordo assintótico das curvas geratrizes é constituído de um ou dois pontos.

Prova: A prova da simetria em relação ao raio geodésico é a mesma do Teorema 4.3.1, visto que $\rho(s)$ é par e $\lambda(s)$ é ímpar, também neste caso. Em [3], mostrou-se que $\rho(s)$ é ilimitada e $\lambda(s)$ é limitada e possui limite finito. Assim,

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty} e^{\lambda(s)} \operatorname{sech} \rho(s) = 0, \quad (4.25)$$

de onde segue, por (4.1), que o bordo assintótico das curvas é constituído de um ou dois pontos. ■

Por definição, $\rho(s) \geq 0$ e, assim $\sinh \rho(s) \geq 0$. Além disto, por (1.11),

$$\sinh \rho(s) = 0 \iff a = 0 \text{ e } s = 0. \quad (4.26)$$

Assim, se a e s não forem simultaneamente nulos, temos que $\tanh \rho(s) > 0$. Sempre temos $\operatorname{sech} \rho(s) > 0$. Na Seção 1.3, vimos também que $s = 0$ é o único ponto de mínimo de $\rho(s)$. Lembremos que, neste caso, o parâmetro a está definido para todo real. Pela análise que fizemos para (4.13), seguem os resultados a seguir.

Suponha $0 < H < 1$.

1. Se $-\frac{1}{4H} \leq a < 0$, temos que $\dot{\lambda}(s) > 0$. Assim, se $s \geq 0$ então

$$\tanh \rho(s)\dot{\lambda}(s) + \operatorname{sech}^2 \rho(s)\dot{\rho}(s) > 0$$

e, portanto, (4.4) não ocorre, ou seja, não há pontos de tangência vertical nestes casos. Consequentemente, descartamos as raízes s_1, s_3 positivas de (4.5), que estão dadas em (4.15), como pontos de tangência vertical. As outras raízes $s_2, s_4 < 0$ são os pontos de tangência vertical. Analisando (4.3) para s_2 e s_4 , concluímos que $b > 0$, ou seja, os tangentes verticais apontam para cima. Na figura 4.10, ilustramos a curva geratriz para $H = 0,5$ e $a = -0,25$ e os horociclos que passam pelos pontos de tangência vertical.

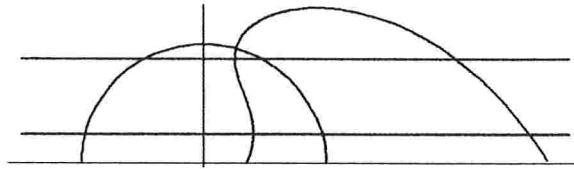


Figura 4.10: Curva geratriz para $H = 0,5$ e $a = -0,25$.

Observamos que o vetor curvatura média do pedaço da superfície rotacional que está no interior da totalmente geodésica (plano de simetria da superfície) aponta para o eixo de rotação, determinando assim a região isoperimétrica ilustrada na figura 4.11.



Figura 4.11: Superfície rotacional com $H = 0,5$ e $a = -0,25$.

Em particular, se $a = -\frac{1}{4H}$ então a raiz $s = \frac{1}{2\alpha} \operatorname{arccosh}\left(\frac{1}{H}\right)$ positiva de (4.5), dada em (4.14), não serve como tangência vertical. Descartamos este caso, pois há somente um ponto de tangência vertical $s = -\frac{1}{2\alpha} \operatorname{arccosh}\left(\frac{1}{H}\right) < 0$. Observamos que a curva geratriz intersecta o horociclo que contém o ponto de tangência vertical num outro ponto, mas não perpendicularmente, como vemos na figura 4.12. Assim,

não é possível determinar uma região isoperimétrica, conforme vemos na figura 4.13, onde mostramos uma horoesfera e um pedaço da superfície rotacional que a encontra perpendicularmente.

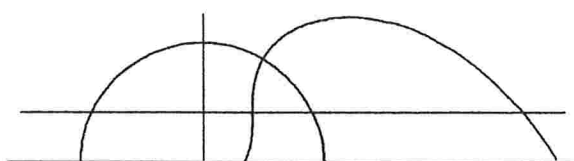


Figura 4.12: Curva geratriz para $H = 0,5$ e $a = -0,5$.

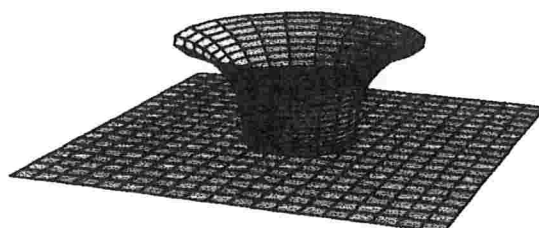
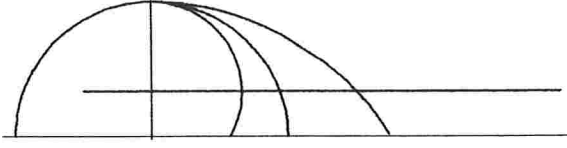


Figura 4.13: Caso excluído: superfície rotacional com $H = 0,5$ e $a = -0,5$.

2. Se $a = 0$, temos duas porções de curvas equidistantes tangentes no ponto $(0, 1)$, que geram as superfícies umbílicas com $0 < H < 1$, representadas por pedaços de esferas euclidianas que se tangenciam em $(0, 0, 1)$. Observamos que, no entanto, a tangência vertical ocorre somente para a curva geratriz da superfície umbílica mais próxima do eixo de rotação. Como o vetor curvatura média desta umbílica aponta para o eixo de rotação, ela determina uma região isoperimétrica, que ilustramos na figura 4.15. Na figura 4.14, vemos o par de curvas que geram as umbílicas com $H = 0,5$ e $a = 0$ e o horociclo que contém o ponto de tangência vertical.

Figura 4.14: Curva geratriz para $H = 0,5$ e $a = 0$.Figura 4.15: Superfície rotacional com $H = 0,5$ e $a = 0$.

3. Se $a > 0$, por (1.11), temos que $\lambda(0) = 0$, $\lambda(s)$ é uma função ímpar, tem um ponto de máximo em $-\frac{1}{2\alpha} \operatorname{arccosh}\left(\frac{2a+H}{HB}\right)$ e de mínimo em $\frac{1}{2\alpha} \operatorname{arccosh}\left(\frac{2a+H}{HB}\right)$.

Assim, se $s > \frac{1}{2\alpha} \operatorname{arccosh}\left(\frac{2a+H}{HB}\right) > 0$ então $\dot{\rho}(s), \dot{\lambda}(s) > 0$, o que implica

$$\tanh \rho(s) \dot{\lambda}(s) + \operatorname{sech}^2 \rho(s) \dot{\rho}(s) > 0,$$

enquanto que se $-\frac{1}{2\alpha} \operatorname{arccosh}\left(\frac{2a+H}{HB}\right) < s < 0$, temos $\dot{\rho}(s), \dot{\lambda}(s) < 0$, o que implica

$$\tanh \rho(s) \dot{\lambda}(s) + \operatorname{sech}^2 \rho(s) \dot{\rho}(s) < 0.$$

Em ambos os casos não vale (4.4), ou seja, não ocorre tangência vertical. Como $a > 0$ e $0 < H < 1$, é possível mostrar que as raízes s_1, s_2, s_3, s_4 de (4.5), dadas em (4.15), são tais que

$$s_1 > \frac{1}{2\alpha} \operatorname{arccosh}\left(\frac{2a+H}{HB}\right), \quad s_2 < -\frac{1}{2\alpha} \operatorname{arccosh}\left(\frac{2a+H}{HB}\right),$$

$$0 < s_3 < \frac{1}{2\alpha} \operatorname{arccosh}\left(\frac{2a+H}{HB}\right), \quad -\frac{1}{2\alpha} \operatorname{arccosh}\left(\frac{2a+H}{HB}\right) < s_4 < 0.$$

Portanto, descartamos s_1 e s_4 como pontos de tangência vertical. Assim, as tangências verticais ocorrem em s_2 e s_3 . Temos que $\dot{\rho}(s_2) < 0$ e $\dot{\lambda}(s_2) > 0$, o que implica, por

(4.3), que em s_2 , o tangente vertical aponta para cima. No entanto, $\dot{\rho}(s_3) > 0$ e $\dot{\lambda}(s_3) < 0$, o que implica, por (4.3), que em s_3 , o tangente vertical aponta para baixo. Eliminamos também este caso, pois se as tangências verticais ocorrem na mesma altura, o corte da H -superfície rotacional com horoesferas dadas por planos euclidianos horizontais são duas circunferências concêntricas, o que não pode ocorrer, pela Observação 2.2.2. Se ocorrem em alturas diferentes, um pedaço da superfície rotacional fica fora da região entre as horoesferas que contêm os pontos de tangência vertical das curvas geratrizes da superfície rotacional, como destacamos na figura 4.17. Na figura 4.16, vemos que o horociclo superior passa pelo ponto de tangência vertical correspondente a s_2 e o inferior a s_3 .



Figura 4.16: Curva geratriz para $H = 0,5$ e $a = 1$.

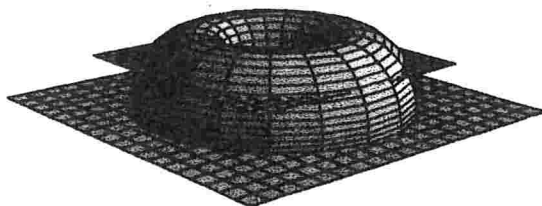


Figura 4.17: Caso excluído: superfície rotacional com $H = 0,5$ e $a = 1$.

Se $H = 0$, pelas informações na Seção 1.3, temos que

1. se $a < 0$ então $\dot{\lambda}(s) > 0$; como para $s \geq 0$ vale $\dot{\rho}(s) > 0$, segue que (4.4) não ocorre. Assim, há tangência vertical somente para a raiz negativa de (4.17), conforme ilustramos na figura 4.18.
2. se $a > 0$ então $\dot{\lambda}(s) < 0$; como para $s \leq 0$ vale $\dot{\rho}(s) < 0$, segue que (4.4) não ocorre. Assim, há tangência vertical somente para a raiz positiva de (4.17), conforme ilustramos na figura 4.19.

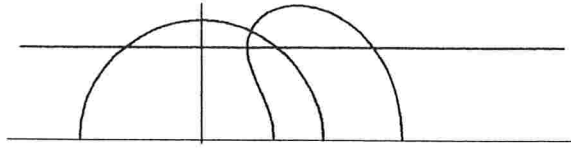


Figura 4.18: Curva geratriz para $H = 0$ e $a = -0,5$.

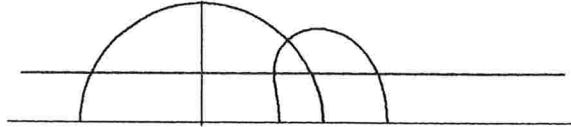


Figura 4.19: Curva geratriz para $H = 0$ e $a = 1$.

Nos dois casos anteriores, há somente um ponto de tangência vertical, não sendo assim possível determinar uma região isoperimétrica, em vista do comportamento da superfície.

3. se $a = 0$, a superfície rotacional obtida é um plano totalmente geodésico. Neste caso, não é possível encontrar uma horoesfera de modo que eles se encontrem perpendicularmente.

Mostramos, finalmente, que para $0 \leq H < 1$, a fronteira de Ω pode ser uma superfície do tipo equidistante (ver figura 4.11) ou umbílica com $0 < H < 1$ (ver figura 4.15), o que prova a afirmação 2.(b) do Teorema 4.1.1.

4.5 Tangência vertical para as curvas geratrizes das superfícies rotacionais com $H > 1$

Teorema 4.5.1. *Se $c_+(s) = e^{\lambda(s)}(\tanh \rho(s), \operatorname{sech} \rho(s))$, com $\rho(s), \lambda(s)$ dados por (1.12), é a parametrização da curva geratriz de uma H -superfície rotacional em \mathbb{R}_+^3 , com $H > 1$, então $c_+(s)$ é uma curva periódica de período $\frac{\pi}{\alpha}$.*

Prova: Mostraremos que para qualquer s , o comprimento hiperbólico do segmento

entre os pontos $c_+(s)$ e $c_+(s + \frac{\pi}{\alpha})$ permanece constante. Em [3], mostrou-se que

$$\rho(s + \frac{\pi}{\alpha}) = \rho(s), \quad \lambda(s + \frac{\pi}{\alpha}) = \lambda(s) + \lambda(\frac{\pi}{\alpha}), \quad (4.27)$$

de onde, por (4.1), segue que

$$c_+(s + \frac{\pi}{\alpha}) = e^{\lambda(\frac{\pi}{\alpha})} c_+(s). \quad (4.28)$$

Seja s_0 fixado. Parametrizando o segmento entre os pontos $c_+(s_0)$ e $c_+(s_0 + \frac{\pi}{\alpha})$ por

$$\beta(t) = (t, \frac{1}{\sinh \rho(s_0)} t), \quad \text{com } e^{\lambda(s_0)} \tanh \rho(s_0) \leq t \leq e^{\lambda(s_0)} e^{\lambda(\frac{\pi}{\alpha})} \tanh \rho(s_0),$$

segue seu comprimento hiperbólico é dado por

$$L(\beta(t)) = \lambda(\frac{\pi}{\alpha}) \cosh \rho(s_0). \quad (4.29)$$

Por (4.29), vemos que o comprimento do segmento depende apenas da função $\rho(s)$ que, por (4.27), é periódica de período $\frac{\pi}{\alpha}$. Assim, $L(\beta(t))$ tem comprimento constante, para todo s_0 . ■

Por definição, $\rho(s) \geq 0$ e, assim, $\sinh \rho(s) \geq 0$. Além disto, por (1.12),

$$\sinh \rho(s) = 0 \iff \sin(2\alpha s) = -\frac{A}{B}. \quad (4.30)$$

No entanto, é fácil mostrar que

$$\frac{A}{B} \geq 1 \quad \text{e} \quad \frac{A}{B} = 1 \iff a = 0.$$

Assim, concluímos que

$$\sinh \rho(s) = 0 \iff a = 0.$$

Assim, se $a \neq 0$, temos que $\tanh \rho(s) > 0$. Sempre temos $\text{sech} \rho(s) > 0$. Além disto, como o sinal de $\dot{\rho}(s)$ depende somente do sinal de $\cos(2\alpha s)$, então

$$\dot{\rho}(s) = 0 \iff s = \frac{\pi}{4\alpha} + \frac{k\pi}{2\alpha}, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (4.31)$$

Para k par, obtemos os pontos de máximo de $\rho(s)$ e para k ímpar, obtemos os pontos de mínimo de $\rho(s)$.

Pela análise que fizemos para (4.20), seguem os resultados a seguir.

1. Se $-\frac{1}{4H} \leq a < 0$, temos que $\dot{\lambda}(s) > 0$. Assim, por (4.4), as tangências verticais só ocorrem para s tais que $\dot{\rho}(s) < 0$, ou equivalentemente, $\cos(2\alpha s) < 0$, isto é,

$$\left] \frac{(2k+1)\pi}{4\alpha}, \frac{(2k+3)\pi}{4\alpha} \right[, \quad k \text{ par.} \quad (4.32)$$

Além disto,

$$\cos(2\alpha s) < 0 \iff \frac{\pi}{2} + 2k\pi < 2\alpha s < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi.$$

Consequentemente, descartamos as raízes S_k, s_k de (4.22) como possíveis pontos de tangência vertical, sendo as outras raízes \tilde{S}_k, \tilde{s}_k os pontos de tangência vertical. Analisando (4.3) para estas raízes, concluímos que $b > 0$, ou seja, os tangentes verticais apontam para cima. O comportamento da curva geratriz, representado pela figura 4.20, nos permite observar que existem infinitos tangentes verticais.

Na figura 4.21, ilustramos a superfície rotacional gerada pela ondulária, que chamamos de ondulóide hiperbólico.



Figura 4.20: Ondulária hiperbólica para $H = 3$ e $a = -0,05$.



Figura 4.21: Ondulóide hiperbólico com $H = 3$ e $a = -0,05$.

Em particular, se $a = -\frac{1}{4H}$ então somente as raízes \tilde{s}_k , dadas em (4.21), satisfazem (4.32). Também para estas raízes, temos $b > 0$ em (4.3), ou seja, os tangentes verticais apontam para cima.

2. Se $a = 0$, temos semicircunferências geodésicas tangentes entre si ao longo do eixo de rotação, conforme a figura 4.22. Cada semicircunferência geodésica gera uma esfera geodésica em \mathbb{R}_+^3 , que são as superfícies umbílicas com $H > 1$. Neste caso, conseguimos sempre determinar regiões isoperimétricas. Ilustramos duas delas na figura 4.23.

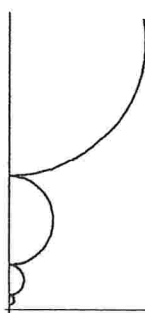


Figura 4.22: Curva geratriz para $H = 2$ e $a = 0$.

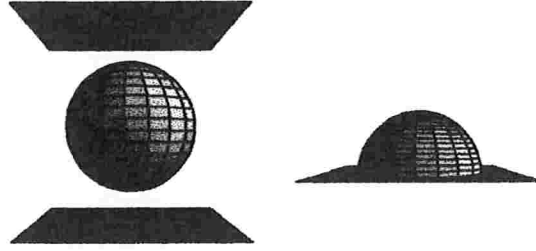


Figura 4.23: Regiões isoperimétricas com $H > 1$ e $a = 0$.

3. Se $a > 0$, por (1.12), temos que

$$\dot{\lambda}(s) = 0 \iff \sin(2\alpha s) = \frac{-2a - H}{HB} < 0.$$

Mas, isto acontece para

$$s = \mathbb{S}_k = \mathbb{S}_0 + \frac{k\pi}{\alpha}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$s = \tilde{\mathbb{S}}_k = \tilde{\mathbb{S}}_0 + \frac{k\pi}{\alpha}, \quad k \in \mathbb{Z},$$
(4.33)

onde

$$\mathbb{S}_0 = \frac{1}{2\alpha} \arcsin\left(\frac{-2a - H}{HB}\right), \quad -\frac{\pi}{2} < 2\alpha\mathbb{S}_0 < 0,$$

$$\tilde{\mathbb{S}}_0 = \frac{1}{2\alpha} \arcsin\left(\frac{-2a - H}{HB}\right), \quad \pi < 2\alpha\tilde{\mathbb{S}}_0 < \frac{3\pi}{2}.$$

Analisando-se ainda a segunda derivada de $\lambda(s)$, vemos que seu sinal depende de $\cos(2\alpha s)$. Assim, temos que as raízes \mathbb{S}_k , $\tilde{\mathbb{S}}_k$ de (4.33) são pontos de mínimo e de máximo, respectivamente, de $\lambda(s)$.

Pelo Teorema 4.5.1, as curvas geratrizes são periódicas de período $\frac{\pi}{\alpha}$. Portanto, basta analisar o que acontece em um intervalo básico. Por exemplo, vamos estudar as funções $\rho(s)$ e $\lambda(s)$ no intervalo $\left] -\frac{\pi}{4\alpha}, \frac{3\pi}{4\alpha} \right[$.

Primeiramente, observamos que as raízes $S_0, \tilde{S}_0, s_0, \tilde{s}_0$, dadas em (4.22), e as raízes $\mathbb{S}_0, \tilde{\mathbb{S}}_0$ pertencem a este intervalo. Além disto, como $a > 0$ e $H > 1$, é possível

mostrar que

$$\tilde{S}_0 < \tilde{\tilde{S}}_0, S_0 < S_0, \tag{4.34}$$

$$\tilde{s}_0 > \tilde{\tilde{s}}_0, S_0 > s_0.$$

Logo, por (4.22) e por (4.34), temos que

$$\frac{\pi}{4\alpha} < \tilde{S}_0 < \tilde{\tilde{S}}_0,$$

$$S_0 < S_0 < \frac{\pi}{4\alpha},$$

$$\tilde{S}_0 < \tilde{s}_0 < \frac{3\pi}{4\alpha},$$

$$-\frac{\pi}{4\alpha} < s_0 < S_0. \tag{4.35}$$

Na figura 4.24, localizamos estes pontos e apresentamos o comportamento de $\rho(s)$ e $\lambda(s)$.

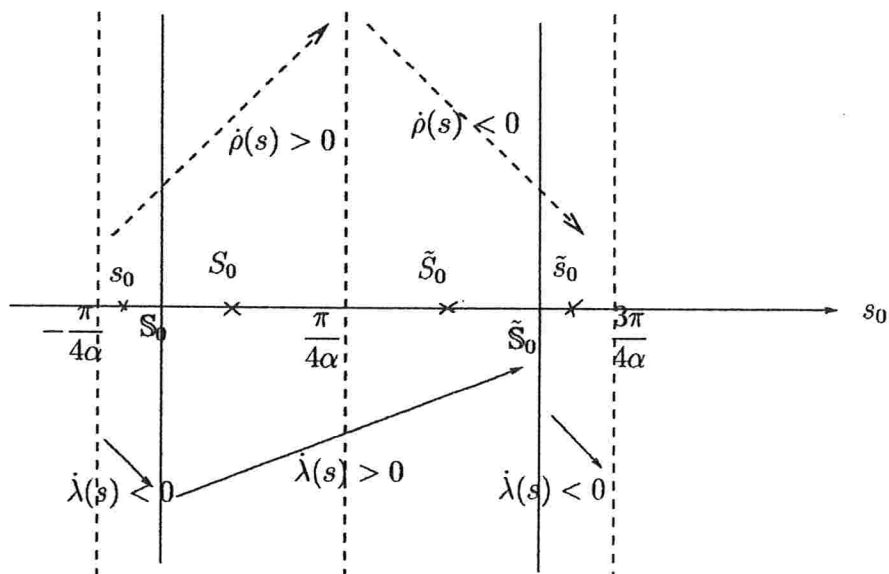


Figura 4.24: Comportamento de $\rho(s)$ e $\lambda(s)$.

Por (4.4), só poderá existir tangente vertical quando $\dot{\rho}(s) > 0$ e $\dot{\lambda}(s) < 0$ ou $\dot{\rho}(s) < 0$ e $\dot{\lambda}(s) > 0$, ou seja, quando $\dot{\rho}(s)\dot{\lambda}(s) < 0$. Desta forma, excluimos as raízes S_0 e

\tilde{s}_0 dentre os possíveis pontos de tangência vertical neste intervalo, interessando-nos apenas s_0 e \tilde{S}_0 . Além disto, os sinais de $\dot{\rho}(s)$, $\dot{\lambda}(s)$ para estes pontos implicam, por (4.3), que em s_0 o tangente vertical aponta para baixo e em \tilde{S}_0 , ele aponta para cima. Na figura 4.25, o comportamento da curva geratriz nos permite observar que existem infinitos tangentes verticais. No entanto, se as tangências verticais ocorrem em uma mesma altura, excluimos a situação, conforme a Observação 2.2.2. Se ocorrem em alturas diferentes, um pedaço da superfície rotacional fica fora da região entre as horoesferas, o que não satisfaz nossa condições. Este caso corresponde aos chamados nodóides hiperbólicos, que não são superfícies mergulhadas. Na figura 4.26, desenhamos um pedaço de nodóide hiperbólico onde há auto-intersecção, para indicar que um pedaço da superfície fica fora da região entre as horoesferas que contêm duas tangências verticais consecutivas da nodária hiperbólica.

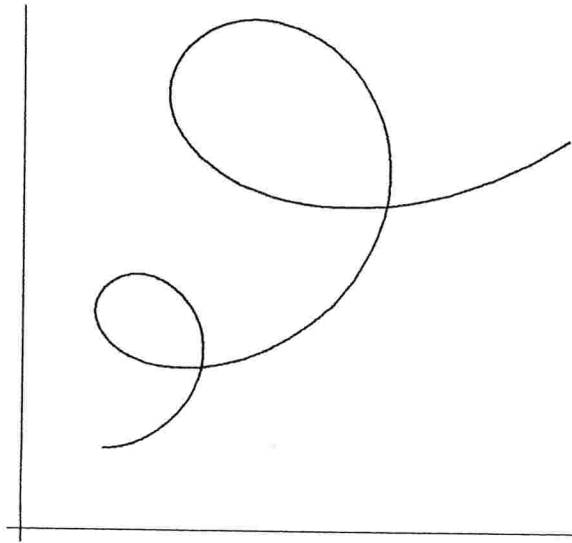


Figura 4.25: Nodária hiperbólica para $H = 1,5$ e $a = 0,5$.

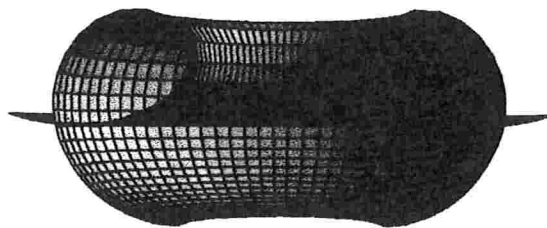


Figura 4.26: Caso excluído: nodóide hiperbólico.

Portanto, para $H > 1$, a fronteira de Ω pode ser uma superfície do tipo ondulóide (ver figura 4.21) ou umbílica com $H > 1$ (ver figura 4.23), o que prova a afirmação 2.(c) do Teorema 4.1.1.

Com isto, fica demonstrado o Teorema 4.1.1.

Referências Bibliográficas

- [1] Alexandrov, A.D., *Uniqueness theorems for surfaces in the large*, AMS Transl. 21 (1962).
- [2] Athanassenas, M., *A variational problem for constant mean curvature surfaces with free boundary*, J. Reine Angew. Math. 377 (1986), 97-107.
- [3] Barrientos, J.O., *Superfícies helicoidais com curvatura média constante em espaços forma tridimensionais*, Tese de Doutorado, PUC-RJ, 1995.
- [4] Barbosa, J.L., Carmo, M. do, *Stability of hypersurfaces with constant mean curvature*, Math. Z. 185 (1984), 339-353.
- [5] Barbosa, J.L., Carmo, M. do, Eschenburg, J., *Stability of hypersurfaces of constant mean curvature in Riemannian Manifolds*, Math. Z. 197 (1988), 123-138.
- [6] Carmo, M. do, Dajczer, M., *Rotation hypersurfaces in spaces of constant curvature*, Transactions of the AMS, (2)277 (1983), 685-709.
- [7] Earp, R.S., Barbosa, J.L., *Geometric Methods and nonlinear analysis in hyperbolic space*, Escola de Geometria Diferencial (10: 1998: Belo Horizonte, BR).
- [8] Earp, R.S., Toubiana, E., *Cours de Geometrie Hyperbolique et de Surfaces de Riemann*, PUC-RJ, Monografias 1.
- [9] López, R., *Constant Mean Curvature Surfaces with boundary in hyperbolic space*, Monath. Math 127 (1999), 155-169.

- [10] Morgan, F., Hutchings, M., Howards, H. *The isoperimetric problem on surfaces of revolution of decreasing Gauss curvature*, Trans. of the American Math. Soc. (11)352 (200), 4889-4909.
- [11] Morgan, F., *Clusters minimizing area plus length of singular curves*, Math. Ann. 299 (1994), 697-714.
- [12] Morgan, F., *Geometric Measure Theory (A beginner's guide)*, Academic Press, 2nd edition, San Diego, 1995.
- [13] Pedrosa, R.H.L., *On the Uniqueness of Isoperimetric Regions in Cylindrical Spaces*, Tese de Doutorado, Berkeley-CA, 1988.
- [14] Pedrosa, R.H.L., *The Isoperimetric Problem in Spherical Cylinders*, Annals of Global Analysis and Geometry 26 (2004), 333-354.
- [15] Pedrosa, R.H.L., Ritoré, M., *Isoperimetric Domains in the Riemannian product of a circle with a simply connected space form and applications to free boundary problems*, Indiana Univ. Math. J. (4)48 (1999), 1357-1394.
- [16] Ritoré, M., Ros, A., *Some updates on isoperimetric problems*, Springer-Verlag, (4)24, New York, 2002.
- [17] Silva, M.F., *Um problema variacional para superfícies de curvatura média constante com bordo livre*, Dissertação de Mestrado, IME-USP, 2002.
- [18] Suzuki, C.A., *Hipersuperfícies de rotação em espaços de curvatura constante*, Dissertação de Mestrado, IME-USP, 1989.
- [19] Vogel, T., *Stability of a drop trapped between two parallel planes*, SIAM Journal Applied Mathematics (3)47 (1987), 1357-1394.