Números de Reidemeister Relativos

Aldemir José da Silva Pinto

TESE APRESENTADA AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE
DOUTOR EM MATEMÁTICA

Área de Concentração: Topologia Algébrica
Orientadora: Profa. Dra. Fernanda Soares Pinto Cardona
Apoio Financeiro: Departamento de Matemática /UFPR e CAPES

- São Paulo, Julho de 2006 -

Números de Reidemeister Relativos

Este exemplar corresponde à redação final da tese corrigida e defendida por Aldemir José da Silva Pinto e aprovada pela Comissão Julgadora.

São Paulo, Julho de 2006.

Banca Examinadora:

Profa. Dra. Fernanda Soares Pinto Cardona (orientadora) - IME/USP
Profa. Dra. Lucília Daruiz Borsari - IME/USP
Prof. Dr. Peter Wong - BATES COLLEGE/USA
Prof. Dr. Pedro Luiz Queiroz Pergher - UFSCar
Profa. Dra. Alice Kimie Miwa Libardi - UNESP/Rio Claro

Dedico a minha mãe Carmem Silva Pinto (*in memoriam*)
e a Mauro José da Silva Pinto (*in memoriam*).

Agradecimentos

Gostaria de expressar a minha profunda gratidão à Profa. Dra. Fernanda Soares Pinto Cardona, pela orientação e apoio desde o primeiro ano do Doutorado, e aos professores do grupo de Topologia Algébrica do IME, Profa. Dra. Lucília Daruiz Borsari e Prof. Dr. Daciberg Lima Gonçalves.

Agradeço também a Profa. Dra. Célia Contin Góes (IME/USP), a Profa. Dra. Ofélia Teresa Alas (IME/USP), ao Prof. Dr. Alfredo Jorge Aragona (IME/USP), ao Prof. Dr. Luiz Pedro Orosz (UFES), ao Prof. Standard Silva (UFES), ao Prof. Dr. Pedro Donizeti (UFPR), ao Prof. Antônio Carlos (UFPR) e a Profa. Maria Tereza Spínola de Miranda (Guarapari/ES), que sempre me incentivaram nos estudos matemáticos, e a todos os meus amigos visíveis e invisíveis.

Resumo

Neste trabalho definimos um número de Reidemeister, $\mathrm{R}(f; A_1 \cup A_2)$, para as auto-aplicações das tríades. Esse número satisfaz as propriedades esperadas do número de Reidemeister, $\mathrm{R}(f)$, na teoria do ponto fixo. Para tanto, redefinimos outros números de Reidemeister, obtendo uma facilidade maior no cálculo dos mesmos e novas propriedades. Além disso, apresentamos caracterizações algébricas para o número de Reidemeister da tríade.

Abstract

In this work we define a Reidemeister number, $\mathrm{R}(f; A_1 \cup A_2)$, for selfmaps of triads. This number satisfies the expected properties of the Reidemeister number, $\mathrm{R}(f)$, in fixed point theory. In order to do that, we redefine other Reidemeister numbers, thus obtaining easier calculations and new properties. Also, we present algebraic caracterizations for the Reidemeister number of the triade.

Índice

Chapter 1

Introdução

Seja X um poliedro compacto, conexo e uma aplicação $f\colon X \longrightarrow X$. Um problema central na teoria de ponto fixo é encontrar o número mínimo de pontos fixos, MF$[f]$, na classe de homotopia de f. A teoria de Nielsen, que se iniciou por volta de 1927 com o artigo de J. Nielsen, *Untersuchungen zur Topologie der gescholossenen zweiseitigen Flächen*, é um dos possíveis enfoques para responder tal questão. Ela foi desenvolvida nos trabalhos de R. Brown [1], B. Jiang [7], H. Schirmer [11] e X. Zhao [15], entre outros. O número de Reidemeister, R(f), que foi introduzido em 1936 por K. Reidemeister no artigo *Automorphismen von Homotopiekettenringen*, é um limitante superior para o número de Nielsen e, sob algumas condições, por exemplo quando X é espaço de Jiang, temos R(f)=N(f). Com a abordagem utilizada por Jiang [7], o cálculo de R(f) é mais fácil que o de N(f), o que o torna uma ferramenta útil no problema de determinação do número

MF$[f]$.

Em 1986, Helga Schirmer em [11] introduziu a noção do número de Nielsen relativo, $N(f; X, A)$, para aplicações $f\colon (X, A) \longrightarrow (X, A)$, onde X e $A \subset X$ são poliedros compactos e X é conexo, uma vez que o número de Nielsen de f, não fornece informações suficientes sobre as homotopias de um par de espaços, não sendo assim um bom limitante para MF$[f; X, A]$.

Em 1988, X. Zhao, em [15], definiu o número de Nielsen relativo para o complemento, $N(f; X-A)$, a fim de descrever de forma mais precisa o comportamento do número mínimo de pontos fixos das autoaplicações de pares de espaços no espaço complementar, $MF[f; X-A]$, pois nem o número de Nielsen, $N(f)$ nem o número de Nielsen relativo, $N(f; X, A)$, o fazem. Impondo algumas condições nos espaços envolvidos, ele demonstrou que o número mínimo de pontos fixos do complemento de uma aplicação é atingido pelo número de Nielsen do complemento.

H. Schirmer estudou o problema do número mínimo de pontos fixos para as tríades (X,A_1,A_2), onde X é um espaço compacto e conexo, $X = A_1 \cup A_2$ e A_1, A_2 são subespaços de X. Novamente verificou-se que os números de Nielsen definidos até então não eram bons limitantes inferiores para MF$[f; A_1 \cup A_2]$. Em 1993, no artigo [12], Schirmer definiu o número de Nielsen, $\mathrm{N}(f; A_1 \cup A_2)$, para aplicações da tríade. Além de ter as propriedades usuais de um número de Nielsen, ela demonstrou que $\mathrm{N}(f; A_1 \cup A_2)$ é um bom limitante inferior para $\mathrm{MF}[f; A_1 \cup A_2]$, que atinge o mínimo quando os espaços em questão satisfazem algumas hipóteses.

Em [2] foram apresentados números de Reidemeister relativo e o do complemento, respectivamente $R(f; X, A)$ e $R(f; X - A)$, que satisfazem quase todas as propriedades desejadas, análogas às do número de Reidemeister clássico, mas que não são invariantes homotópicos. Resolveu-se esse problema definindo $R^*(f; X, A)$ e $R^*(f; X-A)$, os respectivos valores mínimos assumidos por $R(f; X, A)$ e $R(f; X - A)$, na classe das aplicações homotópicas à f.

Neste trabalho melhoramos os resultados obtidos em [2], definindo de maneira diferente os números de Reidemeister relativo e do complemento que satisfazem propriedades análogas às de $\mathrm{R}(f)$, inclusive a da invariância homotópica. Além disso, definimos o número de Reidemeister, $\mathrm{R}(f; A_1 \cup A_2)$, no contexto das autoaplicações da tríade.

Com o intuito de tornar a leitura deste trabalho mais simples, no Capítulo 1 apresentamos de maneira sucinta os conceitos básicos utilizados, cujas demonstrações completas podem ser encontradas em [7] e [8]. Também incluímos diversos exemplos, ilustrando as possíveis situações decorrentes da aplicação de [15, Proposition 2.1].

Na primeira parte do Capítulo 2 apresentamos um resumo dos resultados obtidos por X. Zhao [15] para o número de Nielsen do complemento. Em seguida, fazemos uma nova definição do número de Reidemeister do complemento obtendo novos resultados. Na segunda parte fazemos o mesmo para número de Reidemeister relativo.

No Capítulo 3 definimos o número de Reidemeister da tríade, $\mathrm{R}(f; A_1 \cup A_2)$ e demonstramos que ele é um limitante superior para o número de Nielsen da tríade. Além disso, provamos sua invariância homotópica e que ele possui a propriedade dos espaços de Jiang. Observamos também que ele pode ser encarado como uma generalização do número de Reidemeister clássico e do número de Reidemeister relativo, e apresentamos alguns exemplos.

No Capítulo 4 usamos os conceitos desenvolvidos nos artigos [3] e [15], para reestabelecer caracterizações algébricas para os números de Reidemeister do complemento e relativo (segundo as novas definições) e obtivemos caracterizações

Capítulo 1

Conceitos Preliminares

Neste capítulo procuramos agrupar as definições e resultados básicos para uma maior compreensão e desenvolvimento da teoria. Como o resultado ([15], Proposição 2.1) é fundamental para o trabalho, no final deste capítulo apresentamos exemplos das diversas situações possíveis, decorrentes da aplicação do mesmo.

Definição 1.1. *Um* **espaço de recobrimento** *de X é uma terna $E \xrightarrow{p} X$ se todo $x \in X$ tem uma vizinhança aberta U tal que $p^{-1}(U)$ é união disjunta de abertos S_i de E, cada um dos quais são homeomorfos a U pela aplicação p. Um espaço de recobrimento $\widetilde{X} \xrightarrow{p} X$ é dito* **universal** *se $\widetilde{X}$ é simplesmente conexo.*

No que segue estaremos trabalhando com o recobrimento universal.

Definição 1.2. *Seja $f : X \to X$ contínua, onde X é um poliedro compacto e conexo. A aplicação $\tilde{f} : \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ é um* **levantamento** *de f se $p \circ \tilde{f} = f \circ p$.*

Dois levantamentos $\tilde{f}$ e $\tilde{f}'$ de $f : X \to X$, onde X é um poliedro compacto e conexo, são ditos **conjugados** *se, para $p : \widetilde{X} \to X$ aplicação de revestimento, existe $\gamma \in \mathcal{D}(\widetilde{X}) = \{\gamma : \widetilde{X} \to \widetilde{X} \mid p \circ \gamma = p\}$ tal que $\tilde{f}' = \gamma \circ \tilde{f} \circ \gamma^{-1}$.*

As **classes de levantamento** são as classes de equivalência dos levantamentos por conjugação, denotadas por

$$[\tilde{f}] = \{\gamma \circ \tilde{f} \circ \gamma^{-1} \mid \gamma \in \mathcal{D}(\widetilde{X})\}$$

Como o conjunto dos pontos fixos de f e de $\tilde{f}$ têm as seguintes propriedades:

(i) $Fix(f) = \bigcup_{\tilde{f}} pFix(\tilde{f})$

(ii) $pFix(\tilde{f}) = pFix\tilde{f}'$, se $[\tilde{f}] = [\tilde{f}']$

(iii) $pFix(\tilde{f}) \cap pFix\tilde{f}' = \emptyset$, se $[\tilde{f}] \neq [\tilde{f}']$ (para maiores detalhes, veja [2] e [8]),

podemos fazer a seguinte definição:

Definição 1.3. *O subconjunto $pFix(\tilde{f})$ de $Fix(f)$ denomina-se a* **classe de ponto fixo de** *f determinada pela classe de levantamento $[\tilde{f}]$.*

Além disso, podemos provar que:

Teorema 1.1. *O conjunto $Fix(f)$ se escreve como uma reunião disjunta de classes de pontos fixos.*

Demonstração: Imediata. ■

Boju Jiang em [7] considera a classe de ponto fixo de f determinada pela classe de levantamento $[\tilde{f}]$ como um par $(pFix(\tilde{f}), [\tilde{f}])$, denominado a classe de ponto fixo rotulada. Nesse sentido temos uma correspondência entre as classes de levantamento de f e as classes de pontos fixos. Isto nos leva à definição:

Definição 1.4. *O número de classes de levantamento de f (bem como o número de classes de pontos fixos, vazias ou não) denomina-se* **número de Reidemeister de f**, *denotado por $R(f)$.*

Observe que $R(f)$ é um número inteiro positivo ou infinito.

Esta definição essencialmente diz que: Dois pontos fixos de f estão na mesma classe se, e somente se, existe um levantamento $\tilde{f}$ de f que tenha pontos fixos em suas pré-imagens.

O número $R(f)$ é um invariante homotópico, pois temos que:

Teorema 1.2. *Sejam as aplicações $f_0, f_1 : X \to X$. Se existe uma homotopia $H : f_0 \simeq f_1$, então existe uma correspondência entre as classes de levantamento de f_0 e as de f_1.*

Demonstração: [7] ∎

Além disso, o número de Reidemeister tem as seguintes propriedades:

Propriedade 1.1 (Propriedade Comutativa). *Sejam X e Y poliedros compactos e conexos e $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ aplicações. Então $R(f \circ g) = R(g \circ f)$.*

Demonstração: [2] ∎

Propriedade 1.2 (Propriedade do Produto). *Sejam X e Y poliedros compactos e conexos, $f : X \to X$, $g : Y \to Y$ aplicações e $f \times g : X \times Y \to X \times Y$ definida por $(f \times g)(x, y) = (f(x), g(y))$. Então $R(f \times g) = R(f)R(g)$.*

Demonstração: [2] ∎

Propriedade 1.3. *Se X e Y são poliedros compactos e conexos, $f : X \to X$ e $g : Y \to Y$ têm o mesmo tipo de homotopia, então $R(f) = R(g)$.*

Demonstração: [2] ∎

O conceito de índice de ponto fixo é indispensável na teoria de pontos fixos.

Basicamente definimos o índice de um ponto fixo isolado para auto-aplicações do $\mathbb{R}^n$ (usando o grau de uma aplicação adequada) e, sabendo que todo poliedro pode ser mergulhado em algum $\mathbb{R}^n$, estendemos a definição de índice para as auto-aplicações de poliedros compactos. (Para maiores detalhes veja, por exemplo, [5] e [6].)

Seja uma aplicação $f : X \longrightarrow X$, onde X é um poliedro compacto e conexo. Seja $\mathbb{F}$ uma classe de pontos fixos de f. Sabemos que $\mathbb{F}$ é um conjunto de pontos fixos isolados. Assim, o índice de f em $\mathbb{F}$, denotado por $ind(f, \mathbb{F})$, é um número bem definido.

Definição 1.5. *Dizemos que* $\mathbb{F}$ *é uma* **classe de pontos fixos essencial** *de* f *se* $ind(f, \mathbb{F}) \neq 0$. *Se* $ind(f, \mathbb{F}) = 0$, *dizemos que* $\mathbb{F}$ *é uma* **classe de pontos fixos inessencial**.

Analogamente definimos:

(i) A classe de levantamento $[\tilde{f}]$ é **essencial** se $pFix(\tilde{f}) \neq \emptyset$ e é essencial;

(ii) A classe de levantamento $[\tilde{f}]$ é **inessencial** se $pFix(\tilde{f}) \neq \emptyset$ e é inessencial, ou $pFix(\tilde{f}) = \emptyset$.

Definição 1.6. *O* **número de Nielsen** *de f, denotado por $N(f)$, é o número de classes de pontos fixos essenciais de f, isto é,*

$$N(f) = \#\{pFix(\tilde{f}) \mid ind(f, pFix(\tilde{f})) \neq 0\}$$

O número de Nielsen tem as seguintes propriedades que derivam diretamente das propriedades do índice de um ponto fixo isolado ou decorrem da definição:

Teorema 1.3. *Seja $f : X \to X$ com X poliedro compacto e conexo. Então:*

(i) $N(f) \leq R(f)$;

(ii) *Cada classe de pontos fixos essenciais é um conjunto não vazio;*

(iii) $0 \leq N(f) < \infty$;

(iv) $N(f) \leq \#Fix(f)$;

(v) *Se $f_0, f_1 : X \to X$ são homotópicas, então $N(f_0) = N(f_1)$;*

(vi) $N(f) \leq \min\{\#Fix(g) \mid g \simeq f\}$;

(vii) *Seja $\mathbb{F}$ uma classe não vazia de pontos fixos de $g \circ f$. Então $f(\mathbb{F})$ é uma classe de pontos fixos de $f \circ g$ e $ind(g \circ f, \mathbb{F}) = ind(f \circ g, f(\mathbb{F}))$. Assim, $N(g \circ f) = N(f \circ g)$;*

(viii) *Sejam X e Y poliedros compactos e conexos. Se $f : X \to X$ e $g : Y \to Y$ são aplicações com o mesmo tipo de homotopia, então $N(f) = N(g)$.*

Demonstração: [8] ∎

Seja $f : X \to X$ aplicação onde X é um poliedro compacto e conexo.

Definição 1.7. *O subgrupo $J(f, x_0) \subset \pi_1(X, f(x_0))$ denomina-se* **Grupo de Jiang de** f *e é definido por*

$$J(f, x_0) = \{\alpha \in \pi_1(X, f(x_0)) \mid \exists\ H = \{h_t\} : f \simeq f, \text{com } \langle H(x_0) \rangle = \alpha\}$$

Usamos a notação $J(X) = J(id_X, x_0) \subset \pi_1(X, x_0)$.

Definição 1.8. *Um espaço X é de* **Jiang** *se $J(X) = \pi_1(X, x_0)$.*

Como exemplos de espaços de Jiang temos os espaços simplesmente conexos, os espaços generalizados de Lens $L(m; q_1, \ldots, q_n)$, os H-espaços e observamos que produtos cartesianos de espaços de Jiang também é espaço de Jiang.

Teorema 1.4 (Propriedade dos Espaços de Jiang). *Seja X um poliedro compacto e conexo. Se X é um espaço de Jiang, então quaisquer duas classes de* *pontos fixos de f têm o mesmo índice. Além disso, se $L(f) = 0$, então $N(f) = 0$; se $L(f) \neq 0$, então $N(f) = R(f) = \#Coker(1 - f_{1*})$.*

Demonstração: [8] ∎

Em [15], Xuezhi Zhao definiu a aplicação $i_{k,FPC}$ entre classes de levantamentos (ou de pontos fixos) para uma aplicação do par $f : (X, A) \to (X, A)$.

Seja $f : (X, A) \to (X, A)$ aplicação de um par de poliedros compactos (A não necessariamente conexo) e $\hat{A} = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ a reunião de todas as componentes de A que satisfazem $f(A_k) \subseteq A_k$, sendo $f_A : A \to A$ a restrição de f ao subespaço A e $f_k : A_k \to A_k$ a restrição de f ao subespaço A_k.

O espaço X e as componentes de $\hat{A}$ possuem coberturas universais dadas por

$$p : \widetilde{X} \to X \quad \text{e} \quad p_k : \widetilde{A}_k \to A_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Como $A \subset X$ não é necessariamente conexo, estendemos o conceito de recobrimento universal da maneira usual: $\tilde{A} = \bigcup \tilde{A}_i$, onde $\tilde{A}$ é o recobrimento universal da componente A_i de A.

Consideremos o seguinte morfismo i_k de f_k para f (onde $i_k : A_k \to X$ é a inclusão):

$$\begin{tikzcd} A_k \arrow[r, "f_k"] \arrow[d, "i_k"'] & A_k \arrow[d, "i_k"] \\ X \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

Para cada $k = 1, 2, \ldots, n$ consideremos um levantamento $\tilde{i}_k$ de i_k. Temos então que: Dados $\tilde{f}_k$, $\tilde{i}_k$ existe um levantamento $\tilde{f}$ de f tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} \widetilde{A}_k \arrow[r, "\tilde{f}_k"] \arrow[d, "\tilde{i}_k"'] & \widetilde{A}_k \arrow[d, "\tilde{i}_k"] \\ \widetilde{X} \arrow[r, "\tilde{f}"'] & \widetilde{X} \end{tikzcd}$$

comuta, isto é, $\tilde{i}_k \circ \tilde{f}_k = \tilde{f} \circ \tilde{i}_k$.

Assim, determinamos uma correspondência

$$\begin{array}{rccc} \tilde{i}_k : & Lift(f_k) & \longrightarrow & Lift(f) \\ & \tilde{f}_k & \longmapsto & \tilde{f} \end{array}$$

Esta correspondência independe do levantamento $\tilde{i}_k$ de i_k, e é determinada apenas por i_k, sendo denotada por

$$i_{k,FPC} : FPC(f_k) \to FPC(f)$$

onde $FPC(f)$ é a classe de ponto fixo rotulada de f.

Temos então:

Proposição 1.1. *Cada classe de ponto fixo de $f_k : A_k \to A_k$ pertence a alguma classe de ponto fixo de f. Além disso, quando $p_k Fix(\tilde{f}_k)$ é não vazia temos que*

$$p_k Fix(\tilde{f}_k) \in pFix(\tilde{f}) \iff i_{k,FPC}[\tilde{f}_k] = [\tilde{f}]$$

(Mesmo quando $p_k Fix(\tilde{f}_k) = \emptyset$ teremos uma correspondência entre as classes de levantamento).

Demonstração: [15]. ∎

A aplicação $i_{k,FPC}$ nos sugere que existem possibilidades de relações entre as classes de levantamento essenciais e inessenciais. Podemos ter classes de levantamento essenciais contidas em inessenciais e vice-versa, e todos os casos possíveis, como nos mostram os exemplos a seguir:

Exemplo 1.1. *Classe de levantamento inessencial de f que contém classe de levantamento inessencial de f_A:*

Sejam $X = S^1 \times [0,1]$, $A = S^1 \times \{0\}$, e seja

$$\begin{array}{rccc} f: & (X,A) & \longrightarrow & (X,A) \\ & (e^{i\theta},t) & \longmapsto & (e^{i\theta},t) \end{array}$$

Os levantamentos de f têm a forma $\tilde{f}_k(\theta,t) = (\theta + 2k\pi, t)$, $k \in \mathbb{Z}$, e as transformações de cobertura $\delta_\ell(\theta,t) = (\theta + 2\ell\pi, t)$, $\ell \in \mathbb{Z}$.

Portanto, temos que $R(f) = \infty$ (ou seja, $\#[\tilde{f}_k] = \infty$).

Similarmente, para o subespaço $A \subset X$, temos que $f|_A = id_A$ e os levantamentos de $f|_A$ têm a forma $\tilde{f}_{A,r}(\theta) = \theta + 2\pi r$, $r \in \mathbb{Z}$.

Então, temos que $R(f_A) = \infty$.

Como

$$L(f) = \sum_{q=0}^{1} (-1)^q \mathrm{tr}\, f_* = 0; \qquad \text{onde} \qquad f_* : H_q(X, \mathbb{Q}) \to H_q(X, \mathbb{Q})$$

e $X = S^1 \times [0, 1]$ é de Jiang, segue que $N(f) = 0$, o que implica que todas as classes de levantamento de f são inessenciais.

Similarmente, $L(f_A) = 0$ e como S^1 é de Jiang, segue $N(f_A) = 0$, e portanto, todas as classes de levantamento de f_A inessenciais.

Observe que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \{0\} & \xrightarrow{\tilde{f}_{A,r}} & \mathbb{R} \times \{0\} \\ {\scriptstyle \tilde{i}_k}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{i}_k} \\ \mathbb{R} \times [0,1] & \xrightarrow[\tilde{f}_j]{} & \mathbb{R} \times [0,1] \end{array}$$

comuta se, e somente se,

$$r = j \ \text{ e } \ \tilde{i}_k(\theta, 0) = (\theta + 2k\pi, 0), \ k \in \mathbb{Z}$$

Pela Proposição 2.1 ([15]), segue

$$[\tilde{f}_{A,r}] \subset [\tilde{f}_r]$$

ou seja, toda classe inessencial $[\tilde{f}_r]$ contém uma classe inessencial do tipo $[\tilde{f}_{A,r}]$.

Exemplo 1.2. *Classe de levantamento inessencial de f que contém classe de levantamento inessencial de f_A:*

Sejam $X = S^1 \times [-1, 1]$, $A = S^1 \times \{0\}$ e seja

$$\begin{array}{rccc} f: & (X, A) & \longrightarrow & (X, A) \\ & (e^{i\theta}, t) & \longmapsto & (e^{i\theta}, -t) \end{array}$$

As classes de levantamento de f têm a forma $\tilde{f}_k(\theta, t) = (\theta + 2k\pi, -t)$, $k \in \mathbb{Z}$, e as transformações de cobertura são dadas por $\delta_\ell(\theta, t) = (\theta + 2\ell\pi, t)$, $\ell \in \mathbb{Z}$.

Temos então que $R(f) = \infty$ e $R(f_A) = \infty$, onde $\tilde{f}_{A,r}(\theta) = \theta + 2r\pi$, $r \in \mathbb{Z}$.

Como $L(f) = 0$ e X é de Jiang, temos que $N(f) = 0$, ou seja, todas as classes $[\tilde{f}_k]$ são inessenciais.

Analogamente, para f_A, temos $L(f_A) = 0$ e S^1 é de Jiang, logo $N(f_A) = 0$, ou seja, todas as classes $[\tilde{f}_{A,r}]$ são inessenciais.

Também, neste caso, para cada $r \in \mathbb{Z}$, temos $[\tilde{f}_{A,r}] \subset [\tilde{f}_r]$, ou seja, temos $i_{r,FPC} : [\tilde{f}_{A,r}] \to [\tilde{f}_r]$ bijetora.

Exemplo 1.3. *Classe de levantamento essencial de f que contém classe de levantamento essencial de f_A e classe de levantamento essencial de f que não contém classe de levantamento de f_A:*

Sejam $X = S^1 \times [-1,1]$, $A = \{(1,0)\}$ e a aplicação do par

$$\begin{array}{rccc} f: & (X,A) & \longrightarrow & (X,A) \\ & (e^{i\theta},t) & \longmapsto & (e^{-i\theta},-t) \end{array}$$

Os levantamentos de f têm a forma $\tilde{f}_s(\theta,t) = (-\theta + 2s\pi, -t)$, $s \in \mathbb{Z}$, e as transformações de cobertura são $\delta_\ell(\theta,t) = (\theta + 2\ell\pi, t)$, $\ell \in \mathbb{Z}$.

Temos então, duas classes de levantamento $[\tilde{f}_s]$, $s = 0,1$, e assim, $R(f) = 2$.

Como $f_A = id_A = \tilde{f}_A$, segue que $R(f_A) = 1$.

Os levantamentos $\tilde{i}_k$ têm a forma $\tilde{i}_k(1,0) = (2k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Consideremos então o diagrama

$$\begin{tikzcd} \tilde{A} = A \arrow[r, "\tilde{id}_A"] \arrow[d, "\tilde{i}_k"'] & \tilde{A} = A \arrow[d, "\tilde{i}_k"] \\ \mathbb{R} \times [-1,1] \arrow[r, "\tilde{f}_i"'] & \mathbb{R} \times [-1,1] \end{tikzcd}$$

Para $i = 0$, vale que $[\widetilde{id_A}] \subset [\tilde{f}_0]$, ou seja, $\tilde{i}_{FPC}([\widetilde{id_A}]) = [\tilde{f}_0]$.

Para $i = 1$, temos $[\widetilde{id_A}] \not\subset [\tilde{f}_1]$.

Como $L(f) = 2$ implica $N(f) = R(f) = 2$, segue que as classes de levantamento $[\tilde{f}_0]$ e $[\tilde{f}_1]$ são essenciais.

Para f_A, temos também que $L(f_A) = 1$, que implica $N(f_A) = R(f_A) = 1$, pois A é de Jiang. Portanto, $[\widetilde{id}_A]$ é essencial.

Exemplo 1.4. *Classe de levantamento essencial de f que contém classe de levantamento essencial de f_A e classe de levantamento essencial de f que não contém classe de levantamento de f_A:*

Sejam $X = S^1 \times [-1, 1]$, $A = \{(-1, 0)\}$ e

$$\begin{array}{rccc} f: & (X, A) & \longrightarrow & (X, A) \\ & (e^{i\theta}, t) & \longmapsto & (e^{-i\theta}, -t) \end{array}$$

Os levantamentos de f têm a forma $\tilde{f}_s(\theta, t) = (-\theta + 2s\pi, -t)$, $s \in \mathbb{Z}$, e as transformações de cobertura são $\delta_\ell(\theta, t) = (\theta + 2\ell\pi, t)$, $\ell \in \mathbb{Z}$, $\#[\tilde{f}_s] = 2$, $\#[\tilde{f}_A] = 1$.

Como $L(f_A) = 1$ e A é de Jiang, $N(f_A) = R(f_A)$ e portanto $[\tilde{f}_A]$ é essencial.

Consideremos então o diagrama

$$\begin{tikzcd} \tilde{A} \arrow[r, "\tilde{i}_k"] \arrow[d, "p_A"'] & \tilde{X} \arrow[d, "p"] \\ A \arrow[r, "i"'] & X \end{tikzcd}$$

Temos que $\tilde{i}_k(-1,0) = (\pi + 2k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$. Por outro lado, o diagrama comuta para $k=0$ e $s=1$.

$$\begin{tikzcd} \tilde{A} \arrow[r, "\tilde{f}_A"] \arrow[d, "\tilde{i}_k"'] & \tilde{A} \arrow[d, "\tilde{i}_k"] \\ \tilde{X} \arrow[r, "\tilde{f}_s"'] & \tilde{X} \end{tikzcd}$$

Para $k=0$, vale que $[\tilde{f}_A] \subset [\tilde{f}_1]$ e a outra classe $[\tilde{f}_0]$ não contém nada.

Como no exemplo anterior, as classes $[\tilde{f}_0]$ e $[\tilde{f}_1]$ são essenciais.

Exemplo 1.5. *Classe de levantamento essencial de f que contém classe de levantamento essencial de f_A:*

Sejam $X = S^1 \times [-1,1]$, $A = \{(1,0),(-1,0)\}$ e

$$\begin{array}{rccc} f: & (X,A) & \longrightarrow & (X,A) \\ & (e^{i\theta},t) & \longmapsto & (e^{-i\theta},-t) \end{array}$$

Os levantamentos de f têm a forma $\tilde{f}_s(\theta,t) = (-\theta + 2s\pi, -t)$, $s \in \mathbb{Z}$, e as transformações de cobertura são $\delta_\ell(\theta,t) = (\theta + 2\ell\pi, t)$, $\ell \in \mathbb{Z}$.

Temos então $\#[\tilde{f}_s] = 2$, $s = 0,1$.

Para o subespaço $A = \{(1,0),(-1,0)\} = A_1 \cup A_2$, temos

$$\tilde{A} = A, \quad \tilde{f}_{A_1} = id_{A_1} \text{ e } \tilde{f}_{A_2} = id_{A_2}$$

ou seja, $\#[\tilde{f}_A] = 2$, e são classes de levantamento essenciais.

Temos também que $[\tilde{f}_0]$ e $[\tilde{f}_1]$ são essenciais e vale que

$$[\tilde{f}_{A_2}] \subset [\tilde{f}_1] \quad \text{e} \quad [\tilde{f}_{A_1}] \subset [\tilde{f}_0].$$

Exemplo 1.6. *Classe de levantamento essencial de f que contém classe de levantamento inessencial de f_A:*

Consideremos $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ e os subespaços

$$\begin{aligned} A_1 &= \{(\phi, \psi); 0 \leq \phi < 2\pi \text{ e } 0 \leq \psi \leq \pi\} \\ A_2 &= \{(\phi, \psi); 0 \leq \phi < 2\pi \text{ e } -\pi \leq \psi \leq 0\} \\ A_0 &= S^1 = A_1 \cap A_2 \end{aligned}$$

Seja $f : (X; A_1, A_2) \to (X, A_1, A_2)$ definida por $f(x) = x$ e sejam $f_j = f|_{A_j}$, $j = 1, 2$.

Temos então que f_1 e f_2 possuem apenas uma classe de ponto fixo: $\mathbb{F}_1 = A_1$ e $\mathbb{F}_2 = A_2$ e $\mathbb{F}_1$ e $\mathbb{F}_2$ são essenciais, pois $L(f_i) \neq 0$, $i = 1, 2$, e como $A_i = i = 1, 2$ é de Jiang, segue $N(f_i) = R(f_i)$, $i = 1, 2$.

Por outro lado, temos que $R(f_0) = \infty$ e $N(f_0) = 0$, pois $L(f_0) = 0$.

Pelo [12, Corolary 2.5] temos que, $(\mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2)$ é um par inessencialmente unido de classes de pontos fixos essenciais. Portanto, essas duas classes essenciais só contêm classes inessenciais.

Exemplo 1.7. *Classe de levantamento essencial de f que contém classe de levantamento essencial de f_A e classe de levantamento essencial de f que não contém classe de levantamento de f_A:*

Sejam $X = S^1$ e $A = \{-1\} \subset S^{-1}$ e $f : (X, A) \to (X, A)$ definida por $f(e^{it}) = e^{-it}$ e $f_A = id_A$.

Os levantamentos de f têm a forma $\tilde{f}_\ell(t) = -t + 2\ell\pi$; $\ell \in \mathbb{Z}$, e as transformações de cobertura são $\delta_k(t) = t + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Temos que $\#[\tilde{f}_\ell] = 2$, $\ell = 0, 1$, $\#[\tilde{f}_A] = 1$, $\tilde{f}_A = id_A$ e

$$[\tilde{f}_A] \not\subset [\tilde{f}_0] \quad \text{e} \quad [\tilde{f}_A] \subset [\tilde{f}_1].$$

Como $L(f) = 2$ e X é de Jiang, temos que $N(f) = R(f)$, ou seja, $[\tilde{f}_0]$ e $[\tilde{f}_1]$ são essenciais e $L(f_A) = 1$, logo $R(f_A) = N(f_A) = 1$ e portanto $[\tilde{f}_A]$ é essencial.

Exemplo 1.8. *Classe de levantamento inessencial de f que contém classe de levantamento essencial de f_A e classe de levantamento inessencial de f que não contém classe de levantamento de f_A:*

Seja $f : (X, A) \to (X, A)$ definida por $f(x) = x$, onde $X = S'$ e $A = \{1\}$.

Como $L(f) = 0$ e S^1 é espaço de Jiang, temos que $N(f) = 0$, ou seja, todas as classes de levantamento de f são inessenciais.

Para o subespaço $A = \{1\}$, temos

$$[\tilde{f}_A] = id; \quad \tilde{f}_A(a) = 1,$$

Portanto, $R(f_A) = N(f_A) = 1$, pois $L(f_A) = 1$ e assim $[\tilde{f}_A]$ é essencial.

Capítulo 2

Teorias de Reidemeister do Complemento e Relativa

O objetivo inicial deste trabalho era definir novos números de Reidemeister para os contextos ainda não contemplados na literatura (veja o Capítulo 3). Entretanto, após os estudos iniciais verificou-se que seria possível melhorar os resultados obtidos em [2], para os números de Reidemeister Relativo e do Complemento. Tendo como base o tratamento adotado em [3] para a caracterização algébrica do Número de Reidemeister Relativo, modificamos a partição do conjunto das classes de levantamento apresentada em [2], como veremos a seguir.

Sejam X um poliedro compacto e conexo, $A \subset X$ um subpoliedro finito (não necessariamente conexo) e $f : (X, A) \to (X, A)$ aplicação do par.

Se $A = \bigcup A_i$, onde A_i são as componentes conexas de A, definimos $f_{A_i} = f|_{A_i}$ e $f|_A = f_A : A \to A$.

Seja C_f o conjunto das classes de levantamento de f e consideremos a seguinte partição

$$C_f = E_f \cup I_f$$

onde:

◇ E_f é o conjunto das classes de levantamento essenciais, isto é, as $[\tilde{f}]$ tais que $pFix(\tilde{f})$ é essencial.

◇ I_f é o conjunto das classes de levantamento inessenciais de f, isto é, as $[\tilde{f}]$ tais que $pFix(\tilde{f})$ é inessencial ou vazia.

Da mesma maneira definimos $C_{f_{A_i}} = E_{f_{A_i}} \cup I_{f_{A_i}}$, para cada componente A_i de A e definimos:

$$C_{f_A} = \bigcup_i C_{f_{A_i}}, \quad E_{f_A} = \bigcup_i E_{f_{A_i}}, \quad I_{f_A} = \bigcup_i I_{f_{A_i}}$$

onde a reunião é feita para todo i tal que $f(A_i) \subseteq A_i$.

Em relação à partição adotada, $C_f = E_f \cup I_f$, temos que o conjunto E_f das classes de levantamento essenciais pode ser escrito como reunião disjunta de três conjuntos distintos:

$$E_f = \{E_f \supset E_{f_A}\} \dot{\cup} \{E_f \supset I_{f_A}\} \dot{\cup} \{E_f \not\supset C_{f_A}\}$$

onde:

- ◇ $\{E_f \supset E_{f_A}\}$ denota o conjunto das classes de levantamento essenciais de f que contém alguma classe essencial de f_A;

- ◇ $\{E_f \supset I_{f_A}\}$ denota o conjunto das classes de levantamento essenciais de f que só contém classes inessenciais de f_A;

- ◇ $\{E_f \not\supset C_{f_A}\}$ denota o conjunto das classes de levantamento essenciais de f que não contém nenhuma classe de f_A.

Analogamente, para o conjunto I_f, temos:

$$I_f = \{I_f \supset E_{f_A}\}\dot{\cup}\{I_f \supset I_{f_A}\}\dot{\cup}\{I_f \not\supset C_{f_A}\}$$

com as mesmas considerações anteriores.

Com essa partição do conjunto de classes de levantamento podemos então definir:

Definição 2.1. *O* **conjunto de Reidemeister** *é definido por* $r(f) = E_f \cup I_f$ *e o* **número de Reidemeister** *é* $R(f) = \#E_f + \#I_f$.

Definição 2.2. *O* **conjunto das classes de levantamento essenciais fracamente comum** *de f e f_A é definido por*

$$e(f, f_A) = \{E_f \supset C_{f_A}\} = \{E_f \supset E_{f_A}\} \cup \{E_f \supset I_{f_A}\}$$

e sua cardinalidade é denotada por $E(f, f_A) = \#\{E_f \supset C_{f_A}\}$.

O número de Nielsen do complemento definido por Zhao em [15] pode ser descrito como:

Definição 2.3. *Seja $f : (X, A) \to (X, A)$ aplicação do par. O* **número de Nielsen do complemento** *$X - A$ é definido por*

$$N(f; X - A) = N(f) - E(f, f_A)$$

ou

$$N(f; X - A) = \#E_f - \#\{E_f \supset C_{f_A}\}.$$

O número de Nielsen do complemento tem as seguintes propriedades:

Teorema 2.1. *Seja (X, A) um par de poliedros compactos com X conexo e seja $f : (X, A) \to (X, A)$ aplicação do par. Temos então:*

(1) $N(f; X - A) \geq 0$;

(2) $N(f; X - A)$ *é um invariante homotópico;*

(3) $N(f; X - A) \leq \min\{\#\mathrm{Fix}\, g / \mathrm{Fix}\, g \cap (X - A) \neq \emptyset \quad e \quad g \simeq f \ \mathrm{rel}\, (X, A)\}$;

(4) *Se* f *e* g *têm o mesmo tipo de homotopia, então* $N(f; X-A) = N(g; Y-B)$;

(5) $N(f \circ g; Y - B) = N(g \circ f; X - A)$, *onde*

$$f : (X, A) \to (X, A) \quad e \quad g : (Y, B) \to (Y, B)$$

e $f \circ g$ *e* $g \circ f$ *estão bem definidas.*

Demonstração: [15]. ■

Vamos definir os conjuntos e números de Reidemeister do complemento e provar que esta definição reproduz, neste contexto, as propriedades usuais do número de Reidemeister:

Definição 2.4. *Seja* $f : (X, A) \to (X, A)$ *aplicação do par. Os elementos de* $\{C_f \supset C_{f_A}\}$ *são chamados de* **classes de levantamento fracamente comum** *de* f *e* f_A *e denotamos este conjunto por* $r(f, f_A)$*, sendo sua cardinalidade denotada por* $R(f, f_A) = \#\{C_f \supset C_{f_A}\}$.

Definição 2.5. *Seja* $f : (X, A) \to (X, A)$ *aplicação do par, onde* (X, A) *é um par de poliedros compactos com* X *conexo. Denotamos o* **conjunto de Reidemeister do complemento** *por* $r(f; X - A)$ *e o definimos por*

$$r(f, X - A) = C_f - \{C_f \supset C_{f_A}\}.$$

Denotamos o **número de Reidemeister do complemento** *por* $R(f; X - A)$ *e o definimos como o número de classes de levantamento em* $r(f; X - A)$.

Assim,

$$R(f; X - A) = R(f) - R(f, f_A)$$

ou

$$R(f; X - A) = \#C_f - \#\{C_f \supset C_{f_A}\}.$$

Se $R(f)$ *ou* $R(f, f_A)$ *for infinito, dizemos que* $R(f; X - A)$ *é infinito.*

Na Teoria do ponto fixo, freqüentemente trabalhamos com espaços do tipo

$$\hat{A} = \bigcup_k^{\circ} A_k$$

onde A_k são as componentes conexas do subespaço A tais que $f(A_k) \subseteq A_k$.

Fazemos então a seguinte observação:

$$\hat{A} = \emptyset \Longleftrightarrow R(f_A) = 0.$$

De fato: Se $\hat{A} = \emptyset$, então, da definição de classe de levantamento, precisamos ter levantamento de auto-aplicações. Como não existe auto-aplicação, não existe levantamento e portanto $R(f_A) = 0$.

Por outro lado, se existir uma componente de A que admite f_A como auto-aplicação, temos que existe levantamento de f_A nessa componente, logo temos pelo menos uma classe de levantamento, ou seja, $R(f_A) \neq 0$.

Observação 2.1. *O número de Reidemeister do Complemento é uma generalização do número de Reidemeister $R(f)$, pois:*

Seja $f : (X, A) \to (X, A)$ aplicação do par com (X, A) par de poliedros compactos e X conexo. Então

$$R(f; X - A) = R(f), \quad \text{se} \quad \hat{A} = \emptyset \quad \text{ou} \quad A = \emptyset.$$

De fato: $\hat{A} = \emptyset$ ou $A = \emptyset \iff R(f_A) = 0 \iff C_{f_A} = \emptyset \iff \{C_f \supset C_{f_A}\} = \emptyset \iff R(f, f_A) = 0 \iff R(f; X - A) = R(f)$.

Proposição 2.1 (Limitante Superior). *Seja $f : (X, A) \to (X, A)$ aplicação do par, onde (X, A) é um par de poliedros compactos com X conexo. Então*

$$R(R; X - A) \geq N(f; X - A).$$

Demonstração: Temos

$$\begin{aligned}
R(f;X-A) &= \#r(f) - \#r(f,f_A) \\
&= \#E_f + \#I_f - \#\{E_f \supset C_{f_A}\} - \#\{I_f \supset C_{f_A}\} \\
&= \#E_f - \#\{E_f \supset C_{f_A}\} + \#I_f - \#\{I_f \supset C_{f_A}\}.
\end{aligned}$$

Como $\{I_f \supset C_{f_A}\} \subset I_f$ segue $\#I_f - \#\{I_f \supset C_{f_A}\} \geq 0$.

Assim, $R(f;X-A) \geq N(f;X-A)$. ■

O número de Reidemeister do complemento satisfaz propriedades análogas às do número de Reidemeister clássico, como veremos a seguir:

Proposição 2.2 (Propriedade de Espaço de Jiang). *Seja (X,A) um par de poliedros compactos, onde X é um espaço de Jiang conexo. Seja a aplicação do par $f:(X,A)\to(X,A)$, com $L(f)\neq 0$. Então $R(f;X-A)=N(f;X-A)$.*

Demonstração: O espaço X é de Jiang e $L(f)\neq 0$, logo $N(f)=R(f)$. Daí,

$$r(f,f_A) = \{C_f \supset C_{f_A}\} = \{E_f \supset C_{f_A}\} = e(f,f_A).$$

Portanto,

$$R(f; X - A) = R(f) - R(f, f_A) = N(f) - E(f, f_A) = N(f; X - A).$$

■

Proposição 2.3 (Propriedade do Produto). *Sejam (X, A) e (Y, B) pares de espaços, onde X, Y, A, B são poliedros compactos e X e Y são espaços conexos. Sejam $f : (X, A) \to (X, A)$ e $g : (Y, B) \to (Y, B)$ aplicações dos pares. Então*

$$R(f \times g; (X \times Y) - (A \times B)) = R(f) \cdot R(g) - R(f, f_A) \cdot R(g, g_B).$$

Demonstração: Por definição

$$R(f \times g; (X \times Y) - (A \times B)) = R(f \times g) - R(f \times g, f_A \times g_B).$$

Como $R(f \times g) = R(f) \cdot R(g)$, basta mostrar que

$$R(f, f_A) \cdot R(g, g_B) = R(f \times g, f_A \times g_B),$$

onde

$$\begin{cases} R(f \times g, f_A \times g_B) = \#\{C_{(f \times g)} \supset C_{(f_A \times g_B)}\} \\ R(f, f_A) = \#\{C_f \supset C_{f_A}\} \\ R(g, g_B) = \#\{C_g \supset C_{g_B}\} \end{cases}$$

Existe uma correspondência entre os conjuntos

$$r(f, f_A) \times r(g, g_B) \xleftrightarrow{\varphi} r(f \times g, f_A \times g_B),$$

ou seja,

$$\{C_f \supset C_{f_A}\} \times \{C_g \supset C_{g_B}\} \xleftrightarrow{\varphi} \{C_{(f\times g)} \supset C_{(f_A \times g_B)}\}.$$

Seja $[\tilde{f}] \in \{C_f \supset C_{f_A}\}$. Então existe $[\tilde{f}_{A_k}]$, tal que $i_{k,FPC}[\tilde{f}_{A_k}] = [\tilde{f}]$ e seja $[\tilde{g}] \in \{C_g \supset C_{g_B}\}$. Logo, existe $[\tilde{g}_{B_\ell}]$ tal que $i_{\ell,FPC}[\tilde{g}_{B_\ell}] = [\tilde{g}]$.

Considere agora o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
([\tilde{f}], [\tilde{g}]) \arrow[r, "\varphi"] & {[\tilde{f} \times \tilde{g}] = [\tilde{f}] \times [\tilde{g}]} \\
([\tilde{f}_{A_k}], [\tilde{g}_{B_\ell}]) \arrow[u, "i_{k,FPC} \times i_{\ell,FPC}"'] \arrow[r, "\varphi"'] & {[\tilde{f}_{A_k} \times \tilde{g}_{B_\ell}] = [\tilde{f}_{A_k}] \times [\tilde{g}_{B_\ell}]} \arrow[u, dashed, "I"']
\end{tikzcd}$$

Definimos então

$$I = i_{kl,FPC} = (i_{k,FPC}, i_{\ell,FPC}).$$

Assim, o diagrama comuta e temos

$$R(f, f_A) \cdot R(g, g_B) = R(f \times g, f_A \times g_B).$$

Portanto

$$R(f \times g; (X \times Y) - (A \times B)) = R(f) \cdot R(g) - R(f, f_A) \cdot R(g, g_B).$$

∎

Proposição 2.4 (Invariância Homotópica). *Sejam* $f, g : (X, A) \to (X, A)$ *aplicações do par, onde* (X, A) *é um par de poliedros compactos com* X *conexo. Se* f *é homotópica a* g *(rel. a* A*), então*

$$R(f; X - A) = R(g; X - A).$$

Demonstração: Por definição, temos que:

$$\begin{cases} R(f; X - A) = R(f) - R(f, f_A) \\ R(g; X - A) = R(g) - R(g, g_A). \end{cases}$$

Da teoria clássica de Nielsen, sabemos que se $f \simeq g$ então $R(f) = R(g)$.

Basta mostrar então que $R(f, f_A) = R(g, g_A)$, onde

$$\begin{cases} R(f, f_A) = \#r(f, f_A) = \#\{E_f \supset C_{f_A}\} + \#\{I_f \supset C_{f_A}\} \\ R(g, g_A) = \#r(g, g_A) = \#\{E_g \supset C_{g_A}\} + \#\{I_g \supset C_{g_A}\} \end{cases}$$

Em [15], Xuezhi Zhao mostrou que

$$E(f, f_A) = \#\{E_f \supset C_{f_A}\} = \#\{E_g \supset C_{g_A}\} = E(g, g_A). \qquad (*)$$

Analogamente, definimos

$$I(f, f_A) = \#\{I_f \supset C_{f_A}\} \quad \text{e} \quad I(g, g_A) = \#\{I_g \supset C_{g_A}\}$$

Temos que

$$I(f, f_A) = I(g, g_A)$$

A demonstração é análoga a (*).

Em outras palavras, existe uma correspondência entre $I(f, f_A)$ e $I(g, g_A)$.

Portanto

$$R(f; X - A) = R(g; X - A).$$

∎

Helga Schirmer, em [11], descreveu de forma mais precisa o comportamento do número mínimo de pontos fixos de funções de pares de espaços, $MF[f; X, A]$. Como o número de Nielsen usual, $N(f)$, não é um bom limitante inferior para $MF[f; X, A]$, ela definiu o número de Nielsen relativo, $N(f; X, A)$, como segue:

Definição 2.6. *Seja (X, A) um par de poliedros compactos, com X conexo. Se $f : (X, A) \to (X, A)$ é uma aplicação do par, então o* **número de Nielsen**

relativo $N(f;X,A)$ *é definido como*

$$N(f;X,A) = N(f) + N(f_A) - N(f,f_A)$$

onde

$$N(f,f_A) = \#\{E_f \supset E_{f_A}\}.$$

Teorema 2.2 (Propriedades do número de Nielsen relativo).

(a) $0 \neq N(f;X,A) < \infty$;

(b) $N(f;X,A) \leq \#\mathrm{Fix}\,(f;X,A)$;

(c) *Se* (X,A) *é um par de poliedros compactos e se são homotópicas as aplicações* $f_0, f_1 : (X,A) \to (X,A)$, *então* $N(f_0;X,A) = N(f_1;X,A)$;

(d) $N(f;X,A) \leq \min\{\#\mathrm{Fix}\,g \mid g \simeq f \text{ rel}\,A\}$ *(Nielsen relativo é um limitante inferior para o número de pontos fixos na classe de aplicações homotópicas a* f rel A*)*;

(e) (Comutatividade)*: Sejam* (X,A) *e* (Y,B) *pares de poliedros compactos e as aplicações* $f : (X,A) \to (Y,B)$ *e* $g : (Y,B) \to (X,A)$. *Então tem-se* $N(g \circ f;X,A) = N(f \circ g;Y,B)$;

(f) (Invariante por tipo de homotopia): *Sejam* (X, A) *e* (Y, B) *pares de poliedros compactos. Se as aplicações* $f : (X, A) \to (X, A)$ *e* $g : (Y, B) \to (Y, B)$ *têm o mesmo tipo de homotopia, então* $N(f; X, A) = N(g; Y, B)$*;*

Demonstração: [11]. ∎

Definição 2.7. *Seja* $f : (X, A) \to (X, A)$ *aplicação do par. Definimos*

$$R(f_A) = \#r(f_A) = \sum_i R(f_{A_i}).$$

Observamos que:

$$R(f_A) \geq N(f_A) = \sum_i N(f_{A_i}).$$

Definição 2.8. *O* **conjunto de Reidemeister Relativo**, *denotado por* $r(f; X, A)$ *para* $f : (X, A) \to (X, A)$ *é definido como*

$$r(f; X, A) = r(f_A) \cup r(f) - r(f, f_A)$$

onde $r(f) = C_f$, $r(f_A) = C_{f_A}$ e $r(f, f_A) = \{C_f \supset C_{f_A}\}$.

Com respeito à partição adotada, $C_f = E_f \cup I_f$, temos

$$r(f; X, A) = C_f \cup C_{f_A} - \{C_f \supset C_{f_A}\}.$$

Então, o número relativo de Reidemeister relativo é definido como

$$R(f; X, A) = R(f_A) + R(f) - R(f, f_A).$$

Se algum dos números $R(f)$, $R(f_A)$ ou $R(f, f_A)$ é infinito, definimos então $R(f; X, A) = \infty$. Caso contrário, temos $R(f; X, A) < \infty$.

Com essa definição obtemos propriedades análogas às do número de Reidemeister, como veremos a seguir:

Proposição 2.5 (Limitante Superior). *Seja $f : (X, A) \to (X, A)$ aplicação do par, onde X é poliedro compacto e conexo (finito). Então*

$$R(f; X, A) \geq N(f; X, A).$$

Demonstração: Com relação à partição $C_f = E_f \cup I_f$, temos que o conjunto de Nielsen relativo se escreve como $n(f; X, A) = E_f \cup E_{f_A} - \{E_f \supset E_{f_A}\}$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned} r(f; X, A) &= C_f \cup C_{f_A} - \{C_f \supset C_{f_A}\} \\ &= E_f \cup I_f \cup E_{f_A} \cup I_{f_A} - (\{E_f \supset E_{f_A}\} \cup \{E_f \supset I_{f_A}\} \cup \{I_f \supset C_{f_A}\}) \end{aligned}$$

o que implica

$$\#r(f; X, A) = \#n(f; X, A) + \#I_f - \#\{I_f \supset C_{f_A}\} + \#I_{f_A} - \#\{E_f \supset I_{f_A}\}$$

Como $\#I_f - \#\{I_f \supset C_{f_A}\} \geq 0$ e $\#I_{f_A} - \#\{E_f \supset I_{f_A}\} \geq 0$ (visto que $\#\{E_f \supset I_{f_A}\} \leq \#I_{f_A}$) temos

$$R(f; X, A) \geq N(f; X, A).$$

■

Observação 2.2. *Como* $N(f, f_A) = \#\{E_f \supset E_{f_A}\}$, *da definição de* $R(f, f_A)$ *segue* $R(f, f_A) \geq N(f, f_A)$; *o que torna impossível demonstrar a* Proposição 2.5 *usando as partes de* $R(f; X, A)$.

Observação 2.3. *O número de Reidemeister Relativo é uma generalização do número de Reidemeister clássico* $R(f)$:

Seja $f : (X, A) \to (X, A)$ *aplicação do par, onde* X *é um poliedro compacto e conexo e* $A \subset X$ *é um subpoliedro. Então*

$$R(f; X, A) = R(f)$$

se $A = \emptyset$, *ou* $\hat{A} = \emptyset$, *ou* $A = X$.

De fato: Se $A = \emptyset$ ou $\hat{A} = \emptyset$ então $R(f_A) = 0$ e $R(f, f_A) = 0$, e segue que $R(f; X, A) = R(f)$.

Se $A = X$ então $R(f_A) = R(f)$ e $R(f, f_A) = \#\{C_f \supset C_{f_A}\} = \#C_f = R(f)$.

Portanto, $R(f;X,A) = R(f) + R(f) - R(f) = R(f)$.

Proposição 2.6. *Seja $f:(X,A) \to (X,A)$ aplicação do par, com (X,A) par de poliedros compactos, X simplesmente conexo e $A \neq \emptyset$, ou $\hat{A} \neq \emptyset$. Então*

$$R(f;X,A) = R(f_A).$$

Demonstração: Como X é simplesmente conexo, temos $R(f) = 1 = R(f,f_A)$. Assim,

$$R(f;X,A) = R(f) + R(f_A) - R(f,f_A) = 1 + R(f_A) - 1 = R(f_A).$$

■

Proposição 2.7. *Seja $f:(X,A) \to (X,A)$ aplicação do par, com (X,A) par de poliedros compactos, X conexo e A simplesmente conexo. Então*

$$R(f;X,A) = R(f).$$

Demonstração: Como A é simplesmente conexo, $R(f_A) = 1 = R(f,f_A)$. Assim,

$$R(f;X,A) = R(f) + R(f_A) - R(f,f_A) = R(f) + 1 - 1 = R(f).$$

■

Proposição 2.8 (Propriedade de Espaço de Jiang). *Seja (X, A) um par de poliedros compactos, com X conexo, onde X e cada componente A_i de A são espaços de Jiang. Se $L(f) \neq 0$ e $L(f_{A_i}) \neq 0$, $\forall\, i$, tal que $f(A_i) \subset A_i$, então*

$$R(f; X, A) = N(f; X, A).$$

Demonstração: Como X é um espaço de Jiang, temos que $L(f) \neq 0$ implica $R(f) = N(f)$, isto é, $C_f = E_f$.

Similarmente, para as componentes A_i's: $L(f_{A_i}) \neq 0$ e A_i é espaço de Jiang, e temos portanto, $R(f_{A_i}) = N(f_{A_i})$, isto é, $C_{f_{A_i}} = Ef_{A_i}$, o que implica $C_{f_A} = Ef_A$.

Assim $\{C_f \supset C_{f_A}\} = \{E_f \supset E_{f_A}\}$ e segue que

$$R(f; X, A) = N(f; X, A).$$

■

Proposição 2.9 (Propriedade do Produto). *Sejam (X, A) e (Y, B) pares de espaços, onde X, Y, A, B são poliedros compactos, X e Y conexos. Sejam as funções $f : (X, A) \to (X, A)$ e $g : (Y, B) \to (Y, B)$. Então*

$$R(f \times g; X \times Y, A \times B) = R(f_A) \cdot R(g_B) + R(f) \cdot R(g) - R(f, f_A) \cdot R(g, g_B).$$

Demonstração: Segue da Propriedade 1.2 (Propriedade do Produto), juntamente com o fato $R(f_A \times g_B) = R(f_A).R(g_B)$. ∎

Proposição 2.10 (Invariância Homotópica). *Sejam $f, g : (X, A) \to (X, A)$ aplicações do par, onde (X, A) é um par de poliedros compactos com X conexo. Se f é homotópica a g (rel. a A), então*

$$R(f; X, A) = R(g; X, A).$$

Demonstração: Da teoria clássica temos que $R(f) = R(g)$ e $R(f_A) = R(g_A)$. Pela Proposição 2.4, temos $R(f, f_A) = R(g, g_A)$. Assim,

$$R(f; X, A) = R(g; X, A).$$

∎

Capítulo 3

O Número de Reidemeister da Tríade

Uma tríade (X, A_1, A_2) consiste de um espaço X que é a reunião de dois subespaços A_1 e A_2. Observe que uma tríade (X, A_1, A_2) se reduz a um par (X, A_1), se $A_2 \subset A_1$ ou (X, A_2), se $A_1 \subset A_2$.

Assim, uma aplicação de tríade $f : (X, A_1, A_2) \to (X, A_1, A_2)$ generaliza as aplicações dos pares.

Helga Schirmer em [12] definiu um novo número de Nielsen, denominado o número de Nielsen da tríade. Além das propriedades usuais para o número de Nielsen, ela demonstrou que para espaços que podem ser descritos como tríades, este novo número é melhor que o número de Nielsen Relativo para ser usado como um limitante inferior do número de pontos fixos na classe de aplicações homotópicas a $f : X \to X$. Se os espaços em questão obedecem certas condições, não muito limitantes, ela mostrou que o número de Nielsen da tríade realiza o número mínimo de pontos fixos na classe das aplicações homotópicas a f.

Neste capítulo definimos o número de Reidemeister da tríade, fundamentado na definição do número de Nielsen da tríade. Veremos que, devido ao seu enfoque ligado aos levantamentos, tal número de Reidemeister é um limitante superior para o respectivo número de Nielsen, usando apenas os números de Reidemeister Relativo, do Complemento, o clássico $R(f)$ e argumentos combinatórios. Outras propriedades usuais do número de Reidemeister da tríade são demonstrados no final deste capítulo, bem como alguns exemplos.

Sejam $X = A_1 \cup A_2$, $A_0 = A_1 \cap A_2$ e $f : (X, A_1, A_2) \to (X, A_1, A_2)$ aplicação da tríade. Então, ficam determinadas as aplicações $f_j : A_j \to A_j$, $j = 0, 1, 2$, onde $f_j = f|_{A_j}$.

Definição 3.1. *Sejam $f : (X, A_1, A_2) \to (X, A_1, A_2)$ uma aplicação da tríade e $p_j\mathrm{Fix}(\tilde{f}_j)$ uma classe de pontos fixos de $f_j : A_j \to A_j$, para $j = 1, 2$. O par de classes de pontos fixos $(p_1\mathrm{Fix}(\tilde{f}_1), p_2\mathrm{Fix}(\tilde{f}_2))$ denomina-se um par* **inessencialmente unido** *(de classes de pontos fixos) de f_1 e f_2 se as seguintes condições forem satisfeitas:*

(i) *Existem uma componente* $A_{0,k}$ *de* A_0 *e uma classe inessencial de pontos fixos* $p_{0,k}\mathrm{Fix}(\tilde{f}_{0,k})$ *de* $f_{0,k} : A_{0,k} \to A_{0,k}$ *que está contida em* $p_1\mathrm{Fix}(\tilde{f}_1)$ *e* $p_2\mathrm{Fix}(\tilde{f}_2)$ *(isto é:* $i_{k,j,FPC}[\tilde{f}_{0,k}] = [\tilde{f}_j]$*, para* $j = 1, 2$*).*

(ii) *Nenhuma classe essencial de pontos fixos* $p_{0,k}\mathrm{Fix}(\tilde{f}_{0,k})$ *de qualquer aplicação* $f_{0,k} : A_{0,k} \to A_{0,k}$ *está contida em* $p_1\mathrm{Fix}(\tilde{f}_1)$ *e* $p_2\mathrm{Fix}(\tilde{f}_2)$.

O par $(p_1\mathrm{Fix}(\tilde{f}_1), p_2\mathrm{Fix}(\tilde{f}_2))$ é chamado um **par inessencialmente unido de classes essenciais de pontos fixos de** f_1 e f_2 se for um par inessencialmente unido e ambas as classes $p_1\mathrm{Fix}(\tilde{f}_1)$ e $p_2\mathrm{Fix}(\tilde{f}_2)$ forem essenciais. Denotamos o número de tais pares de classes por $IJ(f_1, f_2)$.

Como o par $IJ(f_1, f_2)$ possui boas propriedades, como invariância homotópica, comutatividade, invariância por tipo homotópico, Helga Schirmer definiu o número de Nielsen da tríade assim:

$$N(f; A_1 \cup A_2) = N(f_1, A_1, A_0) + N(f_2, A_2, A_0) - N(f_0) - IJ(f_1, f_2).$$

O novo número de Nielsen também possui as mesmas propriedades clássicas, e toda aplicação $f : (X, A_1, A_2) \to (X, A_1, A_2)$ possui, no mínimo, $N(f; A_1 \cup A_2)$ pontos fixos.

Neste capítulo, definimos o número de Reidemeister da tríade em função de outros números de Reidemeister descritos no capítulo 2.

Este número possui também muitas propriedades como veremos a seguir.

Definição 3.2. *Seja a tríade (X, A_1, A_2), onde $X = A_1 \cup A_2$ é um poliedro compacto e conexo, A_i, $i = 1, 2$, são subpoliedros e $A_0 = A_1 \cap A_2$. O* **número de Reidemeister da tríade** *é definido por*

$$R(f; A_1 \cup A_2) = R(f_1; A_1, A_0) + R(f_2; A_2, A_0) - R(f_0)$$

A definição acima pode ser reescrita assim:

$$R(f; A_1 \cup A_2) = R(f_1; A_1 - A_0) + R(f_2; A_2, A_0)$$

ou

$$R(f; A_1 \cup A_2) = R(f_1; A_1, A_0) + R(f_2; A_2 - A_0)$$

ou

$$R(f; A_1 \cup A_2) = R(f_1; A_1 - A_0) + R(f_2; A_2 - A_0) + R(f_0).$$

3.2 Propriedades do número de Reidemeister da tríade

Seja $f : (X, A_1, A_2) \to (X, A_1, A_2)$ aplicação da tríade. O **número de Reidemeister da tríade** possui as seguintes propriedades:

Teorema 3.1 (Limitante Superior). *O número de Reidemeister da tríade é um limitante superior para o número de Nielsen da tríade, isto é:*

$$R(f; A_1 \cup A_2) \geq N(f; A_1 \cup A_2).$$

Demonstração: Em relação à partição adotada temos, para $i = 1, 2$:

$$\begin{aligned} N(f_i; A_i, A_0) &= \#E_{f_i} + \#E_{f_0} - \#\{E_{f_i} \supset E_{f_o}\} \\ R(f_i; A_i, A_0) &= \#C_{f_i} + \#C_{f_0} - \#\{C_{f_i} \supset C_{f_o}\} \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} R(f; A_1 \cup A_2) - N(f; A_1 \cup A_2) &= \#\{I_{f_1} \not\supset C_{f_o}\} + \#\{I_{f_2} \not\supset C_{f_o}\} + \#I_{f_0} \\ &\quad -\#\{E_{f_1} \supset I_{f_o}\} - \#\{E_{f_2} \supset I_{f_o}\} + IJ. \end{aligned}$$

Vamos provar que $\varepsilon = \#I_{f_0} - \#\{E_{f_1} \supset I_{f_o}\} - \#\{E_{f_2} \supset I_{f_o}\} + IJ \geq 0$.

Para tanto, basta vermos como os elementos de I_{f_o} se comportam em relação aos outros conjuntos em questão, uma vez que individualmente cada um deles tem cardinalidade menor ou igual à de I_{f_0}.

Observamos que toda classe de I_{f_0} é uma $[\tilde{f}_{0,k}]$, para algum k, é inessencial e é levada pelas aplicações

$$i^1_{k,FPC} : [\tilde{f}_{0,k}] \longmapsto [\tilde{f}_1], \quad \text{para alguma classe de levantamento de } \tilde{f}_1$$

e

$$i^2_{k,FPC} : [\tilde{f}_{0,k}] \longmapsto [\tilde{f}_2], \quad \text{para alguma classe de levantamento de } \tilde{f}_2$$

Analisando os casos possíveis, vemos que cada classe de I_{f_0} só contribui com 0 ou 1 à soma ε:

- Se $i^1_{k,FPC}([\tilde{f}_{0,k}]) \in I_{f_1}$ e $i^2_{k,FPC}([\tilde{f}_{0,k}]) \in I_{f_2}$, então $[\tilde{f}_{0,k}]$ só é contada em I_{f_0} e não afeta os outros termos de ε. Contribuição: 1.

- Se $i^1_{k,FPC}([\tilde{f}_{0,k}]) \in I_{f_1}$ e $i^2_{k,FPC}([\tilde{f}_{0,k}]) \in E_{f_2}$, então $i^2_{k,FPC}([\tilde{f}_{0,k}])$ poderá ser contada em $\{E_{f_2} \supset I_{f_o}\}$, se a classe $i^2_{k,FPC}([\tilde{f}_{0,k}]) \in E_{f_2}$ não foi contada antes e se não estiver na imagem $i^2_{j,FPC}$ de alguma $[\tilde{f}_{0,j}] \in E_{f_0}$, para algum j (neste último caso $i^2_{k,FPC}([\tilde{f}_{0,k}]) \in E_{f_2}$ seria contada em $\{E_{f_2} \supset E_{f_o}\}$). Contribuição: 0 ou 1.

- Se $i^1_{k,FPC}([\tilde{f}_{0,k}]) \in E_{f_1}$ e $i^2_{k,FPC}([\tilde{f}_{0,k}]) \in I_{f_2}$, a conclusão é análoga ao item anterior.

- Se $i^1_{k,FPC}([\tilde{f}_{0,k}]) \in E_{f_1}$ e $i^2_{k,FPC}([\tilde{f}_{0,k}]) \in E_{f_2}$, temos que $[\tilde{f}_{0,k}]$ será contada em I_{f_0}. Podemos subdividir este caso em diferentes subcasos:

  - Se $i^1_{k,FPC}([\tilde{f}_{0,k}])$ for contada em $\{E_{f_1} \supset I_{f_o}\}$ e $i^2_{k,FPC}([\tilde{f}_{0,k}])$ for contada em $\{E_{f_2} \supset I_{f_o}\}$), segue da partição adotada que $i^1_{k,FPC}([\tilde{f}_{0,k}]) \not\supset E_{f_0}$ e $i^2_{k,FPC}([\tilde{f}_{0,k}]) \not\supset E_{f_0}$, o que implica que $\left(i^1_{k,FPC}([\tilde{f}_{0,k}]), i^2_{k,FPC}([\tilde{f}_{0,k}])\right)$ é um par essencialmente unido e portanto é contado em IJ. Assim, contamos uma classe em I_{f_0}, uma classe em $\{E_{f_1} \supset I_{f_o}\}$, uma classe em $\{E_{f_2} \supset I_{f_o}\}$ e mais um par IJ, totalizando zero.

  - Os outros casos são análogos aos anteriores, com contribuição 0 ou 1 à soma.

Portanto, temos que

$$R(f; A_1 \cup A_2) \geq N(f; A_1 \cup A_2)$$

■

Proposição 3.1 (Invariância Homotópica). *Sejam as aplicações da tríade* $f, g : (X, A_1, A_2) \to (X, A_1, A_2)$. *Se* f *é homotópica a* g *por uma homotopia que restrita ao par* (A_1, A_0) *é rel.* A_0, *e que restrita ao par* (A_2, A_0) *é rel.* A_0, *então*

$$R(f; A_1 \cup A_2) = R(g; A_1 \cup A_2).$$

Demonstração: Por definição, temos:

$$\begin{aligned} R(f; A_1 \cup A_2) &= R(f_1; A_1, A_0) + R(f_2; A_2, A_0) - R(f_0), \\ R(g; A_1 \cup A_2) &= R(g_1; A_1, A_0) + R(g_2; A_2, A_0) - R(g_0). \end{aligned}$$

Como os números de Reidemeister e Reidemeister Relativo são invariantes homotópicos, temos $R(f_j; A_j, A_0) = R(g_j; A_j, A_0)$, $j = 1, 2$, e

$$R(f_0) = R(g_0) \Rightarrow R(f; A_1 \cup A_2) = R(g; A_1 \cup A_2).$$

∎

Observação 3.1. *O número de Reidemeister da tríade* $R(f; A_1 \cup A_2)$ *generaliza o número de Reidemeister clássico,* $R(f)$, *e o número de Reidemeister Relativo, como veremos a seguir:*

(i) *Se* $A_0 = \emptyset$ *ou se* $\hat{A}_0 = \emptyset$, *então* $R(f; A_1 \cup A_2) = R(f_1) + R(f_2)$.

De fato: *Pela* Observação 2.3, *temos que* $R(f_i; A_i, A_0) = R(f_i)$, $i = 1, 2$, *e pelos comentários anteriores à* Observação 2.1, $R(f_0) = 0$. *Assim,*

$$R(f; A_1 \cup A_2) = R(f_1; A_1, A_0) + R(f_2; A_2, A_0) - R(f_0) = R(f_1) + R(f_2).$$

(ii) *Se* $A_1 = A_2$, *então* $R(f; A_1 \cup A_2) = R(f)$.

De fato: *Como* $A_1 = A_2$, $f_1 = f_2 = f = f_0$ *e* $R(f_1) = R(f_2) = R(f_0) = R(f)$, *pela* Observação 2.3, *temos* $R(f_i; A_i, A_0) = R(f_i) = R(f)$, $i = 1, 2$. *Assim*

$$\begin{aligned} R(f; A_1 \cup A_2) &= R(f_1; A_1, A_0) + R(f_2; A_2, A_0) - R(f_0) \\ &= R(f) + R(f) - R(f_0) = R(f). \end{aligned}$$

(iii) *Se* $A_2 \subset A_1$, *então* $R(f; A_1 \cup A_2) = R(f_1; A_1, A_0)$.

De fato: *Como* $A_2 \subset A_1$, *segue* $A_0 = A_1 \cap A_2 = A_2$ *e* $f_2 = f|_{A_2} = f_0$. *Então:*

$$R(f; A_1 \cup A_2) = R(f_1; A_1, A_0) + R(f_0; A_0, A_0) - R(f_0).$$

Mas $R(f_0; A_0, A_0) = R(f_0) + R(f_0) - R(f_0, f_0) = R(f_0)$. *Portanto*

$$R(f; A_1 \cup A_2) = R(f_1; A_1, A_0).$$

Analogamente, se $A_1 \subset A_2$, então

$$R(f; A_1 \cup A_2) = R(f_2; A_2, A_0).$$

Uma propriedade importante é obtida quando trabalhamos com espaços topológicos $X = A_1 \cup A_2$, com A_j simplesmente conexo, $j = 1, 2$, e $A_1 \cap A_2$ conexo por caminhos. O teorema de Van-Kampen nos diz então que X é simplesmente conexo.

Então, se $f : X \to X$ (X nas condições anteriores), sabemos da teoria clássica de Nielsen que $R(f_j) = 1$, $j = 1, 2$, e o cálculo do número de Reidemeister da tríade $R(f; A_1 \cup A_2)$ se reduz ao cálculo do número de classes de levantamento de $f|_{A_0} = f_0$.

Proposição 3.2. *Se $f : (X, A_1, A_2) \to (X, A_1, A_2)$ é aplicação da tríade com A_j simplesmente conexo, $j = 1, 2$, e $A_0 = A_1 \cap A_2$, $A_0 \neq \emptyset$ (ou $\hat{A}_0 \neq \emptyset$), então*

$$R(f; A_1 \cup A_2) = R(f_0).$$

Demonstração: Pela Proposição 2.6, temos que: $R(f_i; A_i, A_0) = R(f_0)$, $i = 1, 2$.

Portanto,

$$R(f;A_1 \cup A_2) = R(f_0) + R(f_0) - R(f_0) = R(f_0).$$

■

Seja $f : (X, A_1, A_2) \longrightarrow (X, A_1, A_2)$ aplicação da tríade, onde $A_0 = A_1 \cap A_2$.

Temos então:

Proposição 3.3. *Se A_0 é simplemente conexo, então*

$$R(f;A_1 \cup A_2) = R(f_1) + R(f_2) - 1.$$

Demonstração: Como A_0 é simplesmente conexo, $R(f_0) = 1$ e pela Proposição 2.7 temos que $R(f_i; A_i, A_0) = R(f_i)$, $i = 1, 2$. Assim,

$$R(f;A_1 \cup A_2) = R(f_1) + R(f_2) - 1.$$

■

Proposição 3.4. (i) *Se A_1 é simplesmente conexo, então*

$$R(f;A_1 \cup A_2) = R(f_2; A_2, A_0);$$

(ii) *Se A_2 é simplesmente conexo, então*

$$R(f;A_1 \cup A_2) = R(f_1; A_1, A_0).$$

Demonstração:

(i) Se A_1 é simplesmente conexo, pela Proposição 2.6 segue $R(f_1; A_1, A_0) = R(f_0)$.

Assim,

$$R(f; A_1 \cup A_2) = R(f_0) + R(f_2; A_2, A_0) - R(f_0) = R(f_2; A_2, A_0)$$

(ii) Demonstração análoga. ■

Proposição 3.5 (Espaços de Jiang). *Seja* $f : (X, A_1, A_2) \to (X, A_1, A_2)$ *aplicação da tríade. Se* A_i *é espaço de Jiang e* $L(f_i) \neq 0$*,* $i = 0, 1, 2$*, então*

$$R(f; A_1 \cup A_2) = N(f; A_1 \cup A_2).$$

Demonstração: Como A_i é o espaço de Jiang e $L(f_i) \neq 0$, $i = 0, 1, 2$, temos que $R(f_j; A_j, A_0) = N(f_j; A_j, A_0)$, $j = 1, 2$, e $R(f_0) = N(f_0)$, o que implica que $IJ(f_1, f_2) = 0$. Logo, $R(f; A_1 \cup A_2) = N(f; A_1 \cup A_2)$. ■

3.3 Exemplos

O cálculo do número de Reidemeister da tríade (ou do número de Nielsen da tríade) se reduz, como vimos, ao cálculo de outros números de Reidemeister (ou de Nielsen) já descritos na Teoria do Ponto Fixo de Nielsen.

A seguir, apresentamos alguns exemplos geométricos usando o número de Reidemeister da tríade.

Exemplo 3.1 (O Duplo de uma variedade). Seja M uma variedade compacta, conexa, triangulável e com fronteira ∂M e seja $DM = M_+ \cup M_-$ o seu duplo e $f : (M, \partial M) \to (M, \partial M)$ a aplicação do par. A aplicação

$$Df : (DM, M_+, M_-) \to (DM, M_+, M_-)$$

é uma aplicação da tríade.

Calculemos $R(Df; M_+ \cup M_-)$.

Seja $Df_1 = Df|_{M_+}$ e $Df_2 = Df|_{M_-}$. Como M_+ é homeomorfo a M_-, temos que $Df_1 = Df_2$.

Assim,

$$\begin{aligned} R(Df; M_+ \cup M_-) &= 2R(Df_1) - 2R(Df_1, Df_0) + R(Df_0) \\ &= R(Df_1; M_+, \partial M) + R(Df_1; M_+ - \partial M). \end{aligned}$$

Exemplo 3.2 (A Suspensão de um Poliedro). Seja X um poliedro compacto e sejam X_+ e X_- cones sobre X, $SX = X_+ \cup X_-$ a suspensão de X. A aplicação

$f : X \to X$ nos define a aplicação da tríade

$$Sf : (SX, X_+ \cup X_-) \to (SX, X_+ \cup X_-).$$

Por definição

$$R(Sf; X_+ \cup X_-) = R(Sf_1, X_+, X_0) + R(Sf_2, X_-, X_0) - R(Sf_0)$$

onde $Sf_1 = Sf|_{X_+}$, $Sf_2 = Sf|_{X_-}$ e $Sf_0 = Sf|_X = f$.

Como X_+ e X_- são simplesmente conexos, temos pela Proposição 2.6 que

$$R(Sf_1, X_+, X_0) = R(Sf_0) \text{ e } R(Sf_2, X_-, X_0) = R(Sf_0).$$

Assim,

$$\begin{aligned} R(Sf; X_+ \cup X_-) &= R(Sf_1, X_+, X_0) + R(Sf_2, X_-, X_0) - R(S_{f_0}) \\ &= R(Sf_0) + R(Sf_0) - R(Sf_0) = R(Sf_0) = R(f). \end{aligned}$$

Exemplo 3.3 (Colando p-alças). Seja $M = M_1 \cup H$ a variedade obtida de M_1, onde M_1 é uma n-variedade compacta, conexa, triangulável ($n \geq 2$), com fronteira, colando em sua fronteira uma p-alça H, homeomorfa à imagem de $I^p \times I^q$, $p + q = n$. Temos então: (M, M_1, H) é uma tríade, com $M_0 = M_1 \cap H =$

$(\partial I^p) \times I^q$ e $f : (M, M_1, H) \to (M, M_1, H)$ é aplicação de tríade, com $f_0 = f|_{M_0}$.

Como $H \cong I^p \times I^q$, com $p + q = n \geq 2$ que é 1-conexo temos que $R(f_2) = 1$.

Para obter a expressão de $R(f; M_1 \cup H)$ dividimos nos seguintes casos:

1. Se $p = 1$:

   Temos $M_0 = \{p, q\} \times I^{n-1} \cong B^{n-1} \dot{\cup} B^{n-1}$ = união disjunta de duas $(n-1)$-bolas.

   (a) Se $\hat{M}_0 = \emptyset$ então pela Observação 3.1(i) temos $R(f; M_1 \cup H) = R(f_1) + R(f_2) = R(f_1) + 1$.

   (b) Se $\hat{M}_0 = I^{n-1}$ então pela Proposição 3.3 temos $R(f; M_1 \cup H) = R(f_1) + R(f_2) - 1 = R(f_1)$.

   (c) Se $\hat{M}_0 = M_0$ então temos que $R(f_0) = 2$ e da definição obtemos $R(f; M_1 \cup H) = R(f_1; M_1 - M_0) + R(f_2; M_2, M_0) = R(f_1; M_1 - M_0) + 2$.

2. Se $p = 2$:

   (a) Se $n = 2$ então $M_0 = S^1 \times \{p, q\} \cong S^1 \dot{\cup} S^1$ = união disjunta de dois S^1.

i. Se $\hat{M}_0 = \emptyset$ então pela Observação 3.1(i) temos $R(f; M_1 \cup H) = R(f_1) + R(f_2) = R(f_1) + 1$.

ii. Se $\hat{M}_0 = S^1$ ou $\hat{M}_0 = M_0$ então obtemos da definição $R(f; M_1 \cup H) = R(f_1; M_1 - M_0) + R(f_2; M_2, M_0) = R(f_1; M_1 - M_0) + R(f_0)$.

(b) Se $n \geq 3$ então $M_0 = S^1 \times I^{n-2}$ então obtemos da definição $R(f; M_1 \cup H) = R(f_1; M_1 - M_0) + R(f_2; M_2, M_0) = R(f_1; M_1 - M_0) + R(f_0)$.

3. Se $p \geq 3$ temos que ∂I^p é simplesmente conexo, logo M_0 é simplesmente conexo e pela Proposição 3.3 temos $R(f; M_1 \cup H) = R(f_1) + R(f_2) - 1 = R(f_1)$.

Exemplo 3.4 (Somas Conexas). Consideremos o caso $M = M_1 \# M_2$ a soma conexa de duas n-variedades compactas, conexas e trianguláveis, (para $n \geq 3$), isto é, M é obtida removendo-se o interior $IntB$ de uma n-bola B de M_j, $j = 1, 2$, e identificando as fronteiras das variedades resultantes com o "buraco" $M_j^0 = M_j - IntB$.

Portanto, $A_0 = M_1^0 \cap M_2^0$ é uma $(n-1)$-esfera.

Seja $f : (M, M_1^0, M_2^0) \to (M, M_1^0, M_2^0)$ a aplicação da tríade, onde $f|_{M_1^0} = f_1$,

$f|_{M_2^0} = f_2$.

Observamos que neste caso, como $n \geq 3$ e $M_0 \approx S^{n-1}$, segue que M_0 é simplesmente conexo. Daí, pela Proposição 3.3 temos

$$R(f; M_1^0 \cup M_2^0) = R(f_1) + R(f_2) - 1.$$

Exemplo 3.5. Sejam D^2 o disco unitário, $\partial D^2 = S^1$. Consideremos

$$\begin{array}{rccc} f: & (D^2, S^1) & \longrightarrow & (D^2, S^1) \\ & (re^{i\theta}, e^{it}) & \longmapsto & (re^{3i\theta}, e^{3it}) \end{array}$$

com $0 \leq r \leq 1$, e seja DM o duplo de D^2. Temos que

$$R(Df; M_+ \cup M_-) = 2$$

pois $R(Df_0) = 2$, $R(Df_j) = 1$ e $R(Df_j, Df_0) = 1$, $j = 1, 2$.

Como apresentado em [12], $N(Df; M_+ \cup M_-) = 1$, portanto, o número de Reidemeister da tríade pode ser uma boa aproximação para o número de Nielsen da tríade quando a dimensão do espaço é 2.

Exemplo 3.6. Sejam $X = S^2$ a esfera unitária do $\mathbb{R}^3$ e

$$A_1 = \{(\phi, \psi) : 0 \leq \phi < 2\pi, 0 \leq \psi \leq \pi\}$$

$$A_2 = \{(\phi, \psi) : 0 \leq \phi < 2\pi, -\pi \leq \psi \leq 0\}$$

Se $f : (X, A_1, A_2) \to (X, A_1, A_2)$ é a suspensão de uma aplicação f_0 de grau $d \neq 1$, temos então que $R(f; A_1 \cup A_2) = R(f_0) = |1 - d|$.

Em [12], Helga Schirmer calculou o número $N(f; A_1 \cup A_2)$ que é exatamente igual ao número de Reidemeister $R(f; A_1 \cup A_2)$.

Capítulo 4

Caracterização Algébrica do Número de Reidemeister da Tríade

Neste capítulo descrevemos caracterizações algébricas do número de Reidemeister da tríade. Na primeira parte apresentamos o conceito de φ-classe de conjugação, com bibliografia básica [7] e aplicações à teoria Relativa de Nielsen, através da definição de uma caracterização algébrica para o número de Reidemeister Relativo (ver [3]; para aplicações em pares fibrados que preservam fibras, ver [4]). Utilizando as definições dadas em [3], obtemos uma primeira caracterização algébrica para $R(f; A_1 \cup A_2)$. Na segunda parte, seguindo os passos de Zhao, que em [15] obteve fórmulas algébricas para $N(f; X, A)$ e $N(f; X - A)$ no caso de X e $A_k \subset \hat{A}$ serem espaços de Jiang, obtemos uma outra formulação algébrica para o número de Reidemeister da tríade.

4.1 Formulação Algébrica por φ-conjugação

Sejam X um poliedro compacto e conexo, $A \subset X$ um subpoliedro finito (não necessariamente compacto), $f : (X, A) \to (X, A)$ aplicação do par e $\eta_X : \widetilde{X} \to X$ a aplicação de revestimento de X.

Seja $\tilde{f}$ um levantamento de f. Então, para cada $\sigma \in Cov(\eta_X) \cong \pi_1(X)$, existe um único elemento $\varphi(\sigma) \in \pi_1(X)$ tal que

$$\tilde{f}\sigma = \varphi(\sigma)\tilde{f}$$

A correspondência

$$\sigma \overset{\varphi}{\longmapsto} \varphi(\sigma)$$

é um homomorfismo de grupos fundamentais.

Similarmente, para cada componente A_k de A, tal que $f(A_k) \subseteq A_k$, temos que para cada $\sigma \in Cov(\eta_{A_k}) \cong \pi_1(A_k)$ e $\tilde{f}_k$ levantamento de $f_k = f|_{A_k}$, existe um único elemento $\varphi_k(\sigma) \in \pi_1(A_k)$ tal que

$$\tilde{f}_k\sigma = \varphi_k(\sigma)\tilde{f}_k$$

e a correspondência $\sigma \longmapsto \varphi_k(\sigma)$ é um homomorfismo de grupos fundamentais.

Como cada levantamento de f é da forma $\alpha\tilde{f}$ ($\alpha \in Cov(\eta_X)$ e $\tilde{f}$ fixado), temos:

$$[\alpha\tilde{f}] = [\beta\tilde{f}]; \quad \alpha,\ \beta \in Cov(\eta_X) \iff \beta\tilde{f} = \sigma\alpha\tilde{f}\sigma^{-1} = \sigma\alpha\varphi(\sigma^{-1})\tilde{f}$$

e portanto $\beta = \sigma\alpha\varphi(\sigma^{-1})$.

Dizemos então que os elementos $\alpha, \beta \in Cov(\eta_X) \cong \pi_1(X)$ são **φ-conjugados** e denotaremos por $[\sigma]$ a φ-classe de conjugação de $\sigma \in \pi_1(X)$.

Pelas observações anteriores podemos então enunciar o seguinte teorema:

Teorema 4.1. *As classes de levantamento de f estão em correspondência injetora com as φ-classes de conjugação de $\pi_1(X)$.*

Demonstração: [7]. ∎

Consideremos a seguinte ação (à esquerda) em $\pi_1(X)$:

$$\begin{aligned} \pi_1(X) \times \pi_1(X) &\longrightarrow \pi_1(X) \\ (\alpha, \sigma) &\longmapsto \alpha \cdot \sigma = \alpha\sigma\varphi(\alpha^{-1}) \end{aligned}$$

Temos então que: a órbita de σ é o conjunto $\{\alpha\sigma\varphi(\alpha^{-1}); \alpha \in \pi_1(X)\}$.

Assim, β pertence à órbita de $\sigma \iff \beta = \alpha\sigma\varphi(\alpha^{-1}) \iff [\beta\tilde{f}] = [\sigma\tilde{f}]$.

Definição 4.1. *Definimos o* **conjunto das classes de Reidemeister** $\mathcal{R}(\varphi, \pi)$ *por:*

$$\mathcal{R}(\varphi, \pi_1) = \frac{\pi_1(X)}{\sim}$$

onde $\sim$ *é a relação obtida por* φ*-conjugação (ou o conjunto das órbitas da ação por* φ*-conjugação).*

Ao juntarmos a Definição 4.1 com as observações anteriores, podemos dizer que:

$$R(f) = \#\mathcal{R}(\varphi, \pi_1)$$

Similarmente, para cada componente A_k, tal que $f(A_k) \subseteq A_k$, temos o conjunto das classes de Reidemeister $\mathcal{R}(\varphi_k, \pi_1(A_k))$ e $R(f_k) = \#\mathcal{R}(\varphi_k, \pi_1(A_k))$.

Definimos então

$$\mathcal{R}(\varphi_A, \pi_1(A)) = \bigcup_k \mathcal{R}(\varphi_k, \pi_1(A_k))$$

e

$$R(f_A) = \#\mathcal{R}(\varphi_A, \pi_1(A)) = \sum_k \#\mathcal{R}(\varphi_k, \pi_1(A_k)).$$

Podemos então reescrever a Proposição 2.1 ([15]) assim:

Proposição 4.1. *Qualquer classe de levantamento de* $f_k : A_k \to A_k$ *"pertence" a (ou está contida em) alguma classe de levantamento de* $f : X \to X$, *no sentido que* $i_{k,FPC}[\tilde{f}_k] = [\tilde{f}]$, *para algum* $\tilde{f}$. *Quando* $\eta_{A_k} Fix(\tilde{f}_k)$ *não é vazia, temos que:*

$\eta_{A_k} Fix(\tilde{f}_k)$ *é um subconjunto de* $\eta_X Fix(\tilde{f}) \iff i_{k,FPC}[\tilde{f}_k] = [\tilde{f}]$.

Demonstração: [15] ∎

Considere agora a inclusão $i_k : A_k \to X$. Temos um homomorfismo induzido

$$i_{k_\#} : \pi_1(A_k) \to \pi_1(X)$$

Como existem bijeções entre $r(f)$ e $\mathcal{R}(\varphi, \pi_1)$, e entre $r(f_k)$ e $\mathcal{R}(\varphi_k, \pi_1(A_k))$; isomorfismos entre $\pi_1(A_k) \cong Cov(\eta_{A_k})$ e entre $\pi_1(X) \cong Cov(\eta_X)$, e o conjunto $r(f, f_A) = \{C_f \supset C_{f_A}\}$ é formado pelos levantamentos $\tilde{f}$ de f que estão na imagem dos levantamentos $\tilde{f}_k$ de f_k, para algum k, através da correspondência:

$$i_{k,FPC}[\tilde{f}_k] = [\tilde{f}]$$

podemos considerar o seguinte diagrama e definir $\hat{\imath}_k$ como a aplicação que faz o diagrama

$$\begin{tikzcd}
r(f_k) \arrow[r, "i_{k,FPC}"] \arrow[d] & r(f) \arrow[d] \\
\mathcal{R}(\varphi_k, \pi_1(A_k)) \arrow[r, "\hat{i}_k"'] & \mathcal{R}(\varphi, \pi_1(X))
\end{tikzcd}$$

comutar, isto é:

$$\hat{i}_k[\alpha] = [i_{k_\#}\alpha]$$

Pode-se então definir (veja [3]) o seguinte conjunto:

$$\mathcal{R}(\varphi, \varphi_A) = \{[\alpha] \in \mathcal{R}(\varphi, \pi_1(X)) \mid [\alpha] = \hat{i}_k[\beta], \text{para alguma } [\beta] \in \mathcal{R}(\varphi_k, \pi_1(A_k))\}.$$

Assim, temos uma formulação algébrica para $r(f, f_A)$: é o conjunto das classes de laços em $\pi_1(X)$ pela φ, que estão na imagem da classe de laços de $\pi_1(A)$ pela φ_A, através da aplicação $\hat{i}_k$, para algum k.

Deste modo, podemos reescrever o **número de Reidemeister Relativo**

$$R(f; X, A) = R(f) + R(f_A) - R(f, f_A)$$

e o **número de Reidemeister do Complemento**

$$R(f; X - A) = R(f) - R(f, f_A)$$

em função das **classes de Reidemeister**:

$$
\begin{aligned}
R(f; X, A) &= \#\mathcal{R}(\varphi, \pi_1(X)) + \sum_k \#\mathcal{R}(\varphi_k, \pi_1(A_k)) - \#\mathcal{R}(\varphi, \varphi_A) \\
R(f; X - A) &= \#\mathcal{R}(\varphi, \pi_1(X)) - \#\mathcal{R}(\varphi, \varphi_A).
\end{aligned}
$$

Consideremos agora a tríade (X, A_1, A_2) e $f : (X, A_1, A_2) \to (X, A_1, A_2)$ a aplicação da tríade.

Em vista das considerações anteriores e pela definição de $R(f; A_1 \cup A_2)$, temos o seguinte resultado:

Proposição 4.2. *Seja a aplicação da tríade $f : (X, A_1, A_2) \to (X, A_1, A_2)$. Então o número de Reidemeister da tríade tem a seguinte expressão em função das cardinalidades das classes de Reidemeister:*

$$
\begin{aligned}
R(f; A_1 \cup A_2) &= \#\mathcal{R}(\varphi_1, \pi_1(A_1)) + \#\mathcal{R}(\varphi_2, \pi_1(A_2)) + \\
&\quad + \sum_k \#\mathcal{R}(\varphi_k, \pi_1(A_k)) - \#\mathcal{R}(\varphi_1, \varphi_0) - \#\mathcal{R}(\varphi_2, \varphi_0)
\end{aligned}
$$

Demonstração: Pelas considerações anteriores, temos:

$$R(f_1; A_1, A_0) = \#\mathcal{R}(\varphi_1, \pi_1(A_1)) + \sum_k \#\mathcal{R}(\varphi_k, \pi_1(A_k)) - \#\mathcal{R}(\varphi_1, \varphi_0)$$

$$R(f_2; A_2, A_0) = \#\mathcal{R}(\varphi_2, \pi_1(A_2)) + \sum_k \#\mathcal{R}(\varphi_k, \pi_1(A_k)) - \#\mathcal{R}(\varphi_2, \varphi_0)$$

$$R(f_0) = \sum_k \#\mathcal{R}(\varphi_k, \pi_1(A_k))$$

Assim,

$$\begin{aligned} R(f; A_1 \cup A_2) &= \#\mathcal{R}(\varphi_1, \pi_1(A_1)) + \#\mathcal{R}(\varphi_2, \pi_1(A_2)) + \sum_k \#\mathcal{R}(\varphi_k, \pi_1(A_k)) \\ &\quad -\#\mathcal{R}(\varphi_1, \varphi_0) - \#\mathcal{R}(\varphi_2, \varphi_0). \end{aligned}$$

■

4.2 Formulação Algébrica para Espaços de Jiang

Em [15] Zhao obteve fórmulas algébricas para $N(f; X - A)$ e $N(f; X, A)$ no caso de X e $A_k \subset \hat{A}$ serem espaços de Jiang. Como o número de Reidemeister da tríade $R(f; A_1 \cup A_2)$ é definido em termos de $R(f_i; A_i, A_0)$, $i = 1, 2$, e $R(f_0)$, ou em termos de $R(f_i; A_i - A_0)$, $i = 1, 2$, e $R(f_0)$, e vale a igualdade $R(f_i; A_i, A_0) = N(f_i; A_i, A_0)$ ou $R(f_i; A_i - A_0) = N(f_i; A_i - A_0)$, $i = 1, 2$, quando $L(f_i) \neq 0$, obtemos então uma outra formulação algébrica para $R(f; A_1 \cup A_2)$ fundamentada nas fórmulas obtidas por Zhao.

Seja $f : (X, A) \to (X, A)$ aplicação do par, onde (X, A) é um par de poliedros compactos. Para cada componente $A_k \subset \hat{A}$, escolhemos um ponto base $a_k \in A_k$ e um ponto base $x_0 \in X$. Como os pontos do revestimento universal de A_k e X

estão em correspondência com as classes de caminhos em A_k e X que partem de a_k e x_0, podemos considerar então os caminhos constantes:

$$\tilde{a}_k = \langle e_k \rangle \in \tilde{A}_k \quad \text{e} \quad \tilde{x}_0 = \langle e \rangle \in \tilde{X}$$

Sejam w_k o caminho em A_k, com $w_k(0) = a_k$, $w_k(1) = f_k(a_k)$, para cada k, e w_0 o caminho em X, com $w_0(0) = x_0$, $w_0(1) = f(x_0)$. Então existem levantamentos únicos $\tilde{f}_k$ e $\tilde{f}$ tais que:

$$\tilde{f}_k(\langle e_k \rangle) = \langle w_k \rangle \in \tilde{A}_k \quad \text{e} \quad \tilde{f} = (\langle e \rangle) = \langle w_0 \rangle \in \tilde{X}$$

Escolhendo os levantamentos $\tilde{f}_k$ e $\tilde{f}$ como referenciais, denotemos por:

$\nabla(f_k; a_k, w_k)$: o conjunto das $f_{k,\pi}$- classes de conjugação em $\pi_1(A_k, a_k)$.

$\nabla(f; x_0, w_0)$: o conjunto das f_π- classes de conjugação em $\pi_1(X, x_0)$.

Temos então o seguinte Lema:

Lema 4.1. *Existem correspondências injetoras*

$$\rho_k : \nabla(f_k; a_k, w_k) \ \longrightarrow \ FPC(f_k)$$

$$\rho : \nabla(f; x_0, w_0) \ \longrightarrow \ FPC(f)$$

definidas por

$$\begin{aligned}\rho_k([\alpha]) &= [\alpha \circ \tilde{f}_k] \\ \rho([\beta]) &= [\beta \circ \tilde{f}]\end{aligned}$$

Demonstração: [7]. ∎

Para cada k, em [15] Zhao definiu

$$\gamma_{k,\pi} : \pi_1(A_k, a_k) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$$

por

$$\gamma_{k,\pi}(\langle\alpha\rangle) = (\tilde{i}_{k,\pi}\langle\alpha\rangle)\langle\gamma_k\rangle$$

onde

$$\langle\gamma_k\rangle = \langle u_k w_k (f \circ u_k)^{-1} w_0^{-1}\rangle$$

Então, $\gamma_{k,\pi}$ induz uma transformação

$$\gamma_k : \nabla(f_k; a_k, w_k) \longrightarrow \nabla(f; x_0, w_0)$$

e γ_k independe da escolha do caminho u_k, onde u_k é um caminho de x_0 até a_k.

Zhao considerou então o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
\nabla(f_k; a_k, w_k) \arrow[r, "\rho_k"] \arrow[d, "\gamma_k"'] & FPC(f_k) \arrow[d, "i_{k,FPC}"] \\
\nabla(f; x_0, w_0) \arrow[r, "\rho"'] & FPC(f)
\end{tikzcd}$$

isto é:

$$[\langle\alpha\rangle] \in \nabla(f_k; a_k, w_k) \Longrightarrow i_{k,FPC} \circ \rho_k[\langle\alpha\rangle] = \rho \circ \gamma_k[\langle\alpha\rangle]$$

ou seja:

$[\langle\alpha\rangle]$ se corresponde a uma classe de ponto fixo fracamente comum $\Longleftrightarrow$ está na imagem de algum γ_k ([15], Teorema 4.4).

Para cada k, consideremos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(A_k, a_k) \arrow[r, "\theta_k"] \arrow[d, "i_{k,\pi}"'] & H_1(A_k) \arrow[r, "\eta_k"] \arrow[d, "i_{k*}"] & Coker(1 - f_{k*}) \arrow[d, "i_{k*}"] \\
\pi_1(X, a_k) \arrow[r, "\theta"'] & H_1(X) \arrow[r, "\eta"'] & Coker(1 - f_*)
\end{tikzcd}$$

onde θ_k e θ são os abelianizadores, η_k e η as projeções naturais.

Pelo Lema 4.5 ([15]) o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
\nabla(f_k; a_k, w_k) \arrow[r, "\tau_k"] \arrow[d, "\gamma_k"'] & Coker(1 - f_{k*}) \arrow[d, "u_k"] \\
\nabla(f; x_0, w_0) \arrow[r, "\tau"'] & Coker(1 - f_*)
\end{tikzcd}$$

é comutativo, onde $\tau = \eta \circ \theta$, $\tau_k = \eta_k \circ \theta_k$ e $u_k(c) = i_{k*}(c) + \eta \circ \theta\langle \gamma_k \rangle$.

A seguir, usamos a formulação algébrica dos números $N(f; X-A)$ e $N(f; X, A)$ estabelecida por Zhao para caracterizar algebricamente o número de Reidemeister da tríade $R(f; A_1 \cup A_2)$.

Proposição 4.3. *Seja $f : (X, A_1, A_2) \to (X, A_1, A_2)$ aplicação da tríade e suponhamos que A_1 e A_2 são espaços de Jiang, com $L(f_i) \neq 0$, $i = 1, 2$, $A_0 = A_1 \cap A_2$, $\hat{A}_0 = \bigcup_{k=1}^{n} A_{0,k}$, onde $A_{0,k}$ é espaço de Jiang com $\prod_{k=1}^{m} L(f_{0,k}) \neq 0$ e $L(f_{0,q}) = 0$, para $m < q \leq n$. Então*

$$
\begin{aligned}
R(f; A_1 \cup A_2) &= \#Coker(1 - f_{1*}) + \#Coker(1 - f_{2*}) + \\
&+ \sum_{k=1}^{m} Coker(1 - f_{0,k_*}) - 2\# \left\{ \bigcup_{k=1}^{m} u_k Coker(1 - f_{0,k_*}) \right\}
\end{aligned}
$$

Demonstração: Pelo Teorema 4.7 ([15]), para $i = 1, 2$, temos que

$$
\begin{aligned}
R(f_i; A_i, A_0) = N(f_i; A_i, A_0) &= \#Coker(1 - f_{i*}) + \sum_{k=1}^{m} \#Coker(1 - f_{i,k_*}) - \\
&- \# \left\{ \bigcup_{k=1}^{m} u_k Coker(1 - f_{i,k_*}) \right\} ,
\end{aligned}
$$

mas $f_{i,k_*} = f_{0,k_*}$, para $i = 1, 2$ e temos que

$$R(f_0) = N(f_0) = \sum_{k=1}^{m} N(f_{0,k}) = \sum_{k=1}^{m} \#Coker(1 - f_{0,k_*}).$$

Então:

$$
\begin{aligned}
R(f;A_1,A_2) \;&=\; \#Coker(1-f_{1*}) \;+\; \#Coker(1-f_{2*}) \;+ \\
&+\; \sum_{k=1}^{m} \#Coker(1-f_{0,k_*}) \;-\; 2\#\left\{ \bigcup_{k=1}^{m} u_k Coker(1-f_{0,k_*}) \right\} \quad .
\end{aligned}
$$

■

Referências Bibliográficas

[1] BROWN, R.F.; *The Lefschetz Fixed Point Theorem*, Scott, Foresman and Co., Glenview, IL, 1971.

[2] CARDONA, F.S.P.; *Reidemeister Theory for Maps of Pairs*, Doctoral Dissertation, UCLA, 1996.

[3] CARDONA, F.S.P.; WONG, P.N.S.; *On the Computation of the Relative Nielsen Number*, Topology Appl., vol.116 (2001), 29-41.

[4] CARDONA, F.S.P.; WONG, P.N.S.; *The Relative Reidemeister Numbers of Fiber Map Pairs*, Topological Methods in Nonlinear Analysis, Journal of the Juliusz Schauder Center, vol.21 (2003), 131-145.

[5] DOLD, A.; *Lectures on Algebraic Topology*, Springer Verlag, 1972.

[6] GONÇALVES, D.L.; KÜHL, J.C.S.; *Teoria do Índice*, 14° Colóquio Brasileiro de Matemática, 1983.

[7] JIANG, B.; *Lectures on Nielsen Fixed Point Theory*, Comtemporary Mathematics, vol.14, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1983.

[8] KIANG, T.; *The Theory of Fixed Point Classes*, Springer Verlag (Science Press), 1980.

[9] LYRA, C.B.; *Grupo Fundamental e Revestimentos*, IME-USP, São Paulo: 1969.

[10] MASSEY, W.S.; *Algebraic Topology: An Introduction*, Graduate Texts in Mathematic, vol.56, Springer Verlag, 1967.

[11] SCHIRMER, H.; *A Relative Nielsen Number*, Pacific J. Math. 122 (1986), pp. 459-473.

[12] SCHIRMER, H.; *Nielsen Numbers for Maps of Triades*, Topology and its Applications, vol.52, North-Holland, (1993), 181-202.

[13] SCHIRMER, H.; *A Survey of Relative Nielsen Fixed Point Theory*, Contemp. Math. 152 (1993), pp. 291-309.

[14] VICK, J.W.; *Homology Theory - An introduction to Algebraic Topology*, Academic Press, New York: 1973.

[15] ZHAO, X. Z.; *A Relative Nielsen Number for the Complement*, Topological Fixed Point Theory and its Applications (Proceedings. Tianjin 1988), Lectures Notes in Math, vol. 1411, Springer Verlag, 1989, pp. 189-199.