Extensões de submodelos elementares por *forcing*

Marcelo Dias Passos

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO DE DOUTOR
EM
CIÊNCIAS

Área de Concentração: Matemática
Orientadora: Profa.Dra. Lúcia Renato Junqueira

São Paulo, março de 2007.

Extensões de submodelos elementares por *forcing*

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por Marcelo Dias Passos e aprovada pela Comissão Julgadora.

São Paulo, 14 de março de 2007.

Banca Examinadora:

Profa.Dra. Lúcia Renato Junqueira (orientadora) - IME-USP

Prof.Dr. Ricardo Bianconi - IME-USP

Profa.Dra. Ítala Maria Loffredo D'Ottaviano - UNICAMP

Prof.Dr. Samuel Gomes da Silva - UFBA

Prof.Dr. Marcelo Esteban Coniglio - UNICAMP

Aos meus pais Manoel e Ivone,
ao meu irmão Flávio,
às minhas irmãs Milena e Sílvia,
às minhas sobrinhas Manuela, Fernanda e a-que-não-tem-nome-ainda
e ao meu afilhado e sobrinho Kael.

Agradecimentos

Agradeço à minha orientadora pela paciência em todos esses anos de trabalho, pelos incentivo, apoio, confiança e grande amizade.

À banca examinadora que, com suas sugestões e correções, tornaram a versão final desta tese melhor redigida e mais completa.

Aos amigos membros do grupo de pesquisa de Topologia Geral e Conjuntística pelas atenção e sugestões sempre valiosas.

À minha família pelos constantes apoio e cobrança. Eles bem me conhecem e sabem que, em momentos, eu preciso de alguém me "buzinando" nos ouvidos!

Agradeço à especialíssima Lucia Satie pela amizade, pelo apoio, pelo incentivo, pela cobrança, pelo Palio emprestado nos dias de funilaria do meu Corsa, pelas caronas, pelas viagens à Mococa, pelos dorayakis, doces, chocolates, biscoitos, pelos alunos particulares que me arrumou e por tantas outras coisas que nem lembro agora.

Aos amigos Luís, Rúben, Joel, Eric e Said pela presença constante.

Aos amigos do IME-USP! Tantos, são tantos! Alguns vieram e foram, e eu continuei por aqui! Alguns foram ou são alunos, alguns, funcionários, outros são professores; uns tornaram-se professores. Eu os considero todos, sempre, com muito carinho!

Resumo

Se M é um submodelo elementar de H_θ, onde θ é um cardinal regular, $\mathbb{P} \in M$ é uma ordem parcial e G é um $\mathbb{P}$-genérico, tomamos, na extensão por *forcing* $\mathbf{V}[G]$, o conjunto $M[G] = \{\tau_G : \tau$ é um $\mathbb{P}$-nome$\}$. Este é um submodelo elementar de $H_\theta^{\mathbf{V}[G]}$, ou seja, de "H_θ" da extensão. Neste trabalho analisamos algumas propriedades para submodelos elementares, por exemplo, quando estas são preservadas numa extensão por *forcing*. Damos especial atenção à propriedade de ser ω-covering e investigamos a existência de submodelos elementares ω-covering com uma determinada cardinalidade. Finalmente estudamos a preservação de algumas propriedades topológicas por *forcing*.

Abstract

If M is an elementary submodel of H_θ (for a regular cardinal θ), $\mathbb{P} \in M$ is a parcial order, and G is a $\mathbb{P}$-generic filter, we can take the set $M[G] = \{\tau_G : \tau$ é um $\mathbb{P}$-nome$\}$, in the extension by *forcing* $\mathbf{V}[G]$. We have that it is an elementary submodel of $H_\theta^{\mathbf{V}[G]}$, i.e., the "H_θ" of the extension. On this work we analyze some properties for elementary submodels, for example, when these are preserved on an extension by *forcing*. For instance, we focus on the ω-covering property and we investigate the existence of ω-covering elementary submodels of some given cardinality. Later we study the possibility to preserve some topological properties by *forcing*.

Sumário

Introdução

Desde sua criação, por Paul J. Cohen em [Coh63], a técnica de *forcing* tem sido usada como ferramenta para demonstrar a consistência e a independência de certos resultados, bem como para obter novos princípios combinatórios. Em ambos os casos, encontram-se inúmeras possibilidades de aplicações à Topologia Geral e à Teoria dos Conjuntos.

Uma vez que numa extensão por *forcing* podemos ganhar novos subconjuntos de um conjunto do modelo inicial, e com isso teremos novas uniões, em geral uma topologia do modelo inicial deixará de ser uma topologia na extensão. Entretanto, a topologia inicial é base para uma nova topologia na extensão. É natural, então, considerar este novo espaço topológico e nos questionarmos quais propriedades topológicas são preservadas, quais são eventualmente ganhas ou perdidas. Muito já foi publicado sobre essa discussão e podemos citar [DTW90a], [DTW90b], [LaB92], [FLS96] e [GJT98]. No livro *Open Problems in Topology* ([vMR90]), por exemplo, encontramos um parágrafo ([Wat90]) somente com perguntas em aberto acerca de preservação de propriedades topológicas por *forcing*.

Desde os anos 80 o uso dos submodelos elementares se difundiu como ferramenta em Topologia Geral e em Teoria dos Conjuntos para demonstrar teoremas, bem como para construir importantes exemplos de espaços topológicos. Alguns desses usos podem ser vistos em [Dow88a], [FW95] e [Bal96]. Neste último, Zoltan Balogh construiu, em **ZFC**, um espaço de Dowker com a cardinalidade do *continuum*. O único exemplo obtido por Mary Ellen Rudin ([Rud84]), até então, tinha cardinalidade muito maior.

Em [Dow88a] e em [Dow95], por exemplo, encontramos espaços topológicos e submodelos elementares "interagindo" com algum tipo de propósito específico. Lúcia Junqueira e Frank Tall, em [Jun96] e em [JT98], olham esta interação na forma de uma construção de espaço topológico via uma operação topológica envolvendo um espaço topológico e um submodelo elementar. Se $\langle X, \mathcal{T} \rangle \in M \prec H_\theta$ é um espaço topológico, podemos definir uma topologia em $X \cap M$, tendo como base o conjunto $\{U \cap M : U \in \mathcal{T} \cap M\}$. Chamemos $X \cap M$, com esta topologia, de X_M. Esta topologia é, em geral, menos fina que a topologia de subespaço induzida por $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ sobre $X \cap M$. Tem início, então, um estudo mais sistemático desse espaço e de suas propriedades, bem como das possíveis "heranças" entre X e X_M. Além de [JT98], podemos citar [KT00], [Tal00a], [Jun00], [Tal00b], [JT03] e [Kun03].

Esta tese teve seu "germe" no estudo dessas duas ferramentas em conjunto. Essa conjunção faz sentido pois, se $\mathbb{P} \in M \prec H_\theta$ é uma ordem parcial, construímos $M[G] = \{\tau_G : \tau \in M$ é $\mathbb{P}$-nome$\}$ e podemos provar que $M[G] \prec H_\theta[G] = H_\theta^{\mathbf{V}[G]}$. Estas proposições se encontram demonstradas no livro *Proper Forcing* ([She82]). Outros resultados e usos de $M[G]$ encontram-se dispersos na literatura como, por exemplo, em [Dow88b], [Dow89] e [Dow92]. Nós nos propusemos iniciar um estudo mais cuidadoso da conjunção entre essas duas ferramentas.

Várias questões acabaram por cruzar nosso caminho e as respostas - algumas delas parciais - vieram formar esta tese de doutorado. São elas:

1. O que acontece entre M e $M[G]$?
2. Numa extensão por $\mathbb{P}$, temos dois espaços topológicos: X_M e $X_{M[G]}$. Como estes se relacionam?
3. Se M é enumeravelmente fechado ou ω-covering, o que pode-se esperar de $M[G]$? Depende de hipóteses sobre $\mathbb{P}$ uma possível herança de uma das propriedades?
4. E as propriedades por si sós? Como é um submodelo elementar ω-covering? E um enumeravelmente fechado?

No primeiro capítulo apresentamos alguns dos resultados básicos conhecidos - e alguns não tão conhecidos - sobre *forcing* e sobre submodelos elementares. Nós nos concentramos naqueles que mais usamos ao longo do trabalho e tivemos por intenção fixar a notação, sempre usual e encontrada em [Kun80], [Jec03] e [Eng89].

No segundo capítulo apresentamos uma simplificação da demonstração de Saharon Shelah (em [She82]) para "$M[G] \prec H_\theta[G] = H_\theta^{\mathbf{V}[G]}$", e a demonstração de "$M[G] \cap \mathbf{V} = M$". Ele, nesse livro, chega à definição de *forcing próprio* e para tanto define condições $(\mathbb{P}, M)$-genéricas. Nós as destrinchamos, analisando a igualdade mais "globalmente". Acabamos por tratar da transitividade de M e definimos o cardinal $\mathrm{td}(M)$.

No capítulo seguinte estudamos a propriedade "ω-covering" mais atentamente. Classificamos os "menores" submodelos elementares ω-covering e verificamos que, a partir de $\aleph_\omega$, nem todo cardinal pode ser cardinalidade de um submodelo elementar ω-covering. Por exemplo, assumindo a existência de determinados *large cardinals*, podemos não ter submodelos elementares ω-covering de cardinalidade $\aleph_{\omega+1}$. Provamos que a existência de submodelos elementares ω-covering de cardinalidade κ depende da cofinalidade de $[\kappa]^{\aleph_0}$ com relação a $\subseteq$. Estudamos a preservação de propriedades, como ser ω-covering ou enumeravelmente fechado, de M para $M[G]$. Por exemplo, provamos que, se M é ω-covering e $\mathbb{P}$ tem a *countable covering property* (c.c.p.), então $M[G]$ é ω-covering. Na última seção iniciamos um estudo da generalização natural para "κ-covering".

No último capítulo retornamos ao estudo de preservação de propriedades topológicas nas extensões por *forcing*. Fizemos uma análise "backward", ou seja, que volta ao "passado", para propriedades topológicas como ser de Fréchet, sequencial ou ter *tightness* enumerável. Este mesmo tipo de análise foi aplicada a algumas funções cardinais e mostramos que *forcing* por ordens parciais com a *countable covering property* (c.c.p.) não pode "colapsar" algumas delas a $\aleph_0$. Respondemos, então, parcialmente algumas perguntas de [Wat90]. Na última seção temos um estudo inicial sobre X_M e $X_{M[G]}$.

Os resultados que **não têm** autoria mencionada nem comentada são do autor. Parte do terceiro capítulo foi desenvolvido em conjunto não somente com a orientadora mas também com o Prof. Paul Larson que esteve em visita à Universidade de São Paulo em junho de 2006. Resultados desse capítulo e do segundo compõem o artigo já submetido [JLP].

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo vamos enunciar quase todos os conceitos necessários para a leitura deste trabalho. Além de convencionarmos a notação, enunciaremos fatos que minimizam a consulta a outros trabalhos. Os resultados que foram demonstrados representam algum tipo, parcial ou total, de contribuição do autor.

1.1 Teoria dos Conjuntos

Trabalharemos sob a axiomática de Zermelo-Fraenkel e admitindo sempre o **Axioma da Escolha (ZFC)**. **ON** denota a classe dos **ordinais** e **CARD** é a classe dos **cardinais.**[1]

Se $\leq$ é uma ordem parcial em X, dizemos que $f: Y \longrightarrow X$ é uma função **cofinal em** X, com relação a $\leq$, se, para todo $x \in X$, existe $y \in Y$, tal que $x \leq f(y)$.

Para X, conjunto de ordinais, $\mathrm{cf}(X)$ denota o menor ordinal α para o qual existe $f: \alpha \longrightarrow X$, função estritamente crescente e cofinal em X. Tal ordinal será chamado de **cofinalidade de** X.

Se X é um conjunto, $\mathcal{P}(X)$ é o conjunto das partes de X. Se κ é um cardinal, $[X]^\kappa$ é o conjunto das partes de X de cardinalidade κ. Analogamente podemos definir $[X]^{<\kappa}$ ou $[X]^{\leq\kappa}$.

CH é a **Hipótese do Contínuo**, ou seja, a afirmação " $\aleph_1 = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ ". **GCH** é a **Hipótese Generalizada do Contínuo**, ou seja, a afirmação "para todo ordinal α, vale ($2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$)".

Na exponenciação cardinal, a cofinalidade da "base" é sempre determinante. Sob **GCH**, esses valores são facilmente calculados. Porém **GCH** é deveras muito forte! Pode-se enfraquecer tal hipótese mantendo ainda "boa" determinação para o cálculo da exponenciação

[1]Embora **ON** e **CARD** sejam classes, cometeremos o abuso de escrever "$\alpha \in$ **ON**", "$\kappa \in$ **CARD**" e "$\alpha \in M \cap$ **ON**" , para abreviar as frases "α é um ordinal", "κ é um cardinal" e "α é ordinal que é elemento de M", respectivamente. Isso somente para citar alguns exemplos!

cardinal. Um desses enfraquecimentos é a **Hipótese para Cardinais Singulares** (indicada por **SCH**) que afirma o seguinte: "para todo cardinal singular κ, se $2^{\mathrm{cf}(\kappa)} < \kappa$, então $\kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)} = \kappa^{+}$".[2]

Para resultados sobre *Aritmética Cardinal* e para **SCH** recomendamos fortemente o livro [Jec03].

A seguir apresentamos definições e resultados sobre modelos importantes de **ZFC–P**.[3] A grande maioria pode ser encontrada no livro [Kun80].

Definição 1.1.1. *Seja A um conjunto. Definimos, por recursão em $n < \omega$: $\bigcup^0 A = A$ e $\bigcup^{n+1} A = \bigcup(\bigcup^n A)$. Daí, teremos o **fecho transitivo de** A:*

$$\mathrm{trcl}(A) = \bigcup_{n<\omega}(\bigcup^n A).$$

Lembremos que um conjunto X é dito **transitivo** se $x \subset X$, sempre que $x \in X$.

Lema 1.1.2. *Seja A um conjunto. Então:*

1. $\mathrm{trcl}(A)$ *é transitivo e é o menor transitivo que contém A. Portanto, A é transitivo se, e só se, $A = \mathrm{trcl}(A)$.*
2. *Se $x \in A$, $\mathrm{trcl}(x) \subset \mathrm{trcl}(A)$.*
3. $\mathrm{trcl}(A) = A \cup \bigcup\{\mathrm{trcl}(x) \colon x \in A\}$. □

Sendo assim, podemos definir:

Definição 1.1.3. *Para qualquer cardinal infinito κ, $H_\kappa = \{x \colon |\mathrm{trcl}(x)| < \kappa\}$.*

Os elementos de H_κ são ditos **ter cardinalidade hereditária estritamente menor que** κ. Ainda temos que cada H_κ é conjunto:

Lema 1.1.4. *Seja κ um cardinal infinito. Se x é conjunto e $|\mathrm{trcl}(x)| < \kappa$, então $\mathrm{rank}(x) < \kappa$. Portanto, H_κ é conjunto.* □

Lema 1.1.5. *Para κ, cardinal infinito, temos:*

1. *H_κ é transitivo e $H_\kappa \cap \mathbf{ON} = \kappa$.*
2. *Se $x \in H_\kappa$, então $\bigcup x \in H_\kappa$.*
3. *Se $x, y \in H_\kappa$, então $\{x, y\} \in H_\kappa$.*
4. *Se $y \subset x \in H_\kappa$, então $y \in H_\kappa$.*

[2] κ^+ denota o cardinal sucessor de κ.

[3] Vale ressaltar aqui que "ser modelo de **ZFC–P**" é ser modelo para **ZFC** a menos do **Axioma das Partes** (por isso o "**–P**").

5. *Se κ é regular, então* $\forall x\ (\ x \in H_\kappa \leftrightarrow x \subset H_\kappa\ \wedge\ |x| < \kappa\ )$. $\square$

Teorema 1.1.6. *Se $\kappa > \omega$ é regular, então H_κ é modelo de* **ZFC–P**. $\square$

Proposição 1.1.7. *Se $\kappa > \omega$, então* $|H_\kappa| = 2^{<\kappa}$. $\square$

1.2 *Forcing*

Forcing é a técnica com a qual Paul J. Cohen ([Coh63]) demonstrou a consistência da negação da Hipótese do Contínuo ($\neg$**CH**), bem como a consistência da negação do Axioma da Escolha com **ZF**. Basicamente ela consiste em estender um "modelo enumerável transitivo **V** de **ZFC**" adicionando a ele um *novo* conjunto G e obtendo-se um modelo transitivo enumerável $\mathbf{V}[G]$ de **ZFC**. Esse novo conjunto será obtido através de uma ordem parcial $\mathbb{P}$ tomada em **V**.

O abuso de supor **V** modelo de **ZFC** não nos causa problemas pois lembramos que uma demonstração matemática envolve somente uma quantidade finita de axiomas da Teoria dos Conjuntos. Para qualquer lista finita de axiomas de **ZFC** podemos lhe produzir um modelo enumerável e transitivo.

Para a *linguagem de forcing* seguiremos neste trabalho muito da notação de [Kun80].

Por todo o trabalho, sempre que "forçarmos" com uma ordem parcial, esta será uma tripla $\langle \mathbb{P}, \leq, \mathbf{1} \rangle$, onde $\mathbf{1}$ é o maior elemento de $\mathbb{P}$. Em geral abreviaremos esta tripla por $\mathbb{P}$.

Todo elemento de $\mathbb{P}$ será chamado de **condição**. Diremos que a condição q é **extensão** da condição p, se $q \leq p$. Duas condições serão ditas **compatíveis** se têm extensão em comum. Se p e q forem **incompatíveis**, denotaremos esta situação por $p \perp q$.

Dizemos que $D \subseteq \mathbb{P}$ é **denso** em $\mathbb{P}$, se toda condição de $\mathbb{P}$ tem alguma extensão em D. $D \subseteq \mathbb{P}$ será dito **pré-denso** se toda condição de $\mathbb{P}$ é compatível com algum elemento de D. De maneira natural estendemos estas definições para **denso abaixo de** p e **pré-denso abaixo de** p, onde $p \in \mathbb{P}$. $D \subseteq \mathbb{P}$ é dito **aberto** em $\mathbb{P}$, se toda extensão de elementos de D também é elemento de D.

Diremos que $A \subseteq \mathbb{P}$ é uma **anticadeia** se quaisquer dois elementos distintos de A são incompatíveis. Uma anticadeia é dita **maximal** se não há anticadeia própria que a contenha. Uma **partição** de uma condição p é uma anticadeia cujos elementos são extensões de p e que ainda é pré-denso abaixo de p.

Um **filtro** em $\mathbb{P}$ é um subconjunto G de $\mathbb{P}$, tal que:

1. $\forall p, q \in G\ \exists r \in G\ (\ r \leq p\ \wedge\ r \leq q\ )$ e
2. $\forall p \in G\ \forall q \in \mathbb{P}\ (\ p \leq q \rightarrow q \in G\ )$.

Um filtro é dito **$\mathbb{P}$-genérico** (sobre **V**) se intersecta todos os densos em $\mathbb{P}$ (de **V**). É fato conhecido:

Proposição 1.2.1. *São equivalentes:*

1. *G é genérico,*

2. *G intersecta todos os pré-densos de $\mathbb{P}$ e*

3. *G intersecta todas as anticadeias maximais em $\mathbb{P}$.*

Ainda, se $p \in G$ e G é filtro, G ser genérico equivale a:

1. *G intersecta todos os densos abaixo de p,*

2. *G intersecta todos os pré-densos abaixo de p e*

3. *G intersecta todas as partições de p.*

Também, se $E \subseteq \mathbb{P}$ e E não intersecta o genérico G, então existe $q \in G$ incompatível com todos os elementos de E. □

Os elementos de $\mathbf{V}[G]$ serão obtidos através de "nomes" em $\mathbf{V}$ e do genérico G. Portanto, todos os elementos de $\mathbf{V}[G]$ terão nomes em $\mathbf{V}$. Desta forma poderemos "falar", em $\mathbf{V}$, de objetos em $\mathbf{V}[G]$.

Definição 1.2.2. *Definimos, por recursão no* $\mathrm{rank}(\tau)$, *que τ é um* ***$\mathbb{P}$-nome*** *se, e somente se, $\tau = \emptyset$ ou*

$$\tau \text{ é uma relação e } \forall \langle \sigma, p \rangle \in \tau \ (\ \sigma \text{ é } \mathbb{P}\text{-nome} \wedge p \in \mathbb{P}\ ).$$

Para garantirmos que $\mathbf{V}$ seja sempre subconjunto de $\mathbf{V}[G]$, criamos "nomes-padrão" para os elementos de $\mathbf{V}$.

Definição 1.2.3. *Se $x \in \mathbf{V}$, então $\check{x} = \{\langle \check{y}, \mathbb{1} \rangle : y \in x\}$.*

A seguir definimos aqueles que serão os elementos de $\mathbf{V}[G]$.

Definição 1.2.4. *Se G é um $\mathbb{P}$-genérico e τ é um $\mathbb{P}$-nome, então*

$$\tau_G = \{\sigma_G \colon \langle \sigma, p \rangle \in \tau \ \wedge \ p \in G\}.$$

Definição 1.2.5. *Se G é um $\mathbb{P}$-genérico, então $\mathbf{V}[G] = \{\tau_G \colon \tau \text{ é } \mathbb{P}\text{-nome}\}$.*

Lema 1.2.6. *Se G é um genérico, então:*

1. *$\forall x \in \mathbf{V}\ (\ \check{x}$ é $\mathbb{P}$-nome $\wedge\ (\check{x})_G = x\ )$ e*

2. *$\Gamma = \{\langle \check{p}, p \rangle : p \in \mathbb{P}\}$ é $\mathbb{P}$-nome, $\Gamma_G = G$ e $\mathbf{V} \cup \{G\} \subset \mathbf{V}[G]$.* □

Até o momento percebemos que, se G não for elemento de $\mathbf{V}$- e em geral **não será** - os elementos de $\mathbf{V}$ não conseguem dizer "quem" (o que) são os elementos de $\mathbf{V}[G]$. Apesar disso, o *forcing* nos dá ferramentas para que os elementos de $\mathbb{P}$ **decidam** sobre os *teoremas* verdadeiros em $\mathbf{V}[G]$.

Definição 1.2.7. *Seja $\psi(v_1, \ldots, v_n)$ uma fórmula na qual somente as variáveis $v_1, \ldots, v_n$ são livres, e sejam $\tau_1, \ldots, \tau_n$, $\mathbb{P}$-nomes. Dizemos que uma condição p* ***força*** *$\psi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ - e denotaremos essa situação por "$p \Vdash \psi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$", se vale $(\psi((\tau_1)_G, \ldots, (\tau_n)_G))^{\mathbf{V}[G]}$, para todo genérico G ao qual p pertence.*

Rapidamente chega-se ao:

Lema 1.2.8. *Nas condições da definição, são equivalentes:*

1. $p \Vdash \psi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$,
2. $\forall r \leq p$ ($r \Vdash \psi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$) *e*
3. $\{r: r \Vdash \psi(\tau_1, \ldots, \tau_n)\}$ *é denso abaixo de p.* □

Essa definição usa genéricos e portanto ficamos com a incômoda sensação que decidir sobre "forçar uma fórmula ψ" depende de verificações sobre elementos que **não** são elementos do nosso modelo inicial, ou seja, que não podemos "falar" de *forcing* estando em $\mathbf{V}$. Esse incômodo é contornado com a definição de " $\Vdash^*$ ". Esta não usa os genéricos e lida somente com subconjuntos densos e pré-densos abaixo de condições. Portanto " $\Vdash^*$ " será **definível** em $\mathbf{V}$ e a decisão sobre "$p \Vdash^* \psi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$" pode ser tomada em (dentro de) $\mathbf{V}$. Demonstra-se que $p \Vdash \psi(\tau_1, \ldots, \tau_n) \leftrightarrow (\, p \Vdash^* \psi(\tau_1, \ldots, \tau_n)\,)^{\mathbf{V}}$. Em [Kun80] essa discussão é melhor e mais extensamente feita. Vamos resumir nas próximas proposições fatos que serão necessários no decorrer da leitura deste trabalho.

Proposição 1.2.9. *Seja $\psi(v_1, \ldots, v_n)$ uma fórmula na qual somente as variáveis $v_1, \ldots, v_n$ são livres. Sejam $p \in \mathbb{P}$ e $\tau_1, \ldots, \tau_n$, $\mathbb{P}$-nomes. Então:*

1. $p \Vdash \tau_1 = \tau_2$ *se, e somente se,*
   (a) *para todo* $\langle \pi_1, s_1 \rangle \in \tau_1$,
   $$\{q \leq p: q \leq s_1 \rightarrow \exists \langle \pi_2, s_2 \rangle \in \tau_2 \ (\ q \leq s_2 \ \wedge \ q \Vdash \pi_1 = \pi_2\ )\}$$
   é denso abaixo de p, e
   (b) *para todo* $\langle \pi_2, s_2 \rangle \in \tau_2$,
   $$\{q \leq p: q \leq s_2 \rightarrow \exists \langle \pi_1, s_1 \rangle \in \tau_1 \ (\ q \leq s_1 \ \wedge \ q \Vdash \pi_2 = \pi_1\ )\}$$
   é denso abaixo de p.

2. $p \Vdash \tau_1 \in \tau_2$ *se, e somente se,*

$$\{q \colon \exists \langle \pi, s\rangle \in \tau_2 \ (\ q \leq s \ \wedge \ q \Vdash \pi = \tau_1 \ )\}$$

é denso abaixo de p.

3. *Se* $\phi(v_1, \ldots, v_n)$ *também é fórmula na qual somente as variáveis* $v_1, \ldots, v_n$ *são livres, então* $p \Vdash$ "$\psi(\tau_1, \ldots, \tau_n) \ \wedge \ \phi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$" *se, e somente se,*

$$p \Vdash \psi(\tau_1, \ldots, \tau_n) \ \wedge \ p \Vdash \phi(\tau_1, \ldots, \tau_n).$$

4. $p \Vdash \neg\psi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ *se, e somente se, não há extensão* q *de* p *para a qual tenhamos* $q \Vdash \psi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$.

5. *Se* $\phi(u, v_1, \ldots, v_n)$ *é fórmula na qual somente as variávies* $u, v_1, \ldots, v_n$ *são livres, então* $p \Vdash$ "$\exists x \ \phi(x, \tau_1, \ldots, \tau_n)$" *se, e somente se,*

$$\{r \colon \exists \sigma, \ \mathbb{P}\text{-}nome, \ (\ r \Vdash \phi(\sigma, \tau_1, \ldots, \tau_n) \ )\}$$

é denso abaixo de p. $\square$

Enunciamos aquele que é teorema fundamental para a teoria de *forcing*:

Teorema 1.2.10. $(\ \psi((\tau_1)_G, \ldots, (\tau_n)_G) \ )^{\mathbf{V}[G]}$ *se, e somente se, existe* $p \in G$, *tal que* $p \Vdash \psi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$. $\square$

Outro teorema importante sobre *forcing* é:

Teorema 1.2.11 (Princípio Maximal). *Sejam* $\tau_1, \ldots, \tau_n$, $\mathbb{P}$-*nomes, e seja* $\psi(u, v_1, \ldots, v_n)$ *uma fórmula na qual somente as variávies* $u, v_1, \ldots, v_n$ *são livres. Suponha que* $p \Vdash$ "$\exists x \ \psi(x, \tau_1, \ldots, \tau_n)$". *Então existe* π, $\mathbb{P}$-*nome, tal que* $p \Vdash \psi(\pi, \tau_1, \ldots, \tau_n)$. $\square$

Como veremos em exemplos mais à frente, G pode acrescentar uma função entre A e B, ambos conjuntos tomados em $\mathbf{V}$. Existe, então, a possibilidade de tornar equipotentes dois elementos que originalmente não o eram. Preservar cofinalidades e preservar cardinais são preocupações que logo podem surgir.

Definição 1.2.12. *Dizemos que uma ordem parcial* $\mathbb{P}$ ***preserva cardinais*** *se, sempre que* G *é um* $\mathbb{P}$-*genérico,*

$$(\beta \text{ é cardinal })^{\mathbf{V}} \ \leftrightarrow \ (\beta \text{ é cardinal })^{\mathbf{V}[G]} \ ,$$

para todo ordinal $\beta \in \mathbf{V}$.

Definição 1.2.13. *Dizemos que uma ordem parcial* $\mathbb{P}$ ***preserva cofinalidades*** *se, sempre que* G *é um* $\mathbb{P}$-*genérico e* $\gamma \in \mathbf{V}$ *é um ordinal limite,*

$$(\mathrm{cf}(\gamma))^{\mathbf{V}} = (\mathrm{cf}(\gamma))^{\mathbf{V}[G]} \ .$$

Limitar os tamanhos das anticadeias resulta em considerações importantes sobre tais preservações.

Definição 1.2.14. *Seja θ um cardinal. Dizemos que a ordem parcial $\mathbb{P}$ é θ-c.c., se toda anticadeia em $\mathbb{P}$ tem cardinalidade estritamente menor que θ.*

Definição 1.2.15. *O **grau de Souslin** da ordem parcial $\mathbb{P}$, $\mathrm{c.c.}(\mathbb{P})$, é o menor cardinal θ para o qual $\mathbb{P}$ é θ-c.c.*

Quando $\mathbf{c.c.}(\mathbb{P})$ é $\aleph_1$-c.c., diremos que $\mathbb{P}$ é **c.c.c.** (do inglês "countable chain condition").

Lema 1.2.16. *Se $\mathbb{P}$ é uma ordem θ-c.c. para um cardinal θ, então $\mathbb{P}$ preserva cofinalidades maiores ou iguais a θ. Ainda, se $(\theta$ é regular$)^{\mathbf{V}}$, então $\mathbb{P}$ preserva cardinais maiores ou iguais a θ.* □

Devido a Tarski, sabemos:

Proposição 1.2.17. *Se $\mathrm{c.c.}(\mathbb{P}) \geq \omega$, então $\mathrm{c.c.}(\mathbb{P})$ é regular.* □

O seguinte resultado sobre ordens θ-c.c. é importante:

Lema 1.2.18. *Sejam $\mathbb{P}$ uma ordem θ-c.c. e $A, B \in \mathbf{V}$. Seja τ um $\mathbb{P}$-nome e suponha que $p \Vdash$ "$\tau: A \longrightarrow B$". Então existe $F: A \longrightarrow \mathcal{P}(B)$ tal que $\forall a \in A$ ($p \Vdash$ "$\tau(\check{a}) \in (F(a))\check{}$ " $\wedge$ $|F(a)| < \theta$).* □

Com os argumentos usados em [Kun80, teorema 6.17], demonstra-se:

Proposição 1.2.19. *Sejam $\mathbb{P}$ uma ordem θ-c.c. e $A \in \mathbf{V}$. Se $\kappa = \left|[\mathbb{P}]^{<\theta}\right|^{|A|}$, então $\mathbf{1} \Vdash$ "$|\mathcal{P}(\check{A})| \leq \check{\kappa}$".* □

Em muitos momentos usaremos o génerico para construir uma função. Algumas das ordens parciais, com cujos genéricos construiremos tais funções, têm como condições funções parciais. Fixamos neste momento a notação e relembramos alguns resultados sobres estas ordens.

Definição 1.2.20. *Para I e J, conjuntos, e λ, cardinal,*

$$\mathrm{Fn}(I, J, \lambda) = \{p \subset I \times J : p \text{ é função } \wedge \ |p| < \lambda\}.$$

Ainda, $\mathrm{Fn}(I, J) = \mathrm{Fn}(I, J, \omega)$. Definimos, em ambos, $p \leq q$ por $q \subseteq p$.

Quando κ é cardinal, $\mathrm{Fn}(\kappa \times \omega, 2)$ são os conhecidos **reais de Cohen** (usados por Cohen para forçar "$\neg$**CH**").

Lema 1.2.21. *Se $J \neq \emptyset$ e G é $\mathrm{Fn}(I, J, \lambda)$-genérico, então temos que $\bigcup G$ é uma sobrejeção de I em J.* □

Devido a este lema, temos que, se κ é cardinal e G é $\mathrm{Fn}(\kappa \times \omega, 2)$-genérico, temos $(2^\omega \geq |\kappa|)^{\mathbf{V}[G]}$. Por isso, é comum dizer "adicionar κ reais de Cohen" quando se força com $\mathrm{Fn}(\kappa \times \omega, 2)$. Sobre o grau de Souslin de tais ordens pode-se dizer:

Lema 1.2.22. $\mathrm{Fn}(I, J, \lambda)$ *é* $(|J|^{<\lambda})^+$*-c.c. Em particular, se J é enumerável,* $\mathrm{Fn}(I, J)$ *é c.c.c.* □

1.2.1 Algumas classes de ordens parciais

O lema 1.2.16 nos fala sobre a preservação de cofinalidades e a de cardinalidades **a partir** de um certo cardinal. As ordens κ-fechadas vão apresentar resultados sobre preservação **até** um certo cardinal.

Definição 1.2.23. *Seja κ um cardinal. Uma ordem parcial $\mathbb{P}$ é dita **κ-fechada**, se, sempre que $\langle p_\xi : \xi < \lambda \rangle$ é uma seqüência decrescente de condições de $\mathbb{P}$ com $\lambda < \kappa$, existe q que é extensão comum a todos os p_ξ's.*

*Em particular, chamaremos $\mathbb{P}$ de **enumeravelmente fechada**, se for $\aleph_1$-fechada.*

Lema 1.2.24. *Se κ é um cardinal regular, então $\mathrm{Fn}(I, J, \kappa)$ é κ-fechada.* □

Para ordens κ-fechadas temos:

Teorema 1.2.25. *Sejam $A, B, \kappa \in \mathbf{V}$, onde κ é um cardinal infinito. Suponha ainda $\mathbb{P}$ κ-fechada e $|A| < \kappa$. Se $p \Vdash$ "$\tau : A \longrightarrow B$", existem $q \leq p$ e $f : A \longrightarrow B$, tais que $q \Vdash$ "$\tau = \check{f}$".* □

O teorema, em suma, diz que ordens κ-fechadas não acrescentam subconjuntos **novos** de cardinalidade estritamente menor que κ. Sendo assim, prova-se:

Corolário 1.2.26. *Se $(\mathbb{P}$ é κ-fechada$)^{\mathbf{V}}$, então $\mathbb{P}$ preserva cofinalidades até κ e, ainda, preserva cardinalidades até κ.* □

A propriedade demonstrada no teorema 1.2.25 não é equivalente a ser κ-fechada. Uma classe maior de ordens parciais pode ser definida:

Definição 1.2.27. *Seja κ um cardinal infinito. Dizemos que uma ordem parcial $\mathbb{P}$ é **κ-Baire** se, para toda coleção de densos abertos em $\mathbb{P}$, $\{D_\alpha : \alpha < \lambda\}$, onde $\lambda < \kappa$, $\bigcap_{\alpha<\lambda} D_\alpha$ é denso em $\mathbb{P}$.*

Demonstra-se:

Proposição 1.2.28. *Sejam κ um cardinal e $\mathbb{P}$ uma ordem parcial. São equivalentes:*

1. *$[B]^{<\kappa} \cap \mathbf{V} = [B]^{<\kappa} \cap \mathbf{V}[G]$, sempre que $B \in \mathbf{V}$ e G é um $\mathbb{P}$-genérico,*
2. *$[\mathbf{V}]^{<\kappa} \cap \mathbf{V} = [\mathbf{V}]^{<\kappa} \cap \mathbf{V}[G]$, sempre que G é $\mathbb{P}$-genérico e*
3. *$\mathbb{P}$ é κ-Baire.* □

Portanto:

Proposição 1.2.29. *Se $\mathbb{P}$ é κ-fechada, então $\mathbb{P}$ é κ-Baire.* □

Daí provamos:

Proposição 1.2.30. *Seja $\mathbb{P}$ uma ordem ω_1-Baire. Sejam $p \in \mathbb{P}$ e τ e σ, $\mathbb{P}$-nomes, tais que:*

$$p \Vdash \text{“}\tau\colon \check{\omega} \longrightarrow \sigma\text{”}.$$

Então existem $q \leq p$ e $\rho \subseteq \sigma$, $\mathbb{P}$-nome enumerável,tais que $q \Vdash$ “ran $\tau = \rho$”.

Demonstração. Para cada $n < \omega$, definimos

$$D_n = \left\{ q \in \mathbb{P} \colon \begin{array}{c} \exists \langle \pi, r \rangle \in \sigma \; (\; q \leq p \;\wedge\; q \leq r \;\wedge\; q \Vdash \text{“}\tau(\check{n}) = \pi\text{”} \;) \\ \vee \quad q \perp p \end{array} \right\}$$

que é aberto em $\mathbb{P}$.

Vejamos que D_n é denso em $\mathbb{P}$. Seja $s \in \mathbb{P}$. Caso $s \perp p$, $s \in D_n$. Se s e p são compatíveis, seja t extensão comum às duas condições. Como $p \Vdash$ “$\tau(\check{n}) \in \sigma$”, pela proposição 1.2.9, existem $q \leq t$ e $\langle \pi, r \rangle \in \sigma$, tais que $q \leq r$ e $q \Vdash$ “$\tau(\check{n}) = \pi$”. Daí $q \in D_n$ e q estende s.

Como $\mathbb{P}$ é ω_1-Baire, $\bigcap_{n<\omega} D_n$ é denso.

Fixemos $q \in \bigcap_{n<\omega} D_n$ que é extensão de p. Para cada $n < \omega$ seja $\langle \pi_n, r_n \rangle \in \sigma$ tal que

$$q \leq r_n \;\wedge\; q \Vdash \text{“}\tau(\check{n}) = \pi_n\text{”}.$$

Seja $\rho = \{\langle \pi_n, r_n \rangle : n < \omega\}$. Daí $q \Vdash$ “ran $\tau = \rho$”, $\rho \subseteq \sigma$ e ainda ρ é enumerável. □

É fato bem conhecido que, se $\mathbb{P}$ é c.c.c., todo subconjunto enumerável de $\mathbf{V}$ numa extensão, pode ser coberto por um enumerável do modelo original. Pela proposição 1.2.28, temos que ordens parciais ω_1-Baire também têm essa “propriedade de cobrir enumeráveis”. Podemos definir uma nova classe de ordens parciais por essa propriedade (ver, por exemplo, [Kru]):

Definição 1.2.31. *Seja $\mathbb{P}$ uma ordem parcial. Dizemos que $\mathbb{P}$ é **c.c.p.** (do inglês, “countable covering property”) se $\mathbb{P}$ força que todo subconjunto enumerável novo de $\mathbf{V}$ pode ser coberto por algum enumerável do modelo original.*

Portanto ordens parciais c.c.c. e ordens parciais ω_1-Baire são c.c.p. Observamos ainda que ordens parciais c.c.p. preservam ω_1.

Apresentamos agora uma equivalência à definição.

Proposição 1.2.32. *São equivalentes:*

1. *$\mathbb{P}$ é c.c.p. e*

2. *para quaisquer τ, σ, $\mathbb{P}$-nomes, se $p \Vdash$ “$\tau\colon \check{\omega} \longrightarrow \sigma$”, então existem $q \leq p$ e $\mu \subseteq \sigma$, $\mathbb{P}$-nome enumerável, tais que $q \Vdash$ “ran $\tau \subseteq \mu$”.*

3. *para quaisquer σ, ρ, $\mathbb{P}$-nomes, se $p \Vdash$ “$\sigma \subseteq \rho \wedge \sigma$ é enumerável”, então existem $q \leq p$ e $\mu \subseteq \rho$, $\mathbb{P}$-nome enumerável, tais que $q \Vdash$ “$\sigma \subseteq \mu$”.*

Demonstração. (1 $\to$ 2) Sejam τ e σ $\mathbb{P}$-nomes e $p \in \mathbb{P}$ tais que $p \Vdash$ "$\tau\colon \check{\omega} \longrightarrow \sigma$".

Para cada $n < \omega$, definimos

$$D_n = \{q \leq p\colon \exists\, \langle \pi, s\rangle \in \sigma \;(\; q \leq s \;\wedge\; q \Vdash \text{“}\tau(\check{n}) = \pi\text{”} \;)\}$$

que é denso abaixo de p visto que $p \Vdash$ "$\tau(\check{n}) \in \sigma$" (proposição 1.2.9). Seja $A_n \subset D_n$ uma partição de p. Para cada $q \in A_n$, fixemos $\langle \pi_{n,q}, s_{n,q}\rangle \in \sigma$ tal que $q \leq s_{n,q} \;\wedge\; q \Vdash$ "$\tau(\check{n}) = \pi_{n,q}$".

Definimos

$$\rho = \{\langle \check{x}, q\rangle : n < \omega \;\wedge\; q \in A_n \;\wedge x = \langle n, \langle \pi_{n,q}, s_{n,q}\rangle\rangle\}\,.$$

Temos que $p \Vdash$ "ρ é função de $\check{\omega}$ em $\check{\sigma}$".

Como σ, em particular, é um conjunto de $\mathbf{V}$, por hipótese, existem $r \leq p$ e $Y \in \mathbf{V}$, enumerável, tais que $r \Vdash$ "ran $\rho \subseteq \check{Y}$".

Seja $\mu = Y \cap \sigma$ e vejamos que $r \Vdash$ "ran $\tau \subseteq \mu$". Sejam $s \leq r$ e $n < \omega$. Como A_n é partição de p, existe $q \in A_n$ compatível com s. Daí

$$q \Vdash \text{“}\rho(\check{n}) = \langle \pi_{n,q}, s_{n,q}\rangle\check{}\,\text{”} \quad \wedge \quad q \leq s_{n,q} \quad \wedge \quad q \Vdash \text{“}\tau(\check{n}) = \pi_{n,q}\text{”}.$$

Seja u uma extensão comum a q e s e temos que $u \Vdash$ "$\rho(\check{n}) = \langle \pi_{n,q}, s_{n,q}\rangle\check{} \in \check{Y}$", ou seja, $\langle \pi_{n,q}, s_{n,q}\rangle \in Y \cap \sigma = \mu$. Portanto, $u \Vdash$ "$\tau(\check{n}) \in \mu$".

(2 $\to$ 3) Sejam σ, ρ, $\mathbb{P}$-nomes, e $p \in \mathbb{P}$, tais que $p \Vdash$ "$\sigma \subseteq \rho \;\wedge\; \sigma$ é enumerável". Pelo princípio maximal (teorema 1.2.11), existe τ, $\mathbb{P}$-nome, tal que $p \Vdash$ "$\tau\colon \check{\omega} \longrightarrow \rho \;\wedge\;$ ran $\tau = \sigma$". Por hipótese existem $q \leq p$ e $\mu \subseteq \rho$, enumerável, tais que $q \Vdash$ "$\sigma =$ ran $\tau \subseteq \mu$".

(3 $\to$ 1) Sejam σ, $\mathbb{P}$-nome, e $p \in \mathbb{P}$, tais que

$$p \Vdash \text{“}\sigma \subset \mathbf{V} \;\wedge\; \sigma \text{ é enumerável”}.$$

Seja $B \in \mathbf{V}$ tal que $p \Vdash$ "$\sigma \subseteq \check{B}$". Por hipótese, existem $q \leq p$ e $\mu \subseteq \check{B}$, enumerável, tais que $q \Vdash$ "$\sigma \subseteq \mu$". Dado que $\mu \subset \check{B}$, $\mu = \check{C}$, para algum C. Como μ é enumerável, C é enumerável. Portanto $q \Vdash$ "$\sigma \subseteq \check{C}$". □

1.3 Submodelos elementares

Durante o nosso trabalho usamos a linguagem usual da Teoria dos Conjuntos (que é enumerável). Portanto, no que segue, os resultados e definições, sempre serão dadas considerando-se esse contexto. Podemos citar [Dow88a] e [Dow95], por exemplo, como referências.

Definição 1.3.1. *Diremos que M é **submodelo elementar de** N, e denotaremos esta situação por $M \prec N$, se $M \subseteq N$ e, para toda fórmula $\varphi(v_1, \ldots, v_n)$, na qual somente $v_1, \ldots, v_n$ são variáveis livres, e quaisquer $a_1, \ldots, a_n \in M$, tivermos que*

$$\varphi^M(a_1, \ldots, a_n) \;\leftrightarrow\; \varphi^N(a_1, \ldots, a_n),$$

ou seja,

$$M \models \varphi(a_1, \ldots, a_n) \;\leftrightarrow\; N \models \varphi(a_1, \ldots, a_n).$$

Vale o seguinte **teorema de Löwenheim-Skolem**:

Teorema 1.3.2 ("Downward Löwenheim-Skolem Theorem"). *Para qualquer conjunto H e qualquer subconjunto X de H, existe submodelo elementar M de H, tal que $X \subseteq M$ e $|M| \leq |X| \cdot \aleph_0$.* □

Um importantíssimo critério para decisão se M é um submodelo elementar de H é:

Teorema 1.3.3 (Critério de Tarski-Vaught). *Sejam M e H tais que $M \subseteq H$. São equivalentes:*

1. *$M \prec H$ e*

2. *para toda fórmula $\varphi(u, v_1, \ldots, v_n)$, na qual somente as variáveis u, v_1, ..., v_n são livres, e todo $\{a_1, \ldots, a_n\} \subset M$, se existe $y \in H$ tal que $\varphi(y, a_1, \ldots, a_n)$, então existe $y \in M$ tal que $\varphi(y, a_1, \ldots, a_n)$.* □

Usando o teorema concluímos:

Corolário 1.3.4 ("Definibilidade"). *Sejam $\varphi(u, v_1, \ldots, v_n)$ uma fórmula, na qual somente as variáveis u, $v_1, \ldots$, v_n são livres, e H um conjunto, tais que, existe F, função, definida por*

$$x = (a_1, \ldots, a_n) \in \underbrace{H \times \ldots \times H}_{n \text{ vezes}} \mapsto F(x) \in H,$$

tal que $\varphi(F(x), a_1, \ldots, a_n)$. Se $M \prec H$, então $F(a_1, \ldots, a_n) \in M$, sempre que a_1, ..., $a_n \in M$. □

Usando definibilidade prova-se facilmente:

Proposição 1.3.5. *Seja $M \prec H_\theta$, para θ cardinal regular. Então:*

1. $\forall x, y \ (\ x, y \in M \leftrightarrow \{x, y\} \in M \ )$.
2. $\forall x \in M \ (\ \bigcup x \in M \ )$.
3. $\forall x \in M \ (\ |x| \in M \ )$.
4. $\forall \alpha \in M \cap \mathbf{ON} \ (\ \mathrm{cf}(\alpha) \in M \ )$.
5. $\forall x \in M \ (\ \mathcal{P}(x) \in M \leftrightarrow 2^{|x|} < \theta \ )$.
6. $\omega \subset M$.
7. $\forall x, y \in M \ (\ x \cup y, x \cap y, x \setminus y \in M \ )$.
8. $\forall \kappa \in \mathbf{CARD} \ (\ \kappa^+ < \theta \ )(\ \kappa \in M \leftrightarrow \kappa^+ \in M \ )$. □

Sendo assim, concluímos que, se A é finito, A é elemento de um submodelo elementar se, e somente se, for subconjunto dele. O que podemos falar sobre conjuntos infinitos? A proposição a seguir já expõe, pelo menos, *quando* um submodelo elementar *tem* elemento infinito.

Proposição 1.3.6. *Seja $M \prec H_\theta$, para θ cardinal regular não enumerável. Então:*

$$\forall n < \omega \ (\ \omega_n \in M \leftrightarrow \omega_n < \theta \ ).$$

*Em particular, ω **é sempre elemento de** M.* □

Por causa do lema 1.1.4 e do teorema 1.1.6, os H_θ's, para θ regular e não-enumerável, são **conjuntos** e **modelos** de **ZFC–P**. Em poucas ocasiões explicitaremos o valor de θ, mas ressaltamos que θ **será sempre regular e não-enumerável!** Além disso, θ será sempre tomado "grande o suficiente" para que os objetos estudados em questão, por exemplo, nas demonstrações, sejam elementos de H_θ.

A proposição 1.3.8 e o corolário 1.3.9 serão exaustivamente usados no trabalho e são conseqüência do lema a seguir, que, por sua vez, também será exaustivamente citado, mesmo que não explicitamente!

Lema 1.3.7. *Sejam $M \prec H_\theta$ e $f \in M$ uma função. Se $t \in M \cap \mathrm{dom}\ f$, então $f(t) \in M$.* □

Daí chegamos à:

Proposição 1.3.8. *Sejam $A, B \in M$ e M um submodelo elementar de H_θ. Suponha que A e B são equipotentes. Então $A \subset M$ se, e somente se, $B \subset M$.* □

Corolário 1.3.9. *Seja $M \prec H_\theta$. Todo elemento enumerável de M é subconjunto de M.* □

1.3.1 Construção de submodelos elementares

Ainda que o teorema de Löwenheim-Skolem garanta a existência de submodelos elementares, podemos, exatamente usando o citado teorema, em vários momentos, construir submodelos elementares satisfazendo algumas condições que nós desejemos no instante.

Nesta seção vamos mostrar algumas maneiras de construí-los a partir de outros já existentes.

O lema a seguir nos dá que $\prec$ é um ordem transitiva:

Lema 1.3.10 ([Dow88a]). *Sejam M, N e H tais que $M \subseteq N \prec H$. Então $M \prec N$ se, e somente se, $M \prec H$.* □

Diremos que $\mathcal{M}$ é uma cadeia de submodelos elementares, se o for segundo $\subseteq$, ou seja, para dois elementos $M, N \in \mathcal{M}$, tivermos $M \subseteq N$ ou $N \subseteq M$. O teorema a seguir amplia nossas possibilidades de submodelos elementares.

Teorema 1.3.11 ([Dow88a]). *Seja $\mathcal{M}$ uma cadeia de submodelos elementares de H, então $\bigcup \mathcal{M} \prec H$ e ainda, sempre que $M \in \mathcal{M}$, $M \prec \bigcup \mathcal{M}$.* □

Nem a união, nem a intersecção de dois submodelos elementares são garantidamente submodelos elementares. O teorema anterior tratou da união e a proposição a seguir trata da intersecção.

Proposição 1.3.12. *Sejam M e N tais que $M \prec N$. Seja $P \in M$ tal que $P \subset N$. Então $M \cap P \prec P$.*

Demonstração. Seja $\varphi(u, v_1, \ldots, v_n)$ uma fórmula na qual somente as variáveis u, v_1, ..., v_n são livres. Sejam $x_1, \ldots, x_n \in M \cap P$ e suponha que exista $y \in P$ tal que $\varphi(y, x_1, \ldots, x_n)$.

Seja v uma variável que não aparece em $\varphi(u, v_1, \ldots, v_n)$. Definimos a fórmula $\psi(u, v, v_1, \ldots, v_n)$ por

$$\text{“ } u \in v \quad \wedge \quad \varphi(u, v_1, \ldots, v_n)\text{”}.$$

Dado que $\{x_1, \ldots, x_n, P\} \subset M \subseteq N$ e $P \subset N$, temos que existe $y \in N$ tal que $\psi(y, P, x_1, \ldots, x_n)$. Como $M \prec N$, vale $\psi(y, P, x_1, \ldots, x_n)$ para algum $y \in M$, ou seja, existe $y \in M \cap P$ tal que $\varphi(y, x_1, \ldots, x_n)$. □

Se $M \prec H_\theta$ e $\kappa < \theta$, não podemos garantir que H_κ é elemento de M, ainda que $\kappa \in M$, visto que H_κ pode não ser elemento de H_θ. Mesmo assim temos:

Proposição 1.3.13. *Sejam $M \prec H_\theta$ e $\kappa \in M$ um cardinal regular. Então $M \cap H_\kappa \prec H_\kappa$.*

Demonstração. Basta tomar a demonstração da proposição anterior e tomar por $\psi(u, v, v_1, \ldots, x_n)$ a fórmula “v é cardinal $\wedge$ $|\mathrm{trcl}(u)| < v$ $\wedge$ $\varphi(u, v_1, \ldots, v_n)$”. □

O próximo resultado é apresentado em [Lar04], mas encontra-se demonstrado em versão generalizada embora com condições distintas. Apresentamos a demonstração aqui para os casos que usaremos.

Teorema 1.3.14. *Sejam $M \prec H_\theta$ e $t \in \bigcup M$. Então*

$$M[t] = \{f(t) \colon f \in M \ \wedge\ f \text{ é função} \ \wedge\ t \in \mathrm{dom}\, f\} \prec H_\theta.$$

Ainda

1. $M \cup \{t\} \subseteq M[t]$,
2. $M = M[t] \leftrightarrow t \in M$ e
3. $|M[t]| = |M|$.

Demonstração. Usemos o critério de Tarski-Vaught.

Já temos que $M[t] \subseteq H_\theta$. Seja $\varphi(u, v_1, \ldots, v_n)$ uma fórmula na qual somente as variáveis $u, v_1, \ldots, v_n$ são livres. Sejam $x_1, \ldots, x_n \in M[t]$ e suponha que exista $y \in H_\theta$ tal que $\varphi(y, x_1, \ldots, x_n)$.

Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, seja $f_i \in M$ tal que

$$f_i(t) = x_i \quad \wedge \quad f_i\colon X_i \longrightarrow H_\theta \quad \wedge \quad t \in X_i = \operatorname{dom} f_i.$$

Por definibilidade, cada $X_i \in M$, visto que $f_i \in M$. Seja

$$X = \left\{ x \in \bigcap_{j=1}^{n} X_i \ : \ \exists y \ \varphi(y, f_1(x), \ldots, f_n(x)) \right\}$$

e temos que $t \in X$. Como $\{X_1, \ldots, X_n, f_1, \ldots, f_n\} \subset M$, por definibilidade, teremos $X \in M$.

Para cada $x \in X$, fixemos $g(x) \in H_\theta$ tal que $\varphi(g(x), f_1(x), \ldots, f_n(x))$. Como $X \in H_\theta$, temos que a função $x \in X \mapsto g(x)$ é elemento de H_θ. Sendo assim, existe g em H_θ tal que

$$g \text{ é função de domínio } X \quad \wedge \quad \forall x \in X \ (\ \varphi(g(x), f_1(x), \ldots, f_n(x)) \ ).$$

Como $M \prec H_\theta$, podemos usar o critério de Tarski-Vaught para esta fórmula e existe $g \in M$, função de domínio X, tal que

$$\forall x \in X \ (\ \varphi(g(x), f_1(x), \ldots, f_n(x)) \ ).$$

Dado que $t \in X$, temos que $g(t) \in M[t]$ e $\varphi(g(t), x_1, \ldots, x_n)$.

Para mostrarmos as outras afirmações, note que podemos fixar $Y \in M$, tal que $t \in Y$, pois $t \in \bigcup M$.

Para cada $a \in M$, temos que a função f_a definida por

$$x \in Y \mapsto f_a(x) = a$$

é elemento de M, por definibilidade. Daí, $f_a(t) = a \in M[t]$. Portanto $M \subseteq M[t]$. A função identidade em Y, id_Y, é elemento de M (por definibilidade) e daí $id_Y(t) = t \in M[t]$.

Se $t \in M$, temos que $f(t) \in M$, sempre que $f \in M$ é função, pelo lema 1.3.7. Portanto,

$$t \in M \rightarrow M = M[t].$$

Como t é sempre elemento de $M[t]$, temos que

$$M = M[t] \rightarrow t \in M.$$

Facilmente, vemos que $|M| = |M[t]|$, pela própria construção. $\square$

Capítulo 2

Extensões de submodelos elementares por *forcing*

Em seu livro *Proper Forcing* ([She82]) S.Shelah define **ordens parciais próprias** e, em uma das equivalências para a definição, surge a necessidade de discutir se, dados $M \prec H_\theta$, tais que $\mathbb{P} \in M$, e G é um $\mathbb{P}$-genérico,

$$M[G] \prec H_\theta^{\mathbf{V}[G]},$$

onde $M[G] = \{\tau_G : \tau \in M \text{ é } \mathbb{P}\text{-nome}\}$.

Como $\mathbb{P} \in H_\theta$, temos que $|\mathbb{P}| < \theta$ e, sendo assim, $\mathbb{P}$ é θ-c.c. Dado que θ é regular, $\mathbb{P}$ preserva cofinalidades e cardinais **a partir** de θ.

Se $a \in M$, por definibilidade, $\check{a} \in M$, visto que $\mathbb{P} \in M$. Sendo assim, $M \subseteq M[G]$. Pelos mesmo argumento, $\Gamma = \{\langle \check{p}, p\rangle : p \in \mathbb{P}\} \in M$ (ver lema 1.2.6), daí, $G \in M[G]$.

A questão colocada sugere que $M[G]$ é o **menor** submodelo elementar de $H_\theta^{\mathbf{V}[G]}$, tal que $M \cup \{G\} \subseteq M[G]$.

Na primeira seção deste capítulo provamos o fato que $M[G] \prec H_\theta^{\mathbf{V}[G]}$, bem como que $H_\theta^{\mathbf{V}[G]} = H_\theta[G]$. Já na seção seguinte estudamos quando M e $M[G]$ têm os mesmos ordinais. Este estudo conduz à definição de condições $(\mathbb{P}, M)$-genéricas, à definição de ordens parciais próprias e à definição de $\mathrm{td}(M)$ que "mede" a transitividade de um submodelo elementar.

Vale a pena lembrar que trabalhamos com submodelos elementares de H_θ, onde θ será sempre **regular e não enumerável!**

Dado que "$\Vdash$" (definição 1.2.7) é **definível** em $\mathbf{V}$ (ver comentários na página 9), temos que, se $\varphi(v_1, \ldots, v_n)$ é fórmula onde somente as variáveis $v_1, \ldots, v_n$ ocorrem livres, conjuntos como, por exemplo,

$$D = \{p \in \mathbb{P} : p \Vdash \varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n)\},$$

são elementos de H_θ, pelo lema 1.1.5, e, por definibilidade, D será elemento de M, sempre que $\tau_1, \ldots, \tau_n \in M$ forem $\mathbb{P}$-nomes (uma vez que também $\mathbb{P} \in M$). Exploraremos muito este fato e este argumento caberá também para outros conjuntos definidos usando "$\Vdash$", $\mathbb{P}$, $\mathbb{P}$-nomes, bem como outros "parâmetros" que estejam em M.

2.1 Extensões de submodelos elementares

Suponhamos dados $M \prec H_\theta$ e $\mathbb{P} \in M$, uma ordem parcial. Se G é um $\mathbb{P}$-genérico, perguntamos se

$$M[G] \prec H_\theta^{\mathbf{V}[G]} \quad .$$

De fato, esta afirmação é válida e ainda $H_\theta[G] = H_\theta^{\mathbf{V}[G]}$ ([She82]).

Usando as idéias básicas contidas na demonstração de S.Shelah apresentamos aqui uma prova mais direta de tais fatos. Começamos com o seguinte lema:

Lema 2.1.1. *Sejam $\mathbb{P} \in H_\theta$, uma ordem parcial, $p \in \mathbb{P}$ e τ um $\mathbb{P}$-nome. Se $p \Vdash$ "$|\mathrm{trcl}(\tau)| < \check{\theta}$", então existe $\sigma \in H_\theta$, $\mathbb{P}$-nome, tal que $p \Vdash \tau = \sigma$.*

Demonstração. Provaremos este fato por indução sobre o rank(τ).

Seja A uma partição de p que decide os valores de $|\mathrm{trcl}(\tau)|$. Sendo assim, para cada $a \in A$, seja $\theta_a < \theta$, cardinal, tal que $a \Vdash$ "$|\mathrm{trcl}(\tau)| = \check{\theta}_a$". Como $A \subseteq \mathbb{P} \in H_\theta$, temos que $|A| < \theta$. Dado que θ é regular, temos que $\mu = \sup\{\theta_a : a \in A\} < \theta$. Assim $p \Vdash$ "$|\tau| \leq \check{\mu}$". Pelo Princípio Maximal (teorema 1.2.11), existe ρ, $\mathbb{P}$-nome, tal que $p \Vdash$ "$\rho: \check{\mu} \longrightarrow \tau$ é função sobrejetora".

Escrevamos $\tau = \{\langle \tau_i, p_i \rangle : i \in J\}$.

Fixemos $\gamma < \mu$. Como $p \Vdash$ "$\rho(\check{\gamma}) \in \tau$", o conjunto $D_\gamma = \{q \leq p : \exists i \in J\ (q \leq p_i \wedge q \Vdash$ "$\rho(\check{\gamma}) = \tau_i$")$\}$ é denso abaixo de p. Então seja $I_\gamma \subset D_\gamma$ uma partição de p e, para cada $q \in I_\gamma$, fixemos $i(\gamma, q) \in J$, tal que ($q \leq p_{i(\gamma,q)} \wedge q \Vdash$ "$\rho(\check{\gamma}) = \tau_{i(\gamma,q)}$"). Para cada $q \in I_\gamma$, temos que

$$q \Vdash \text{“}|\mathrm{trcl}(\tau_{i(\gamma,q)})| < \check{\theta}\text{”},$$

e, por hipótese de indução, existe $\sigma(\gamma, q) \in H_\theta$, tal que $q \Vdash$ "$\sigma(\gamma, q) = \tau_{i(\gamma,q)}$".

Definimos

$$\sigma = \{\langle \sigma(\gamma, q), q \rangle : q \in I_\gamma \wedge \gamma < \mu\}.$$

Como cada $|I_\gamma| < \theta$ e $\mu < \theta$, temos que $|\sigma| < \theta$. Assim, $\sigma \in H_\theta$, pelo lema 1.1.5. Vejamos que

$$p \Vdash \sigma = \tau.$$

Seja G um genérico tal que $p \in G$. Sejam $\gamma < \mu$ e $q \in I_\gamma \cap G$. Como $q \leq p_{i(\gamma,q)}$, temos que $(\sigma(\gamma, q))_G = (\tau_{i(\gamma,q)})_G \in \tau_G$, já que $p_{i(\gamma,q)} \in G$. Portanto, $\sigma_G \subseteq \tau_G$. Agora tomemos $i \in J$ tal que $p_i \in G$. Seja $\gamma < \mu$ tal que $\rho_G(\gamma) = (\tau_i)_G$. Seja $q \in G \cap I_\gamma$. Assim $(\tau_i)_G = \rho_G(\gamma) = (\tau_{i(\gamma,q)})_G = (\sigma(\gamma, q))_G \in \sigma_G$. Logo $\tau_G \subseteq \sigma_G$ e completamos nossa demonstração. $\square$

Usando o lema anterior e a elementaridade, temos o próximo resultado:

Proposição 2.1.2. *Seja $M \prec H_\theta$ e seja $\mathbb{P} \in M$ uma ordem parcial. Seja $\psi(u, v_1, \dots, v_n)$ uma fórmula na qual somente as variáveis u, v_1, $\dots$, v_n são livres. Sejam τ_1, $\dots$, $\tau_n \in M$ $\mathbb{P}$-nomes. Então existe $\rho \in M$, $\mathbb{P}$-nome, tal que*

$$\forall p \in \mathbb{P} \ (\ p \Vdash \text{“}\exists y \in H_\theta \ (\psi(y, \tau_1, \dots, \tau_n))\text{”} \rightarrow p \Vdash \psi(\rho, \tau_1, \dots, \tau_n)\ ).$$

Demonstração. Seja

$$D = \{p \in \mathbb{P} \colon \exists \sigma \in H_\theta \ (\ \sigma \text{ é } \mathbb{P}\text{-nome} \ \wedge \ p \Vdash \psi(\sigma, \tau_1, \dots, \tau_n)\ )\}.$$

Por definibilidade, $D \in M$, visto que $\{\mathbb{P}, \tau_1, \dots, \tau_n\} \subset M$. Notamos que D é um aberto em $\mathbb{P}$.

Seja A maximal (para $\subseteq$) entre as anticadeias que são subconjuntos de D. Como $D \in M$, podemos supor que $A \in M$. Para cada $a \in A$, podemos fixar $\sigma_a \in H_\theta$, $\mathbb{P}$-nome, tal que $a \Vdash \psi(\sigma_a, \tau_1, \dots, \tau_n)$. Podemos definir

$$\rho = \{\langle \tau, r\rangle : a \in A \ \wedge \ r \leq a \ \wedge \ r \Vdash \text{“}\tau \in \sigma_a\text{”} \ \wedge \ \tau \in \text{dom } \sigma_a\}.$$

Para cada $a \in A$, temos $a \Vdash \rho = \sigma_a$ ([Kun80, lema VII 8.1]). Como $\mathbb{P} \in H_\theta$, cada $\sigma_a \in H_\theta$ e ainda $|A| < \theta$, teremos $\rho \in H_\theta$. Como A é pré-denso abaixo de qualquer elemento de D,

$$\rho \text{ é } \mathbb{P}\text{-nome e } \forall p \in D \ (\ p \Vdash \psi(\rho, \tau_1, \dots, \tau_n)\ ).$$

Por elementaridade, existe $\rho \in M$, $\mathbb{P}$-nome, tal que $p \Vdash \psi(\rho, \tau_1, \cdots, \tau_n)$, sempre que $p \in D$.

Agora seja $p \in \mathbb{P}$ tal que $p \Vdash$ “$\exists y \in H_\theta \ (\psi(y, \tau_1, \dots, \tau_n))$” e seja $q \leq p$. Pelo lema anterior, existem $r \leq q$ e $\sigma \in H_\theta$, $\mathbb{P}$-nome, tais que $r \Vdash \psi(\sigma, \tau_1, \dots, \tau_n)$. Sendo assim $r \in D$ e daí $r \Vdash \psi(\rho, \tau_1, \dots, \tau_n)$. Logo $p \Vdash \psi(\rho, \tau_1, \cdots, \tau_n)$, pelo lema 1.2.8. □

Agora estamos aptos a demonstrar o próximo teorema:

Teorema 2.1.3 ([She82]). *Sejam $M \prec H_\theta$ e $\mathbb{P} \in M$, uma ordem parcial. Se G é um genérico (sobre H_θ),*

$$M[G] \prec H_\theta[G] = H_\theta^{\mathbf{V}[G]}.$$

Demonstração. Como $G \subset \mathbb{P}$ e $\mathbb{P} \in H_\theta$, temos que $G \in \mathbf{V}[G] \cap H_\theta^{\mathbf{V}[G]}$. Logo $H_\theta[G] \subseteq H_\theta^{\mathbf{V}[G]}$.

Mostremos que $H_\theta^{\mathbf{V}[G]} \subseteq H_\theta[G]$. Seja $x \in H_\theta^{\mathbf{V}[G]}$. Então, para algum $p \in G$ e algum τ, $\mathbb{P}$-nome, $\tau_G = x$ e $p \Vdash$ “$\tau \in H_\theta$”. Pelo lema anterior, existe $\sigma \in H_\theta$, $\mathbb{P}$-nome, tal que $p \Vdash \tau = \sigma$. Sendo assim $x = \tau_G = \sigma_G$ e $x \in H_\theta[G]$.

Como $\mathbb{P} \in M$, temos que $\Gamma = \{\langle \check{p}, p\rangle : p \in \mathbb{P}\} \in M$. Sendo assim, $G = \Gamma_G \in M[G]$. Portanto temos que $M[G] \subseteq H_\theta[G]$. Para provarmos que $M[G] \prec H_\theta[G]$, usaremos o critério de Tarski-Vaught.

Seja $\psi(u, v_1, \ldots, v_n)$ uma fórmula em que somente as variáveis u, v_1, ..., v_n ocorrem livres, e sejam $x_1, \ldots, x_n \in M[G]$, tais que

$$\exists y \in H_\theta[G] \ (\ \psi(y, x_1, \ldots, x_n)\ ).$$

Para cada i, fixemos $\tau_i \in M$, $\mathbb{P}$-nome, tal que $(\tau_i)_G = x_i$. Portanto existe $q \in G$ tal que

$$q \Vdash \text{“}\exists y \in H_\theta \ (\ \psi(y, \tau_1, \ldots, \tau_n)\ )\text{”}.$$

Como $\{\tau_1, \ldots, \tau_n\} \in M$, pela proposição anterior, podemos fixar $\rho \in M$, $\mathbb{P}$-nome, tal que

$$\forall p \in \mathbb{P} \ (\ p \Vdash \text{“}\exists y \in H_\theta \ (\psi(y, \tau_1, \ldots, \tau_n))\text{”} \ \rightarrow p \Vdash \psi(\rho, \tau_1, \ldots, \tau_n)\ ).$$

Dado que $q \in G$, $\rho_G \in M[G]$ e vale $\psi(\rho_G, x_1, \ldots, x_n)$. □

Observação 2.1.4. *Vale notar que, em* $\mathbf{V}[G]$, $|M[G]| = |M|$, *pois* $M \subseteq M[G]$ *e a aplicação*

$$\tau \in M \text{ é } \mathbb{P}\text{-nome} \ \longmapsto \ \tau_G \in M[G]$$

é sobrejetora.

No exemplo 3.3.7, o lema abaixo será necessário. Este tem demonstração análoga à do teorema anterior.

Lema 2.1.5. *Sejam* $M \prec H_\theta$ *e* $\kappa \in M$ *um cardinal regular não enumerável. Seja* $\mathbb{P} \in M \cap H_\kappa$ *uma ordem parcial. Se* G *é um* $\mathbb{P}$*-genérico,* $(M \cap H_\kappa)[G] = M[G] \cap H_\kappa[G]$.

Demonstração. Pela proposição 1.3.13, $M \cap H_\kappa \prec H_\kappa$.

Seja $\tau \in M$ um $\mathbb{P}$-nome. Usando de argumentos e construções muito parecidos aos usados na proposição 2.1.2, consegue-se mostrar que existe $\rho \in M \cap H_\kappa$, $\mathbb{P}$-nome, tal que

$$\forall p \in \mathbb{P} \ (\ p \Vdash \text{“}\tau \in H_\kappa\text{”} \ \rightarrow p \Vdash \rho = \tau\ ).$$

Basta trocar o aberto D daquela proposição por

$$D = \{p \in \mathbb{P} \colon \exists \sigma \in H_\kappa, \ \mathbb{P}\text{-nome} \ (\ p \Vdash \tau = \sigma\ )\}.$$

Vale observar que não podemos usar *diretamente* a proposição pois, apesar de $\mathbb{P} \in M \cap H_\kappa \prec H_\kappa$, τ pode não estar em H_κ.

Já temos que $(M \cap H_\kappa)[G] \subseteq M[G] \cap H_\kappa[G]$. Lembremos que $H_\kappa[G] = H_\kappa^{\mathbf{V}[G]}$. Seja $x \in M[G] \cap H_\kappa^{\mathbf{V}[G]}$. Logo existem $p \in G$ e $\tau \in M$, $\mathbb{P}$-nome, tais que $x = \tau_G$ e $p \Vdash$ “$\tau \in H_\kappa$”. Pelo parágrafo anterior existe $\rho \in M \cap H_\kappa$ tal que $p \Vdash$ “$\tau = \rho$”. Logo $x = \tau_G = \rho_G \in (M \cap H_\kappa)[G]$. □

2.2 Quando $M[G] \cap \mathbf{V} = M$

A extensão por *forcing* $\mathbf{V}[G]$ tem os mesmos ordinais que $\mathbf{V}$. E quanto a $M[G]$? $M[G]$ tem sempre os mesmos ordinais de M? E quanto a elementos de $\mathbf{V}$? Podemos forçar que elementos de $\mathbf{V}$ estejam em $M[G]$, mesmo se não estivessem em M? Ficam as perguntas: "Quando $M[G] \cap \mathbf{V} = M$? Quando $M[G] \cap \mathbf{ON} = M \cap \mathbf{ON}$?" Em [She82] temos as respostas.

Reproduzimos aqui a demonstração de S.Shelah pois variações das idéias contidas nela serão usadas mais a seguir.

Proposição 2.2.1 ([She82]). *Sejam M um submodelo elementar e $\mathbb{P} \in M$ uma ordem parcial. Suponha G um $\mathbb{P}$-genérico. Então são equivalentes:*

1. *$G \cap M$ é $\mathbb{P}$-genérico sobre M (i.e., para todo $D \in M$ denso em $\mathbb{P}$, $G \cap M \cap D \neq \emptyset$),*
2. *$M[G] \cap \mathbf{V} = M$ e*
3. *$M[G] \cap \mathbf{ON} = M \cap \mathbf{ON}$.*

Demonstração. ($1 \to 2$) Seja $x \in M[G] \cap \mathbf{V}$. Então $x = \tau_G$, para algum $\tau \in M$, $\mathbb{P}$-nome. Dado que $\{\mathbb{P}, \tau\} \in M$, temos que

$$D = \{p \in \mathbb{P}\colon (\exists y \ (p \Vdash \tau = \check{y} \ )) \vee p \Vdash \text{"}\tau \notin \check{\mathbf{V}}\text{"}\} \in M$$

e é denso em $\mathbb{P}$. Tomemos $p \in G \cap M \cap D$. Como $\tau_G = x \in \mathbf{V}$, temos que $\exists y \ (p \Vdash \tau = \check{y} \ )$. Visto que $\{\mathbb{P}, p, \tau\} \subset M$, existe $y \in M$ tal que $p \Vdash \tau = \check{y}$. Daí, $x = \tau_G = y \in M$.

($2 \to 3$) É trivial, dado que $\mathbf{ON} \subset \mathbf{V}$.

($3 \to 1$) Seja $D \in M$ um denso em $\mathbb{P}$. Por elementaridade, existe $A \in M$, anticadeia maximal contida em D. Também por elementaridade, podemos fixar $\langle p_\alpha \colon \alpha < \beta \rangle \in M$ que é enumeração dos elementos de A. Sendo assim,

$$\tau = \{\langle \check{\gamma}, p_\alpha \rangle : \gamma < \alpha < \beta\} \in M$$

e é $\mathbb{P}$-nome.

Seja $\alpha < \beta$ tal que $p_\alpha \in G \cap A$ e temos $\tau_G = \alpha$. Como $M[G] \cap \mathbf{ON} \subseteq M$, temos que $\alpha \in M$. Pelo lema 1.3.7, $p_\alpha \in M$ e $D \cap M \cap G \neq \emptyset$. □

Vale a pena observar que, se "$\mathbb{P} \subseteq M$", teremos a igualdade $M[G] \cap \mathbf{V} = M$. Esta parece ser a condição mais fácil sob a qual tem-se a igualdade. Em [She82] S.Shelah tem como objetivo definir **ordem própria** e continua analisando a citada igualdade de um ponto de vista mais pontual. Para tanto ele chega à seguinte definição:

Definição 2.2.2. *Sejam $M \prec H_\theta$ e $\mathbb{P} \in M$ uma ordem parcial. Dizemos que $p \in \mathbb{P}$ é* $(\mathbb{P}, M)$-***genérica****, se $D \cap M$ é pré-denso abaixo de p, sempre que $D \in M$ é denso em $\mathbb{P}$.*

Observação 2.2.3. *Na definição anterior podemos trocar "D é denso" por "D é pré-denso", por "D é denso abaixo de p" ou ainda por "D é pré-denso abaixo de p".*

Usando a proposição anterior, provamos facilmente a seguinte:

Proposição 2.2.4 ([She82]). *Nas condições da definição, são equivalentes:*

1. *p é $(\mathbb{P}, M)$-genérica;*

2. *$M[G] \cap \mathbf{V} = M$, sempre que $p \in G$ e G é um $\mathbb{P}$-genérico; e*

3. *$M[G] \cap \mathbf{ON} = M \cap \mathbf{ON}$, sempre que $p \in G$ e G é um $\mathbb{P}$-genérico.* □

Dadas que as anticadeias maximais são conjuntos pré-densos, bastaria então pedir que elas estivessem contidas em M, sempre que fossem elementos de M. Como todo elemento enumerável de M está contido em M (corolário 1.3.9), podemos concluir a proposição a seguir:

Proposição 2.2.5. *Sejam $M \prec H_\theta$ e $\mathbb{P} \in M$ uma ordem parcial c.c.c. Então toda condição é $(\mathbb{P}, M)$-genérica e, por conseqüência, $M[G] \cap \mathbf{V} = M$, para todo genérico G.*

Demonstração. Seja $D \in M$ um denso em $\mathbb{P}$. Temos que existe $A \subseteq D$, anticadeia maximal. Por elementaridade, podemos supor que $A \in M$. Já que $\mathbb{P}$ é c.c.c., temos que A é enumerável e, como $A \in M$, $A \subseteq M$. Como A é pré-denso e $A = A \cap M \subseteq D \cap M$, $D \cap M$ é pré-denso.

Provamos, então, que $\mathbf{1}$ é $(\mathbb{P}, M)$-genérica. Como toda extensão de uma condição $(\mathbb{P}, M)$-genérica também é $(\mathbb{P}, M)$-genérica, todas as condições de $\mathbb{P}$ o serão. Logo, pela proposição anterior, $M[G] \cap \mathbf{V} = M$, sempre que G é genérico. □

O fato mais importante usado na demonstração anterior não foi $\mathbb{P}$ ser c.c.c., mas sim termos algumas anticadeias de $\mathbb{P}$ contidas em M, ou melhor, pelo menos aquelas que são elementos de M. Isso é suficiente para demonstrarmos a proposição a seguir, na qual notamos que tal condição também é necessária.

Proposição 2.2.6. *Sejam $M \prec H_\theta$ e $\mathbb{P} \in M$ uma ordem parcial. São equivalentes:*

1. *$M[G] \cap \mathbf{V} = M$, para todo genérico G;*

2. *$A \subseteq M$, sempre que $A \in M$ é anticadeia.*

Demonstração. Provemos somente que $(1 \to 2)$, já que que $(2 \to 1)$ é completamente análogo à proposição anterior.

Seja $A \in M$, anticadeia. Tomemos $\langle p_\alpha : \alpha < \beta \rangle \in M$ que é enumeração dos elementos de A. Exatamente como na proposição 2.2.1, temos que $\tau = \{\langle \check{\gamma}, p_\alpha \rangle : \gamma < \alpha < \beta\} \in M$ e é $\mathbb{P}$-nome. Fixemos $\alpha < \beta$ e um genérico G ao qual p_α pertença. Daí, $\tau_G = \alpha \in M[G] \cap \mathbf{ON}$. Por hipótese, $\alpha \in M$. Como $\langle p_\alpha : \alpha < \beta \rangle \in M$, $p_\alpha \in M$. □

Analisando melhor a demonstração anterior, podemos tomar $\beta = |A|$ e observamos que

$$\mathbf{1} \Vdash \text{“}\tau \in \check{\beta}\text{”}.$$

Bastava então,

$$M[G] \cap \beta \subseteq M,$$

para concluirmos que $A \subseteq M$. Este comentário prova a implicação $(1 \to 2)$ do nosso próximo resultado:

Proposição 2.2.7. *Sejam $M \prec H_\theta$ e $\mathbb{P} \in M$ uma ordem parcial. Seja $\beta \in \mathbf{ON} \cap M$. São equivalentes:*

1. *$M[G] \cap \beta = \beta \cap M$, para todo genérico G;*

2. *$A \subseteq M$, sempre que $A \in M$ é anticadeia e $|A| \leq |\beta|$.*

Demonstração. $(2 \to 1)$ Seja $\tau \in M$ um $\mathbb{P}$-nome e suponha que $p \Vdash \tau \in \check{\beta}$, para algum $p \in \mathbb{P}$. Vamos mostrar que $p \Vdash$ “$\tau \in \check{M}$”.

Seja $D = \{q \in \mathbb{P}: \exists \alpha < \beta \ (\ q \Vdash \tau = \check{\alpha} \ ) \vee q \Vdash \tau \notin \check{\beta}\}$ e notamos que D é denso em $\mathbb{P}$. Por definibilidade, $D \in M$, já que $\{\mathbb{P}, \beta, \tau\} \subset M$. Por elementaridade, existe $A \in M$, anticadeia maximal, tal que $A \subseteq D$. Seja

$$X = \{\alpha < \beta: \exists q \in A \ (\ q \Vdash \tau = \check{\alpha} \ )\},$$

que é elemento de M, pois que $\{\tau, \mathbb{P}, \beta, A\} \subset M$. Vejamos que $p \Vdash$ “$\tau \in \check{X}$”. Seja $q \leq p$. Como $p \Vdash \tau \in \check{\beta}$, existem $r \leq q$ e $\alpha < \beta$, tais que $r \Vdash \tau = \check{\alpha}$. Seja $s \in A$ tal que s e r são compatíveis. Daí $s \Vdash \tau = \check{\alpha}$ e $\alpha \in X$.

Para cada, $\alpha \in X$, seja $q_\alpha \in A$ tal que $q_\alpha \Vdash \tau = \check{\alpha}$. Por elementaridade, podemos supor $\langle q_\alpha: \alpha \in X\rangle \in M$. É fácil ver que $\langle q_\alpha: \alpha \in X\rangle$ é uma função injetora. Dado que $\{q_\alpha: \alpha \in X\} \subseteq A$, também é anticadeia. Além disso, $|\{q_\alpha: \alpha \in X\}| \leq |\beta|$. Por hipótese, $\{q_\alpha: \alpha \in X\} \subseteq M$. Como está em bijeção com X por uma função que é elemento de M, temos que $X \subseteq M$ (proposição 1.3.8). Então $p \Vdash$ “$\tau \in \check{M}$”.

Sendo assim, provamos que, se $\tau \in M$ é $\mathbb{P}$-nome,

$$\mathbf{1} \Vdash \text{“}\tau \in \check{\beta} \to \tau \in \check{M}\text{”}.$$

Portanto, se G é genérico, $M[G] \cap \beta \subseteq M$. □

Depois dessa proposição, ficam imediatos os corolários a seguir:

Corolário 2.2.8. *Nas condições da proposição anterior, se $\beta = \kappa$ é cardinal, então são equivalentes:*

1. *$M[G] \cap \kappa = M \cap \kappa$, para todo genérico G;*

2. *$A \subseteq M$, sempre que $A \in M$ é anticadeia e $|A| \leq \kappa$.* □

Corolário 2.2.9. *Nas condições da proposição, podemos substituir α por $X \in M$, qualquer. São equivalentes:*

1. *$M[G] \cap X = M \cap X$, para todo genérico G;*

2. *$A \subseteq M$, sempre que $A \in M$ é anticadeia e $|A| \leq |X|$.* □

Continuamos "esgotando" os argumentos buscando condição mais "global", ou seja, condição sobre a ordem toda, para que se possa ter a "manutenção" dos ordinais.

Proposição 2.2.10. *Ainda sob as condições da proposição anterior, seja $\kappa \in M$ um cardinal tal que $M \cap \kappa$ é ordinal. Se $\mathbb{P}$ é κ-c.c., então $M[G] \cap \mathbf{ON} = M \cap \mathbf{ON}$, sempre que G é genérico.*

Demonstração. Seja $A \in M$ uma anticadeia em $\mathbb{P}$. Sendo assim, temos que $|A| \in M \cap \kappa$, visto que $\mathbb{P}$ é κ-c.c. Dado que $M \cap \kappa$ é ordinal, $|A| \subseteq M$. Pela proposição 1.3.8, $A \subseteq M$. Pela proposição 2.2.6, $M[G] \cap \mathbf{ON} \subseteq M$, sempre que G é um genérico. □

Proposição 2.2.11. *Sejam $M \prec H_\theta$ e $\mathbb{P} \in M$ uma ordem parcial. Seja $\kappa \in M$ um cardinal tal que $\kappa \nsubseteq M$. Se, para todo genérico G, $M[G] \cap \kappa = M \cap \kappa$, então $\mathbb{P}$ é κ-c.c.*

Demonstração. Suponha que exista anticadeia de $\mathbb{P}$ de tamanho κ. Por elementaridade, temos que existe $A \in M$, anticadeia de cardinalidade κ. Pelo corolário 2.2.8, temos que $A \subseteq M$. Logo $\kappa \subseteq M$, pela proposição 1.3.8, o que é um absurdo. □

Corolário 2.2.12. *Sejam $M \prec H_\theta$ e $\mathbb{P} \in M$ uma ordem parcial. Seja $\kappa \in M$ um cardinal tal que $\kappa \cap M$ é ordinal e $\kappa \cap M < \kappa$. São equivalentes:*

1. *$\mathbb{P}$ tem κ-c.c., e*

2. *$M[G] \cap \mathbf{ON} = M \cap \mathbf{ON}$, sempre que G é genérico.* □

2.3 Ordens próprias

Embora haja mais de uma "definição" para ordens próprias, vamos apresentar aqui somente aquela que lida com objetos com os quais temos trabalhado e trabalharemos neste trabalho. Para maiores detalhes recomendamos a leitura sobre tais ordens em [She82], [Bau84] e [Jec86].

Definição 2.3.1. *Uma ordem parcial $\mathbb{P}$ será dita **própria**, se, para todo $M \prec H_\theta$, onde $\mathbb{P} \in M$, M é enumerável e $\theta > \omega$ é cardinal regular, toda condição $p \in M$ tem extensão que é $(\mathbb{P}, M)$-genérica.*

Para tornar o trabalho mais completo vejamos uma demonstração do resultado a seguir:

Proposição 2.3.2. *Se $\mathbb{P}$ é ordem parcial própria, $\mathbb{P}$ é c.c.p.*

Demonstração. Usaremos a equivalência dada pela proposição 1.2.32. Sejam τ, σ, $\mathbb{P}$-nomes, e $p \in \mathbb{P}$, tais que $p \Vdash$ "$\tau\colon \check{\omega} \longrightarrow \sigma$".

Seja $M \prec H_\theta$, enumerável, tal que $\{p, \mathbb{P}, \tau, \sigma\} \subset M$. Como $\mathbb{P}$ é própria, existe $q \leq p$ que é $(\mathbb{P}, M)$-genérica

Seja $\mu = \sigma \cap M$ e vejamos que $q \Vdash$ "ran $\tau \subseteq \mu$".

Para cada $n < \omega$, definimos

$$D_n = \left\{ r \in \mathbb{P}\colon \begin{array}{c} \exists \langle \pi, s\rangle \in \sigma \; (\; r \leq s \; \wedge \; r \Vdash \text{“}\tau(\check{n}) = \pi\text{”} \;) \\ \vee \;\; r \perp p \end{array} \right\}.$$

Pela proposição 1.2.9, dado que $p \Vdash$ "$\tau(\check{n}) \in \sigma$", temos que D_n é denso em $\mathbb{P}$. Por definibilidade, $D_n \in M$, dado que $\{p, \mathbb{P}, \tau, \sigma, n\} \subset M$.

Sejam $t \leq q$ e $n < \omega$. Como q é $(\mathbb{P}, M)$-genérico, existe $r \in D_n \cap M$ compatível com t. Como t é extensão de p, r é compatível com p e existe $\langle \pi, s\rangle \in \sigma$, tal que $r \leq s$ e $r \Vdash$ "$\tau(\check{n}) = \pi$". Como $M \prec H_\theta$, $\{\mathbb{P}, r, \tau, \sigma, n\} \subset M$ e

$$H_\theta \models \exists \langle \pi, s\rangle \in \sigma \; (\; r \leq s \; \wedge \; r \Vdash \text{“}\tau(\check{n}) = \pi\text{”} \;),$$

temos que existe $\langle \pi, s\rangle \in \sigma \cap M = \mu$ tal que $r \leq s$ e $r \Vdash$ "$\tau(\check{n}) = \pi$". Se u é extensão comum a r e t, u estende s e temos que $u \Vdash$ "$\tau(\check{n}) = \pi \in \mu$". □

Já conhecemos exemplos de ordens parciais próprias:

Proposição 2.3.3. *Se $\mathbb{P}$ é uma ordem parcial c.c.c., então $\mathbb{P}$ é própria.*

Demonstração. Pela proposição 2.2.5, toda extensão é $(\mathbb{P}, M)$-genérica. □

Proposição 2.3.4. *Se $\mathbb{P}$ é enumeravelmente fechada, então $\mathbb{P}$ é própria.*

Demonstração. Ver, por exemplo, [Jec86]. □

2.4 O cardinal td(M)

Muito da discussão até agora transcorreu sobre garantir que alguns elementos de M - mais precisamente as anticadeias em $\mathbb{P}$ ou aquelas de cardinalidade limitada - fossem também subconjuntos. Pela proposição 1.3.8, se A, $B \in M$, são equipotentes, então $A \subseteq M \leftrightarrow B \subseteq M$. Isso nos motivou a definir um certo "grau de transitividade" do submodelo elementar:

Definição 2.4.1. *Seja M um submodelo elementar não-transitivo. Então definimos:*

$$\text{td}(M) = min\{\alpha \in \mathbf{ON} \cap M\colon \alpha \nsubseteq M\}.$$

Vale observar que $\text{td}(M)$ é um ordinal que **é elemento de** M. Este fato será amplamente explorado.

Observação 2.4.2. *Como todo elemento enumerável de* $M \prec H_\theta$ *é também subconjunto de* M *(corolário 1.3.9), temos que, se* $\theta = \aleph_1$, M *será transitivo, visto que todos os seus elementos são enumeráveis. Portanto, nesta seção trabalharemos com* $\theta \geq \aleph_2$.

Direto da definição temos:

Corolário 2.4.3. *Nas condições da definição 2.4.1, suponhamos ainda que* $\omega_n \subset M$ *e* $|M| = \aleph_n$, *onde* n *é um natural e* $\omega_{n+1} < \theta$. *Então* $\text{td}(M) = \omega_{n+1}$. □

Também como corolário da definição, temos:

Corolário 2.4.4. *Nas condições da definição 2.4.1, temos que, se* $A \in M$, *então* $A \subset M$ *se, e somente se,* $|A| < \text{td}(M)$.

Demonstração. (Só se) Já que $|A| \in M$ (definibilidade), pela proposição 1.3.8, $|A| \subset M$. Sendo assim, $|A| < \text{td}(M)$.

(Se) Visto que $|A| \in M$, pela definição de $\text{td}(M)$, $|A| \subset M$. Sendo assim, $A \subset M$. □

Proposição 2.4.5. *Nas condições da definição 2.4.1, temos que* $\text{td}(M)$ *é cardinal regular não-enumerável.*

Demonstração. Dado que todo elemento enumerável de M é subconjunto de M, $\text{td}(M) \geq \omega_1$.

Como $\text{td}(M) \in M$, temos que $|\text{td}(M)| \in M$. Visto que $\text{td}(M) \not\subseteq M$, chegamos a $|\text{td}(M)| \not\subseteq M$ e portanto $|\text{td}(M)| \geq \text{td}(M)$. Logo $\text{td}(M)$ é cardinal.

Agora suponha $\eta = \text{cf}(\text{td}(M)) < \text{td}(M)$. Por definibilidade $\eta \in M$. Por elementaridade, existe $\langle x_\alpha : \alpha < \eta \rangle \in M$, seqüência cofinal em $\text{td}(M)$. Dada a definição de $\text{td}(M)$, temos que $\eta \subseteq M$, e, por conseqüência (proposição 1.3.8), $\{x_\alpha : \alpha < \eta\} \subseteq M$.

Suponha $\beta < \text{td}(M)$. Existe $\alpha < \eta$ tal que $\beta < x_\alpha$. Como $x_\alpha \in M$ e $x_\alpha < \text{td}(M)$, temos que $x_\alpha \subseteq M$, pela definição de $\text{td}(M)$. Logo $\beta \in M$. Mas isso implica que $\text{td}(M) \subseteq M$, uma contradição. □

Proposição 2.4.6. *Nas condições da definição 2.4.1,* $\text{td}(M) \cap M < \text{td}(M)$. *Além disso, se* $\kappa \in M$ *é tal que* $M \cap \kappa < \kappa$, *então* $\text{td}(M) = \kappa$.

Demonstração. Dada a definição de $\text{td}(M)$, temos que $\text{td}(M) \cap M \in \mathbf{ON}$. Como $\text{td}(M) \not\subseteq M$, $\text{td}(M) \cap M < \text{td}(M)$.

Agora suponha $\kappa \in M$ tal que $\kappa \cap M < \kappa$. Observe que $\kappa \cap M \in \mathbf{ON}$. Como $\kappa \not\subseteq M$, temos que $\text{td}(M) \leq \kappa$. Se $\text{td}(M) < \kappa$, teríamos que $\text{td}(M) \in \kappa \cap M$. Logo $\text{td}(M) \subseteq M \cap \kappa$, o que é um absurdo. □

Podemos comparar $\text{td}(M)$ e $\mathbf{c.c.}(\mathbb{P})$ (definição 1.2.15), e teremos:

Teorema 2.4.7. *Sejam M um submodelo elementar não-transitivo e $\mathbb{P} \in M$. Então são equivalentes:*

1. $\mathbf{c.c.}(\mathbb{P}) \leq \mathrm{td}(M)$;

2. $M[G] \cap \mathbf{ON} = M \cap \mathbf{ON}$, *para todo todo genérico G.*

Demonstração. Vale lembrar que $\mathbf{c.c.}(\mathbb{P}) \in M$, visto que $\mathbb{P} \in M$ (e definibilidade).

($1 \to 2$) Seja $A \in M$ uma anticadeia de $\mathbb{P}$. Então $|A| \in M \cap \mathbf{c.c.}(\mathbb{P})$. Daí, $|A| \subseteq M$. Sendo assim, $A \subseteq M$, pela proposição 1.3.8. O resultado segue pela proposição 2.2.6.

($2 \to 1$) Seja $A \in M$ uma anticadeia de $\mathbb{P}$. Por hipótese, $A \subseteq M$ (proposição 2.2.6). Logo $|A| \subseteq M$. Pela definição de $\mathrm{td}(M)$, teremos $|A| < \mathrm{td}(M)$. Portanto

$$M \models \forall A \subseteq \mathbb{P} \text{ (} A \text{ é anticadeia } \to |A| < \mathrm{td}(M) \text{).}$$

Por elementaridade,

$$\mathbf{V} \models \forall A \subseteq \mathbb{P} \text{ (} A \text{ é anticadeia } \to |A| < \mathrm{td}(M) \text{).}$$

Portanto, $\mathbf{c.c.}(\mathbb{P}) \leq \mathrm{td}(M)$. □

Proposição 2.4.8. *Nas condições do teorema anterior, se $\mathrm{td}(M) < \mathbf{c.c.}(\mathbb{P})$, temos que*

$$\mathrm{td}(M) = \min\{\alpha \in M \cap \mathbf{ON} \colon M[G] \cap \alpha \neq M \cap \alpha, \text{para algum genérico } G\}.$$

Demonstração. Por elementaridade, podemos tomar uma anticadeia $A \in M$, tal que $|A| = \mathrm{td}(M)$. Sendo assim, $A \not\subseteq M$. Daí, pelo corolário 2.2.8, existe G, genérico, tal que $M[G] \cap \mathrm{td}(M) \neq M \cap \mathrm{td}(M)$.

Seja $\alpha \in M$ e suponha que $\alpha < \mathrm{td}(M)$. Então $\alpha \subset M \subseteq M[G]$, pela definição de $\mathrm{td}(M)$. Daí $\alpha = M[G] \cap \alpha = M \cap \alpha$, para todo genérico G. □

Capítulo 3

Preservação de propriedades de submodelos elementares

Em grande parte da literatura envolvendo submodelos elementares e topologia, duas propriedades acompanham largamente os submodelos: **enumeravelmente fechado** e **ω-covering**.

Estudaremos neste capítulo quando uma dessas duas propriedades - dando mais atenção à ω-covering - é "herdada" por $M[G]$, caso M já a tenha. Essa herança fundamentalmente depende da ordem $\mathbb{P}$.

Investigamos também a possibilidade de conseguir uma dessas propriedades em $M[G]$ mesmo quando M não a satisfaz.

3.1 Submodelos elementares ω-covering

Por definibilidade temos que, se X é um conjunto finito, então $X \in M$ se, e somente se, $X \subset M$, para qualquer submodelo elementar M. Já, se $X \in M$ é enumerável, $X \subset M$, dada a definibilidade dos naturais e do *conjunto* dos naturais (corolário 1.3.9). E quanto aos subconjuntos enumeráveis de M? **Não podemos** determinar, usando somente a elementaridade, que estes sejam também *elementos* de M. Para tanto definimos as propriedades que se seguem.

Definição 3.1.1. *Dizemos que um submodelo elementar M é **enumeravelmente fechado**, se $[M]^\omega \subset M$, ou seja, se todo subconjunto enumerável de M é também* elemento *de M.*

Um submodelo elementar enumeravelmente fechado é, de certa forma, *grande*, visto que precisamos ter $\kappa^\omega = \kappa$, se $\kappa = |M|$. Em particular, κ deverá ser maior ou igual ao *continuum*.

A.Dow ([Dow88a]) propõe um enfraquecimento dessa condição mantendo ainda uma boa propriedade sobre os enumeráveis:

Definição 3.1.2. *Seja M um submodelo elementar. Diremos que M é ω-**covering** se, para todo $X \subset M$, enumerável, existe $Y \in M$, enumerável, tal que $X \subseteq Y$.*

Todo submodelo elementar enumeravelmente fechado será ω-covering. Mas, como logo veremos, podemos ter submodelo elementar ω-covering eventualmente de tamanho bem menor que o *continuum* - salvo, claro, o caso em que o *continuum* já é suficientemente pequeno (**CH**). Em [Jun00], L.Junqueira prova:

Teorema 3.1.3 ([Jun00]). **CH** *é equivalente a "todo submodelo elementar ω-covering é enumeravelmente fechado".* □

Para a demonstração de tal resultado precisa-se do:

Teorema 3.1.4 ([Jun00]). *Se M é submodelo elementar ω-covering, então $\omega_1 \subseteq M$.* □

Podemos generalizar este último teorema para:

Proposição 3.1.5. *Sejam M um submodelo elementar ω-covering e $\beta \in M$ um ordinal de cofinalidade não-enumerável. Então $\mathrm{cf}(M \cap \beta) > \omega$.*

Demonstração. Seja $g\colon \omega \longrightarrow M \cap \beta$ uma função estritamente crescente.

Como M é ω-covering, existe $X \in M$, enumerável, tal que $g[\omega] \subseteq X$. Visto que $\{X, \beta\} \subset M$, temos que $Y = \beta \cap X \in M$, por definibilidade. Dado que Y é enumerável e $\mathrm{cf}(\beta) > \omega$, temos que $\gamma = \sup Y + 1 < \beta$ e, ainda, $\gamma \in M$, por definibilidade.

Sendo assim, $g[\omega] \subseteq \gamma$ e g não pode ser cofinal em $M \cap \beta$. □

Em [Dow88a] encontramos uma construção de submodelos elementares ω-covering de tamanho $\aleph_1$. No próximo teorema, fazemos uma caracterização completa de tais submodelos.

Teorema 3.1.6. *Seja $M \prec H_\theta$ tal que $|M| = \aleph_1$. Então M é ω-covering se, e somente se, existe $\langle (M_\alpha, A_\alpha)\colon \alpha < \omega_1 \rangle$, tal que $M = \bigcup_{\alpha<\omega_1} M_\alpha$ e:*

1. $\forall \alpha < \beta < \omega_1 \ (M_\alpha \subseteq A_\alpha \in M_\beta)$ *e*

2. $\forall \alpha < \omega_1 \ (M_\alpha \prec M \ \wedge \ A_\alpha \in M \ \wedge \ |M_\alpha| = |A_\alpha| = \aleph_0)$.

Demonstração. (Só se) Já que M tem cardinalidade $\aleph_1$, podemos escrever

$$M = \bigcup_{\alpha<\omega_1} X_\alpha,$$

onde cada X_α é enumerável.

Suponhamos a seqüência construída em $\beta < \omega_1$. Dado que $\{A_\alpha\colon \alpha < \beta\} \cup X_\beta$ é um subconjunto enumerável de M, existe $M_\beta \prec M$, enumerável, tal que $\{A_\alpha\colon \alpha < \beta\} \cup X_\beta \subseteq M_\beta$. Visto que M é ω-covering, seja $A_\beta \in M$ um enumerável tal que $M_\beta \subseteq A_\beta$.

(Se) Seja $X \in [M]^\omega$. Existe $\alpha < \omega_1$ tal que $X \in [M_\alpha]^\omega$. Daí $X \subseteq A_\alpha$ e A_α é um elemento enumerável de M. □

Observamos que o último teorema nos *ensina* como construir submodelos elementares ω-covering de tamanho $\aleph_1$. Com uma pequena modificação em sua demonstração chegamos ao:

Corolário 3.1.7. *Seja M um submodelo elementar ω-covering e seja $X \subseteq M$ de tamanho $\aleph_1$. Então existe $N \prec M$ tal que $X \subseteq N$ e N é ω-covering de tamanho $\aleph_1$.* □

Na demonstração do teorema 3.1.6, usamos que subconjuntos enumeráveis de ω_1 são limitados, ou seja, nós nos valemos que $\mathrm{cf}(\omega_1) > \omega$. Esta mesma argumentação nos demonstra:

Proposição 3.1.8. *Seja $\langle M_\alpha : \alpha < \lambda \rangle$ uma seqüência crescente de submodelos elementares ω-covering, onde λ é um ordinal limite. Se $\mathrm{cf}(\lambda) > \omega$, então $M = \bigcup_{\alpha<\lambda} M_\alpha$ é ω-covering.* □

Esta proposição acaba por provar o seguinte lema:

Lema 3.1.9. *Seja $n \geq 1$ um número natural. Seja $N \prec H_\theta$, ω-covering. Para todo subconjunto X de N, de cardinalidade $\aleph_n$, existe $M \prec N$, ω-covering de tamanho $\aleph_n$, tal que $X \subseteq M$.*

Demonstração. Já demonstramos para o caso $n = 1$. Prosseguimos com a demonstração por indução em n.

Seja $X \subseteq N$ um conjunto de tamanho $\aleph_{n+1}$. Podemos escrever $X = \bigcup_{\alpha<\omega_{n+1}} X_\alpha$, onde cada X_α tem tamanho $\aleph_n$.

Vamos construir uma seqüência crescente de submodelos elementares ω-covering de N, $\langle M_\alpha : \alpha < \omega_{n+1} \rangle$, tal que

$$\forall \alpha < \omega_{n+1} \ (\ X_\alpha \subseteq M_\alpha \ \wedge \ |M_\alpha| = \aleph_n \ ).$$

Suponhamos que a seqüência já está construída em $\beta < \omega_{n+1}$. Por hipótese de indução, existe $M_\beta \prec N$, ω-covering de tamanho $\aleph_n$, tal que $(\bigcup_{\alpha<\beta} M_\alpha) \cup X_\beta \subseteq M_\beta$.

Pela proposição anterior

$$M = \bigcup_{\alpha<\omega_{n+1}} M_\alpha$$

é ω-covering de tamanho $\aleph_{n+1}$ e $X \subseteq M \prec N$. □

Assim concluímos a caracterização de todos os submodelos elementares ω-covering de tamanho menor que $\aleph_\omega$:

Teorema 3.1.10. *Seja M um submodelo elementar de tamanho $\aleph_n$, onde n é um número natural tal que $n > 1$. Então M é ω-covering se, e somente se, existe uma seqüência crescente de submodelos elementares ω-covering, $\langle M_\alpha : \alpha < \omega_n \rangle$, tal que*

$$M = \bigcup_{\alpha<\omega_n} M_\alpha \quad e \quad \forall \alpha < \omega_n \ (\ |M_\alpha| = \aleph_{n-1} \ ).$$

Demonstração. Basta aplicar a mesma construção usada na demonstração do lema anterior. □

E quanto a $\aleph_\omega$? É possível termos um submodelo elementar ω-covering de tal tamanho? E para outros tamanhos maiores? Veremos pelos resultados a seguir que alguns cardinais não podem ser cardinalidade de um submodelo elementar ω-covering.

Proposição 3.1.11. *Seja $M = \bigcup_{\alpha<\lambda} M_\alpha$, onde $\langle M_\alpha : \alpha < \lambda \rangle$ é uma seqüência estritamente crescente de submodelos elementares e λ é um ordinal tal que $\mathrm{cf}(\lambda) = \omega$. Então M* ***não é*** *ω-covering.*

Demonstração. Seja $\langle \alpha_n : n < \omega \rangle$ uma seqüência estritamente crescente e cofinal em λ. Para cada $n < \omega$, seja $x_n \in M_{\alpha_{n+1}} \setminus M_{\alpha_n}$.

Seja $Y \in M$ um conjunto enumerável. Daí $Y \in M_\beta$, para algum $\beta < \lambda$, e ainda $Y \subseteq M_\beta$. Seja $n < \omega$ tal que $\beta < \alpha_n$. Sendo assim, $x_n \notin M_\beta$ e, por conseqüência, $x_n \notin Y$.

Concluímos que $X = \{x_n : n < \omega\}$ não pode ser subconjunto de nenhum elemento enumerável de M. □

Chegamos ao:

Corolário 3.1.12. *Seja M um submodelo elementar ω-covering. Então $|M|$ tem cofinalidade não-enumerável.*

Demonstração. Sejam $\mu = |M|$ e $\lambda = \mathrm{cf}(\mu)$. Podemos escrever $M = \bigcup_{\alpha<\lambda} X_\alpha$, onde para cada $\alpha < \lambda$, $\aleph_0 \leq |X_\alpha| < \mu$.

Por recorrência, construímos uma seqüência estritamente crescente $\langle M_\alpha : \alpha < \lambda \rangle$ tal que

$$\forall \alpha < \lambda \ (\ X_\alpha \subseteq M_\alpha \prec M \quad \wedge \quad |M_\alpha| < \mu\ ).$$

Seja $M_0 \prec M$, tal que $X_0 \subseteq M_0$ e $|M_0| = |X_0|$. Suponhamos que a seqüência está determinada em $\beta < \lambda$. Como λ é regular, $|\bigcup_{\alpha<\beta} M_\alpha| < \mu$. Sendo assim, podemos fixar $x \in M \setminus (X_\beta \cup \bigcup_{\alpha<\beta} M_\alpha)$. Fixamos $M_\beta \prec M$, tal que $\{x\} \cup X_\beta \cup \bigcup_{\alpha<\beta} M_\alpha \subseteq M_\beta$ e $|M_\beta| < \mu$.

Então $M = \bigcup_{\alpha<\lambda} M_\alpha$. Como a seqüência construída é estritamente crescente, concluímos que $\lambda > \omega$, pela proposição anterior. □

Corolário 3.1.13. *Se α é um ordinal limite de cofinalidade enumerável, então* ***não há*** *submodelos elementares ω-covering de cardinalidade $\aleph_\alpha$.* □

Na seção 1.3.1, apresentamos algumas contruções de submodelos elementares. Vejamos quando os submodelos elementares resultantes também são ω-covering.

Proposição 3.1.14. *Seja $M \prec H_\theta$ um submodelo elementar ω-covering e seja $\kappa \in M$ um cardinal regular não enumerável. Então $M \cap H_\kappa$ é ω-covering.*

Demonstração. Seja $X \subset M \cap H_\kappa$ um conjunto enumerável.

Como M é ω-covering, existe $Z \in M$, enumerável, tal que $X \subseteq Z$.

Seja $Y = \{x \in Z: |\text{trcl}(x)| < \kappa\}$. Como $\{Z, \kappa\} \subset M$, temos, por definibilidade, que $Y \in M$. Dado que Z é enumerável, Y é enumerável e é subconjunto de H_κ. Pelo lema 1.1.5, temos que $Y \in H_\kappa$.

Como $X \subset H_\kappa$, temos que $X \subseteq Y$. □

Para o próximo resultado, introduziremos uma definição.

Definição 3.1.15. *Sejam $M \prec H_\theta$ e $X \in M$. Diremos que M é **ω-covering para os subconjuntos de** X, se, para todo conjunto enumerável $Y \subset X \cap M$, existe $Z \in M$, enumerável, tal que $Y \subseteq Z$.*

Observação 3.1.16. *Sem perda de generalidade, podemos supor $Z \subseteq X$, visto que $X \in M$.*

Percebemos que, se M é submodelo elementar ω-covering, então M é também ω-covering para todos os subconjuntos de todos os seus elementos. Na grande maioria das aplicações de submodelos elementares ω-covering na literatura, usamos mesmo é que M é ω-covering para os subconjuntos de um determinado elemento. Mesmo assim, não sabemos se vale a recíproca, ou seja, se caso M seja ω-covering para todos os subconjuntos de seus elementos, então M será ω-covering.

A definição anterior nos habilita a demonstrar que $M \cap H_\kappa$ é ω-covering sob outras circunstâncias:

Proposição 3.1.17. *Sejam $M \prec H_\theta$ e $\kappa \in M$, cardinal regular não enumerável, tal que $2^{<\kappa} \in M$. Se M é ω-covering para os subconjuntos de $2^{<\kappa}$, então $M \cap H_\kappa$ é ω-covering.*

Demonstração. Como κ é não enumerável, temos que $|H_\kappa| = 2^{<\kappa} < \theta$ (proposição 1.1.7). Daí $H_\kappa \in H_\theta$ e, por definibilidade, $H_\kappa \in M$. Sendo assim, podemos fixar $f \in M$, bijeção entre $2^{<\kappa}$ e H_κ, dada a elementaridade de M.

Seja $X \subset M \cap H_\kappa$ um conjunto enumerável. Como $X \subset M$ e $f \in M$, temos que $f^{-1}[X] \subset 2^{<\kappa} \cap M$ e é enumerável. Por hipótese M é ω-covering para os subconjuntos de $2^{<\kappa}$ e então existe $Y \in M$, enumerável, tal que $f^{-1}[X] \subseteq Y \subset 2^{<\kappa}$. Daí, $X \subseteq f[Y]$ e $f[Y]$ é enumerável. Visto que $f \in M$, $f[Y] \in M$. □

Se continuamos discorrendo sobre ω-covering para subconjuntos, provamos:

Proposição 3.1.18. *Sejam $M \prec H_\theta$ e $\kappa \in M$, cardinal, tal que $\kappa^+ \in M$. Se M é ω-covering para subconjuntos de κ e $\text{cf}(M \cap \kappa^+) > \omega$, então M é ω-covering para subconjuntos de κ^+.*

Demonstração. Seja $X \subset M \cap \kappa^+$ um conjunto enumerável.

Como $\text{cf}(M \cap \kappa^+) > \omega$, existe $\alpha \in M \cap \kappa^+$ tal que $X \subset \alpha$. Por elementaridade, podemos fixar $f \in M$, sobrejeção de κ em α. Ainda explorando a elementaridade, para cada $x \in X$, existe $y_x \in M \cap \kappa$ tal que $f(y_x) = x$.

Dado que M é ω-covering para subconjuntos de κ, existe $Z \in M$, enumerável, tal que $\{y_x : x \in X\} \subseteq Z \subset \kappa$. Daí, $X \subseteq f[Z]$ e $f[Z]$ é enumerável. Visto que $\{f, Z\} \subset M$, $f[Z] \in M$. □

Corolário 3.1.19. *Sejam $M \prec H_\theta$ e $\kappa \in M$ um cardinal regular não enumerável. Suponha que $2^{<\kappa} = \aleph_n < \theta$, para algum $n < \omega$ e que $\mathrm{cf}(M \cap \omega_m) > \omega$, para todo natural m, tal que $1 \leq m \leq n$. Então $M \cap H_\kappa$ é ω-covering.*

Demonstração. Se $\mathrm{cf}(M \cap \omega_1) > \omega$, temos que $\omega_1 \subset M$ e M é ω-covering para os subconjuntos de $\aleph_1$. Portanto, se $2^{<\kappa} = \aleph_1$, então $M \cap H_\kappa$ é ω-covering pela proposição 3.1.17. E temos o corolário válido para $n = 1$.

Por indução, podemos mostrar que M é ω-covering para os subconjuntos de $\aleph_m$, para todos $m \leq n$ e novamente usar a proposição 3.1.17. □

Para a última construção da seção 1.3.1 também podemos discutir ω-covering:

Proposição 3.1.20. *Seja $M \prec H_\theta$ um submodelo elementar ω-covering e seja $t \in \bigcup M$. Então $M[t]$ é ω-covering.*

Demonstração. Seja $X \subset M[t]$ um conjunto enumerável.

Para cada $x \in X$, fixemos $f_x \in M$, tal que

$$f_x \text{ é função } \wedge \ t \in \mathrm{dom}\ f_x \ \wedge \ f_x(t) = x.$$

Fixemos $T \in M$ tal que $t \in T$. Para cada $x \in X$, seja

$$g_x(u) = \begin{cases} f_x(u) & \text{se } u \in T \cap \mathrm{dom}\ f_x \\ 0 & \text{se } u \in T \setminus \mathrm{dom}\ f_x \end{cases}.$$

Por definibilidade, cada $g_x \in M$, visto que $\{f_x, T\} \subset M$. Temos, ainda, que cada g_x é função de domínio T e $g_x(t) = x$.

Como M é ω-covering, existe $Z \in M$, enumerável, tal que $\{g_x : x \in X\} \subseteq Z$. Seja $F = \{g \in Z : g \text{ é função de domínio } T\}$. Por definibilidade, $F \in M$. Ainda temos que F é enumerável e $\{g_x : x \in X\} \subseteq F$.

Seja h a função definida por

$$y \in T \mapsto h(y) = \{g(y) : g \in F\}.$$

Por definibilidade, $h \in M$. Portanto $Y = h(t) \in M[t]$, por construção. Ainda, $X \subseteq Y$ e Y é enumerável. □

3.1.1 Submodelos elementares ω-covering de cardinalidades maiores

Visto que não existe submodelo elementar ω-covering de tamanho $\aleph_\omega$, é natural perguntarmos: "E quanto a $\aleph_{\omega+1}$? E para cardinais ainda maiores?" Veremos neste momento que a resposta é: "Depende!"

Se $M \prec H_\theta$, M é ω-covering se, e somente se, $M \cap [M]^\omega$ é cofinal em $[M]^\omega$, com respeito a $\subseteq$. Chega-se, então, a que discutir tamanho de submodelos elementares ω-covering equivale a discutir cofinalidade de $[X]^\omega$, onde X é um conjunto infinito.

Definição 3.1.21. *Sejam X um conjunto e $\mu \leq |X|$ um cardinal. Dizemos que $\mathcal{C} \subseteq [X]^\mu$ é* ***cofinal*** *em $[X]^\mu$, se, para todo $x \in [X]^\mu$, existe $y \in \mathcal{C}$, tal que $x \subseteq y$ (isto é, se $\mathcal{C}$ é cofinal com respeito a $\subseteq$). Para cardinais $\mu \leq \kappa$, definimos $\mathrm{cf}([\kappa]^\mu, \subseteq)$ como a menor cardinalidade de uma família cofinal em $[\kappa]^\mu$.*

A definição anterior, bem como alguns dos resultados abaixo, podem ser encontrados em [AM05]. Em [Koj01] achamos exatamente a definição abaixo e também uma breve discussão sobre **pcf theory** (do inglês "possible cofinalities"; ver, por exemplo, [Jec95], [Koj95] ou [AM05]). Esta teoria foi criada por S.Shelah na intenção de discutir potências de um cardinal singular.

Definição 3.1.22. *Para um cardinal infinito κ, seja $\mathbf{Cov}_\omega(\kappa) = \mathrm{cf}([\kappa]^{\aleph_0}, \subseteq)$.*

Observação 3.1.23. *Percebe-se logo que: $\mathrm{cf}([\kappa]^\kappa, \subseteq) = 1$ e, por conseqüência, $\mathbf{Cov}_\omega(\aleph_0) = 1$.*

Lema 3.1.24. *1. Se $\aleph_0 \leq \mu \leq \kappa$, então*

$$|[\kappa]^\mu| = 2^\mu \cdot \mathrm{cf}([\kappa]^\mu).$$

2. A "função" $\kappa \in \mathbf{CARD} \mapsto \mathbf{Cov}_\omega(\kappa)$ é crescente.

3. Se κ é um cardinal não enumerável, $\mathbf{Cov}_\omega(\kappa) \geq \kappa$.

4. Se α é um ordinal, $\mathbf{Cov}_\omega(\aleph_{\alpha+1}) = \mathbf{Cov}_\omega(\aleph_\alpha) \cdot \aleph_{\alpha+1}$. □

Demonstração. 1. Suponha $\lambda = \mathrm{cf}([\kappa]^\mu)$ e seja $\{V_\alpha : \alpha < \lambda\}$, uma família cofinal em $[\kappa]^\mu$. Para cada α, fixemos uma bijeção f_α entre μ e V_α. A função definida por

$$(X, \alpha) \in [\mu]^\mu \times \lambda \ \mapsto f_\alpha(X)$$

é uma sobrejeção em $[\kappa]^\mu$.

2. Trivial

3. Provemos primeiro para os casos em que κ é regular. Seja $\mathcal{C} \subseteq [\kappa]^{\aleph_0}$ de cardinalidade estritamente menor que κ. Temos que

$$\sup\{\sup x : x \in \mathcal{C}\} < \kappa,$$

dado que κ é não enumerável e que $|\mathcal{C}| < \kappa$. Sendo assim, $\mathcal{C}$ não pode ser cofinal.

Agora suponha κ singular. Sendo assim, $\kappa = \sup\{\lambda^+ : \lambda < \kappa \text{ é cardinal}\}$. Portanto,

$$\lambda^+ \leq \mathbf{Cov}_\omega(\lambda^+) \leq \mathbf{Cov}_\omega(\kappa),$$

sempre que $\omega < \lambda < \kappa$.

4. Pelos itens anteriores, já temos que $\mathbf{Cov}_\omega(\aleph_\alpha) \cdot \aleph_{\alpha+1} \leq \mathbf{Cov}_\omega(\aleph_{\alpha+1})$.

Seja $\mathcal{C}$ uma família cofinal em $[\aleph_\alpha]^{\aleph_0}$ de cardinalidade $\mathbf{Cov}_\omega(\aleph_\alpha)$. Para cada $\gamma \in \aleph_{\alpha+1}$, tal que $\aleph_\alpha \leq \gamma$, fixemos uma bijeção $f_\gamma\colon \aleph_\alpha \longrightarrow \gamma$. Sendo assim,

$$\{f_\gamma[X]\colon X \in \mathcal{C} \ \wedge \ \aleph_\alpha \leq \gamma < \aleph_{\alpha+1}\}$$

é cofinal em $[\aleph_{\alpha+1}]^{\aleph_0}$.

□

Corolário 3.1.25. *Se n é um natural não-nulo,* $\mathbf{Cov}_\omega(\aleph_n) = \aleph_n$.

Demonstração. Temos que ω_1 é cofinal em $[\aleph_1]^{\aleph_0}$. Portanto, $\aleph_1 \geq \mathbf{Cov}_\omega(\aleph_1)$. Pelo lema anterior, $\mathbf{Cov}_\omega(\aleph_1) = \aleph_1$. Para os outros naturais prosseguimos por indução e ainda usando o lema anterior. □

Notamos que, se existe M que é um submodelo elementar ω-covering de cardinalidade κ, então $\mathbf{Cov}_\omega(\kappa) = \kappa$. Veremos no teorema a seguir que essa condição é suficiente.

Teorema 3.1.26. *Seja κ um cardinal. São equivalentes:*

1. *Existe submodelo elementar ω-covering de cardinalidade κ e*

2. $\mathbf{Cov}_\omega(\kappa) = \kappa$.

Demonstração. (2 → 1) Suponha que $\mathbf{Cov}_\omega(\kappa) = \kappa$. Então $\kappa > \aleph_0$. Vamos construir uma seqüência crescente $\langle M_\alpha\colon \alpha < \omega_1\rangle$ tal que

1. $\forall\alpha$ ($M_\alpha \prec H_\theta \ \wedge \ |M_\alpha| = \kappa$) e

2. $\forall\alpha\forall Y \in [M_\alpha]^\omega \ \exists Z \in M_{\alpha+1}$ ($|Z| = \aleph_0 \ \wedge \ Y \subseteq Z$).

Seja $M_0 \prec H_\theta$ de cardinalidade κ. Para $\beta < \omega_1$, ordinal limite, seja $M_\beta = \bigcup_{\alpha<\beta} M_\alpha$. Para o caso sucessor, fixemos $\mathcal{C} \subseteq [M_\alpha]^\omega$, de cardinalidade κ e cofinal em $[M_\alpha]^\omega$. Já que $\mathcal{C} \subseteq H_\theta$, podemos achar $M_{\alpha+1} \prec H_\theta$ de cardinalidade κ tal que $M_\alpha \cup \mathcal{C} \subseteq M_{\alpha+1}$. Como $\mathcal{C}$ é cofinal em $[M_\alpha]^\omega$, $M_{\alpha+1}$ satisfaz o item 2.

Então $M = \bigcup_{\alpha<\omega_1} M_\alpha$ é submodelo elementar de tamanho κ.

Seja $Y \in [M]^\omega$. Daí existe $\alpha < \omega_1$ tal que $Y \in [M_\alpha]^\omega$. Por construção, existe $Z \in M_{\alpha+1}$, enumerável, tal que $Y \subseteq Z$. Ainda temos que $Z \in M$. Portando M é ω-covering. □

Concluímos:

Corolário 3.1.27. *Existe submodelo elementar ω-covering de cardinalidade $\aleph_{\omega+1}$ se, e só se,* $\mathbf{Cov}_\omega(\aleph_{\omega+1}) = \aleph_{\omega+1}$. □

A demonstração do teorema 3.1.26 pode ser modificada para obtermos:

Proposição 3.1.28. *Seja κ um cardinal tal que $\mathbf{Cov}_\omega(\kappa) = \kappa$. Se $X \subseteq H_\theta$ tem cardinalidade κ, então existe $M \prec H_\theta$, ω-covering de cardinalidade κ, tal que $X \subseteq M$.*

Demonstração. Seguimos a mesma demonstração do teorema 3.1.26 tomando M_0 tal que $X \subseteq M_0$. □

Como não há submodelos elementares ω-covering de tamanho $\aleph_\alpha$, sempre que α é ordinal limite de cofinalidade enumerável, temos:

Proposição 3.1.29. *Se α é um ordinal limite de cofinalidade enumerável, $\mathbf{Cov}_\omega(\aleph_\alpha) = \mathbf{Cov}_\omega(\aleph_{\alpha+1})$. Em particular, $\mathbf{Cov}_\omega(\aleph_\omega) = \mathbf{Cov}_\omega(\aleph_{\omega+1})$.*

Demonstração. Pelo corolário 3.1.13 e pelo teorema anterior, $\mathbf{Cov}_\omega(\aleph_\alpha) \geq \aleph_{\alpha+1}$. Pelo lema 3.1.24, $\mathbf{Cov}_\omega(\aleph_{\alpha+1}) = \mathbf{Cov}_\omega(\aleph_\alpha) \cdot \aleph_{\alpha+1} = \mathbf{Cov}_\omega(\aleph_\alpha)$. □

Podemos agora discutir quais cardinais podem ser cardinalidade de submodelo elementar ω-covering.

Lema 3.1.30. *Seja κ um cardinal tal que $\kappa^\omega = \kappa$. Então existe submodelo elementar ω-covering de cardinalidade κ.*

Demonstração. Pelo lema 3.1.24, temos $\kappa \leq \mathbf{Cov}_\omega(\kappa) \leq |[\kappa]^\omega| = \kappa^\omega = \kappa$. □

Corolário 3.1.31 (GCH). *Se κ é um cardinal de cofinalidade não enumerável, então existe submodelo elementar ω-covering de cardinalidade κ.*

Demonstração. Por causa de **GCH**, κ satisfaz $\kappa^\omega = \kappa$. □

Observação 3.1.32. *Podemos generalizar o corolário anterior supondo* **SCH** *e requerer κ, cardinal, tal que* $\mathrm{cf}(\kappa) > \omega$ *e $\kappa \geq 2^\omega$. Teremos, também, $\kappa^\omega = \kappa$ (ver, por exemplo, [Jec03]).*

É consistente termos a equivalência no lema 3.1.30:

Proposição 3.1.33 (CH). *Existe submodelo elementar ω-covering da cardinalidade κ se, e somente se, $\kappa^\omega = \kappa$.*

Demonstração. Se M é um submodelo elementar ω-covering de cardinalidade κ, M é enumeravelmente fechado pelo teorema 3.1.3. Daí $[M]^\omega \subset M$ de onde teremos $\kappa \leq \kappa^\omega \leq \kappa$. □

Podemos mostrar a consistência de "$\mathbf{Cov}_\omega(\aleph_{\omega+1}) = \aleph_{\omega+1}$" usando a seguinte proposição:

Proposição 3.1.34. *Se $\aleph_\omega$ é limite forte,*[1] *então $\mathbf{Cov}_\omega(\aleph_\omega) = 2^{\aleph_\omega}$.*

Demonstração. Se $\aleph_\omega$ é limite forte, temos que $2^{\aleph_\omega} = \aleph_\omega^\omega$ (ver, por exemplo, [Jec03]) e que $2^\omega < \aleph_\omega$. Pelo lema 3.1.24, $\mathbf{Cov}_\omega(\aleph_\omega) = \aleph_\omega^\omega = 2^{\aleph_\omega}$. □

[1] Dizemos que um cardinal κ é **limite forte** se $2^\lambda < \kappa$, para todo $\lambda < \kappa$ ([Jec03]).

Concluímos:

Corolário 3.1.35. *Se $\aleph_\omega$ é limite forte, "$\mathbf{Cov}_\omega(\aleph_{\omega+1}) = \aleph_{\omega+1}$" é equivalente a "$2^{\aleph_\omega} = \aleph_{\omega+1}$".* □

Os resultados a seguir mostram a independência de "$\mathbf{Cov}_\omega(\aleph_{\omega+1}) = \aleph_{\omega+1}$", quando se assume a existência de determinados *large cardinals*.

Teorema 3.1.36 ([Mag77a, Mag77b]). *Se existe um* cardinal supercompacto, *então existe extensão genérica na qual $\aleph_\omega$ é limite forte e $2^{\aleph_\omega} = \aleph_{\omega+2}$.* □

Teorema 3.1.37 ([Git89]). *Se existe* cardinal mensurável κ de ordem de Mitchell κ^{++}, *então existe extensão genérica na qual* **GCH** *vale abaixo de $\aleph_\omega$ e $2^{\aleph_\omega} = \aleph_{\omega+2}$.* □

Observação 3.1.38 ([Koj01]). *M.Kojman diz que a consistência de "$\mathbf{Cov}_\omega(\aleph_{\omega+1}) > \aleph_{\omega+1}$" exige a da existência de large cardinal.*

Em [Koj95] ou em [AM05] podemos encontrar demonstrações para os dois resultados abaixo, ambos de autoria de S.Shelah.

Teorema 3.1.39. $\aleph_\omega^\omega < \aleph_{(2^\omega)^+}$. *Portanto* $\mathbf{Cov}_\omega(\aleph_\omega) < \aleph_{(2^\omega)^+}$. □

Teorema 3.1.40. $\mathbf{Cov}_\omega(\aleph_\omega) < \aleph_{\omega_4}$. □

Observação 3.1.41 ([Koj01]). *Por causa do lema 3.1.24, temos que*

$$\aleph_\omega^\omega = 2^\omega \cdot \mathbf{Cov}_\omega(\aleph_\omega).$$

É interessante notar que o fator 2^ω é ilimitado mas o fator $\mathbf{Cov}_\omega(\aleph_\omega)$ é limitado! Ordens c.c.p. que preservam cardinais, por exemplo, não mudam o número $\mathbf{Cov}_\omega(\aleph_\omega)$.

No exemplo a seguir mostramos que "$\mathbf{Cov}_\omega(\aleph_{\omega+1}) = \aleph_{\omega+1}$" independe do valor do *continuum.*

Exemplo 3.1.42. *Existe modelo no qual "$2^\omega = \aleph_{\omega+2}$ e $\mathbf{Cov}_\omega(\aleph_{\omega+1}) = \aleph_{\omega+1}$".*

Demonstração. Suponhamos **GCH** e seja $\mathbb{P} = \mathrm{Fn}(\aleph_{\omega+2} \times \omega, 2)$. Se G é $\mathbb{P}$-genérico adicionamos $\aleph_{\omega+2}$ **reais de Cohen**, ou seja, $(2^\omega = \aleph_{\omega+2})^{\mathbf{V}[G]}$. Dado que $\mathbb{P}$ tem c.c.c., $\mathbb{P}$ preserva cofinalidades e cardinais.

Como vale **GCH**, existe submodelo elementar M, ω-covering de cardinalidade $\aleph_{\omega+1}$. Na seção seguinte mostraremos que, se G é $\mathbb{P}$-genérico, $M[G]$ é ω-covering. Sendo assim, $(\mathbf{Cov}_\omega(\aleph_{\omega+1}) = \aleph_{\omega+1})^{\mathbf{V}[G]}$. □

3.2 Preservação de ω-covering

Nesta seção investigamos quando $M[G]$ é ω-covering. Num primeiro instante suporemos que M é ω-covering e veremos quais ordens parciais preservam essa propriedade em $M[G]$. Em seguida estudamos a possibilidade de "tornar" $M[G]$ ω-covering, ainda que M não o seja.

Observação 3.2.1. *Para um submodelo elementar M, denotaremos o conjunto $\{\langle\tau,\mathbf{1}\rangle : \tau \in M$ é $\mathbb{P}$-nome$\}$ por $\mathbb{M}$, para que, dado G, genérico, $\mathbb{M}_G$ seja $M[G]$ e trabalhemos somente com $\mathbb{P}$-nomes.*

Nossa investigação vai depender tanto da propriedade do submodelo elementar, como de propriedades da ordem parcial com a qual forçamos. Para tanto vale lembrar o diagrama das classes de ordens parciais:

$$\begin{tikzcd}
\text{c.c.c.} \arrow[d] & \text{enumeravelmente fechada} \arrow[dl] \arrow[d] \\
\text{própria} \arrow[dr] & \omega_1\text{-Baire} \arrow[d] \\
 & \text{c.c.p.} \arrow[d] \\
 & \text{preserva } \omega_1
\end{tikzcd}$$

Classes de ordens parciais (Figura 3.2)

Para nosso primeiro teorema precisaremos do lema a seguir.

Lema 3.2.2. *Sejam $M \prec H_\theta$, ω-covering, $\mathbb{P} \in M$, uma ordem parcial c.c.p., e τ, um $\mathbb{P}$-nome. Então*

$$D_\tau = \left\{ q \in \mathbb{P} \colon \begin{array}{l} \exists \sigma \in M \ (\ \sigma \text{ é } \mathbb{P}\text{-nome enumerável} \ \wedge \ q \Vdash \text{"}\tau \subseteq \sigma\text{"}\ ) \\ \vee \ q \Vdash \text{"}\tau \text{ não é subconjunto enumerável de } \mathbb{M}\text{"} \end{array} \right\}$$

é denso em $\mathbb{P}$.

Demonstração. Seja $p \in \mathbb{P}$. Se $p \in D_\tau$, não há o que fazer. Podemos supor que $p \notin D_\tau$. Pela proposição 1.2.9, p tem extensão p' tal que

$$p' \Vdash \text{"}\tau \subseteq \mathbb{M} \ \wedge \ \tau \text{ é enumerável"}.$$

Pela proposição 1.2.32, existem $\rho \subseteq \mathbb{M}$, $\mathbb{P}$-nome enumerável, e $q \leq p'$, tais que

$$q \Vdash \text{"}\tau \subseteq \rho\text{"}.$$

Já que M é ω-covering, existe $X \in M$, enumerável, tal que dom $\rho \subseteq X$. Seja

$$\sigma = \{\langle \pi, \mathbf{1} \rangle : \pi \in X \text{ é } \mathbb{P}\text{-nome }\}.$$

Por definibilidade, $\sigma \in M$, dado que $\{X, \mathbb{P}\} \subset M$. Além do mais, σ é $\mathbb{P}$-nome enumerável e $\rho \subseteq \sigma$. Ainda, $q \Vdash$ "$\tau \subseteq \sigma$". □

Teorema 3.2.3. *Seja $M \prec H_\theta$, ω-covering, e seja $\mathbb{P} \in M$, uma ordem parcial c.c.p. Se G é um $\mathbb{P}$-genérico, então $M[G]$ é ω-covering.*

Demonstração. Seja X um subconjunto enumerável de $M[G]$. Daí existem $p \in G$ e τ, $\mathbb{P}$-nome, tais que $\tau_G = X$ e

$$p \Vdash \text{"}\tau \subset \mathbb{M} \quad \wedge \ \tau \text{ é enumerável"}.$$

Pelo lema anterior, existe $q \in D_\tau \cap G$, já que D_τ daquele enunciado é denso em $\mathbb{P}$.

Como p e q são compatíveis e $p \Vdash$ "τ é enumerável", existe $\sigma \in M$, $\mathbb{P}$-nome enumerável, tal que $q \Vdash$ "$\tau \subseteq \sigma$". Como $q \in G$,

$$X = \tau_G \subseteq \sigma_G \in M[G]$$

e σ_G é enumerável. □

Parece natural, então, definir:

Definição 3.2.4. *Dizemos que uma ordem parcial $\mathbb{P}$ **preserva ω-covering**, se para todo cardinal regular θ e todo $M \prec H_\theta$, ω-covering, tal que $\mathbb{P} \in M$, $M[G]$ é ω-covering, sempre que G é $\mathbb{P}$-genérico.*

Dado o teorema 3.1.4, temos:

Teorema 3.2.5. *Se $\mathbb{P}$ preserva ω-covering, então preserva ω_1.*

Demonstração. Seja M um submodelo elementar ω-covering de cardinalidade $\aleph_1$ tal que $\mathbb{P} \in M$. Seja G um $\mathbb{P}$-genérico. Temos que $M[G]$ é ω-covering. Pelo teorema 3.1.4, $\omega_1^{\mathbf{V}[G]} \subseteq M[G]$. Sendo assim $M[G]$ é não enumerável e, já que $|M[G]| = |M|^{\mathbf{V}[G]} = |\aleph_1|^{\mathbf{V}[G]}$, conclui-se que $\aleph_1^{\mathbf{V}[G]} = \aleph_1^{\mathbf{V}}$. □

Dada a caracterização dos submodelos elementares ω-covering de cardinalidade $\aleph_1$ (teorema 3.1.6), chegamos ao:

Teorema 3.2.6. *Seja $\mathbb{P}$ uma ordem parcial. Então $\mathbb{P}$ preserva ω_1 se, e somente se, $\mathbb{P}$ preserva ω-covering para submodelos elementares de cardinalidade $\aleph_1$.*

Demonstração. (Só se) Seja M um submodelo elementar ω-covering de cardinalidade $\aleph_1$ ao qual $\mathbb{P}$ pertença. Pelo teorema 3.1.6, existe $\langle (M_\alpha, A_\alpha) \colon \alpha < \omega_1 \rangle$ tal que $M = \bigcup_{\alpha < \omega_1} M_\alpha$ e

1. $\forall \alpha < \beta < \omega_1 \ (\ M_\alpha \subseteq A_\alpha \in M_\beta \ )$ e

2. $\forall \alpha < \omega_1$ ($M_\alpha \prec M \ \wedge \ A_\alpha \in M \ \wedge \ |M_\alpha| = |A_\alpha| = \aleph_0$).

Podemos, sem perda de generalidade, supor que $\mathbb{P} \in \bigcap_{\alpha<\omega_1} M_\alpha$.

Para cada α, seja

$$\tau_\alpha = \{\langle \sigma, \mathbf{1} \rangle : \sigma \in A_\alpha \text{ é } \mathbb{P}\text{-nome}\}.$$

Sempre que $\alpha < \beta$, por elementaridade, $\tau_\alpha \in M_\beta$, visto que $\{A_\alpha, \mathbb{P}\} \subset M_\beta$.

Ainda, se G é um $\mathbb{P}$-genérico, temos que $M[G] = \bigcup_{\alpha<\omega_1} M_\alpha[G]$ e

1. $\forall \alpha < \beta < \omega_1$ ($M_\alpha[G] \subseteq (\tau_\alpha)_G \in M_\beta[G]$) e

2. $\forall \alpha < \omega_1$ ($M_\alpha[G] \prec M[G] \ \wedge \ (\tau_\alpha)_G \in M[G] \ \wedge \ |M_\alpha[G]| = |(\tau_\alpha)_G| = \aleph_0$).

Como ω_1 é preservado, a seqüência $\langle (M_\alpha[G], (\tau_\alpha)_G) : \alpha < \omega_1 \rangle$ está nas condições do teorema 3.1.6, e $M[G]$ é ω-covering. □

Ainda usando a caracterização dos "menores" submodelos elementares ω-covering, podemos mostrar:

Teorema 3.2.7. *Se $\mathbb{P}$ é uma ordem parcial que não colapsa a cofinalidade de ω_n para ω, para todo natural $n \geq 1$, então $\mathbb{P}$ preserva ω-covering para todo submodelo elementar ω-covering de cardinalidade menor que $\aleph_\omega$.*

Demonstração. Vamos proceder por indução em n. Pelo teorema anterior já demonstramos para $n = 1$.

Seja M um submodelo elementar de cardinalidade $\aleph_{n+1}$. Pelo teorema 3.1.10, $M = \bigcup_{\alpha<\omega_{n+1}} M_\alpha$, onde $\langle M_\alpha : \alpha < \omega_{n+1} \rangle$ é uma seqüência crescente de submodelos elementares ω-covering de cardinalidade $\aleph_n$. Se G é um $\mathbb{P}$-genérico, por hipótese de indução, cada $M_\alpha[G]$ é ω-covering. Já que $M[G] = \bigcup_{\alpha<\omega_{n+1}} M_\alpha[G]$ e $(\mathrm{cf}(\omega_{n+1}))^{\mathbf{V}[G]} > \omega$, temos que $M[G]$ é ω-covering, pela proposição 3.1.8. □

Na demonstração da proposição 3.1.11 foi importante termos que a seqüência fosse estritamente crescente. Para garantirmos que as extensões sejam diferentes usaremos o axioma da regularidade no resultado abaixo.

Teorema 3.2.8. *Seja $\mathbb{P}$ uma ordem parcial que preserva ω-covering. Então qualquer cardinal κ de cofinalidade não enumerável continua com cofinalidade não enumerável em qualquer extensão por $\mathbb{P}$.*

Demonstração. Sejam $\lambda = \mathrm{cf}(\kappa)$ e $\theta \geq (\max\{\kappa^\omega, |\mathrm{trcl}(\mathbb{P})|\})^+$. Assim teremos $\{\kappa^\omega, \mathbb{P}\} \subset H_\theta$.

Construiremos, por recursão, uma seqüência $\langle M_\alpha : \alpha < \lambda \rangle$, tal que:

1. $\forall \alpha < \lambda$ ($M_\alpha \prec H_\theta \ \wedge \ |M_\alpha| = \kappa^\omega$) e

2. $\forall \alpha < \beta < \lambda$ ($\{M_\alpha\} \cup [M_\alpha]^\omega \subset M_\beta$).

Seja $M_0 \prec H_\theta$ tal que $|M_0| = \kappa^\omega$ e $\mathbb{P} \in M_0$. Suponhamos a seqüência construída em $\beta < \lambda$. Dado que cada $M_\alpha \in H_\theta$, existe $M_\beta \prec H_\theta$ tal que $|M_\beta| = \kappa^\omega$ e $\{M_\alpha : \alpha < \beta\} \cup [\bigcup_{\alpha<\beta} M_\alpha]^\omega \subset M_\beta$.

Já que $\lambda > \omega$ e a seqüência é crescente, $M = \bigcup_{\alpha<\lambda} M_\alpha$ é um submodelo elementar ω-covering.

Para cada $\alpha < \lambda$, seja $\tau_\alpha = \{\langle\sigma, \mathbb{1}\rangle : \sigma \in M_\alpha$ é um $\mathbb{P}$-nome $\}$. Sempre que $\alpha < \beta$, por definibilidade, $\tau_\alpha \in M_\beta$, dado que $\{M_\alpha, \mathbb{P}\} \subset M_\beta$.

Seja G um $\mathbb{P}$-genérico. Temos que $M[G] = \bigcup_{\alpha<\lambda} M_\alpha[G]$ e

1. $\forall\alpha < \lambda$ ($M_\alpha[G] \prec H_\theta^{\mathbf{V}[G]}$) e

2. $\forall\alpha < \beta < \lambda$ ($M_\alpha[G] = (\tau_\alpha)_G \in M_\beta[G]$).

Por causa do item 2, a seqüência $\langle M_\alpha[G] : \alpha < \lambda\rangle$ é estritamente crescente. Pela proposição 3.1.11, teremos $(\mathrm{cf}(\kappa))^{\mathbf{V}[G]} > \omega$. □

O exemplo a seguir mostra que preservação de ω-covering para submodelos elementares de tamanho $\aleph_1$ não implica preservação de ω-covering para submodelos de tamanhos maiores.

Exemplo 3.2.9. *Existe ordem parcial que preserva ω-covering para submodelos elementares de cardinalidade $\aleph_1$ mas não para aqueles de cardinalidade $\aleph_2$.*

Demonstração. Seja $\mathbb{P} = \mathbb{N}$ o **forcing de Namba** (ver, por exemplo, [Nam71] ou [Zap98]). As condições de $\mathbb{N}$ são árvores perfeitas não-vazias $T \subset \omega_2^{<\omega}$ com um "tronco" $\mathrm{tr}(T) \in T$, tais que para todo elemento $s \in T$, $s \subseteq \mathrm{tr}(T)$ ou $\mathrm{tr}(T) \subseteq s$, e, se $\mathrm{tr}(T) \subseteq s$, então s tem exatamente $\aleph_2$ sucessores imediatos. Ordena-se $\mathbb{N}$ por $\subseteq$ (i.e., $T \leq U$ se, e somente se, $T \subseteq U$).

É conhecido que $\mathbb{N}$ preserva ω_1 mas colapsa a cofinalidade de ω_2 para ω. Sendo assim, $\mathbb{N}$ é um exemplo de ordem parcial que preserva ω-covering para submodelos elementares de cardinalidade $\aleph_1$ mas não para aqueles de cardinalidade $\aleph_2$. □

3.2.1 Forçando ω-covering

Até o momento nós sempre iniciamos com um submodelo elementar ω-covering e tentamos provar que sua extensão também era ω-covering. Vejamos se é possível termos extensão ω-covering quando o submodelo elementar não era ω-covering no "ground model."

Proposição 3.2.10. *Seja $\mathbb{P} \in M$ uma ordem parcial c.c.p., onde M é um submodelo elementar. Suponha que $p \Vdash$ "$\mathbb{M}$ é ω-covering" para alguma condição $(\mathbb{P}, M)$-genérica p. Então M é ω-covering.*

Demonstração. Seja $X \subset M$ um conjunto enumerável.

Então existem $q \leq p$ e $\tau \in M$, $\mathbb{P}$-nome, tais que

$$q \Vdash \text{“}\check{X} \subseteq \tau \ \wedge \ \tau \text{ é enumerável”},$$

já que $p \Vdash$ "$\mathbb{M}$ é ω-covering".

Posto que $\mathbb{P}$ é c.c.p.,

$$D = \left\{ r \in \mathbb{P}\colon \begin{array}{c} (\exists Y, \text{ enumerável}, (r \Vdash \text{“}\tau \cap \mathbf{V} \subseteq \check{Y}\text{”})) \\ \vee\; r \Vdash \text{“}\tau \cap \mathbf{V} \text{ não é enumerável”} \end{array} \right\}$$

é um subconjunto denso de $\mathbb{P}$. De fato, se $t \in \mathbb{P} \setminus D$, t tem extensão u tal que $u \Vdash$ "$\tau \cap \mathbf{V}$ é enumerável" (proposição 1.2.9) e daí existem Y, enumerável, e $v \leq u$, tais que $v \Vdash$ "$\tau \cap \mathbf{V} \subseteq \check{Y}$", e v é extensão de t que está em D.

Já que $\{\tau, \mathbb{P}\} \subset M$, por definibilidade, temos $D \in M$. Então $D \cap M$ é pré-denso abaixo de p, dado que p é $(\mathbb{P}, M)$-genérica.

Seja $r \in D \cap M$ compatível com q e seja s uma extensão comum a r e q. Dado que $q \Vdash$ "τ é enumerável", fixemos, por elementaridade, $Y \in M$, enumerável, tal que $r \Vdash$ "$\tau \cap \mathbf{V} \subseteq \check{Y}$". Então

$$s \Vdash \text{“}\check{X} \subseteq \tau \cap \mathbf{V} \subseteq \check{Y}\text{”},$$

ou seja, $X \subseteq Y$. □

Corolário 3.2.11. *Sejam $M \prec H_\theta$ e $\mathbb{P} \in M$ uma ordem parcial com c.c.c. Sempre que G é $\mathbb{P}$-genérico, $M[G]$ é ω-covering se, e somente se, M é ω-covering.*

Demonstração. Já que $\mathbb{P}$ tem c.c.c., todas as suas condições são $(\mathbb{P}, M)$-genéricas (proposição 2.2.5). □

O fato é que não podemos retirar do teorema a condição $(\mathbb{P}, M)$-genérica. Veremos isso no exemplo 3.3.7 onde a extensão de um submodelo elementar que não é nem ω-covering se torna enumeravelmente fechado.

3.3 Outras propriedades de M e $M[G]$

Na seção anterior discutimos ω-covering, nesta discutiremos **enumeravelmente fechado**.

Definição 3.3.1. *Diremos que $\mathbb{P}$ **preserva enumeravelmente fechado**, se para todo cardinal regular θ e todo $M \prec H_\theta$, enumeravelmente fechado, tal que $\mathbb{P} \in M$, $M[G]$ é enumeravelmente fechado, sempre que G é $\mathbb{P}$-genérico.*

Para ordens parciais ω_1-Baire temos um lema análogo ao lema 3.2.2.

Lema 3.3.2. *Sejam $M \prec H_\theta$, enumeravelmente fechado, $\mathbb{P} \in M$, uma ordem parcial ω_1-Baire, e τ, um $\mathbb{P}$-nome. Então*

$$D_\tau = \left\{ q \in \mathbb{P}\colon \begin{array}{c} \exists \sigma \in M \text{ (} \sigma \text{ é } \mathbb{P}\text{-nome enumerável } \wedge \; q \Vdash \text{“}\tau = \sigma\text{”)} \\ \vee\; q \Vdash \text{“}\tau \text{ não é subconjunto enumerável de } \mathbb{M}\text{”} \end{array} \right\}$$

é denso em $\mathbb{P}$.

Demonstração. Seja $p \in \mathbb{P} \setminus D_\tau$. Pela proposição 1.2.9, p tem extensão p' tal que $p' \Vdash$ "$\tau \subseteq \mathbb{M} \wedge \tau$ é enumerável". Pela proposição 1.2.30, existem $\sigma \subseteq \mathbb{M}$, enumerável, e $q \leq p'$, tais que $q \Vdash$ "$\tau = \sigma$". Como M é enumeravelmente fechado, $\operatorname{dom} \sigma \in M$. Como $\sigma \subseteq \mathbb{M}$, $\sigma = \operatorname{dom} \sigma \times \{\mathbb{1}\}$. Por definibilidade, $\sigma \in M$. □

Teorema 3.3.3. *Seja M um submodelo elementar enumeravelmente fechado e seja $\mathbb{P} \in M$ uma ordem parcial ω_1-Baire. Se G é $\mathbb{P}$-genérico, então $M[G]$ é enumeravelmente fechado.*

Demonstração. Seja X um subconjunto enumerável de $M[G]$. Daí existem $p \in G$ e τ, $\mathbb{P}$-nome, tais que $\tau_G = X$ e

$$p \Vdash \text{“}\tau \subset \mathbb{M} \quad \wedge\ \tau \text{ é enumerável”}.$$

Pelo lema anterior temos que existe $q \in D_\tau \cap G$, pois que D_τ daquele enunciado é denso em $\mathbb{P}$.

Como p e q são compatíveis e $p \Vdash$ "τ é enumerável", existe $\sigma \in M$, $\mathbb{P}$-nome enumerável, tal que $q \Vdash$ "$\tau = \sigma$". Como $q \in G$, $X = \tau_G = \sigma_G \in M[G]$. □

Os teoremas 3.2.3 e o anterior incrementam o diagrama da figura 3.2 (página 41), obtendo:

$$\begin{tikzcd}
\text{c.c.c.} \arrow[d] & \text{enumeravelmente fechado} \arrow[dl] \arrow[d] & \\
\text{própria} \arrow[dr] & \omega_1\text{-Baire} \arrow[r] \arrow[d] & \textbf{preserva enumeravelmente fechado} \\
 & \text{c.c.p.} \arrow[d] & \\
\text{preserva } \omega_1 & \textbf{preserva } \boldsymbol{\omega}\textbf{-covering} \arrow[l] &
\end{tikzcd}$$

Os exemplos a seguir mostram como preservar enumeravelmente fechado é um pouco mais *complicado*:

Exemplo 3.3.4. *Existe ordem parcial que preserva ω-covering mas não preserva enumeravelmente fechado.*

Demonstração. Seja M um submodelo elementar enumeravelmente fechado com a cardinalidade do *continuum* e seja $\kappa \in M$ um cardinal, tal que $\kappa > 2^\omega$. Por definibilidade, temos que $\mathbb{P} = \operatorname{Fn}(\kappa \times \omega, 2) \in M$.

Se G é um $\mathbb{P}$-genérico, adicionamos κ **reais de Cohen** e teremos $(2^\omega \geq \kappa)^{\mathbf{V}[G]}$. Como $\mathbb{P}$ é c.c.c., $M[G]$ é ω-covering e $(|M[G]| = |M| < \kappa \leq 2^\omega)^{\mathbf{V}[G]}$, lembrando que $\mathbb{P}$ preserva cardinais. Portanto $M[G]$ não é enumeravelmente fechado. □

Exemplo 3.3.5. *Existe ordem que "torna" ω-covering em enumeravelmente fechado.*

Demonstração. Seja $\mathbb{P} = \mathrm{Fn}(I, 2, \omega_1)$ para um conjunto não enumerável I. Temos que $\mathbb{P}$ é enumeravelmente fechada (lema 1.2.24) e, portanto, ω_1-Baire. Em qualquer extensão por $\mathbb{P}$, temos **CH** ([Kun80]). Sendo assim, se M é ω-covering, $M[G]$ se torna enumeravelmente fechado pelo teorema 3.1.3. □

Temos uma versão da proposição 3.2.10 para enumeravelmente fechado e ω_1-Baire:

Proposição 3.3.6. *Seja $\mathbb{P} \in M$ uma ordem parcial ω_1-Baire, onde $M \prec H_\theta$. Suponha que $p \Vdash$ "$\mathbb{M}$ é enumeravelmente fechado" para alguma condição $(\mathbb{P}, M)$-genérica p. Então M é enumeravelmente fechado.*

Demonstração. Seja $X \subset M$ um conjunto enumerável.

Já que $p \Vdash$ "$\mathbb{M}$ é enumeravelmente fechado", existem $q \leq p$ e $\tau \in M$, $\mathbb{P}$-nome, tais que $q \Vdash$ "$\check{X} = \tau$".

O conjunto

$$D = \left\{ r \in \mathbb{P} \colon \begin{array}{c} (\exists Y, \text{ enumerável}, (r \Vdash \text{"}\tau \cap \mathbf{V} = \check{Y}\text{"})) \\ \vee\ r \Vdash \text{"}\tau \cap \mathbf{V} \text{ não é enumerável"} \end{array} \right\}$$

é denso em $\mathbb{P}$. De fato, se $t \in \mathbb{P} \setminus D$, t tem extensão u, tal que $u \Vdash$ "$\tau \cap \mathbf{V}$ é enumerável". Como $\mathbb{P}$ é ω_1-Baire, existem $v \leq u$ e $Y \in \mathbf{V}$, enumerável, tais que $v \Vdash$ "$\tau \cap \mathbf{V} = \check{Y}$". Daí, v estende t e é elemento de D.

Dado que $\{\tau, \mathbb{P}\} \subset M$, temos, por definibilidade, que $D \in M$. Então, $D \cap M$ é pré-dendo abaixo de p, visto que p é condição $(\mathbb{P}, M)$-genérica.

Seja $r \in D \cap M$ compatível com q e fixemos s, uma extensão comum a r e q. Dado que $q \Vdash$ "τ é enumerável", fixemos, por elementaridade, $Y \in M$, enumerável, tal que $r \Vdash$ "$\tau \cap \mathbf{V} = \check{Y}$". Então $s \Vdash$ "$\check{X} = \tau \cap \mathbf{V} = \check{Y}$" e $X = Y \in M$. □

O exemplo abaixo mostra a necessidade de termos a condição sendo $(\mathbb{P}, M)$-genérica.

Exemplo 3.3.7. *Existem submodelo elementar K, que não é ω-covering, $\mathbb{P} \in K$, ordem parcial enumeravelmente fechada, e G, $\mathbb{P}$-genérico, tais que $K[G]$ é ω-covering.*

Demonstração. Seja $\theta = \aleph_5$ e suponha que vale $2^{\aleph_n} = \aleph_{n+1}$, sempre que $n \in 4$. (Observamos que vale **CH** e daí temos que todo submodelo elementar ω-covering será também enumeravelmente fechado.)

Vamos construir $L \prec H_\theta$ satisfazendo:

$$\omega_1 \subset L, \quad \mathrm{cf}(L \cap \omega_2) = \omega \quad e \quad \mathrm{cf}(L \cap \omega_3) = \mathrm{cf}(L \cap \omega_4) = \omega_1.$$

Depois construiremos $f \in \mathbb{P} \in L$, tais que $\mathbb{P}$ é ω_3-fechada, $\mathbb{P}$ mantém "$\forall n \in 4$ ($2^{\aleph_n} = \aleph_{n+1}$)" e ainda

$$\mathrm{cf}(L[G] \cap \omega_2) = \omega_1 = \mathrm{cf}(L[G] \cap \omega_3) = \mathrm{cf}(L[G] \cap \omega_4),$$

sempre que $f \in G$ e G é $\mathbb{P}$-genérico.

Sendo assim, $K = L \cap H_{\aleph_4} \prec H_{\aleph_4}$ mas não é ω-covering pois $\mathrm{cf}(K \cap \omega_2) = \omega$ (proposição 3.1.5). Entretanto, se G for um $\mathbb{P}$-genérico ao qual f pertença, teremos

$$L[G] \prec H_\theta^{\mathbf{V}[G]} \quad \text{e} \quad \mathrm{cf}(L[G] \cap \omega_i) = \omega_1, \text{ para todo } i \in 5 \setminus 1.$$

Pelo corolário 3.1.19, $L[G] \cap H_{\aleph_4}^{\mathbf{V}[G]}$ será ω-covering e pelo lema 2.1.5, $K[G] = (L \cap H_\kappa)[G] = L[G] \cap H_{\aleph_4}^{\mathbf{V}[G]}$.

Teremos, a seguir, $Q \prec H_\theta$ que vai "controlar" $\mathrm{cf}(L \cap \omega_4)$.

Por recursão, construímos uma seqüência $\langle Q_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$, de submodelos elementares ω-covering, tal que

1. $\forall \alpha < \omega_1$ ($\omega_3 \subset Q_\alpha \prec H_\theta \ \wedge \ |Q_\alpha| = \aleph_3 \ \wedge \ \mathrm{td}(Q_\alpha) = \omega_4$) e

2. $\forall \alpha < \beta < \omega_1$ ($Q_\alpha \subset Q_\beta \ \wedge \ Q_\alpha \cap \omega_4 \in Q_\beta$).

Observando o item 1, teremos sempre que $\mathrm{td}(Q_\alpha) = \omega_4$, pelo corolário 2.4.3. Ainda, pela proposição 2.4.6, $Q_\alpha \cap \omega_4 < \omega_4$. Seja $Q_0 \prec H_\theta$, ω-covering, tal que $\omega_3 \subset Q_0$ e $|Q_0| = \aleph_3$. Para $\alpha \in \omega_1$, seja $Q_{\alpha+1} = Q_\alpha[Q_\alpha \cap \omega_4]$. Pelo teorema 1.3.14, $Q_{\alpha+1} \prec H_\theta$ e ainda $|Q_{\alpha+1}| = \aleph_3$ e $Q_\alpha \cup \{Q_\alpha \cap \omega_4\} \subset Q_{\alpha+1}$. Pela proposição 3.1.20, $Q_{\alpha+1}$ é ω-covering. Para $\beta < \omega_1$, limite, seja $Q_\beta \prec H_\theta$, ω-covering de cardinalidade $\aleph_3$, tal que $\bigcup_{\alpha<\beta} Q_\alpha \subset Q_\beta$ (que existe pelo lema 3.1.9).

Por construção,

$$\omega_3 \subset Q = \bigcup_{\alpha<\omega_1} Q_\alpha \prec H_\theta,$$

Q tem cardinalidade $\aleph_3$ e, pela proposição 3.1.8, é ω-covering. Pelo corolário 2.4.3, $\mathrm{td}(Q) = \omega_4$ e, pela proposição 2.4.6, $Q \cap \omega_4$ é ordinal e $\langle Q_\alpha \cap \omega_4 : \alpha < \omega_1 \rangle$ é seqüência estritamente crescente e cofinal em $Q \cap \omega_4$.

A seguir, construímos $N \prec Q$, que controlará $\mathrm{cf}(L \cap \omega_3)$.

Analogamente à construção de Q, teremos uma seqüência $\langle N_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$, de submodelos elementares ω-covering, tal que

1. $\forall \alpha < \omega_1 \left(\begin{array}{c} \omega_2 \cup \{Q_\alpha \cap \omega_4 : \alpha < \omega_1\} \subset N_\alpha \prec Q \\ \wedge \ |N_\alpha| = \aleph_2 \ \wedge \ \mathrm{td}(N_\alpha) = \omega_3 \ ) \end{array} \right)$ e

2. $\forall \alpha < \beta < \omega_1$ ($N_\alpha \subset N_\beta \ \wedge \ N_\alpha \cap \omega_3 \in N_\beta$).

Seja $N_0 \prec Q$, ω-covering, tal que $\omega_2 \cup \{Q_\alpha \cap \omega_4 : \alpha < \omega_1\} \subset N_0$ e $|N_0| = \aleph_2$. Para $\alpha < \omega_1$, seja $N_{\alpha+1} = N_\alpha[N_\alpha \cap \omega_3]$. Vale ressaltar aqui que $N_\alpha \cap \omega_3 < \omega_3 \subset Q$. Portanto, pelo teorema 1.3.14, $N_{\alpha+1} \prec H_\theta$ e também $Q[N_\alpha \cap \omega_3] = Q \prec H_\theta$. Como $N_{\alpha+1} \subseteq Q$, teremos $N_{\alpha+1} \prec Q$, por causa do lema 1.3.10. Para $\beta < \omega_1$, limite, seja $N_\beta \prec Q$, ω-covering, tal que $|N_\beta| = \aleph_2$ e $\bigcup_{\alpha<\beta} N_\alpha \subset N_\beta$.

Definimos

$$N = \bigcup_{\alpha<\omega_1} N_\alpha$$

e temos que $\omega_2 \cup \{Q_\alpha \cap \omega_4 \colon \alpha < \omega_1\} \subset N \prec Q$ e $|N| = \aleph_2$. Pela proposição 3.1.8, N é ω-covering. Por construção, $\langle N_\alpha \cap \omega_3 \colon \alpha < \omega_1\rangle$ é estritamente crescente e cofinal no ordinal $N \cap \omega_3$.

Finalmente chegamos ao L!

Seja $L_0 \prec N$, ω-covering de tamanho $\aleph_1$, tal que $\{Q_\alpha \cap \omega_4 \colon \alpha < \omega_1\} \cup \{N_\alpha \cap \omega_3 \colon \alpha < \omega_1\} \subset L_0$. Para cada $n < \omega$, seja $L_{n+1} = L_n[L_n \cap \omega_2]$, que é submodelo elementar de N (pelos mesmos argumentos usados na construção dos $N_{\alpha+1}$'s), é ω-covering (pela proposição 3.1.20) e tem cardinalidade $\aleph_1$. Definimos

$$L = \bigcup_{n<\omega} L_n.$$

Daí $L \prec N$, tem cardinalidade $\aleph_1$ e, como $\langle L_n \cap \omega_2 \colon n < \omega\rangle$ é estritamente crescente e cofinal no ordinal $L \cap \omega_2$, L **não** é ω-covering. Dado que $L \subset N$, $\langle N_\alpha \cap \omega_3 \colon \alpha < \omega_1\rangle$ é cofinal em $L \cap \omega_3$, pois a mesma seqüência é cofinal em $N \cap \omega_3$. Analogamente, $\langle Q_\alpha \cap \omega_4 \colon \alpha < \omega_1\rangle$ é cofinal em $L \cap \omega_4$.

A ordem parcial é $\mathbb{P} = \mathrm{Fn}(\omega_3, \omega_3, \aleph_3)$.

Como $\mathbb{P} \subset H_{\aleph_3}$ e $|\mathbb{P}| = |[\omega_3 \times \omega_3]^{<\aleph_3}| = |[\omega_3 \times \omega_3]^{\leq\aleph_2}| = \aleph_3^{\aleph_2} = (2^{\aleph_2})^{\aleph_2} = 2^{\aleph_2} = \aleph_3$, temos que $\mathbb{P} \in H_{\aleph_4}$, e, por definibilidade, $\mathbb{P} \in L$. Além disso, temos que $\mathbb{P}$ é $\aleph_4$-c.c. Do lema 1.2.16, $\mathbb{P}$ preserva cofinalidades e cardinalidadas **a partir** de $\aleph_4$. Do lema 1.2.24, concluímos que $\mathbb{P}$ é $\aleph_3$-fechada e, pelo corolário 1.2.26, $\mathbb{P}$ preserva cofinalidades e cardinalidades **até** $\aleph_3$. Dado que $\mathbb{P}$ é $\aleph_3$-Baire, "$\forall n \in 3$ ($2^{\aleph_n} = \aleph_{n+1}$)" é mantido em qualquer extensão por causa da proposição 1.2.28. Pela proposição 1.2.19, temos "$2^{\aleph_3} = \aleph_4$" em toda extensão por $\mathbb{P}$.

Para a construção de $f \in \mathbb{P}$, conforme nossos propósitos, precisamos de mais um submodelo elementar.

Seja $M \prec N$, ω-covering de cardinalidade $\aleph_1$, tal que $L \subset M$. Pela proposição 3.1.5, $\mathrm{cf}(M \cap \omega_2) \geq \omega_1$. Como $|M| = \aleph_1$, $M \cap \omega_2$ é ordinal e $M \cap \omega_2 < \omega_2$. Logo $\mathrm{cf}(M \cap \omega_2) = \omega_1$ e podemos fixar $\langle y_\alpha \colon \alpha < \omega_1\rangle$, seqüência estritamente crescente e cofinal em $M \cap \omega_2$.

Vamos construir $f \in \mathbb{P}$, $(\mathbb{P}, M)$-genérica, tal que, $\mathrm{cf}(L[G] \cap \omega_2) = \omega_1$, sempre que G é genérico e $f \in G$.

Seja $\langle D_\alpha \colon \alpha < \omega_1\rangle$ uma enumeração dos densos de $\mathbb{P}$ que são elementos de M.

Construiremos, por recorrência, as seqüências $\langle f_\alpha \colon \alpha < \omega_1\rangle$ e $\langle x_\alpha \colon \alpha < \omega_1\rangle$, tais que

1. $\forall \alpha < \omega_1$ ($f_\alpha \in D_\alpha \cap M \;\wedge\; x_\alpha \in (\mathrm{dom}\, f_\alpha) \cap L \;\wedge\; f_\alpha(x_\alpha) = y_\alpha$) e

2. $\forall \alpha < \beta$ ($\mathrm{dom}\, f_\alpha \subset x_\beta \;\wedge\; f_\alpha \subset f_\beta$).

Seja $x_0 = N_0 \cap \omega_3$. Como $D_0 \in M$ é denso e $\{\langle x_0, y_0\rangle\} \in M \cap \mathbb{P}$, existe $f_0 \in D_0 \cap M$, tal que $f_0 \leq \{\langle x_0, y_0\rangle\}$. Suponhamos as seqüências construídas em $\beta < \omega_1$. Temos que $X = \{\sup(\operatorname{dom} f_\alpha) : \alpha < \beta\} \in M$, visto que M é enumeravelmente fechado. Ainda, $\sup X \in M \cap \omega_3 \subseteq N \cap \omega_3$. Como $\langle N_\alpha \cap \omega_3 : \alpha < \omega_1\rangle$ é cofinal em $N \cap \omega_3$, temos que existe $\delta < \omega_1$ tal que $N_\delta \cap \omega_3 > \sup X$. Seja $x_\beta = N_\delta \cap \omega_3$. Dado que

$$(\bigcup_{\alpha<\beta} f_\alpha) \cup \{\langle x_\beta, y_\beta\rangle\} \in M \cap \mathbb{P}$$

e $D_\beta \in M$ é denso em $\mathbb{P}$, existe $f_\beta \in D_\beta \cap M$ tal que

$$f_\beta \leq (\bigcup_{\alpha<\beta} f_\alpha) \cup \{\langle x_\beta, y_\beta\rangle\}.$$

Seja

$$f = \bigcup_{\alpha<\omega_1} f_\alpha.$$

Tomemos G um genérico ao qual f pertença. Daí, $F = \bigcup G \in L[G]$, dado que $G \in L[G]$. Ainda $F: \omega_3 \longrightarrow \omega_3$, $f \subset F$ e, como $x_\alpha \in L \subset L[G]$, $F(x_\alpha) \in L[G]$, sempre que $\alpha < \omega_1$. Portanto a função

$$\alpha < \omega_1 \mapsto F(x_\alpha) = f(x_\alpha) = y_\alpha \in L[G] \cap \omega_2$$

é estritamente crescente no ordinal $L[G] \cap \omega_2$.

Dado $\gamma \in L[G] \cap \omega_2$, temos que $\gamma \in M[G] \cap \omega_2 = M \cap \omega_2$, visto que f é $(\mathbb{P}, M)$-genérica. Daí, existe $\alpha < \omega_1$ tal que $\gamma < y_\alpha$. Concluímos, então, que $\langle F(x_\alpha) : \alpha < \omega_1\rangle$ é cofinal em $L[G] \cap \omega_2$. Portanto, $\operatorname{cf}(L[G] \cap \omega_2) = \omega_1$.

Se $\gamma \in L[G] \cap \omega_3$, temos que $\gamma \in M[G] \cap \omega_3 = M \cap \omega_3$, pois f é $(\mathbb{P}, M)$-genérica. Dado que $M \cap \omega_3 \subset N \cap \omega_3$, existe $\alpha < \omega_1$, tal que $\gamma < N_\alpha \cap \omega_3$. Mas $N_\alpha \cap \omega_3 \in L \subset L[G]$. Então $\langle N_\alpha \cap \omega_3 : \alpha < \omega_1\rangle$ é cofinal em $L[G] \cap \omega_3$. Concluímos que $\operatorname{cf}(L[G] \cap \omega_3) = \omega_1$. Analogamente, chegamos a $\operatorname{cf}(L[G] \cap \omega_4) = \omega_1$.

Sendo assim, chegamos a $L[G] \prec H_\theta^{\mathbf{V}[G]}$ satisfazendo

$$\operatorname{cf}(L[G] \cap \omega_i) = \omega_1, \quad \text{para todo } i \in 5 \setminus 1.$$

Construímos assim L, $\mathbb{P}$ e f como queríamos. Logo $K = L \cap H_{\aleph_4}$ não é ω-covering mas $K[G]$ é ω-covering e enumeravelmente fechado. □

3.4 κ-covering

Visto que trabalhamos com subconjuntos enumeráveis, é natural pensar em generalizar a definição de ω-covering para cardinais maiores.

Definição 3.4.1. *Para um cardinal κ, diremos que um submodelo elementar M, tal que $|M| > \kappa$, é **κ-covering**, se para todo X, subconjunto de M de cardinalidade κ, existe $Y \in M$, tal que $X \subseteq Y$ e $|Y| = \kappa$.*

Já podemos demonstrar, por causa da definição:

Proposição 3.4.2. *Seja $M \prec H_\theta$, κ-covering, onde $\kappa \in M$, é um cardinal. Então $|M \cap \kappa| = \kappa$.*

Demonstração. Seja $X \subset M$ de cardinalidade κ. Como M é κ-covering, existe $Y \in M$, tal que $X \subseteq Y$ e $|Y| = \kappa$.

Dado que $Y \in M$, por elementaridade, existe $f \in M$, bijeção entre κ e Y. Como $X \subseteq M \cap Y$, temos que $f^{-1}[X] \subseteq M \cap \kappa$, pelo lema 1.3.7. Daí $|M \cap \kappa| \geq |f^{-1}[X]| = |X| = \kappa$. □

Observação 3.4.3. *Se κ é um cardinal tal que $|M \cap \kappa| = \kappa$, então $M \cap \kappa$ é ilimitado em κ.* □

Precisaremos de alguns resultados para provarmos os mais interessantes.

Lema 3.4.4. *Seja κ um cardinal tal que $|M \cap \kappa| = \kappa$. Se λ é um cardinal tal que $\lambda < \mathrm{cf}(\kappa)$, então existe $\mu \in M \cap \kappa$, cardinal, tal que $\lambda \leq |M \cap \mu|$.*

Demonstração. Fixemos $f: M \cap \kappa \longrightarrow \kappa$, bijeção, e seja $A = f^{-1}[\lambda]$. Então $A \subset M \cap \kappa$ e $|A| = \lambda$. Já que $\lambda < \mathrm{cf}(\kappa)$, $\sup A < \kappa$. Pela observação anterior, existe $\gamma \in M \cap \kappa$, tal que $\sup A < \gamma$. Logo, $A \subseteq M \cap \gamma$ e $\lambda = |A| \leq |M \cap \gamma|$. Mas $M \cap \gamma$ é equipotente a $M \cap \mu$, se $\mu = |\gamma|$ (basta usar o lema 1.3.7). Sendo assim, $\lambda \leq |M \cap \mu|$, $\mu \in M \cap \kappa$ e, além disso, μ é cardinal. □

Corolário 3.4.5. *Seja κ um cardinal. Se $|M \cap \kappa^+| = \kappa^+$, então $|M \cap \kappa| = \kappa$.* □

Corolário 3.4.6. *Seja $M \prec H_\theta$ e seja $n < \omega$ tal que $|M \cap \omega_{n+1}| = \aleph_{n+1} \leq \theta$. Então $\omega_{n+1} \subset M$.*

Demonstração. Provemos por indução em n.

Pelo corolário 1.3.9, $M \cap \omega_1$ é sempre ordinal. Se $|M \cap \omega_1| = \aleph_1$, $M \cap \omega_1 = \omega_1$.

Suponhamos $|M \cap \omega_{n+2}| = \aleph_{n+2}$, onde $M \prec H_\theta$, para $\theta \geq \omega_{n+2}$. Pelo corolário anterior, temos que $|M \cap \omega_{n+1}| = \aleph_{n+1}$ e, pela hipótese de indução, $\omega_{n+1} \subset M$. Como $\omega_{n+1} \in M$, podemos usar o lema 1.3.7 e a proposição 1.3.8, para provar que $M \cap \omega_{n+2}$ é ordinal. Caso $M \cap \omega_{n+2} < \omega_{n+2}$, teríamos $|M \cap \omega_{n+2}| \leq \aleph_{n+1}$, um absurdo. □

Agora voltemos nossa atenção aos κ-covering.

Teorema 3.4.7. *Seja $M \prec H_\theta$ e seja $\kappa \in M$ um cardinal tal que $\kappa^+ < \theta$. Se M é κ^+-covering, então M é κ-covering.*

Demonstração. Seja $A \subset M$, com $|A| = \kappa$. Já que M é κ^+-covering, existe $C \in M$, de cardinalidade κ^+, tal que $A \subset C$.

Visto que $\{\kappa^+, C\} \subset M$, podemos fixar $f \in M$, bijeção entre κ^+ e C. Como $|A| = \kappa$, temos que $\sup(f^{-1}[A]) < \kappa^+$ e, ainda, existe $\gamma \in M \cap \kappa^+$, tal que $\sup(f^{-1}[A]) < \gamma$, dado que $M \cap \kappa^+$ é ilimitado em κ^+. Sendo assim, $B = f[\gamma] \in M$, $|B| = |\gamma| = \kappa$, bem como $A \subseteq B$. □

Corolário 3.4.8. *Seja $M \prec H_\theta$ e seja n um natural tal que $\omega_{n+1} < \theta$. Se M é $\aleph_{n+1}$-covering, então M é $\aleph_i$-covering, para todo $i \in n+1$.* □

Corolário 3.4.9. *Seja $M \prec H_\theta$ e seja n um natural tal que $\omega_{n+1} < \theta$. Se M é $\aleph_n$-covering, então $\omega_{n+1} \subset M$.*

Demonstração. Se M é ω-covering, temos que $\omega_1 \subset M$, pelo teorema 3.1.4.

Agora suponha $M \prec H_\theta$, $\aleph_{n+1}$-covering, onde $\omega_{n+1} < \theta$. Pelo corolário anterior, temos que M é $\aleph_n$-covering e, por hipótese de indução, $\omega_{n+1} \subset M$. Como $\omega_{n+1} \in M$ (por definibilidade), $M \cap \omega_{n+2}$ é ordinal.

Suponhamos $M \cap \omega_{n+2} < \omega_{n+2}$. Sendo assim, $|M \cap \omega_{n+2}| = \aleph_{n+1}$. Dado que M é $\aleph_{n+1}$-covering, existe $Y \in M$, tal que $M \cap \omega_{n+2} \subseteq Y$ e $|Y| = \aleph_{n+1}$. Seja

$$Z = \{x \in Y : x \text{ é ordinal } \wedge\ |x| \leq \aleph_{n+1}\}.$$

Por definibilidade, dado que $\{Y, \aleph_{n+1}\} \subset M$, $Z \in M$. Além disso, $M \cap \omega_{n+2} \subseteq Z$ e, daí, $|Z| = \aleph_{n+1}$. Também, por definibilidade, $\sup Z + 1 \in \omega_{n+2} \cap M \subseteq Z$, um absurdo. Portanto, $\omega_{n+2} \subset M$. □

Já vimos que existem submodelos elementares ω-covering de cardinalidade $\aleph_1$. Portanto, estes **não** são $\aleph_1$-covering! Não podemos esperar que, se M é $\aleph_n$-covering, também seja $\aleph_{n+1}$-covering. Ainda assim, conseguimos a proposição abaixo:

Proposição 3.4.10. *Seja $M \prec H_\theta$, onde θ é cardinal e $\aleph_\omega < \theta$. Se M é $\aleph_n$-covering, para todo $n < \omega$, então M é $\aleph_\omega$-covering.*

Demonstração. Lembramos que o conjunto $\{\aleph_n : n < \omega\}$ é definível, e portanto, é elemento de M. Sendo assim, $\aleph_\omega = \sup\{\aleph_n : n < \omega\} \in M$.

Seja $A \subset M$ de cardinalidade $\aleph_\omega$. Então podemos escrever

$$A = \bigcup_{n<\omega} A_n,$$

onde cada $|A_n| = \aleph_n$. Por hipótese, para cada $n < \omega$, existe $X_n \in M$, tal que $A_n \subseteq X_n$ e $|X_n| = \aleph_n$.

Sendo assim $C = \{X_n : n < \omega\}$ é um subconjunto enumerável de M e existe $D \in M$, enumerável, tal que $C \subseteq D$, dado que M é ω-covering. Como $\{\aleph_\omega, D\} \subset M$, temos que

$$E = \{x \in D : |x| < \aleph_\omega\} \in M,$$

é enumerável e $C \subseteq E$. Logo $B = \bigcup E \in M$ e $|B| \leq \aleph_\omega$. Visto que $A \subseteq \bigcup C$, temos $A \subseteq B$. □

Capítulo 4

Extensões de espaços topológicos por *forcing*

Se tomamos um espaço topológico $\langle X, \mathcal{T} \rangle$, $\mathcal{T}$ pode deixar de ser uma topologia numa extensão por forcing. Ainda assim, podemos usar $\mathcal{T}$ para gerar uma topologia em X nessa extensão. Visto que podemos "ganhar" abertos (novas uniões), propriedades topológicas podem ser perdidas ou ganhas. Este fato é objeto de estudo em vários artigos envolvendo topologia geral e teoria dos conjuntos, como, por exemplo, [LaB92], [FLS96], e [GJT98] . Em [Wat90], encontramos uma lista de problemas envolvendo esse tipo de questão.

Neste capítulo apresentamos os resultados, que conseguimos provar até o momento, envolvendo *forcing* e topologia geral. Alguns deles são respostas parciais para perguntas em [Wat90].

Uma vez que podemos tomar um espaço topológico $\langle X, \mathcal{T} \rangle \in M$, e definir um novo espaço topológico X_M (ver [Jun96], [JT98], [Tal00b] e [JT03], por exemplo), também podemos fazê-lo numa extensão por *forcing* e obtermos o espaço $X_{M[G]}$. Na última seção iniciamos uma estudo sobre esse dois espaços.

4.1 Algumas definições de topologia geral

Para detalhamentos e outros resultados sobre os conceitos, que relembramos nesta seção, recomendamos consulta aos livros [Eng89] e [Juh80].

Definição 4.1.1. *Se X é um espaço topológico e $x \in X$, o* ***caráter do ponto*** *x é o menor cardinal infinito κ para o qual x tem sistema fundamental de vizinhanças abertas de cardinalidade menor ou igual a κ, e será denotado por $\chi(x, X)$. Definimos o* ***caráter do espaço topológico*** *X por $\chi(X) = \sup\{\chi(x, X) : x \in X\}$.*

Definição 4.1.2. *Diremos que um espaço topológico X é* ***de Fréchet****, se, para todo $A \subseteq X$ e todo $x \in \overline{A}$, existe seqüência em A que converge para x.*

É fácil ver que, se $\chi(X) = \aleph_0$, X é de Fréchet. Há exemplos que mostram que as duas classes não são iguais.

Definição 4.1.3. *Seja X um espaço topológico. Diremos que $A \subseteq X$ é **sequencialmente fechado**, se todo limite de seqüência convergente de A, também é elemento de A. O espaço X é dito **sequencial** se todo sequencialmente fechado for fechado.*

Todo espaço de Fréchet é sequencial.

Definição 4.1.4. *Seja X um espaço topológico. Diremos que o **tightness do ponto** x, $t(x, X)$, é o menor cardinal infinito κ para o qual todo conjunto, ao qual p é aderente, admite subconjunto de cardinalidade menor ou igual a κ ao qual p também é aderente. O **tightness de** X é o cardinal $t(X) = \sup\{t(x, X) : x \in X\}$.*

Temos que todo espaço sequencial tem *tightness* enumerável.

4.2 Forçando alguma sequencialidade

Em [Dow88a], A.Dow mostra:

Lema 4.2.1 ([Dow88a, Lema 5.3]). *Se X é um espaço topológico de tightness enumerável tal que todo todo subespaço enumerável Y satisfaz $\chi(Y) = \aleph_0$, então tightness enumerável é preservado por qualquer extensão por ordem parcial enumeravelmente fechada.* $\square$

Melhoramos este resultado mostrando que um espaço topológico em tais condições é, na verdade, de Fréchet e continua sendo de Fréchet nas extensões.

Proposição 4.2.2. *Seja X um espaço topológico com tightness enumerável tal que todo subespaço enumerável tem caráter enumerável. Então X é de Fréchet e X continua de Fréchet em qualquer extensão por forcing enumeravelmente fechado.*

Demonstração. Seja $A \subseteq X$ e seja $x \in \overline{A}$.

Como $t(x, X) = \aleph_0$, temos que existe $B \subseteq A$, enumerável, tal que $x \in \overline{B}$. Seja $Y = B \cup \{x\}$ e temos que $\chi(Y) = \aleph_0$. Fixemos $\langle V_n : n < \omega\rangle$, seqüência de abertos de X, tal que $\{V_n \cap Y : n < \omega\}$ seja sistema fundamental de vizinhanças de x no subespaço Y. Para cada $n < \omega$, fixemos

$$x_n \in B \cap (\bigcap_{m \leq n} V_m).$$

Seja Ω um aberto de X, vizinhança de x. Existe $n_0 < \omega$, tal que $V_{n_0} \cap Y \subseteq \Omega \cap Y$. Portanto, $x_n \in V_{n_0} \cap Y \subseteq \Omega$, sempre que $n_0 \leq n < \omega$. Portanto $\langle x_n : n < \omega\rangle$ converge para x.

Seja $\mathbb{P}$ uma ordem parcial enumeravelmente fechada. Pelo lema anterior, temos que X continua tendo *tightness* enumerável em qualquer extensão por $\mathbb{P}$.

Seja G um $\mathbb{P}$-genérico. Se $Y \in \mathbf{V}[G]$ é um subconjunto enumerável de X, temos $Y \in \mathbf{V}$, já que $\mathbb{P}$ é enumeravelmente fechada (proposições 1.2.29 e 1.2.28). Sendo assim, em $\mathbf{V}$, $\chi(Y) = \aleph_0$. Daí, $(\chi(Y) = \aleph_0)^{\mathbf{V}[G]}$.

Concluímos, então, que X continua com as duas propriedades originais: tem *tightness* enumerável e todo subespaço enumerável tem caráter enumerável. Pelo que já provamos, X é de Fréchet em $\mathbf{V}[G]$. □

O exemplo abaixo mostra que não podemos começar com X sendo somente de Fréchet:

Exemplo 4.2.3. *Existem um espaço de Fréchet X e ordem parcial enumeravelmente fechada $\mathbb{P}$, tais que X não tem tightness enumerável nas extensões por $\mathbb{P}$.*

Demonstração. Seja $\mathbb{P} = \mathrm{Fn}(\omega_1, \omega, \aleph_1)$, que já sabemos ser enumeravelmente fechada. Seja $X = \omega_1 \times \omega \cup \{\infty\}$ (onde ∞ pode ser $\langle \omega_1, \omega \rangle$), munido da topologia gerada por:

1. todo elemento de $\omega_1 \times \omega$ é isolado e
2. se $f\colon \omega_1 \longrightarrow \omega$,
$$U_f = \{\langle \alpha, n \rangle : \alpha < \omega_1 \ \wedge \ n > f(\alpha)\} \cup \{\infty\}$$
é vizinhança aberta de ∞.

Por conveniência, definimos, para $A \subseteq X \setminus \{\infty\}$ e $\alpha < \omega_1$:
$$A_\alpha = \{n < \omega \colon \langle \alpha, n \rangle \in A\}.$$

Vejamos que, em $\mathbf{V}$, X é de Fréchet. Como todo ponto de X diferente de ∞ é isolado, basta nos preocuparmos com a situação na qual $A \subseteq X$ e $\infty \in \overline{A} \setminus A$.

Suponhamos que todos os A_α's sejam finitos. Podemos definir $f\colon \omega_1 \longrightarrow \omega$ por
$$f(\alpha) = \begin{cases} \max(A_\alpha) & \text{, se } A_\alpha \neq \emptyset \\ 0 & \text{, caso contrário} \end{cases}.$$

Como $\infty \in \overline{A}$, existe $\langle \alpha, n \rangle \in U_f \cap A$. Daí, $n \in A_\alpha$ e $n > f(\alpha) = \max(A_\alpha) \geq n$, um absurdo!

Seja $\alpha < \omega_1$, tal que A_α é infinito. Daí podemos escrever $A_\alpha = \{n_k \colon k < \omega\}$, onde $\langle n_k \colon k < \omega \rangle$ é estritamente crescente. Daí
$$\lim_k \langle \alpha, n_k \rangle = \infty,$$
e cada $\langle \alpha, n_k \rangle$ é elemento de A.

Agora, seja G um $\mathbb{P}$-genérico. Vejamos que, em $\mathbf{V}[G]$, $t(\infty, X) > \aleph_0$.

Temos que $B = \bigcup G$ é uma função de ω_1 em ω e, daí $B \subseteq X \setminus \{\infty\}$. Lembremos que os abertos em $\mathbf{V}[G]$ são gerados pelos abertos de $\mathbf{V}$, logo, seja $f \in \mathbf{V}$, função de ω_1 em ω. O conjunto
$$D_f = \{p \in \mathbb{P} \colon \exists \alpha \in \operatorname{dom} p \ (\ p(\alpha) > f(\alpha)\ )\}$$

é denso de $\mathbb{P}$. De fato, se $q \in \mathbb{P}$, seja $\alpha > \sup(\mathrm{dom}\ p)$ e teremos $p = q \cup \{\langle \alpha, f(\alpha)+1\rangle\} \in D_f$ estendendo q. Se $p \in G \cap D_f$, então existe $\alpha < \omega_1$ tal que $n = p(\alpha) > f(\alpha)$. Sendo assim,

$$\langle \alpha, n\rangle \in p \cap U_f \subseteq B \cap U_f \ .$$

Portanto $\infty \in \overline{B}$.

Em $\mathbf{V}[G]$, seja $A \subseteq B$, enumerável. Como $\mathbb{P}$ é enumeravelmente fechada, $A \in \mathbf{V}$. Para todo $\alpha < \omega_1$, $|A_\alpha| \leq 1$, visto que B é uma função. Daí, $\infty \notin \overline{A}$. Logo B testemunha que, em $\mathbf{V}[G]$, $t(\infty, X) > \aleph_0$. □

A próxima proposição mostra que não é possível diminuir o *tightness* para certas ordens parciais.

Proposição 4.2.4. *Sejam X um espaço topológico e $x \in X$. Seja κ um cardinal infinito e $\mathbb{P}$ uma ordem parcial κ^+-c.c. Se existe $p \in \mathbb{P}$, tal que*

$$p \Vdash \text{“}t(\check{x}, X) \leq |\check{\kappa}|\text{”},$$

então $t(x, X) \leq \kappa$, em $\mathbf{V}$.

Demonstração. Seja $A \subseteq X$, tal que $x \in \overline{A}$. Como $p \Vdash$ “$\check{x} \in \overline{\check{A}}$”, temos que existem $q \leq p$ e τ, $\mathbb{P}$-nome, tais que

$$q \Vdash \text{“}\tau\colon \check{\kappa} \longrightarrow \check{A}\ \wedge\ \check{x} \in \overline{\mathrm{ran}\ \tau}\ \text{”}.$$

Pela lema 1.2.18, temos que existe $F\colon \kappa \longrightarrow \mathcal{P}(A)$ tal que

$$\forall \alpha < \kappa\ (\ q \Vdash \text{“}\tau(\check{\alpha}) \in (F(\check{\alpha}))\check{}\ \text{”}\ \wedge\ |F(\alpha)| \leq \kappa\ ).$$

Seja $C = \bigcup_{\alpha<\kappa} F(\alpha)$. Daí $C \in [A]^{\leq\kappa}$. Além disso, $q \Vdash$ “$\mathrm{ran}\ \tau \subseteq \check{C}$”. Portanto $q \Vdash$ “$\check{x} \in \overline{\check{C}}$”. Como $C \in \mathbf{V}$, temos que $x \in \overline{C}$.

Portanto $t(x, X) \leq \kappa$. □

Se tomamos $\kappa = \aleph_0$ na proposição, chegamos ao:

Corolário 4.2.5. *Seja $\mathbb{P}$ uma ordem parcial c.c.c. Se X é um espaço topológico e existe $p \in \mathbb{P}$, tal que $p \Vdash$ “$t(X) = \aleph_0$”, então X tem tightness enumerável em $\mathbf{V}$.* □

Nossos próximos resultados mostram que não é possível tornar um espaço sequencial ou de Fréchet: ele já teria que o ser no “ground model”.

Proposição 4.2.6. *Sejam X um espaço topológico e $\mathbb{P}$ uma ordem parcial ω_1-Baire. Suponhamos que X é sequencial em uma extensão genérica por $\mathbb{P}$. Então X já era sequencial no modelo original.*

Demonstração. Seja $p \in \mathbb{P}$, tal que $p \Vdash$ "X é sequencial". Seja $A \subseteq X$ sequencialmente fechado e vejamos que $p \Vdash$ "$\check{A}$ é sequencialmente fechado".

Tomemos $q \leq p$ e seja $x \in X$, tal que

$$q \Vdash \text{"existe uma seqüência de elementos de } \check{A} \text{ que converge para } \check{x}\text{"}.$$

Como $\mathbb{P}$ é ω_1-Baire, existem $r \leq q$ e $\langle x_n : n < \omega \rangle$, uma seqüência de elementos de A, tais que

$$r \Vdash \text{"}\lim_n \, (x_n)\check{} = \check{x}\text{"}.$$

Temos que, em $\mathbf{V}$, $\lim_n x_n = x$, e, como A é sequencialmente fechado, $x \in A$.

Dado que $p \Vdash$ "X é sequencial", temos que $p \Vdash$ "$\check{A}$ é fechado". Visto que $A \in \mathbf{V}$, temos que A é fechado. □

Proposição 4.2.7. *Sejam X um espaço topológico e $\mathbb{P}$ uma ordem parcial ω_1-Baire. Seja $p \in \mathbb{P}$ tal que $p \Vdash$ "X é de Fréchet". Então X é de Fréchet em $\mathbf{V}$.*

Demonstração. Seja $A \subseteq X$ e suponha $x \in \overline{A}$. Por hipótese, temos que

$$p \Vdash \text{"existe uma seqüência de elementos de } \check{A} \text{ que converge para } \check{x}.\text{"}$$

Como $\mathbb{P}$ é ω_1-Baire, existem $q \leq p$ e $\langle x_n : n < \omega \rangle$, uma seqüência de elementos de A, tais que

$$q \Vdash \text{"}\lim_n \, (x_n)\check{} = \check{x}\text{"}.$$

Sendo assim, $\lim_n x_n = x$, em $\mathbf{V}$. □

Em [Pra99] temos resultados análogos aos dois anteriores. Porém estes lidam com os espaços X e X_M, e pede-se que o submodelo elementar M seja enumeravelmente fechado.

4.3 Forçando algumas funções cardinais enumeráveis

O corolário 4.2.5 pode ser generalizado para ordens c.c.p. e pela mesma argumentação, podemos mostrar que certas funções cardinais não podem se tornar $\aleph_0$ para ordens c.c.p. Antes de vermos tal teorema relembremos mais algumas funções cardinais:

Definição 4.3.1. *Para um espaço topológico X definimos:*

1. *a **densidade de** X, $d(X) = \min\{|D| : \overline{D} = X\} + \aleph_0$. X será dito **separável** se $d(X) = \aleph_0$.*

2. *o **grau de Lindelöf de** X, $L(X)$, como sendo o menor cardinal infinito κ para o qual todo recobrimento aberto de X admite subrecobrimento de cardinalidade menor ou igual a κ. X é dito **de Lindelöf** se $L(X) = \aleph_0$.*

3. o **peso de** X, $w(X) = \min\{|\mathcal{B}|: \mathcal{B}$ *é base para os abertos de* $X\} + \aleph_0$.

Nenhuma das funções cardinais que citamos neste capítulo pode se tornar enumerável para ordens parciais c.c.p. por causa do resultado a seguir:

Teorema 4.3.2. *Sejam* X *um espaço topológico e* $\mathbb{P}$ *uma ordem c.c.p. Tomemos uma função cardinal* $f \in \{\ t,\ d,\ \chi,\ w,\ L\ \}$. *Se* $f(X) = \aleph_0$ *em alguma extensão por* $\mathbb{P}$, *então,* $f(X) = \aleph_0$, *em* $\mathbf{V}$.

Demonstração. Seja $f = t$ e sejam $A \subseteq X$ e $x \in \overline{A}$. Daí para algum $p \in \mathbb{P}$,

$$p \Vdash \text{“}t(\check{x}, X) = \aleph_0 \ \wedge \ \check{x} \in \overline{\check{A}}\text{”}.$$

Sendo assim, existem $q \leq p$ e τ, $\mathbb{P}$-nome, tais que

$$q \Vdash \text{“}\check{x} \in \overline{\tau} \ \wedge \ \tau \text{ é enumerável } \wedge \ \tau \subseteq \check{A}\text{”}.$$

Pela proposição 1.2.32, existem $r \leq q$ e $C \subseteq A$, enumerável, tais que $r \Vdash$ “$\tau \subseteq \check{C}$”. Portanto $r \Vdash$ “$\check{x} \in \overline{\check{C}}$” e $x \in \overline{C}$.

Daí $t(X) = \aleph_0$.

Seja $f = d$. Seja $p \in \mathbb{P}$ tal que $p \Vdash$ “X é separável”. Sendo assim, existem $q \leq p$ e τ, $\mathbb{P}$-nome, tais que

$$q \Vdash \text{“}\tau \subseteq \check{X} \ \wedge \ \text{ é denso enumerável de } X\text{”}.$$

Pela proposição 1.2.32, existem $q \leq p$ e $D \subseteq X$, enumerável, tais que $q \Vdash$ “$\tau \subseteq \check{C}$”. Sendo assim, D é denso em X e X é separável.

Se $f = \chi$, sejam $\mathcal{T}$, a topologia de X, e $p \in \mathbb{P}$, tal que

$$p \Vdash \text{“}X \text{ tem caráter enumerável”}.$$

Tomemos $x \in X$. Então existem $q \leq p$ e τ, $\mathbb{P}$-nome, tais que

$$q \Vdash \text{“}\tau \subseteq \check{\mathcal{T}} \text{ é sistema fundamental enumerável de vizinhanças de } \check{x}\text{”}.$$

Pela proposição 1.2.32, existem $r \leq q$ e $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{T}$, enumerável, tais que $r \Vdash$ “$\tau \subseteq \check{\mathcal{V}}$”. Sendo assim, $\mathcal{V}$ é sistema fundamental enumerável de vizinhanças de x e $\chi(x, X) = \aleph_0$.

Para $f = w$ ou $f = L$, os argumento são análogos! $\square$

Observação 4.3.3. *No teorema anterior tratamos de algumas das funções cardinais mais significativas. Resultado análogo pode ser conseguido para outras funções cardinais como, por exemplo,* $\pi\chi$ *(pseudo-caráter) e* πw *(pseudo-peso) (ver [Juh80]).*

No teorema anterior observamos que, se tornamos X um espaço de Lindelöf numa extensão por um *forcing c.c.p.*, ele já era de Lindelöf no modelo original. O resultado abaixo mostra como manter a propriedade de Lindelöf numa extensão por *forcing* e responde parcialmente a seguinte pergunta de S.Watson em [Wat90]:

Pergunta 4.3.4 ([Wat90, problema 87]). ***ZFC*** *implica que forcing enumeravelmente fechado preserva "ser de Lindelöf" para espaços de caráter enumerável?*

Observação 4.3.5. *Depois da conclusão desta tese encontramos em [Tal95] um resultado parcial relacionado à pergunta anterior. F.Tall apresenta várias condições sob as quais um espaço de Lindelöf se mantém de Lindelöf nas extensões por* ***forcing*** *enumeravelmente fechado. Nosso resultado apresenta uma demonstração "mais direta" para uma das condições.*

Proposição 4.3.6. *Seja X um espaço topológico de Lindelöf de cardinalidade $\aleph_1$ e seja $\mathbb{P}$ uma ordem parcial enumeravelmente fechada. Então X se mantém de Lindelöf numa extensão por $\mathbb{P}$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{T}$ a topologia de X em $\mathbf{V}$. Suponha que existam $p \in \mathbb{P}$ e τ, $\mathbb{P}$-nome, tais que

$$p \Vdash \text{“}\check{X} \subseteq \bigcup \tau \quad \wedge \quad \tau \subseteq \check{\mathcal{T}}\text{”}.$$

Seja $r \leq p$. Suponha $X = \{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$. Vamos construir, por recursão, $\langle (p_\alpha, \Omega_\alpha) : \alpha < \omega_1 \rangle$, tal que

1. $\forall \alpha \ (\ x_\alpha \in \Omega_\alpha \in \mathcal{T} \quad \wedge \quad p_\alpha \leq r \quad \wedge \quad p_\alpha \Vdash \text{“}\check{\Omega}_\alpha \in \tau\text{”} \ )$ e
2. $\forall \alpha < \beta \ (\ p_\beta \leq p_\alpha \ )$.

Como $r \Vdash \text{“}\check{x}_0 \in \bigcup \tau \ \wedge \ \tau \subseteq \check{\mathcal{T}}\text{”}$, existem $p_0 \leq r$ e $\Omega_0 \in \mathcal{T}$, tais que $x_0 \in \Omega_0$ e $p_0 \Vdash \check{\Omega}_0 \in \tau$. Suponha a seqüência construída até β. Como $\mathbb{P}$ é enumeravelmente fechada, existe $q \in \mathbb{P}$, tal que $\forall \alpha < \beta \ (q \leq p_\alpha)$. Daí, existem $p_\beta \leq q$ e $\Omega_\beta \in \mathcal{T}$, tais que $p_\beta \Vdash \text{“}\check{\Omega}_\beta \in \tau\text{”}$.

Dado que X é de Lindelöf e $\{\Omega_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ é recobrimento aberto de X, existe $Y \subseteq \omega_1$, enumerável, tal que $X \subseteq \bigcup_{\alpha \in Y} \Omega_\alpha$. Seja $\gamma < \omega_1$ tal que $\gamma > \sup Y$. Então

$$p_\gamma \Vdash \text{“}\check{X} \subseteq \bigcup \{\Omega_\alpha : \alpha < \gamma\}\check{}\text{”}.$$

Ainda, $p_\gamma \Vdash \{\Omega_\alpha : \alpha < \gamma\}\check{} \subseteq \tau$. Portanto mostramos que

$$p \Vdash \text{“ existe subrecobrimento enumerável de } \tau \text{ ”}.$$

□

A pergunta fez sentido uma vez que temos:

Corolário 4.3.7 (CH). *Se X é um espaço topológico de Hausdorf e de Lindelöf, que tem caráter enumerável, e $\mathbb{P}$ é uma ordem parcial enumeravelmente fechada, então X se mantém de Lindelöf nas extensões por $\mathbb{P}$.*

Demonstração. Basta lembrarmos que, pelo teorema de Arhangel´skii (ver, por exemplo, [Juh80]), $|X| \leq 2^{L(X) \cdot \chi(X)}$. □

4.4 Os espaços X_M e $X_{M[G]}$

Dados $M \prec H_\theta$ e $\langle X, \mathcal{T} \rangle \in M$ um espaço topológico, podemos definir uma topologia em $X \cap M$, tendo como base o conjunto $\{U \cap M : U \in \mathcal{T} \cap M\}$. Chamemos $X \cap M$, com esta topologia, de X_M. Esta topologia é, em geral, menos fina que a topologia de subespaço induzida por $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ sobre $X \cap M$. Esta construção pode ser encontrada em [JT98].

Se $\{X, \mathcal{T}, \mathbb{P}\} \subset M \prec H_\theta$, é natural considerar em uma extensão por $\mathbb{P}$, dois espaços topológicos: X_M e $X_{M[G]}$. Temos o diagrama:

$$\mathbf{V} \xrightarrow{\ \mathbb{P}\ } \mathbf{V}[G]$$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "\mathbb{P}"] \arrow[d] & & X \arrow[d] \\
X_M \arrow[drr, "\mathbb{P}"] & & X_{M[G]} \\
& & X_M
\end{tikzcd}$$

O que se pode dizer desses dois espaços? Se $M[G] \cap \mathbf{V} = M$, temos que os dois espaços serão iguais. Note que, em geral, $X \cap M[G] = X \cap M$ não implica que X_M e $X_{M[G]}$ coincidirão como espaço topológico. Como $X_M \subseteq X_{M[G]}$, será que X_M é subespaço de $X_{M[G]}$ na extensão? $X_{M[G]}$ pode ser subespaço de X? Apresentamos nesta seção alguns resultados inciais e exemplos básicos. Esta investigação está no início e pretendemos dar-lhe continuidade num futuro breve.

Como conseqüência imediata da definição das topologias envolvidas mostra-se:

Proposição 4.4.1. *Se $\mathcal{B} \in M$, é uma base para os abertos de X, então:*

1. *$\{U \cap M : U \in \mathcal{B} \cap M\}$ é base para X_M, em $\mathbf{V}$ e em $\mathbf{V}[G]$; e*

2. *$\{U \cap M[G] : U \in \mathcal{B} \cap M[G]\}$ é base para $X_{M[G]}$.*

$\square$

Podemos, então, mostrar:

Proposição 4.4.2. *Sejam X, $\mathcal{T}$, $\mathbb{P}$ e M nas condições descritas até o momento.*

1. *X_M é subespaço de X, em $\mathbf{V}$, se, e somente se, o é em $\mathbf{V}[G]$.*

2. *Se X_M é subespaço de X, em $\mathbf{V}$, então, X_M é subespaço de $X_{M[G]}$, em $\mathbf{V}[G]$; e*

3. *Se X_M é subespaço de X, em $\mathbf{V}$, e $X \cap M = X \cap M[G]$, então $X_{M[G]}$ é subespaço de X, em $\mathbf{V}[G]$.*

Demonstração. 1. Conseqüência da proposição anterior.

2. Seja $V \in \mathcal{T} \cap M[G]$ e seja $x \in V \cap M$. Dado que X_M é subespaço de X, existe $U \in \mathcal{T} \cap M$, tal que $x \in U \cap M \subseteq V \cap M$. Como a inclusão continua valendo na extensão, segue que X_M é subespaço de $X_{M[G]}$.

3. Demonstra-se analogamente ao item anterior.

□

Em [Jun96] encontramos discutido o caso no qual $\kappa \in M$ é um ordinal com $\kappa \cap M = \beta < \kappa$, e toma-se $X = \kappa + 1$ com a topologia usual da ordem para um ordinal. Temos que $X_M = \beta \cup \{\kappa\}$ com a topologia: em β coincide com a mesma de $\mathcal{T}$; e os abertos básicos[1] para κ são $]\alpha; \beta[\cup \{\kappa\}$, para $\alpha < \beta$. Como $]\beta; \kappa]$ é aberto, X_M falha em ser subespaço de X. Mesmo assim, notamos que X_M é homeomorfo a $\beta + 1$. Para poder acontecer $M \cap \kappa < \kappa$, com $\kappa \in M$, temos que M não pode ser transitivo. Nesta situação, pela proposição 2.4.6, $\mathrm{td}(M) = \kappa$. De qualquer maneira, se M for transitivo, caímos na trivialidade, uma vez que os espaços X, X_M e $X_{M[G]}$ coincidirão. Chegamos, então, ao:

Exemplo 4.4.3. *Se $M \prec H_\theta$ é não-transitivo, existe espaço topológico $X \in M$ para o qual são equivalentes:*

1. *X_M é subespaço de $X_{M[G]}$,*

2. *$X \cap M = X \cap M[G]$ e*

3. *os espaços X_M e $X_{M[G]}$ coincidem.*

Demonstração. Seja $X = \mathrm{td}(M) + 1$ e tomemos a topologia usual de ordem para um ordinal.

($1 \to 2$) Seja $\beta \in \kappa \cap M[G]$. Daí $]\beta; \kappa] \in M[G]$ e é vizinhança de κ. Logo existe $\alpha \in M \cap \kappa$, tal que $]\alpha; \kappa] \cap M \subseteq]\beta; \kappa]$. Logo $\alpha \geq \beta$. Mas $\mathrm{td}(M) \cap M$ é ordinal e $\alpha + 1 \subseteq M$. Concluímos que $\beta \in M$.

($2 \to 3$) Pelo parágrafo anterior, temos que X_M e $X_{M[G]}$ têm os mesmos abertos. □

Observamos que este exemplo ainda não demonstra a necessidade de "$X \cap M = X \cap M[G]$" no item 3 da proposição 4.4.2, visto que X_M não é subespaço de X. Esta questão continua em aberto para o nosso estudo:

Pergunta 4.4.4. *"X_M é subespaço de X" implica que "$X_{M[G]}$ é subespaço de X", mesmo quando $X \cap M \neq X \cap M[G]$?*

O resultado a seguir é conhecido e pode ser encontrado em [Jun96].

[1]Para um espaço de ordinal, usamos a notação popular "$]\alpha; \beta[$" para indicar o conjunto $\{\gamma < \beta \colon \alpha < \gamma\}$ e suas variações naturais para $[\alpha; \beta]$, $[\alpha; \beta[$ e $]\alpha; \beta]$.

Teorema 4.4.5. *Se $X \in M \prec H_\theta$ é um espaço topológico de caráter enumerável, então X_M é subespaço de X.* $\square$

Sendo assim, temos:

Corolário 4.4.6. *Se $X \in M \prec H_\theta$ é um espaço topológico e $\mathbb{P} \in M$ é uma ordem parcial, então $X_{M[G]}$ é subespaço de X, em $\mathbf{V}[G]$, sempre que $(\chi(X) = \aleph_0)^{\mathbf{V}[G]}$.* $\square$

Usamos este fato para mostrar:

Exemplo 4.4.7. *Existem um espaço topológico X e uma ordem parcial $\mathbb{P}$ nas condições do corolário, tais que X_M não é subespaço de X mas $X_{M[G]}$ é subespaço de X.*

Demonstração. Seja $\mathbb{P} = \mathbb{N}$ o **forcing de Namba** (ver exemplo 3.2.9). É fato que $\mathbb{N}$ preserva ω_1 mas colapsa a cofinalidade de ω_2 para ω.

Sejam $X = \omega_2+1$ e $M \prec H_\theta$, ω-covering de cardinalidade $\aleph_1$ (construção possível pelo lema 3.1.9). Pelo teorema 3.1.4, temos que $\omega_1 \subseteq M$. Pelo corolário 2.4.3, temos que $\mathrm{td}(M) = \omega_2$. Pela proposição 2.4.6, $M \cap \omega_2 < \omega_2$. Pela proposição 3.1.5, $\mathrm{cf}(M \cap \omega_2) = \omega_1$. Em X geramos a topologia por

1. todo $\alpha < \omega_2$ é ponto isolado e

2. para cada $\alpha < \omega_2$, o conjunto $]\alpha; \omega_2]$ é vizinhança aberta de ω_2.

Notamos que $]\alpha; \omega_2] \in M$ se, e só se, $\alpha < M \cap \omega_2$. Por causa do aberto $]M \cap \omega_2; \omega_2]$, X_M não é subespaço de X. Em $\mathbf{V}$, $\chi(\omega_2, X_M) = \omega_1$ e $\chi(\omega_2, X) = \omega_2$. Dado que $(\mathrm{cf}(\omega_2) = \aleph_0)^{\mathbf{V}[G]}$, temos que $(\chi(X) = \aleph_0)^{\mathbf{V}[G]}$ e, portando $X_{M[G]}$ é subespaço de X, em $\mathbf{V}[G]$. $\square$

A **compactificação de Stone-Čech de** ω nos proverá mais um exemplo. Nós a denotaremos por $\beta\omega$ e será o conjunto dos ultrafiltros em ω com a topologia gerada por $\mathcal{B} = \{o(a) : a \in \mathcal{P}(\omega)\}$, onde $o(a) = \{\mathcal{U} \in \beta\omega : a \in \mathcal{U}\}$. Em [Wal74], por exemplo, podemos encontrar os resultados aqui citados sobre $\beta\omega$. É conhecido que $\mathcal{B}$ é o conjunto dos abertos-fechados de $\beta\omega$ e que está em bijeção com $\mathcal{P}(\omega)$. Portanto, se $\beta\omega \in M \prec H_\theta$, então $\mathcal{B} \in M$ e $o(a) \in M$ se, e só se, $a \in M$. Ainda, dado que os ultrafiltros fixos de $\beta\omega$ são elementos de M (por definibilidade), $o(a) \cap M \subseteq o(b) \cap M$ se, e só se, $a \subseteq b$. Lembramos também que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{U}$ **gera** $\mathcal{U}$ se, para todo $b \in \mathcal{U}$, existe $a \in \mathcal{A}$, tal que $a \subseteq b$. Para $\beta\omega$ temos:

Proposição 4.4.8. *$(\beta\omega)_M$ é subespaço de $\beta\omega$ se, e somente se, $M \cap \mathcal{U}$ gera $\mathcal{U}$, para todo $\mathcal{U} \in \beta\omega \cap M$.*

Demonstração. (Só se) Sejam $b \in \mathcal{U} \in M \cap \beta\omega$. Se $(\beta\omega)_M$ é subespaço de $\beta\omega$, temos, pela proposição 4.4.1 e pelo parágrafo anterior, que existe $a \in \mathcal{P}(\omega) \cap M$, tal que $o(a) \cap M \subseteq o(b) \cap M$. Também pelo parágrafo anterior, concluímos que $a \subseteq b$. Logo $M \cap \mathcal{U}$ gera $\mathcal{U}$.

(Se) Suponhamos que $\mathcal{U} \in M \cap \beta\omega$ e seja $b \in \mathcal{U}$. Por hipótese, existe $a \in M \cap \mathcal{U}$, tal que $a \subseteq b$. Daí $o(a) \in M$ e $\mathcal{U} \in o(a) \cap M \subseteq o(b) \cap M$. $\square$

Dada a construção das vizinhanças dos elementos de $\beta\omega$, temos, como conseqüência imediata:

Proposição 4.4.9. *Se* $\mathcal{U} \in \beta\omega$, *então* $\chi(\mathcal{U}, \beta\omega) = \min\{|S|: S \text{ gera } \mathcal{U}\}$. □

Em [Wal74] ou [Bla03], podemos encontrar a demonstração para:

Proposição 4.4.10 (Pospíšil). *Existe* $\mathcal{U} \in \beta\omega$, *tal que* $\chi(\mathcal{U}, \beta\omega) = \mathfrak{c}$. □

Portanto, temos:

Proposição 4.4.11. *Se* $|M| < \mathfrak{c}$, *então* $(\beta\omega)_M$ ***não*** *é subespaço de* $\beta\omega$.

Demonstração. Como existe $\mathcal{U} \in \beta\omega$, tal que $\chi(\mathcal{U}, \beta\omega) = \mathfrak{c}$, podemos, por elementaridade, tomar tal $\mathcal{U} \in M$. Sendo assim, $|M \cap \mathcal{U}| < \mathfrak{c}$ e $M \cap \mathcal{U}$ não pode gerar $\mathcal{U}$, pelas duas proposições anteriores. Pela proposição 4.4.8, $(\beta\omega)_M$ não é subespaço de $\beta\omega$. □

Após expormos estes resultados, temos:

Exemplo 4.4.12. *É consistente que existam submodelo elementar* M *e ordem parcial* $\mathbb{P} \in M$, *tais que* $(\beta\omega)_M$ *não é subespaço de* $\beta\omega$ *mas* $(\beta\omega)_{M[G]}$ *é subespaço de* $\beta\omega$, *nas extensões por* $\mathbb{P}$.

Demonstração. Seja $\mathbf{V}$ um modelo de $\neg$**CH**. Sejam $M \prec H_\theta$, ω-covering de tamanho $\aleph_1$ (que existe pelo corolário 3.1.7), e $\mathbb{P} = \mathrm{Fn}(I, 2, \omega_1)$, para $I \in M$ não enumerável. Por definibilidade, $\{\mathbb{P}, \beta\omega\} \subset M$. $\mathbb{P}$ é enumeravelmente fechado pelo lema 1.2.24.

Pela proposição anterior, já que $\aleph_1 < \mathfrak{c}$, $(\beta\omega)_M$ não é subespaço de $\beta\omega$. Provamos no teorema 3.2.3, que $M[G]$ é ω-covering e enumeravelmente fechado, já que vale **CH** em $\mathbf{V}[G]$ ([Kun80]), e daí, $\mathcal{P}(\omega) \subseteq M[G]$. Logo $(\beta\omega)_{M[G]}$ é subespaço de $\beta\omega$. □

Considerações finais

Além das perguntas deixadas ao longo do trabalho, vale a pena ressaltar que várias linhas de pesquisas podem ser seguidas a partir deste. Apresentamos aqui algumas destas.

Algumas propriedades de submodelos elementares ainda não foram trabalhadas. Por exemplo, *internally approachable* (ver [Kru]), que surge quando não temos **CH**.

O teorema 3.2.7 apresenta uma recíproca *parcial* para o teorema 3.2.8. P.Larson nos apresentou uma generalização do **forcing de Namba** que, aparentemente, não torna as cofinalidades enumeráveis mas não é c.c.p. Parece, também, que preserva ω-covering.

O exemplo 3.3.7 nos mostrou a dificuldade de "incluir" elementos em um submodelo elementar e a de construir condição que não é $(\mathbb{P}, M)$-genérico. Esse mesmo problema se refletiu para diferenciar X_M e $X_{M[G]}$. Os casos mais interessantes são os que tratam de preservação de cardinais ou cofinalidades.

O autor pretende prosseguir com o estudo iniciado na seção 4.4 e tentará aplicar as técnicas usadas no estudo dos submodelos elementares ω-covering para resolver problemas relacionados à preservação de propriedades topológicas. Na literatura estudada envolvendo a função $\mathbf{Cov}_\omega(\cdot)$ não se encontrou o uso de tais submodelos elementares. Seria esse "approach" possível para o estudo de **pcf theory**? Podem os submodelos elementares ω-covering acrescentar algo de novo - ou mesmo algo - à tal teoria? É realmente uma abordagem diferente?

Além do mais, todas as linhas de pesquisa citadas também interessam muito o autor, bem como o descrito na pergunta 4.3.4.

Referências Bibliográficas

[AM05] Uri Abraham and Menachem Magidor. Cardinal arithmetic. In Matt Foreman, Akihiro Kanamori, and Menachem Magidor, editors, *Handbook of Set Theory*. 2005. To appear.

[Bal96] Zoltan T. Balogh. A small Dowker space in ZFC. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 124(8):2555–2560, 1996.

[Bau84] James E. Baumgartner. Applications of the proper forcing axiom. In Kenneth Kunen and Jerry E. Vaughan, editors, *Handbook of set-theoretic topology*, pages 913–959. North-Holland, Amsterdam, 1984.

[Bla03] Andreas Blass. Combinatorial cardinal characteristics of the *Continuum*. In Matt Foreman, Akihiro Kanamori, and Menachem Magidor, editors, *Handbook of Set Theory*. 2003. To appear.

[Coh63] Paul J. Cohen. The independence of the continuum hypothesis. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 50:1143–1148, 1963.

[Dow88a] Alan Dow. An introduction to applications of elementary submodels to topology. *Topology Proc.*, 13(1):17–72, 1988.

[Dow88b] Alan Dow. Two applications of reflection and forcing to topology. In Z. Frolík, editor, *General topology and its relations to modern analysis and algebra, VI (Prague, 1986)*, volume 16 of *Res. Exp. Math.*, pages 155–172. Heldermann, Berlin, 1988.

[Dow89] Alan Dow. Compact spaces of countable tightness in the Cohen model. In Juris Steprāns and Stephen Watson, editors, *Set theory and its applications (Toronto, ON, 1987)*, volume 1401 of *Lecture Notes in Math.*, pages 55–67. Springer, Berlin, 1989.

[Dow92] Alan Dow. Set theory in topology. In *Recent progress in general topology (Prague, 1991)*, pages 167–197. North-Holland, Amsterdam, 1992.

[Dow95] Alan Dow. More set-theory for topologists. *Topology Appl.*, 64(3):243–300, 1995.

[DTW90a] Alan Dow, Franklin D. Tall, and William A. R. Weiss. New proofs of the consistency of the normal Moore space conjecture. I. *Topology Appl.*, 37(1):33–51, 1990.

[DTW90b] Alan Dow, Franklin D. Tall, and William A. R. Weiss. New proofs of the consistency of the normal Moore space conjecture. II. *Topology Appl.*, 37(2):115–129, 1990.

[Eng89] Ryszard Engelking. *General Topology*, volume 6 of *Sigma Series in Pure Mathematics*. Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[FLS96] William G. Fleissner, Tim LaBerge, and Adrienne Stanley. Killing normality with a Cohen real. *Topology Appl.*, 72(2):173–181, 1996.

[FW95] Alessandro Fedeli and Stephen Watson. Elementary submodels and cardinal functions. *Topology Proc.*, 20:91–110, 1995.

[Git89] Moti Gitik. The negation of the singular cardinal hypothesis from $o(\kappa) = \kappa^{++}$. *Ann. Pure Appl. Logic*, 43(3):209–234, 1989.

[GJT98] Renata Grunberg, Lúcia R. Junqueira, and Franklin D. Tall. Forcing and normality. *Topology Appl.*, 84(1-3):145–174, 1998.

[Jec86] Thomas Jech. *Multiple forcing*, volume 88 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1986.

[Jec95] Thomas Jech. Singular cardinals and the pcf theory. *Bull. Symbolic Logic*, 1(4):408–424, 1995.

[Jec03] Thomas Jech. *Set theory*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2003. The third millennium edition, revised and expanded.

[JLP] Lúcia R. Junqueira, Paul B. Larson, and Marcelo D. Passos. On extensions of elementary submodels by *forcing*. Submitted.

[JT98] Lúcia R. Junqueira and Franklin D. Tall. The topology of elementary submodels. *Topology Appl.*, 82(1-3):239–266, 1998. Special volume in memory of Kiiti Morita.

[JT03] Lúcia R. Junqueira and Franklin D. Tall. More reflections on compactness. *Fund. Math.*, 176(2):127–141, 2003.

[Juh80] István Juhász. *Cardinal functions in topology—ten years later*, volume 123 of *Mathematical Centre Tracts*. Mathematisch Centrum, Amsterdam, second edition, 1980.

[Jun96] Lúcia R. Junqueira. *Preservation of topological properties by forcing and by elementary submodels*. PhD thesis, University of Toronto, 1996.

[Jun00] Lúcia R. Junqueira. Upwards preservation by elementary submodels. *Topology Proc.*, 25(Spring):225–249, 2000.

[Koj95] Menachem Kojman. The a,b,c of pcf: a pcf companion to pcf theory, part i, november 1995. preprint.

[Koj01] Menachem Kojman. Pcf theory. *Topology Atlas Invited Contributions*, 6(issue 1):74–77, 2001.

[Kru] John Krueger. Internal approachability and reflection. Submitted.

[KT00] Kenneth Kunen and Franklin D. Tall. The real line in elementary submodels of set theory. *J. Symbolic Logic*, 65(2):683–691, 2000.

[Kun80] Kenneth Kunen. *Set theory. An introduction to independence proofs*, volume 102 of *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1980.

[Kun03] Kenneth Kunen. Compact spaces, compact cardinals, and elementary submodels. *Topology Appl.*, 130(2):99–109, 2003.

[LaB92] Tim LaBerge. A note on spaces that stay normal after adding one Cohen real, october 17 1992. preprint.

[Lar04] Paul B. Larson. *The stationary tower*, volume 32 of *University Lecture Series*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2004. Notes on a course by W. Hugh Woodin.

[Mag77a] Menachem Magidor. On the singular cardinals problem. I. *Israel J. Math.*, 28(1-2):1–31, 1977.

[Mag77b] Menachem Magidor. On the singular cardinals problem. II. *Ann. Math. (2)*, 106(3):517–547, 1977.

[Nam71] Kanji Namba. Independence proof of (ω, ω_α)-distributive law in complete Boolean algebras. *Comment. Math. Univ. St. Paul.*, 19:1–12, 1971.

[Pra99] Renata Grunberg Almeida Prado. *Applications of Reflection to Topology.* PhD thesis, University of Toronto, 1999.

[Rud84] Mary Ellen Rudin. Dowker spaces. In Kenneth Kunen and Jerry E. Vaughan, editors, *Handbook of set-theoretic topology*, pages 761–780. North-Holland, Amsterdam, 1984.

[She82] Saharon Shelah. *Proper forcing*, volume 940 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1982.

[Tal95] Franklin D. Tall. On the cardinality of Lindelöf spaces with points G_δ. *Topology Appl.*, 63(1):21–38, 1995.

[Tal00a] Franklin D. Tall. If it looks and smells like the reals .... *Fund. Math.*, 163(1):1–11, 2000.

[Tal00b] Franklin D. Tall. Reflecting on compact spaces. *Topology Proc.*, 25(Summer):345–350 (2002), 2000.

[vMR90] Jan van Mill and George M. Reed, editors. *Open problems in topology.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1990.

[Wal74] Russell C. Walker. *The Stone-Čech compactification.* Springer-Verlag, New York, 1974. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 83.

[Wat90] Stephen Watson. Problems I wish I could solve. In Jan van Mill and George M. Reed, editors, *Open problems in topology*, pages 37–76. North-Holland, Amsterdam, 1990.

[Zap98] Jindřich Zapletal. Preserving σ-ideals. *J. Symbolic Logic*, 63(4):1437–1441, 1998.

Índice Remissivo