As Propriedades de Phillips para espaços de Banach

Aluno : Ednei Felix Reis
Orientador : Prof. Dr. Elói Medina Galego

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática e dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências na área de Matemática.

Este trabalho contou com o apoio financeiro do CNPq.

Agradecimentos

Agradeço ao Professor Elói Medina Galego pela orientação e paciência, e a minha mãe pelo apoio ao longo de todo esse tempo.

Resumo

Nosso trabalho de mestrado tem como objetivo o estudo das propriedades de Phillips, estabelecendo relações com diversas propriedades geométricas bem conhecidas, tais como as propriedades (u) e (V) de Pelczynski, a propriedade de Dunford-Pettis e a propriedade de Grotendieck. Os resultados que serão estudados nesse trabalho se encontram nos artigos [7] e [14], artigos esses onde as propriedades de Phillips foram introduzidas.

Abstract

The purpose of our text is the study of the Phillips properties, establishing connections with some well-known geometric properties, such as the Pelczynski´s properties (u) and (V), the Dunford-Pettis property and the Grotendieck property. The results that will be studied in this text are found in [7] e [14], articles in which the Phillips properties were introduced.

Sumário

1 Algumas propriedades definidas em espaços de Banach **5**
1.1 Resultados Preliminares 5
1.2 Bases de Schauder e sequências básicas 8
1.3 Propriedades geométricas definidas em espaços de Banach 19

2 As propriedades de Phillips **31**
2.1 Resultados iniciais 31
2.2 Caracterizações da Propriedade fraca de Phillips 41
2.3 Problemas em aberto 47

Notações

Ao longo deste texto, X e Y denotarão espaços de Banach de dimensão infinita sobre $\mathbb{C}$. Se $V \subseteq X$, denotaremos por span$\{V\}$ o subespaço linear gerado por V, e por $[V]$ o subespaço fechado gerado por V.

Fixado um espaço de Banach X com a norma $||.||$, denotaremos por B_X a bola unitária fechada de X, e por S_X a esfera unitária de X,

$$B_X = \{x \in X : ||x|| \leq 1\} \qquad S_X = \{x \in X : ||x|| = 1\}.$$

X^* denotará o conjunto dos funcionais lineares contínuos de X, e $i_X : X \to X^{**}$ denotará a imersão canônica de X em X^{**}, onde $i_X(x)(x^*) = x^*(x)$. Nesse sentido, diremos que um espaço de Banach X é reflexivo quando i_X for sobrejetora, e que X é complementado em X^{**} quando $i_X(X)$ for complementado em X^{**}.

Denotaremos por c_0 o espaço das sequências complexas que convergem a 0,

$$c_0 = \{(a_n)_n : a_n \in \mathbb{C}, \lim_n a_n = 0\},$$

com a norma

$$||(a_n)_n|| = \sup_n |a_n|$$

por ℓ_1 o espaço das sequências complexas somáveis

$$\ell_1 = \{(a_n)_n : a_n \in \mathbb{C}, \sum_n |a_n| < +\infty\}$$

com a norma

$$||(a_n)_n|| = \sum_n |a_n|$$

e por ℓ_∞ o espaço das sequências complexas limitadas

$$\ell_\infty = \{(a_n)_n : a_n \in \mathbb{C}, \sup_n |a_n| < +\infty\};$$

Denotaremos por e_n e e_n^* as sequências

$$e_n = (0, \ 0, \ \ldots, \ \underset{\substack{\uparrow \\ n}}{1}, \ 0, \ \ldots)$$

$$e_n^* = (0, \ 0, \ \ldots, \ \underset{\substack{\uparrow \\ n}}{1}, \ 0, \ \ldots)$$

em c_0 e em ℓ_1 respectivamente.

Se $T : X \to Y$ é um operador limitado, denotaremos por $T^* : Y^* \to X^*$ o adjunto de T definido por $T^*y^* = y^* \circ T$.

Além da topologia induzida pela norma, consideraremos outras duas topologias: As topologias fraca e fraca*, a primeira sendo definida para espaços de Banach em geral através do seguinte sistema fundamental de vizinhanças em torno da origem:

$$W(0, x_1^*, \ldots, x_n^*, \epsilon) = \{x \in X : |x_1^* x|, \ldots, |x_n^* x| < \epsilon\}, \quad \text{onde } x_1^*, \ldots, x_n^* \in X^*, \epsilon > 0$$

e a topologia fraca* sendo definida apenas para espaços duais através do seguinte sistema fundamental de vizinhanças em torno da origem:

$$W(0, x_1, \ldots, x_n, \epsilon) = \{x^* \in X^* : |x^* x_1|, \ldots, |x^* x_n| < \epsilon\}, \quad \text{onde } x_1, \ldots, x_n \in X, \epsilon > 0.$$

A partir disso, temos que uma sequência $(x_n)_n$ converge fracamente a 0 em X (notação $x_n \xrightarrow{w} 0$) se e somente se para todo $x^* \in X^*$ $x^* x_n \to 0$, e uma sequência $(x_n^*)_n$ converge fraca* a zero em X^* (notação $x_n^* \xrightarrow{w*} 0$) se e somente para todo $x \in X$ $x_n^* x \to 0$. Consideraremos também as noções de sequências fracamente de Cauchy e de espaços fracamente sequencialmente completos. Dizemos que uma sequência $(x_n)_n$ é fracamente de Cauchy se para todo $x^* \in X^*$ $(x^* x_n)$ for convergente, e um espaço de Banach X é fracamente sequencialmente completo se toda sequência fracamente de Cauchy em X for fracamente convergente.

Introdução

Motivados pelo lema de Phillips, [3] pág. 83, que diz que a aplicação $(i_{c_0})^* : c_0^{***} \to c_0^*$ (que funciona de certa forma como uma projeção) é fraca*-$||.||$ sequencialmente contínua, W. Freeman e A. Ulger introduziram em [7] as propriedades de Phillips para espaços de Banach.

Um espaço de Banach X possui a propriedade (fraca) de Phillips sempre quando a aplicação $(i_X)^* : X^{***} \to X^*$ for fraca*-$||.||$ (fraca) sequencialmente contínua, e possui a propriedade (fraca) de Phillips hereditária se todo subespaço fechado de X possuir tal propriedade.

Nesse texto, relacionaremos as propriedades de Philips com diversas propriedades geométricas definidas em espaços de Banach, tais como as propriedades (u) e (V) de Pelczynski, a propriedade de Dunford-Pettis e a propriedade de Grotendieck. Para isso, estruturaremos o texto da seguinte forma:

No primeiro capítulo, faremos uma breve coletânea de resultados envolvendo as propriedades utilizadas ao longo do trabalho.

Na parte inicial do segundo capítulo, introduziremos as propriedades de Phillips, daremos caracterizações dessas propriedades em termos das aplicações definidas no bidual de espaços de Banach a valores em c_0. Também daremos caracterizações das versões hereditárias das propriedades de Phillips em termos das propriedades geométricas definidas no capítulo 1, e provaremos versões para espaços com a propriedade de Phillips de resultados válidos para c_0.

Em seguida, destacaremos diversas conexões da propriedade fraca de Phillips com a propriedade de Grotendieck. Um resultado que ilustra bem a proximidade entre essas duas propriedades é que um espaço de Banach X possui a propriedade fraca de Phillips se e somente se para todo operador $T : X^{**} \to c_0$, temos $\widetilde{T} = T \circ i_X$ fracamente compacto, enquanto X possui a propriedade de Grotendieck se e somente se todo operador $T : X \to c_0$ for fracamente compacto.

Terminaremos nosso trabalho destacando alguns problemas envolvendo as propriedades de Phillips que se encontram em aberto.

Capítulo 1

Algumas propriedades definidas em espaços de Banach

1.1 Resultados Preliminares

Ao longo do trabalho utilizaremos os seguintes resultados:

Teorema 1.1.1 (Teorema da Aplicação Aberta) *Sejam X e Y espaços de Banach e $T : X \to Y$ um operador limitado sobrejetor. Então T é uma aplicação aberta.*

Demonstração. [9] Theorem 1.6.5.

Teorema 1.1.2 (Teorema do Gráfico Fechado) *Sejam X e Y espaços de Banach, e $T : X \to Y$ uma aplicação linear. Se para toda sequência $(x_n)_n$ em X tal que $x_n \to 0$ e $Tx_n \to y \in Y$ temos $y = 0$, então T é limitada.*

Demonstração. [9] Theorem 1.6.11.

Teorema 1.1.3 (Teorema de Hahn-Banach) *Suponha que f_0 seja um funcional linear contínuo definido em um subespaço Y de um espaço normado X. Então existe um funcional limitado $f : X \to \mathbb{C}$ tal que $||f|| = ||f_0||$ e $f|_Y = f_0$.*

Demonstração. [9] Theorem 1.9.6.

Corolário 1.1.4 *Se x é um elemento não nulo de um espaço normado X, então existe $f \in X^*$ tal que $||f|| = 1$ e $f(x) = ||x||$.*

Demonstração. [9] Corollary 1.9.8.

Teorema 1.1.5 *Sejam X e Y espaços de Banach e $T : X \to Y$ um operador limitado. Então:*

(a) T é sobrejetor se e somente se T^* é um isomorfismo sobre a imagem.

(b) T^* é sobrejetor se e somente se T é um isomorfismo sobre a imagem.

Demonstração. [9] Theorem 3.1.22.

Teorema 1.1.6 (Princípio da Limitação Uniforme) *Seja $\mathcal{T}$ uma família não vazia de operadores definidos em um espaço de Banach X a valores em um espaço normado Y. Se $\sup\{||Tx|| : T \in \mathcal{T}\} < +\infty$ para cada $x \in X$ então $\sup\{||T|| : T \in \mathcal{T}\} < \infty$.*

Demonstração. [9] Theorem 1.6.9.

Teorema 1.1.7 (Teorema de Banach Steinhaus) *Seja (T_n) uma sequência de operadores definidos em um espaço de Banach X a valores em um espaço normado Y tal que $\lim_n T_n x$ existe para todo $x \in X$. Definindo $T : X \to Y$ como $Tx = \lim_n T_n x$ temos que T é limidado.*

Demonstração. [9] Corollary 1.6.10.

Proposição 1.1.8 *Sejam X e Y espaços de Banach e $T : X \to Y$ uma aplicação linear. Então T é $||.||$ - $||.||$ contínua se e somente se T é fraca - fraca contínua.*

Demonstração. [3] Theorem 5, pag. 12.

Proposição 1.1.9 *Sejam X e Y espaços de Banach e $T : X \to Y$ um operador limitado. Então T^* é fraco*-fraco* contínuo.*

Demonstração. [9] Theorem 3.1.11.

Teorema 1.1.10 *Sejam X um espaço de Banach e $K \subseteq X$ convexo. Então $\overline{K} = \overline{K}^w$, onde $\overline{K}^w$ denota o fecho de K na topologia fraca.*

Demonstração. [3] Theorem 1 pag. 11.

Teorema 1.1.11 (Teorema de Goldstine) *Seja X um espaço de Banach. Então $B_{i_X(X)}$ é fraca* densa em $B_{X^{**}}$.*

Demonstração. [3] pag. 13.

Teorema 1.1.12 (Teorema de Banach-Alaoglu) *Seja X um espaço de Banach. Então B_{X^*} é fraca* compacta.*

Demonstração. [3] pag. 13.

Teorema 1.1.13 (Teorema de Eberlein-Smulian) *Seja X um espaço de Banach. Então $K \subseteq X$ é fracamente compacto se e somente se K é fracamente sequencialmente compacto.*

Demonstração. [3] pag. 17.

Teorema 1.1.14 *Seja X um espaço de Banach. São equivalentes:*

(a) X é reflexivo.

(b) X^* é reflexivo.

(c) B_X é fracamente compacta.

(d) B_X é fracamente sequencialmente compacta.

(e) Todo subespaço fechado de X é reflexivo.

Demonstração. [9] Theorem 1.11.16, Corollary 1.11.17, Theorem 2.8.2.

Teorema 1.1.15 *Sejam X um espaço de Banach e $K \subseteq X$ fracamente compacto. Então a envoluntória convexa de K, $\overline{co}(K)$ é fracamente compacta.*

Demonstração. [9] Theorem 2.8.14.

Proposição 1.1.16 *Se um espaço de Banach X é separável ou reflexivo, então X é fracamente compacto gerado.*

Demonstração. [9] Proposition 2.8.17.

Teorema 1.1.17 *Se X é um espaço de Banach fracamente compacto gerado, então B_{X^*} é fraca* sequencialmente compacta.*

Demonstração. [3] Theorem 4 pag. 228.

Definição 1.1.18 *Sejam X, Y espaços de Banach e $T : X \to Y$ um operador limitado. Dizemos que T é fracamente compacto quando TB_X for fracamente relativamente compacto em Y.*

Teorema 1.1.19 (Teorema de Gantmacher) *Sejam X e Y espaços de Banach, e $T : X \to Y$ um operador limitado. São equivalentes:*

(a) T é fracamente compacto.

(b) T^* é fracamente compacto.

(c) $T^{**}(X^{**}) \subseteq i_Y(Y)$.

(d) T^* é fraco-fraco contínuo.*

Demonstração. [9] Theorems 3.5.8, 3.5.13, 3.5.14.

Teorema 1.1.20 (Teorema de Rosenthal) *Seja X um espaço de Banach. Para que toda sequência limitada em X possua uma subsequência fracamente de Cauchy, é necessário e suficiente que X não possua um subespaço isomorfo a ℓ_1.*

Demonstração. [3] pag. 200-218.

Teorema 1.1.21 (Teorema de Josefson-Nissenzweig) *Se X é um espaço de Banach de dimensão infinita, então existe uma sequência $(x_n^*)_n$ em X^* tal que $x_n^* \xrightarrow{w*} 0$ e $x_n^* \in S_X$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. [3] pag. 219-225.

Teorema 1.1.22 *Sejam X e Y espaços de Banach e $T : X \to Y$ um operador tal que T^* fixa uma cópia de ℓ_1 (isto é, existe um subespaço $F \subseteq X$ isomorfo a ℓ_1 tal que $T|_F$ é um isomorfismo sobre a imagem). Suponhamos que para toda sequência $(y_n^*)_n$ em Y^* tal que $(T^*y_n^*)$ seja equivalente a (e_n^*) temos que $(T^*y_n^*)$ não converge a 0 na topologia fraca* de X^*. Então T fixa uma cópia de ℓ_1.*

Demonstração. [3] pag.219

1.2 Bases de Schauder e sequências básicas

Nesta seção, demonstraremos alguns resultados básicos envolvendo bases de Schauder. Tais resultados serão utilizados na próxima seção, principalmente nos teoremas envolvendo as propriedades (u) e (V) de Pelczynski.

Definição 1.2.1 *Seja X um espaço de Banach:*

(a) Dizemos que a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em X é base de Schauder de X, se para todo $x \in X$ existe uma única sequência de escalares $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x = \sum_n a_n x_n$.

(b) Dizemos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em X é uma sequência básica se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é base de $[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]$.

(c) Dizemos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em X é base de Schauder ou sequência básica incondicional se a convergência dada nos itens acima for incondicional.

Observação 1.2.2 *Se $(x_n)_n$ é base de Schauder de X então:*

(a) $\{x_n\}_n$ é L.I.

(b) X é separável.

Proposição 1.2.3 *Sejam X um espaço de Banach e $(x_n)_n$ base de Schauder de X. Definindo em X a norma*

$$\begin{array}{rll} |||\cdot||| : & X & \to \mathbb{C} \\ & \sum a_n x_n & \mapsto \sup_n ||\sum_{k=1}^n a_k x_k|| \end{array}$$

temos que $(X, |||\cdot|||)$ é um espaço de Banach.

Demonstração. Seja $(y_m)_{m\in\mathbb{N}}$, $y_m = \sum_n a_n^m x_n$ uma sequência de Cauchy em $(X, |||.|||)$. Primeiramente notemos que:

$$\begin{aligned}
\left|a_n^k - a_n^l\right| ||x_n|| &= ||(a_n^k - a_n^l)x_n|| \\
&\leq \left|\left|\sum_{i=1}^{n}(a_i^k - a_i^l)x_i\right|\right| + \left|\left|\sum_{i=1}^{n-1}(a_i^k - a_i^l)x_i\right|\right| \\
&\leq 2|||y_k - y_l|||, \quad \forall k, l, n \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

Com isso temos que $(a_n^m)_{m\in\mathbb{N}}$ é sequência de Cauchy em $\mathbb{C}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, logo para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $a_n \in \mathbb{C}$ tal que $a_n^m \xrightarrow{m} a_n$.

Agora mostremos que existe $y = \sum a_n x_n$ e que $y_m \xrightarrow{|||.|||} y$.

Como (y_m) é sequência de Cauchy, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k, p \geq k_0$

$$\sup_n \left|\left|\sum_{i=1}^{n}(a_i^p - a_i^k)x_i\right|\right| \leq \epsilon$$

Logo fixado $n \in \mathbb{N}$ e fazendo $p \to \infty$ temos que

$$\left|\left|\sum_{i=1}^{n}(a_i - a_i^k)x_i\right|\right| \leq \epsilon, \quad \forall k \geq k_0, n \in \mathbb{N}$$

e portanto

$$\sup_n \left|\left|\sum_{i=1}^{n}(a_i - a_i^k)x_i\right|\right| \leq \epsilon, \quad \forall k \geq k_0 \tag{1.1}$$

Já que existe $\sum_n a_n^{k_0} x_n$ temos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$, $\forall r \in \mathbb{N}$

$$\left|\left|\sum_{i=n}^{n+r} a_i^{k_0} x_i\right|\right| \leq \epsilon,$$

logo

$$\begin{aligned}
\left|\left|\sum_{i=n}^{n+r} a_i x_i\right|\right| &\leq \left|\left|\sum_{i=n}^{n+r}(a_i - a_i^{k_0})x_i\right|\right| + \left|\left|\sum_{i=n}^{n+r} a_i^{k_0} x_i\right|\right| \\
&\leq 2\sup_n \left|\left|\sum_{i=1}^{n}(a_i - a_i^{k_0})x_i\right|\right| + \epsilon \\
&\leq 3\epsilon
\end{aligned}$$

Portanto existe $y = \sum_n a_n x_n$ e por 1.1 temos $y_m \xrightarrow{|||.|||} y$. ■

Corolário 1.2.4 *A aplicação identidade $Id : (X, |||.|||) \to (X, ||.||)$ é um isomorfismo.*

Demonstração. Pelo Teorema da Aplicação Aberta, é suficiente mostrarmos que Id é limitada. De fato:

$$\left\|Id(\sum_n a_n x_n)\right\| = \left\|\sum_n a_n x_n\right\| \leq \sup_n \left\|\sum_{i=1}^n a_i x_i\right\| = \left|\left|\left|\sum_n a_n x_n\right|\right|\right|$$

■

Corolário 1.2.5 *Definindo a aplicação $x_k^* : X \to \mathbb{C}$, como $x_k^*(\sum_n a_n x_n) = a_k$, temos que $x_k^* \in X^*$.*

Demonstração. Obviamente x_k^* é linear, e

$$\begin{aligned}\left|x_k^*\left(\sum_n a_n x_n\right)\right| ||x_k|| &= ||a_k x_k|| \\ &\leq 2\left|\left|\left|\sum_n a_n x_n\right|\right|\right| \\ &\leq 2||Id^{-1}|| \left\|\sum_n a_n x_n\right\|\end{aligned}$$

■

O próximo teorema nos dá um critério para saber se uma sequência em um espaço de Banach é básica ou não.

Teorema 1.2.6 *Sejam X um espaço de Banach e $(x_n)_n$ uma sequência de termos não nulos em X. Então $(x_n)_n$ é uma sequência básica se e somente existe $K > 0$ tal que para toda sequência de escalares $(a_k)_k$, e para todos $m, n \in \mathbb{N}$, $n \geq m$, temos:*

$$\left\|\sum_{i=1}^m a_k x_k\right\| \leq K \left\|\sum_{i=1}^n a_k x_k\right\|$$

Demonstração. Suponhamos que $(x_n)_n$ seja uma sequência básica. Definindo o operador $P_m : [(x_n)]_n \to [(x_n)]_n$ como

$$P_m\left(\sum_i a_i x_i\right) = \sum_{i=1}^m a_i x_i = \sum_{i=1}^m x_i^*\left(\sum_j a_j x_j\right) x_i$$

Claramente temos que P_m é limitado, e $x = \lim_n \sum_{i=1}^n a_i x_i = \lim_n P_n(x)$, logo para todo $x \in X$ temos $\sup_n ||P_n(x)|| < +\infty$, e pelo Princípio da limitação uniforme temos $\sup_n ||P_n|| < +\infty$.

Logo para toda sequência de escalares $(a_n)_n$, $\forall n \geq m$, temos:

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{k=1}^{m} a_k x_k\right\| &= \left\|P_m(\sum_{k=1}^{n} a_k x_k)\right\| \\
&\leq ||P_m|| \left\|\sum_{k=1}^{n} a_k x_k\right\| \\
&\leq (\sup_i ||P_i||) \left\|\sum_{k=1}^{n} a_k x_k\right\|
\end{aligned}$$

Basta tomarmos portanto $K = \sup_n ||P_n||$.

Reciprocamente, para mostrarmos que (x_n) é sequência básica, devemos provar que todo elemento $x \in [(x_n)]_n$ se escreve de modo único como $x = \sum_n a_n x_n$. Para a unicidade, suponhamos que $\sum_n a_n x_n = \sum_n b_n x_n$, com isso temos $\sum_n (a_n - b_n) x_n = 0$. Agora, para todos $j, k \in \mathbb{N}$

$$|a_j - b_j| ||x_j|| = ||(a_j - b_j)x_j|| \leq K \left\|\sum_{i=j}^{j+k} (a_i - b_i) x_i\right\|$$

Isto implica que para todo $j \in \mathbb{N}$ vale:

$$|a_j - b_j| \leq \frac{K}{||x_j||} \left\|\sum_{i \geq j} (a_i - b_i) x_i\right\|$$

e portanto $j \in \mathbb{N}$ $|a_j - b_j| = 0$, $\forall j \in \mathbb{N}$. Com relação à existência, a hipótese de que $||\sum_{i=1}^{m} a_i x_i|| \leq K ||\sum_{i=1}^{n} a_i x_i||$ para toda sequência de escalares $(a_n)_n$, para todos $m < n$, implica que o operador $P_m : span\{x_i : i \in \mathbb{N}\} \to span\{x_1, \ldots, x_m\}$ definido por $P_m(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i) = \sum_{i=1}^{m} a_i x_i$ é limitado e $||P_m|| \leq K$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Logo P_m admite extensão linear contínua $\overline{P}_m : [(x_n)]_n \to [\{x_1, \ldots, x_m\}]$. Como para todo $m \in \mathbb{N}$ $(P_m - P_{m-1})(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i) \in [\{x_m\}]$, temos que $(\overline{P}_m - \overline{P}_{m-1})(x) \in [\{x_m\}]$, para todo $x \in [(x_n)]_n$. Com isso, para todo $x \in X$, existe $a_m \in \mathbb{C}$ tal que $(\overline{P}_m - \overline{P}_{m-1})(x) = a_m x_m$. Dados $x \in [(x_n)]_n$ e $\epsilon > 0$, temos que existe $n(\epsilon)$ e $\sigma \in [\{x_1, \ldots, x_{n(\epsilon)}\}]$ tal que $||x - \sigma|| < \epsilon$. Logo para todo $n \geq n(\epsilon)$

$$\begin{aligned}
||x - \overline{P}_n(x)|| &\leq ||x - \sigma|| + ||\overline{P}_n(\sigma) - \sigma|| + ||\overline{P}_n(\sigma) - \overline{P}_n(x)|| \\
&\leq ||x - \sigma|| + ||\sigma - \sigma|| + ||\overline{P}_n|| ||\sigma - x|| \\
&\leq (1 + K)||\sigma - x|| \\
&\leq (1 + K)\epsilon
\end{aligned}$$

Logo

$$x = \lim_n \overline{P}_n(x) = \lim_n \left(\overline{P}_1(x) + \sum_{i=2}^{n} \overline{P}_i(x) - \overline{P}_{i-1}(x)\right) = \lim_n \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

■

Lema 1.2.7 *Sejam X um espaço de Banach de dimensão infinita e $F \subseteq X$ um subespaço de dimensão finita. Então dado $\epsilon > 0$, existe $x \in S_X$ tal que $||y|| \leq (1+\epsilon)||y + \alpha x||$, $\forall y \in F$, $\forall \alpha \in \mathbb{C}$.*

Demonstração. Tomemos $0 < \epsilon < 1$, e inicialmente consideremos o caso em que $||y|| = 1$. Como $dimF < +\infty$, temos que S_F é compacta, logo para todo $\epsilon > 0$, existem $y_1, \ldots, y_m \in S_F$ tal que para todo $y \in S_F$, existe $i \in \{1, \ldots, m\}$, tal que $||y - y_i|| < \epsilon/2$. Pelo Teorema de Hahn-Banach temos que existe $y_i^* \in B_{X^*}$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, tal que $y_i^*(y_i) = 1$. Escolhendo $x \in \bigcap_{i=1}^m \ker y_i^*$, $||x|| = 1$, temos que:

$$\begin{aligned} ||y + \alpha x|| &\geq ||y_i + \alpha x|| - ||y - y_i|| \\ &\geq y_i^*(y_i + \alpha x) - \epsilon/2 \\ &= 1 - \epsilon/2 \\ &\geq \frac{1}{1+\epsilon} \\ &= \frac{||y||}{1+\epsilon} \end{aligned}$$

Logo para todo $y \in F$, $y \neq 0$ temos:

$$(1+\epsilon)\left|\left|\frac{y}{||y||} + \frac{\alpha}{||y||}x\right|\right| \geq \frac{||y||}{||y||}$$

e portanto

$$(1+\epsilon)||y + \alpha x|| \geq ||y|| \qquad \forall y \in F, \quad \alpha \in \mathbb{C}.$$

■

Teorema 1.2.8 *Todo espaço de Banach de dimensão infinita possui um subespaço fechado de dimensão infinita com base de Schauder.*

Demonstração. Consideremos uma sequência $(\epsilon_n)_n$, $\epsilon_n > 0$ tal que $\prod_{i=1}^{\infty}(1+\epsilon_i) \leq 1 + \epsilon$, tome $x_1 \in S_X$. Pelo lema anterior, existe $x_2 \in S_X$ tal que

$$||x|| \leq (1+\epsilon_1)||x + \lambda x_2||, \qquad \forall x \in [\{x_1\}], \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

Novamente pelo lema, existe $x_3 \in S_X$, tal que

$$||x|| \leq (1+\epsilon_2)||x + \lambda x_3||, \qquad \forall x \in [\{x_1, x_2\}], \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

Continuando esse processo, obtemos uma sequência $(x_n)_n$ em X tal que

$$||x|| \leq (1+\epsilon_n)||x + \lambda x_{n+1}||, \qquad \forall x \in [\{x_1, \ldots, x_n\}], \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

Logo para todos $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$, para toda sequência de escalares $(a_n)_n$, temos:

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\right\| &\leq (1+\epsilon_m)\left\|\sum_{i=1}^{m+1} a_i x_i\right\| \\
&\leq \dots \\
&\leq (1+\epsilon_m)\dots(1+\epsilon_{n-1})\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\| \\
&\leq \prod_{i=1}^{\infty}(1+\epsilon_i)\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\| \\
&\leq (1+\epsilon)\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\|
\end{aligned}$$

Logo pelo Teorema 1.2.6 temos que $(x_n)_n$ é básica, e claramente vale $\dim[(x_n)]_n = +\infty$. ■

Teorema 1.2.9 *Sejam X um espaço de Banach e $(x_n)_n$ uma sequência em S_X tal que $x_n \xrightarrow{w} 0$. Então (x_n) possui uma subsequência básica.*

Demonstração. Dado $0 < \epsilon < 1$, considere $(\epsilon_n)_n$ uma sequência de números positivos menores que 1 tal que $\prod_{n=1}^{\infty}(1-\epsilon_n) > 1-\epsilon$. Provemos que podemos encontrar uma subsequência $(x_{n_k})_k$ tal que

$$||y + \alpha x_{n_{k+1}}|| \geq (1-\epsilon_k)||y|| \qquad \forall y \in S_{[\{x_{n_1},\dots,x_{n_k}\}]}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{C} \tag{1.2}$$

e utilizando o mesmo argumento do Teorema anterior obtemos o resultado.

Suponha que existam $x_{n_1}, \dots, x_{n_k}$ satisfazendo 1.2, e considere $Y(k) = [\{x_{n_1}, \dots, x_{n_k}\}]$. Escolhendo $z_1, \dots, z_m \in S_{Y(k)}$ tal que para todo $y \in S_{Y(k)}$ existe $i \in \{1, \dots, m\}$ tal que $||y - z_i|| < \epsilon_k/4$. Pelo Teorema de Hahn-Banach, existem $z_1^*, \dots, z_m^* \in B_{X^*}$ tal que $z_i^*(z_i) = 1$. Além disso, como $x_n \xrightarrow{w} 0$, existe $n_{k+1} > n_k$ tal que $|z_i^*(x_{n_{k+1}})| < \epsilon/4$. Verifiquemos que 1.2 é satisfeita. Temos duas possibilidades:

Caso 1: $|\alpha| < 2$.

Para cada $y \in S_{Y(k)}$, temos que existe $i \in \{1, \dots, m\}$ tal que $||y - z_i|| < \epsilon_k/4$, logo:

$$\begin{aligned}
||y + \alpha x_{n_{k+1}}|| &\geq |z_i^*(y + \alpha x_{n_{k+1}})| \\
&\geq |z_i^*(z_i)| - |z_i^*(y - z_i)| - |\alpha||z_i^*(x_{n_{k+1}})| \\
&\geq 1 - ||y - z_i|| - |\alpha|\frac{\epsilon_k}{4} \\
&\geq 1 - \frac{\epsilon_k}{4} - 2\frac{\epsilon_k}{4} \\
&\geq (1-\epsilon_k)||y||
\end{aligned}$$

Caso 2: $|\alpha| \geq 2$.

Para todo $y \in S_{Y(k)}$ temos:

$$||y + \alpha x_{n_{k+1}}|| \geq |\alpha| \left|\left|x_{n_{k+1}}\right|\right| - ||y|| \geq ||y|| \geq (1 - \epsilon_k)||y||.$$

■

Definição 1.2.10 *Sejam $(x_n)_n$ e $(y_n)_n$ bases de Schauder para os espaços de Banach X e Y respectivamente. Dizemos que $(x_n)_n$ é equivalente a $(y_n)_n$ se a convergência de $\sum_n a_n x_n$ for equivalente à convergência de $\sum_n a_n y_n$.*

Teorema 1.2.11 *Sejam $(x_n)_n$ e $(y_n)_n$ bases de Schauder para os espaços de Banach X e Y respectivamente. Então $(x_n)_n$ é equivalente a $(y_n)_n$ se e somente se existe um isomorfismo de X em Y que leva cada x_n em y_n.*

Demonstração. Utilizando o Corolário 1.2.4 para provarmos a condição necessária basta mostrarmos que a aplicação $T : (X, |||.|||) \to (Y, |||.|||)$ definida por $T(\sum_n a_n x_n) = \sum_n a_n y_n$ é um isomorfismo que leva cada x_n em y_n. Por hipótese temos que T é uma bijeção, e claramente T é linear. Provemos então que T possui o gráfico fechado. Sejam $x^m = \sum_n a_n^m x_n \to 0$ em X e $T(x^m) = \sum_n a_n^m y_n \to y = \sum a_n y_n$ em Y. Dado $\epsilon > 0$, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left|\left|\left|\sum_n a_n^{m_0} x_n\right|\right|\right| < \epsilon \qquad \text{e} \qquad \left|\left|\left|\sum_n (a_n^{m_0} - a_n) y_n\right|\right|\right| < \epsilon$$

Logo para todo $n \in \mathbb{N}$ temos:

$$\begin{aligned} |a_n| ||y_n|| \, ||x_n|| &\leq ||(a_n^{m_0} - a_n) y_n|| \, ||x_n|| + ||a_n^{m_0} x_n|| \, ||y_n|| \\ &\leq 2 \max_n \{||x_n||, ||y_n||\} \left(\left|\left|\left|\sum_n (a_n^{m_0} - a_n) y_n\right|\right|\right| + \left|\left|\left|\sum_n a_n^{m_0} x_n\right|\right|\right| \right) \\ &\leq 4 \max_n \{||x_n||, ||y_n||\} \epsilon \end{aligned}$$

Portanto $a_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e $y = 0$, utilizando os Teoremas do Gráfico Fechado e da Aplicação Aberta concluímos que T é um isomorfismo que leva cada x_n em y_n.

Reciprocamente, se $x = \sum_n a_n x_n$ temos que:

$$Tx = T(\sum_n a_n x_n) = \sum_n T(a_n x_n) = \sum_n a_n T(x_n) = \sum_n a_n y_n$$

Logo se $\sum_n a_n x_n$ converge, então $\sum_n a_n y_n$ também converge. Analogamente, se $\sum_n a_n y_n$ converge temos que $\sum_n a_n x_n$ converge. ■

Definição 1.2.12 *Seja X um espaço de Banach. Dizemos que a série $\sum_n x_n$ é fracamente incondicionalmente de Cauchy em X, se e somente se para todo $x^* \in X^*$ temos $\sum_n |x^*(x_n)| < +\infty$.*

Teorema 1.2.13 *Seja X um espaço de Banach. São equivalentes:*

(a) $\sum_n x_n$ é fracamente incondicionalmente de Cauchy.

(b) Existe $C > 0$ tal que para toda sequência $(t_n)_n \in \ell_\infty$ vale:

$$\sup_n \left|\left|\sum_{k=1}^{n} t_k x_k\right|\right| \leq C \sup_n |t_n|.$$

(c) Para toda sequência $(t_n)_n \in c_0$, temos que $\sum_n t_n x_n$ converge.

Demonstração.

(a) $\Rightarrow$ (b). Definindo $T : X^* \to \ell_1$ como $Tx^* = (x^* x_n)_n$, temos que T está bem definida, é linear e possui o gráfico fechado, pois se $x_m^* \to 0$ em X^* e $Tx_m^* \to y = (y_n)_n$ em ℓ_1, temos que dado $\epsilon > 0$ existe m_0 tal que para todo $m \geq m_0$

$$||x_m^*|| \leq \epsilon \qquad \text{e} \qquad \sum_n |y_n - x_m^* x_n| \leq \epsilon$$

Então para todo $j \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} |y_j| &\leq |y_j - x_{m_0}^* x_j| + |x_{m_0}^* x_j| \\ &\leq \sum_n |y_n - x_{m_0}^* x_n| + ||x_{m_0}^*||\, ||x_j|| \\ &\leq (1 + ||x_j||)\epsilon \end{aligned}$$

Com isso temos que $y_j = 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$, e portanto $y = 0$. Logo para toda sequência $(t_n)_n \in \ell_\infty$, para todo $x^* \in B_{X^*}$ temos:

$$\begin{aligned} \left|x^*\left(\sum_{k=1}^{n} t_k x_k\right)\right| &\leq \sup_k |t_k| \left|\sum_{k=1}^{n} x^* x_k\right| \\ &\leq \sup_k |t_k|\, ||Tx^*|| \\ &\leq ||T||(\sup_k |t_k|) \end{aligned}$$

Com isso temos:

$$\left|\left|\sum_{k=1}^{n} t_k x_k\right|\right| = \sup_{||x^*|| \leq 1} \left|x^*\left(\sum_{k=1}^{n} t_k x_k\right)\right| \leq ||T||(\sup_k |t_k|) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

e portanto

$$\sup_n \left|\left|\sum_{k=1}^{n} t_k x_k\right|\right| \leq ||T||(\sup_n |t_n|).$$

(b) $\Rightarrow$ (c). Dado $(t_k)_k \in c_0$, por (b) temos que para todos $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$ vale

$$\left\| \sum_{k=m}^{n} t_k x_k \right\| \leq C \sup_{m \leq k \leq n} |t_k|$$

Além disso como $(t_k)_k \in c_0$, temos que dado $\epsilon > 0$ existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m \geq m_0$, $|t_m| < \epsilon$. Logo para todos $m, n \in \mathbb{N}$, $m_0 \leq m \leq n$ vale

$$\left\| \sum_{k=m}^{n} t_k x_k \right\| \leq C \sup_{m \leq k \leq n} |t_k| \leq C\epsilon$$

e portanto $\sum_n t_n x_n$ converge.

(c) $\Rightarrow$ (a). Por hipótese, para toda $(t_n) \in c_0$ temos que $\sum_n t_n x_n$ converge, logo para todo $x^* \in X^*$ temos que $x^*(\sum_n t_n x_n) = \sum_n t_n x^*(x_n)$, com isso temos que $(x^* x_n)_n \in \ell_1$, e portanto $\sum_n |x^* x_n| < +\infty$. ■

Corolário 1.2.14 *Se $(x_n)_n$ é uma sequência básica em X tal que $\inf_n ||x_n|| > 0$ e $\sum_n x_n$ é fracamente incondicionalmente de Cauchy, então $(x_n)_n$ é equivalente à base (de Schauder) canônica de c_0, $(e_n)_n$.*

Demonstração. Pelo Teorema anterior, a convergência de $\sum_n t_n e_n$ implica na convergência de $\sum_n t_n x_n$. Reciprocamente, se $\sum_n t_n x_n$ converge, então $t_n x_n \to 0$, com isso, dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ $||t_n x_n|| < \epsilon$, logo temos:

$$|t_n| = \frac{||t_n x_n||}{||x_n||} < \frac{\epsilon}{||x_n||} \leq \frac{\epsilon}{\inf_k ||x_k||}$$

e $(t_n)_n \in c_0$. ■

Teorema 1.2.15 *Seja X um espaço de Banach. São equivalentes:*

(a) Toda série fracamente incondicionalmente de Cauchy em X é incondicionalmente convergente.

(b) X não possui um subespaço isomorfo a c_0.

Demonstração. Se existisse um subespaço de X isomorfo a c_0, teríamos que existiria uma sequência $(e_n')_n$ em X onde cada e_n' seria imagem de e_n, como o fato de uma série ser fracamente incondicionalmente de Cauchy ou incondicionalmente convergente é preservado por continuidade, mostrando que $\sum_n e_n$ é fracamente incondicionalmente de Cauchy, mas não é incondicionalmente convergente em c_0, estaremos provando que $\sum_n e_n'$ é fracamente incondicionalmente de Cauchy, mas não é incondicionalmente convergente em X. De fato, para cada $y^* = (a_n) \in \ell_1$, temos que

$$\sum_n |y^* e_n| = \sum_n |a_n| < +\infty$$

e portanto, $\sum_n e_n$ é fracamente incondicionalmente de Cauchy. Mas se $\sum_n e_n = \lambda = (\lambda_n)_n \in c_0$, teríamos que para cada $e_j^* \in \ell_1$:

$$1 = e_j^*(e_j) = e_j^*(\sum_n e_n) = e_j^*(\lambda) = \lambda_j$$

Portanto $\lambda = (1, 1, \ldots, 1, \ldots)$, que não pertence a c_0, contrariando nossa hipótese.

(b) $\Rightarrow$ (a). Suponha que exista $\sum_n x_n$ que seja fracamente incondicionalmente de Cauchy, mas não seja incondicionalmente convergente, existiriam então $\epsilon > 0$ e $(n_k)_k$, $(p_n)_n$, $(q_n)_n$ sequências crescentes de números naturais, $p_n \leq q_n$ tal que

$$\left\| \sum_{k=p_n}^{q_n} x_{n_k} \right\| \geq \epsilon \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Definindo $y_n = \sum_{k=p_n}^{q_n} x_{n_k}$, temos que $\sum_n \frac{y_n}{||y_n||}$ é fracamente incondicionalmente de Cauchy, pois para todo $x^* \in X^*$ temos:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \left| x^* \left(\frac{y_n}{||y_n||} \right) \right| &\leq \frac{1}{\inf_n ||y_n||} \sum_{n=1}^{N} \left| x^* \left(\sum_{k=p_n}^{q_n} x_{n_k} \right) \right| \\
&\leq \frac{1}{\inf_n ||y_n||} \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=p_n}^{q_n} |x^*(x_{n_k})| \\
&\leq \frac{1}{\inf_n ||y_n||} \sum_n |x^*(x_n)|
\end{aligned}$$

Consequentemente temos também que $(\frac{y_n}{||y_n||})$ converge fracamente a zero, e pelo Teorema 1.2.9 $(\frac{y_n}{||y_n||})$ possui uma subsequência básica $(z_n)_n$ que satisfaz as condições do Corolário 1.2.14. Logo $(z_n)_n$ é equivalente a $(e_n)_n$ e pelo Teorema 1.2.11 $[z_n]_n \subseteq X$ é isomorfo a c_0. ■

Definição 1.2.16 *Sejam X e Y espaços de Banach, e $T : X \to Y$ operador limitado. Dizemos que T é incondicionalmente convergente se para toda série fracacamente incondicionalmente de Cauchy $\sum_n x_n$, temos $\sum_n Tx_n$ incondicionalmente convergente em Y.*

Proposição 1.2.17 *Sejam X e Y espaços de Banach e $T : X \to Y$ um operador limitado. São equivalentes:*

(a) T não é incondicionalmente convergente.

(b) Existe um subespaço S de X isomorfo a c_0 tal que $T|_S$ é um isomorfismo sobre a imagem.

Demonstração.

(a) $\Rightarrow$ (b). Como T não é incondicionalmente convergente, existe uma série $\sum_n z_n$ fracamente incondicionalmente de Cauchy tal que $\sum_n Tz_n$ não é incondicionalmente convergente. A partir disso, temos que existem $\epsilon > 0$ e sequências crescentes de números naturais $(p_n)_n$, $(q_n)_n$ e $(n_k)_k$, $p_n \leq q_n$ tal que

$$\left\| T\left(\sum_{k=p_n}^{q_n} z_{n_k}\right)\right\| \geq \epsilon, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Definindo então $x_n = \sum_{k=p_n}^{q_n} z_{n_k}$, temos que $\inf_n ||Tx_n|| > 0$, e utilizando o mesmo argumento do Teorema 1.2.15 temos que $\sum_n x_n$ e $\sum_n Tx_n$ são fracamente incondicionalmente de Cauchy. Além disso

$$\inf_n ||x_n|| \geq \frac{\inf_n ||Tx_n||}{||T||} > 0$$

Utilizando o Teorema 1.2.9 e o Corolário 1.2.14, temos que $(x_n)_n$ possui uma subsequência básica $(w_k)_k$ equivalente a $(e_n)_n$. Novamente utilizando o Corolário 1.2.14, temos que $(w_k)_l$ possui uma subsequência $(w_{k_l})_l$ tal que $(Tw_{k_l})_l$ é uma sequência básica equivalente a $(e_n)_n$. Mostremos agora que $(w_{k_l})_l$ é uma sequência básica equivalente a $(e_n)_n$. De fato, $(w_{k_l})_l$ é sequência básica pois para todos $r, s \in \mathbb{N}$, $r > s$, para toda sequência $(a_n)_n$ em $\mathbb{C}$, definindo $(b_n)_n$ como sendo $b_{k_i} = a_i$ e $b_j = 0$ se $j \neq k_i$ temos:

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{i=1}^{r} a_i w_{k_i}\right\| &= \left\|\sum_{i=1}^{k_r} b_i w_i\right\| \\
&\leq K\left\|\sum_{i=1}^{k_s} b_i w_i\right\| \\
&= K\left\|\sum_{i=1}^{s} a_i w_{k_i}\right\|
\end{aligned}$$

e $(w_{k_l})_l$ é equivalente a $(e_n)_n$ pois se $\sum_l t_l w_{k_l}$ convergisse, então $\sum_k t'_k w_k$ também convergiria, onde $t'_{k_l} = t_l$ e $t'_k = 0$ se $k \neq k_l$, para todo $l \in \mathbb{N}$. Com isso que $(t'_k)_k \in c_0$, e portanto $(t_l)_l \in c_0$. Por outro lado, se $(t_l)_l \in c_0$, consideremos a sequência $(t'_l)_l$ como sendo $t'_{k_l} = t_l$, e $t'_k = 0$ se $k \neq k_l$ para todo $l \in \mathbb{N}$. Temos então que $(t'_k) \in c_0$, logo existe $\sum_k t'_k w_k = \sum_l t_l w_{k_l}$. Portanto temos que tanto $(w_{k_l})_l$ quanto $(Tw_{k_l})_l$ são equivalentes a $(e_n)_n$, e consequentemente $(w_{k_l})_l$ e $(Tw_{k_l})_l$ são equivalentes. Logo pelo Teorema 1.2.11 temos que $[(w_{k_l})]_l \cong [(Tw_{k_l})]_l \cong c_0$, e existe um isomorfismo $U : [(w_{k_l})]_l \to [(Tw_{k_l})]_l$ que leva cada w_{k_l} em Tw_{k_l}, mas essa última condição implica que $U = T|_{[(w_{k_l})]_l}$.

(b) $\Rightarrow$ (a). Considere $\sum_n e'_n$ em S, onde e'_n é a imagem de e_n através do isomorfismo dado por hipótese. Temos então que $\sum_n e'_n$ é fracamente incondicionalmente de Cauchy, mas não é incondicionalmente convergente em X, e como $T|_S$ é isomorfismo sobre a imagem, segue que $\sum_n Te'_n$ não é incondicionalmente convergente em Y, e portanto T não é incondicionalmente convergente. ■

Terminaremos essa seção enunciando uma versão do Teorema de Rosenthal que utiliza bases equivalentes.

Teorema 1.2.18 (Teorema de Rosenthal) *Sejam X um espaço de Banach, e $(x_n)_n$ uma sequência em X que não possui subsequências fracamente de Cauchy. Então $(x_n)_n$ possui uma subsequência $(x_{n_k})_k$ equivalente a $(e_n^*)_n$ base de ℓ_1.*

1.3 Propriedades geométricas definidas em espaços de Banach

Nesta seção definiremos as propriedades geométricas que nos auxiliarão no estudo das propriedades de Phillips. Comecemos provando uma equivalência entre duas afirmações que serão utilizadas na definição da propriedade (V).

Proposição 1.3.1 *Seja X um espaço de Banach. São equivalentes:*

(a) Para todo espaço de Banach Y, para todo operador $T : X \to Y$ incondicionalmente convergente, temos T fracamente compacto.

(b) Para todo subconjunto $K \subseteq X^*$ tal que para toda série fracamente incondicionalmente de Cauchy $\sum_n x_n$

$$\lim_n \sup_{x^* \in K} |x^* x_n| = 0 \tag{1.3}$$

temos K relativamente fracamente compacto.

Demonstração (a) $\Rightarrow$ (b). Inicialmente observemos que dada $\sum_n x_n$, se para toda sequência $(F_n)_n$ tal que cada $F_n \subseteq \mathbb{N}$ é finito, $F_n \cap F_m = \emptyset$ se $n \neq m$ e $\cup_n F_n = \mathbb{N}$ temos $\lim_n ||\sum_{k \in F_n} x_k|| = 0$, então $\sum_n x_n$ é incondicionalmente convergente. De fato, se $\sum_n x_n$ não fosse incondicionalmente convergente, existiriam sequências crescentes de números naturais $(n_k)_k$, $(p_n)_n$ e $(q_n)_n$, $p_n \leq q_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ tal que $\left|\left|\sum_{k=p_n}^{q_n} x_{n_k}\right|\right| \geq \epsilon$. Utilizando esse fato, obteríamos uma sequência $(F_n)_n$ satisfazendo as condições acima tal que $||\sum_{k \in F_n} x_k|| \geq \epsilon$ para infinitos valores de n. Além disso, se $\sum_n x_n$ for fracamente incondicionalmente de Cauchy, então $\sum_n \left(\sum_{k \in F_n} x_k\right)$ é fracamente incondicionalmente de Cauchy, para toda sequência $(F_n)_n$ satisfazendo as condições acima. Considere agora K satisfazendo 1.3. Para cada $x \in X$, temos que $\sum_n \frac{1}{2^n} x$ é absolutamente convergente, e em particular $\sum_n \frac{1}{2^n} x$ é fracamente incondicionalmente de Cauchy, logo por 1.3, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sup_{x^* \in K} \left|x^*\left(\frac{x}{2^{n_0}}\right)\right| < 1$. Com isso, $\sup_{x^* \in K} |x^*(x)| < 2^{n_0}$, e pelo Princípio da Limitação Uniforme, temos $\sup_{x^* \in K} ||x^*|| < +\infty$. Logo podemos definir $T : X \to \ell_\infty(K)$, como

$$\begin{aligned} T(x) : K &\to \mathbb{C} \\ x^* &\mapsto x^*(x) \end{aligned}$$

Temos que T é limitado, pois:

$$\begin{aligned} ||T(x)|| &= \sup_{x^* \in K} |x^*(x)| \\ &\leq ||x|| \left(\sup_{x^* \in K} ||x^*|| \right) \end{aligned}$$

e T é incondicionalmente convergente, pois se $\sum_n x_n$ é fracamente incondicionalmente de Cauchy, então para toda sequência (F_n) satisfazendo as condições enunciadas no início da demonstração, temos $\sum_n \sum_{k \in F_n} x_k$ fracamente incondicionalmente convergente, e $\lim_n \sup_{x^* \in K} |x^*(\sum_{k \in F_n} x_k)| = 0$, com isso $\lim_n ||T(\sum_{k \in F_n} x_k)|| = 0$, e portanto $\sum_k Tx_k$ é incondicionalmente convergente. Logo T é fracamente compacto, e pelo Teorema de Gantmacher T^* é fracamente compacto. Definindo então, para cada $x^* \in K$, $\delta_{x^*} \in (\ell_\infty(K))^*$ como $\delta_{x^*}(f) = f(x^*)$, temos $||\delta_{x^*}|| \leq 1$ e $T^*\delta_{x^*} = x^*$, e como T^* é fracamente compacto, segue que K é relativamente fracamente compacto.

(b) $\Rightarrow$ (a). Seja $T : X \to Y$ um operador incondicionalmente convergente. Pelo Teorema de Gantmacher, se provarmos que T^* é fracamente compacto, teremos que T também será fracamente compacto. Seja então $\sum_n x_n$ uma série fracamente incondicionalmente de Cauchy em X, temos então que $\sum_n Tx_n$ é incondicionalmente convergente em Y, em particular $Tx_n \to 0$, com isso temos que

$$\lim_n \sup_{y^* \in B_{Y^*}} y^*(Tx_n) = 0,$$

logo

$$\lim_n \sup_{y^* \in B_{Y^*}} T^*y^*(x_n) = 0,$$

e portanto $\{T^*y^* : y^* \in B_{Y^*}\}$ é fracamente relativamente compacto. ■

Definição 1.3.2 *Dizemos que um espaço de Banach X possui a propriedade (V), se X satisfaz as condições equivalentes dadas no teorema anterior.*

A seguir definiremos a propriedade (u) e demonstraremos que todo subespaço fechado de um espaço de Banach com a propriedade (u) possui tal propriedade, e que todo espaço de Banach com base incondicional possui a propriedade (u), resultados esses que motivaram a introdução dessa propriedade.

Definição 1.3.3 *Seja X um espaço de Banach. Dizemos que X possui a propriedade (u) se para toda sequência $(x_n)_n$ fracamente de Cauchy em X, existir uma série fracamente incondicionalmente de Cauchy $\sum_n y_n$ tal que $x_n - \sum_{k=1}^n y_k \xrightarrow{w} 0$*

Proposição 1.3.4 *Se um espaço de Banach X possui a propriedade (u), então todo subespaço fechado de X possui esta propriedade.*

Demonstração. Seja $(x_n)_n$ uma sequência fracamente de Cauchy em um subespaço fechado $F \subseteq X$, temos então que $(x_n)_n$ é uma sequência fracamente de Cauchy em X, logo existe uma série $\sum_n y_n$ fracamente incondicionalmente de Cauchy em X tal que $u_n = x_n - \sum_{i=1}^{n} y_i \xrightarrow{w} 0$ em X. Como $u_n \xrightarrow{w} 0$ em X, temos que existem combinações convexas $u_j' = \sum_{n=p_{j-1}+1}^{p_j} \lambda_n u_n$, tal que $0 = p_0 < p_1 < \ldots$, $\lambda_n \geq 0$, $\sum_{n=p_{j-1}+1}^{p_j} \lambda_n = 1$ e $\sum_j ||u_j|| < +\infty$ ([5] pág. 422). Definamos $x_j' = \sum_{n=p_{j-1}+1}^{p_j} \lambda_n x_n$, $z_1 = x_1'$, e $z_j = x_j' - x_{j-1}'$, $\forall j \geq 2$. Notemos que $x_n - \sum_{j=1}^{n} z_j = x_n - x_n'$ converge fracamente a zero em F, pois para todo $x^* \in F^*$, para todo $\epsilon > 0$, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x^*(x_n - x_m)| < \epsilon$, $\forall n, m \geq m_0$ com isso para todo $n \geq m_0$

$$\begin{aligned}
|x^*(x_n - x_n')| &= \left| x^* \left(x_n - \sum_{j=p_{n-1}+1}^{p_n} \lambda_j x_j \right) \right| \\
&= \left| \left(\sum_{j=p_{n-1}+1}^{p_n} \lambda_j x^*(x_n - x_j) \right) \right| \\
&\leq \sum_{j=p_{n-1}+1}^{p_n} \lambda_j |x^*(x_n - x_j)| \\
&< \sum_{j=p_{n-1}+1}^{p_n} \lambda_j \epsilon = \epsilon
\end{aligned}$$

Resta portanto mostrarmos que $\sum_j z_j$ é fracamente incondicionalmente de Cauchy. Para isso observemos que:

$$\begin{aligned}
z_j &= \sum_{n=p_{j-1}+1}^{p_j} \lambda_n x_n - \sum_{n=p_{j-2}+1}^{p_{j-1}} \lambda_n x_n \\
&= u_j' - u_{j-1}' + \sum_{n=p_{j-1}+1}^{p_j} \lambda_n \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{n=p_{j-2}+1}^{p_{j-1}} \lambda_n \sum_{i=1}^{n} y_i \\
&= u_j' - u_{j-1}' + \sum_{n=p_{j-2}+1}^{p_j} \mu_n y_n, \quad \text{onde } 0 \leq \mu_n \leq 1
\end{aligned}$$

Portanto para $x^* \in F^*$ temos:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{\infty} |x^*(x_j)| &\leq 2||x^*|| \sum_j ||u_j'|| + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=p_{j-1}+1}^{p_j} \mu_n |x^* y_n| + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=p_{j-2}+1}^{p_{j-1}} \mu_n |x^* y_n| \\
&\leq 2||x^*|| \sum_j ||u_j'|| + 2 \sum_n |x^* y_n| < +\infty \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Lema 1.3.5 *Seja $(x_n)_n$ uma sequência básica incondicional limitada em um espaço de Banach X tal que exista $x^* \in X^*$ satisfazendo $\inf_n |x^*(x_n)| > 0$. Então $(x_n)_n$ é equivalente à base (e_n^*) de ℓ_1.*

Demonstração. Suponha que a série $\sum_i t_i x_i$ seja convergente, por hipótese temos que $\sum_i t_i x_i$ é incondicionalmente convergente, em particular temos $\sum_i t_i x_i$ fracamente incondicionalmente de Cauchy, logo $\sum_i |t_i|\ |x^* x_i| < +\infty$, com isso para todo $N \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=1}^{N} |t_i| \leq \frac{1}{\inf_n |x^* x_n|} \sum_{i=1}^{N} |t_i|\ |x^* x_i| \leq \frac{1}{\inf_n |x^* x_n|} \sum_{i=1}^{\infty} |t_i|\ |x^* x_i|$$

logo $\sum_i |t_i| < +\infty$. Por outro lado, se $\sum_i |t_i| < +\infty$, como $(x_n)_n$ é limitada, temos $\sum_i |t_i|\ ||x_i|| < +\infty$, e consequentemente $\sum_i t_i x_i$ é convergente. ■

No próximo resultado precisaremos da noção de base de bloco, e de um teorema provado por C. Bessaga e A. Pelczynski.

Definição 1.3.6 *Sejam X um espaço de Banach e $(x_n)_n$ uma sequência básica em X. Dizemos que a sequência $y_n = \sum_{k=p_n}^{q_n} x_k$, com $y_n \neq 0$, $(p_n)_n$ $(q_n)_n$ sequências crescentes de números naturais tais que $p_1 < q_1 < p_2 < q_2 < \ldots$ é uma base de bloco de $(x_n)_n$.*

Teorema 1.3.7 *Sejam X um espaço de Banach e $(x_n)_n$ uma sequência básica em X com funcionais coeficientes $(x_n^*)_n$. Se $(y_m)_m$ é uma sequência em Y tal que*

$$\lim_m \inf_{n \geq m} ||y_n|| > 0$$

e

$$\lim_m x_n^* y_m = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

então $(y_m)_m$ é equivalente a uma base de bloco de $(x_n)_n$.

Demonstração. [3] pág. 46.

Lema 1.3.8 *Seja X um espaço de Banach com base incondicional $(x_n)_n$ e funcionais coeficientes $(x_n^*)_n$. Se $(y_n)_n$ é uma sequência fracamente de Cauchy e $x_i^*(y_n) \xrightarrow{n} 0$, $\forall i \in \mathbb{N}$, então $y_n \xrightarrow{w} 0$.*

Demonstração. Suponha que $(y_n)_n$ não convirja fracamente a zero, existem então $\epsilon > 0$, $x^* \in X^*$ e uma subsequência $(y_{n_k})_k$ tal que $\inf_k ||x^*(y_{n_k})|| \geq \epsilon$. Pelo Teorema 1.3.7, temos que (y_{n_k}) possui uma subsequência (novamente denotada por (y_{n_k})) que é equivalente a uma base de bloco de $(x_n)_n$. Com isso temos que (y_{n_k}) é sequência básica incondicional, e pelo Lema 1.3.5, (y_{n_k}) é equivalente a $(e_n^*)_n$ base de ℓ_1. Porém (e_n^*) não é fracamente de Cauchy, pois para $f = (1, 0, 1, 0, 1, \ldots) \in \ell_\infty$, temos que $|f(e_{n+1}^*) - f(e_n^*)| = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e isso contraria a hipótese de $(y_n)_n$ ser fracamente de Cauchy. ■

Teorema 1.3.9 *Se um espaço de Banach X tem uma base incondicional, então ele possui a propriedade (u).*

Demonstração. Sejam $(x_n)_n$ uma base incondicional de X, e $(x_n^*)_n$ a sequência dos funcionais coeficientes em X^*. Dada uma sequência fracamente de Cauchy $(z_n)_n$ em X, temos que existe $a_i = \lim_n x_i^*(z_n)$, com isso definamos para cada $n \in \mathbb{N}$ $y_n = a_n x_n$. Utilizando o fato de que $(x_n)_n$ é base incondicional, dados $x = \sum_i x_i^*(x)x_i$, $x^* \in X^*$ e $(b_n)_n$ sequência de escalares, $|b_i| \leq 1$, temos que para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{i=1}^{n} b_i x^*(x_i) x_i^*(x)\right| &\leq \sum_{i=1}^{n} |x_i^*(x) x^*(x_i)| \\
&\leq ||x^*|| \sum_{i=1}^{n} |x_i^*(x) x_i| \\
&\leq ||x^*|| \sum_{i=1}^{\infty} |x_i^*(x) x_i|
\end{aligned}$$

Aplicando o Princípio da Limitação Uniforme para a família de funcionais $\{\sum_{i=1}^{n} b_i x^*(x_i) x_i^*$: $n \in \mathbb{N}$ e (b_i) em $\mathbb{C}$ tal que $|b_i| \leq 1$ $\}$, temos que existe M_{x^*} tal que

$$\left|\left|\sum_{i=1}^{n} b_i x^*(x_i) x_i^*\right|\right| \leq M_{x^*}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{e} \quad \forall (b_i) \quad \text{em} \quad \mathbb{C} \quad \text{tal que} \quad |b_i| \leq 1$$

com isso temos:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} |x^*(y_i)| &= \sum_{i=1}^{n} |x^*(x_i) a_i| \\
&= \left|\sum_{i=1}^{n} \frac{\overline{(x^* x_i) a_i}}{||(x^* x_i) a_i||} x^*(x_i) \lim_k x_i^*(z_k)\right| \\
&= \lim_k \left|\sum_{i=1}^{n} \frac{\overline{(x^* x_i) a_i}}{||(x^* x_i) a_i||} x^*(x_i) x_i^*(z_k)\right| \\
&\leq \left|\left|\sum_{i=1}^{n} \frac{\overline{(x^* x_i) a_i}}{||(x^* x_i) a_i||} x^*(x_i) x_i^*\right|\right| \sup_k ||z_k|| \\
&\leq M_{x^*} \sup_k ||z_k||
\end{aligned}$$

Portanto $\sum_n y_n$ é fracamente incondicionalmente de Cauchy. Finalmente, mostremos que $z_n - \sum_{i=1}^{n} y_i \xrightarrow{w} 0$. Utilizando o Lema 1.3.8, é suficiente provarmos que $(z_n - \sum_{i=1}^{n} y_i)_n$ é fracamente incondicionalmente de Cauchy, e para todo $j \in \mathbb{N}$ $x_j^*(z_n - \sum_{i=1}^{n} y_i) \to 0$. De fato, como $(z_n)_n$ é fracamente de Cauchy e $\sum_i y_i$ é fracamente incondicionalmente de Cauchy, temos que $(z_n - \sum_{i=1}^{n} y_i)_n$ é fracamente de Cauchy, e para a segunda afirmação temos que:

$$\begin{aligned}
x_j^*\left(z_n - \sum_{i=1}^{n} y_i\right) &= x_j^*(z_n) - \sum_{i=1}^{n} \lim_k x_i^*(z_k) x_j^*(x_i) \\
&= x_j^*(z_n) \lim_k x_j^*(z_k) \xrightarrow{n} 0 \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

O próximo resultado relaciona as propriedades (u) e (V) e será utilizado na caracterização da propriedade fraca de Phillips hereditária.

Proposição 1.3.10 *Seja X um espaço de Banach com a propriedade (u) tal que X não possui subespaços isomorfos a ℓ_1. Então X possui a propriedade (V).*

Demonstração. Sejam Y um espaço de Banach, $T : X \to Y$ um operador incondicionalmente convergente e $(x_n)_n$ uma sequência limitada em X. Como X não possui subespaços isomorfos a ℓ_1, temos pelo Teorema de Rosenthal que $(x_n)_n$ possui uma subsequência (x_{n_k}) fracamente de Cauchy. Agora, utilizando o fato de X possuir a propriedade (u), existe uma série $\sum_k u_k$ fracamente incondicionalmente de Cauchy tal que $x_{n_k} - \sum_{j=1}^{k} u_j \xrightarrow{w} 0$, o que implica $T(x_{n_k} - \sum_{j=1}^{k} u_j) \xrightarrow{w} 0$, e como $\sum_k Tu_j$ é incondicionalmente convergente, temos portanto que $T(x_{n_k}) \xrightarrow{w} \sum_j Tu_j$. ■

Proposição 1.3.11 *Se um espaço de Banach X possui a propriedade (V), então todo operador limitado $T : X \to Y$, onde Y é um espaço de Banach que não possui subespaços isomorfos a c_0, é fracamente compacto.*

Demonstração. Pelo Teorema 1.2.15 toda série fracamente incondicionalmente de Cauchy em Y é incondicionalmente convergente. Logo todo operador limitado $T : X \to Y$ é incondicionalmente convergente, e consequentemente fracamente compacto, já que X possui a propriedade (V). ■

Definiremos agora a propriedade (V^*), que será utilizada para provarmos resultados relacionados à propriedade (V).

Definição 1.3.12 *Dizemos que um espaço de Banach X possui a propriedade (V^*) se todo $K \subseteq X$ satisfazendo*

$$\lim_n \sup_{x \in K} x_n^* x = 0 \tag{1.4}$$

para toda série fracamente incondicionalmente de Cauchy $\sum_n x_n^*$ em X^* for relativamente fracamente compacto.

Proposição 1.3.13 *Seja X um espaço de Banach. Se X possui a propriedade (V), então X^* possui a propriedade (V^*), e se X^* possui a propriedade (V), então X possui a propriedade (V^*).*

Demonstração. Seja $K \subseteq X^*$ tal que para toda série $\sum_n x_n^{**}$ fracamente incondicionalmente de Cauchy em X^{**} $\lim_n \sup_{x^* \in K} x_n^{**}(x^*) = 0$. Tomando então $\sum_n x_n$ uma série fracamente incondicionalmente de Cauchy em X, temos que $\sum_n i_X(x_n)$ é fracamente

incondicionalmente de Cauchy em $i_X(X)$, e portanto $\sum_n i_X(x_n)$ é fracamente incondicionalmente de Cauchy em X^{**}, logo

$$\lim_n \sup_{x^* \in K} x^*(x_n) = \lim_n \sup_{x^* \in K} i_X(x_n)(x^*) = 0$$

e como X possui a propriedade (V), temos que K é relativamente fracamente compacto. Para a outra afirmação, considere $K \subseteq X$ tal que para toda série $\sum_n x_n^*$ em X^* $\lim_n \sup_{x \in K} x_n^*(x) = 0$, consequentemente $\lim_n \sup_{x^{**} \in i_X(K)} x^{**}(x_n^*) = 0$. Como X^* possui a propriedade (V), temos $i_X(K)$ relativamente fracamente compacto em X^{**}, e portanto K é relativamente fracamente compacto em X. ■

Proposição 1.3.14 *Se um espaço de Banach X possui a propriedade (V^*), então todo subespaço fechado de X possui tal propriedade.*

Demonstração. Sejam $F \subseteq X$ um subespaço fechado, e $K \subseteq F$ tal que $\lim_n \sup_{x \in K} x_n^*(x) = 0$ para toda série $\sum_n x_n^*$ fracamente incondicionalmente de Cauchy em F^*. Considerando então $\sum_n y_n^*$ fracamente de Cauchy em X^*, temos que $\sum y_n^*|_F$ é fracamente incondicionalmente de Cauchy em F^*, pois para cada $m \in F^{**}$, tomando $q : F \to X$ a inclusão, vale que

$$\sum_{i=1}^{\infty} |m(y_n^*|_F)| = \sum_{i=1}^{\infty} |q^{**}(m)(y_n^*)| < +\infty$$

portanto K satisfaz $\lim_n \sup_{x \in K} x_n^*(x) = 0$, para toda série $\sum_n x_n^*$ fracamente incondicionalmente de Cauchy em X^*, e como X possui a propriedade (V^*), temos K relativamente fracamente compacto em F. ■

Proposição 1.3.15 *Se um espaço de Banach X possui a propriedade (V^*), então X é fracamente sequencialmente completo.*

Demonstração Seja $(x_n)_n$ uma sequência fracamente de Cauchy. Inicialmente mostremos que para toda série $\sum_n x_n^*$ fracamente incondicionalmente de Cauchy em X^*, $\lim_n \sup_k x_n^*(x_k) = 0$. Consideremos então $\sum x_n^*$ fracamente incondicionalmente de Cauchy em X^*. Para cada $x \in X$, temos $(x_n^* x) \in \ell_1$, logo para cada $t = (t_n)_n \in \ell_\infty$, temos $\sum_n t_n x_n^*(x)$ convergente. pelo Teorema de Banach-Steinhaus, vale que $x_t^* = \sum_n t_n x_n^* \in X^*$. Como $(x_m)_m$ é fracamente de Cauchy, temos que existe $\lim_m x_t^* x_m = \lim_m \sum_n t_n x_n^*(x_m)$, logo a sequência $(y_m)_m$, onde $y_m = (x_n^* x_m)_n$ é fracamente de Cauchy em ℓ_1. Como ℓ_1 é fracamente sequencialmente completo e possui a propriedade de Schur, temos que $(y_m)_m$ é $||.||$-convergente, logo

$$y_m \xrightarrow{||\cdot||} (\lim_m x_n^* x_m)_n = (a_n)_n \in \ell_1,$$

e

$$\lim_m \sum_n |x_n^*(x_m) - a_n| = 0$$

Portanto dado $\epsilon > 0$, existe m_0 tal que para todos $m \geq m_0$, $n \in \mathbb{N}$

$$|x_n^*(x_m) - a_n| \leq \sum_k |x_k^*(x_m) - a_k| < \frac{\epsilon}{2}$$

Logo

$$\sup_{m \geq m_0} |x_n^*(x_m) - a_n| < \epsilon, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Para $m \leq m_0$ temos que:

$$\sum_n |x_n^*(x_m) - a_n| < +\infty$$

Logo existe n_0 tal que para todo $n \geq n_0$

$$|x_n^*(x_m) - a_n| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon, \quad \forall m \leq m_0.$$

Com isso

$$\sup_{m \leq m_0} |x_n^*(x_m) - a_n| < \epsilon.$$

E portanto

$$\sup_{m \in \mathbb{N}} |x_n^*(x_m) - a_n| < \epsilon, \qquad \forall n \geq n_0$$

Agora

$$\sup_m |x_n^*(x_m)| \leq \sup_m |x_n^*(x_m) - a_n| + |a_n| \xrightarrow{n} 0$$

Logo $\lim_n \sup_m |x_n^*(x_m)| = 0$. Como X possui a propriedade (V^*), temos que $(x_n)_n$ possui uma subsequência fracamente convergente, e utilizando o fato de $(x_n)_n$ ser fracamente de Cauchy, temos $(x_n)_n$ fracamente convergente. ■

Proposição 1.3.16 *Um espaço de Banach X é reflexivo se e somente se X possui as propriedades (V) e (V^*).*

Demonstração. Se X é reflexivo, temos que tanto X quanto X^* possuem a propriedade (V), utilizando a Proposição 1.3.13 temos que X possui também a propriedade (V^*). Reciprocamente, se X possui a propriedade (V), temos que X^* possui a propriedade (V^*), pela Proposição 1.3.15 temos que X^* é fracamente sequencialmente completo, disso segue que X^* não possui subespaços isomorfos a c_0, logo pelo Teorema 1.2.15 temos que toda série $\sum_n x_n^*$ fracamente incondicionalmente de Cauchy em X^* é incondicionalmente convergente, e em particular $||x_n^*(x)|| \xrightarrow{n} 0$. Consequentemente

$$\sup_{x \in B_X} |x_n^*(x)| \leq ||x_n^*|| \xrightarrow{n} 0$$

e como X possui a propriedade (V^*), temos que B_X é fracamente compacta, logo X é reflexivo.

Proposição 1.3.17 *Seja X um espaço de Banach com a propriedade (V). Então X é reflexivo se e somente se nenhum subespaço de X é isomorfo a c_0.*

Demonstração. Se X é reflexivo, então todo subespaço fechado de X é reflexivo, e como c_0 não é reflexivo, segue que X não possui subespaços isomorfos a c_0. Reciprocamente, se X não possui subespaços isomorfos a c_0, então toda série $\sum_n x_n$ fracamente incondicionalmente de Cauchy em X é incondicionalmente convergente. Logo

$$\sup_{x^* \in B_{X^*}} |x^* x_n| \leq ||x_n|| \xrightarrow{n} 0$$

Portanto B_{X^*} é fracamente compacta e X é reflexivo. ■

Passemos à definição da propriedade de Dunford-Pettis, e aos resultados que serão utilizados no texto que envolvem tal propriedade.

Definição 1.3.18 *Sejam X, Y espaços de Banach. Dizemos que um operador $T : X \to Y$ é completamente contínuo se para toda sequência $(x_n)_n$ em X, $x_n \xrightarrow{w} 0$, vale $Tx_n \xrightarrow{||\cdot||} 0$.*

Definição 1.3.19 *Dizemos que um espaço de Banach X possui a propriedade de Dunford-Pettis, se para todo espaço de Banach Y, todo operador $T : X \to Y$ fracamente compacto for completamente contínuo.*

Teorema 1.3.20 *Seja X um espaço de Banach. São equivalentes:*

(a) X possui a propriedade de Dunford-Pettis.

(b) Todo operador $T : X \to c_0$ fracamente compacto é completamente contínuo.

(c) Se $x_n \xrightarrow{w} 0$ em X e $x_n^* \xrightarrow{w} 0$ em X^*, então $\lim_n x_n^*(x_n) = 0$.

(d) Se (x_n) é uma sequência fracamente de Cauchy em X e $x_n^* \xrightarrow{w} 0$ em X^*, então $\lim_n x_n^* x_n = 0$.

Demonstração. (a) $\Rightarrow$ (b). Imediato.

(b) $\Rightarrow$ (c). Sejam $x_n \xrightarrow{w} 0$ em X, e $x_n^* \xrightarrow{w} 0$ em X^*. Definindo o operador $T : X \to c_0$, $Tx = (x_n^* x)_n$, temos que T está bem definido, e é limitado, pois

$$||Tx|| = \sup_n |x_n^* x| \leq (\sup ||x_n^*||)||x||,$$

além disso $T^* : \ell_1 \to X^*$ é dado por $T^*\big((t_n)\big) = \sum_n t_n x_n^*$. Mostremos então que T^* é fracamente compacto. De fato, seja $A = \{x_n^*\} \cup \{0\}$, temos então que A é fracamente compacto em X^*, com isso $\widetilde{A} = \cup\{\lambda A : \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1\}$ também é fracamente compacto em X^*, pois claramente toda sequência em $\widetilde{A}$ possui subsequência fracamente convergente em $\widetilde{A}$. Portanto temos que a envoluntória convexa de $\widetilde{A}$, $\overline{co}(\widetilde{A})$ é fracamente compacta. Considerando agora $(t_n)_n \in B_{\ell_1}$, temos que $T^*\big((t_n)\big) = \sum_n t_n x_n^* \in \overline{co}(\widetilde{A})$, logo $T^*(B_{\ell_1})$

$\subseteq \overline{co}(\widetilde{A})$, $T^*(B_{\ell_1})$ é fracamente relativamente compacto e T^* é fracamente compacto. Pelo Teorema de Gantmacher T é fracamente compacto e por hipótese segue que T é completamente contínuo. Com isso, e utilizando o fato de $x_n \xrightarrow{w} 0$, temos que $||T(x_n)|| \to 0$, e como

$$|x_n^*(x_n)| \leq \sup_j |x_j^*(x_n)| = ||T(x_n)||$$

concluímos que $\lim_n x_n^* x_n = 0$.

(c)$\Rightarrow$ (d). Sejam (x_n) uma sequência fracamente de Cauchy em X, e $x_n^* \xrightarrow{w} 0$ em X^*. Suponhamos que $(x_n^* x_n)$ não convirja a 0. Passando a uma subsequência se necessário, podemos supor que existe $\epsilon > 0$ tal que $|x_n^* x_n| \geq \epsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $x_n^* \xrightarrow{w} 0$, existe uma subsequência $(x_{n_k}^*)_k$ de (x_n^*) tal que $|x_{n_k}^* x_k| \leq \frac{\epsilon}{2}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Notemos ainda que $x_{n_k} - x_k \xrightarrow{w} 0$, logo por (c), existe k_0 tal que $|x_{n_{k0}}^*(x_{n_{k0}} - x_{k_0})| \leq \frac{\epsilon}{4}$. Porém

$$\epsilon \leq |x_{n_{k0}}^* x_{n_{k0}}| \leq |x_{n_{k0}}^*(x_{n_{k0}} - x_{k_0})| + |x_{n_{k0}}^* x_{n_{k0}}| \leq 3\frac{\epsilon}{4}$$

Absurdo.

(d) $\Rightarrow$ (c). Imediato.

(c) $\Rightarrow$ (a). Suponha que (a) não ocorra. Existiriam então um espaço de Banach Y, e um operador $T : X \to Y$ fracamente compacto que não é completamente contínuo. Com isso existiriam $\epsilon > 0$ e $x_n \xrightarrow{w} 0$ em X tal que $||Tx_n|| \geq \epsilon$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Consideremos então $y_n^* \in B_{Y^*}$ tal que $y_n^* T x_n = ||Tx_n||$, temos pelo Teorema de Gantmacher que (y_n^*) possui subsequência $(y_{n_k}^*)$ tal que $(T^* y_{n_k}^*)_k$ converge fracamente para $x^* \in X^*$. Por (c), temos $(T^* y_{n_k}^* - x^*)(x_{n_k}) \to 0$, e como $x^*(x_{n_k}) \to 0$, existiria k tal que $|(T^* y_{n_k}^* - x^*)(x_{n_k})| < \frac{\epsilon}{2}$, $|x^* x_{n_k}| < \frac{\epsilon}{2}$. Contudo

$$\epsilon \leq ||Tx_{n_k}|| = |(T^* y_{n_k}^*) x_{n_k}| \leq |(T^* y_{n_k}^* - x^*) x_{n_k}| + |x^* x_{n_k}| < \epsilon.$$

Absurdo. ■

Corolário 1.3.21 *Seja X um espaço de Banach com a propriedade de Dunford-Pettis. Então toda sequência $(x_n^*)_n$ fracamente nula em X^* converge uniformemente em todo conjunto $A \subseteq X$ pré-compacto (A é pré-compacto se toda sequência em A possui uma subsequência fracamente de Cauchy).*

Corolário 1.3.22 *Seja X um espaço de Banach. Se X^* possui a propriedade de Dunford-Pettis, então o mesmo ocorre com X.*

Demonstração. Utilizando a condição (c) do Teorema anterior, temos que se $x_n \xrightarrow{w} 0$ em X e $x_n^* \xrightarrow{w} 0$ em X^* então vale $i_X(x_n) \xrightarrow{w} 0$ em X^{**}, logo $\lim_n i_X(x_n)(x_n^*) = 0$, e consequentemente $\lim_n x_n^* x_n = 0$. ■

Enunciaremos agora dois resultados que relacionam a propriedade de Dunford-Pettis com outras propriedades geométricas. Daremos apenas a referência para as demonstrações, pelo fato destas fugirem aos objetivos do nosso trabalho.

Teorema 1.3.23 *Seja X um espaço de Banach com a propriedade de Dunford-Pettis hereditária. Então X possui a propriedade (u).*

Demonstração. [8] Theorem 2.1.

Teorema 1.3.24 *Seja X um espaço de Banach. São equivalentes:*

(a) X possui a propriedade de Dunford-Pettis e não possui subespaços isomorfos a ℓ_1.

(b) X^* possui a propriedade de Schur.

Demonstração. [1] Proposición II.10.

Para terminarmos o capítulo, daremos a definição da propriedade de Grotendieck, e enunciaremos um resultado que nos permitirá estabelecer diversas conexões dessa propriedade com a propriedade fraca de Phillips.

Definição 1.3.25 *Dizemos que um espaço de Banach X possui a propriedade de Grotendieck se toda sequência fraca* convergente em X^* for fracamente convergente.*

Teorema 1.3.26 *Um espaço de Banach X possui a propriedade de Grotendieck se e somente se todo operador limitado $T : X \to Y$ for fracamente compacto.*

Demonstração. [6] Teorema 11.3.

Capítulo 2

As propriedades de Phillips

2.1 Resultados iniciais

Definição 2.1.1 *Seja X um espaço de Banach.*

1. *X possui a propriedade de Phillips se a aplicação $p = (i_X)^* : X^{***} \to X^*$ é fraca*-norma sequencialmente contínua.*

2. *X possui a propriedade fraca de Phillips se a aplicação $p = (i_X)^* : X^{***} \to X^*$ é fraca*-fraca sequencialmente contínua.*

3. *X possui a propriedade (fraca) de Phillips hereditária se todo subespaço fechado de X possui a propriedade (fraca) de Phillips.*

Começaremos nosso estudo das propriedades de Phillips analisando a propriedade fraca de Phillips. O primeiro resultado nos dá uma condição necessária para que um espaço de Banach possua a propriedade fraca de Phillips.

Lema 2.1.2 *Seja X um espaço de Banach. Se X possui a propriedade fraca de Phillips, então X^* é fracamente sequencialmente completo.*

Demonstração. Seja (x_n^*) sequência fracamente de Cauchy em X^*. Temos então que para todo $x^{**} \in X^{**}$, existe $\lim_n x^{**}(x_n^*)$. Pelo Teorema de Banach-Steinhaus, se $x^{***} : X^{**} \to \mathbb{C}$ é definido por $x^{***}(x^{**}) = \lim_n x^{**}(x_n^*)$, então $x^{***} \in X^{***}$, e da definição da topologia fraca* segue que $i_{X^*}(x_n^*) - x^{***} \xrightarrow{w*} 0$. Como X possui a propriedade fraca de Phillips, temos $p(i_{X^*}(x_n^*) - x^{***}) \xrightarrow{w} 0$, e portanto $x_n^* \xrightarrow{w} p(x^{***})$. ■

Observação 2.1.3 *Se X ou X^{**} possuem a propriedade de Grotendieck, então X possui a propriedade fraca de Phillips.*

Demonstração. Seja $x_n^{***} \xrightarrow{w*} 0$ em X^{***}. Se X^{**} possui a propriedade de Grotendieck, temos então que $x_n^{***} \xrightarrow{w} 0$, e como p é fraca-fraca contínua, segue que $p(x_n^{***}) \xrightarrow{w} 0$. No caso em que X possui a propriedade de Grontendieck, notemos que p é fraca*-fraca* contínua,

logo $p(x_n^{***}) \xrightarrow{w*} 0$, e portanto $p(x_n^{***}) \xrightarrow{w} 0$. ■

Para o próximo resultado, utilizaremos a definição da propriedade de Mazur.

Definição 2.1.4 *Um espaço de Banach X possui a propriedade de Mazur se todo funcional $\Lambda : X^* \to \mathbb{C}$ fraco* sequencialmente contínuo em X^{**} pertencer a $i_X(X)$.*

Notemos que todo espaço de Banach separável possui a propriedade de Mazur, já que os funcionais fraco* contínuos do dual de um espaço de Banach X são os elementos de $i_X(X)$ ([3] pág. 13), e a bola unitária do espaço dual de todo espaço de Banach separável é fraca* metrizável.

Proposição 2.1.5 *Seja X um espaço de Banach tal que X^{**} possui a propriedade de Mazur. Então X possui a propriedade fraca de Phillips, se e somente se X é reflexivo.*

Demonstração. Suponha que X possua a propriedade fraca de Phillips. Mostremos que $(iX)^{**}(X^{**}) = p^*(X^{**}) \subseteq i_{X^{**}}(X^{**})$, e do Teorema de Gantmacher seguirá que i_X é fracamente compacto, e consequentemente X será reflexivo.

Sejam $x_n^{***} \xrightarrow{w*} 0$, $x^{**} \in X^{**}$, temos então que:

$$p(x_n^{***}) \xrightarrow{w*} 0 \quad \Rightarrow \quad x^{**}(p(x_n^{***})) \to 0 \quad \Rightarrow \quad (p^*(x^{**}))\,(x_n^{***}) \to 0,$$

logo $p^*(x^{**})$ é fraco* sequencialmente contínuo. Como X^{**} possui a propriedade de Mazur segue que $p^*(x^{**}) \in i_{X^{**}}(X^{**})$.

Se X é reflexivo, então $i_X : X \to X^{**}$ é fracamente compacto, e pelo Teorema de Gantmacher temos que $p = (i_X)^*$ é fraca*-fraca contínua, e portanto X possui a propriedade fraca de Phillips. ■

A partir do resultado acima temos que o espaço de James J ([9] pág. 411) não possui a propriedade fraca de Phillips, pois J é separável, isométrico a J^{**} e não-reflexivo.

O próximo lema e a próxima observação serão utilizados na caracterização das propriedades de Phillips em termos das aplicações definidas no bidual de espaços de Banach a valores em c_0.

Lema 2.1.6 *Seja $T : X \to c_0$ um operador limitado. Então:*

1. *T é fracamente compacto se e só se $T^*e_n^* \xrightarrow{w} 0$*

2. *T é compacto se e só se $T^*e_n^* \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$*

Demonstração.

1. Suponha que T seja fracamente compacto. Pelo Teorema de Gantmacher, temos que T^* é fraco*-fraco contínuo, e como $e_n^* \xrightarrow{w*} 0$ em ℓ_1, segue que $T^*e_n^* \xrightarrow{w} 0$.

   Para a recíproca, seja $(y_\lambda^*)_{\lambda\in\Lambda}$ rede em ℓ_1, tal que $y_\lambda^* = (a_n^\lambda)_n$, e $y_\lambda^* \xrightarrow{w*} 0$. Mostremos que $T^*(y_\lambda^*) \xrightarrow{w} 0$.

   De fato, considere $x^{**} \in X^{**}$, temos então que:

$$\begin{aligned} x^{**}(T^*(y_\lambda^*)) &= x^{**}\left(T^*\left(\sum_n a_n^\lambda e_n^*\right)\right) = x^{**}\left(\sum_n a_n^\lambda T^* e_n^*\right) \\ &= \sum_n a_n^\lambda \left(x^{**}(T^*e_n^*)\right). \end{aligned}$$

   Por hipótese, temos que $T^*e_n^* \xrightarrow{w} 0$, logo:

$$\begin{aligned} (x^{**}(T^*e_n^*))_n \in c_0 \quad &\Rightarrow \quad \sum_n a_n^\lambda \left(x^{**}(T^*e_n^*)\right) = y_\lambda^*(x^{**}(T^*e_n^*)) \xrightarrow{\lambda} 0 \\ &\Rightarrow \quad T^*(y_\lambda^*) \xrightarrow{w} 0. \end{aligned}$$

2. Suponha que T seja compacto. Temos que:

$$||T^*e_n^*|| = \sup_{x\in B_X} |T^*e_n^*(x)| = \sup_{x\in B_X} |e_n^*(Tx)| \leq \sup_{y\in\overline{TB_X}} |e_n^* y|.$$

   Por hipótese, TB_X é totalmente limitado, logo para todo $\epsilon > 0$, existem $y_1, \ldots, y_k \in \overline{TB_X}$, tal que para todo $y \in \overline{TB_X}$, existe $j \in \{1, \ldots, k\}$, tal que :

$$||y - y_j|| < \frac{\epsilon}{2} \qquad \Rightarrow \qquad |e_n^*(y - y_j)| < \frac{\epsilon}{2}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

   Além disso, como $y_j \in c_0$ segue que existe n_0 tal que $|e_n^*(y_j)| < \frac{\epsilon}{2}, \forall n \geq n_0, \forall j \in \{1, \ldots, k\}$. Portanto, $\forall y \in \overline{TB_X}, \forall n \geq n_0$, temos:

$$\begin{aligned} |e_n^*(y)| \quad &\leq \quad |e_n^*(y - y_j)| + |e_n^*(y_j)| < \epsilon \quad \Rightarrow \quad \sup_{y\in\overline{TB_X}} |e_n^*(y)| < \epsilon, \forall n \geq n_0. \\ &\Rightarrow \quad T^*e_n^* \xrightarrow{||\cdot||} 0. \end{aligned}$$

   Para a recíproca, mostremos que TB_X é totalmente limitado.

   De fato, como $T^*e_n^* \xrightarrow{||\cdot||} 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $\sup_{x\in B_X} |e_n^*(Tx)| < \epsilon, \forall n \geq n_0$, e com isso, $\sup_{y\in TB_X} |e_n^*(y)| < \epsilon, \forall n \geq n_0$.

   Como T é limitado, temos que existe $M > 0$, tal que

$$||y|| \leq M \quad \forall y \in TB_X,$$

   em particular :

$$|e_n^*(y)| \leq M, \quad \forall n \leq n_0.$$

Definindo

$$\begin{aligned} S: \quad c_0 &\to (\mathbb{C}^{n_0}, ||.||_\infty) \\ (a_n) &\mapsto (a_1, \ldots, a_n) \end{aligned}$$

Segue que $S(TB_X) \subseteq B[\mathbb{C}^{n_0}, M]$, e $B[\mathbb{C}^{n_0}, M]$ é compacta.

Logo existe

$$z_1 = (z_{j1}, \ldots, z_{jn_0}), \ldots, z_k = (z_{k1}, \ldots, z_{kn_0}) \in S(TB_X),$$

tal que para todo $z \in S(TB_X)$ existe $j \in \{1, \ldots, k\}$ tal que $||z - z_j||_\infty < \frac{\epsilon}{2}$.

Definindo $y_j = (z_{j1}, \ldots, z_{jn_0}, 0, 0, \ldots)$, $j \in \{1, \ldots, k\}$, temos que para todo $y \in TB_X$, existe $j \in \{1, \ldots, k\}$ tal que $||S(y) - z_j|| < \epsilon$, logo

$$||y - y_j|| = \sup_n |e_n^*(y) - e_n^*(y_j)| < \epsilon,$$

pois se $n \leq n_0$, então

$$|e_n^*(y) - e_n^*(y_j)| \leq ||s(y) - z_j|| \leq \epsilon,$$

e se $n \geq n_0$, então

$$|e_n^*(y) - e_n^*(y_j)| = |e_n^*(y)| < \epsilon.$$

Portanto TB_X é relativamente compacto. ■

Observação 2.1.7 *Todo operador $T : \ell_\infty \to c_0$ é fracamente compacto.*

Demonstração. Notemos primeiramente que $T^*e_n^* \xrightarrow{w*} 0$, pois se $x \in \ell_\infty$, então $(T^*e_n^*)(x) = e_n^*(T(x)) \xrightarrow{n} 0$, já que $e_n^* \xrightarrow{w*} 0$ em ℓ_1. Como ℓ_∞ possui a propriedade de Grontendieck, segue que $T^*e_n^* \xrightarrow{w*} 0$, logo T é fracamente compacto. ■

Teorema 2.1.8 *Um espaço de Banach possui a propriedade (fraca) de Phillips se e somente se para todo operador $T : X^{**} \to c_0$, o operador $\widetilde{T} = T \circ i_X$ é (fracamente) compacto.*

Demonstração. Para a condição necessária, seja $T : X^{**} \to c_0$. Pelo mesmo argumento da observação 2.1.7, temos que $T^*e_n^* \xrightarrow{w*} 0$, e

$$\widetilde{T}^*e_n^* = (T \circ i_X)^*e_n^* = (i_X^* \circ T^*)(e_n^*) = p(T^*e_n^*).$$

Se X possui a propriedade fraca de Phillips, temos que $\widetilde{T}^*e_n^* \xrightarrow{w} 0$, o que implica $\widetilde{T}$ fracamente compacto , e se X possui a propriedade de Phillips, temos $\widetilde{T}^*e_n^* \xrightarrow{||.||} 0$, o que implica $\widetilde{T}$ compacto .

Para a condição suficiente, considere $x_n^{***} \xrightarrow{w*} 0$ em X^{***}. Definamos $T : X^{**} \to c_0$ como $T(x^{**}) = (x_n^{***}(x^*))_n$. Como $x_n^{***} \xrightarrow{w*} 0$, temos pelo Princípio da Limitação Uniforme que Existe $M > 0$ tal que $\sup_n ||x_n^{***}|| \leq M$, logo para todo $x^{**} \in X^{**}$

$$||T(x^{**})|| = \sup_n |x_n^{***}(x^{**})| \leq ||x^{**}|| \sup_n ||x_n^{***}|| \leq M||x^{**}||.$$

Portanto T é limitado. Já que

$$T^*e_n^*(x^{**}) = e_n^*(T(x^{**}) = x_n^{***}(x^{**}),$$

temos $T^*e_n^* = x_n^{***}$, e pelo que vimos na primeira implicação, temos $p(T^*e_n^*) = \widetilde{T}^*e_n^*$, logo se $\widetilde{T}$ é fracamente compacto, temos $p(x_n^{***}) \xrightarrow{w} 0$, e se $\widetilde{T}$ é compacto temos $p(x_n^{***}) \xrightarrow{||\cdot||} 0$. ■

A seguir veremos que todo espaço de Banach com a propriedade (V) possui a propriedade fraca de Phillips. A partir disso, obteremos uma grande quantidade de exemplos de espaços de Banach com a propriedade fraca de Phillips. De fato, em [12] é demonstrado que toda C*-álgebra possui a propriedade (V).

Teorema 2.1.9 *Se um espaço de Banach possui a propriedade (V), então ele possui a propriedade fraca de Phillips.*

Demonstração. Mostremos que todo operador $T : X^{**} \to c_0$ é incondicionalmente convergente, pois se isso não ocorresse, existiria um subespaço $E \subset X^{**}$ tal que $T|_E : E \to c_0$ é um isomorfismo. Considerando $q : E \to X^{**}$ a inclusão, e $(i_{X^*})^* : X^{****} \to X^{**}$ a projeção canônica, definamos $S : E^{**} \to c_0$, $S = T \circ (i_{X^*})^* \circ q^{**}$. Como $(T|_E)^{**} : E^{**} \to \ell_\infty$ é isomorfismo, e pela observação 2.1.7 $S \circ (T|_E{}^{**})^{-1}$ é fracamente compacto, temos que

$$S = \left(S \circ (T|_E)^{**}\right) \circ (T|_E{}^{**})^{-1}$$

é fracamente compacto.

Notemos agora que $(i_{X^*})^* \circ q^{**} \circ i_E = q$, pois para todo $x^{**} \in E^{**}$,$x^* \in X^*$ temos:

$$\begin{aligned}
\left((i_{X^*})^* \circ q^{**} \circ i_E(x^{**})\right)(x^*) &= \left((i_{X^*})^*(i_E(x^{**}) \circ q^*))\right)(x^*) \\
&= \left(i_E(x^{**}) \circ q^* \circ i_{X^*}\right)(x^*) \\
&= i_E(x^{**} \circ q^*(i_{X^*}(x^*)) \\
&= i_E(x^{**})(i_{X^*}(x^*) \circ q) \\
&= i_{X^*}(x^*)(q(x^{**})) \\
&= q(x^{**})(x^*).
\end{aligned}$$

Disso segue que $S \circ i_E = T \circ q = T|_E$, e como $S \circ i_E$ é fracamente compacto temos que $T \restriction_E$ é fracamente compacto, logo $\overline{T(E_1)}^w$ é fracamente compacto em c_0,mas como $T|_E$ é

um isomorfismo, deveríamos ter B_{c_0} fracamente compacta, e consequentemente c_0 seria reflexivo, contradição.

Portanto se X tem a propriedade (V), e $T : X^{**} \to c_0$ é limitado, temos que T é incondicionalmente convergente, logo T é fracamente compacto, e isto implica que $\widetilde{T} = T \circ i_X$ é fracamente compacto, e do Teorema 2.1.8, segue que X possui a propriedade fraca de Phillips. ■

É importante salientarmos que existem exemplos de espaços de Banach com a propriedade de Phillips que não possuem a propriedade (V).

Com efeito, em [2] é construído um espaço de Banach X, tal que X não contém subespaço isomorfo a c_0 e X^* é isomorfo a ℓ_1. Com isso, temos que X^{**} possui a propriedade de Grotendieck (já que X^{**} é isomorfo a ℓ_∞). A partir disso, é fácil ver que X possui a propriedade fraca de Phillips. Como claramente X^* possui a propriedade de Schur, segue da Proposição 2.1.11(que veremos abaixo) que X possui a propriedade de Phillips. Mas como X^{**} é não-reflexivo e X não possui uma cópia de c_0, segue do Teorema 1.3.17 que X não possui a propriedade (V).

A seguir, daremos algumas caracterizações da versão hereditária da propriedade fraca de Phillips. Para isso, utilizaremos um resultado de H. Rosenthal que diz que um espaço de Banach X tem a propriedade (u), e X não contém uma cópia de ℓ_1 se e somente se para todo subespaço fechado $M \subset X$, M^* é fracamente sequencialmente completo.

Teorema 2.1.10 *Seja X um espaço de Banach. São equivalentes:*

(a) X possui a propriedade fraca de Phillips hereditária.

(b) Para todo subespaço fechado $M \subset X$, M^* é fracamente sequencialmente completo.

(c) X tem a propriedade (u), e X não contém uma cópia de ℓ_1.

(d) X possui a propriedade (V) hereditária.

Demonstração.(a) $\Rightarrow$ (b) e (d) $\Rightarrow$ (a) decorrem do Lema 2.1.2 e do Teorema 2.1.9 respectivamente, (b) $\Leftrightarrow$ (c) segue de [13] Corollary 1.5. Como a propriedade (u) é hereditária (c) $\Rightarrow$ (d) segue da Proposição 1.3.10. ■

Proposição 2.1.11 *Um espaço de Banach X possui a propriedade de Phillips se e somente se X possui a propriedade fraca de Phillips e X^* possui a propriedade de Schur.*

Demonstração. Se X possui a propriedade de Phillips, obviamente X possui a propriedade fraca de Phillips. Considere então $x_n^* \xrightarrow{w} 0$ em X^*, temos que:

$$i_{X^*}(x_n^*) \xrightarrow{w^*} 0 \quad \Rightarrow \quad \Big((i_X)^* \circ i_{X^*}\Big)(x_n^*) \xrightarrow{\|\cdot\|} 0,$$

mas

$$\begin{aligned}\Big((i_X)^* \circ i_{X^*}(x_n^*)\Big)(x) &= \Big(i_{X^*}(x_n^*) \circ i_X\Big)(x) \\ &= i_{X^*}(x_n^*)(i_X(x)) \\ &= \Big(i_X(x)\Big)(x_n^*) \\ &= x_n^*(x)\end{aligned}$$

Logo $(i_X)^* \circ i_{X^*} = id_{X^*}$, e com isso temos que $x_n^* \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$, e consequentemente X^* possui a propriedade de Schur.

Para a recíproca, seja $x_n^{***} \xrightarrow{w^*} 0$ em X^{***}. Como X possui a propriedade fraca de Phillips, temos $p(x_n^{***}) \xrightarrow{w} 0$ em X^*, e portanto $p(x_n^{***}) \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ em X^*, já que X^* possui a propriedade de Schur. ■

Corolário 2.1.12 *Seja X um espaço de Banach que é isomorfo a um subespaço fechado de um espaço que possui base incondicional. Então:*

(a) X possui a propriedade de Phillips se e somente se X^* possui a propriedade de Schur.

(b) X possui a propriedade fraca de Phillips hereditária se e somente se X não contém uma cópia de ℓ_1.

Demonstração.

(a) A condição necessária segue imediatamente da Proposição 2.1.11.

Se X^* possui a propriedade de Schur, então X não contém uma cópia de ℓ_1, e como todo subespaço fechado de um espaço com base incondicional tem a propriedade (u), segue do Teorema 2.1.10 que X possui a propriedade fraca de Phillips, e pela Proposição 2.1.11 temos que X possui a propriedade de Phillips.

(b) A condição necessária segue imediatamente do Teorema 2.1.10

Para a condição suficiente, vimos acima que X possui a propriedade (u), e como X não possui cópia de ℓ_1, segue do Teorema 2.1.10 que X possui a propriedade fraca de Phillips hereditária. ■

O próximo resultado nos diz que nos espaços de Banach que não possuem subespaços isomorfos a ℓ_1, as versões hereditárias da propriedade de Phillips e de Dunford-Pettis são equivalentes.

Teorema 2.1.13 *Seja X um espaço de Banach. São equivalentes:*

(a) X possui a propriedade de Phillips hereditária.

(b) Para todo subespaço fechado $M \subseteq X$, M^* possui a propriedade de Schur.

(c) X possui a propriedade de Dunford-Pettis hereditária e não contém uma cópia de ℓ_1.

Demonstração.

(a) $\Rightarrow$ (b) Segue da Proposição 2.1.11.

(b) $\Rightarrow$ (c) Segue do fato de que M possui a propriedade de Schur se e somente se M possui a propriedade de Dunford-Pettis e M não contém uma cópia de ℓ_1.

(c) $\Rightarrow$ (a) Pelo Teorema 1.3.23 temos que X possui a propriedade (u). Considere então $M \subseteq X$ subespaço fechado. Como X possui a propriedade de Dunford-Pettis hereditária, e X não possui uma cópia de ℓ_1, temos que M^* possui a propriedade de Schur, e como a propriedade (u) é hereditária, temos que M possui a propriedade (u). Pelo Teorema 1.3.10, temos que M possui a propriedade (V), e pelo Teorema 2.1.9, segue que M possui a propriedade fraca de Phillips, logo pela Proposição 2.1.11, temos portanto que M possui a propriedade de Phillips.

Proposição 2.1.14 *Sejam X e Y dois espaços de Banach, e suponha que X possua a propriedade de Phillips. Então todo operador $T : X^{**} \to Y$ que é fraco*-fraco contínuo é compacto.*

Demonstração. Pelo Teorema de Banach-Alaoglu, temos que $B_{X^{**}}$ é fraca* compacta, e como T é fraco*-fraco contínuo, segue que $TB_{X^{**}}$ é fracamente compacto, logo T é fracamente compacto. Com isso, temos que $\widetilde{T} = T \circ i_X : X \to Y$ também é fracamente compacto, assim como $\widetilde{T}^*$. Logo se $(T^*y_n^*)_n$ é uma sequência em $T^*(B_{Y^*})$, então existe uma subsequência $(T^*y_{n_k}^*)_k$ fracamente convergente. Utilizando o fato de X^* possuir a propriedade de Schur (Proposição 2.1.11) temos que $(T^*y_{n_k}^*)_k$ converge em norma, e consequentemente $\widetilde{T}^*$ é compacto. Logo $\widetilde{T}^{**}$ também é compacto. Pelo Teorema de Gantmacher, e lembrando que $\widetilde{T}$ é compacto temos que $\widetilde{T}^{**}(X^{**}) \subseteq i_Y(Y)$. A partir disso e do fato de i_Y ser um isomorfismo sobre a imagem, temos que ${i_Y}^{-1} \circ \widetilde{T}^{**} : X^{**} \to Y$ está bem definida, e é fraca*-fraca contínua. Mostremos então que $T = {i_Y}^{-1} \circ \widetilde{T}^{**}$.

Para todos $x \in X, y^* \in Y^*$ temos:

$$\begin{aligned}
\left(\widetilde{T}^{**}(i_X(x))\right)(y^*) &= \left(T^{**} \circ (i_X)^{**}(i_X(x))\right)(y^*) \\
&= \left(T^{**}(i_X(x) \circ (i_X)^*)\right)(y^*) \\
&= \left(i_X(x) \circ (i_X)^* \circ T^*\right)(y^*) \\
&= i_X(x) \circ (i_X)^*(y^* \circ T) \\
&= i_X(x)(y^* \circ T \circ i_X) \\
&= y^* \circ T(i_X(x)) \\
&= y^*(T(i_X(x)) \\
&= \left(i_Y(T(i_X(x)))\right)(y^*)
\end{aligned}$$

Portanto para todo $x \in X$, vale $\widetilde{T}^{**}(i_X(x)) = i_Y \circ T(i_X(x))$, em particular, temos que $\widetilde{T}^{**}(x^{**}) = i_Y \circ T(x^{**})$, $\forall x^{**} \in B_{i_X(X)}$, e pelas observações acima, segue que

$$T(x^{**}) = (i_Y)^{-1} \circ \widetilde{T}^{**}(x^{**}), \quad \forall x^{**} \in B_{i_X(X)}.$$

Como pelo Teorema de Goldstine, $B_{i_X(X)}$ é fraca* densa em $B_{X^{**}}$, e T, ${i_Y}^{-1}\widetilde{T}^{**}$ são fraco*-fraco contínuos, segue que $T(x^{**}) = {i_Y}^{-1} \circ \widetilde{T}^{**}$, $\forall x^{**} \in B_{X^{**}}$, e portanto $T = {i_Y}^{-1} \circ \widetilde{T}^{**}$, e como $\widetilde{T}^{**}$ é compacto, temos T é compacto. ■

Lema 2.1.15 *Seja Y um espaço de Banach. Se X é um subespaço complementado de Y^*, então $i_X(X)$ é complementado em X^{**}.*

Demonstração. Sejam $q : Y^* \to X \subseteq Y^*$ projeção, $k : X \to Y^*$ a inclusão e $(i_Y)^* : Y^{***} \to Y^*$ a projeção canônica. Primeiramente mostremos que $(i_Y)^* \circ k^{**} \circ i_X = k$. De fato, para cada $x \in X$, $y^* \in Y$ temos:

$$\begin{aligned}
\Big((i_Y)^* \circ k^{**} \circ i_X(x)\Big)(y) &= \Big((i_Y)^*(i_X(x) \circ k^*)\Big)(y) \\
&= \Big(i_X(x) \circ k^* \circ i_Y\Big)(y) \\
&= (i_X(x) \circ k^*)(i_Y(y)) \\
&= i_X(x)(i_Y(y) \circ k) \\
&= i_Y(y)(k(x)) \\
&= k(x)(y).
\end{aligned}$$

Logo para cada $x \in X$ temos:

$$i_X \circ q \circ (i_Y)^* \circ k^{**}(i_X(x)) = i_X \circ q(k(x)) = i_X(x).$$

E portanto $i_X \circ q \circ (i_Y)^* \circ k^{**} : X^{**} \to i_X(X)$ é projeção, e $i_X(X)$ é complementado em X^{**}. ■

Observação 2.1.16 *Se X possui a propriedade de Phillips, então para toda sequência $x_n^{***} \xrightarrow{w*} 0$ em X^{***}, vale $x_n^{***} \to 0$ uniformemente para $x \in B_{i_X}$.*

Demonstração. Isto é claro, já que $(x_n^{***} \circ i_X)(x) = p(x_n^{***}(x))$, e $p(x_n^{***}) \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$, o que implica $p(x_n^{***})(x)$ converge uniformemente a 0 para $x \in B_X$. ■

Um resultado bem conhecido envolvendo c_0, é o fato desse espaço não ser complementado no seu bidual ℓ_∞. O próximo resultado mostra que tal fato é verdadeiro para todo espaço de Banach de dimensão infinita possuindo a propriedade de Phillips.

Teorema 2.1.17 *Seja X um espaço de Banach de dimensão infinita. Se X possui a propriedade de Phillips, então X não é complementado em nenhum espaço dual.*

Demonstração. Suponha que X seja complementado em algum espaço dual. Pelo Lema 2.1.15, temos que $i_X(X)$ é complementado em X^{**}. Considere $q : X^{**} \to i_X(X)$, projeção sobre $i_X(X)$. Pela Observação 2.1.16, temos que para toda sequência $x_n^{***} \xrightarrow{w*} 0$ em X^{***}, $x_n^{***} \circ i_X \to 0$ uniformemente em B_X. Mostremos então que para toda sequência $x_n^* \xrightarrow{w*} 0$ em X^*, $x_n^* \to 0$ uniformemente em B_X. De fato, como i_X é um isomorfismo sobre a imagem, temos que $S = (i_X)^{-1} \circ q : X^{**} \to X$, está bem definido, e é limitado, logo S^* é limitado e consequentemente é fraco*-fraco* contínuo. Temos também que $S|_{i_X(X)} = (i_X)^{-1}$, logo se $x_n^* \xrightarrow{w*} 0$ em X^*, temos $S^* x_n^* \xrightarrow{w*} 0$ em X^{**}, e portanto $(x_n^* \circ S)(i_X(x)) \to 0$ uniformemente para $x \in B_X$. Como X possui dimensão infinita, temos pelo Teorema de Josefson-Nissenzweig que existe uma sequência $(x_n^*)_n$ em X^* tal que $x_n^* \xrightarrow{w*} 0$ e $||x_n^*|| = 1$. Com isso, para cada $n \in N$, existe $x_n \in B_X$ tal que $x_n^*(x_n) \geq 1/2$, e consequentemente $x_n^*(x) \not\to 0$ uniformemente para $x \in B_X$, contrariando o que vimos acima. ■

Corolário 2.1.18 *Se X é um espaço de Banach de dimensão infinita, então X^* não possui a propriedade de Phillips.*

Demonstração. Isso ocorre pois $i_{X^*} \circ (i_X)^* : X^{***} \to i_{X^*}(X^*)$, é projeção sobre $i_{X^*}(X^*)$, logo $i_{X^*}(X^*)$ é complementado em X^{***}, e pelo Teorema 2.1.17 segue que X^* não possui a propriedade de Phillips. ■

Porém espaços duais podem possuir a propriedade fraca de Phillips (qualquer espaço da forma $B(H)$, com H sendo um espaço de Hilbert, por exemplo). O teorema abaixo nos dá algumas condições para que tal fato não ocorra.

Teorema 2.1.19 *Seja X um espaço de Banach não-reflexivo satisfazendo as seguintes propriedades:*

(a) X possui a propriedade fraca de Phillips, e

(b) B_{X^*} é fraca sequencialmente compacta.*

Então X não é complementado em nenhum espaço dual.

Demonstração. Suponha que X seja complementado em algum espaço dual. Pelo Lema 2.1.15, temos que $i_X(X)$ é complementado em X^{**}, considere então $q : X^{**} \to i_X(X)$ projeção sobre $i_X(X)$, e $S = (i_X)^{-1} \circ q$. Temos então que $p \circ S^* = id_{X^*}$, pois para todo $x^* \in X^*$, $x \in X$ vale:

$$\begin{aligned}
(p \circ S^*(x^*))(x) &= (p(x^* \circ S))(x) \\
&= (p(x^* \circ (i_X)^{-1} \circ q))(x) \\
&= x^* \circ (i_X)^{-1} \circ q(i_X(x)) \\
&= x^*((i_X)^{-1} i_X(x)) \\
&= x^*(x).
\end{aligned}$$

Logo como X possui a propriedade fraca de Phillips, temos que id_{X^*} é fraca*-fraca sequencialmente contínua. Considere $(x_n^*)_n$ sequência em B_{X^*}. Como B_{X^*} é fraca* sequencialmente compacta, temos que $(x_n^*)_n$ possui subsequência $(x_{n_k}^*)_k$ fraca* convergente, logo $(x_{n_k}^*)_k$ é fracamente convergente e B_{X^*} é fracamente compacta, segue então que X^* é reflexivo, e portanto X é reflexivo. ■

Corolário 2.1.20 *Seja X um espaço de Banach tal que X^* é gerado por um conjunto fracamente compacto, então todo subespaço não reflexivo $Y \subseteq X^*$ que é complementado não possui a propriedade fraca de Phillips. Em particular, todo espaço dual separável que não é reflexivo não possui a propriedade fraca de Phillips.*

Demonstração. A primeira afirmação decorre imediatamente de que se X é gerado por um conjunto fracamente compacto, então B_{X^*} é fraca* sequencialmente compacta (Teorema 1.1.17).

E se X^* é separável, segue que X^* é gerado por um conjunto fracamente compacto, além disso temos que X^* é complementado em X^{***}. ■

2.2 Caracterizações da Propriedade fraca de Phillips

O objetivo desta seção é estabelecer conexões entre as propriedades fraca de Phillips e a propriedade de Grotendieck. Isso é feito explorando o fato de que um espaço de Banach X possui a propriedade fraca de Phillips se e somente se para todo operador $T : X^{**} \to c_0$ vale $\widetilde{T}$ fracamente compacto, enquanto X possui a propriedade de Grotendieck se e somente se todo operador $T : X \to c_0$ for fracamente compacto.

Lema 2.2.1 *Suponha que X^* seja fracamente sequencialmente completo. Então uma e somente uma das afirmações abaixo ocorre:*

1. *Para todo operador $T : X^{**} \to c_0$, $\widetilde{T}$ é fracamente compacto*
2. *Existe um operador $S : X^{**} \to c_0$ tal que $S(X^{**}) = \widetilde{S}(X) = c_0$*

Demonstração. Suponhamos que exista $T : X^{**} \to c_0$ tal que $\widetilde{T}$ seja sobrejetor e fracamente compacto. Pelo Teorema da Aplicação Aberta, temos que $int\left(\widetilde{T}(B_X)\right) \neq \emptyset$, e como $\widetilde{T}$ é fracamente compacto, temos que $\overline{\widetilde{T}(B_X)}^w$ é fracamente compacto. Com isso temos que existe $x \in B_{c_0}$ e $r > 0$ tal que $B_r(x) \subseteq \widetilde{T}(B_X)$ o que implica $\overline{B}_r(x) = \overline{B_r(x)}^w \subseteq \overline{\widetilde{T}(B_X)}^w$, logo $\overline{B}_r(x)$ é fracamente compacto e isso implicaria c_0 reflexivo, absurdo. Portanto os dois casos acima são exclusivos.

Suponhamos agora que $\widetilde{T}$ não seja fracamente compacto. Temos então que $\widetilde{T}^*$ também não é fracamente compacto. Portanto existe uma sequência (y_n^*) na bola unitária de $c_0^* = \ell_1$ tal que $(\widetilde{T}^* y_n^*)$ não possui subsequência fracamente convergente. Como c_0 é separável, segue que B_{ℓ_1} é fraca* sequencialmente compacta, logo existe $y^* \in l_1$ e subsequência (que

continuaremos denotando por $(y_n^*))$ tal que $y_n^* \xrightarrow{w*} y^*$, e $(\widetilde{T}^* y_n^*)$ não possui subsequência fracamente convergente. Considerando então $z_n^* = y_n^* - y^*$, temos que $z_n^* \xrightarrow{w*} 0$ e $(\widetilde{T}^* z_n^*)$ não possui subsequência fracamente convergente. Claramente vale também $\widetilde{T}^* z_n^* \xrightarrow{w*} 0$. Como X^* é fracamente sequencialmente completo, temos que $(\widetilde{T}^* z_n^*)$ não possui subsequência fracamente de Cauchy, logo pelo Teorema de Rosenthal temos que $(\widetilde{T}^* z_n^*)$ possui uma subsequência (novamente denotada por $(\widetilde{T}^* z_n^*)$) que é equivalente à base canônica de ℓ_1. Agora como $z_n^* \xrightarrow{w*} 0$, temos que $T^*(z_n^*) \xrightarrow{w*} 0$ e $(T^*(z_n^*))$ é equivalente à base de canônica de ℓ_1, pois se $(T^*(z_n^*))$ possuísse uma subsequência fracamente de Cauchy, teríamos que $(\widetilde{T}^*(z_n^*)) = ((i_X)^* T^*(z_n^*))$ também iria possuir uma subsequência fracamente de Cauchy.

Considerando $\mu_n = T^* z_n^*$, temos (μ_n) e $(p(\mu_n)) = (\widetilde{T}^* z_n^*)$ fraca* nulas e equivalentes à base de ℓ_1. Definindo então

$$\begin{aligned} S: \ X^{**} &\to c_0 \\ x^{**} &\mapsto (\mu_n(x^{**}))_{n\in\mathbb{N}} \end{aligned}$$

temos pelo Teorema de Banach-Steinhaus que S é limitado, e $\widetilde{S}$ é tal que $\widetilde{S}(x) = (p(\mu_n)(x))_{n\in\mathbb{N}}$. Como $\widetilde{S}^* e_n^* = p(\mu_n)$ e $(p(\mu_n))$ é equivalente à base de ℓ_1, temos que $\widetilde{S}^*$ é isomorfismo sobre a imagem, e portanto $\widetilde{S}$ é sobrejetor. ■

No próximo teorema adaptaremos uma série de afirmações equivalentes à propriedade de Grotendieck para obtermos afirmações equivalentes à propriedade fraca de Phillips. É interessante notarmos que tanto o enunciado quanto a demonstração da versão desse teorema para a propriedade de Grotendieck seguem imediatamente do enunciado e demonstração do teorema abaixo, substituindo X^{**} por X e $\widetilde{T}$ por T.

Teorema 2.2.2 *Seja X um espaço de Banach. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) X possui a propriedade fraca de Phillips.

(b) X^* é fracamente sequencialmente completo e não existe nenhum operador $T: X^{**} \to c_0$ tal que $\widetilde{T}(X) = c_0$

(c) X^* é fracamente sequencialmente completo, e para todo espaço de Banach não reflexivo Y que não contenha um subespaço isomorfo a ℓ_1, não existe nenhum operador $T: X^{**} \to Y$ tal que $\widetilde{T}(X) = Y$.

(d) Para todo espaço de Banach separável Y e todo operador $T: X^{**} \to Y$ temos que $\widetilde{T}$ é fracamente compacto

(e) Para todo espaço de Banach Y e todo operador $T: X^{**} \to Y$ temos que $\widetilde{T}^*$ é fraco-fraco sequencialmente contínuo*

Demonstração

(a) $\Leftrightarrow$ (b). Decorre do Lema 2.2.1 e do Teorema 2.1.8.

(b) $\Rightarrow$ (c). Suponhamos que existam um espaço de Banach não reflexivo Y, e um operador $T : X^{**} \to Y$ tal que $\widetilde{T}(X) = Y$. Como Y não é reflexivo, temos que Y^* também não é reflexivo, logo existe uma sequência (y_n^*) em B_{Y^*} tal que (y_n^*) não possui subsequência fracamente convergente. Com isso temos que $(\widetilde{T}^* y_n^*)$ não possui subsequência fracamente convergente, já que $\widetilde{T}^*$ é isomorfismo sobre a imagem, e como X^* é fracamente sequencialmente completo, temos pelo Teorema de Rosenthal que (y_n^*) possui uma subsequência (novamente denotada por (y_n^*)) tal que $(\widetilde{T}^* y_n^*)$ é equivalente a (e_n^*) base de ℓ_1. Temos também que y_n^* é equivalente à (e_n^*), e portanto $\widetilde{T}^*$ fixa uma cópia de ℓ_1. Utilizando o fato de que Y não possui um subespaço isomorfo à ℓ_1, temos pelo Teorema 1.1.22 que existe uma sequência z_n^* em B_{Y^*} tal que $\widetilde{T}(z_n^*) \xrightarrow{w*} 0$, e $(\widetilde{T} z_n^*)$ é equivalente a (e_n^*). Novamente usando o fato de $\widetilde{T}^*$ ser isomorfismo sobre a imagem, temos que (y_n^*) é equivalente a (e_n^*) e $y_n^* \xrightarrow{w*} 0$. Definindo então

$$\begin{aligned} \phi : \quad Y &\to c_0 \\ y &\mapsto (z_n^*(y))_{n \in \mathbb{N}} \end{aligned}$$

temos que ϕ é limitado, e como $\phi^* e_n^* = z_n^*$, temos que ϕ^* é isomorfismo sobre a imagem, e portanto ϕ é sobrejetor. Logo tomando $S = \phi \circ T : X^{**} \to c_0$ temos que $\widetilde{S}(X) = c_0$, contrariando a hipótese.

(a) $\Rightarrow$ (d). Seja (y_n^*) em B_{Y^*}. Como Y é separável, temos que B_{Y^*} é fraca* sequencialmente compacta, logo (y_n^*) possui uma subsequência $(y_{n_k}^*)$ fraca* convergente. Com isso, temos que $T^* y_{n_k}^*$ é fraca* convergente em X^{***}. Como X possui a propriedade fraca de Phillips, $(pT^* y_{n_k}^*) = (\widetilde{T}^* y_{n_k}^*)$ é fracamente convergente, com isso $\widetilde{T}^*$ é fracamente compacto, e consequentemente $\widetilde{T}$ é fracamente compacto.

(d) $\Rightarrow$ (a). Basta tomar $Y = c_0$.

(a) $\Rightarrow$ (e). Seja $y_n^* \xrightarrow{w*} 0$. Utilizando o fato de T^* ser limitado, temos que $T^* y_n^* \xrightarrow{w*} 0$ em X^{***}. Como X possui a propriedade fraca de Phillips, temos portanto $\widetilde{T}^* y_n^* = (i_X)^* T^* y_n^* \xrightarrow{w} 0$ em X^*.

(e) $\Rightarrow$ (a). Considere $Y = c_0$ e $T : X^{**} \to c_0$. Como $e_n^* \xrightarrow{w*} 0$ em ℓ_1, temos por hipótese $\widetilde{T}^* e_n^* \xrightarrow{w} 0$, logo $\widetilde{T}$ é fracamente compacto e X possui a propriedade fraca de Phillips. ■

Corolário 2.2.3 *Suponha que:*

(a) X possua a propriedade fraca de Phillips.

(b) Y seja complementado em Y^{**} e que B_{Y^*} com a topologia fraca seja sequencialmente compacta.*

Então todo operador $u : X \to Y$ é fracamente compacto.

Demonstração. Seja $u : X \to Y$ operador limitado, e $q : Y^{**} \to i_Y(Y)$ projeção. Considerando $S = {i_Y}^{-1} \circ q \circ u^{**} : X^{**} \to Y$ e utilizando o fato de que $u^{**} \circ i_X = i_Y \circ u$, temos $\widetilde{S} = u$, e portanto pelo item (d) do teorema acima, temos que u é fracamente compacto. ■

Como consequência do corolário acima, temos que todo operador definido em um espaço de Banach com a propriedade fraca de Phillips a valores em um espaço dual separável é fracamente compacto.

O próximo corolário nos diz que para espaços de Banach complementados em seus biduais, a propriedade fraca de Phillips é equivalente à propriedade de Grotendieck.

Corolário 2.2.4 *Suponhamos que exista um operador $T : X^{**} \to X$ tal que $\widetilde{T}(X) = X$. Então X possui a propriedade fraca de Phillips se e somente se X possui a propriedade de Grotendieck.*

Demonstração. Precisamos apenas provar a condição necessária. Pelo item (b) do teorema acima temos que X^* é fracamente sequencialmente completo, suponhamos então que exista um operador $S : X \to c_0$ sobrejetor, definindo $u = S \circ T : X^{**} \to c_0$, teríamos que $\widetilde{u} = S \circ \widetilde{T}$ também seria sobrejetor, contrariando o item (b) do teorema. Logo X possui a propriedade de Grotendieck. ■

Como generalização do corolário acima temos a seguinte proposição:

Proposição 2.2.5 *Sejam X um espaço com a propriedade fraca de Phillips e $T : X^{**} \to Y$ um operador tal que $\widetilde{T}^{**}X^{**}$ é denso em Y^{**}. Então Y possui a propriedade de Grotendieck.*

Demonstração. Seja (y_n^*) uma sequência em Y^* tal que $y_n^* \overset{w*}{\to} 0$. Pelo item (e) do Teorema 2.2.2 temos que $\widetilde{T}^* y_n^* \overset{w}{\to} 0$ em X^*. Com isso temos que para todo $x^{**} \in X^{**}$ $x^{**}(\widetilde{T}^* y_n^*) \to 0$, o que implica $\widetilde{T}^{**}(x^{**})(y_n^*) \to 0$, e portanto $y^{**}(y_n^*) \to 0$, para todo $y^{**} \in \widetilde{T}^{**}(X^{**})$. Utilizando o fato de (y_n^*) ser limitada e $\overline{\widetilde{T}^{**}(X^{**})} = Y^{**}$, temos que $y_n^* \to 0$ ■

O próximo resultado é uma adaptação para espaços com a propriedade de Phillips do teorema que afirma que todo operador definido em um espaço com a propriedade de Grotendieck a valores em um espaço de Banach é fracamente compacto ou fixa uma cópia de ℓ_1. Novamente a demonstração da versão para espaços com propriedade de Grotendieck é facilmente obtida a partir da demonstração do teorema abaixo.

Teorema 2.2.6 *Sejam X um espaço com a propriedade fraca de Phillips e $T : X^{**} \to Y$ um operador tal que $\overline{T(X^{**}} = \overline{\widetilde{T}(X)}$. Então uma e apenas uma das afirmações abaixo ocorre:*

1. *$\widetilde{T}$ é fracamente compacto*

2. $\widetilde{T}$ fixa uma cópia de ℓ_1.

Mais ainda, $\widetilde{T}$ é fracamente compacto se e somente se $\overline{\widetilde{T}(X)}$ é fracamente compacto gerado.

Demonstração. Se $\widetilde{T}$ é fracamente compacto, então $\overline{\widetilde{T}(B_X)}$ é fracamente compacto, logo $\overline{\widetilde{T}(X)} = [\overline{\widetilde{T}(B_X)}]$ é fracamente compacto gerado. Reciprocamente suponhamos que $Z = \overline{T(X^{**})} = \overline{\widetilde{T}(X)}$ seja fracamente compacto gerado, então pelo Teorema 1.1.17 temos que B_{Z^*} é fraca* sequencialmente compacta, logo pelo Teorema 2.2.2 (d) temos que $\widetilde{T}$ é fracamente compacto.

Suponhamos agora que $\widetilde{T}$ não seja fracamente compacto. Então $\widetilde{T}^*$ não é fracamente compacto e portanto existe uma sequência (y_n^*) em B_{Y^*} tal que $(\widetilde{T}^* y_n^*)$ não possui subsequência fracamente convergente. Como X^* é fracamente sequencialmente completo, temos então que $(\widetilde{T}^* y_n^*)$ não possui subsequência fracamente de Cauchy. Passsando a uma subsequência se necessário, temos pelo Teorema de Rosenthal que $(\widetilde{T}^* y_n^*)$ é equivalente a (e_n^*). Temos também que (y_n^*) é equivalente a (e_n^*). Logo $\widetilde{T}^*|_{[(y_n^*)]}$ é isomorfismo sobre a imagem e $\widetilde{T}^*$ fixa uma cópia de ℓ_1. Suponha agora que exista uma sequência (y_n^*) em B_{Y^*} tal que $(\widetilde{T}^* y_n^*)$ seja equivalente a (e_n^*) e $\widetilde{T}^* y_n^* \xrightarrow{w^*} 0$ em X^*, provemos que $T^* y_n^* \xrightarrow{w^*} 0$ em X^{***}. De fato, seja $x^{**} \in X^{**}$. Como $\overline{\widetilde{T}(X)} = \overline{T(X^{**})}$, temos que dado $\epsilon > 0$, existe $x \in X$ tal que $|Tx^{**} - \widetilde{T}x| < \epsilon/2$, logo

$$\begin{aligned}
\left|\left(T^* y_n^*\right)(x^{**})\right| &= |y_n^*(Tx^{**})| \\
&\leq |y_n^*(Tx^{**} - \widetilde{T}x)| + |y_n^*(\widetilde{T}x)| \\
&< \epsilon/2 + \left|\left(\widetilde{T}^* y_n^*\right)(x)\right|
\end{aligned}$$

Logo escolhendo n_0 tal que $|(\widetilde{T}^* y_n^*)(x)| < \epsilon/2$, para todo $n \geq n_0$, temos que $|(T^* y_n^*)(x)| < \epsilon$ para todo $n \geq n_0$, e portanto $T^* y_n^* \xrightarrow{w^*} 0$ em X^{***}. Como X possui a propriedade fraca de Phillips, segue que $pT^* y_n^* = \widetilde{T}^* y_n^* \xrightarrow{w} 0$ em X^*, contrariando o fato de $(\widetilde{T}^* y_n^*)$ ser equivalente a (e_n^*). Logo pelo Teorema 1.1.22 temos que $\widetilde{T}$ fixa uma cópia de ℓ_1. ■

Corolário 2.2.7 *Sejam X um espaço de Banach com a propriedade fraca de Phillips e Y um espaço complementado em Y^{**}. Então todo operador $u : X \to Y$ cuja imagem é densa em Y e não é fracamente compacto fixa uma cópia de ℓ_1.*

Demonstração. Seja $q : Y^{**} \to i_Y(Y)$ projeção e defina $T = q \circ u^{**}$. Como $u^{**} \circ i_X = i_Y \circ u$, temos que $\widetilde{T} = u$, e de $Y = \overline{u(X)} = \overline{\widetilde{T}(X)}$, segue que $\overline{T(X^{**})} = \overline{\widetilde{T}(X)}$, logo pelo teorema acima temos o resultado. ■

Para o próximo resultado precisaremos das seguintes definições:

Definição 2.2.8 *Seja X um espaço de Banach.*

(a) *Dizemos que X possui a propriedade de Gelfand-Phillips se todo conjunto $A \subseteq X$ tal que toda sequência fraca* nula em X^* convirja uniformemente em A for relativamente compacto.*

(b) *Dizemos que X possui a propriedade recíproca de Dunford-Pettis se para todo espaço de Banach Y todo operador $T : X \to Y$ completamente contínuo for fracamente compacto.*

Teorema 2.2.9 *Sejam X um espaço de Banach com a propriedade fraca de Phillips e a propriedade de Dunford-Pettis, e Y um espaço complementado em Y^{**} com a propriedade de Gelfand-Phillips. Então todo operador $u : X \to Y$ é completamente contínuo. Consequentemente, se X também possui a propriedade recíproca de Dunford-Pettis temos que u também é fracamente compacto.*

Demonstração. Sejam $A \subseteq X$ fracamente pré-compacto e $q : Y^{**} \to i_Y(Y)$ projeção. Definindo $T : X^{**} \to Y$, $T = (i_Y)^{-1} \circ q \circ u^{**}$, temos que $\widetilde{T} = u$. Tomando (y_n^*) em Y^* tal que $y_n^* \xrightarrow{w^*} 0$, temos que $T^* y_n^* \xrightarrow{w^*} 0$ em X^{***}. Como X possui a propriedade fraca de Phillips, temos que $i_X^* T^* y_n^* \xrightarrow{w} 0$ em X^*, e como $\widetilde{T} = u$, temos que $u^* y_n^* \xrightarrow{w} 0$ em X^*. Utilizando o fato de que X possui a propriedade de Dunford-Pettis, temos que $(u^* y_n^*) \to 0$ uniformemente em A, o que implica $y_n^* \to 0$ uniformemente em $u(A)$. Mas como Y possui a propriedade de Gelfand-Phillips, temos $u(A)$ relativamente compacto, e portanto u é completamente contínuo. ■

Como o espaço $C(K)$ com K Hausdorff compacto possui as propriedades fraca de Phillips, de Dunford Pettis ([3] pág. 113), recíproca de Dunford-Pettis, temos o seguinte resultado:

Corolário 2.2.10 *Seja Y como no teorema acima. Então todo operador u de um espaço da forma $C(K)$, com K Hausdorff compacto, a valores em Y é fracamente compacto (e completamente contínuo).* ■

Definição 2.2.11 *Sejam X um espaço de Banach, e $B_1(X)$ o subespaço de X^{**} constituído pelos w^*-limites de sequências em $i_X(X)$. Dizemos que X possui a propriedade de Dieudonné se todo operador T definido em X a valores em um espaço de Banach Y tal que $T^{**}(B_1(X)) \subseteq i_Y(Y)$ for fracamente compacto.*

Proposição 2.2.12 *Seja X um espaço de Banach com a propriedade de Dieudonné. Se (x_n^*) é uma sequência em X^* tal que para todo $m \in B_1(X)$ tivermos $m(y_n^*) \to 0$ então $y_n^* \xrightarrow{w} 0$.*

O próximo resultado pode ser utilizado para mostrar que alguns espaços de Banach possuem a propriedade de Grotendieck.

Proposição 2.2.13 *Suponhamos que X possua a propriedade fraca de Phillips e Y possua a propriedade de Dieudonné. Seja T um operador tal que $B_1(Y) \subseteq \overline{\widetilde{T}^{**}(X^{**})}$. Então Y possui a propriedade de Grotendieck.*

Demonstração. Seja $y_n^* \xrightarrow{w*} 0$ em Y^*. Pelo Teorema 2.2.2 (e) temos $\widetilde{T}^*(y_n^*) \xrightarrow{w} 0$ em X^*. Agora para $x^{**} \in X^{**}$ temos

$$\widetilde{T}^{**}(x^{**})(y_n^*) = x^{**}\left(\widetilde{T}^*(y_n^*)\right) \to 0.$$

Utilizando o fato de $B_1(Y) \subseteq \overline{\widetilde{T}^{**}(X^{**})}$, temos que $m(\widetilde{T}^*(y_n^*)) \to 0$ para todo $m \in B_1(Y)$, logo pela Proposição acima temos que $y_n^* \xrightarrow{w} 0$ e Y possui a propriedade de Grotendieck. ■

O último resultado utiliza um diagrama para concluir que um determinado espaço não é complementado em seu bidual.

Proposição 2.2.14 *Sejam X, Y e Z espaços de Banach tais que*

(a) X seja não-reflexivo e possua a propriedade fraca de Phillips

(b) $Z \subseteq Y$ seja subespaço fechado com (B_Z, fraca) sequencialmente compacta, e*

(c) Exista um isomorfismo $u : X \to Z$ que se estenda a um operador $S : X^{**} \to Y$.

Então Z não é complementado em Y.

Demonstração. Suponha que exista uma projeção $q : Y \to Z$. Definindo $T = q \circ S$, temos que $\widetilde{T} = q \circ S \circ i_X = q \circ u = u$. Utilizando o Teorema 2.2.2 (e) e o fato de (B_Z, fraca*) ser sequencialmente compacta, temos que $\widetilde{T}^*$, é fracamente compacto, logo o mesmo ocorre com u. Mas como u é um isomorfismo, deveríamos ter X reflexivo, contrariando assim uma das hipóteses. ■

2.3 Problemas em aberto

Terminamos nosso trabalho listando alguns problemas em aberto relacionados com as propriedades de Phillips.

Problema 1. Existe um espaço de Banach X tal que X^* possui a propriedade de Schur mas X não possui a propriedade de Phillips ?

Problema 2. Existe um espaço de Banach X tal que X^* é fracamente sequencialmente completo mas X não possui a propriedade fraca de Phillips ?

Problema 3. As caracterizações da propriedade fraca de Phillips dadas no Teorema 2.2.2 estão relacionadas com o bidual do espaço. Será que existe uma caracterização da propriedade que envolva apenas o espaço e seu dual?

Problema 4. Será que o espaço $K(X)$ dos operadores compactos em um espaço reflexivo X possui a propriedade fraca de Phillips?

Problema 5. Não sabemos se o fato de um espaço de Banach X possuir a propriedade fraca de Phillips implica ou é implicado por X^* possuir a propriedade (V^*).

Problema 6. Sejam X um espaço de Banach com a propriedade fraca de Phillips e K um conjunto Hausdorff compacto. Não sabemos se o espaço $C(K, X)$ das funções contínuas de K em X munido com a norma do supremo possui a propriedade fraca de Phillips.

Referências Bibliográficas

[1] F. Bombal, *Sobre algumas propriedades de espacios de Banach*, Revista de la Real Academia de Ciencias Exatas, Fisicas y Naturales de Madrid, **84** (1990), 83-116.

[2] J. Bourgain e F. Delbaen, *A class of special $\mathcal{L}_\infty$ spaces*, Acta Math, **145** (1981), 155-176.

[3] J. Diestel, *Sequences and series in Banach spaces*, Grad. Texts in Math. 92, Springer, 1984.

[4] ——, *A survey of results related to the Dunford-Pettis property*, Contemp. Math. **2**, Amer. Math. Soc., 1980, 15-60.

[5] N. Dunford e J. Schwartz, *Linear Operators*, New York Interscience, 1957 Vol. 1.

[6] E. Galego, *Alguns aspectos de geometria de espaços de Banach através de $c_0(\mathbb{N})$*, 43° Seminário Brasileiro de Análise, IME-USP, 1996.

[7] W. Freeman e A. Ülger, *The Phillips properties*, Proc. Amer. Math. Soc. **128** (2000), 2137-2145.

[8] H. Knaust e E. Odell, *On c_0-sequences in Banach spaces*, Israel J. Math. **67** (1989), 153-169

[9] R. Megginson, *An introduction to Banach Space Theory*, Grad. Texts in Math. 183, Springer, 1998.

[10] A. Pelczynski, *Banach spaces on which every unconditionally converging operator is weakly compact*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. math. astr. et phys. **10** (1962), 641-648.

[11] A. Pelczynski e Z. Semadeni, *Spaces of continuous functions III*, Studia Math. **18** (1959), 213-222.

[12] H. Pfitzner, *Weak compactness in the dual of a C^*-algebra is determined commutatively*, Math. Ann. **298** (1994), 349-371.

[13] H. Rosenthal, *A characterization of Banach spaces containing c_0*, J. Amer. Math. Soc. **7** (1994), 349-371.

[14] A. Ülger, *The weak Phillips property*, Colloquium Mathematicum **87** (2001), 147-158.