SOBRE CLASSIFICAÇÃO HOLOMORFA DE ESPAÇOS DE GERMES HOLOMORFOS

Alfredo Jorge Aragona Vallejo

TESE APRESENTADA AO INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO, PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM MATEMÁTICA.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Leopoldo Nachbin

Durante parte do programa de doutoramento, o autor recebeu apoio financeiro da FINEP - Convênio IF-211.

Abril de 1977.

SÃO PAULO

ÍNDICE

ABSTRACT

Let K be a compact set in a complex metrizable locally convex space E and F a complex Banach space. In this work we are concerned with results furnishing information about the behaviour of the space of holomorphic germs $\mathcal{H}(K;F)$ endowed with the Nachbin topology $\mathcal{T}_\omega$, with the relation to following properties: holomorphically bornological (hbo), holomorphically barreled (hba), holomorphically infrabarreled (hib) and holomorphically Mackey (hM), introduced in [N1], [N2] and [BMN]. In §§ 1, 2 and 3 the treatement is geral for arbitrary locally convex spaces.

In §1 we define the following properties: polinomially bornological, polinomially barreled, polinomially infrabarreled and polinomially Mackey for an arbitrary locally convex space. The study of the relations between these properties and the hbo, hba, hib and hM properties leads up naturally to the concepts of D-holomorphy and D^*-holomorphy.

In §2, we prove that for a polinomially bornological space E, property hbo is equivalent to the completeness of $(\mathcal{H}(U;F);\mathcal{T}_0)$ for all non void open subset $U \subset E$ and all complete Hansdorff locally convex space F, where $\mathcal{T}_0$ is the topology of uniform

convergence on compact subsets of U.

The aim of §3 is the comparison of Montel properties introduced in [M] with properties hbo, hba and hib.

In §4, we introduce the definition of G-spaces which is a particular kind of locally convex space that embodies an extensive class of $\mathcal{H}(K;F)$ spaces. We prove that every G-space is polinomially bornological and polinomially barreled. The main result of this § (Th. 4.6.), establishes that in a G-space E, properties hbo, hba, hib, completeness of $(\mathcal{H}(U;F);\mathcal{T}_o)$ for all non void open subset $U \subset E$ and all complete Hansdorff locally convex space F, and other properties, are equivalent.

We conclude this work, in §5, with a collection of results concerning some particular cases.

INTRODUÇÃO

Seja K uma parte compacta de um espaço localmente convexo metrizável complexo E e F um espaço de Banach complexo. O estudo do espaço de germes holomorfos $\mathcal{H}(K;F)$ munido da topologia $\mathcal{T}_\omega$ de Nachbin foi abordado por vários autores, por Chae [Ch] quando E é um espaço de Banach, por Mujica [Mu] e Avilés [A-Mu] no caso em que E é um espaço localmente convexo metrizável satisfazendo certas condições; também por Soragi [S] e Wanderley [W]. O ponto de vista adotado nestes trabalhos é, em certa forma, o da "classificação linear", isto é, são obtidos resultados que dizem respeito ao comportamento dos espaços $\mathcal{H}(K;F)$ em relação às propriedades: bornológico, tonelado, completo, (DF) metrizável, Montel, Schwartz, nuclear, etc. Estes resultados são aplicados ao estudo das partes limitadas e relativamente compactas destes espaços. O presente trabalho espera ser uma contribuição ao estudo da "classificação holomorfa" dos espaços $\mathcal{H}(K;F)$, isto é, procurei obter resultados dando informação sobre o comportamento destes espaços em relação às propriedades: holomorficamente bornológico, holomorficamente tonelado, holomorficamente infra-tonelado e holomorficamente de Mackey, introduzidos em [N1], [N2] e [BMN]. O §0 com que se inicia o trabalho, é uma compilação das notações, convenções e terminologia que utilizarei nos §§ seguintes. No §1 introduzo os espaços polinomialmente bornológicos, polinomialmente tonelados, polinomialmente infra-tonelados e polinomialmente de Mackey que são intermediários entre os espaços holomorficamente bornológicos, holomorficamente tonelados, holomorficamente infra-tonelados e holomorficamente de Mackey por um lado e os espaços bornológicos, tonelados, infra-tonelados e de Mackey por outro lado, respectivamente.

Além disso, defino as aplicações D-holomorfas, D^*-holomorfas e hipoholomorfas. O interesse das noções "polinomiais" se apoia nos dois fatos seguintes. Por um lado (como é demonstrado no §4), os espaços $\mathcal{H}(K;F)$ possuem estas propriedades. De outro lado — como consegui reconstituir as propriedades "holomorfas" a partir das propriedades "polinomiais" correspondentes com a ajuda das noções de D-holomorfia e D^*-holomorfia — posso expressar cada uma das noções "holomorficamente bornológico", "holomorficamente tonelado" e "holomorficamente infra-tonelado" como reunião de propriedades mais simples, o que aparentemente, deveria simplificar a tarefa da classificação holomorfa dos espaços $\mathcal{H}(K;F)$. Este § acaba com a definição dos espaços holomorficamente semi-bornológicos e com um exemplo que mostra a independência recíproca entre algumas das noções definidas.

No §2, depois de alguns resultados gerais, provo que um espaço polinomialmente bornológico E é holomorficamente bornológico se e só se $(\mathcal{H}(U;F);\mathcal{T}_o)$ é completo para cada aberto equilibrado $U \subset E$ e para cada espaço localmente convexo separado completo F. Combinando este resultado com um outro do §1, obtenho o principal resultado deste § (TEOR. 2.6).

O §3 foi sugerido pela leitura de um trabalho de Matos [M], no qual são introduzidas as propriedades de Montel e se demonstra que a propriedade "holomorficamente tonelado" (resp. "holomorficamente infra-tonelado") implica a propriedade de Montel (resp. infra-Montel). O estudo da validade das recíprocas destas proposições me conduziram à definição da propriedade de Ascoli. No fim deste §, repetindo um argumento usado em dois resultados anteriores, provo que a propriedade de Montel (resp.infra-Montel) implica a propriedade (D^*) (resp. (D)), o que me permite ligar, para espaços com propriedades polinomialmente significantes, as propriedades de Montel e infra-Montel com as propriedades "holomorficamente bornológico","holomorficamente tonelado" e "holomorficamente infra-tonelado".

Nos §§ 1, 2 e 3 os resultados são apresentados para espaços localmente convexos gerais, isto é, não é demonstrado nenhum resultado sobre os espaços $\mathcal{H}(K;F)$.

É só no §4 que entro no problema da classificação holomorfa dos espaços $\mathcal{H}(K;F)$. Neste §, a fim de evitar as notações complicadas próprias dos espaços de germes, introduzo a noção de G-espaço que é um tipo de espaço localmente convexo que possui as principais propriedades estruturais dos espaços de germes holomorfos estudados habitualmente. Demonstro que todo G-espaço é polinomialmente bornológico e polinomialmente tonelado. Demonstro também que toda aplicação D^*-holomorfa sobre um G-espaço é D-holomorfa. Estes três resultados, juntos a resultados dos §§ 1, 2 e 3, me permitem provar o principal resultado deste § (TEOR. 4.6.) segundo o qual, num G-espaço as propriedades "holomorficamente bornológico", "holomorficamente tonelado", "holomorficamente infra-tonelado", (D), (D*), "Montel", "infra-Montel" e muitas outras, são equivalentes. O §4 acaba com resultado caracterizando os G-espaços que são espaços de Silva e os G-espaços não metrizáveis.

Finalmente, o §5 é uma miscelânea de resultados diversos obtidos na tentativa de achar uma condição necessária e suficiente, em termos da teoria dos espaços localmente convexos, para que um G-espaço seja holomorficamente bornológico. Este problema não parece fácil de resolver, o resultado mais próximo que obtive nesta direção foi a PROP. 5.3. (e sua recíproca parcial, a PROP. 5.4.), na qual é interessante observar a forma em que intervém o conceito de D-holomorfia.

Devo algumas palavras de reconhecimento às muitas pessoas que tornaram possível a realização deste trabalho. Em especial, agradeço aos professores

Drs. Chaim S. Hönig, Domingos Pisanelli e Waldyr M. O liva pelo seu interesse e apoio em vários estágios deste trabalho;

Dr. Mario Carvalho de Matos pelos ensinamentos, por ter permitido expor parte deste trabalho no seu seminário de Holomorfia em Dimensão Infinita, pela sua boa vontade e valiosas sugestões;

Dr. Jorge Mujica pela sua participação desprendida na discussão de várias partes deste trabalho. Em particular é dele a idéia da prova de que todo G-espaço é polinomialmente bornológico;

Dr. Leopoldo Nachbin, o meu orientador, pelos ensinamentos, por haver proposto as questões estudadas, pelo estímulo, atenção e apoio constante, enfim, pela sua orientação que não me faltou nem mesmo nos períodos em que ele esteve no exterior.

Quero agradecer também às duas instituições: ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação da Universidade de Campinas onde realizei parte dos estudos preparatórios deste trabalho e à Financiadora de Estudos e Projetos (FINEP) pela ajuda financeira parcial por mim recebida.

O excelente trabalho datilográfico, muito além da estrita correção profissional, é da Srta. Joana D'Arc Silva.

São Paulo, abril de 1977.

Alfredo Jorge Aragona Vallejo

§0 - PRELIMINARES

De modo geral adotaremos as notações de [BMN] e [N1] e a menos de advertência em contração usaremos as seguintes convenções: E e F indicam dois espaços localmente convexos complexos e U um aberto não vazio de E. O conjunto de todas as semi-normas contínuas sobre E é indicado por $SC(E)$; se $\alpha \in SC(E)$, r é número real positivo e $\xi \in E$ indicamos com $B_{\alpha,r}(\xi)$ (resp. $\bar{B}_{\alpha,r}(\xi)$) a α-bola aberta (resp. fechada) de centro ξ e raio r em E. Denotamos por E_α o espaço vetorial E semi-normado por $\alpha \in SC(E)$, por $E/_\alpha$ o espaço normado associado a E_α e por $\dot{\alpha}$ a norma sobre $E/_\alpha$.

Se I é um conjunto e F é um espaço semi-normado, indicamos com $\ell^\infty(I;F)$ o espaço semi-normado de todas as aplicações limitadas de I em F.

Indicamos com $\mathcal{H}(U;F)$ o espaço vetorial de todas as aplicações holomorfas de U em F e com $H(U;F)$ o espaço $\mathcal{H}(U;\hat{F}) \cap F^U$, onde $\hat{F}$ indica um completado de F.

Diz-se que uma aplicação $f:U \longrightarrow F$ é algebricamente holomorfa se a restrição $f|U \cap S$ é holomorfa para cada subespaço S de E de dimensão finita intersectando U, onde S está muni do de sua topologia natural. Indicamos com $\mathcal{H}_a(U;F)$ o espaço vetorial de todas as aplicações algebricamente holomorfas de U em F; denotamos por $\mathcal{H}_c(U;F)$ o subespaço vetorial de $\mathcal{H}_a(U;F)$ formado pelas aplicações limitadas sobre as partes compactas de U e indicamos com $H_c(U;F)$ o espaço vetorial $\mathcal{H}_c(U;\hat{F}) \cap F^U$. Denotamos com $\mathcal{H}_h(U;F)$ o subespaço vetorial de $\mathcal{H}_c(U;F)$ formado pelas aplicações hipoholomorfas, isto é, as aplicações algebricamente holomorfas de U em F que são contínuas sobre as partes compactas de U.

Se $m \in \mathbb{N}$, denotamos com $\mathcal{P}_a(^mE;F)$ o espaço vetorial dos polinômios m-homogêneos de E em F. Indicamos com $\mathcal{P}_c(^mE;F)$ o subespaço vetorial de $\mathcal{P}_a(^mE;F)$ formado pelos polinômios que são limitados sobre as partes compactas (ou equivalentemente, sobre as partes limitadas) de E. Denotamos por $\mathcal{P}_h(^mE;F)$ o subespaço vetorial de $\mathcal{P}_c(^mE;F)$ formado pelos polinômios hipoholomorfos, isto é, os polinômios m-homogêneos de E em F que são contínuos sobre as partes compactas de E. Indicamos com $\mathcal{P}(^mE;F)$ o espaço vetorial dos polinômios m-homogêneos contínuos de E em F.

Se $m \in \mathbb{N}$, a notação $\mathcal{L}_{as}(^mE;F)$ indica o espaço vetorial das aplicações m-lineares simétricas de E em F e denotamos com $\mathcal{L}_s(^mE;F)$ o subespaço vetorial de $\mathcal{L}_{as}(^mE;F)$ formado pelas aplicações m-lineares simétricas contínuas de E em F.

Se $f \in \mathcal{H}(U;F)$, usamos as notações habituais para os operadores diferenciais definidos a partir dos coeficientes da série de Taylor de f num ponto de U:

$$\hat{d}^m f \in \mathcal{H}(U;\mathcal{P}(^mE;F)) \quad \text{e} \quad d^m f \in \mathcal{H}(U;\mathcal{L}_s(^mE;F) \quad (m \in \mathbb{N}).$$

Quando $f \in \mathcal{H}_a(U;F)$, usamos a notação $\hat{\partial}^m f$ (resp. $\partial^m f$) em vez de $\hat{d}^m f$ (resp. $d^m f$).

Dado um espaço $\mathcal{E}$ de aplicações de U em F limitadas sobre as partes compactas (resp. compactas de dimensão finita) de U, indicamos com $\mathcal{T}_o$ (resp. $\mathcal{T}_{of}$) a topologia sobre $\mathcal{E}$ da convergência uniforme sobre as partes compactas (resp. compactas de dimensão finita) de U. Se $\beta \in SC(F)$ e K é um compacto (resp. compacto de dimensão finita) de U, a semi-norma $\mathcal{T}_o$-contínua (resp. $\mathcal{T}_{of}$-contínua) sobre $\mathcal{E}$ definida por β e K é indicada por $\|\cdot\|_{\beta,K}$, isto é, para todo $f \in \mathcal{E}$:

$$\|f\|_{\beta,K} = \sup \{\beta[f(x)] | x \in K\}.$$

Uma aplicação $f: U \to F$ é amplamente limitada se $\beta \circ f$ é localmente limitada para cada $\beta \in SC(F)$. De modo geral, um conjunto X de aplicações de U em F é amplamente limitado se o conjunto $\beta \circ X$ é localmente limitado para cada $\beta \in SC(F)$. Indicamos com $\mathcal{AB}(U;F)$ o conjunto de todas as partes amplamente limitadas de F^U.

Quando $F = \mathbb{C}$, o excluímos da notação para espaços de funções, assim por exemplo, escrevemos $\mathcal{H}(U)$ em vez de $\mathcal{H}(U;\mathbb{C})$; $\mathcal{P}(^mE)$ em vez de $\mathcal{P}(^mE;\mathbb{C})$, etc.

A envoltoria absolutamente convexa fechada de um subconjunto X de E é indicada pela notação EACF(X).

Um espaço localmente convexo E é dito holomorficamente bornológico se, para cada U e para cada F, tivermos $\mathcal{H}(U;F) = \mathcal{H}_c(U;F)$.

Um espaço localmente convexo E é dito holomorficamente tonelado (resp. holomorficamente infra-tonelado) se, para cada U e para cada F, toda parte $X \subset \mathcal{H}(U;F)$ é amplamente limitada se (e sempre só se) X é uma parte $\mathcal{T}_{of}$-limitada (resp. $\mathcal{T}_0$-limitada) de $\mathcal{H}(U;F)$.

Um espaço localmente convexo E é dito holomorficamente de Mackey se, para cada U e para cada F, toda aplicação $f:U \to F$ pertence a $H(U;F)$ se (e sempre só se) $\psi \circ f \in \mathcal{H}(U)$ para cada $\psi \in F'$.

Usamos as seguintes abreviaturas para propriedades dos espaços localmente convexos: B = Baire; S = Silva; sm = semi-metrizável; hba = holomorficamente tonelado; hbo = holomorficamente bornológico; hib = holomorficamente infra-tonelado; hM = holomorficamente de Mackey. Temos as seguintes implicações entre estas propriedades, que serão usadas sem advertência prévia (cfr. [BMN]):

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{B} \arrow[dr, Rightarrow] & & & \\
& \mathrm{hba} \arrow[dr, Rightarrow] & & \\
\mathrm{S} \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & \mathrm{hib} \arrow[r, Rightarrow] & \mathrm{hM}. \\
& \mathrm{hbo} \arrow[ur, Rightarrow] & & \\
\mathrm{sm} \arrow[ur, Rightarrow] & & &
\end{tikzcd}$$

§1 - CLASSIFICAÇÃO POLINOMIAL DE ESPAÇOS LOCALMENTE CONVEXOS. APLICAÇÕES D-HOLOMORFAS E D^*-HOLOMORFAS.

DEFINIÇÃO 1.1. Uma aplicação $f \in \mathcal{H}_c(U;F)$ é dita D-holomorfa se $\hat{\partial}^m f(\xi) \in \mathcal{P}(^m E;F)$ para cada $m \in \mathbb{N}$ e para cada $\xi \in U$. Indicamos com $\mathcal{H}_D(U;F)$ o espaço vetorial de todas as aplicações D-holomorfas de U em F. Diz-se que um espaço localmente convexo E possui a propriedade (D) se para cada U e para cada F, temos

$$\mathcal{H}(U;F) = \mathcal{H}_D(U;F).$$

Usaremos a abreviatura: D = propriedade (D).

DEFINIÇÃO 1.2. Diz-se que um espaço localmente convexo E é hipoholomorfo se para cada U e para cada F, temos

$$\mathcal{H}(U;F) = \mathcal{H}_h(U;F).$$

Diz-se que E é polinomialmente hipoholomorfo se para cada $m \in \mathbb{N}$ e para cada F, temos

$$\mathcal{P}(^m E;F) = \mathcal{P}_h(^m E;F).$$

Usaremos as abreviaturas: h = hipoholomorfo; ph = polinomialmente hipoholomorfo.

PROPOSIÇÃO 1.3. *Para cada* U *e para cada* F *temos*

$$\mathcal{H}(U;F) \subset \mathcal{H}_D(U;F) \subset \mathcal{H}_h(U;F) \subset \mathcal{H}_c(U;F).$$

Em conseqüência temos as seguintes implicações entre as propriedades hbo, h *e* D*:*

$$\text{hbo} \Longrightarrow \text{h} \Longrightarrow \text{D}.$$

Prova

É suficiente verificar que $\mathcal{H}_D(U;F) \subset \mathcal{H}_h(U;F)$. Seja $f \in \mathcal{H}_D(U;F)$, K um compacto de U, $\xi \in K$ e mostraremos que $f|K$ é contínua em ξ. Suponhamos F separado. Fixado $\rho > 1$, existe $\alpha \in SC(E)$ tal que $V = B_{\alpha,1/\rho}(\xi) \subset U$, $(1-\lambda)\xi + \lambda x \in U$ para cada $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\lambda| \leq \rho$ e para cada $x \in V$. Se $\beta \in SC(F)$, pela fórmula do resto de Taylor, para cada $x \in V \cap K$ e para cada $m \in \mathbb{N}$ temos

$$\beta[f(x) - f(\xi)] \leq \beta\left[\sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j!}\, \hat{\partial}^j f(\xi)(x-\xi)\right] + \frac{M}{\rho^m(\rho-1)}$$

onde

$$M = \sup\{\beta(f[(1-\lambda)\xi + \lambda x]) \,|\, x \in K \quad \text{e} \quad |\lambda| = \rho\},$$

o que prova o resultado neste caso pois $\rho > 1$. Suponhamos agora F arbitrário, seja $\tilde{F}$ o espaço separado associado a F e seja $q: F \longrightarrow \tilde{F}$ a aplicação quociente. Pelo caso anterior temos $\mathcal{H}_D(U;\tilde{F}) \subset \mathcal{H}_h(U;\tilde{F})$. Dada $f \in \mathcal{H}_D(U;F)$ arbitrária é claro que $q \circ f \in \mathcal{H}_D(U;\tilde{F})$ e em conseqüência $q \circ f \in \mathcal{H}_h(U;\tilde{F})$, o que acarreta $f \in \mathcal{H}_h(U;F)$. Com efeito, fixados um compacto $K \subset U$, $\xi \in K$ e uma vizinhança fechada V de $f(\xi)$ em F, $V_0 = q(V)$ é uma vizinhança de $q(f(\xi))$ e então existe uma vizinhança W de ξ em K tal que $(q \circ f)(W) \subset V_0$, donde $f(W) \subset \bar{V} = V$. $\square$

OBSERVAÇÃO. Todo k-espaço localmente convexo complexo é hipoholomorfo e portanto possui a propriedade (D).

PROPOSIÇÃO 1.4. *Se* E *é um espaço hipoholomorfo, então* $(H(U;F);\mathcal{T}_o)$ *é completo, se* F *é completo.*

Prova

Se F é completo, o espaço $(H_c(U;F);\mathcal{T}_o)$ é completo e $H_h(U;F)$ é fechado em $(H_c(U;F);\mathcal{T}_o)$, logo $(H_h(U;F);\mathcal{T}_o)$ é completo. Como E é hipoholomorfo, $H(U;F) = H_h(U;F)$. $\square$

DEFINIÇÃO 1.5. Um espaço localmente convexo E é dito polinomialmente bornológico se para cada $m \in \mathbb{N}$ e para cada F, temos

$$P(^mE;F) = P_c(^mE;F).$$

Usaremos a abreviatura: pbo = polinomialmente bornológico.

PROPOSIÇÃO 1.6. *Para um espaço localmente convexo* E *são equivalentes as asserções seguintes:*

(i) E *é holomorficamente bornológico.*

(ii) E *é hipoholomorfo e polinomialmente bornológico.*

(iii) E *possui a propriedade* (D) *e é polinomialmente bornológico.*

Prova

Todo espaço holomorficamente bornológico é polinomialmente bornológico e então, pela PROP. 1.3., resulta que (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii). Vamos mostrar que (iii) $\Longrightarrow$ (i). Sejam dados U, F separado e $f \in \mathcal{H}_c(U;F)$. Se K é um compacto de E, $\xi \in U$ e $m \in \mathbb{N}$, existe $\rho > 0$ tal que $\xi + \lambda x \in U$ para cada $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\lambda| \leq \rho$ e para cada $x \in K$. Em conseqüência, pela fórmula integral de Cauchy,

$$\hat{\partial}^m f(\xi)(K) \subset \frac{m!}{\rho^m} \text{EACF}\{f(\xi + \lambda x) \,|\, x \in K \text{ e } |\lambda| = \rho\}.$$

Como E é polinomialmente bornológico, a relação acima prova que

$$\hat{\partial}^m f(\xi) \in \mathcal{P}(^m E;F)$$

para cada $m \in \mathbb{N}$ e para cada $\xi \in U$, donde resulta que $f \in \mathcal{H}(U;F)$ pois E possui a propriedade (D). O caso F arbitrário se reduz imediatamente ao caso F separado como na PROP. 1.3. □

PROPOSIÇÃO 1.7. *Para um espaço localmente convexo* E *as asserções seguintes são equivalentes:*

(i) E *é hipoholomorfo.*

(ii) E *possui a propriedade* (D) *e é polinomialmente hipoholomorfo.*

Prova

A implicação (i) $\Longrightarrow$ (ii) segue da PROP. 1.3. Mostremos que (ii) $\Longrightarrow$ (i). Dados U, F separado, $f \in \mathcal{H}_h(U;F)$, se $\xi \in U$, $m \in \mathbb{N}$ e K é um compacto de E, existe $\rho>0$ tal que $\xi + \lambda x \in U$ para cada $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| \leq \rho$ e para cada $x \in K$. Em conseqüência, pela fórmula integral de Cauchy, se $\beta \in SC(F)$ e $\eta \in K$, pa ra cada $x \in K$, temos

$$\beta[\hat{\partial}^m f(\xi)(x) - \hat{\partial}^m f(\xi)(\eta)] \leq \frac{m!}{\rho^m} \sup\{\beta[f(\xi+\lambda x) - f(\xi+\lambda\eta)] \mid |\lambda| = \rho\}.$$

Como o conjunto

$$L = \{\xi + \lambda x \mid x \in K \quad e \quad |\lambda| = \rho\}$$

é uma parte compacta de U, resulta que $f|L$ é uniformemente contínua, portanto dado $\varepsilon > 0$ existe $\alpha \in SC(E)$ tal que

$$y, z \in L \quad e \quad \alpha(y-z) \leq 1 \implies \beta[f(y) - f(z)] \leq \frac{\varepsilon\rho^m}{m!}$$

Em conseqüência, para cada $x \in B_{\alpha,1/\rho}(\eta) \cap K$ temos

$$\beta[\hat{\partial}^m f(\xi)(x) - \hat{\partial}^m f(\xi)(\eta)] \leq \varepsilon$$

o que prova, levando em consideração o fato de E ser polinomialmente hipoholomorfo, que $\hat{\partial}^m f(\xi) \in \mathcal{P}(^mE;F)$ para cada $m \in \mathbb{N}$ e para cada $\xi \in U$. Como E possui a propriedade (D) resulta então que $f \in \mathcal{H}(U;F)$. O caso F arbitrário se reduz imediatamente ao caso F separado. $\square$

DEFINIÇÃO 1.8. Um espaço localmente convexo E é dito <u>polinomialmente infra-tonelado</u> se para cada $m \in \mathbb{N}$ e para cada F, todo conjunto $\mathcal{X} \subset \mathcal{P}(^mE;F)$ que é limitado sobre os compactos de E é amplamente limitado (ou equivalentemente, eqüicontínuo).

Usaremos a abreviatura: pib = polinomialmente infra-tonelado.

LEMA 1.9. *Seja* E *um espaço polinomialmente infra-tonelado e seja* $\mathcal{X} \subset \mathcal{H}(U;F)$ *um conjunto limitado sobre os compactos de* U. *En-*

tão, para cada $\xi \in U$ *e para cada* $m \in \mathbb{N}$, *o conjunto*

$$X_{m,\xi} = \{\hat{d}^m f(\xi) \mid f \in X\} \subset P(^mE;F)$$

é amplamente limitado.

Prova

É suficiente verificar que $X_{m,\xi}$ é limitado sobre os compactos de E. Seja K um compacto de E, então, existe $\rho > 0$ tal que $\xi + \lambda x \in U$ para cada $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\lambda| \leq \rho$ e para cada $x \in K$ e, em conseqüência, pela fórmula integral de Cauchy, para cada $f \in X$, temos

$$\hat{d}^m f(\xi)(K) \subset \frac{m!}{\rho^m} B_f$$

onde

$$B_f = \mathrm{EACF}\{f(\xi + \lambda x) \mid |\lambda| = \rho \quad \text{e} \quad x \in K\},$$

donde

$$\bigcup_{f \in X} \hat{d}^m f(\xi)(K) \subset \frac{m!}{\rho^m} \bigcup_{f \in X} B_f.$$

Como X é limitado sobre o compacto

$$\{\xi + \lambda x \mid |\lambda| = \rho \quad \text{e} \quad x \in K\},$$

o conjunto

$$\mathrm{X} = \mathrm{EACF}\{f(\xi + \lambda x) \mid |\lambda| = \rho, \quad x \in K \quad \text{e} \quad f \in X\}$$

é uma parte limitada de F e, então, a relação

$$\bigcup_{f \in X} B_f \subset \mathrm{X}$$

acarreta

$$\bigcup_{f\in X} \hat{d}^m f(\xi)(K) = \{\hat{d}^m f(\xi)\cdot x \mid x \in K \quad e \quad f \in X\} \subset \frac{m!}{\rho^m} X. \qquad \square$$

PROPOSIÇÃO 1.10. *Para um espaço localmente convexo* E *são equivalentes as asserções seguintes:*

(i) E *é holomorficamente infra-tonelado.*

(ii) E *é polinomialmente infra-tonelado e possui a propriedade* (D).

Prova

(i) $\Longrightarrow$ (ii). É suficiente verificar que E possui a propriedade (D). Dados U, F separado, $f \in \mathcal{H}_D(U;F)$ e $\xi \in U$ vamos mostrar que existe uma vizinhança V de ξ em U tal que $f|V$ é contínua. Fixado $\rho > 1$, existe $\alpha \in SC(E)$ tal que $V = B_{\alpha,1/\rho}(\xi) \subset U$, $(1-\lambda)\xi + \lambda x \in U$ para cada $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\lambda| \leq \rho$ e para cada $x \in V$ e

$$f(x) - \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j!} \hat{\partial}^j f(\xi)(x-\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=\rho} \frac{f[(1-\lambda)\xi + \lambda x]}{\lambda^{m+1}(\lambda-1)} d\lambda$$

para todo $x \in V$ e todo $m \in \mathbb{N}$. Resulta, então, que o conjunto $X = \{f_m | m \in \mathbb{N}\}$, onde para cada $m \in \mathbb{N}$ pomos

$$f_m : x \in V \longmapsto \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j!} \hat{\partial}^j f(\xi)(x-\xi) \in F,$$

é uma parte limitada de $(\mathcal{H}(V;F);\mathcal{T}_o)$. Como E é holomorficamente infra-tonelado, resulta que X é eqüicontínuo. De outro lado, como $\lim_{m\to\infty} f_m(x) = f(x)$ para cada $x \in V$, o conjunto $X(x) = \{f_m(x) | m \in \mathbb{N}\}$

é relativamente compacto em F para cada $x \in V$, donde, pelo teorema de Ascoli, segue que X é uma parte relativamente compacta de $(C(V;F);\mathcal{T}_o)$. Em conseqüência, a imagem do filtro de Fréchet pela aplicação $m \longmapsto f_m$ é um filtro sobre X que possui um ponto aderente $g \in C(V;F)$ o que implica que

$$\beta[f(x)-g(x)] = 0 \quad \text{para todo} \quad x \in V \quad \text{e para toda} \quad \beta \in SC(F).$$

Como F é separado, resulta $f|V = g$, donde $f \in \mathcal{H}(U;F)$. O caso F arbitrário segue do caso F separado como na PROP. 1.6.

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Dada uma parte limitada X de $(\mathcal{H}(U);\mathcal{T}_o)$, mostremos que X é localmente limitada. Consideremos a aplicação associada a X,

$$f_X : x \in U \longrightarrow (g(x))_{g \in X} \in \ell^\infty(X),$$

é conhecido que

$$f_X \in \mathcal{H}_c(U;\ell^\infty(X)).$$

Como E é polinomialmente infra-tonelado, o LEMA 1.9. acarreta que $\hat{\partial}^m f_X(\xi)$ é localmente limitado e, portanto, contínuo para cada $\xi \in U$ e para cada $m \in \mathbb{N}$, o que prova que

$$f_X \in \mathcal{H}_D(U;\ell^\infty(X)),$$

e, em conseqüência,

$$f_X \in \mathcal{H}(U;\ell^\infty(X)),$$

pois E possui a propriedade (D). Resulta que f_X é localmente limitada, isto é, X é localmente limitada. □

COROLÁRIO 1.11. *Para um espaço polinomialmente bornológico* E *as condições seguintes são equivalentes:*

(i) E *é holomorficamente bornológico.*

(ii) E *é holomorficamente infra-tonelado.*

(iii) E *é hipoholomorfo.*

(iv) E *possui a propriedade* (D).

Prova

As equivalências (i) $\Longleftrightarrow$ (iii) $\Longleftrightarrow$ (iv) resultam da PROP. 1.6., a implicação (ii) $\Longrightarrow$ (iv) segue da PROP. 1.10. e é conhecido que (i) $\Longrightarrow$ (ii). □

DEFINIÇÃO 1.12. Um espaço localmente convexo E é dito polinomialmente de Mackey se, para cada $m \in \mathbb{N}$ e para cada F, as relações $P \in \mathcal{P}_a(^mE;F)$ e $\psi \circ P \in \mathcal{P}(^mE)$ e para cada $\psi \in F'$, implicam $P \in \mathcal{P}(^mE;F)$.

Usaremos a abreviatura: pM = polinomialmente de Mackey.

DEFINIÇÃO 1.13. Um espaço localmente convexo E possui a propriedade (eD) (resp. é escalarmente hipoholomorfo) se para cada U, temos

$$\mathcal{H}(U) = \mathcal{H}_D(U) \quad (\text{resp. } \mathcal{H}(U) = \mathcal{H}_h(U)).$$

PROPOSIÇÃO 1.14. (1º) *Para um espaço localmente convexo* E *as con* *dições seguintes são equivalentes:*

(i) E *é holomorficamente de Mackey e possui a propriedade* (eD).

(ii) E *é polinomialmente de Mackey e possui a propriedade* (D).

(2º) *Para um espaço localmente convexo* E *as condições seguintes são equivalentes:*

(i) E *é holomorficamente de Mackey e escalarmente hipoholomorfo.*

(ii) E *é polinomialmente de Mackey e hipoholomorfo.*

(3º) *Para um espaço localmente convexo* E *as condições seguintes são equivalentes:*

(i) E *é holomorficamente infra-tonelado e escalarmente hipoholomorfo.*

(ii) E *é polinomialmente infra-tonelado e hipoholomorfo.*

<u>Prova</u>

(1º) (i) $\Longrightarrow$ (ii): Dados U, F e $f \in \mathcal{H}_D(U;F)$, é claro que $\psi \circ f \in \mathcal{H}_c(U)$ para cada $\psi \in F'$ e, como para cada $\xi \in U$, $m \in \mathbb{N}$ e $\psi \in F'$, temos

$$\hat{\partial}^m(\psi \circ f)(\xi) = \psi \circ \hat{\partial}^m f(\xi)$$

resulta que $\psi \circ f \in \mathcal{H}_D(U)$ para cada $\psi \in F'$. Como E possui a propriedade (eD), segue que $\psi \circ f \in \mathcal{H}(U)$ para cada $\psi \in F'$, donde $f \in \mathcal{H}(U;F)$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Dados U e F completo, seja $f: U \longrightarrow F$ uma aplicação tal que $\psi \circ f \in \mathcal{H}(U)$ para cada $\psi \in F'$. En tão, é claro que $f \in \mathcal{H}_a(U;F)$. De outro lado, se K é uma parte compacta de U, $f(K)$ é uma parte fracamente limitada e, portanto, limitada de F, o que mostra que $f \in \mathcal{H}_c(U;F)$. Como E é polinomialmente de Mackey, as relações

$$\hat{\partial}^m(\psi \circ f)(\xi) = \psi \circ \hat{\partial}^m f(\xi)$$

para cada $m \in \mathbb{N}$, $\xi \in U$ e $\psi \in F'$ implicam que

$$\hat{\partial}^m f(\xi) \in \mathcal{P}(^mE;F), \text{ para cada } m \in \mathbb{N} \text{ e } \xi \in U.$$

Segue que $f \in \mathcal{H}_D(U;F)$, donde $f \in \mathcal{H}(U;F)$ pois E possui a propriedade (D).

(2º) (i) $\Longrightarrow$ (ii): Dados U, F e $f \in \mathcal{H}_h(U;F)$, como E é escalarmente hipoholomorfo, temos $\psi \circ f \in \mathcal{H}(U)$ para cada $\psi \in F'$, donde $f \in \mathcal{H}(U;F)$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Segue de (1º) e da PROP. 1.3.

(3º) (i) $\Longrightarrow$ (ii): Segue de (2º) e da implicação hib $\Longrightarrow$ hM.

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Resulta das proposições 1.3. e 1.10. $\square$

PROPOSIÇÃO 1.15. *Para um espaço localmente convexo* E *as condições seguintes são equivalentes:*

(i) E *é holomorficamente de Mackey.*

(ii) *Para cada aberto não vazio* U *de* E *e para cada espaço seminormado* F, *as condições:*

(a) $f \in H_c(U;F)$; (b) $X = \{\psi \circ f \mid \psi \in F' \text{ e } \|\psi\| = 1\} \subset \mathcal{H}(U)$

implicam que X *é eqüicontínuo.*

Prova

(i) $\Longrightarrow$ (ii). Seja U um aberto não vazio de E, F um espaço seminormado e suponhamos que $f:U \to F$ satisfaz as condições (a) e (b) de (ii). A condição (b) implica que $\psi \circ f \in \mathcal{H}(U)$ para cada $\psi \in F'$ e, então, por (i) resulta $f \in H(U;F)$, donde f é localmente limitada. Dado $\xi \in U$ arbitrário, existe, então, uma vizinhança V de ξ em U tal que

$$M = \sup \{ \|f(x)\| \mid x \in V\} < \infty$$

e, em conseqüência,

$$\sup \{ |<f(x),\psi>| \mid \|\psi\| = 1 \quad \text{e} \quad x \in V\} \leq M$$

o que prova que X é localmente limitado. Resulta, então, (cfr. [B], Prop. 3.4.) que X é eqüicontínuo.

(ii) $\Longrightarrow$ (i). Seja U um aberto não vazio de E, F um um espaço localmente convexo e $f:U \to F$ uma aplicação tal que $\psi \circ f \in \mathcal{H}(U)$ para cada $\psi \in F'$. Resulta, então, que $f \in H_a(U;F) = \mathcal{H}_a(U;\hat{F}) \cap F^U$; além disso, se K é um compacto de U, é claro que $f(K)$ é fracamente limitado e, portanto, limitado, donde $f \in H_c(U;F)$. Só resta, então, verificar que f é amplamente limitada. Seja $\beta \in SC(F)$, então, como $f \in H_c(U;F_\beta)$ e

$$X = \{\psi \circ f \mid \psi \in (F_\beta)' \quad \text{e} \quad \|\psi\|_\beta = 1\} \subset \mathcal{H}(U),$$

por (ii) resulta que X é eqüicontínuo. Dado um compacto $K \subset U$

arbitrário,

$$M = \sup \{\beta[f(x)] \mid x \in K\} < \infty$$

o que acarreta

$$\sup \{|\langle f(x),\psi\rangle| \mid \psi \in (F_\beta)', \|\psi\|_\beta = 1 \text{ e } x \in K\} = M < \infty$$

o que mostra que X é uma parte $\mathcal{T}_o$-limitada de $H(U)$. O conjunto X sendo eqüicontínuo e $\mathcal{T}_o$-limitado é localmente limitado (cfr. [B], Prop. 3.4.). Dado $\xi \in U$ arbitrário, existe, então, uma vizinhança V de ξ em U tal que

$$N = \sup \{|\langle f(x),\psi\rangle| \mid \psi \in (F_\beta)', \|\psi\|_\beta = 1 \text{ e } x \in V\} < \infty$$

donde, pelo teorema de Hahn-Banach, resulta

$$\sup \{\beta[f(x)] \mid x \in V\} = N < \infty$$

e, portanto, $f \in H(U;F)$. □

COROLÁRIO 1.16. *Seja* E *um espaço holomorficamente de Mackey. Então, para cada aberto não vazio* U *de* E *e para cada espaço seminormado* F, *as condições:*

(a) $f \in H_c(U;F)$; (b) $X = \{\psi \circ f \mid \psi \in F' \text{ e } \|\psi\| = 1\} \subset H(U)$

implicam que X *é* $\mathcal{T}_o$*-relativamente compacto em* $H(U)$.

<u>Prova</u>

Como E é holomorficamente de Mackey, pela PROP. 1.15., as condições (a) e (b) implicam que X é eqüicontínuo e da mesma forma que na PROP. 1.15. se prova que X é $\mathcal{T}_o$-limitado em $H(U)$. Em conseqüência, o conjunto $X(x) = \{f(x) | f \in X\}$ é uma parte relativamente compacta em $\mathbb{C}$ para todo $x \in U$, donde, pelo teorema de Ascoli, resulta que X é $\mathcal{T}_o$-relativamente compacto. □

A seguir vamos demonstrar um resultado análogo à PROP. 1.10. para espaços holomorficamente tonelados. Para tanto, precisamos das duas definições seguintes.

DEFINIÇÃO 1.17. Um espaço localmente convexo E é dito <u>polinomialmente tonelado</u> se para cada $m \in \mathbb{N}$ e, para cada F, todo conjunto $X \subset P(^mE;F)$ que é limitado sobre os compactos de dimensão finita de E é amplamente limitado (ou equivalentemente, eqüicontínuo).

Usaremos a abreviatura: pba = polinomialmente tonelado.

DEFINIÇÃO 1.18. Uma aplicação $f \in H_a(U;F)$ é dita <u>D^*-holomorfa</u> se $\hat{\partial}^m f(\xi) \in P(^mE;F)$ para cada $m \in \mathbb{N}$ e para cada $\xi \in U$. Indicamos com $H_{D^*}(U;F)$ o espaço vetorial de todas as aplicações D^*-holomorfas de U em F. Diz-se que um espaço localmente convexo E possui a <u>propriedade (D^*)</u> se, para cada U e para cada F, temos

$$H(U;F) = H_{D^*}(U;F)$$

Usaremos a abreviatura: D^* = propriedade (D^*).

É claro que vale a implicação: $D^* \Longrightarrow D$.

LEMA 1.19. *Seja* E *um espaço polinomialmente tonelado,* U *um aberto não vazio de* E, F *um espaço localmente convexo e* $X \subset H(U;F)$ *um conjunto limitado sobre os compactos de dimensão finita de* U. *Então, para cada* $\xi \in U$ *e para cada* $m \in \mathbb{N}$, *o conjunto*

$$X_{m,\xi} = \{\hat{d}^m f(\xi) \mid f \in X\} \subset P(^mE;F),$$

é amplamente limitado.

Prova

O argumento é análogo ao usado na prova do LEMA 1.9. □

PROPOSIÇÃO 1.20. *Para um espaço localmente convexo* E, *as condições seguintes são equivalentes:*

(i) E *é holomorficamente tonelado.*

(ii) E *é polinomialmente tonelado e possui a propriedade* (D^*).

Prova

Resulta de pequenas modificações na prova da PROP. 1.10. □

A seguir introduzimos uma noção mais forte que a de "polinomialmente tonelado", a saber a de "fortemente polinomialmente tonelado". O interesse desta nova noção é que, como veremos no §4, uma extensa classe de espaços de germes possui esta propriedade.

DEFINIÇÃO 1.21. Um espaço localmente convexo E é dito <u>fortemen-</u>

te polinomialmente tonelado se para cada $m \in \mathbb{N}$ e para cada F, todo conjunto $X \subset P(^mE;F)$ que é limitado sobre os conjuntos finitos de E é amplamente limitado (ou equivalentemente, eqüicontínuo). Usaremos a abreviatura: spba = fortemente polinomialmente tonelado.

É claro que vale a implicação: spba $\Longrightarrow$ pba.

O resultado seguinte fornece uma classe de exemplos de espaços polinomialmente bornológicos e uma classe de exemplos de espaços fortemente polinomialmente tonelados.

PROPOSIÇÃO 1.22. (1º) *Se* E *é um espaço* (DF), *tonelado e bornológico, então,* E *é polinomialmente bornológico.*

(2º) *Se* E *é um espaço* (DF) *e tonelado, então,* E *é fortemente polinomialmente tonelado.*

Prova

(1º) Seja F um espaço localmente convexo, $m \in \mathbb{N}$ e $P \in P_c(^mE;F)$, então, existe $A \in L_{as}(^mE;F)$ tal que $\hat{A} = P$. Vamos provar que A é contínua. Como E é (DF) e tonelado, basta verificar (cfr. [G], Ch IV, §3, nº 2, Corol. 1 du Th. 2) que A é separadamente contínua e, como A é simétrica, é suficiente verificar que A é contínua na primeira variável, isto é, fixados $a_2, \ldots, a_m$ em E, a aplicação linear

$$u : x \in E \longmapsto A(x, a_2, \ldots, a_m) \in F$$

é contínua. Como E é bornológico, basta provar que u é limitada, o que resulta da fórmula de polarização e por ser P limitado sobre os limitados.

(2º) Dados um espaço localmente convexo F, $m \in \mathbb{N}$ e $\hat{X} \subset \mathcal{P}({}^{m}E;F)$ tal que $\hat{X}$ é limitado sobre os conjuntos finitos de E, mostremos que $\hat{X}$ é eqüicontínuo. Consideremos o conjunto

$$X = \{A \in \mathcal{L}_s({}^{m}E;F) \,|\, \hat{A} = P\},$$

então, pela fórmula de polarização e por ser $\hat{X}$ limitado sobre os conjuntos finitos de E, resulta que X é uma parte limitada de $\mathcal{L}_s({}^{m}E;F)$ para a topologia da convergência simples. Resulta, então, (cfr. loc. cit.) que X é uma parte eqüicontínua, donde segue que $\hat{X}$ é uma parte eqüicontínua. $\square$

DEFINIÇÃO 1.23. Um espaço localmente convexo E é dito <u>σ-polinomialmente infra-tonelado</u> se para cada espaço localmente convexo F, para cada conjunto enumerável de polinômios contínuos de E em F:

$$\mathcal{Y} = \{P_m \,|\, m \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{P}(E;F)$$

e para cada aberto absolutamente convexo não vazio W de E, se

$$\mathcal{Y}|W = \{P_m|W \,|\, m \in \mathbb{N}\}$$

é uma parte limitada de $(\mathcal{H}(W;F);\mathcal{T}_o)$, então $\mathcal{Y}|W$ é eqüicontínua.

Usaremos a abreviatura: σpib = σ-polinomialmente infra-tonelado.

PROPOSIÇÃO 1.24. (1º) *Se* E *é um espaço* σ*-polinomialmente infra* *tonelado, então* E *possui a propriedade* (D).

(2º) *Para um espaço localmente convexo* E, *as asserções seguintes são equivalentes:*

(i) E *é holomorficamente infra-tonelado.*

(ii) E *é polinomialmente infra-tonelado e* σ*-polinomialmente infra-tonelado.*

(3º) *Para um espaço polinomialmente bornológico* E, *as asserções seguintes são equivalentes:*

(i) E *é holomorficamente bornológico.*

(ii) E *é* σ*-polinomialmente infra-tonelado.*

(iii) E *possui a propriedade* (D).

Prova

(1º) Retomamos a prova e as notações da PROP. 1.10., (i) $\Longrightarrow$ (ii), até o ponto em que se demonstra que $X = \{f_m | m \in \mathbb{N}\}$ é uma parte limitada de $(\mathcal{H}(V;F);\mathcal{T}_o)$. Seja agora

$$P_m = \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j!} \hat{\partial}^j f(\xi), \quad \text{para cada} \quad m \in \mathbb{N};$$

$$\mathcal{Y} = \{P_m | m \in \mathbb{N}\} \quad \text{e} \quad W = B_{\alpha,1/\rho}(0).$$

É imediato verificar que o fato de X ser uma parte limitada de $(\mathcal{H}(V;F);\mathcal{T}_o)$ acarreta que

$$\mathcal{Y}|W = \{P_m|W | m \in \mathbb{N}\}$$

é uma parte limitada de $(\mathcal{H}(W;F);\mathcal{T}_o)$. Como E é σ-polinomialmen te infra-tonelado, resulta que $\mathcal{Y}|W$ é uma parte eqüicontínua de $\mathcal{H}(W;F)$, donde segue que X é uma parte eqüicontínua de $\mathcal{H}(V;F)$. A partir deste ponto, a prova prossegue sem alterações como na PROP. 1.10., (i) $\Longrightarrow$ (ii).

(2º) (i) $\Longrightarrow$ (ii): Claro; (ii) $\Longrightarrow$ (i): Resulta de (1º) e da PROP. 1.10., (ii) $\Longrightarrow$ (i).

(3º) Como E é polinomialmente bornológico, pelo COROL. 1.11., temos (i) $\Longleftrightarrow$ (iii), logo é suficiente verificar que (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii). A primeira destas implicações é clara pois hbo $\Longrightarrow$ hib $\Longrightarrow$ σpib. A segunda implicação é a primeira asserção da proposição. □

DEFINIÇÃO 1.25. Um espaço localmente convexo E é dito <u>localmente holomorficamente infra-tonelado</u> se para cada U, para cada F e para toda parte $X \subset \mathcal{H}(U;F)$ que é limitada sobre os compactos de U, o conjunto

$$X|K = \{g|K \mid g \in X\}$$

é uma parte eqüicontínua de $C(K;F)$ para todo compacto K de U.

Usaremos a abreviatura: lhib = localmente holomorficamente infra-tonelado.

PROPOSIÇÃO 1.26. *Para um espaço localmente convexo* E *as condições seguintes são equivalentes:*

(i) E *é localmente holomorficamente infra-tonelado.*

(ii) E *satisfaz à* DEF. 1.25. *no caso* $F = \mathbb{C}$.

(iii) *Para cada* U, *uma parte* $X \subset H(U)$ *é* $\mathcal{T}_o$*-limitada se e só se é* $\mathcal{T}_o$*-precompacta.*

Prova

É claro que (i) $\Longrightarrow$ (ii). Mostremos que (ii) $\Longrightarrow$ (i). Dados U e F, seja X uma parte limitada de $(H(U;F);\mathcal{T}_o)$. Fixados um compacto $K \subset U$ e $\beta \in SC(F)$, seja

$$\Psi = \{\psi \in (F_\beta)' \mid \|\psi\|_\beta = 1\},$$

então, é claro que

$$X(\Psi) = \{\psi \circ f \mid f \in X \text{ e } \psi \in \Psi\}$$

é uma parte limitada de $(H(U);\mathcal{T}_o)$. Por (ii) resulta que

$$X(\Psi)|K = \{h|K \mid h \in X(\Psi)\}$$

é uma parte eqüicontínua de $C(K)$. Segue que, fixado $\xi \in K$ arbitrário, existe uma vizinhança V de ξ em K tal que

$$|h(x) - h(\xi)| \leq 1, \text{ para cada } x \in V \text{ e para cada } h \in X(\Psi)|K.$$

Como pelo teorema de Hahn-Banach temos

$$\sup\{\beta[f(x)-f(\xi)] \mid f \in X \text{ e } x \in V\} = \sup\{|\langle f(x)-f(\xi), \psi\rangle| \mid f \in X,\ x \in V \text{ e } \psi \in \Psi\},$$

resulta

$$\beta[f(x) - f(\xi)] \leq 1, \text{ para cada } x \in V \text{ e para cada } f \in X.$$

(i) $\Longrightarrow$ (iii): Seja X uma parte limitada de $(H(U);\mathcal{T}_o)$.

Por (i), para cada compacto $K \subset U$, o conjunto

$$X|K = \{g|K \mid g \in X\}$$

é uma parte eqüicontínua de $C(K)$ e, como o conjunto

$$X|K(x) = \{g(x) \mid g \in X\}$$

é limitado para cada $x \in K$, pelo teorema de Ascoli, $X|K$ é uma parte relativamente compacta de $C(K)$ para cada compacto $K \subset U$. De outro lado, é claro que $\mathcal{T}_o$ coincide com a topologia limite projetivo sobre $\mathcal{H}(U)$ para a família de aplicações

$$p_K : f \in \mathcal{H}(U) \longmapsto f|K \in C(K)$$

quando K percorre o conjunto das partes compactas de U. Ora, como $p_K(X) = X|K$ é precompacto em $C(K)$ para cada compacto $K \subset U$, segue que X é uma parte $\mathcal{T}_o$-precompacta de $\mathcal{H}(U)$.

(iii) $\Longrightarrow$ (i): Seja X uma parte limitada de $(\mathcal{H}(U);\mathcal{T}_o)$, então, por (iii), X é uma parte precompacta de $(\mathcal{H}(U);\mathcal{T}_o)$ donde $X|K = p_K(X)$ é uma parte relativamente compacta de $C(K)$ para cada compacto $K \subset U$. Pelo teorema de Ascoli, $X|K$ é eqüicontínuo para cada compacto $K \subset U$. □

PROPOSIÇÃO 1.27. *Se* E *é hipoholomorfo e localmente holomorficamente infra-tonelado, então* E *é holomorficamente infra-tonelado.*

Prova

Dados U e uma parte limitada X de $(\mathcal{H}(U);\mathcal{T}_o)$, consideremos a aplicação algebricamente holomorfa associada a X,

$$f_X : x \in U \longmapsto (g(x))_{g\in X} \in \ell^\infty(X).$$

Como E é localmente holomorficamente infra-tonelado, resulta

$$f_X \in \mathcal{H}_h(U; \ell^\infty(X))$$

e, então, como E é hipoholomorfo, segue que $f_X \in \mathcal{H}(U; \ell^\infty(X))$, isto é, X é localmente limitado. □

Dados dois espaços localmente convexos E e F, indicamos com $\mathcal{L}_{sc}(E;F)$ o espaço vetorial de todas as aplicações lineares de E em F que são seqüencialmente contínuas. É claro que $\mathcal{L}(E;F) \subset \mathcal{L}_{sc}(E;F)$. Um espaço localmente convexo E é dito <u>semi-bornológico</u> (cfr. [P]) se $\mathcal{L}(E;F) = \mathcal{L}_{sc}(E;F)$ para cada espaço localmente convexo F. Vamos usar esta noção como motivação para a próxima definição. Seja U um aberto não vazio de um espaço localmente convexo E e seja F um espaço localmente convexo, indicaremos com a notação

$$\mathcal{H}_{sc}(U;F)$$

o espaço vetorial complexo de todas as aplicações algebricamente holomorfas de U em F que são seqüencialmente contínuas. Com estas notações pomos:

DEFINIÇÃO 1.28. Um espaço localmente convexo E é dito <u>holomorficamente semi-bornológico</u> se para cada U e para cada F, temos

$$\mathcal{H}(U;F) = \mathcal{H}_{sc}(U;F).$$

Usaremos a abreviatura: hsb = holomorficamente semi-bornológico.

PROPOSIÇÃO 1.29. *Sejam* E, F *dois espaços localmente convexos e* U *um aberto não vazio de* E, *então*

(1º) $\mathcal{H}_h(U;F) \subset \mathcal{H}_{sc}(U;F)$.

(2º) *Se todo compacto de* E *é seqüencialmente compacto, então*

$$\mathcal{H}_{sc}(U;F) \subset \mathcal{H}_c(U;F).$$

<u>Prova</u>

(1º) Seja $f \in \mathcal{H}_h(U;F)$. Dada uma seqüência $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ convergente em U, se $x = \lim_{m\to\infty} x_m$, o conjunto $K = \{x_m | m \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ é compacto em U e, portanto, $f|K \in C(K;F)$, donde $\lim_{m\to\infty} f(x_m) = f(x)$.

(2º) Seja $f \in \mathcal{H}_{sc}(U;F)$. Suponhamos, por absurdo, que $f \notin \mathcal{H}_c(U;F)$. Então, existe um compacto $K \subset U$ e $\beta \in SC(F)$ tais que

$$\sup \{\beta[f(x)] | x \in K\} = \infty$$

e, em conseqüência, existe uma seqüência $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ em K tal que

$$\beta[f(x_m)] \geq m, \text{ para cada } m \in \mathbb{N}.$$

Por hipótese, $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ possui uma subseqüência convergente $(x_{m_\nu})_{\nu\in\mathbb{N}}$, seja $x = \lim_{\nu\to\infty} x_{m_\nu} \in K$, como f é seqüencialmente contínua, temos

$$\lim_{m\to\infty} \beta[(x_{m_\nu})] = \beta[f(x)]$$

o que é absurdo pela definição da seqüência $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$. □

COROLÁRIO 1.30. *Seja* E *um espaço localmente convexo no qual todo compacto é seqüencialmente compacto. Então, para cada* U *e para cada* F, *temos*

$$\mathcal{H}(U;F) \subset \mathcal{H}_D(U;F) \subset \mathcal{H}_h(U;F) \subset \mathcal{H}_{sc}(U;F) \subset \mathcal{H}_c(U;F).$$

Em conseqüencia, em E, *valem as seguintes implicações*

$$\text{hbo} \Longrightarrow \text{hsb} \Longrightarrow \text{h} \Longrightarrow \text{D}.$$

Prova

Resulta imediatamente da PROP. 1.28. e da PROP.1.3. □

PROPOSIÇÃO 1.31. *Sejam* E, F *dois espaços localmente convexos e* U *um aberto não vazio de* E, *então, valem as asserções seguintes:*

(1ª) *Se* $f \in \mathcal{H}_c(U;F)$, *então,*

$$\hat{\partial}^m f(\xi) \in \mathcal{P}_c(^m E;F)$$

para cada $\xi \in U$ *e para cada* $m \in \mathbb{N}$.

(2ª) *Se* E *é polinomialmente bornológico, então*

$$\mathcal{H}_D(U;F) = \mathcal{H}_h(U;F) = \mathcal{H}_c(U;F).$$

(3ª) *Se* E *é polinomialmente bornológico e todo compacto de* E *é seqüencialmente compacto, então*

$$\mathcal{H}_D(U;F) = \mathcal{H}_h(U;F) = \mathcal{H}_{sc}(U;F) = \mathcal{H}_c(U;F).$$

Prova

A asserção (1ª) está contida na prova da PROP. 1.6. e (2ª) decorre da (1ª) e da PROP.1.3. A asserção (3ª) resulta da (2ª) e do COROL.1.30. □

Encerramos este § com uma breve referência a alguns casos particulares. Começamos com um exemplo considerado em [BMN] que mostra a independência de algumas das noções definidas. Se X é um espaço de Banach de dimensão infinita e $Y = \mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$ está munido da sua estrutura habitual de espaço de Silva, seja $E = X \times Y$ o espaço localmente convexo produto de X por Y. Como E é um espaço tonelado, bornológico e (DF), pela PROP. 1.22., resulta que E é polinomialmente bornológico e fortemente polinomialmente tonelado (e, portanto, polinomialmente tonelado). De outro lado, (cfr. [BMN], Ex. 18) E não é holomorficamente bornológico, em conseqüência, resultam as seguintes observações:

(1º) E é um espaço polinomialmente bornológico que não é holomorficamente bornológico; pela PROP. 1.6., resulta que E não possui a propriedade (D).

(2º) E não possui a propriedade (D^*), pois, por (1º), E não possui a propriedade (D) e é claro que $D^* \Longrightarrow D$.

(3º) E não é holomorficamente infra-tonelado, pois, por (1º), E não possui a propriedade (D) e hib $\Longrightarrow$ D, pela PROP. 1.10.

(4º) E é um espaço fortemente polinomialmente tonelado que não é holomorficamnte tonelado, pois, por (3º), E não é holomorficamente infra-tonelado e hba $\Longrightarrow$ hib.

(5º) E é um espaço polinomialmente infra-tonelado (pois pbo $\Rightarrow$ pib) que não é holomorficamente infra-tonelado.

(6º) E não é σ-polinomialmente infra-tonelado, pois, por (1º) E não possui a propriedade (D) e $\sigma pib \Longrightarrow D$, pela PROP.1.24., (1º).

Na realidade, pode-se provar (cfr. [BMN], Ex.22) que este espaço E tem a seguinte propriedade: se F é um espaço localmente convexo, $P:E \longrightarrow F$ é um polinômio de E em F (isto é, uma soma finita de polinômios homogêneos) e U é um aberto não vazio de E, para que P seja contínuo é suficiente que P seja limitado sobre cada compacto de U.

Um espaço holomorficamente infra-tonelado que não é holomorficamente bornológico é um exemplo de um espaço que possui a propriedade (D) (pela PROP. 1.10.) que não é polinomialmente bornológico (pela PROP. 1.6.). Um exemplo de um tal espaço é um espaço localmente convexo não bornológico que é um espaço de Baire.

§2 - CLASSIFICAÇÃO HOLOMORFA E PROPRIEDADES DE APROXIMAÇÃO

Nó que se segue, indicamos com a notação

$$(\mathcal{H}(U;F);\mathcal{T}_o)^{\wedge}$$

o completamento do espaço localmente convexo $(\mathcal{H}(U;F);\mathcal{T}_o)$.

LEMA 2.1. *Seja* U *um aberto* ξ*-equilibrado de um espaço localmente convexo* E, *seja* F *um espaço localmente convexo separado e suponhamos verificada a condição seguinte:*

(*) *Para cada* $m \in \mathbb{N}$, *cada* $P \in \mathcal{P}_h({}^mE;F)$, *cada* $\beta \in SC(F)$, *cada compacto* $K \subset E$ *e cada* $\varepsilon > 0$, *existe* $f \in \mathcal{H}(E;F)$ *tal que*

$$\|P - f\|_{\beta,K} \leq \varepsilon.$$

Então, $\mathcal{H}(E;F)$ *e* $\mathcal{H}(U;F)$ *são densos em* $(\mathcal{H}_h(U;F);\mathcal{T}_o)$ *e, em conseqüência, se* F *é completo, temos:*

$$(\mathcal{H}(U;F);\mathcal{T}_o)^{\wedge} = (\mathcal{H}_h(U;F);\mathcal{T}_o).$$

Prova

Seja $g \in \mathcal{H}_h(U;F)$, K um compacto de U, $\beta \in SC(F)$ e $\varepsilon > 0$. Como U é ξ-equilibrado, para cada $x \in U$ temos

$$g(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}\hat{\partial}^m g(\xi)(x-\xi), \quad \text{uniformemente em } K$$

e, portanto, existe $\nu \in \mathbb{N}$ tal que

$$\beta\{g(x) - \sum_{m=0}^{\nu} \frac{1}{m!} \hat{\partial}^m g(\xi)(x-\xi)\} \leq \varepsilon/2, \quad \text{para todo} \quad x \in K.$$

Seja δ um número real tal que $0 < \delta(1-\delta)^{-1} < \min(1, \varepsilon/2)$. Como $K - \xi = \{x - \xi \mid x \in K\}$ é um compacto de E e, pela fórmula integral de Cauchy, temos:

$$\hat{\partial}^m g(\xi) \in \mathcal{P}_h({}^m E;F), \quad \text{para todo} \quad m \in \mathbb{N},$$

a hipótese (*) acarreta que existe uma seqüência finita $(f_m)_{0 \leq m \leq \nu}$ em $\mathcal{H}(E;F)$ de modo que

$$\begin{cases} \|f_m - \frac{1}{m!} \hat{\partial}^m g(\xi)\|_{\beta, K-\xi} \leq \delta^m, & \text{para todo} \quad m = 1, 2, \ldots, \nu. \\ f_0 : x \in E \longmapsto g(\xi) \in F. \end{cases}$$

Seja

$$f : x \in E \longmapsto \sum_{m=0}^{\nu} f_m(x - \xi) \in F.$$

É claro que $f \in \mathcal{H}(E;F)$ e é fácil verificar que

$$\|g - f\|_{\beta, K} \leq \varepsilon,$$

o que prova que $\mathcal{H}(E;F)$ é denso em $(\mathcal{H}_h(U;F);\mathcal{T}_o)$ e, em conseqüência, $\mathcal{H}(U;F)$ também o é. A prova da PROP. 1.4. mostra que $(\mathcal{H}_h(U;F);\mathcal{T}_o)$ é separado e completo se F é completo, logo como $(\mathcal{H}(U;F);\mathcal{T}_o)$ é um subespaço uniforme de $(\mathcal{H}_h(U;F);\mathcal{T}_o)$, resulta a asserção relativa ao completamento. $\square$

COROLÁRIO 2.2. *Seja* U *um aberto* ξ*-equilibrado de um espaço localmente convexo* E, *seja* F *um espaço localmente convexo separado e suponhamos verificada a condição seguinte:*

(*) $P(^m E;F)$ *é denso em* $(P_h(^m E;F);\mathcal{T}_o)$ *para cada* $m \in \mathbb{N}$.

Então, $H(E;F)$ *e* $H(U;F)$ *são densos em* $(H_h(U;F);\mathcal{T}_o)$ *e, em conseqüência, se* F *é completo*

$$(H(U;F);\mathcal{T}_o)^{\wedge} = (H_h(U;F);\mathcal{T}_o).$$

Prova

Basta tomar, na prova do LEMA 2.1., a seqüência $(f_m)_{0 \le m \le \nu}$ de modo que $f_m \in P(^m E;F)$ para cada $m = 0,1,\dots,\nu$. □

COROLÁRIO 2.3. *Seja* U *um aberto* ξ*-equilibrado de um espaço polinomialmente hipoholomorfo* E (cfr. DEF. 1.2.) *e seja* F *um espaço localmente convexo separado. Então,* $H(E;F)$ *e* $H(U;F)$ *são densos em* $(H_h(U;F);\mathcal{T}_o)$ *e, em conseqüência, se* F *é completo, temos*

$$(H(U;F);\mathcal{T}_o)^{\wedge} = (H_h(U;F);\mathcal{T}_o).$$

Prova

A hipótese (*) do COROL. 2.2. está trivialmente verificada neste caso. □

As relações de inclusão

$$P(^m E;F) \subset P_h(^m E;F) \subset P_c(^m E;F)$$

para todo E, F e $m \in \mathbb{N}$, mostram que todo espaço polinomialmente bornológico é polinomialmente hipoholomorfo, logo como caso particular do COROL. 2.3. temos o resultado seguinte:

PROPOSIÇÃO 2.4. *Seja* U *um aberto* ξ*-equilibrado de um espaço polinomialmente bornológico* E *e seja* F *um espaço localmente convexo separado. Então,* $H(E;F)$ *e* $H(U;F)$ *são densos em* $(H_h(U;F);\mathcal{T}_o)$ *e, em conseqüência, se* F *é completo, temos*

$$(H(U;F);\mathcal{T}_o)^{\wedge} = (H_h(U;F);\mathcal{T}_o).$$

No resultado seguinte a expressão

"U é equilibrado"

significa que existe $\xi \in U$ tal que U é ξ-equilibrado.

PROPOSIÇÃO 2.5. *Para um espaço polinomialmente bornológico* E, *as asserções seguintes são equivalentes:*

(i) E *é holomorficamente bornológico.*

(ii) $(H(U;F);\mathcal{T}_o)$ *é completo para cada aberto não vazio* U *de* E *e para cada espaço localmente convexo separado completo* F.

(iii) $(H(U;F);\mathcal{T}_o)$ *é completo para cada aberto equilibrado* U *de* E *e para cada espaço localmente convexo separado completo* F.

(iv) E *é holomorficamente de Mackey e* $(H(U);\mathcal{T}_o)$ *é completo para cada aberto equilibrado* U *de* E.

Prova

As implicações (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii) e (i) $\Longrightarrow$ (iv) são claras. Mostremos que (iii) $\Longrightarrow$ (i). Pelo COROL. 1.11., basta ver que E é hipoholomorfo. A condição (iii) e a PROP. 2.4. implicam que

$$(1) \qquad \mathcal{H}(U;F) = \mathcal{H}_h(U;F)$$

para cada equilibrado U de E e para cada espaço localmente convexo separado completo F. Resulta, imediatamente, que (1) vale para cada aberto não vazio U de E e, então, só resta verificar que (1) vale para todo F. Fixados U e F arbitrários, seja $\hat{F}$ o separado completado de F e $j:F \hookrightarrow \hat{F}$ a aplicação canônica. Dada $f \in \mathcal{H}_h(U;F)$, é claro que $j \circ f \in \mathcal{H}_h(U;\hat{F}) = \mathcal{H}(U;\hat{F})$, logo f é amplamente limitada e, em conseqüência, $f \in \mathcal{H}(U;F)$.

Vejamos, finalmente, que (iv) $\Longrightarrow$ (i). O raciocínio precedente prova que o fato de $(\mathcal{H}(U);\mathcal{T}_0)$ ser completo para cada aberto equilibrado U, acarreta que E é escalarmente hipoholomorfo (cfr. DEF. 1.13.). Como, por (iv), E é também holomorficamente de Mackey, pela PROP. 1.14., (2º), resulta que E é hipoholomorfo, logo holomorficamente bornológico, pelo COROL.1.11.

$\square$

OBSERVAÇÃO. Se, no enunciado da PROP. 2.5., supomos apenas que E é polinomialmente hipoholomorfo, então as condições (ii) e

(iii) são equivalentes à condição

(i') E é hipoholomorfo.

De fato, (i') $\Longrightarrow$ (ii) resulta agora da PROP. 1.4. e a implicação (iii) $\Longrightarrow$ (i') se prova como na PROP. 2.5., (iii) $\Longrightarrow$ (i), usando o COROL. 2.3. no lugar da PROP. 2.4.

TEOREMA 2.6. *Para um espaço polinomialmente bornológico* E, *as asserções seguintes são equivalentes:*

(i) E *é holomorficamente bornológico.*

(ii) E *é holomorficamente infra-tonelado.*

(iii) E *possui a propriedade* (D).

(iv) E *é hipoholomorfo.*

(v) $(\mathcal{H}(U;F);\mathcal{T}_o)$ *é completo para cada aberto vazio* U *de* E *e para cada espaço localmente convexo separado completo* F.

(vi) $(\mathcal{H}(U;F);\mathcal{T}_o)$ *é completo para cada aberto equilibrado* U *de* E *e para cada espaço localmente convexo separado completo* F.

(vii) E *é holomorficamente de Mackey e* $(\mathcal{H}(U);\mathcal{T}_o)$ *é completo para cada aberto equilibrado* U *de* E.

(viii) E *é* σ*-polinomialmente infra-tonelado.*

<u>Prova</u>

Segue imediatamente do COROL. 1.11., da PROP.1.24., (3º) e da PROP. 2.5. □

EXEMPLO 1. Seja E um espaço metrizável e distinguido, então, o dual forte E_b' de E é um espaço (DF) (cfr. [G], Ch IV, §3, nº 1, Th. 1), tonelado e bornológico (cfr. [H], Ch. 3, §16, Th.1). Pela PROP. 1.22., resulta, então, que E_b' é um espaço polinomialmente bornológico e fortemente polinomialemnte tonelado. Portanto, em E_b' são equivalentes as asserções do TEOR. 2.6. De outro lado, pela PROP. 1.20., o espaço E_b' é holomorficamente tonelado se e só se E_b' possui a propriedade (D*).

EXEMPLO 2. Um caso particular do considerado no EXEMPLO 1 é o dos espaços $\mathcal{DFM}$ estudados em [D] (um espaço $\mathcal{DFM}$ é o dual forte de um espaço de Frechet-Montel), pois todo espaço de Montel é distinguido. Como no EXEMPLO 1 resulta que um espaço $\mathcal{DFM}$ é polinomialmente bornológico e fortemente polinomialmente tonelado. A PROP. 1 de [D] mostra que todo espaço $\mathcal{DFM}$ é um k-espaço, logo hipoholomorfo e, portanto, satisfaz todas as condições equivalentes do TEOR. 2.6. (cfr. [D], COROL. 11).

§3 - AS PROPRIEDADES DE MONTEL E ASCOLI

A fim de simplificar a exposição deste §, começamos introduzindo algumas notações. Fixados E, F e U vamos distinguir as seguintes classes de conjuntos de aplicações holomorfas:

$\mathcal{R}(U;F)$ = conjunto das partes $\mathcal{T}_o$-relativamente compactas de $\mathcal{H}(U;F)$.

$R(U;F)$ = conjunto das partes $\mathcal{T}_o$-relativamente compactas de $H(U;F)$.

$\mathcal{R}_f(U;F)$ = conjunto das partes $\mathcal{T}_{of}$-relativamente compactas de $\mathcal{H}(U;F)$.

$R_f(U;F)$ = conjunto das partes $\mathcal{T}_{of}$-relativamente compactas de $H(U;F)$.

$\mathcal{B}_o(U;F)$ = conjunto das partes $\mathcal{T}_o$-limitadas de $\mathcal{H}(U;F)$.

$B_o(U;F)$ = conjunto das partes $\mathcal{T}_o$-limitadas de $H(U;F)$.

$\mathcal{B}_{of}(U;F)$ = conjunto das partes $\mathcal{T}_{of}$-limitadas de $\mathcal{H}(U;F)$.

$B_{of}(U;F)$ = conjunto das partes $\mathcal{T}_{of}$-limitadas de $H(U;F)$.

$N(U;F) = \{\mathcal{X} \subset F^U \mid \mathcal{X}(x)$ é relativamente compacto para cada $x \in U\}$

$\mathcal{B}N(U;F) = \mathcal{B}_o(U;F) \cap N(U;F)$; $BN(U;F) = B_o(U;F) \cap N(U;F)$.

$\mathcal{B}N_f(U;F) = \mathcal{B}_{of}(U;F) \cap N(U;F)$; $BN_f(U;F) = B_{of}(U;F) \cap N(U;F)$.

$\mathcal{E}q(U;F)$ = conjunto das partes eqüicontínuas de $\mathcal{H}(U;F)$.

$Eq(U;F)$ = conjunto das partes eqüicontínuas de $H(U;F)$.

$\mathcal{B}_\omega(U;F)$ = conjunto das partes $\mathcal{T}_\omega$-limitadas de $\mathcal{H}(U;F)$.

$\mathcal{AB}^*(U;F) = \{X \subset \mathcal{H}(U;F) \mid X \in \mathcal{AB}(U;F)\}$.

Para cada $x \in U$ temos as aplicações lineares

$$\psi_x : f \in \mathcal{H}(U;F) \longmapsto f(x) \in F$$

$$\Psi_x : f \in H(U;F) \longmapsto f(x) \in F$$

e é claro que estas aplicações são $\mathcal{T}_{of}$-contínuas (e, portanto, $\mathcal{T}_o$-contínuas).

O resultado seguinte será usado freqüentemente no que segue.

PROPOSIÇÃO 3.1. *Quaisquer que sejam* E, F *e* U *valem as relações seguintes:*

(1º) $\mathcal{AB}^*(U;F) = \mathcal{E}q(U;F) \cap \mathcal{B}_o(U;F) = \mathcal{E}q(U;F) \cap \mathcal{B}_{of}(U;F)$.

(2º) $\mathcal{E}q(U;F) \cap N(U;F) \subset Eq(U;F) \cap N(U;F) \subset R(U;F)$.

<u>Prova</u>

(1º) Cfr. [B], PROP. 3.4.; (2º) $H(U;F)$ é $\mathcal{T}_o$-fechado em $C(U;F)$, logo o resultado segue do teorema de Ascoli. □

PROPOSIÇÃO 3.2. *Para um espaço localmente convexo* E, *as asserções seguintes são equivalentes:*

(i) E *é holomorficamente infra-tonelado.*

(ii) $\mathcal{AB}^*(U;F) = \mathcal{B}_\omega(U;F) = \mathcal{B}_o(U;F)$, *para cada* U *e cada* F.

(iii) $\mathcal{R}(U;F) = \mathcal{AB}^*(U;F) = \mathcal{B}_\omega(U;F) = \mathcal{B}_o(U;F)$, *para cada* U *e para cada espaço semi-Montel* F.

(iv) $\mathcal{R}(U) = \mathcal{AB}^*(U) = \mathcal{B}_\omega(U) = \mathcal{B}_o(U)$, *para cada* U.

Prova

(i) $\Longrightarrow$ (ii): De $\mathcal{T}_o \leq \mathcal{T}_\omega$ e de [B], PROP. 3.1., resulta

$$\mathcal{AB}^*(U;F) \subset \mathcal{B}_\omega(U;F) \subset \mathcal{B}_o(U;F)$$

e, por (i), vem $\mathcal{B}_o(U;F) \subset \mathcal{AB}^*(U;F)$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii): A condição (ii) acarreta que

$$\mathcal{R}(U;F) \subset \mathcal{AB}^*(U;F) = \mathcal{B}_\omega(U;F) = \mathcal{B}_o(U;F).$$

Como F é semi-Montel, $\mathcal{B}_o(U;F) \subset N(U;F)$, portanto, de $\mathcal{B}_o(U;F) = \mathcal{AB}^*(U;F)$ e da PROP. 3.1., (1º) segue $\mathcal{B}_o(U;F) \subset \mathcal{E}q(U;F)$. Em conseqüência, pela PROP. 3.1., resulta

$$\mathcal{B}_o(U;F) \subset \mathcal{E}q(U;F) \cap N(U;F) \subset \mathcal{R}(U;F),$$

pois F, sendo semi-Montel, é diferencialmente estável e, portanto, $\mathcal{H}(U;F) = H(U;F)$. As implicações (iii) $\Longrightarrow$ (iv) $\Longrightarrow$ (i), são claras. □

PROPOSIÇÃO 3.2'. *Para um espaço localmente convexo* E, *as asserções seguintes são equivalentes:*

(i) E *é holomorficamente tonelado.*

(ii) $\mathcal{AB}^*(U;F) = \mathcal{B}_\omega(U;F) = \mathcal{B}_o(U;F) = \mathcal{B}_{of}(U;F)$, *para cada* U *e cada* F.

(iii) $\mathcal{R}_f(U;F) = \mathcal{R}(U;F) = \mathcal{AB}^*(U;F) = \mathcal{B}_\omega(U;F) = \mathcal{B}_o(U;F) = \mathcal{B}_{of}(U;F)$, *para cada* U *e para cada espaço semi-Montel* F.

(iv)' $\mathcal{R}_f(U) = \mathcal{R}(U) = \mathcal{AB}^*(U) = \mathcal{B}_\omega(U) = \mathcal{B}_o(U) = \mathcal{B}_{of}(U)$, *para cada* U.

Prova

Resulta de pequenas modificações na prova da PROP.3.2.

□

COROLÁRIO 3.3. *Se* E *é um espaço holomorficamente tonelado (resp. holomorficamente infra-tonelado), então* $(\mathcal{H}(U;F);\mathcal{T}_{of})$ *e* $(\mathcal{H}(U;F);\mathcal{T}_o)$ *(resp.* $(\mathcal{H}(U;F);\mathcal{T}_o)$*) são espaços (resp. é um espaço) semi-Montel, para cada* U *e para cada espaço semi-Montel* F.

DEFINIÇÃO 3.4. (Matos; [M], [BMN]). Diz-se que um espaço localmente convexo E possui a <u>propriedade de Montel</u> (resp. <u>infra-Montel</u>) se

$$R(U;F) = BN_f(U;F) \quad (\text{resp. } R(U;F) = BN(U;F))$$

para cada U e cada F.

<u>No que segue, quando</u> E <u>for um espaço localmente convexo possuindo a propriedade de Montel (resp. infra-Montel) escreveremos abreviadamente</u>:

"E possui a propriedade (M)" (resp. "E possui a propriedade (iM)").

Diz-se que E possui a propriedade (eM) (resp. (eiM)) se

$$R(U) = BN_f(U) = B_{of}(U) \quad (\text{resp. } R(U) = BN(U) = B_o(U))$$

para cada U. Usaremos as abreviaturas seguintes:

M = propriedade (M); iM = propriedade (iM)

eM = propriedade (eM); eiM = propriedade (eiM).

PROPOSIÇÃO 3.5. (Matos; [M], [BMN]). *Se* E *é um espaço holomorficamente tonelado (resp. holomorficamente infra-tonelado), então,* E *possui a propriedade* (M) *(resp.* (iM)*).*

Prova

Mostremos, por exemplo, que hib $\Longrightarrow$ iM. Fixados U e F arbitrários, a inclusão $R(U;F) \subset BN(U;F)$ segue da continuidade da aplicação

$$\Psi_x : f \in H(U;F) \longrightarrow f(x) \in F; \quad x \in U.$$

De outro lado, como E é holomorficamente infra-tonelado, resulta que $B_0(U;\hat{F}) \subset Eq(U;\hat{F})$ e, em conseqüência,

$$B_0(U;F) \subset Eq(U;F),$$

o que, pela PROP. 3.1.,(2º) implica $BN(U;F) \subset R(U;F)$. De forma análoga, se verifica que hba $\Longrightarrow$ M. □

DEFINIÇÃO 3.6. Diz-se que um espaço localmente convexo E possui a propriedade de Ascoli se para cada U e para cada F, todo conjunto $X \subset H(U;F)$ que é $\mathcal{T}_0$-relativamente compacto, é amplamente limitado (ou equivalentemente, eqüicontínuo), isto é,

$$R(U;F) \subset AB^*(U;F) \quad \text{(ou equivalentemente, } R(U;F) \subset Eq(U;F)).$$

No que segue, quando E for um espaço localmente convexo possuindo a propriedade de Ascoli, escreveremos abreviadamente:

"E possui a propriedade (A)".

Diz-se que E possui a propriedade (eA) se

$$\mathcal{R}(U) \subset \mathcal{AB}^*(U) \quad \text{(ou equivalentemente, } \mathcal{R}(U) \subset \mathcal{E}q(U))$$

para cada U. Usaremos as seguintes abreviaturas:

A = propriedade (A); eA = propriedade (eA).

O resultado seguinte, que justifica o nome da propriedade caracterizada na DEF. 3.5., resulta imediatamente da PROP. 3.1., (2º).

PROPOSIÇÃO 3.7. *Se* E *é um espaço localmente convexo que possui a propriedade* (A), *então, para cada* U *e para cada espaço diferencialmente estável* F, *temos*

$$\mathcal{R}(U;F) = \mathcal{E}q(U;F) \cap N(U;F).$$

PROPOSIÇÃO 3.8. *Para um espaço localmente convexo* E *as condições seguintes são equivalentes:*

(i) E *é holomorficamente infra-tonelado.*

(ii) E *possui as propriedades* (iM) *e* (A).

(iii) E *possui as propriedades* (eiM) *e* (eA).

Prova

(i) $\Longrightarrow$ (ii): E possui a propriedade (iM) pela PROP.

3.5. e possui a propriedade (A) de modo evidente. (ii) $\Longrightarrow$ (iii): Claro. (iii) $\Longrightarrow$ (i): Fixado U arbitrário, temos:

$$\mathcal{B}_o(U) = BN(U) = R(U) = \mathcal{R}(U) \subset \mathcal{AB}^*(U). \quad \square$$

PROPOSIÇÃO 3.8'. *Para um espaço localmente convexo* E *as condições seguintes são equivalentes:*

(i) E *é holomorficamente tonelado.*

(ii) E *possui as propriedades* (M) *e* (A).

(iii) E *possui as propriedades* (eM) *e* (eA).

Prova

Resulta de pequenas modificações na prova da PROP.3.8.

$\square$

PROPOSIÇÃO 3.9. (Matos; [N2] e [BMN], Prop. 58). *Para um espaço localmente convexo* E *as condições seguintes são equivalentes:*

(i) E *é holomorficamente tonelado.*

(ii) E *é holomorficamente infra-tonelado e possui a propriedade* (M).

(iii) E *é holomorficamente infra-tonelado e possui a propriedade* (eM).

Prova

Pela PROP. 3.5., só resta verificar que (iii) $\Longrightarrow$ (i) Fixado U arbitrário, é claro que $\mathcal{B}_{of}(U) \subset N(U)$ e, então, por (iii), temos

$$\mathcal{B}_{of}(U) = BN_f(U) = R(U) = \mathcal{R}(U) \subset \mathcal{B}_o(U) \subset Eq(U). \quad \square$$

PROPOSIÇÃO 3.10. *Para um espaço localmente convexo* E *as condições seguintes são equivalentes:*

(i) E *possui a propriedade* (eiM) (isto é, $(\mathcal{H}(U);\mathcal{T}_o)$ é um espaço semi-Montel para cada U).

(ii) E *é localmente holomorficamente infra-tonelado* (cfr. DEF. 1.25.) *e* $(\mathcal{H}(U);\mathcal{T}_o)$ *é quase-completo para cada* U.

Prova

(i) $\Longrightarrow$ (ii): Fixado U arbitrário, como $(\mathcal{H}(U);\mathcal{T}_o)$ é semi-Montel, é quase-completo. Pela PROP. 1.26., é suficiente verificar a DEF. 1.25. no caso $F = \mathbb{C}$. Dado $X \in \mathcal{B}_o(U)$, seja K um compacto arbitrário de U, então, a continuidade da aplicação

$$p_K : f \in (\mathcal{H}(U);\mathcal{T}_o) \longrightarrow f|K \in C(K)$$

e a hipótese (i) implicam que $p_K(X)$ é relativamente compacto em $C(K)$, donde pelo teorema de Ascoli, $p_K(X)$ é eqüicontínuo.

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Fixado U arbitrário, seja $X \in BN(U) = \mathcal{B}_o(U)$. Pela PROP. 1.26., resulta que X é uma parte $\mathcal{T}_o$-precompacta de $\mathcal{H}(U)$, logo $\mathcal{T}_o$-relativamente compacta, pois $(\mathcal{H}(U);\mathcal{T}_o)$ é quase-completo. $\square$

COROLÁRIO 3.11. *Para um espaço localmente convexo* E *são equivalentes as condições seguintes:*

(i) E *é holomorficamente infra-tonelado.*

(ii) E *possui as três propriedades seguintes:*

(a) E *é localmente holomorficamente infra-tonelado.*

(b) E *possui a propriedade* (eA).

(c) $(\mathcal{H}(U);\mathcal{T}_o)$ *é quase-completo para cada* U.

<u>Prova</u>

Pela PROP. 3.10., a condição (ii) equivale à condição (iii) da PROP. 3.8. □

O nosso objetivo seguinte são os resultados correspondentes à PROP. 3.10. e o COROL. 3.11. para a noção "holomorficamente tonelado". A próxima definição é análoga à DEF. 1.25.

DEFINIÇÃO 3.12. Um espaço localmente convexo E é dito <u>localmente holomorficamente tonelado</u> se para cada U, para cada F e para toda parte $X \subset \mathcal{H}(U;F)$ que é limitada sobre os compactos de dimensão finita de U, o conjunto

$$X|K = \{g|K \mid g \in X\}$$

é uma parte eqüicontínua de $C(K;F)$, para cada compacto de dimensão finita K de U.

Usaremos a abreviatura: lhba = localmente holomorficamente tonelado.

PROPOSIÇÃO 3.13. *Para um espaço localmente convexo* E *as condições seguintes são equivalentes:*

(i) E *é localmente holomorficamente tonelado.*

(ii) E *satisfaz a* DEF. 3.12. *no caso* $F = \mathbb{C}$.

(iii) *Para cada* U, *uma parte* $X \subset H(U)$ *é* $\mathcal{T}_{of}$*-limitada se e só se é* $\mathcal{T}_{of}$*-precompacta.*

Prova

Resulta de pequenas modificações na prova da PROP.1.26.

□

PROPOSIÇÃO 3.10'. *Para um espaço localmente convexo* E, *as asserções seguintes são equivalentes:*

(i) E *possui a propriedade* (eM).

(ii) E *é localmente holomorficamente tonelado e* $(H(U);\mathcal{T}_{of})$ *é quase-completo para cada* U.

Prova

Análoga à prova da PROP. 3.10. □

COROLÁRIO 3.11'. *Para um espaço localmente convexo* E, *as asserções seguintes são equivalentes:*

(i) E *é holomorficamente tonelado.*

(ii) E *satisfaz às três condições seguintes:*

(a) E *é localmente holomorficamente tonelado.*

(b) E *possui a propriedade* (eA).

(c) $(H(U);\mathcal{T}_{of})$ *é quase-completo para cada* U.

Prova

Análoga à prova do COROL. 3.11. □

O resultado seguinte expressa que iM $\Longrightarrow$ D; como conseqüência resultará que para os espaços polinomialmente bornológicos a propriedade (iM) é equivalente à propriedade "holomorficamente bornológico".

PROPOSIÇÃO 3.14. *Se um espaço localmente convexo* E *possui a propriedade* (iM), *então* E *possui a propriedade* (D).

Prova

Retomamos a prova da PROP. 1.10., (i) $\Longrightarrow$ (ii) até o ponto em que se demonstra que $X = \{f_m \mid m \in \mathbb{N}\}$ é uma parte $\mathcal{T}_o$-limitada de $H(V;F)$, isto é, $X \in \mathcal{B}_o(V;F) \subset B_o(V;F)$. Como

$$\lim_{m\to\infty} f_m(x) = f(x) \quad \text{para todo} \quad x \in V,$$

resulta que $X \in N(V;F)$, donde $X \in BN(V;F)$. Como E possui a propriedade (iM), resulta $X \in R(V;F)$ e, portanto, X é uma parte $\mathcal{T}_o$-relativamente compacta de $C(V;F)$. A partir deste ponto, a prova prossegue como na PROP. 1.10., (i) $\Longrightarrow$ (ii). □

COROLÁRIO 3.15. *Para um espaço polinomialmente infra-tonelado* E (cfr. DEF. 1.8.), *são equivalentes as asserções seguintes:*

(i) E *é holomorficamente infra-tonelado.*

(ii) E *possui a propriedade* (iM).

(iii) E *possui a propriedade* (D).

<u>Prova</u>

(i) $\Longrightarrow$ (ii): PROP. 3.5.; (ii) $\Longrightarrow$ (iii): PROP. 3.14.; (iii) $\Longrightarrow$ (i): Como E é polinomialmente infra-tonelado, a asserção segue da PROP. 1.10. □

COROLÁRIO 3.16. *Para um espaço polinomialmente bornológico* E *são equivalentes as asserções seguintes:*

(i) E *é holomorficamente bornológico.*

(ii) E *possui a propriedade* (iM).

(iii) E *possui a propriedade* (D).

<u>Prova</u>

(i) $\Longrightarrow$ (ii): Basta observar que hbo $\Longrightarrow$ hib e que, pela PROP. 3.5., hib $\Longrightarrow$ iM; (ii) $\Longrightarrow$ (iii): PROP. 3.14.; (iii) $\Longrightarrow$ (i): Como E é polinomialmente bornológico, o resultado segue da PROP. 1.6. □

PROPOSIÇÃO 3.17. *Se um espaço localmente convexo* E *possui a propriedade* (M), *então* E *possui a propriedade* (D^*) (cfr. DEF. 1.18.).

<u>Prova</u>

Resulta de pequenas modificações na prova da PROP.1.20. da mesma forma que a PROP. 3.14. segue da PROP. 1.10. □

COROLÁRIO 3.18. *Para um espaço polinomialmente tonelado* (cfr. DEF.

1.17.) *as asserções seguintes são equivalentes:*

(i) E *é holomorficamente tonelado.*

(ii) E *possui a propriedade* (M).

(iii) E *possui a propriedade* (D^*).

<u>Prova</u> :

(i) $\Longrightarrow$ (ii): PROP. 3.5.; (ii) $\Longrightarrow$ (iii): PROP. 3.17.; (iii) $\Longrightarrow$ (i): Como E é polinomialmente tonelado, o resultado segue da PROP. 1.20. □

§4 - G-ESPAÇOS

Seja $(E_m)_{m\in\mathbb{N}}$ uma seqüência crescente de espaços de Banach e indiquemos com E o espaço vetorial reunião dos espaços E_m, munido da topologia limite indutivo para as inclusões $E_m \subset E$. Seja $m\in\mathbb{N}$, $X \subset E_m$ e $\mathcal{F}$ um filtro sobre X. Diz-se que $\mathcal{F}$ é E_m--Cauchy (resp. E_m-convergente) se $\mathcal{F}$ é um filtro de Cauchy (resp. convergente) para a estrutura uniforme induzida sobre X por E_m. Analogamente, diz-se que $\mathcal{F}$ é E-Cauchy (resp. E-convergente) se $\mathcal{F}$ é um filtro de Cauchy (resp. convergente) para a estrutura uniforme sobre X induzida por E.

Usando a terminologia introduzida em [Mu], Def. 1.5., (c), diremos que $E = \varinjlim E_m$ é um limite indutivo Cauchy-regular, se para cada parte limitada $B \subset E$, existe $m\in\mathbb{N}$ tal que B está contida e é limitada em E_m e, além disto, para cada filtro $\mathcal{F}$ sobre B, $\mathcal{F}$ é E-Cauchy se e só se $\mathcal{F}$ é E_m-Cauchy.

DEFINIÇÃO 4.1. Um espaço localmente convexo separado E é dito um G-espaço se satisfaz as duas condições seguintes:

(G1) Existe uma seqüência crescente $(E_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de espaços de Banach tal que:

(a) $E = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} E_m$

(b) Para cada $m \in \mathbb{N}$, a inclusão $j_m : E_m \hookrightarrow E_{m+1}$ é contínua e $\|j_m\| = 1$

(c) A topologia de E é a topologia limite indutivo para a seqüência de inclusões $i_m : E_m \hookrightarrow E$, $m \in \mathbb{N}$.

(G2) $E = \varinjlim E_m$ é um limite indutivo Cauchy-regular.

EXEMPLO 1. Todo espaço de Banach é de modo trivial um G-espaço.

EXEMPLO 2. Se X e Y são dois espaços de Banach complexos e K é uma parte compacta não vazia de X, então o espaço

$$(\mathcal{H}(K;Y);\mathcal{T}_\omega)$$

dos germes holomorfos sobre K a valores em Y munido da topologia $\mathcal{T}_\omega$, é um G-espaço (cfr. [Ch], PROP. 3.2. e PROP. 3.8.).

EXEMPLO 3. Se X é um espaço localmente convexo metrizável e quase-normável complexo e K é uma parte compacta não vazia de X, então o espaço

$$(\mathcal{H}(K);\mathcal{T}_\omega)$$

dos germes holomorfos sobre K a valores em $\mathbb{C}$, é um G-espaço (cfr. [A - Mu], Th. 2).

NOTAÇÃO. No que segue, a menos de advertência em contrário, o símbolo

$$E = \varinjlim E_m$$

indica um G-espaço complexo e U indica um aberto não vazio de E.

PROPOSIÇÃO 4.2. *Seja* $E = \varinjlim E_m$ *um G-espaço, então:*

(1º) *E é tonelado, bornológico, (DF), completo e quase-normável.*

(2º) *Se B é uma parte limitada de E e $m \in \mathbb{N}$ é tal que B está contida e é limitada em E_m, então as topologias induzidas sobre B por E e por E_m coincidem e, portanto, B é metrizável. Em particular, toda parte compacta de E é seqüencialmente compacta.*

Prova

(1º) Os espaços E_m são de Banach, logo são tonelados, bornológicos, (DF) e quase-normáveis, portanto, E também possui estas propriedades por razões de estabilidade bem conhecidas. Para verificar que E é completo, como E é (DF), é suficiente provar que E é quase-completo. Seja F um filtro E-Cauchy sobre uma parte limitada fechada X de E, então existe $m \in \mathbb{N}$ tal que, se $i_m : E_m \hookrightarrow E$ indica a inclusão, o conjunto $X = i_m^{-1}(X)$ está contido e é limitado em E_m e, como i_m é contínua, X é uma parte fechada em E_m. Por (G2), F é E_m-Cauchy, logo E_m-convergente, donde F é E-convergente.

(2º) Seja $\mathcal{T}$ (resp. $\mathcal{T}_m$) a topologia induzida sobre B por E (resp. E_m). Como $i_m : E_m \hookrightarrow E$ é contínua, é claro que $\mathcal{T} \leq \mathcal{T}_m$. Para cada $x \in B$, indiquemos com $\mathcal{V}_{\mathcal{T}}(x)$ (resp. $\mathcal{V}_{\mathcal{T}_m}(x)$) o filtro das $\mathcal{T}$-vizinhanças (resp. $\mathcal{T}_m$-vizinhanças) de x, então para verificar que $\mathcal{T} \geq \mathcal{T}_m$ é suficiente provar que

$$\mathcal{V}_{\mathcal{T}}(x) \supset \mathcal{V}_{\mathcal{T}_m}(x), \quad \text{para cada} \quad x \in B.$$

Suponhamos que B é fechado em E_m. É claro que $\mathcal{V}_{\mathcal{T}}(x)$ é E-Cauchy, logo por (G2), $\mathcal{V}_{\mathcal{T}}(x)$ é E_m-Cauchy. Como B é fechado e E_m é completo, B é completo, portanto,

$$\mathcal{V}_{\mathcal{T}}(x) \xrightarrow{E_m} x$$

e, em conseqüência, $\mathcal{V}_{\mathcal{T}}(x) \supset \mathcal{V}_{\mathcal{T}_m}(x)$, o que prova que $\mathcal{T} \geq \mathcal{T}_m$ neste caso. No caso geral, seja $\bar{B}$ o fecho em E_m de B; pelo que precede as topologias induzidas sobre $\bar{B}$ por E e E_m coincidem, logo o mesmo acontece com B. □

TEOREMA 4.3. *Para um* G-*espaço* $E = \varinjlim E_m$ *valem as asserções seguintes:*

(1º) E *é polinomialmente bornológico* (cfr. DEF. 1.5.).

(2º) E *é fortemente polinomialmente tonelado* (cfr. DEF. 1.21.) *e, portanto, polinomialmente tonelado* (cfr. DEF. 1.17.).

(3º) E *é localmente holomorficamente tonelado* (cfr. DEF. 3.12) *e localmente holomorficamente infra-tonelado.*

Prova

As asserções (1º) e (2º) resultam imediatamente da PROP. 4.2., (1º) e da PROP. 1.22. Para demonstrar a asserção (3º), vamos verificar por exemplo que E é localmente holomorficamente infra-tonelado (para "localmente holomorficamente tonelado" basta trocar na prova que segue a palavra "compacto" pela expressão "compacto de dimensão finita", etc.). Dados U e F, seja X uma parte $\mathcal{T}_o$-limitada de $H(U;F)$. Fixado um compacto $K \subset U$ arbitrário, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que K está contido e é limitado em E_m, logo K é um compacto de $U_m = U \cap E_m$. Como $X_m = \{f|U_m \mid f \in X\}$ é uma parte $\mathcal{T}_o$-limitada de $H(U_m;F)$ e E_m é localmente holomorficamente infra-tonelado, resulta que $X_m|K = X|K$ é uma parte eqüicontínua o que prova o resultado, pois as topologias induzidas sobre K por E e por E_m coincidem, pela PROP. 4.2., (2º). □

LEMA 4.4. *Se* $E = \varinjlim E_m$ *é um G-espaço, então para cada* U *e para cada* F *temos* (cfr. DEF. 1.18. e DEF. 1.1.),

$$H_{D^*}(U;F) = H_D(U;F).$$

<u>Prova</u>

Seja $f \in H_{D^*}(U;F)$ e K um compacto de U. Existe $m \in \mathbb{N}$ tal que K está contido e é compacto em $U_m = U \cap E_m$; seja $f_m = f|U_m$. Indicando com $i_m : E_m \hookrightarrow E$ a inclusão, as relações

$$\hat{\partial}^n f_m(\xi) = \hat{\partial}^n f(\xi) \circ i_m, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N} \text{ e cada } \xi \in U_m$$

provam que $f_m \in H_{D^*}(U_m;F)$. Ora, como E_m é holomorficamente tonelado, pela PROP. 1.20., resulta que $f_m \in H(U_m;F)$, o que implica que $f(K) = f_m(K)$ é limitado em F. □

LEMA 4.5. *Para um G-espaço E são equivalentes as asserções seguintes:*

(i) E *é holomorficamente bornológico.*

(ii) E *é holomorficamente tonelado*

(iii) E *possui a propriedade* (D^*).

<u>Prova</u>

(i) $\Longrightarrow$ (ii): Pela PROP. 1.6., E possui a propriedade (D), logo, pelo LEMA 4.4., E possui a propriedade (D^*). Como E é polinomialmente tonelado (pelo TEOR. 4.3.), a PROP.1.20. implica que E é holomorficamente tonelado.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii): Segue da PROP. 1.20.

(iii) $\Longrightarrow$ (i): Como $D^* \Longrightarrow D$, resulta que E possui a propriedade (D). De outro lado, pelo TEOR. 4.3., E é polinomialmente bornológico e, então, (i) segue da PROP. 1.6. □

Agora, estamos em condições de demonstrar o resultado principal deste trabalho.

TEOREMA 4.6. *Para um G-espaço E as asserções seguintes são equivalentes:*

(i) E *é holomorficamente bornológico.*

(ii) E *é holomorficamente tonelado.*

(iii) E *é holomorficamente infra-tonelado.*

(iv) E *possui a propriedade* (D).

(v) E *possui a propriedade* (D^*).

(vi) E *é* σ*-polinomialmente infra-tonelado* (cfr. DEF. 1.23.).

(vii) E *é holomorficamente semi-bornológico* (cfr. DEF. 1.28.).

(viii) E *é hipoholomorfo.*

(ix) $(\mathcal{H}(U;F);\mathcal{T}_o)$ *é completo para cada* U *e para cada espaço localmente convexo separado completo* F.

(x) $(\mathcal{H}(U;F);\mathcal{T}_o)$ *é completo para cada* U *equilibrado e para cada espaço localmente convexo separado completo* F.

(xi) E *é holomorficamente de Mackey e* $(\mathcal{H}(U);\mathcal{T}_o)$ *é completo para cada* U *equilibrado.*

(xii) E *possui a propriedade* (M) (cfr. DEF. 3.4.).

(xiii) E *possui a propriedade* (iM) (cfr. DEF. 3.4.).

<u>Prova</u>

Como E é polinomialmente bornológico (pelo TEOR. 4.3., (1º)), as equivalências:

(i) $\Leftrightarrow$ (iii) $\Leftrightarrow$ (iv) $\Leftrightarrow$ (vi) $\Leftrightarrow$ (viii) $\Leftrightarrow$ (ix) $\Leftrightarrow$ (x) $\Leftrightarrow$ (xi)

seguem do TEOR. 2.6. Pelo LEMA 4.5., resulta (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (v). Pela PROP. 4.2., (2º), todo compacto de E é seqüencialmente compacto, portanto, pelo COROL. 1.30., temos: (i) $\Rightarrow$ (vii) $\Rightarrow$ (viii) e, como (i) $\Leftrightarrow$ (viii), resulta que (i) $\Leftrightarrow$ (vii). Finalmente, o TEOR. 4.3., (1º) e o COROL. 3.16. implicam que (i) $\Leftrightarrow$ (xiii) e o TEOR. 4.3.,(2º) e o COROL.3.18. mostram que (ii) $\Leftrightarrow$ (xii). □

OBSERVAÇÃO 1. É claro que podem ser obtidas novas condições equivalentes às do TEOR. 4.6. a partir das proposições 3.2. e 3.2'. assim como também a partir dos corolários 3.11. e 3.11'.

OBSERVAÇÃO 2. É trivial dar exemplos de G-espaços holomorficamente bornológicos que não são espaços de Silva: um espaço de Banach de dimensão infinita é um G-espaço holomorficamente bornológico, mas não é um espaço de Silva, pois não é um espaço de Montel.

PROPOSIÇÃO 4.7. *Para um G-espaço* $E = \varinjlim E_m$, *as asserções seguintes são equivalentes:*

(i) E *é um espaço de Silva.*

(ii) E *é um espaço de Schwartz.*

(iii) E *é um espaço de Montel* (ou equivalentemente, semi-Montel, pois todo G-espaço é infra-tonelado).

Prova

(i) $\Longrightarrow$ (ii): Como E é um espaço (DF) e infra-tonelado, resulta que E é quase-normável e, como E (por definição) é separado, é suficiente verificar que todo limitado de E é precompacto. Dada uma parte limitada L de E, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que L está contido e é limitado em E_m, portanto, se indicamos com B a bola unitária em E_m, existe $\lambda > 0$ tal que $\lambda L \subset B$. Como conseqüência de (i), resulta, indicando com $j_m : E_m \hookrightarrow E_{m+1}$ a inclusão, que

$$j_m(\lambda L) = \lambda j_m(L) = \lambda L$$

é relativamente compacto em E_{m+1}, donde L é precompacto em E.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii): Se L é uma parte limitada de E, por (ii), L é precompacto, logo relativamente compacto em E, pois E é completo pela PROP. 4.2., (1º).

(iii) $\Longrightarrow$ (i): É claro que basta mostrar que existe uma subseqüência $(E_{m_\nu})_{\nu\in\mathbb{N}}$ de $(E_m)_{m\in\mathbb{N}}$ tal que as inclusões $h_\nu : E_{m_\nu} \hookrightarrow E_{m_{\nu+1}}$ são compactas para cada $\nu \in \mathbb{N}$. Definimos $m_0 = 0$ e suponhamos definidos $m_1, \dots, m_\nu$ de modo que $m_0 < m_1 < \dots < m_\nu$ e que as inclusões $h_i : E_{m_i} \hookrightarrow E_{m_{i+1}}$ sejam compactas para $i = 0, 1, \dots$ $\dots, \nu - 1$; vamos definir $m_{\nu+1}$. Seja B a bola unitária de E_{m_ν}, então, indicando com $i_{m_\nu} : E_{m_\nu} \hookrightarrow E$ a inclusão, o conjunto $i_{m_\nu}(B) = B$ é limitado em E, logo, por (iii), B é relativamente compacto em E. Resulta, então, que existe $p \in \mathbb{N}$ tal que B está contido e é relativamente compacto em E_p e é claro que podemos sepor $p > m_\nu$ e definir $m_{\nu+1} = p$. □

Como os espaços de Banach de dimensão infinita são exemplos banais de G-espaços holomorficamente bornológicos que não são espaços de Silva, a fim de evitar este caso trivial, damos a seguinte definição:

DEFINIÇÃO 4.8. Chama-se <u>G-espaço próprio</u> a todo G-espaço

$E = \varinjlim E_m$ tal que $E_m \subsetneqq E$ para todo $m \in \mathbb{N}$.

PROPOSIÇÃO 4.9. *Um G-espaço próprio* $E = \varinjlim E_m$ *não é um espaço normado.*

Prova

Se E fosse normado, pela PROP. 4.2., (1º), E seria um espaço de Banach. Como E é próprio, para cada $m \in \mathbb{N}$, a inclusão $i_m : E_m \hookrightarrow E$ não é sobrejetora, donde, pelo teorema da aplicação aberta, E_m é magro em E. Como

$$E = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} E_m,$$

resulta que E é uma reunião enumerável de conjuntos raros o que é absurdo. □

Na realidade, para os G-espaços próprios temos o resultado muito mais completo seguinte.

PROPOSIÇÃO 4.10. *Para um G-espaço* $E = \varinjlim E_m$ *as asserções seguintes são equivalentes:*

(i) $E_m \subsetneqq E$ *para cada* $m \in \mathbb{N}$ (isto é, E é próprio).

(ii) *Existe uma subseqüência* (E_{m_ν}) *de* E_m *tal que* $E_{m_\nu} \subsetneqq E_{m_{\nu+1}}$ *para todo* $\nu \in \mathbb{N}$.

(iii) E *não é metrizável.*

Prova

(i) $\Longrightarrow$ (ii): Se não fosse assim, na seqüência

$$E_0 \hookrightarrow E_1 \hookrightarrow \ldots \hookrightarrow E,$$

haveria apenas um número finito de inclusões próprias e, portanto, existiria $p \in \mathbb{N}$ tal que $E_p = E$, pois $E = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} E_m$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii): Suponhamos, por absurdo, que E é metrizável. Por (ii), existe $x_\nu \in E_{m_{\nu+1}} \setminus E_{m_\nu}$ para cada $\nu \in \mathbb{N}$ e, então, pela condição de enumerabilidade de Mackey (cfr. [H], Ch.2, §6) aplicada à seqüência de limitados $(\{x_\nu\})_{\nu \in \mathbb{N}}$, existe um limitado B em E e uma seqüência $(\lambda_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ de números reais positivos tais que $\lambda_\nu^{-1} x_\nu \in B$ para todo $\nu \in \mathbb{N}$. Em conseqüência, o conjunto

$$L = \{\lambda_\nu^{-1} x_\nu \mid \nu \in \mathbb{N}\}$$

é uma parte limitada de E e, portanto, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que L está contido e é limitado em E_p, o que acarreta que $x_\nu \in E_p$ para todo $\nu \in \mathbb{N}$. Ora, é claro que existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $E_p \subset E_{m_q}$, em conseqüência, $x_\nu \in E_{m_q}$ para todo $\nu \in \mathbb{N}$, o que é absurdo, pois $x_{q+1} \notin E_{m_q}$.

(iii) $\Longrightarrow$ (i): Claro, pois se existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $E_m = E$, então, E é um espaço de Banach, logo metrizável. $\square$

OBSERVAÇÃO. Em virtude da condição (ii) da PROP. 4.10., podemos supor sem perda de generalidade no que segue, que todo G-espaço próprio $E = \underrightarrow{\lim}\, E_m$ satisfaz a condição $E_m \subsetneqq E_{m+1} \subsetneqq E$ para cada $m \in \mathbb{N}$.

Eliminando o caso trivial dos G-espaços holomorficamente bornológicos que não são espaços de Silva constituído pelos espaços de Banach de dimensão infinita e, considerando que os únicos G-espaços próprios holomorficamente bornológicos que conhecemos são os G-espaços que são espaços de Silva, parece natural a questão seguinte: "Para um G-espaço próprio E vale a implicação: E é holomorficamente bornológico $\Longrightarrow$ E é um espaço de Silva?". Pela PROP. 4.7., para que um G-espaço próprio E seja um espaço de Silva é suficiente que E seja semi-Montel, desta forma, a questão acima pode ser formulada assim: "Para um G-espaço próprio E vale a implicação: E é holomorficamente bornológico $\Longrightarrow$ todo limitado de E é relativamente compacto?"

§5 - COMPLEMENTOS E CASOS PARTICULARES

O nosso primeiro objetivo neste § é provar uma condição suficiente para que um G-espaço próprio não seja holomorficamente bornológico (PROP. 5.3.). Na PROP. 5.4. provamos que esta condição é, em certos casos, também necessária. Precisaremos dos dois lemas seguintes.

LEMA 5.1. *Seja* U *um aberto não vazio de um espaço localmente convexo não semi-normado* E, *seja* F *um espaço localmente convexo, seja* $f \in \mathcal{H}_D(U;F)$ *e* $\xi \in U$. *Então, são equivalentes as asserções seguintes:*

(i) f *é contínua em* ξ.

(ii) f *é localmente limitada em* ξ.

(iii) *Para cada* $\beta \in SC(F)$, *existe* $\alpha \in SC(E)$, $\alpha \neq 0$ *tal que*

(a) $\frac{1}{m!}\hat{\partial}^m f(\xi) \in P({}^mE_\alpha;F_\beta)$, *para todo* $m \in \mathbb{N}$

(b) $\sup\limits_{m\in\mathbb{N}} \|\frac{1}{m!}\hat{\partial}^m f(\xi)\|_{\alpha,\beta} < \infty$.

Prova

(i) $\Longrightarrow$ (ii): Claro; (ii) $\Longrightarrow$ (iii): Suponhamos F separado. Dada $\beta \in SC(F)$ arbitrária, como f é localmente limitada em ξ e E não é semi-normado, existe $\alpha \in SC(E)$, $\alpha \neq 0$ tal que

$\bar{B}_{\alpha,1}(\xi) \subset U$ e

$$S = \sup \{\beta[f(x)] \mid \alpha(x-\xi) \leq 1\} < \infty.$$

Como $\xi + \lambda t \in \bar{B}_{\alpha,1}(\xi)$ para cada $\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \leq 1$ e para cada $t \in \bar{B}_{\alpha,1}(0)$, resulta:

$$\frac{1}{m!}\hat{\partial}^m f(\xi)\cdot t = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=1} \frac{f(\xi+\lambda t)}{\lambda^{m+1}}\, d\lambda, \quad \text{para cada } t \in \bar{B}_{\alpha,1}(0),\ m \in \mathbb{N}$$

donde, pelo teorema do valor médio de Lagrange, segue

$$\left\|\frac{1}{m!}\hat{\partial}^m f(\xi)\right\|_{\alpha,\beta} \leq \sup \{\beta[f(\xi+\lambda t)] \mid |\lambda|=1 \text{ e } \alpha(t)=1\} \leq S$$

para cada $m \in \mathbb{N}$, o que prova (a) e (b) no caso F separado. Suponhamos, agora, F arbitrário. Seja $\tilde{F}$ o espaço separado associado a F e $q: F \to \tilde{F}$ a aplicação quociente, então,

$$\tilde{f} = q \circ f \in \mathcal{H}(U;\tilde{F}).$$

Dada $\beta \in SC(F)$, seja $\bar{\beta} \in SC(\tilde{F})$ a semi-norma definida pela relação $\bar{\beta} \circ q = \beta$, então, pelo caso anterior, associada a $\bar{\beta}$ e $\tilde{f}$, existe $\alpha \in SC(E)$, $\alpha \neq 0$ tal que

$$\frac{1}{m!}\hat{\partial}^m \tilde{f}(\xi) \in \mathcal{P}({}^m E_\alpha;\tilde{F}_{\bar{\beta}}) \quad \text{para cada } m \in \mathbb{N}$$

$$\sup_{m\in\mathbb{N}} \left\|\frac{1}{m!}\hat{\partial}^m \tilde{f}(\xi)\right\|_{\alpha,\bar{\beta}} < \infty,$$

o que prova as asserções (a) e (b) em virtude da relação

$$\left\|\frac{1}{m!}\hat{\partial}^m f(\xi)\right\|_{\alpha,\beta} = \left\|\frac{1}{m!}\hat{\partial}^m \tilde{f}(\xi)\right\|_{\alpha,\bar{\beta}} \quad \text{para todo } m \in \mathbb{N}.$$

(iii) $\Longrightarrow$ (i): Fixada $\beta \in SC(F)$ arbitrária, indiquemos com $r: F_\beta \to F/_\beta$ a aplicação quociente e com $\dot{\beta}$ a semi-norma induzida por β sobre $F/_\beta$ (isto é, $\beta = \dot{\beta} \circ r$). Seja $g = r \circ f$. Por (iii), existe $\alpha \in SC(E)$, $\alpha \neq 0$ tal que

$$\frac{1}{m!}\,\hat{\partial}^m g(\xi) \in P(^mE_\alpha; F/_\beta), \quad \text{para cada } m \in \mathbb{N}$$

$$S = \sup_{m \in \mathbb{N}} \left\|\frac{1}{m!}\,\hat{\partial}^m g(\xi)\right\|_{\alpha,\dot{\beta}} < \infty.$$

Como $g \in H_D(U; F/_\beta)$, se V é uma vizinhança ξ-equilibrada de ξ em U, temos

$$g(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}\,\hat{\partial}^m g(\xi)(x-\xi), \quad \text{pontualmente para cada } x \in V.$$

Dado $\varepsilon > 0$, seja ρ tal que $0 < \rho < 1$ e $S\rho(1-\rho)^{-1} \leq \varepsilon$, então, para cada $x \in B_{\alpha,\rho}(\xi) \cap V$, temos

$$\beta[f(x) - f(\xi)] = \dot{\beta}[g(x) - g(\xi)] \leq \sum_{m=1}^{\infty} \dot{\beta}\left[\frac{1}{m!}\,\hat{\partial}^m g(\xi)(x-\xi)\right] \leq$$

$$\leq \sum_{m=1}^{\infty} \left\|\frac{1}{m!}\,\hat{\partial}^m g(\xi)\right\|_{\alpha,\dot{\beta}} \alpha(x-\xi)^m \leq S\rho(1-\rho)^{-1} \leq \varepsilon. \qquad \square$$

LEMA 5.2. *Um espaço localmente convexo* E *é holomorficamente bornológico se e só se verifica a condição seguinte:*

(*) *Para cada aberto absolutamente convexo* $W \subset E$ *e para cada espaço normado* G, *toda aplicação* $g \in H_c(W;G)$ *é localmente limitada em* 0.

Prova

Clara. $\square$

PROPOSIÇÃO 5.3. *Seja* $E = \varinjlim E_\nu$ *um G-espaço próprio* (cfr. DEF. 4.8.) *e indiquemos com* $B_r^{(\nu)}$ *a bola aberta de centro* 0 *e raio* r *no espaço* E_ν *para cada* $\nu \in \mathbb{N}$. *Suponhamos verificada a condição seguinte:*

(*) *Existe um espaço normado* G, *existe uma seqüência* $(P_m)_{m \in \mathbb{N}}$ *tal que* $P_m \in P(^mE;G)$ *para cada* $m \in \mathbb{N}$ *e existe* $r > 0$, *de modo que as propriedades seguintes estão verificadas:*

(a) *A série*

$$\sum_{m=0}^{\infty} (P_m|E_\nu)(x)$$

converge pontualmente para cada $x \in B_r^{(\nu)}$ *e para cada* $\nu \in \mathbb{N}$.

(b) *Para cada* $\alpha \in SC(E)$, $\alpha \neq 0$ *temos*

$$\sup_{m \in \mathbb{N}} \|P_m\|_\alpha = \infty.$$

Então, E *não é holomorficamente bornológico.*

Prova

Vamos construir um aberto W de E e uma aplicação

$$f \in \mathcal{H}_D(W;G) = \mathcal{H}_c(W;G) \quad \text{(cfr. PROP. 1.31., (3º))}$$

tal que f não é contínua. Como $\|j_\nu\| = 1$ para cada $\nu \in \mathbb{N}$ (cfr. DEF. 4.1., (G1), (b)), é claro que $B_r^{(\nu)} \subset B_r^{(\nu+1)}$ para cada

$\nu \in \mathbb{N}$ e, portanto, o conjunto reunião

$$V = \bigcup_{\nu \in \mathbb{N}} B_r^{(\nu)}$$

é uma vizinhança de 0 em E; seja $W = \mathring{V}$. É claro que a série

$$\sum_{m=0}^{\infty} P_m(x)$$

converge pontualmente para cada $x \in W$ e, em conseqüência, define uma aplicação

$$f : x \in W \longrightarrow \sum_{m=0}^{\infty} P_m(x) \in G$$

Mostremos que f é algebricamente holomorfa. Seja S um subespaço vetorial de dimensão finita de E, então, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $S \subset E_k$. Fixado $\xi \in W \cap S$, vamos provar que existe uma vizinhança aberta A de ξ em $W \cap S$ tal que $f|A \in \mathcal{H}(A;G)$. É claro que existe $n \geq k$ tal que $\xi \in B_r^{(n)}$. Consideremos, para cada $\nu \in \mathbb{N}$ a aplicação

$$g_\nu : x \in B_r^{(\nu)} \longrightarrow \sum_{m=0}^{\infty} (P_m | E_\nu)(x) \in G.$$

A hipótese (a) acarreta que $g_\nu \in \mathcal{H}(B_r^{(\nu)};G)$ para cada $\nu \in \mathbb{N}$. Como $B_r^{(n)} \cap S$ e $W \cap S$ são abertos em S que contêm ξ, o conjunto

$$A = B_r^{(n)} \cap W \cap S$$

é um aberto em S que contém ξ e, como

$$f|A = g_n|A \quad \mathcal{H}(A;G),$$

segue que $f \in \mathcal{H}_a(W;G)$. A seguir, ponhamos

$$W_\nu = W \cap E_\nu \quad \text{para cada} \quad \nu \in \mathbb{N},$$

e mostremos que

$$f_\nu = f|W_\nu \in \mathcal{H}(W_\nu;G) \quad \text{para cada} \quad \nu \in \mathbb{N}.$$

Fixado $\nu \in \mathbb{N}$ arbitrário, como $f \in \mathcal{H}_a(W;G)$ é claro que $f_\nu \in \mathcal{H}_a(W_\nu;G)$ e, em conseqüência, como W_ν é um aberto conexo de E_ν, por um teorema clássico de Zorn, é suficiente verificar que o conjunto X dos pontos de W_ν em que f_ν é contínua, é não vazio. Ora, isto é imediato, pois as relações:

$$g_\nu \in \mathcal{H}(B_r^{(\nu)};G) \quad \text{e} \quad f|W \cap B_r^{(\nu)} = g_\nu|W \cap B_r^{(\nu)}$$

mostram que $\phi \neq W \cap B_r^{(\nu)} \subset X$, o que prova a asserção. Em conseqüência, resulta que $f \in \mathcal{H}_c(W;G)$, pois se K é um compacto de W, existe $\nu \in \mathbb{N}$ tal que K está contido e é compacto em E_ν, logo

$$K \subset W_\nu = W \cap E_\nu$$

e, como $f_\nu = f|W_\nu \in \mathcal{H}(W_\nu;G)$, segue que $f(K)$ é limitado. Mostremos, finalmente, que f não é contínua. Pela unicidade do desenvolvimento de Taylor, temos

$$P_m = \frac{1}{m!}\,\hat{\partial}^m f(0) \quad \text{para todo} \quad m \in \mathbb{N}.$$

Em conseqüência, dada $\alpha \in SC(E)$, $\alpha \neq 0$ arbitrária, a hipótese (b) implica

$$\sup_{m\in\mathbb{N}} \left\|\frac{1}{m!}\hat{\partial}^m f(0)\right\|_\alpha = \infty.$$

Como E é um G-espaço próprio, pela PROP. 4.10., E não é semi-normado, logo pelo LEMA 5.1., temos $f \notin H(W;G)$, donde E não é holomorficamente bornológico. □

No próximo resultado, usamos a notação seguinte. Se $E = \varinjlim E_\nu$ é um G-espaço próprio e W é um aberto não vazio de E, para cada $m \in \mathbb{N}$, pomos:

$$W_m = W \cap E_m.$$

PROPOSIÇÃO 5.4. *Seja* $E = \varinjlim E_\nu$ *um G-espaço próprio e suponhamos verificada a propriedade seguinte:*

(F) *Para cada aberto absolutamente convexo* $W \subset E$, *temos*

$$\inf \{d_m | m \in \mathbb{N}\} > 0$$

onde $d_m = \operatorname{dist}(0, \partial W_m)$.

Então, a condição (*) *da PROP. 5.3. é necessária para que* E *não seja holomorficamente bornológico.*

Prova

Pelo LEMA 5.2., existe um aberto absolutamente convexo $W \subset E$, existe um espaço normado G e existe $g \in H_c(W;G)$ tal que g não é localmente limitada em 0. Seja r um número real tal que

$$0 < r < \inf \{d_m \mid m \in \mathbb{N}\}$$

então, é claro que $B_r^{(m)} \subset W_m$ para todo $m \in \mathbb{N}$, o que acarreta, pondo

$$P_m = \frac{1}{m!} \hat{\partial}^m g(0) \quad \text{para cada} \quad m \in \mathbb{N}$$

que a série

$$\sum_{m=0}^{\infty} (P_m | E_\nu)(x)$$

converge pontualmente para cada $x \in B_r^{(\nu)}$ e para cada $\nu \in \mathbb{N}$. De outro lado, como g não é localmente limitada em 0, pelo LEMA 5.1., para cada $\alpha \in SC(E)$, $\alpha \neq 0$ devemos ter

$$\sup_{m \in \mathbb{N}} ||P_m||_\alpha = \infty. \quad \square$$

Os resultados que seguem usam técnicas desenvolvidas em [Ch] para os espaços normados e em [A-Mu] no caso dos espaços localmente convexos metrizáveis. Em primeiro lugar, enunciamos o seguinte:

LEMA 5.5. *Todo quociente de um espaço holomorficamente bornológico é holomorficamente bornológico.*

Prova

Clara. $\square$

No resultado seguinte indicamos com

$$[\mathcal{P}(^mE)]_i$$

o espaço $\mathcal{P}(^m E)$ munido da topologia limite indutivo, isto é,

$$[\mathcal{P}(^m E)]_i = \varinjlim \mathcal{P}(^m E_\alpha).$$

Indicamos com $\mathcal{H}(K)$ (resp. $\mathcal{H}(K;Y)$) o espaço localmente convexo $(\mathcal{H}(K);\mathcal{T}_\omega)$ (resp. $(\mathcal{H}(K;Y);\mathcal{T}_\omega)$) dos germes holomorfos sobre K a valores complexos (resp. a valores em Y), munido da topologia $\mathcal{T}_\omega$.

PROPOSIÇÃO 5.6. *Seja* E *um espaço localmente convexo,* K *um subconjunto compacto não vazio de* E *e suponhamos que* $\mathcal{H}(K)$ *é holomorficamente bornológico, então:*

(1º) $[\mathcal{P}(^m E)]_i$ *é holomorficamente bornológico para cada* $m \in \mathbb{N}$.

(2º) *Se* E *é metrizável e distinguido, então o dual forte* E'_b *de* E *é holomorficamente bornológico e fortemente polinomialmente tonelado.*

Prova

(1º) Pela Prop. 1 de [A-Mu], resulta que $[\mathcal{P}(^m E)]_i$ é um quociente de $\mathcal{H}(K)$, logo a asserção segue do LEMA 5.5.

(2º) Pelo Corol. da Prop. 1 de [A-Mu], as hipóteses feitas sobre E implicam que E'_b é isomorfo a $E'_i = [\mathcal{P}(^1 E)]_i$, logo E'_b é holomorficamente bornológico por (1º). Como E'_b é um espaço (DF) e tonelado, E'_b é fortemente polinomialmente tonelado pela PROP. 1.22. □

COROLÁRIO 5.7. *Seja* E *um espaço localmente convexo metrizável e* *distinguido tal que o dual forte* E'_b *de* E *não é holomorficamen-bornológico. Então, para cada parte compacta não vazia* $K \subset E$, *o espaço* $H(K)$ *não é holomorficamente bornológico.*

Prova

Segue imediatamente da PROP. 5.6., (2º). □

PROPOSIÇÃO 5.8. *Seja* X *um espaço normado complexo,* Y *um espaço de Banach complexo e* K *uma parte compacta não vazia de* X. *Então, as condições seguintes são equivalentes:*

(i) $H(K;Y)$ *é um espaço de Silva.*

(ii) X *e* Y *têm dimensão finita.*

Prova

A implicação (ii) $\Longrightarrow$ (i) é bem conhecida, portanto, só resta verificar que (i) $\Longrightarrow$ (ii). A hipótese acarreta que $H(K;Y)$ é um espaço de Montel e, em conseqüência, o espaço de Banach $L(X;Y)$, que é um subespaço fechado de $H(K;Y)$ (cfr. [Ch], Prop. 7.2.), é um espaço de Montel. Resulta que $L(X;Y)$ tem dimensão finita, donde (ii). □

O último resultado deste trabalho é uma condição suficiente para que um espaço de germes não seja um espaço de Silva. Se U é um aberto não vazio de um espaço localmente convexo E e F é um espaço de Banach, indicamos com a notação

$$H^{\infty}(U;F)$$

o espaço de Banach de todas as aplicações holomorfas limitadas de U em F.

LEMA 5.9. *Seja* E *um espaço localmente convexo complexo metrizável,* F *um espaço de Banach complexo de dimensão infinita e* U *e* V *dois abertos não vazios de* E *tais que* $V \subset U$, *Então, a aplicação de restrição*

$$j: f \in H^{\infty}(U;F) \longmapsto f|V \in H^{\infty}(V;F)$$

não é compacta.

Prova

Seja B a bola unitária aberta de $H^{\infty}(U;F)$ e suponhamos, por absurdo, que j é compacta. Fixado $\xi \in V$ arbitrário, é claro que a aplicação

$$u: f \in H^{\infty}(V;F) \longmapsto f(\xi) \in F$$

é linear contínua. Como j é compacta, $j(B)$ é relativamente compacto em $H^{\infty}(V;F)$ e, em conseqüência, o conjunto

$$u(j(B)) = \{f(\xi) \mid f \in B\} = B(\xi)$$

é relativamente compacto em F. Mas, de outro lado, a aplicação composta

$$v = u \circ j: f \in H^{\infty}(U;F) \longmapsto f(\xi) \in F$$

é linear contínua e sobrejetora e $v(B) = B(\xi)$. O teorema da aplicação aberta acarreta que v é aberta, logo $B(\xi)$ é aberto em F e, como $B(\xi)$ é relativamente compacto, resulta que F tem dimensão finita, contra o suposto. □

PROPOSIÇÃO 5.10. ([G], Ch IV, §1, nº 5, Th. 1) *Seja F um espaço localmente convexo separado que é reunião de uma seqüência crescente de espaços de Fréchet (F_m) e suponhamos que a inclusão $F_m \hookrightarrow F$ é contínua. Se E é um espaço de Fréchet e $\phi: E \to F$ é uma aplicação linear contínua, então existe $m \in \mathbb{N}$ e uma aplicação linear contínua $\phi_m: E \to F_m$ tornando comutativo o diagrama*

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[dl, "\phi_m"'] \arrow[d, "\phi"] \\ F_m \arrow[r, hook] & F \end{tikzcd}$$

PROPOSIÇÃO 5.11. *Seja K uma parte compacta não vazia de um espaço localmente convexo complexo metrizável E e seja F um espaço de Banach complexo de dimensão infinita. Então, o espaço $\mathcal{H}(K;F)$ não é um espaço de Silva.*

<u>Prova</u>

O conjunto K possui um sistema fundamental enumerável decrescente de vizinhanças abertas $(U_m)_{m \in \mathbb{N}}$ e, então

$$\mathcal{H}(K;F) = \varinjlim \mathcal{H}^{\infty}(U_m;F).$$

Se $\mathcal{H}(K;F)$ fosse um espaço de Silva, existiria uma seqüência cres cente $(B_p)_{p\in \mathbb{N}}$ de espaços de Banach complexos cuja reunião é $H(K;F)$, a topologia $\mathcal{T}_\omega$ sobre $H(K;F)$ coincide com a topologia limite indutivo para as inclusões $B_p \hookrightarrow H(K;F)$, $p \in \mathbb{N}$ e tal que as inclusões

$$i_p : B_p \hookrightarrow B_{p+1}$$

são compactas para cada $p\in\mathbb{N}$. Pela PROP. 5.10., para cada $m\in\mathbb{N}$ existe $p = p_m \in \mathbb{N}$ e uma aplicação linear contínua ϕ_p tornando comutativo o diagrama

$$\begin{tikzcd} & H^\infty(U_m;F) \arrow[dl, "\phi_p"'] \arrow[d, hook] \\ B_p \arrow[r, hook] & H(K;F) \end{tikzcd}$$

O mesmo raciocínio aplicado a B_{p+1} mostra que existem $n\in\mathbb{N}$ e uma aplicação linear contínua ψ_n tornando comutativo o diagrama

$$\begin{tikzcd} & B_{p+1} \arrow[dl, "\psi_n"'] \arrow[d, hook] \\ H^\infty(U_n;F) \arrow[r, hook] & H(K;F) \end{tikzcd}$$

Como a seqüência $(H^\infty(U_j;F))$ é crescente, podemos supor que $n \geq m$ e, em conseqüência, temos uma aplicação de restrição

$$j : H^\infty(U_m;F) \longrightarrow H^\infty(U_n;F).$$

O diagrama de aplicações lineares contínuas (injetoras)

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{H}^{\infty}(U_m;F) \arrow[rr, "\phi_p"] \arrow[dr] \arrow[dd, "j"'] & & B_p \arrow[dl, hook'] \arrow[dd, "i_p"] \\
& \mathcal{H}(K;F) & \\
\mathcal{H}^{\infty}(U_n;F) \arrow[ur, hook] & & B_{p+1} \arrow[ll, "\psi_n"] \arrow[ul, hook]
\end{tikzcd}
$$

tem todos os "triângulos internos" comutativos, donde resulta que

$$j = \psi_n \circ i_p \circ \phi_p$$

e, como i_p é, por hipótese compacta, segue que j é compacta em contradição com o LEMA 5.9. □

BIBLIOGRAFIA

[A-Mu] - P. AVILÉS e J. MUJICA, Holomorphic germs and homogeneous polynomials on quasi-normable metrizable spaces, Rendiconti di Matemática, a aparecer.

[B] - J. A. BARROSO, Topologias nos espaços de aplicações holomorfas entre espaços localmente convexos, An. Acad. Bras. de Ciências, Vol. 43, n^{os} 3/4, pp. 527-546 (1971).

[BMN] - J. A. BARROSO; M.C. MATOS e L. NACHBIN, On holomorphy versus linearity in classifying locally convex spaces, Infinite Dimensional Holomorphy and Applications (Editor: M. C. Matos), North-Holland Mathematics Studies, a aparecer.

[Ch] - S. B. CHAE, Holomorphic germs on Banach spaces, Ann. Inst. Fourier, 21, 3, pp. 107-141 (1971).

[D] - S. DINEEN, Holomorphic functions on strong duals of Fréchet-Montel spaces, Infinite Dimensional Holomorphy and Applications (Editor: M. C. Matos), North-Holland Mathematics Studies, a aparecer.

[G] - A. GROTHENDIECK, Espaces vectoriels topologiques, Publicação da Sociedade Matemática de São Paulo, 3ª Edição (1964).

[H] - J. HORVÁTH, Topological vector spaces and distributions, Vol. I, Addison Wesley (1966).

[M] - M. C. MATOS, On locally convex spaces with the Montel property, Finctional Analysis (Editor: D. G. de Figueiredo), pp. 245-250, Marcel Dekker (1976).

[Mu] - J. MUJICA, Spaces of germs of holomorphic functions, Advances in Mathematics, a aparecer.

[N1] - L. NACHBIN, A glimpse at infinite dimensional holomorphy, Proceedings on Infinite Dimensional Holomorphy. (Editors: T. L. Hayden e T. J. Suffridge) Lecture Notes in Mathematics, 364, pp. 69-78, Springer-Verlag (1974).

[N2] - L. NACHBIN, Some holomorphically significant properties of locally convex spaces, Fuctional Analysis (Editor: D. G. de Figueiredo), pp. 251-277, Marcel Dekker (1976).

[P] - A. C. PONTONE, Duais seqüências e seqüências em espaços localmente convexos, Dissertação de Mestrado, Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo (1975).

[S] - L. R. SORAGI, Partes limitadas nos espaços de germes de aplicações holomorfas, Tese de doutorado do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, nº 4 (1976).

[W] - A. J. M. WANDERLEY, Germes de aplicações holomorfas em espaços localmente convexos, Tese de doutorado do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, nº 1 (1974).