CURVATURA TOTAL

DE FOLHEAÇÕES

CLAUDIO POSSANI

TESE APRESENTADA

AO

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

DA

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR

EM

MATEMÁTICA

ORIENTADOR:

Prof.Dr. REMI LANGEVIN

SÃO PAULO, JULHO DE 1989

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO i

ABSTRACT v

CAPÍTULO I: QUASE-FOLHEAÇÕES E INTEGRAIS DE CURVATURA NO PLANO

I.1. Introdução 1

I.2. Quase-Folheações 2

I.3. Curvatura Total 8

I.4. Mínimo da Curvatura Total 14

I.5. O Anel 20

I.6. Um resultado Combinatório sobre a Curvatura Total de uma Folheação Orientável 26

CAPÍTULO II: ENVOLTÓRIAS E CURVATURA TOTAL

II.1. Introdução 34

II.2. Ouriços e Envoltórias 34

II.3. Curvatura Total de Folheações que Estendem Campos de N-Planos cujas Envoltórias são Ouriços .. 38

II.4. Exemplos 41

II.5. Folheações que Estendem um Campo de Vetores Dado ao Longo do Bordo do Disco D^2 47

CAPÍTULO III: CURVATURA TOTAL DE FOLHEAÇÕES EM SUPERFÍCIES HIPERBÓLICAS

III.1. Introdução 58

III.2. O Teorema da Troca para Segmentos Geodésicos em H^2 58

III.3. Curvatura Total de Duas Folheações Ortogonais numa Superfície Hiperbólica 64

III.4. A Geometria do Disco de Poincaré 68

CAPÍTULO IV: O TEOREMA DA TROCA COM CURVAS

IV.1. Introdução 72

IV.2. O Teorema da Troca com Polígonos do Plano 72

IV.3. O Teorema da Troca com Curvas Regulares do Plano 77

BIBLIOGRAFIA 81

INTRODUÇÃO

Nosso objetivo neste trabalho é o de estudar <u>curvatura total de folheações</u>: dado $W \subset \mathbb{R}^{n+1}$, aberto limitado e $\mathcal{F}$ uma folheação de codimensão 1 de W, pomos: se $x \in W$ é um ponto regular de $\mathcal{F}$, $|K|(x)$ indicará o módulo da curvatura de Gauss, em x, da folha F_x. A curvatura total de $\mathcal{F}$, $K(\mathcal{F})$ é dada por

$$K(\mathcal{F}) = \int_W |K|(x)\, dx.$$

Questões que se colocam naturalmente são:

- determinar, dado W, o mínimo de $K(\mathcal{F})$, dentro de uma classe de folheações;
- determinar a existência ou não de folheações que realizem o mínimo da curvatura total ("folheações justas").

Remi Langevin e Gilbert Levitt obtiveram minizantes para a curvatura total de folheações com singularidades do tipo sela numa superfície hiperbólica; para folheações orientáveis do disco D^2, tangentes ao bordo; e para duas folheações ortogonais na esfera S^2. Estes resultados constituem o ponto de partida deste trabalho.

No capítulo I estudamos uma generalização de um teorema de [L.L.2] e obtemos para folheações com singularidades de índice positivo (não necessariamente orientáveis), tangentes ao bordo de uma região $D \subset \mathbb{R}^2$, difeomorfa ao disco D^2 a desigualdade

$$K(\mathcal{F}) \geq \ell(\partial D) - 2d$$

onde $\ell(\partial D)$ é o perímetro do bordo de D e d é o diâmetro geodésico de D.

Apresentamos, também neste capítulo o conceito de quase-folheações, que são limites de sequências de folheações e respondemos completamente a questão da existência de folheações justas.

No capítulo II a situação estudada é a seguinte: dado um campo de n-planos ao longo da esfera $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $X: S^n \to A_{n,n+1}$ consideramos folheações (quando existirem) $\mathcal{F}$ que estendam X ao interior da bola B^{n+1}. Obtemos um minimizante para $K(\mathcal{F})$ que relaciona-se com a envoltória determinada por X. Quando esta envoltória é um ouriço [L.L.R] obtemos

$$K(\mathcal{F}) \geq \frac{1}{2} \int_{S^n} |h^s(z)| dz$$

onde $h^s(z)$ é a função simétrica da função suporte do ouriço.

Quando n=1, isto é, X é um campo de vetores ao longo de S^1, obtemos uma interpretação para $K(\mathcal{F})$, como uma "área algébrica" sobre o cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$, mesmo no caso em que a envoltória determinada por X não seja um ouriço.

No capítulo III, obtemos um minimizante para a soma das curvaturas totais de duas folheações ortogonais de uma superfície compacta, sem bordo, de gênero g, munida de uma métrica de curvatura constante - 1.

O resultado obtido é a desigualdade:

$$K(\mathcal{F}) + K(\mathcal{F}^1) \geq \frac{\pi^2}{5\ell} |\chi(M)|$$

onde $\ell \approx 4,27$ é o comprimento do lado do pentágono regular do plano de Poincaré, H^2, que tenha os cinco ângulos internos iguais a $\frac{\pi}{2}$.

A técnica utilizada no capítulo III de contar contatos com o pentágono de H^2, nos leva, no capítulo IV, a considerar generalizações do Teorema da Troca. Apresentamos duas delas, válidas no plano: uma onde a contagem de contatos é feita com polígonos do plano, e consideramos contatos com os lados e os ângulos do polígono; outra onde a contagem de contatos é feita com curvas regulares quaisquer do plano. Estas idéias podem ser generalizadas em dimensões mais altas, mas era preciso parar em algum ponto e estas generalizações não foram incluídas aqui.

A lista de agradecimentos que segue, é longa mas reflete a verdade de meus sentimentos.

Ao prof. Remi Langevin pela orientação constante: foi ele quem me alfabetizou em Teoria das Folheações e Geometria Integral; pela paciência com que aceitou minhas dificuldades em entender o óbvio; pela amizade e por suas atitudes positivas em relação à Matemática e à vida. A ele dedico este trabalho.

Ao Departamento de Matemática do IMEUSP, onde trabalho há dez anos e sempre tive apoio e reconhecimento.

Ao Laboratório de Topologia da Universidade de Dijon, e em particular a Christian Bonatti, pela acolhida em dois estágios, via CAPES-COFECUB, que foram fundamentais para a execução deste trabalho. A recepção que me foi dada jamais será esquecida pelo seu calor humano e eficiência estratégica.

Aos professores Chain S. Hönig, Elza F. Gomide e Fabiano G. B. Brito, que sempre acreditaram em minha capacidade de realizar este trabalho, e souberam expressar esta crença de forma concreta.

Aos amigos, da Universidade ou não. Sem eles nem esta tese nem a vida valeriam a pena.

À Izilda pela datilografia de excelente qualidade.

Julho de 1989

ABSTRACT

The subject of this work is the study of total curvature of foliations. Given $W \subset \mathbb{R}^{n+1}$, limited and open, $\mathcal{F}$ a codimension 1 foliation of W, we set: if $x \in W$ is a regular point of $\mathcal{F}$, then $|K|(x)$ will denote the absolute value of the Gaussian curvature, in x, of the leaf through x, and the total curvature of $\mathcal{F}$, $K(\mathcal{F})$ will be

$$K(\mathcal{F}) = \int_W |K|(x)\, dx.$$

In Chapter I, we obtain, for W difeomorphic do $D^2 \subset \mathbb{R}^2$, and $\mathcal{F}$ a foliation of W whose singularities are all of positive index, $\mathcal{F}$ tangent to ∂W, a generalization of a theorem due to Remi Langevin and Gilbert Levitt [L.L.1].

Chapter II concerns to foliations of the unit ball $B^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ that extends to B^{n+1} a n-plane field given along S^n.

In Chapter III we study two ortogonal foliations of a surface M, compact, without boundary, with a metric of constant curvature -1.

One of the central tools we use along this work is the Exchange Theorem. In Chapter IV we discuss some generalizations of it.

CAPÍTULO I

QUASE-FOLHEAÇÕES E INTEGRAIS DE CURVATURA NO PLANO

I.1. Introdução

Seja M uma variedade Riemanniana e $\mathcal{F}$ uma folheação de M de codimensão 1 com singularidades isoladas. Para x em M-Sing$\mathcal{F}$ indicamos por $|k(x)|$ o módulo da curvatura Gaussiana, em x, da folha que passa por x. A curvatura total de $\mathcal{F}$, $k(\mathcal{F}) \in [0; +\infty]$, é, por definição, o valor da integral

$$\int_M |k(x)|.$$

Em [L.L.1], R. Langevin e G. Levitt demonstram que se M é uma superfície de curvatura constante -1 e $\mathcal{F}$ é uma folheação de M com singularidades do tipo sela, então a curvatura total de $\mathcal{F}$ é maior do que ou igual a $(12 \log 2 - 6 \log 3) . |\chi(M)|$.

Em [L.L.2], R. Langevin e G. Levitt mostram que se $\mathcal{F}$ é uma folheação orientável do disco $D^2 \subset \mathbb{R}^2$, tangente ao bordo, então $k(\mathcal{F}) \geq 2\pi - 4$.

Nos dois trabalhos citados são exibidas as folheações que minimizam a curvatura total.

Neste capítulo demonstraremos os seguintes resultados na linha dos trabalhos acima:

Teorema A: Seja D uma região do plano R^2, homeomorfa ao disco D^2 e limitada por uma curva regular, ∂D, e seja $\mathcal{F}$ uma folheação de D, tangente ao bordo, com singularidades de índice positivo. Então $k(\mathcal{F}) \geq \ell(\partial D)-2d$, onde $\ell(\partial D)$ é o comprimento do bordo de D e $\underline{d}$ é o diâmetro interior (ou diâmetro geodésico) de D. (Veja definição de diâmetro interior no parágrafo I.3).

Teorema B: Seja $A \subset \mathbb{R}^2$ uma região homeomorfa ao anel $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < r_1 \leq x^2 + y^2 \leq r_2\}$ com bordo ∂A formado por duas curvas regulares, C_1 (externa) e C_2 (interna) e seja $\mathcal{F}$ uma folheação de A, tangente ao bordo, sem singularidades. Então

$k(\mathcal{F}) \geq \ell(C_1) + \ell(C_2) - 2d$, onde $\underline{d}$ é o comprimento da envoltória convexa geodésica interior de C_2. (Veja definição no parágrafo I.5).

Definiremos a noção de quase-folheação e mostraremos que em cada um dos casos acima o mínimo da curvatura total é atingido numa quase-folheação de D ou A, respectivamente.

I.2. Quase-Folheações

Uma quase-folheação de uma região D pode ser pensada como uma folheação de D que possui um conjunto crítico C, onde a folheação é "angulosa", mas de modo que possamos calcular a "curvatura da folheação acumulada em C".

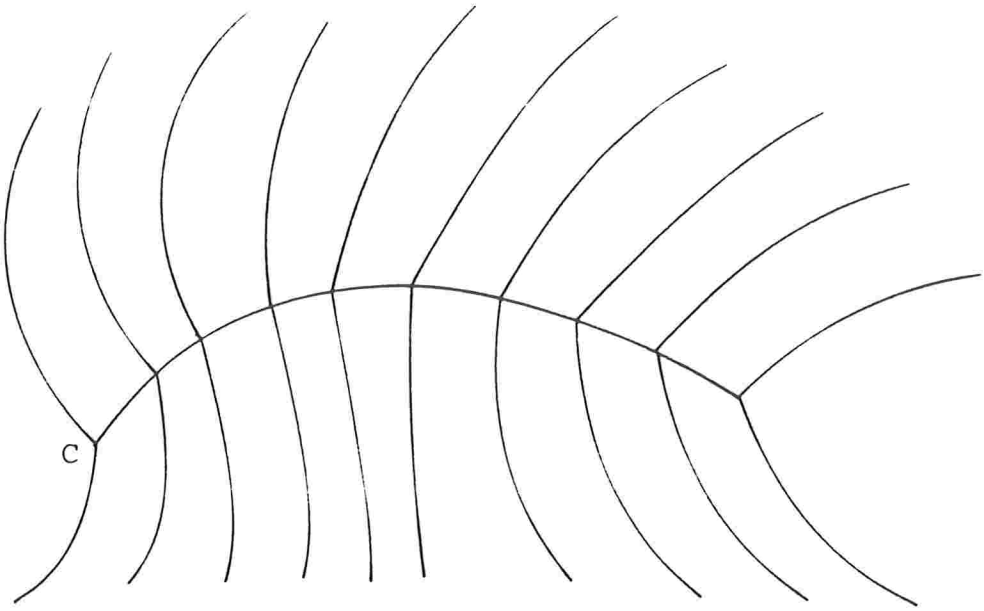


Figura 1

I.2.1. <u>Definição</u>. Se $\mathcal{F}$ é uma folheação de uma região $D \subset \mathbb{R}^2$ e L é uma reta do plano então $|\mu|(\mathcal{F};L) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ é o número de pontos de contato entre L e $\mathcal{F}$. Analogamente se I é um intervalo aberto em $\mathbb{R}^2$, $|\mu|(\mathcal{F};I)$ é o número de pontos de contato entre I e $\mathcal{F}$.

I.2.2 <u>Definição</u>. Uma quase-folheação de uma região $D \subset \mathbb{R}^2$ com bordo ∂D regular é uma terna $(\mathcal{F}^{(n)}; \mathcal{F}; C)$ onde $\mathcal{F}^{(n)}$ é uma seqüência de folheações de D, tangentes a ∂D, C é um conjunto finito de curvas e $\mathcal{F}$ uma folheação de D-C verificando:

(I) $\mathcal{F}^{(n)} \to \mathcal{F}$ em D-C, na topologia C^2.

(II) Para todo segmento I do $\mathbb{R}^2$, existe o limite $\lim_{n\to\infty}|\mu|(\mathcal{F}^{(n)};I)$. Este limite será indicado por $|\mu|(\mathcal{F};I)$.

(III) $k(\mathcal{F}^{(n)}) < M$, para algum $M \in \mathbb{R}^+$ independente de n.

Se $\mathcal{F}$ é uma folheação por retas de D-C, então $(\mathcal{F}^{(n)};\mathcal{F};C)$ será dita quase-folheação geodésica.

Quando não houver possibilidade de confusão indicaremos a quase folheação por $\mathcal{F}$.

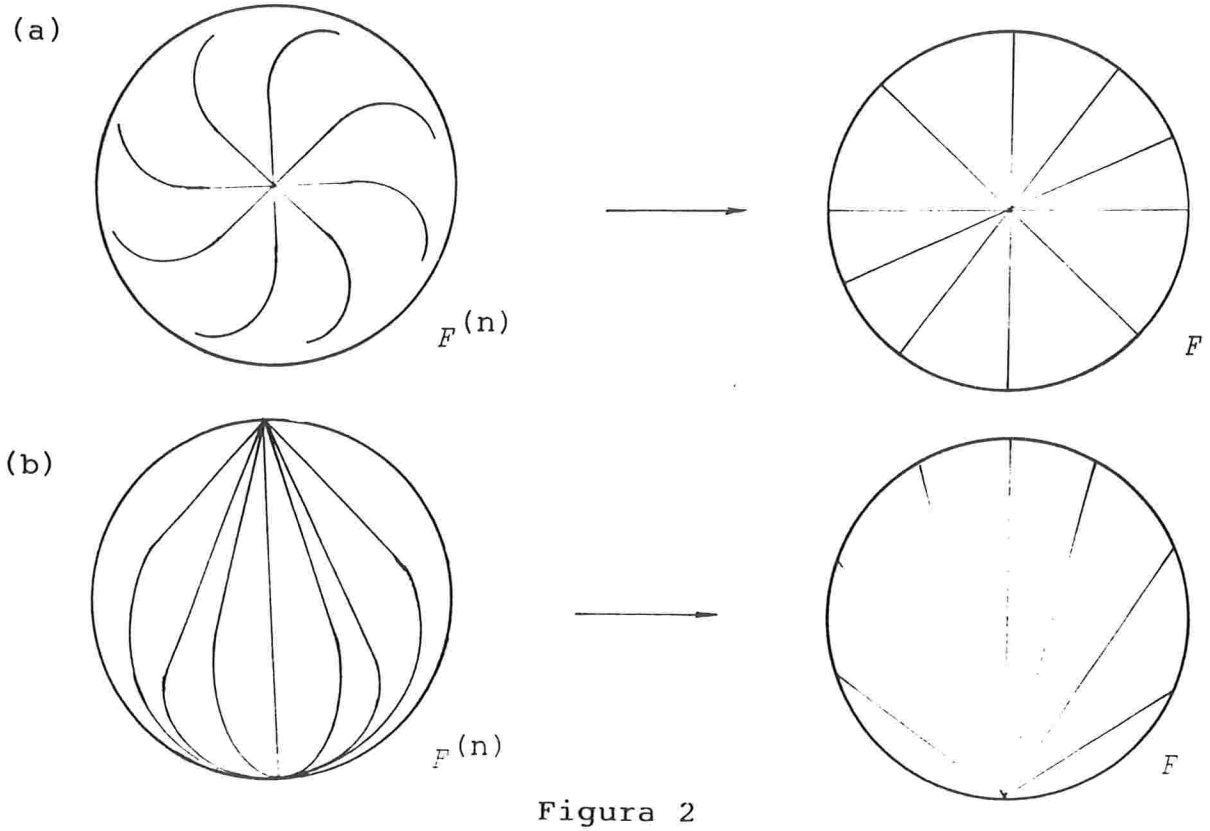


Figura 2

Por analogia ao Teorema da Troca (Exchange Theorem) [BLR] definimos a curvatura total $k(\mathcal{F})$ da quase-folheação $\mathcal{F}$ por

$$k(\mathcal{F}) = \int_{\mathcal{G}} |\mu|(\mathcal{F};L)dm(L) ,$$

onde G é o espaço das retas do plano, com sua medida canônica. Da condição III da definição de quase-folheação e do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue segue que

$$k(F) = \int_{\mathcal{G}} |\mu|(F;L)dm(L) = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathcal{G}} |\mu|(F^{(n)};L)dm(L) = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathcal{G}} |k^{(n)}|(x)$$

$$= \lim_{n\to\infty} k(F^{(n)}).$$

Uma folheação $F^{(n)}$ determina, de modo natural, uma distribuição de curvatura $T_{F(n)}$ (em nosso caso esta distribuição é uma medida) em D: a cada $\phi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, C^∞, de suporte compacto, $T_{F(n)}(\Phi) =$

$$= \int_D \phi(x)|k|(x).$$

Em D-C, F determina uma distribuição de curvatura T_F de modo análogo:

$$T_F(\phi) = \int_{D-C} \phi(x).|k|(x)\, dx$$

Das condições I, II e III segue que existem, no sentido de distribuições, os limites $\lim_{n\to\infty} T_{F(n)}$ e $\lim (T_{F(n)} - T_F)$ que são também medidas, em nosso caso. O suporte da distribuição $T = \lim_{n\to\infty}(T_{F(n)} - T_F)$ está contido no conjunto crítico C porque $F^{(n)} \to F$ com classe C^2, fora de C [L1].

Se F é uma quase-folheação geodésica, a curvatura total de F está concentrada em C, e pode ser calculada de uma maneira simples, a partir do ângulo Θ determinado em cada ponto de C pelas retas da quase-folheação e por C.

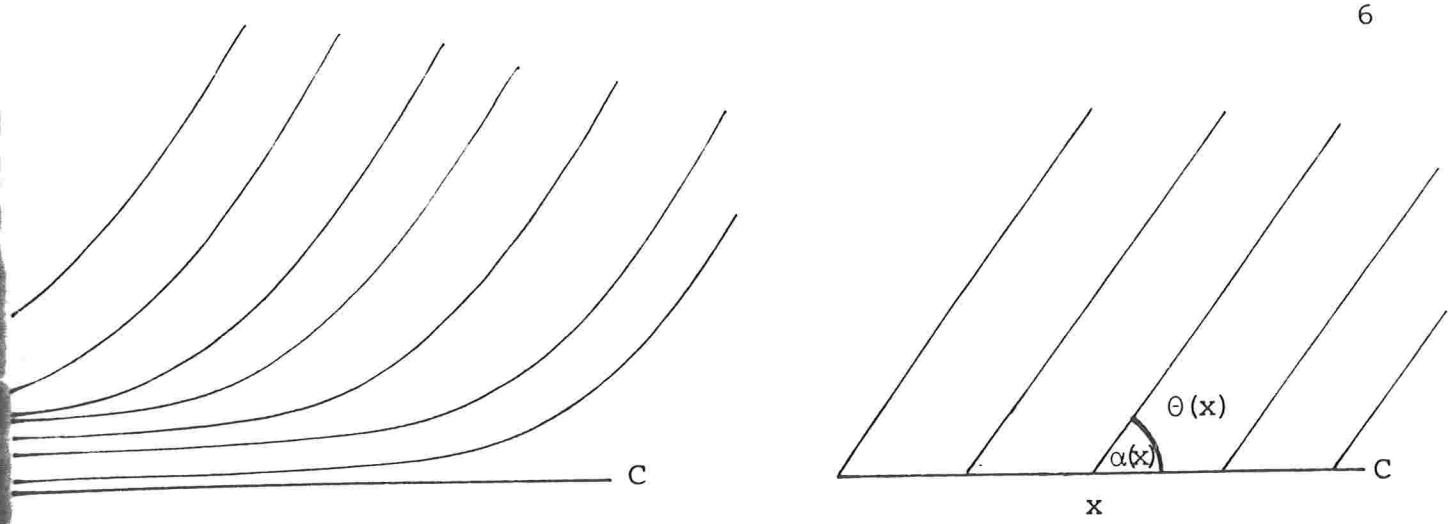


Figura 3

Toda reta pertencente a $\Theta(x)$ e passando por x tem contato com F.

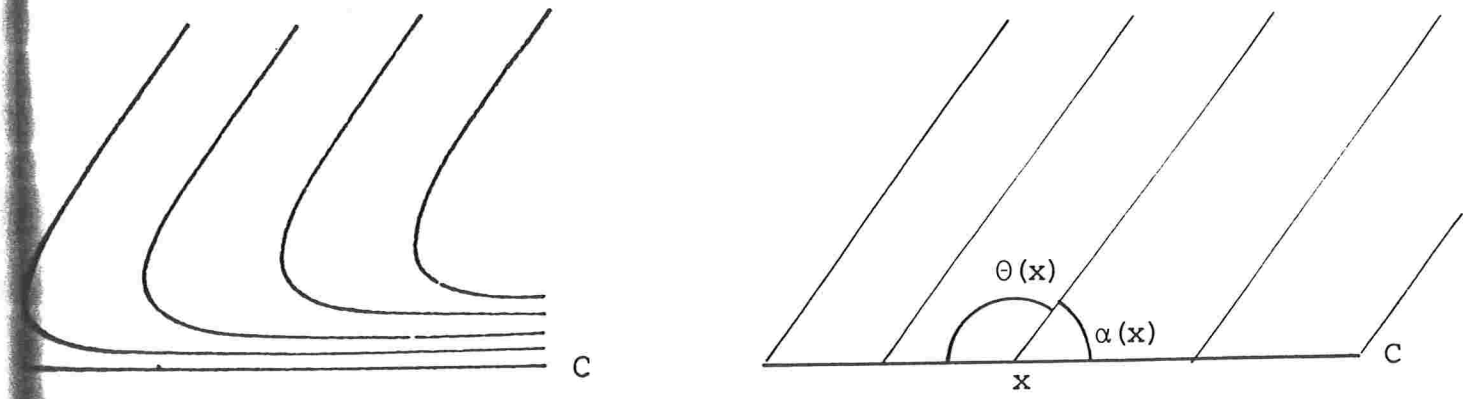


Figura 4

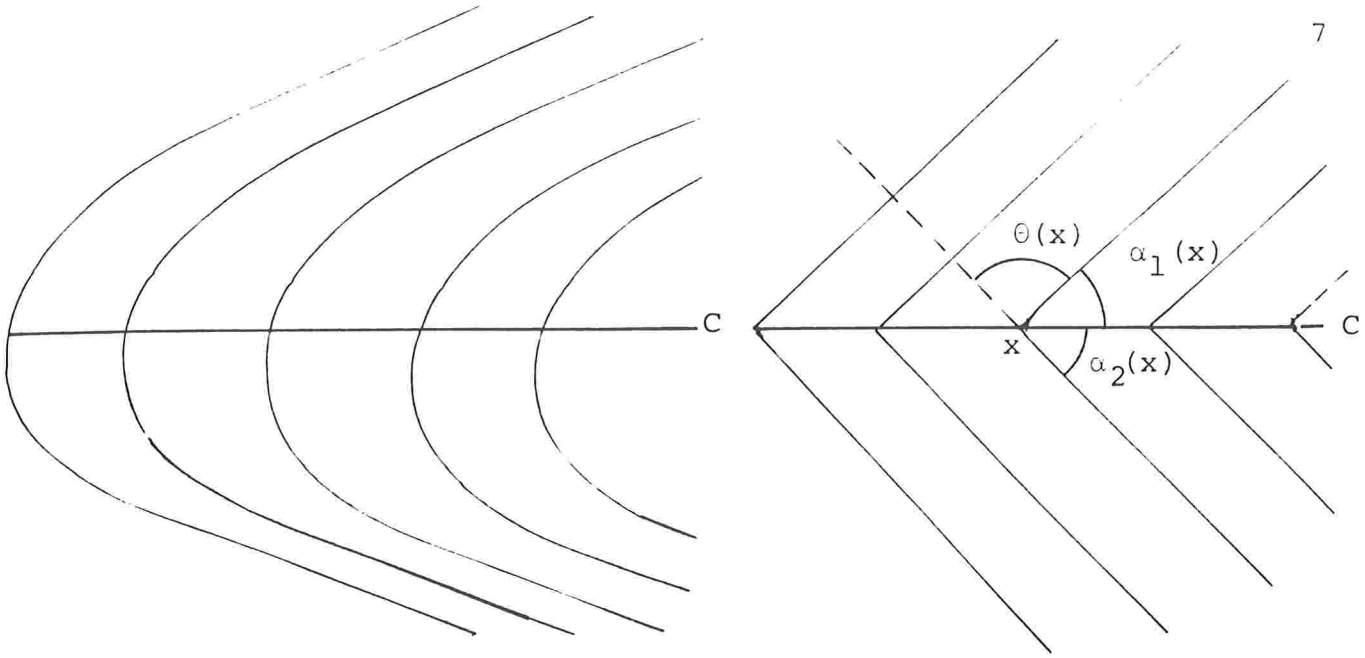


Figura 5

Seja L uma reta do plano passando por x ∈ C, e suponhamos que L e *F* tenham contato; indicando por ds o elemento de arco em C tem-se

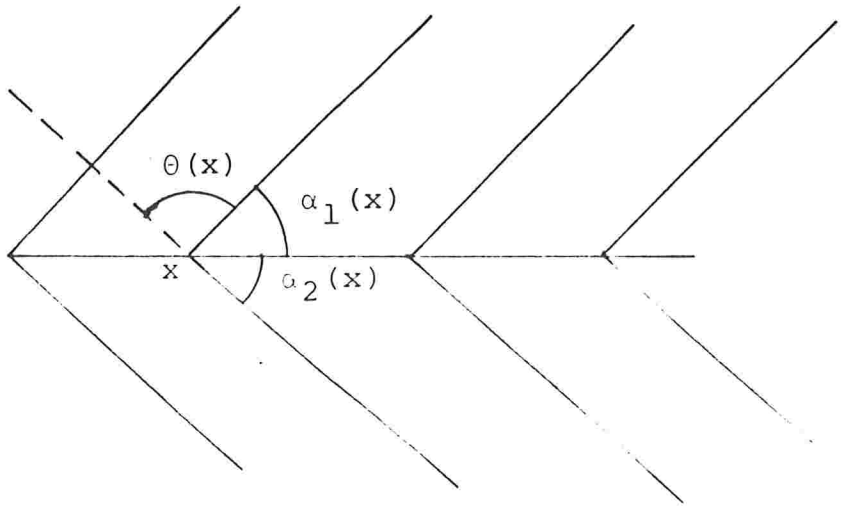


Figura 6

A medida das retas que passam por ds e são paralelas a L é

$$\text{sen}\ \alpha\ ds.$$

Como toda reta pertencente ao ângulo $\theta(x)$ tem contato a medida do conjunto de retas que passam por ds e têm contato com F é

$$\left(\int_{\alpha_2}^{\pi-\alpha_1} \text{sen}\phi(x)\ dx \right) ds = (\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2)\ ds$$

Logo se F é geodésica

$$\int_{\mathcal{G}} |\mu|(F_i L) = \int_C (\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2)\ ,\ 0 \leq \alpha_1, \alpha_2 \leq \pi$$

Assim nos exemplos da figura 2 tem-se

(a) $k(F) = \int_C \cos\frac{\pi}{2} + \cos 0 = \int_0^{2\pi} 1\ ds = 2\pi.$

(b) $k(F) = \int_C \cos\alpha_1 + \cos 0 = 2\int_0^{\pi} \left[\cos(\pi - \frac{\phi}{2}) + 1\right] d\phi = 2\pi - 4.$

I.3. Curvatura Total

I.3.1. Teorema: Sejam D uma região do plano $\mathbb{R}^2$, homeomorfa ao disco D^2, com bordo C, curva regular e F uma folheação de D, tangente ao bordo com singularidades de índice positivo. Então

$$k(F) \geq \ell(C) - 2d ,$$

onde $\ell(C)$ é o comprimento do bordo C e d é o diâmetro geodésico D: $d = \sup\{d(x;y);\ x,y \in D$, onde $d(x;y)$ é o comprimento da geodésica $\gamma \subset D$, ligando x e y$\}$.

Demonstração: Podemos supor que F tenha 2 singularidades do tipo "por-do-sol":

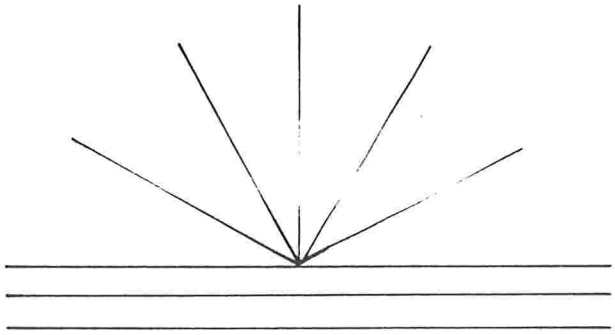


Figura 7

Singularidades de índice 1 ou $\frac{1}{2}$ podem ser transformadas em singularidades do tipo por-do-sol, através das operações indicadas abaixo aumentando-se a curvatura total de F, tão pouco quanto se queira.

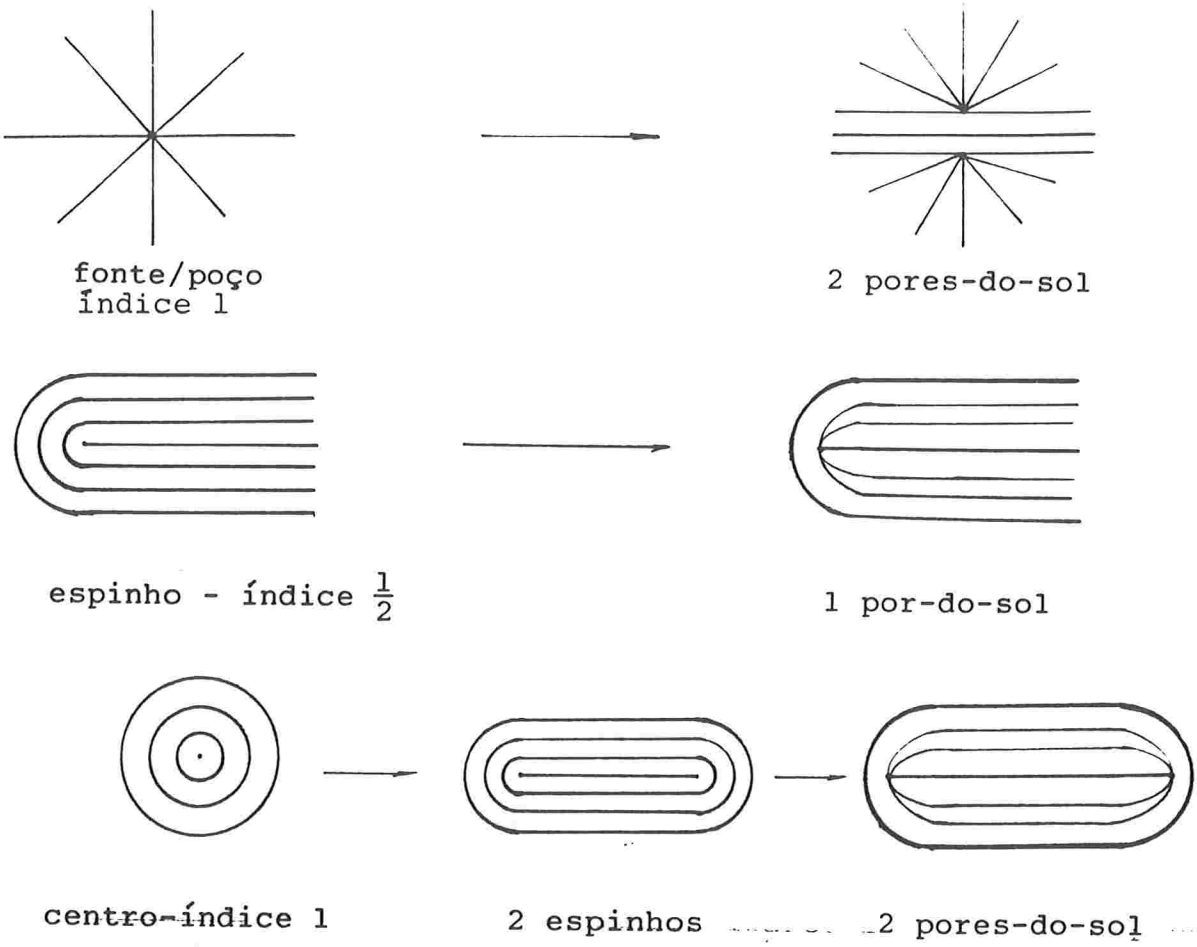


Figura 8

De uma maneira mais geral, qualquer singularidade civilizada, isto é, tal que a oscilação do campo de retas restrito a qualquer circulo centrado no ponto singular seja uniformemente majorada, pode ser substituída por um poço ou um por-do-sol aumentando-se a curvatura total tão pouco quanto se queira.

Vamos substituir a folheação numa vizinhança de raio r do ponto crítico x, por uma das folheações padrões seguintes

índice 1 índice $\frac{1}{2}$

Figura 9

Seja Θ_1 a função ângulo no círculo bordo de D_r , das folheações padrões acima e Θ_0 a função ângulo determinada por F. Θ_0 é de oscilação majorada e é homotópica a uma das funções Θ_1 definidas acima. Existe homotopia entre Θ_0 e Θ_1 com oscilação majorada (por exemplo usando interpolação linear de funções de recobrimento de Θ_0 e Θ_1).

Num anel de largura $\delta << r$ a homotopia Θ_+ determina um campo de retas nos circulos concêntricos de raio entre r e r-δ. A curvatura total da folheação assim determinada é majorada por

$$\int_{anel} |k| \leq \int_{anel} \sqrt{k^2 + k^{L^2}} = \int_{anel} \|\text{grad } \Theta\|$$

As componentes de grad Φ em coordenadas polares $(\rho;\Phi)$ são $\frac{\partial\Theta}{\partial\rho}$ e $\rho\,\frac{\partial\Theta}{\partial\Phi}$. Então vale a seguinte majoração

$$\int_{anel} |k| \leq \int_{anel} \left| \frac{\partial\Theta}{\partial\rho} \right| + \int_{anel} r \left| \frac{\partial\Theta}{\partial\rho} \right|$$

Pela definição do campo essas duas integrais são de mesma ordem de grandeza que r.

Agora colocamos no disco de centro x e raio r uma das folheações padrões e fazendo r tender a zero, obtemos folheações com um poço do tipo padrão ou um por-do-sol do tipo padrão e com curvatura total tão próxima da curvatura total de F quanto quisermos.

A demonstração do teorema está baseada no Teorema da Troca ([L-2] ou [BLR]). Seja γ a geodésica interior a D ligando os dois pores-do-sol,

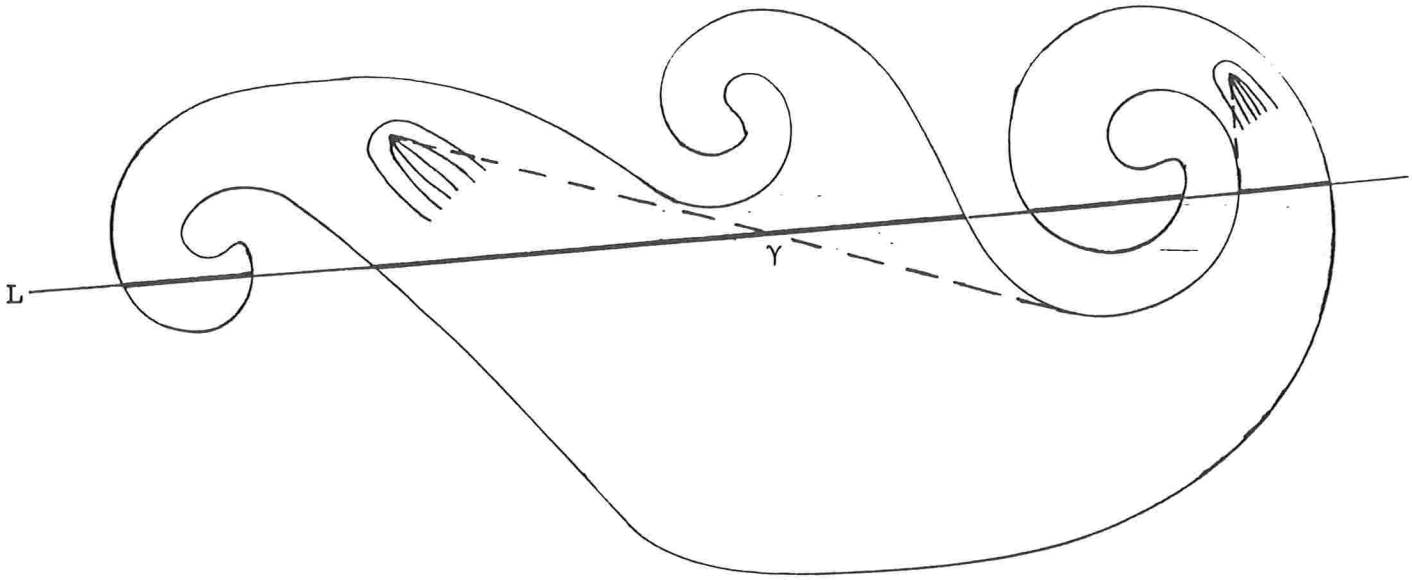


Figura 10

Vamos determinar o número de contatos de uma rela L, do plano, e F. Salvo num conjunto de retas de medida nula, L encontra D num número finito de segmentos. Em cada segmento que não encontra γ há pelos menos um contato entre F e L. De fato se $\overline{AB}$ é um segmento de L $\cap$ D que não encontra γ, então o bordo C e AB determi-

nam dois "discos" no plano e como $AB \cap \gamma = \varphi$, os dois pores-do-sol estão num mesmo disco.

No disco que não contém os pores-do-sol a folheação é orientável e a situação está descrita abaixo

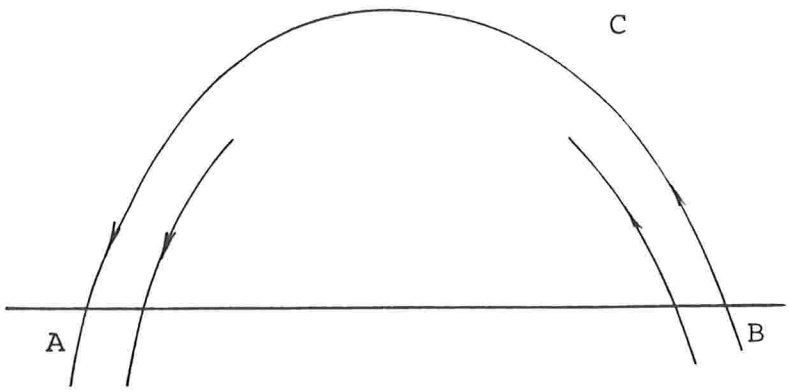


Figura 11

Assim há pelo menos um ponto de contato em $\overline{AB}$. Indicando por $n(L)$ número de segmentos em que L encontra D e não corta γ e por $s(L)$ o número de segmentos em que L encontra γ temos

$$|\mu|(F;L) \geq n(L), \text{ e}$$

$$L(C) = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{G}} \# (L \cap C) = \int_{\mathcal{G}} n(L) + s(L) \qquad [S].$$

Daí

$$L(C) = \int_{\mathcal{G}} n(L) + \int_{\mathcal{G}} s(L)$$

$$L(C) \leq \int_{\mathcal{G}} |\mu|(F;L) + \int_{\mathcal{G}} s(L) = \int_{\mathcal{G}} |\mu|(F;L) + 2L(\gamma)$$

e portnto $k(F) = \int_{\mathcal{G}} |\mu|(F;L) \geq L(C) - 2d$

onde d é o diâmetro interior de D.

I.4. Mínimo da Curvatura Total

Mostraremos neste parágrafo que em D sempre existe uma quase-folheação F que minimiza a curvatura total, isto é,

$$k(F) = L(C) - 2d.$$

I.4.1. Lema: Quaisquer que sejam p e q em D, existe uma única geodésica $\gamma \subset D$, ligando p e q.

A existência desta geodésica está demonstrada em [H, pg. 184]. Para um estudo da existência de geosésicas em casos mais gerais ver [A,A].

A unicidade segue do fato de D ser simplesmente conexa: Se γ_1 e γ_2 forem geodésicas ligando p e q, $\gamma_1, \gamma_2 \subset D$, então a curva fechada $\gamma_1 \cup \gamma_2$ limita uma região R homeomorfa a um disco, com $R \subset D$. Existirá então um arco $\widehat{AB}$, localmente convexo em ∂R. Suponhamos $\widehat{AB} \subset \gamma_1$. A curva γ_3 obtida de γ_1, trocando-se $\widehat{AB}$ pelo segmento AB, está contido em R, liga p e q e tem comprimento menor que γ_1, o que é impossível.

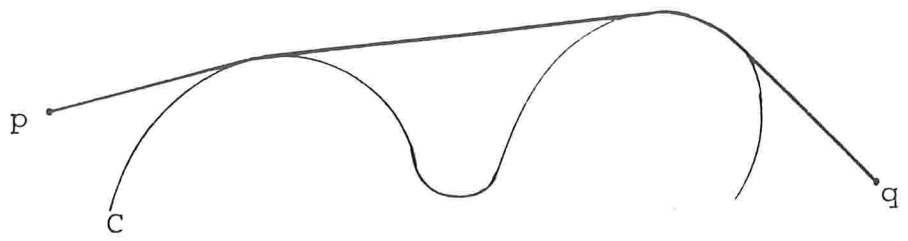


Figura 12

Em D sejam P e Q dois pontos tais que a geodésica γ ligando P e Q seja um diâmetro interior de D. P e Q estão necessariamente em C. Todo ponto $x \in D$ pode ser unido a P por uma (única) geodésica γ_x contida em D. Estas geodésicas determinam uma folheação de D-C, por retas.

I.4.2. <u>Lema</u>: A folheação de D-C, por retas, determinada acima é uma quase-folheação F de D.

<u>Demonstração</u>: O conjunto crítico é C, F é a folheação por retas determinada acima. Para definirmos a seqüência de folheações $F^{(n)}$ procedemos como segue: todas as folheações terão 2 pores-do-sol, em P e Q. Como P e Q pertencem a L, as folheações $F^{(n)}$ serão orientáveis e podemos definí-las através de campos de vetores.

Seja V_{ε_n} a vizinhança tubular de C em D de raio ε_n. Em D-C F determina um campo de vetores C^∞, X. Em $D-V_{\varepsilon_n}$, tomamos $Y_n = X$. Em $V_{\varepsilon_{n/2}}$, colocamos uma folheação com dois pores-do-sol, paralela a , conforme modelo abaixo, e definimos $Y_n|V_{\varepsilon_{n/2}}$

como sendo o campo induzido pela folheação.

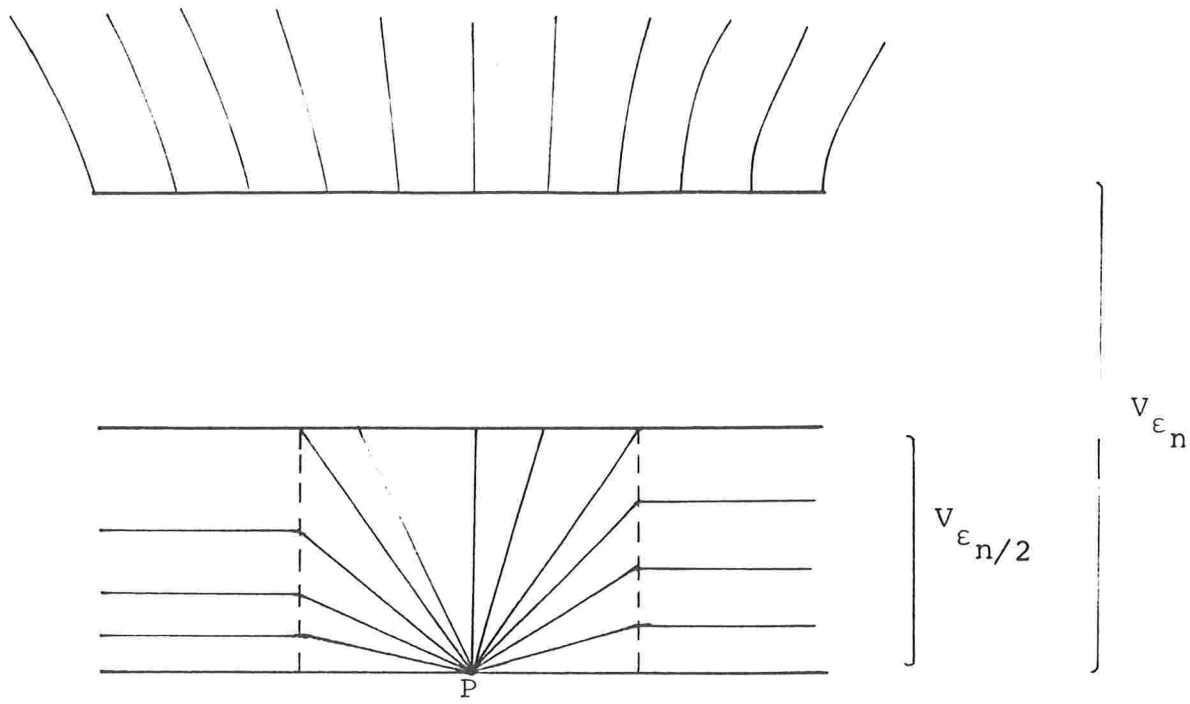


Figura 13

Estendemos o campo Y_n definido acima, a $\overline{V_{\varepsilon_n} - V_{\varepsilon_{n/2}}}$, de modo que Y_n não tenha singularidades em D: tomamos Y_n em $\overline{V_{\varepsilon_n} - V_{\varepsilon_{n/2}}}$, que varie linearmente nas secções ortogonais à curva σ que limita V_{ε_n} internamente, e coincida em $(V_{\varepsilon_n} - V_{\varepsilon_{n/2}})$ com o campo Y_n como foi definido acima e em seguida tomamos a folheação $F^{(n)}$ como sendo a folheação induzida por Y_n.

A folheação construída acima é de classe C^1, e de classe C^∞ fora das curvas que limitam internamente as vizinhanças tubulares V_{ε_n} e $V_{\varepsilon_{n/2}}$

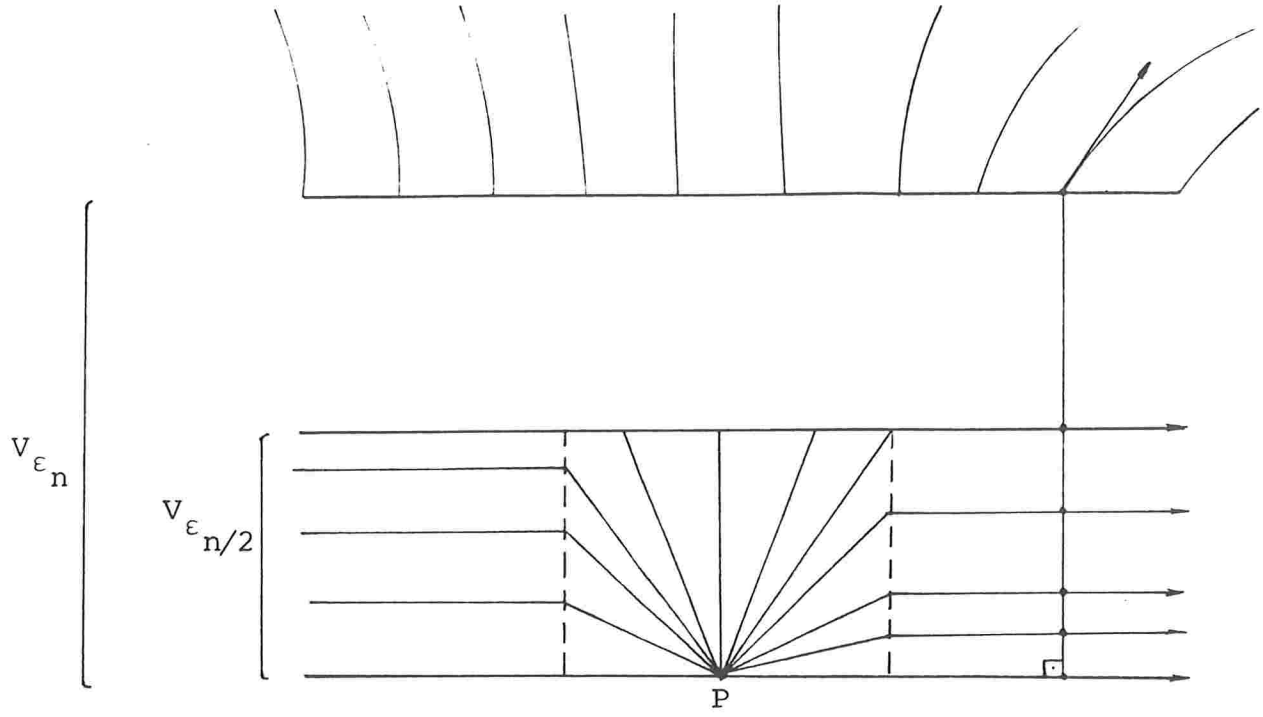


Figura 14

Se fizermos ε_n tender a 0, então $F^{(n)}$ tenderá à F em D-C e existe

$$\lim_{n\to\infty} |\mu| \ (F^{(n)};L).$$

Para concluirmos a demonstração do teorema A basta mostrarmos que com exceção de um conjunto de medida nula de retas do plano, toda reta L do plano verifica a seguinte propriedade: $L \cap D$ é formada por um número finito de segmentos de reta e

a) se um segmento AB não encontra o diâmetro γ então há exatamente um ponto de contato entre L e F, em AB, isto é, $|\mu|(F;AB)=1$.

b) se $AB \cap \gamma \neq \Phi$ então $|\mu|(\mathcal{F};AB) = 0$.

Daí seguirá por um raciocínio semelhante ao da demonstração do teorema do parágrafo I.3 que $k(\mathcal{F}) = \ell(C)-2d$.

Seja portanto uma reta L do plano e AB um segmento, em $L \cap D$, tal que $AB \cap \gamma = \phi$.

Em $D - V_{\varepsilon_n}$, L e $\mathcal{F}^{(n)}$ não possuem contatos pois $\mathcal{F}^{(n)}$ é formada por retas. AB divide D em discos homeomorfos ao disco $D^2 \subset \mathbb{R}^2$, um dos quais não contém P nem Q.

Neste disco cada folheação $\mathcal{F}^{(n)}$ é orientável e $|\mu|(\mathcal{F}^{(n)};L) = 1$, para n suficientemente grande, e portanto $|\mu|(\mathcal{F};L) = 1$.

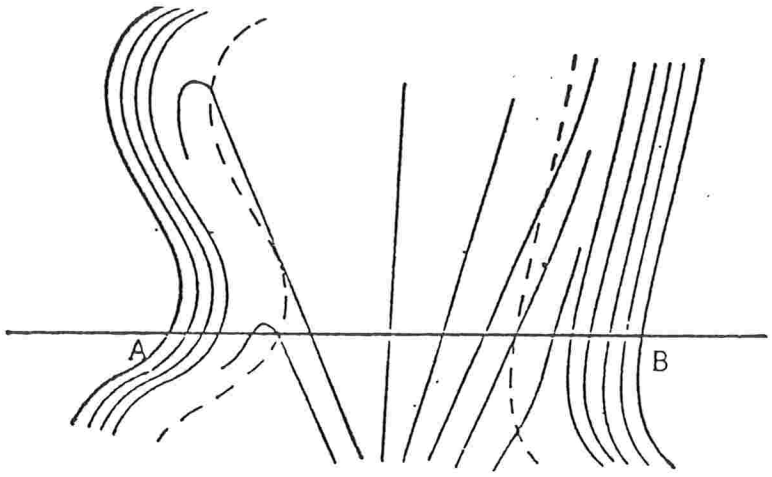


Figura 15

Se $AB \cap \gamma \neq \phi$ então P e Q estão de lados opostos de AB e $|\mu|(\mathcal{F}^{(n)};L) = 0$ para n suficientemente grande. Portanto $|\mu|(\mathcal{F};L) = 0$. (Veja fig. 16).

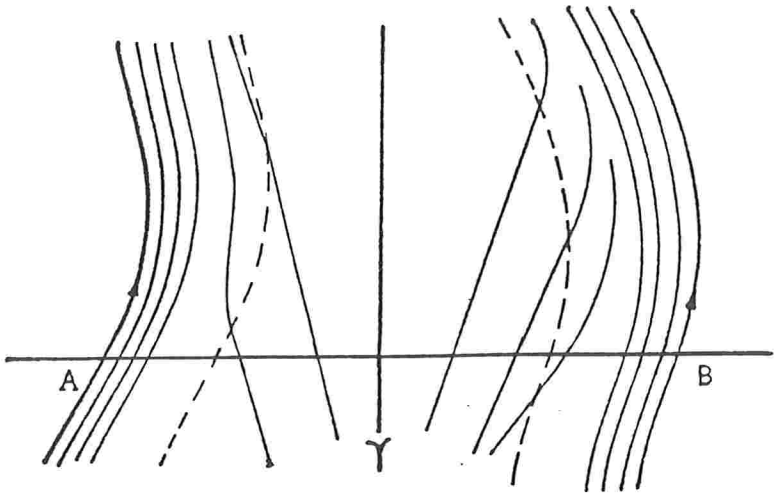


Figura 16

<u>Observação</u>: com um pouco mais de paciência poderíamos construir uma aproximação de classe C^{∞} para a quase-folheação F.

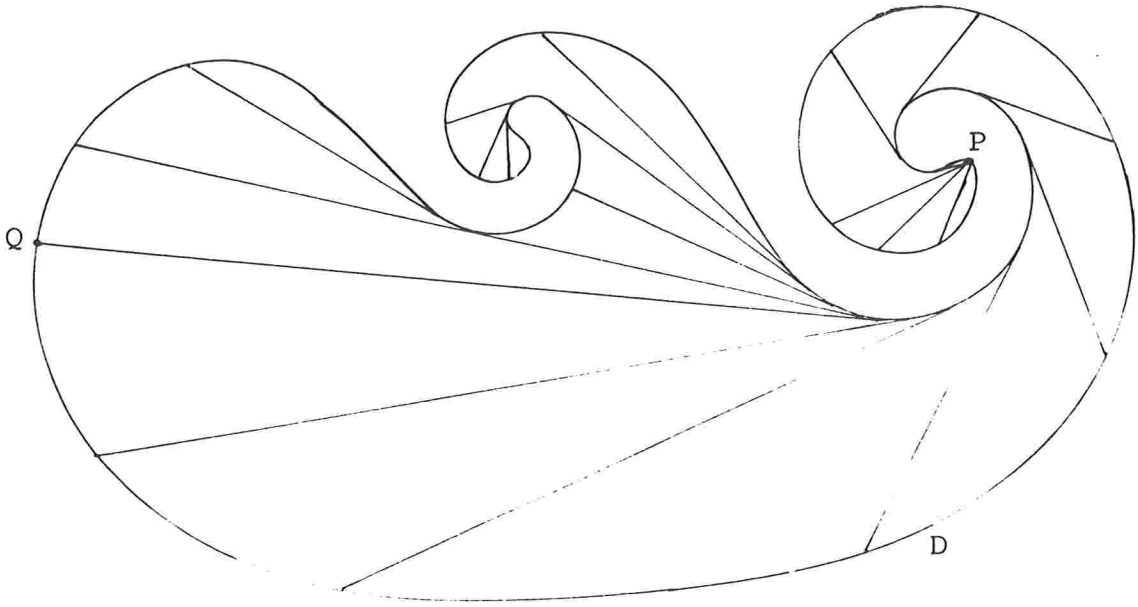


Figura 17

Na figura 17 está esboçada uma quase-folheação justa numa região D.

I.5. O Anel

Seja A uma região homeomorfa ao anel $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0<r_1 \leq \leq x^2 + y^2 \leq r_2\}$ com bordo ∂A formado por duas curvas regulares, C_1 (externa) e C_2 (interna).

Um conjunto $X \in A$ é convexo por geodésicas em A se para todo par de elementos x e y em X, as geodésicas unindo x a y em A estão contidas em X.

I.5.1. Definição: a envoltória convexa geodésica interior de um conjunto $U \subset A$, é a intersecção de todos os conjuntos $X \subset A$, convexos por geodésicas tais que $U \subset X$.

Com pequenas modificações nos argumentos já utilizados demonstraremos o

I.5.2. Teorema B: Seja A uma região homeomorfa a um anel, como acima,

(a) Se F é uma folheação de A, sem singularidades, tangente ao bordo então $k(F) \geq \ell(C_1) + (C_2) - 2d$, onde d é o comprimento da curva γ que limita exteriormente a envoltória convexa geodésica interior de C_2 em A. (Veja figura 18).

(b) Existe uma quase-folheação F de A que minimiza a curvatura total, isto é, $k(F) = \ell(C_1) + \ell(C_2) - 2d$.

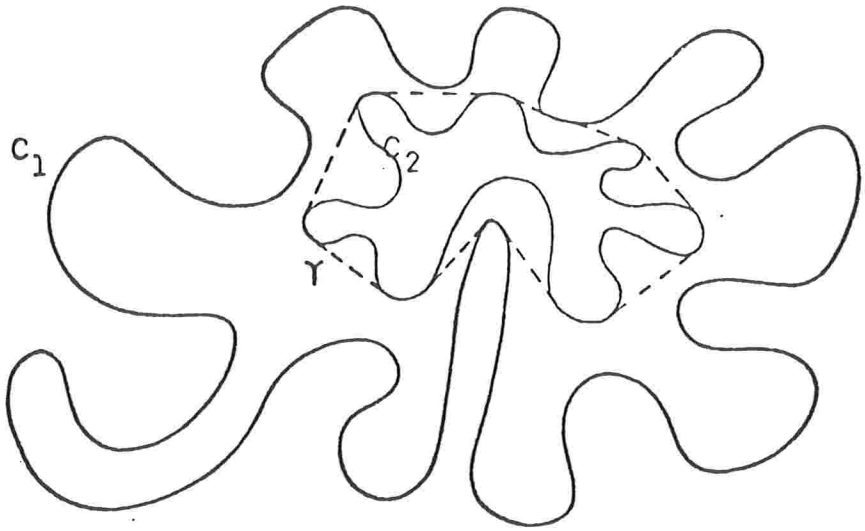


Figura 18

A parte a) do Teorema B repousa na seguinte observação: com exceção de um conjunto de medida nula de retas do plano, toda reta $L \subset \mathbb{R}^2$, intercepta A num número finito de segmentos e se um tal segmento $\overline{AB}$ não intercepta γ, isto é, $\overline{AB} \cap \gamma = \phi$ então $\overline{AB}$ e F têm pelo menos 1 contato. Isto ocorre porque se $\overline{AB} \cap \gamma = \phi$ então $\{A;B\} \subset C_1$ ou $\{A,B\} \subset C_2$ e em qualquer caso fica determinado um disco do plano como abaixo e $|\mu|(F;\overline{AB}) \geq 1$.

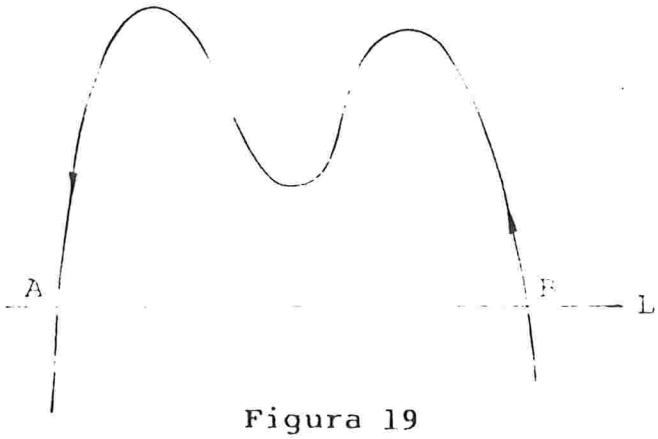


Figura 19

A partir daí, repetindo os argumentos usados na parte a) do Teorema A, conclui-se que $k(F) \geq \ell(\partial A) + -2d = \ell(C_1) + \ell(C_2) - 2d$.

Parte b). Começamos com as observações seguintes:

(1) Qualquer que seja $x \in A$, existe uma única geodésica fechada contida em A, γ_x, passando por x.

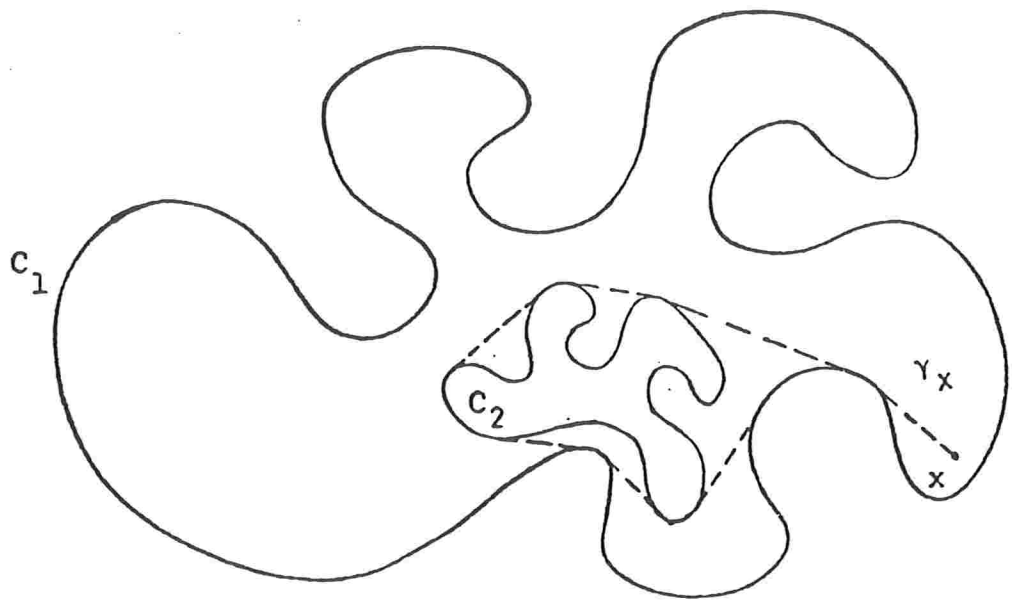


Figura 20

(2) Uma orientação em C_2 induz uma orientação em γ_x. Indicamos por $\hat{\gamma}_x$ o trecho de γ_x que une x até $C_2(x)$ = primeiro ponto de C_2 em que γ_x encontra C_2, com a orientação induzida por C_2 em γ_x.

(3) Se $x \neq y$ então: (a) $\hat{\gamma}_x \subset \hat{\gamma}_y$ ou

(b) $\tilde{\gamma}_y \subset \tilde{\gamma}_x$ ou

(c) $\tilde{\gamma}_x$ e $\tilde{\gamma}_y$ não se encontram no interior de A.

(4) As geodésicas $\tilde{\gamma}_x$, $x \in A$, determinam uma quase-folheação de A por retas, F.

Para definirmos a seqüência de folheações $F^{(n)}$ procedemos de modo análogo ao do Lema I.4.2., tomando o cuidado de escolher em C_1 e C_2 a mesma orientação.

(5) Para completarmos a demonstração observamos que se L é uma reta genérica do plano então $L \cap A$ é formada por um número finito de segmentos de retas. Seja $\overline{AB}$ um destes segmentos.

(a) se $\overline{AB} \cap \gamma = \phi$ então $|\mu|(F^n;\overline{AB}) = 1$ para n suficientemente grande e portanto $|\mu|(F;\overline{AB}) = 1$.

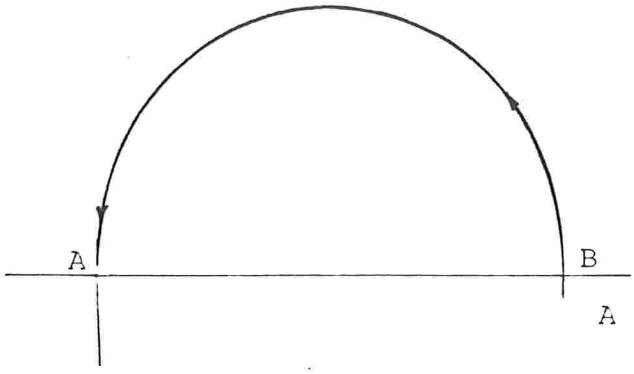


Figura 21

(b) Se $\overline{AB} \cap \gamma \neq \phi$ então $|\mu|(F^{(n)};\overline{AB}) = 0$ para n suficientemente grande e $|\mu|(F;\overline{AB}) = 0$.

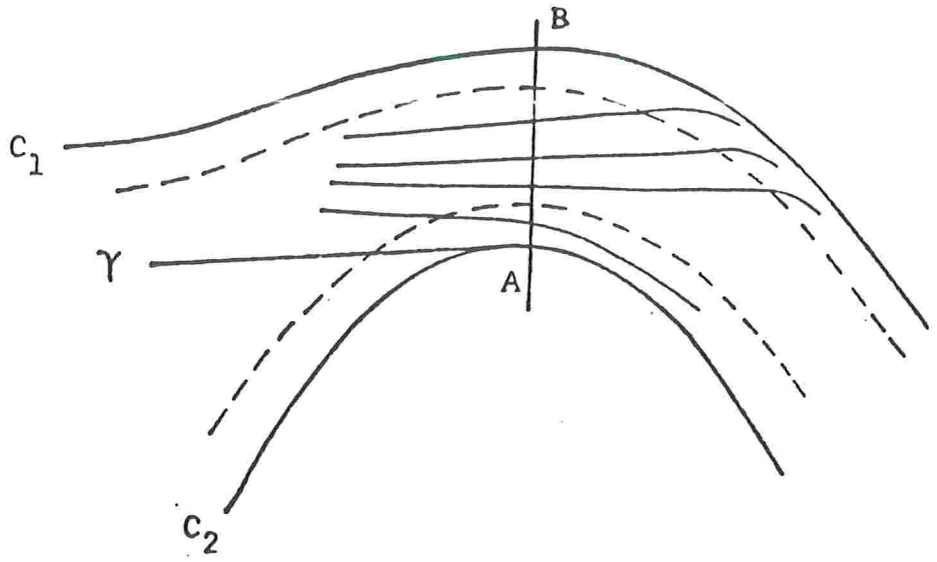
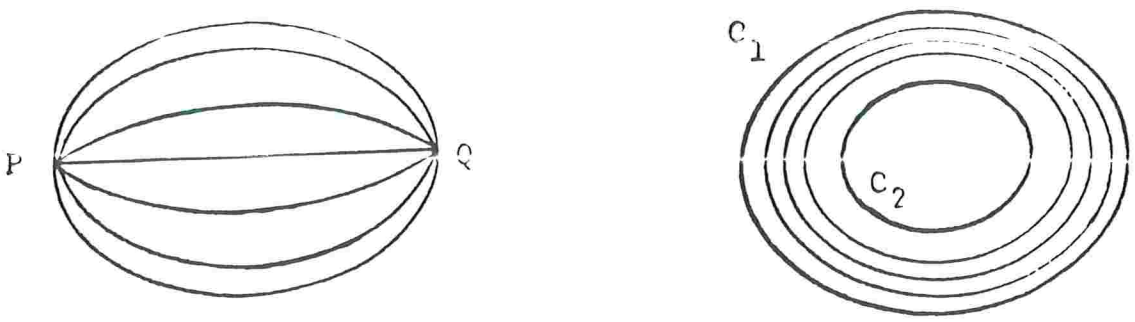


Figura 22

Desta última observação, segue como no Teorema 1, que $k(F) - \ell(C_1) + \ell(C_2) - 2d$.

I.5.3. <u>Observações</u>: 1) se C_2 é uma curva convexa, então $\gamma = C_2$, $d = \ell(C_2)$ e $\ell(C_1) + \ell(C_2) - 2d = \ell(C_1) - \ell(C_2)$.

2) Nos dois casos analisados neste trabalho, se as regiões D e A forem limitadas por curvas convexas então existem folheações da região que minimizam a curvatura total.



$k(F) = \ell(C)-2d$ $\qquad$ $k(F) = \ell(C_1) - \ell(C_2)$

Figura 23

Por outro lado se $C = \partial D$, no caso do disco, ($C = C_1$ ou $C = C_2$ no caso do anel) não é uma curva convexa então não existe folheação de D(A) que minimize a curvatura total, isto é, este mínimo é atingido apenas por quase-folheações.

De fato, suponhamos que F é uma folheação de D(A). Se C possui apenas 2 pontos de inflexão e cada um é um por-do-sol, então a geodésica γ que os une não é um diâmetro como mostra um cálculo de variações, e da demonstração do Teorema A segue que $k(F) \geq L(C) - 2L(\gamma) > L(C) - 2d$.

Podemos supor, portanto que C possui um ponto de inflexão regular para F. Seja T a reta tangente a C em P.

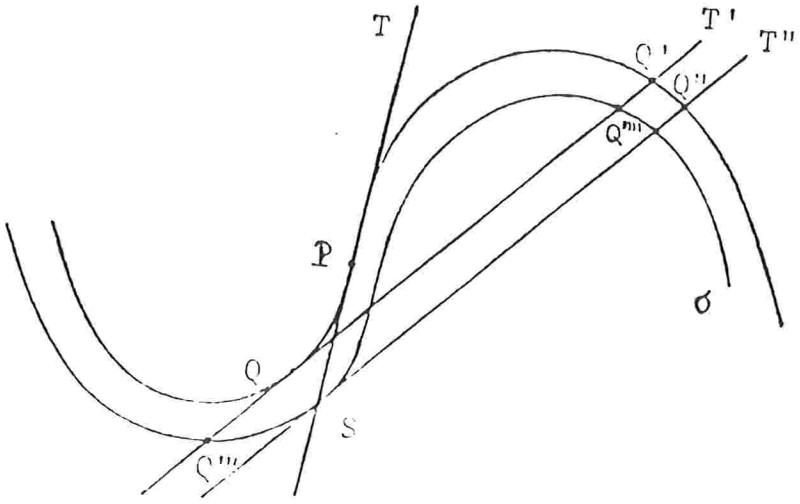


Figura 24

Existe Q numa vizinhança V de P tal que a reta T' tangente a C em Q encontra C em pelo menos dois pontos, Q, Q'. Existe uma folha σ de F tal que $\#(\sigma \cap T') \geq 2$, ($\sigma$ numa vizinhança tubular V de C, de raio suficientemente pequeno). Pomos $\sigma \cap T' = \{Q''';Q''''\}$.

Seja T" uma reta paralela a T', tangente a σ em S, com $S \in V$, e seja Q" a intersecção de T" e C (Q" numa vizinhança de Q').

Seja G o conjunto de retas do plano que interceptam os segmentos QQ"' e Q'Q". G é um aberto no conjunto das retas e se $L \in G$ então $|\mu|(F;L) \geq 2$.

I.6. Um Resultado Combinatório sobre a Curvatura Total de uma Folheação Orientável

Em [L.L.2] os autores observam (sem demonstração) que a desigualdade $k(F) \geq 2\pi-4$ pode ser escrita como

$$k(F) \geq 2\pi-2 \sum_{1\leq i<j\leq 2n} (-1)^{i+j+1}\, d(P_i;P_j) \qquad (*)$$

onde $P_1;\ldots;P_{2n}$ são as singularidades de F, contidas no bordo do disco e numeradas ciclicamente, e $d(P_i;P_j)$ é a distância euclidea na entre os pontos P_i e P_j.

Mostraremos que a relação (*) pode ser estendida ao contexto mais geral em que a região D é homeomorfa ao disco D' e

$d(P_i;P_j)$ é a <u>distância geodésica interior</u> entre P_i e P_j, como definimos anteriormente.

Mostraremos também que uma relação como a do teorema B não pode ser obtida, mesmo no caso em que D seja convexo.

I.6.1. <u>Teorema</u>; Seja $D \approx D^2$, ∂D regular como acima e F uma folheação orientável de D, tangente ao bordo, e sejam $P_1;\ldots;P_{2n}$ suas singularidades em ∂D, numeradas ciclicamente. Então

$$k(F) \geq \ell(\partial D) - 2 \sum_{1\leq i<j\leq 2n} (-1)^{i+j+1}\, d(P_i;P_j)$$

<u>Demonstração</u>:

$$\ell(\partial D) = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{G}} \#(L \cap \partial D)\, dmL = \int_{\mathcal{G}} (\text{nº de segmentos de } L \cap D)\, dmL$$

Com exceção de um conjunto de medida nula, todas as retas de G que encontram D, o fazem em um conjunto finito de segmentos de reta.

Dada uma reta L no plano indicamos por n(L) o número de segmentos de $L \cap D$ que separam $P_1;\ldots;P_{2n}$ em dois conjuntos com número par de elementos, e s(L) o número de segmentos de $L\cap D$ que dividem $P_1;\ldots;P_{2n}$ em dois conjuntos com número ímpar de elementos.

$$L(\partial D) = \int_{\mathcal{G}} (n(L) + s(L))\, dmL = \int_{\mathcal{G}} n(L)\, dmL + \int_{\mathcal{G}} s(L)\, dmL.$$

Se um segmento AB divide $P_1;\ldots;P_{2n}$ em dois conjuntos com números pares de elementos, (digamos que de um dos lados de AB as singularidades sejam $P_k, P_{k+1}, \ldots, P_{k+2t+1}$, com k e k+2t+1 de paridades distintas), então há pelo menos um ponto de contato entre F e AB e portanto $|\mu|(F;L) \geq 1$. (Veja figura 25).

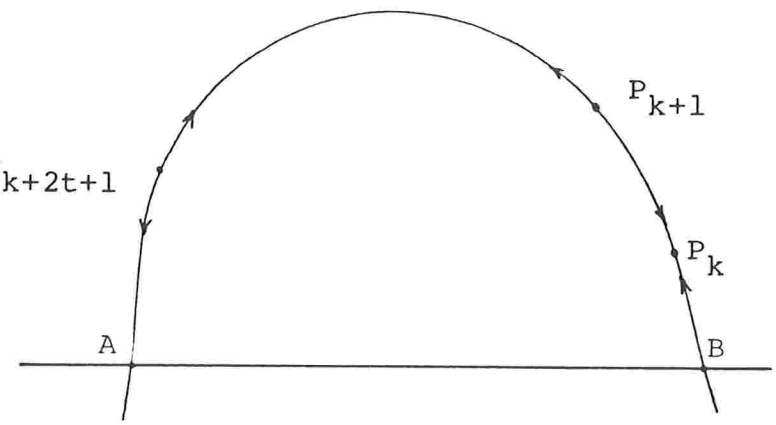


Figura 25

Como $k(F) = \int_{\mathcal{G}} |\mu|(F;L)\, dmL$ segue de

$$L(\partial D) = \int_{\mathcal{G}} n(L)\, dmL + \int_{\mathcal{G}} s(L)\, dmL \quad \text{que}$$

$$L(\partial D) \leq \int_{\mathcal{G}} |\mu|(F;L)\, dmL + \int_{\mathcal{G}} s(L)\, dmL \quad \text{e portanto}$$

$$k(F) \geq L(\partial D) - \int_{\mathcal{G}} s(L)\, dmL.$$

Nos lemas que seguem vamos calcular a última integral acima.

I.6.2. <u>Lema</u>: Nas condições acima sejam P_r e P_s duas singularida-

des de F tais que r e s tenham paridades distintas. Sejam P_rP_{r+1} e P_sP_{s+1} os arcos geodésicos de D ligando P_r a P_{r+1} e P_s a P_{s+1} respectivamente. Para cada reta L do plano seja m(L) o número de segmentos de L que encontram P_rP_{r+1} e P_sP_{s+1} .

Então

$$\int_{\mathcal{G}} m(L)\, dmL = d(P_r;P_s) + d(P_{r+1};P_{s+1}) +$$

$$- d(P_r;P_{s+1}) - d(P_s;P_{r+1})$$

Demonstração:

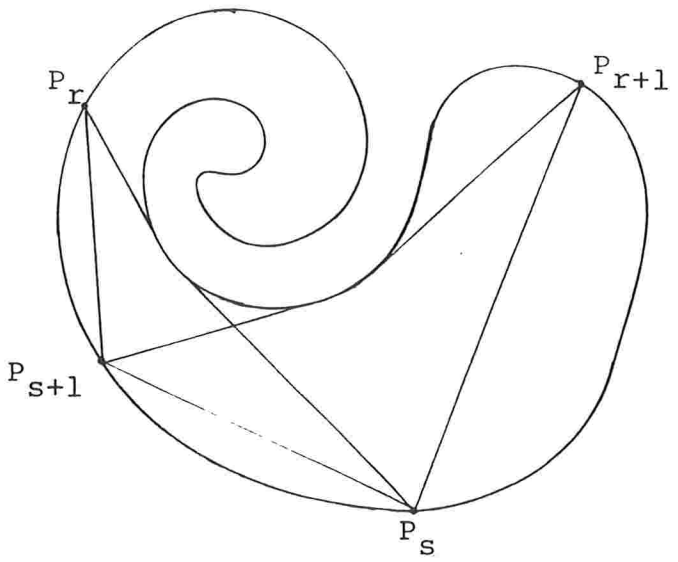


Figura 26

Um segmento AB encontra P_rP_{r+1} e P_sP_{s+1} se s só se encontra P_rP_s e $P_{r+1}P_{s+1}$ e não encontra nem P_rP_{s+1} nem $P_{r+1}P_s$.

Daí segue que

$$\int_{\mathcal{G}} m(L)\, dmL = d(P_r;P_s) + d(P_{s+1};P_{r+1}) - d(P_r;P_{s+1}) +$$

$$- d(P_{r+1};P_s)$$

(Lembre-se que $\int_{\mathcal{G}} [\text{nº seg. de } (L \cap C)]\, dmL = \ell(C)$, para uma curva C regular).

I.6.3. <u>Lema</u>: $\int_{\mathcal{G}} s(L)\, dmL = 2 \sum_{1 \leq i < j \leq 2n} (-1)^{i+j+1}\, d(P_i;P_j)$

Seja L uma reta do plano, indicaremos por $s_{r;k}(L)$ o número de segmentos de $L \cap D$ que encontram ambos os arcos geodésicos P_rP_{r+1} e P_kP_{k+1} em D.

$$s(L) = \sum_{\substack{1 \leq i < j \leq 2n \\ i,j \text{ de paridades distintas}}} s_{i,j}(L)$$

Logo $$\int_{\mathcal{G}} s(L)\, dm(L) = \sum_{\substack{1 \leq i < j \leq 2n \\ i,j \text{ de paridades distintas}}} \int_{\mathcal{G}} s_{i;j}(L)\, dmL$$

Pelo Lema 1.6.2: $$\int_{\mathcal{G}} s_{ij}(L)\, dmL = d(P_i;P_j) + d(P_{i+1};P_{j+1}) + - d(P_i;P_{j+1}) - d(P_{i+1};P_j)$$

Cada termo $d(P_r;P_k)$ aparece duas vezes:

- Se r e k tem mesma paridade $d(P_r;P_k)$ aparece em

$$\int_{\mathcal{G}} s_{r-1;k}(L) \quad \text{e} \quad \int_{\mathcal{G}} s_{r;k-1}(L) \quad \text{com sinal "-".}$$

- Se r e k tem paridades distintas, então $d(P_r;P_k)$ aparece em

$$\int_{\mathcal{G}} s_{r;k}(L) \quad e \quad \int_{\mathcal{G}} s_{r-1;k-1}(L) \text{ com sinal "+".}$$

$$\text{Logo} \int_{\mathcal{G}} s(L)\, dmL = 2 \sum_{1\leq i<j\leq 2n} (-1)^{i+j+1}\, d(P_i;P_j)$$

Isto conclui a demonstração do Lema e do Teorema.

Veremos a seguir, através de um contra-exemplo, que o Teorema A não se generaliza ao caso de regiões homeomorfas ao disco, isto é, existem folheações tais que $k(\mathcal{F}) < \ell(\partial D) - 2d$.

O contra-exemplo será exibido para uma região D, cujo bordo ∂D é um polígono. O exemplo pode ser modificado de modo que ∂D seja C^1, ou mesmo C^∞.

I.6.4. <u>Contra-Exemplo</u>: Seja D o quadrilátero ABCD com AB = AC = = AD = CD = 1, CB = BD e $\mathcal{F}$ a folheação exibida abaixo:

As singularidades de $\mathcal{F}$ no bordo são A,B,C,D. Uma numeração cíclica é P_1 = A, P_2 = C, P_3 = B e P_4 = D. Como AB = AC = = AD = CD = 1 então CB = BD = $\sqrt{2-\sqrt{3}} \approx 0{,}51763$.

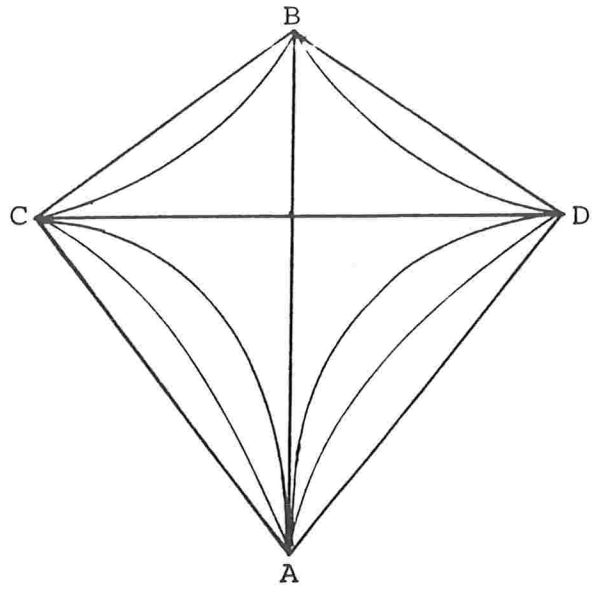


Figura 27

Se L é uma reta do plano, então com anotação da demonstração anterior, temos.

Se $L \cap D$ separa $\{A,B,C,D\}$ em dois conjuntos com número ímpar de elementos então $|\mu|(L \cap D;F) = 0$. Caso contrário $|\mu|(F;L \cap D) = 1$.

$$\text{Logo } k(F) = \ell(\partial D) - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq 4} (-1)^{i+j+1} d(P_i;P_j)$$

$k(F) = AC + CB + BD + AD - 2(AC + CB + BD + AD - AB - CD)$.

$k(F) = 2(AB + CD) - (AC + CB + BD + AD)$

$k(F) = 4 - (2 + 2\sqrt{2 - \sqrt{3}}) = 2 - 2\sqrt{2 - \sqrt{3}} \approx 0,96472$

Por outro lado

$$\ell(\partial D) - 2d = 2 + 2\sqrt{2 - \sqrt{3}}) - 2 = 2\sqrt{2 - \sqrt{3}}) \approx 1,03527$$

Assim $k(F) < \ell(\partial D) - 2d$.

I.6.5. <u>Pergunta</u>: A desigualdade do teorema I.6.1 não é intrínseca de D, no sentido de que depende da posição das singularidades $P_1;\ldots;P_{2n}$ no bordo de D. Por outro lado como vimos $\ell(\partial D) - 2d$ não é um limitante inferior de $k(F)$ mesmo D sendo convexo. Existe estimativa para o mínimo de $k(F)$, intrínseca de D ?

Em vista do exposto acima, torna-se natural perguntar: dada a região D, qual é o máximo de $\sum_{1\leq i<j\leq 2n} (-1)^{i+j+1}\, d(P_i;P_j)$, onde P_i, P_j são pontos de ∂D ?

CAPÍTULO II

ENVOLTÓRIAS E CURVATURA TOTAL

II.1. Introdução

Neste capítulo vamos estudar folheações da bola unitária $B^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ submetidas à condição de serem tangentes, no bordo S^n de B^n, a um campo de n-planos dado e fixado. A envoltória deste campo de n-planos terá um papel central neste estudo.

Em dimensão n suporemos que esta envoltória é um ouriço, e no caso plano obteremos resultado mais geral, válido para envoltórias quaisquer.

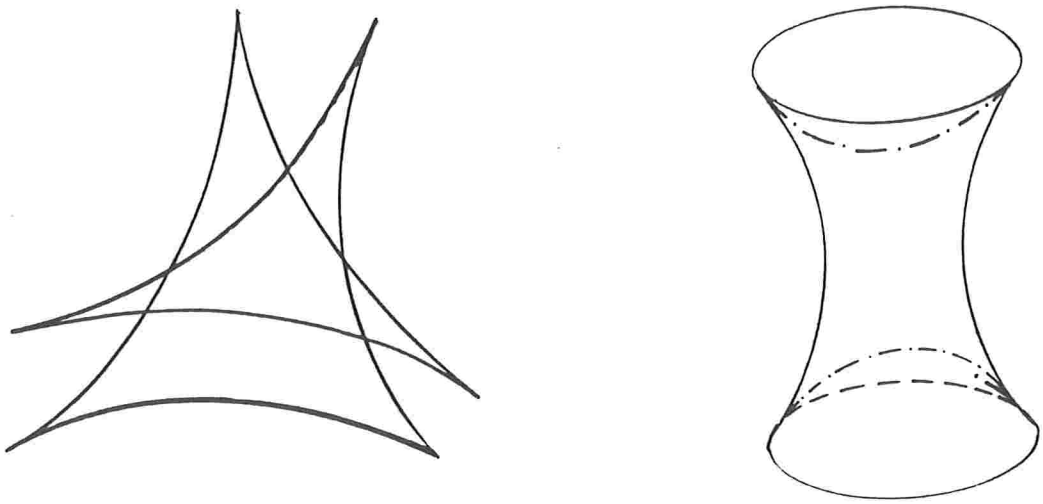
É claro que nem todo campo de n-planos dado ao longo de S^n pode ser estendido ao interior de S^n: se existir uma tal folheação F, ela induzirá em S^n uma folheação tangente em cada ponto ao traço do campo de n-planos, em S^n. Como nem todo campo de (n-1) planos em S^n é integrável, vemos que nem todo campo de n-planos pode ser estendido ao interior de B^n. Nosso resultado continua válido como um resultado acerca dos campos de planos.

II.2. Ouriços e Envoltórias

EM [L.L.R] os autores introduzem a noção de ouriço: dada uma função $h: S^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, o sistema

$$\begin{cases} \langle x,z\rangle = h(z) \\ \langle x,dz\rangle = dh(z) \end{cases}$$

admite, para cada valor $z \in S^n$, uma única solução $x = x_h(z)$. Estas soluções definem em geral uma hiper superfície H, lisa por partes. Abaixo damos dois exemplos de ouriços:



n = 1 n = 2

Figura 28

O conceito de ouriço é uma generalização do conceito de conjunto convexo e muitas propriedades dos convexos podem ser estendidas para ouriços (para maiores detalhes veja-se [L.L.R]).

Em particular, o "volume" de um ouriço se define como

$$\mathrm{vol}(H) = \frac{1}{n+1} \int_{S^n} h \det(\mathrm{Hess}(h) + h\, \mathrm{Id}_n)\, dz.$$

Este "volume" vol(H) é um número real não necessariamente positivo.

No caso n = 1, temos

$$\mathrm{vol}(H) = \ell(H) = \int_0^{2\pi} h(\theta)\, d\theta \quad \text{(comprimento algébrico)}$$

Indicaremos por $|\ell|(H)$ o "volume absoluto" de um ouriço, que se define por

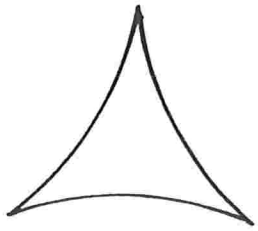
$$|\ell|(H) = \int_{S^n} |h^s(z)|dz$$

onde $h^s(z) = \frac{1}{2}(h(z) + h(-z))$. Este valor $|\ell|(H)$ é igual à integral sobre H da (n-1)-ésima função simétrica de curvatura de H.

Obs.: h^s, ao contrário de h, não depende da escolha da origem em R^{n+1} e $h(z) = h(-z)$.

As partes lisas de um ouriço admitem sempre uma orientação transversa, de modo que em um ponto $x_h(z)$ o vetor normal é z. Assim a aplicação x_h é uma "inversa da aplicação normal de Gauss de H".

Um ouriço será dito <u>projetivo</u> se e só se $h(-z) = -h(z)$



ouriço projetivo dado por $x_h(z) = \text{sen}(3z)$.

Figura 29

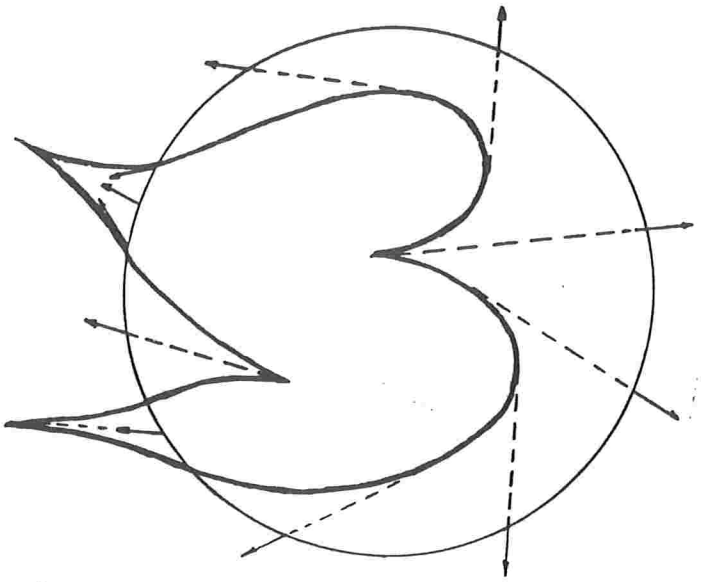
Um ouriço é a envoltória do campo de n-planos do R^{n+1} de equação $\langle x,z\rangle = h(z)$.

No que se segue consideraremos a situação seguinte: seja $X: S^n \to A_{n,n+1}$ um campo de n-planos em S^n. Este campo determina uma envoltória que genericamente, é uma hiper superfície lisa por partes. Sobre uma envoltória também podemos definir uma aplica-

ção normal de Gauss, mas esta aplicação pode não ser uma bijeção.

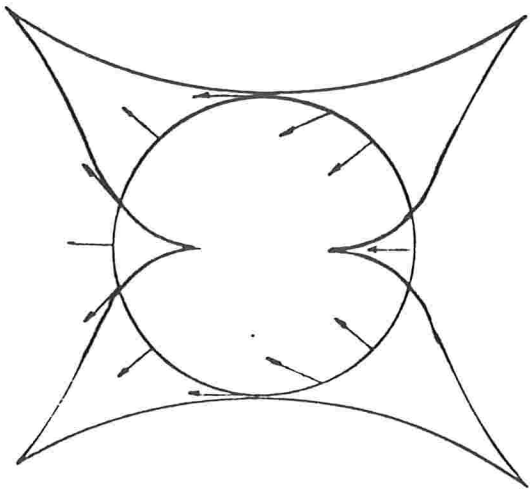
Exemplos

1)



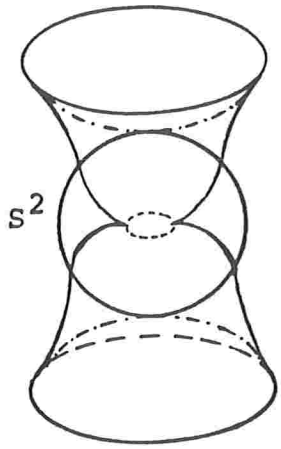
n = 1

2)



n = 1

3) Obtido pela rotação do exemplo anterior



n = 2

Figura 30

II.3. Curvatura Total de Folheações que Estendem Campos de N-Planos cujas Envoltórias são Ouriços

As folheações deste parágrafo são de codimensão 1, só possuem singularidades isoladas, se x é um ponto regular de $\mathcal{F}$, $|K(x)|$ designa o valor absoluto da curvatura de Gauss em x da folha F, de $\mathcal{F}$, que passa por x, e $K(\mathcal{F})$ será a curvatura total de $\mathcal{F}$,

$$K(\mathcal{F}) = \int_{B^{n+1}} |K(x)|dx.$$

Suporemos que $\mathcal{F}$ seja em S^n, bordo de B^{n+1} tangente ao n-plano $P(x)$, $x \in S^n$, de uma família de n-planos cuja envoltória seja um ouriço H.

II.3.1. <u>Teorema</u>: Seja B^{n+1} a bola unitária de $\mathbb{R}^{n+1}$, S^n seu bordo e P: $S^n \to A_{n,n+1}$ um campo de hiperplanos de $\mathbb{R}^{n+1}$ dfinido em S^n cuja envoltória seja um ouriço com função suporte h.

Toda folheação F de B^{n+1}, orientável, de codimensão 1 que estenda P e que só tenha singularidades isoladas, satisfaz:

$$K(F) \geq \int_{B^n} |h^s(u)|du$$

Um ponto $u \in S^n$ determina uma reta $L(u)$. Para todo $t \in L(u)$, indiquemos por T_t o plano ortogonal à $L(u)$ passando por t.

$|\mu|(F;T_t) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ é o número de pontos de contato entre T_t e folhas de F. O Teorema da Troca |B.L.R| nos dá a igualdade

$$K(F) = \frac{1}{2}\int_{S^n}\int_{L(u)} |\mu|(F;T_t)dt\, du.$$

Para provarmos o teorema precisamos mostrar que

$$\int_{L(u)} |\mu|(F;T_t)dt \geq |h^s(u)|. \quad (*)$$

Como H é um ouriço, a projeção ortogonal $P_{L(u)}: H \to L(u)$ tem, para quase todo $u \in S^n$, exatamente dois pontos críticos x_1, x_2.

Suponhamos que $h(u)$ seja a projeção ortogonal de x_1 sobre $L(u)$.

Sejam $t_1 = P_{L(u)}(x_1)$; $t_2 = P_{L(u)}(x_2)$, e sejam $y_1, y_2 \in S^n$ os pontos de S^n tais que $P(y_1) = T_{t_1}$ e $P(y_2) = T_{t_2}$.

Mostremos que para quase-todo t sobre o segmento $|t_1;t_2|$ existe pelo menos um ponto de contato entre T_t e folhas de $\mathcal{F}$, o que implica dizer $|\mu|(\mathcal{F};T_t) \geq 1$. Isto prova a desigualdade (*) acima.

Demonstração: utilizemos mais uma vez o Teorema da Troca.

Como $\mathcal{F}$ é orientável, nós podemos definir sobre B uma aplicação de Gauss $\gamma_{\mathcal{F}}$ que a cada ponto regular x da folheação $\mathcal{F}$ associa o vetor n(x), normal em x à folha F de $\mathcal{F}$ que passa por x. O vetor n(x) é determinado pela orientação de F.

A aplicação $\gamma_{\mathcal{F}}$ é contínua sobre B-sing($\mathcal{F}$). Sua restrição $\tilde{\gamma}_{\mathcal{F}}$ ao bordo de B é injetora pois H é um ouriço, e é portanto um homeomorfismo sobre sua imagem S^n.

Com o vetor u fixo, coloquemos $D_t = B \cap T_t$ e $S_t = D_t$. Se $t \in |t_1;t_2|$ e se T_t não contém singularidades de $\mathcal{F}$, então u ou -u pertencem à imagem $\gamma_{\mathcal{F}}(D_t)$.

Com efeito, u pertence à $\gamma_{\mathcal{F}}(S_{t_1})$ e -u pertence à $\gamma_{\mathcal{F}}(S_{t_2})$. A imagem do cilindro $(P_{L(u)})^{-1}(|t_1;t_2|)$ por $\tilde{\gamma}_{\mathcal{F}}$ é um cilindro em S^n com bordo $\tilde{\gamma}_{\mathcal{F}}(S_{t_1}) \cup \tilde{\gamma}_{\mathcal{F}}(S_{t_2})$. A imagem $\tilde{\gamma}_{\mathcal{F}}(S_t)$ é um hipersuperfície de S^n que separa S^n em dois hemisférios, um contendo u, o outro contendo -u. Como $\gamma_{\mathcal{F}}(D_t)$ contém um dos hemisférios de bordo $\tilde{\gamma}_{\mathcal{F}}(S_t)$, $\gamma_{\mathcal{F}}(D_t)$ contém um dos vetores u ou -u, e portanto $|\mu|(\mathcal{F},T_t) \geq 1$.

Observação: quando n=2, o resultado acima fornece $K(\mathcal{F}) \geq \chi(H)$.

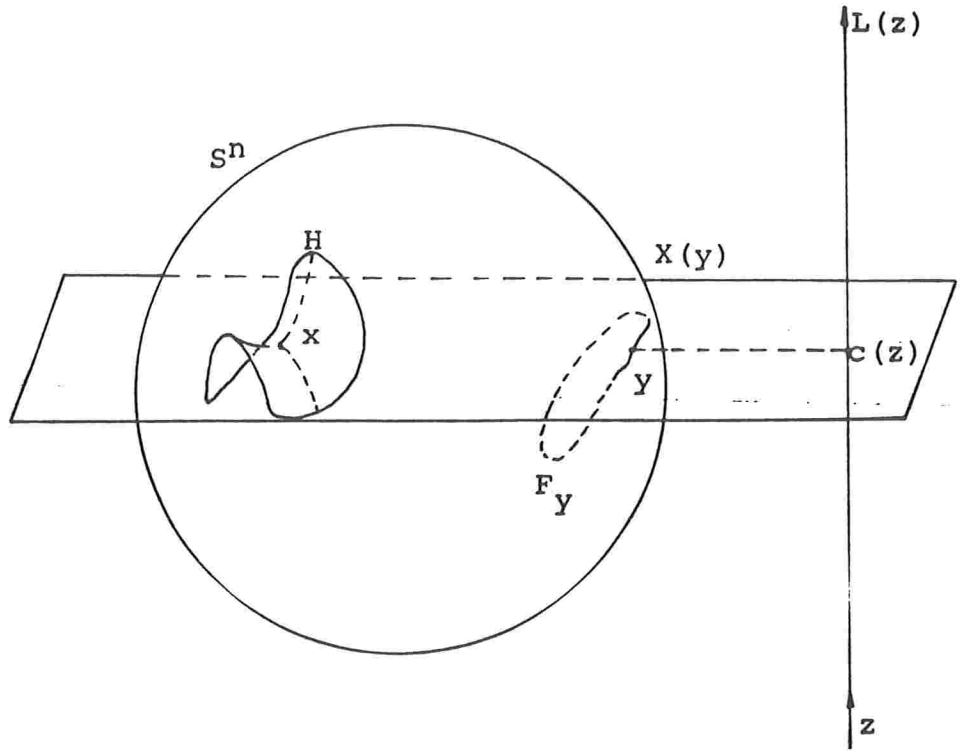


Figura 31

II.4. Exemplos

II.4.1. Se $\mathcal{F}$ é uma folheação de B^{n+1} tal que o bordo S^n seja uma folha, então

$$H = S^n \ , \ h^s(z) = 2 \ , \ \forall \ z \in S^n \ , \quad \text{e}$$

$$K(\mathcal{F}) \geq \frac{1}{2} \int_{S^n} 2 \, dz = \text{área } (S^n) = \frac{2 . \pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \quad , \text{ onde}$$

Γ é a função gama.

II.4.2. Toda folheação de B^{n+1} cujas folhas sejam superfícies fechadas convexas, tal que S^n seja uma folha, e que possua apenas 1 singularidade é uma folheação <u>justa</u> e

$$K(\mathcal{F}) = \text{área } (S^n)$$

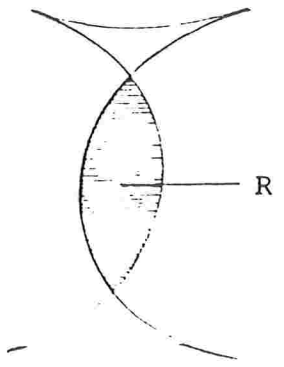
<u>Obs.</u>: uma folheação <u>justa</u> é uma folheação que minimiza a curvatura total.

Em alguns casos conseguimos construir folheações justas que estendem $\mathcal{P}$ ao interior de B^{n+1}. Daremos a seguir algumas definições preliminares.

II.4.3. <u>Definição</u>: um ponto $x \in \mathbb{R}^n$ é um ponto interior (ou interno) de um ouriço H se para quase toda reta orientada L, determinada por $z \in S^{n-1}$ e passando pela origem de $\mathbb{R}^n$, $P_L(x)$ pertence ao intervalo de extremidades $h(z)$ e $h(-z)$.

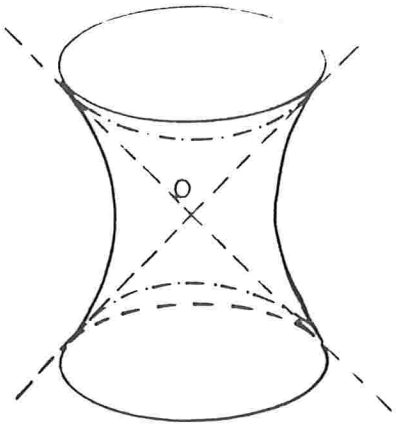
<u>Exemplos</u>

1)



R é a região dos pontos interiores

2)



O é o único ponto interior

3) O conjunto dos pontos interiores é vazio.

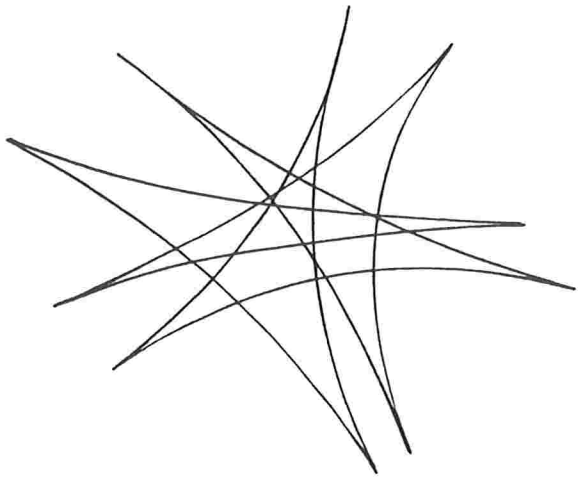


Figura 32

4) Se H é um ouriço projetivo então H não possui pontos interiores.

Seja $\varphi: B^{n+1} \to \mathbb{R}$ a função

$$\varphi(x) = \int_{S^n} \left| P_{L(z)}(x) - h(z) \right| dz$$

φ é uma função contínua em B^{n+1}, que é um conjunto compacto.

II.4.4 <u>Definição</u>: Um ponto $x_o \in B^{n+1}$, que seja ponto de mínimo de φ será chamado de <u>um centro</u> de H.

Observando que: para todo $z \in S^n$ e todo $x \in B^{n+1}$ vale a desigualdade

$$(*) \quad \left| P_{L(z)}(x_o) - h(z) \right| + \left| P_{L(z)}(x) - h(-z) \right| \geq \left| h(z) + h(-z) \right|$$

segue que

$$\varphi(x) \geq \frac{1}{2} \int_{S^n} \left| h(z) + h(-z) \right| dz = |\ell|(H).$$

Se x é um ponto interior de H então vale a igualdade em (*) acima e conclui-se que

1) $\varphi(x) = |\ell|(H)$

2) x é um centro de H.

A recíproca não é verdadeira: um ouriço pode não ter pontos internos.

Se H é um ouriço projetivo então $h^s(z) = 0$, $\forall\, z \in \mathbb{R}P^n$, e portanto $|\ell|(H) = 0$, mas ainda podemos definir o centro de H.

Pergunta: Se H é um ouriço projetivo e F estende X ao interior de B^n, então

$$K(F) \geq \varphi \text{ (centro) ?}$$

Existe F tal que $K(F) = \varphi$ (centro) ?

II.4.5. Construção de uma Folheação Justa que Estende P, quando $n = 2$ e H tem Pontos Interiores

Como H é um ouriço, o campo de vetores P, que indicaremos por X tem índice 1. A folheação justa terá um fonte/poço se H estiver contido em D^2 e uma sela caso H esteja contido no exterior de D^2.

Se H estiver contido em D^2, podemos supor que X é transversal à S^1. Caso contrário, existe perturbação de X, que altera a curvatura total tão pouco quanto se queira e que seja transversal a S^1.

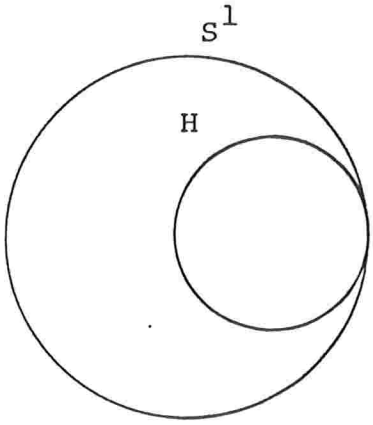


Figura 33

A singularidade de F será uma fonte ou poço, conforme X aponte para o exterior ou interior de S^1, respectivamente. Vamos supor

que X aponte para o interior. Seja P um ponto interior de H, que será o poço. $\mathcal{F}$ será a folheação obtida ligando-se P a cada ponto $x \in S^1$, através de um arco convexo, com vetor tangente em x igual a X(x).

O Teorema de Troca da:

$$K(\mathcal{F}) = \int_{S^1} \int_{L(u)} |\mu|(\mathcal{F};T_t)dt\, du = \ell(H).$$

Um ouriço exterior à S^1, que vem de um campo de indice 1 e que pode ser estendido à uma $\mathcal{F}$ orientável é do tipo abaixo com 4 pontos de contato e quatro cúspides.

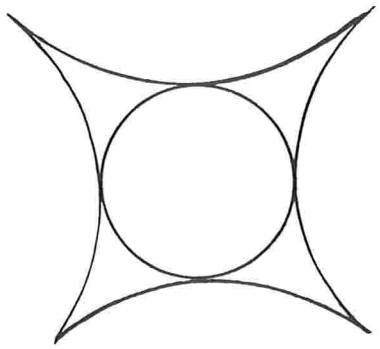


Figura 34

2 cúspides correspondem às separatrizes que tendem à sela e 2 às separatrizes que saem da sela. O ponto de sela P pode ser qualquer ponto de D^2 e as folhas arcos convexos ligando P a S^1.

II.5. Folheações que Estendem um Campo de Vetores dado ao longo do Bordo do Disco D^2

Neste parágrafo vamos examinar com mais detalhes as folheações que estendam ao interior do disco D^2, um campo de vetores dado ao longo de S^1. Demonstraremos uma versão mais geral do Teorema II.3.1, para o caso em que a envoltória do campo de vetores não é necessariamente um ouriço, e F não é necessariamente orientável. Esta versão do teorema será mais fraca no seguinte sentido: suporemos conhecidas as singularidades de F e sua posição em D^2. Este resultado nos fornecerá uma desigualdade, que relacionará $K(F)$ com uma "área algébrica" de uma região do cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$.

Antes de enunciarmos o teorema principal deste parágrafo daremos algumas definições.

Suporemos sempre que $X: S^1 \to TS^1$ é um campo de vetores C^∞ em S^1, $X(\theta) \neq \vec{0}$, $\forall\, \theta \in S^1$. Podemos supor (após pequenas perturbações de X) que os pontos de tangência de X com S^1 são pontos isolados.

H será sempre a envoltória do campo de direções determinado por X.

Dado $z \in S^1$, sejam L a reta orientada, passando pela origem de R^2, determinada por z, e P_L a projeção ortogonal $P_L: D^2 \to L$. Um ponto crítico de P_L é um ponto interior de um arco de curva regular de H, que seja ponto crítico de P_L no sentido usual. Cúspides não são pontos críticos.

F será sempre uma folheação que estende X ao interior de D^2.

II.5.1. Índice de um Ponto Crítico de $P_{L|H}$

Seja $x \in H$ um ponto crítico de $P_{L|H}$. Se $x \in D^2$ dizemos que seu índice é -1. Se $x \notin D^2$ dizemos que seu índice e +1.

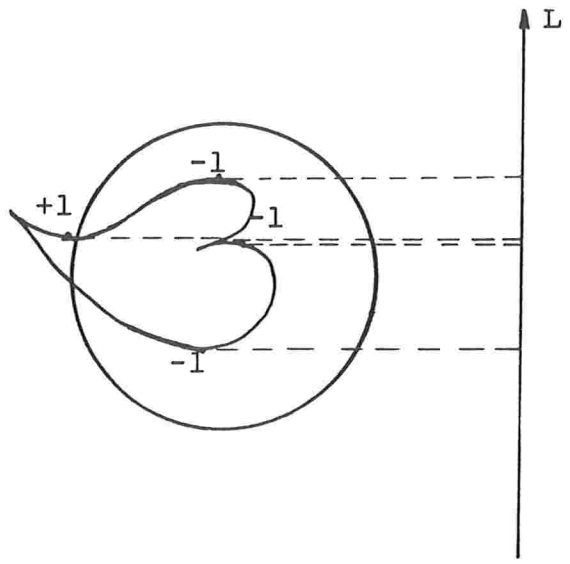


Figura 35

II.5.2. Índice de uma Singularidade de F

O índice de uma singularidade de F será o índice definido sobre RP^1 de modo análogo ao que faz sobre S^1. No caso de uma singularidade orientável este índice é o dobro do índice usual.

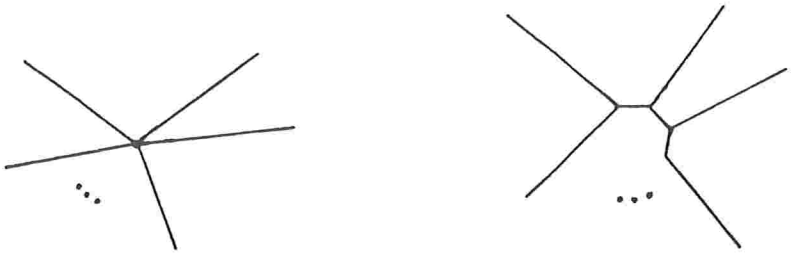
Podemos supor que as singularidades de são espinhos ou tripés.

Singularidades de índice +1 ou + $\frac{1}{2}$ podem ser transformadas em espinhos através de operações que alteram a curvatura total tão pouco quanto se queira, assim como singularidades de índice negativo podem ser transformadas em tripés.

No Capítulo 1 fizemos, em detalhes, esta transformação para as singularidades de índice positivo, transformando-as em pores-

do-sol. O procedimento para espinhos ou tripés é análogo.

Selas com m separatrizes podem ser transformadas em m-2 tripés;



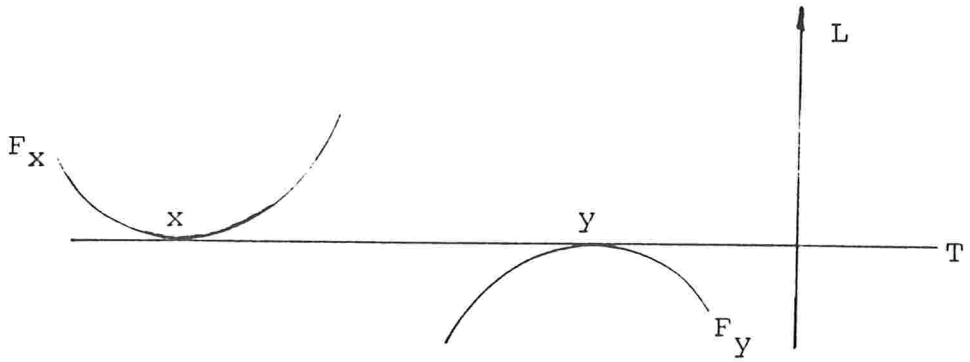
sela com m separatrizes (m-2) tripés

Figura 36

Através destas "Operações de Whitehead" podemos obter espinhos e tripés, com a propriedade de terem, numa vizinhança do ponto singular, folhas localmente convexas.

II.5.5. Índice de um Ponto de Contato

Distinguiremos 2 tipos de ponto de contato entre folhas de F e retas perpendiculares à uma reta orientada L dada, atribuindo:



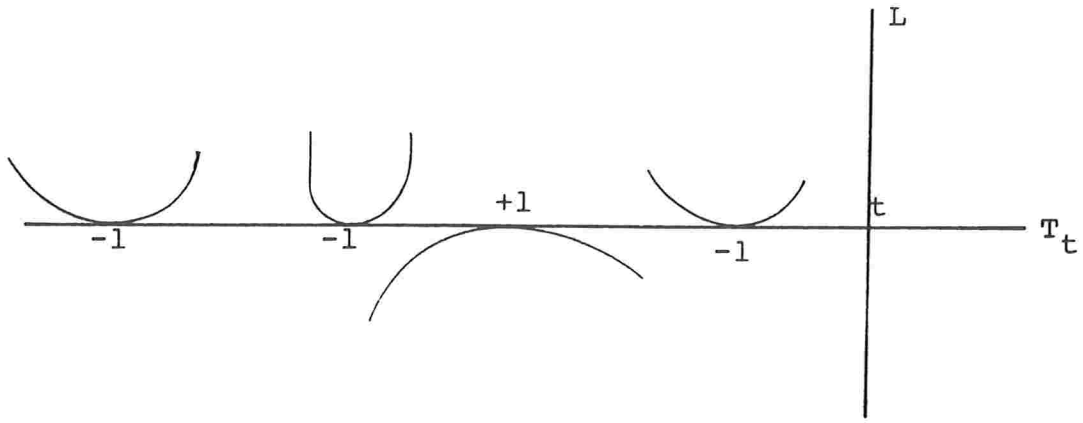
índice (x) = -1
x é um ponto de mínimo local de $P_L|_{F_x}$

índice (y) = +1
y é um ponto de máximo de $P_L|_{F_y}$

Figura 37

II.5.4. Definição: dada L, $t \in L$, T_t perpendicular à L por t, definimos número algébrico de contato do nível t, $\mu_a(F;T_t)$, como sendo a soma dos índices de todos os pontos de contato de T_t com folhas de F.

O módulo do número algébrico de contato do nível t será indicado por $|\mu_a|(F;T_t)$.



$\mu_a(F;T_t) = -2$ $\quad |\mu_a|(F;T_t) = 2$ $\quad |\mu|(F;T_t) = 4.$

Figura 38

É claro que $|\mu|(F;T_t) \geq |\mu_a|(F;T_t)$, $\forall\, z \in S^1$, $\forall\, t \in L$, e portanto $K(F) \geq \frac{1}{2} \int_{S^1} \int_L |\mu_a|(F;T_t)\, dt\, dz$.

Nosso objetivo, entretanto, é o de analisar como varia $|\mu_a|(F;T_t)$ quando t percorre L e interpretar a integral da direita como uma "área algébrica" sobre o cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$.

II.5.5. Definição: $t \in L$ será um nível crítico de P_L se $t = P_L(x)$ para algum ponto crítico x de $P_{L|H}$, ou se existe singularidade de F em T_t.

Por extensão as singularidades de F também serão chamadas de "pontos críticos de P_L". Para quase toda reta L os pontos críti-

cos de P_L são isolados e estão em níveis distintos. Se uma singularidade de F, estiver em H, podemos deslocá-la fazendo uma perturbação de F em uma vizinhança da singularidade que altera $K(F)$ tão pouco quanto se queira.

II.5.6. Definição: o índice $i(t)$ de um nível crítico t é o índice do ponto crítico de P_L deste nível ou o índice da singularidade de F que pertence a T_t.

II.5.7. Teorema: com as notações introduzidas acima temos: Se t é um nível crítico de L, então para ε suficientemente pequeno

$$|\mu_a|(F;T_{t+\varepsilon}) = |\mu_a|(F;T_{t-\varepsilon}) + \text{índice } (t)$$

Demonstração

1º caso: o nível t é um nível crítico de P_L

Seja $A \in S^1$, tal que $X(A) \in T_t$. Para quase todo $z \in S^1$, $X(A)$ não é tangente a S^1. Seja $AB = D^2 \cap T_t$. Como P_L é uma função de Morse, em AB não existem outros pontos críticos de P_L nem singularidades de F e a folha de F que passa por A, F_A, não está contida em AB. Vamos supor, sem perda de generalidade que X aponta para dentro de S^1, em uma vizinhança de A.

Há 2 possibilidades:

1) índice de t = -1.

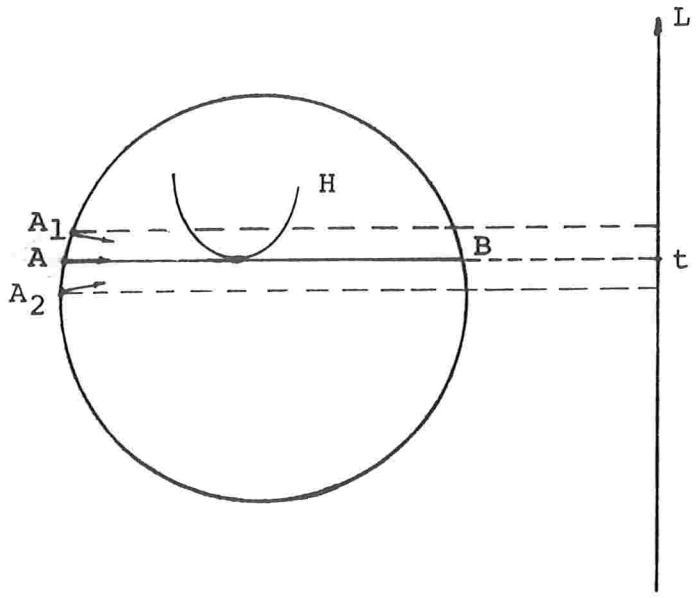


Figura 39

Como a folha F_A não está contida em AB, existe $\varepsilon > 0$ tal que F_A sai da faixa de raio ε em torno de AB. Sejam A_1, A_2 pontos de S^1, próximos de A, dados pela intersecção de S^1 com o bordo da faixa de raio ε acima.

Podemos supor $A_1 \in T_{t+\varepsilon}$, $A_2 \in T_{t-\varepsilon}$. Em A_1 e A_2, X aponta para o interior da faixa.

Se F_A sair da faixa pelo lado de A_1 então as folhas F_B, com $B \in \widehat{AA_1}$ tem um contato de índice -1 com as retas $T_{t'}$, $t<t'<t+\varepsilon$, a mais que as folhas F_B, com $B \in \widehat{A_2A}$.

Se F_A sair da faixa pelo lado de A_2 as folhas F_B com $B \in \widehat{A_2A}$ terão um ponto de contato de índice +1 com T_t, $t-\varepsilon<t<t$ a mais do que as folhas F_B com $B \in \widehat{AA_1}$, e portanto em qualquer caso

$$|\mu_a|(F;T_{t+\varepsilon}) = |\mu_a|(F;T_{t-\varepsilon}) + \text{índice } (T_t).$$

2) índice de t = +1.

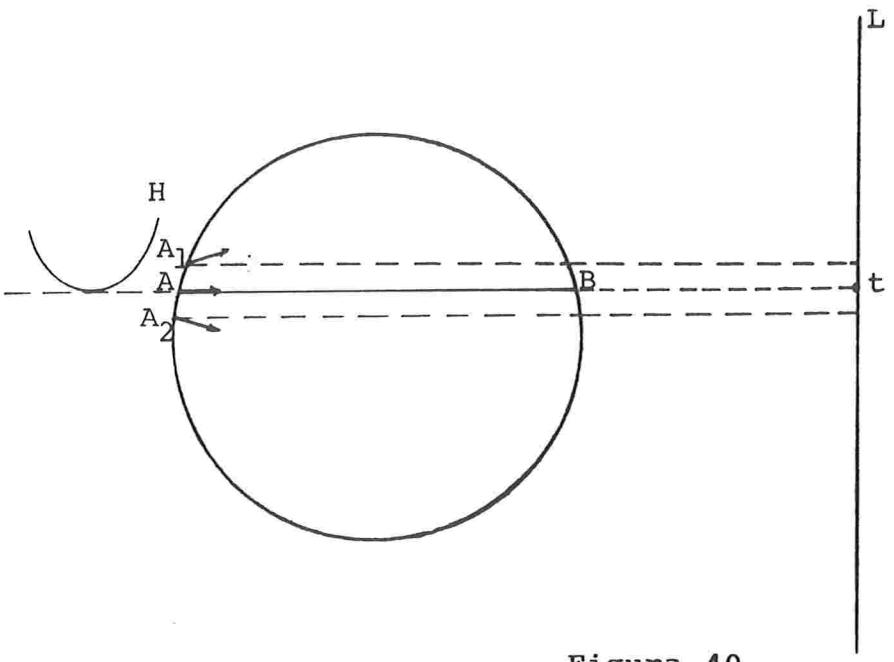


Figura 40

A situação é análoga à descrita acima.

<u>2º caso</u>: <u>No nível há uma singularidade de *F*</u>

Seja P o ponto singular de *F* no nível t. Há duas possibilidades:

1) P é um espinho.

Seja $\eta : D^2(\varepsilon) \to \mathbf{RP}^1$ a aplicação que a cada $x \in D^2(r)$, não singular associa a direção tangente em x, à folha F_x, onde $D^2(r)$ é o circulo de centro P e raio r.

Existe $\varepsilon > 0$, tal que: $\forall\ \delta$, $0 < \varepsilon < \delta$, $\eta|_{S(\delta)}$ tem índice 1, onde $S(\delta) = \partial(D(\delta))$. Assim para toda reta L, existe $x_\delta(\varepsilon) \in S(\delta)$ tal que $T\,F_{x_\delta(\varepsilon)} \perp L$.

Para quase toda reta L, $P_L(x_\delta(\varepsilon)) \neq P_L(P)$, e $x_\delta(\varepsilon)$ é um ponto de contato já que $T_{F_{x_\delta(\varepsilon)}} = T_{P_L(x_\delta(\varepsilon))}$.

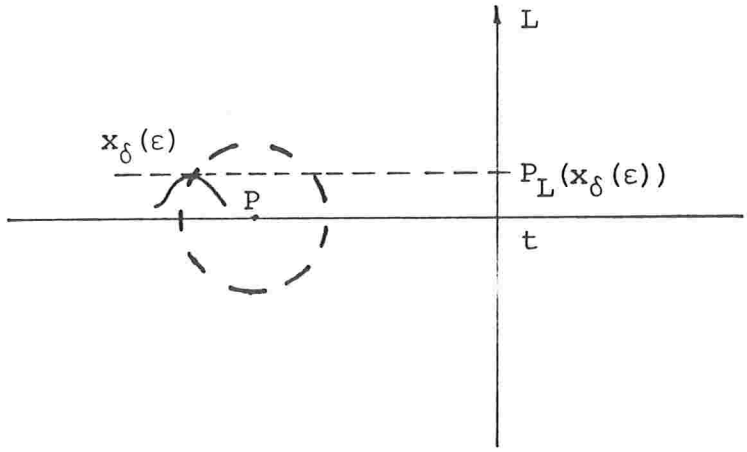


Figura 41

Em vizinhanças de raio suficientemente pequeno de um espinho P, reta tangente, T, a uma folha (exceto a folha que tende a P) deixa esta folha e P de um mesmo lado de T, já que as folhas são localmente convexas.

Assim se $P_L(x_\delta(\varepsilon)) > t$ este contato será de índice +1 e se $P_L(x_\delta(\varepsilon)) < t$ o contato é de índice -1.

2) P é um tripé

Como acima obtemos pontos de contato $x_\delta(\varepsilon)$. Em vizinhanças de P a reta tangente a uma folha (exceto as separatrizes) separa a folha e P em semi-planos opostos e portanto o contato será de índice +1 se $P_L(x_\delta(\varepsilon)) < t$ e de índice -1 se $P_L(x_\delta(\varepsilon)) > t$.

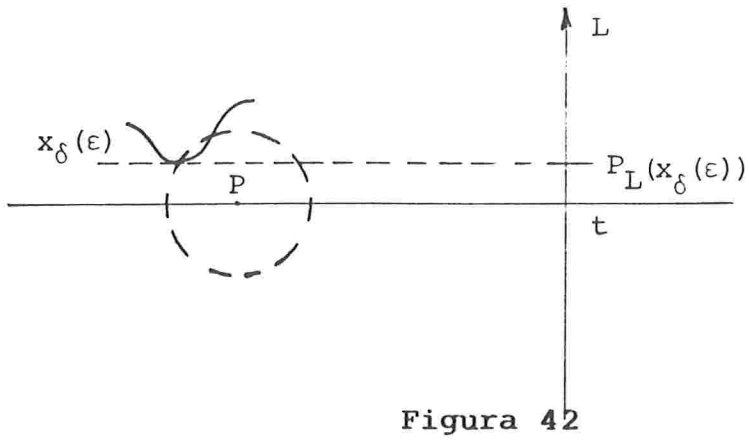


Figura 42

Isto completa a demonstração do Teorema II.5.7.

Como observamos acima vale a desigualdade

$$K(F) \geq \frac{1}{2} \int_{S^1} \int_L |\mu_a|(F;T_t)\ dt\ dL.$$

Vamos interpretar o termo à direita como uma área algébrica sobre o cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$.

Cada reta T do plano pode ser parametrizada pelas coordenadas polares de sua intersecção com a reta N perpendicular a T e passando pela origem

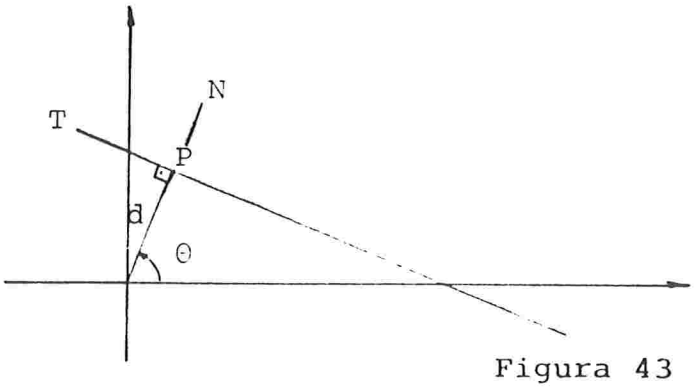


Figura 43

Assim a cada reta do plano podemos associar ponto $(\Theta;d)$ no cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$. Esta aplicação preserva a medida canônica de

$\int |Sa|$.

Toda curva C do plano pode ser representado em $S^1 \times \mathbb{R}$, através do procedimento seguinte: dado $z \in S^1$, sejam $T_1,\ldots,T_r$ as retas do plano, perpendiculares à direção de z e tangentes à C. Cada reta T_i corresponde a um ponto em $S^1 \times \mathbb{R}$. Quando z percorre S_1 obtemos uma curva no cilindro, que é a imagem de C. (Em geral a imagem de C terá duas componentes conexas).

Um ponto P do plano pode ser representado pela curva limite das imagens no cilindro de círculos concêntricos de centro P e raio $\varepsilon \to 0$.

Seja X um campo em S^1 como acima e H sua envoltória. Suponha que as singularidades de F sejam determinadas a priori, em sua natureza e posição. Vamos indicar o conjunto das singularidades por Sing = $\{P_1,\ldots,P_m\}$.

<u>Definição</u>: o diagrama associado à X e Sing, D(X,Sing) é a representação em $S^1 \times \mathbb{R}$ da curva H e das singularidades $\{P_1,\ldots,P_m\}$.

<u>Exemplo</u>:

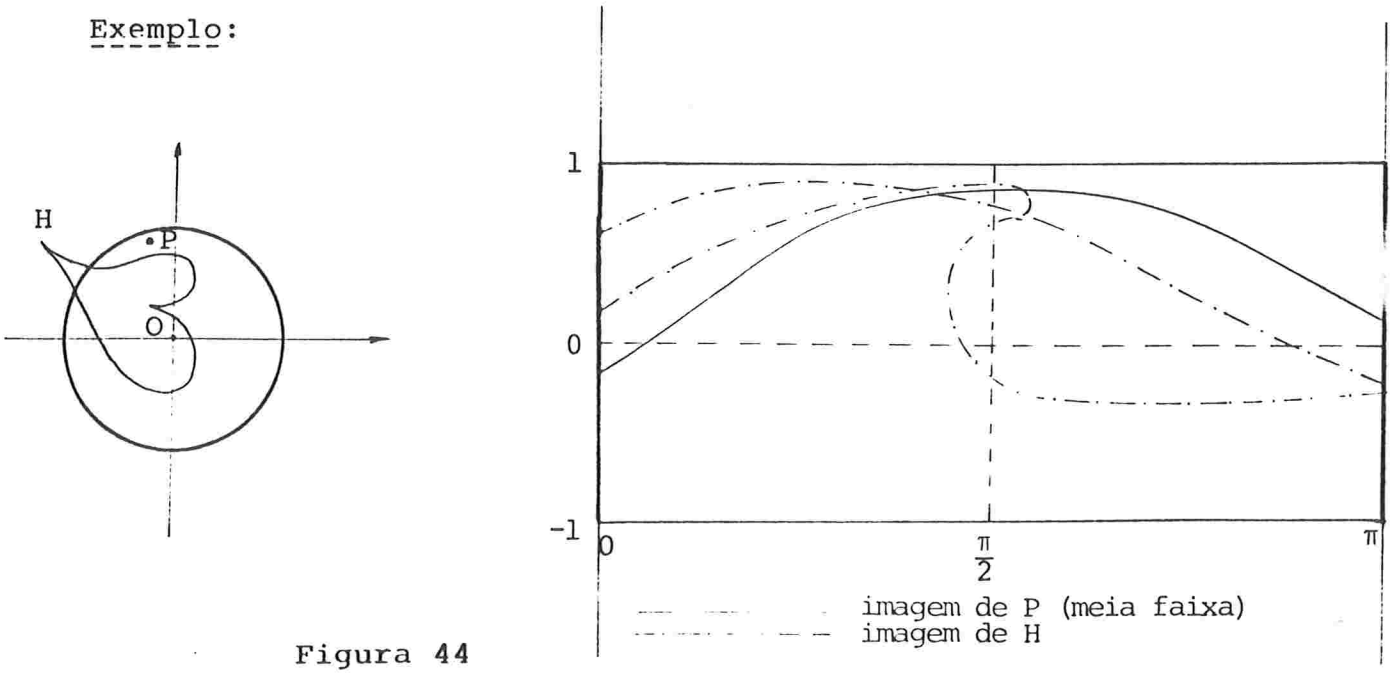


Figura 44

A cada ponto de uma "curva imagem" em $S^1 \times \mathbb{R}$ podemos associar um índice que representa essencialmente o índice em D^2 de sua "pré-imagem":

- o índice de um ponto de uma curva imagem de uma singularidade é igual ao índice da singularidade;
- o índice da curva imagem da envoltória H será definido "por pedaços": +1 nos arcos que são imagem de arcos de H externos a D^2 e -1 na imagem dos arcos de H internos a D^2.

Um diagrama qualquer D(X,Sing) sempre está contido em $S^1 \times [-1;1]$.

Dado um ponto $x = (\Theta;t)$ no cilindro, definimos o índice de x, i(x) como sendo a soma dos índices dos pontos de intersecção da semi-reta vertical $\{\Theta\} \times]-\infty;t]$ com as curvas de D(X,Sing).

<u>Definição</u>: <u>a área algébrica</u> A(D(X,Sing)) de um diagrama D(X,Sing) é

$$A(D(X;Sing)) = \int_{\text{cilindro}} |i(x)| \, dx \, .$$

É claro da construção acima que

$$\int_{S^1} \int_L |\mu_a|(F;T_t) \, dt \, dL = A(D(X;Sing)).$$

<u>Obs.</u>: da construção acima e do Teorema II.5.7 temos também que: $(x=(\Theta,t) \ , \ |t| > 1) \Rightarrow i(x) = 0$, o que mostra que a área algébrica acima está bem definida.

CAPÍTULO III

CURVATURA TOTAL DE FOLHEAÇÕES EM SUPERFÍCIES HIPERBÓLICAS

III.1. Introdução

Curvatura Total de folheações em superfícies hiperbólicas é um assunto pouco explorado e à exceção de um teorema de Langevin e Levitt nada se sabe acerca de minimizantes da curvatura total de folheações destas superfícies.

O teorema de Langevin e Levitt citado acima aparece em [L.L. 1] e se aplica a folheações F cujas singularidades sejam todas de índice negativo (selas). A curvatura total $K(F)$ de tais folheações satisfaz a desigualdade

$$K(F) \geq (12 \log 2 - 6 \log 3).|\chi(M)|.$$

Mostraremos a seguir um teorema que fornece um mínimo para $K(F)+K(F^{\perp})$, sendo F orientável, sem restrições quanto ao índice de suas singularidades.

III.2. O Teorema da Troca para Segmentos Geodésico em H^2

Veremos a seguir uma versão do Teorema da Troca, adaptada a superfícies hiperbólicas e onde a "contagem de pontos de contato" será feita com um pentágono geodésico.

M é uma superfície, compacta, sem bordo, de gênero g conexa, com uma métrica de curvatura constante -1, H^2 o Plano de Poincaré,

identificado com o interior de um disco e p é a aplicação de recobrimento

$$p: H^2 \to M$$

p é uma isometria local e um difeomorfismo local.

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de M com singularidades isoladas e $p^{-1}(\mathcal{F})$ a folheação induzida em H^2. Quando não houver possibilidade de confusão indicaremos $p^{-1}(\mathcal{F})$ por $\mathcal{F}$.

Sejam ainda:

- $\mathcal{G}$ o espaço das geodésicas de H^2;
- $\mathcal{G}_\ell$ o espaço dos segmentos geodésicos de H^2 de comprimento ℓ(fixado);
- Seja G o espaço das isometrias de H^2 que preservam a orientação em H^2.

Em G definimos uma relação de equivlência:

III.2.1. <u>Definição</u>: $g_1 \approx g_2 \Leftrightarrow p \circ g_1 \circ g_2^{-1} = p$, isto é, $g_1 \approx g_2$ se e só se o diagrama abaixo comutar:

$$\begin{tikzcd} H^2 \arrow[r, "g_1 \circ g_2^{-1}"] \arrow[d, "p"'] & H^2 \arrow[d, "p"] \\ M \arrow[r, "Id"] & M \end{tikzcd}$$

Indicaremos o quociente $G/\approx$ por $\tilde{G}$.

III.2.2. <u>Definição</u>. Seja $D \in H^2$. A <u>simetria geodésica por D</u> é a isometria θ_D de H^2, definida por:

Seja $X \in H^2$, $X \neq D$, então:

1) $\theta_D(X)$ pertence à (única) geodésica determinada por D e X,

2) $d(D;X) = d(D;\theta_D(X))$

Se $X=D$, $\theta_D(X) = D$.

Se AB é um segmento geodésico, indicaremos a reflexão pelo ponto médio de AB por $\theta_{\frac{AB}{2}}$.

EM H^2, queremos identificar segmentos geodésicos de comprimento $\underline{\ell}$, que se projetem por p sobre o mesmo arco de geodésica de M.

III.2.3. <u>Definição</u>: Em $\mathcal{G}_\ell$ definimos a seguinte relação de equivalência:

$$C_1 \approx C_2 \Leftrightarrow (g \in G,\ g(C_1) = C_2 \Rightarrow [g] = [Id] \text{ ou } [g] = \left[\theta_{\frac{C_2}{2}}\right]$$

Indicaremos o quociente $\mathcal{G}_\ell/\approx$ por $\tilde{\mathcal{G}}_\ell$.

<u>Observação</u>: Dados C_1, $C_2 \in \mathcal{G}_\ell$, existem exatamente 2 isometrias g_1, g_2 de G que levam C_1 sobre C_2, e elas verificam $g_1 = \theta_{\frac{C_2}{2}} \circ g_2$

Se L é uma geodésica em H^2, $x \in L$, podemos parametrizar as geodésicas D, que cortam um disco de raio r_o e centro x através:

a) da geodéscia D' perpendicular a D e que passa por x, que forma ângulo θ com L;

b) da distância r entre x e a intersecção $D' \cap D$. A medida invariante por G em $\mathcal{G}$ se expressa por $m = \cosh r \,.\, dr \,.\, d\Theta$ [Sa].

Para parametrizar um segmento geodésico AB de $\mathcal{G}_\ell$, que corte o disco de centro x e raio r_o tomamos a geodésica suporte D de $\overline{AB}$, definimos Θ e r como em a) e b) acima e tomamos s como a distância entre o ponto médio de $\overline{AB}$ e $D \cap D'$.

Em $\mathcal{G}_\ell$ a medida invariante será:

$$m = \cosh r \, dr \, d\Theta \, ds.$$

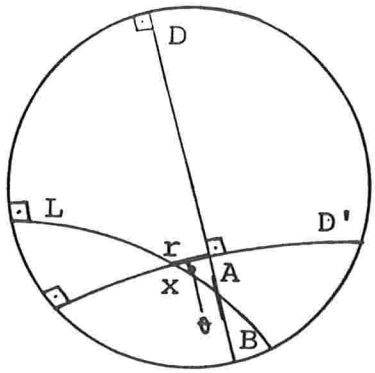


Figura 45

III.2.5. <u>Lema</u>. A medida m definida em G_ℓ induz uma medida em $\tilde{\mathcal{G}}_\ell$, através da aplicação quociente.

<u>Demonstração</u>: sejam $\varphi: \mathcal{G}_\ell \to \tilde{\mathcal{G}}_\ell$ a aplicação quociente e

$$[A] = \{[C] \mid C \in A \subset \mathcal{G}_\ell\} \subset \tilde{G}_\ell$$

Para $[C] \in [A]$ tomamos um representante C e uma vizinhança V, de C em $\mathcal{G}_\ell$, de modo que $\varphi|_V$ seja injetora. Definimos uma den

sidade em $\tilde{\mathcal{G}}_\ell$ pondo

$$m([V]) = m_{G_\ell}(V).$$

Como os automorfismos do espaço de recobrimento são isometrias, esta densidade não depende da escolha do representante.

Antes de passarmos ao Teorema central deste parágrafo vamos recordar um fato básico da Geometria das superfícies hiperbólicas: com as notações acima, sendo,

$$p: H^2 \to M$$

a aplicação de recobrimento, então M é a imagem por p de um <u>polígono geodésico</u> F_g de H^2 com 4g lados, com soma dos ângulos internos igual a 2π. $p|_{\mathring{F}_g}$ é difeomorfismo e uma isometria local. Um tal polígono é chamado um <u>Domínio Fundamental</u> de M $[M]$.

Um compacto conexo de H^2, F, com as propriedades: $p(F) = M$, $p|_{\mathring{F}}$ difeomorfismo também será chamado um <u>domínio fundamental</u> de M.

III.2.7. <u>Teorema</u>: (Teorema da Troca para segmentos geodésicos)

Com as notações acima $K(F) = \frac{1}{2\ell}\int_{\tilde{G}} |\mu|(g(F);C)$, onde $C \in \mathcal{G}_\ell$ é um segmento fixado.

Demonstração:

$$K(F) = \int_M |K|(x)\,dx = \int_{\mathring{M}_1} |K|(x)\,dx \quad \text{onde } \mathring{M}_1 \text{ é o interior}$$

de um domínio fundamental.

Pelo Teorema da Troca

$$K(F) = \int_{\mathring{M}_1} |K|(x)\,dx = \int_{\mathcal{G}} |\mu|(F|_{\mathring{M}_1};L)$$

Por outro lado

$$\int_{\mathcal{G}_\ell} |\mu|(F|_{\mathring{M}_1};C) = \int_L \chi_C \int_{\mathcal{G}} |\mu|(F|_{\mathring{M}_1};L) = \ell \int_{\mathcal{G}} |\mu|(F|_{\mathring{M}_1};L)$$

(L geodésica
suporte de C)

Logo $K(F) = \frac{1}{\ell}\int_{\mathcal{G}_\ell} |\mu|(F|_{\mathring{M}_1};C) = \frac{1}{\ell}\int_{\tilde{\mathcal{G}}_\ell} |\mu|\ (F;[C])$

onde $|\mu|(F;[C])$ = número de pontos de tangência entre folhas de F e um representante de $[C]$ e daí segue

$$K(F) = \frac{1}{2\ell}\int_{\tilde{G}} |\mu|(|g|F;C_o)$$

onde $|\mu|([g]F;C_o)$ = número de pontos de tangência entre folhas de $g_1(F)$ e C_o, com g_1 representante de $[g]$. O fator 2 aparece na igualdade acima pois cada ponto de contato será contado 2 vezes em $\tilde{G}$.

III.3. Curvatura Total de Duas Folheações Ortogonais numa Superfície Hiperbólica

Em H^2 um polígono (geodésico) regular de n lados pode ter seus ângulos internos assumindo qualquer valor α, $0 < \alpha < \frac{(n-2)}{n}$. Para o pentágono geodésico regular com ângulos internos iguais a $\frac{\pi}{2}$ o lado mede $\ell \cong 4,27$. Tal pentágono será denotado por P.

III.3.1. Teorema. Seja M uma superfície compacta, sem bordo, de gênero g, e sejam $\mathcal{F}$ folheação de M com singularidades isoladas e $\mathcal{F}^{\perp}$ a folheação ortogonal. Então

$$K(\mathcal{F}) + K(\mathcal{F}^{\perp}) \geq \frac{\pi^2}{5\ell} |\chi(M)|.$$

Indicaremos por $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}^{\perp}$ as folheações de H^2, induzidas por $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}^{\perp}$, respectivamente.

Seja $|\mu|(\mathcal{F};P) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ o número de pontos de tangência entre folhas de $\mathcal{F}$ e os lados de P.

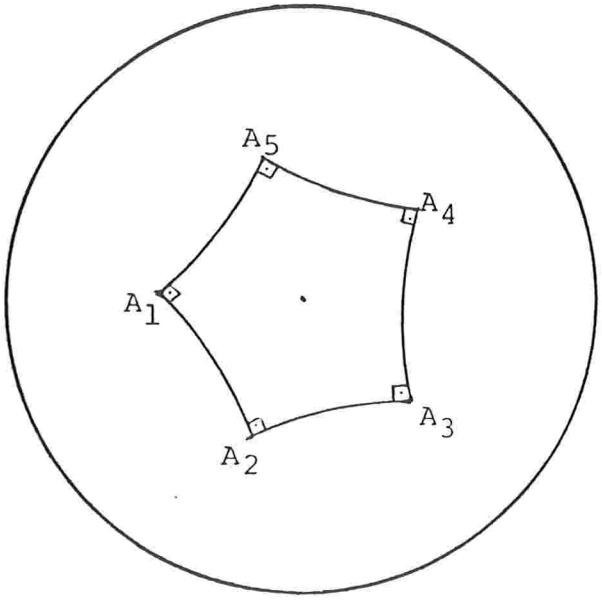


Figura 46

Em [L.L.2] os autores consideram sobre S^2 um triângulo geodésico com ângulos internos iguais a $\frac{\pi}{2}$. Em H^2 não existem tais triângulos. O pentágono é o primeiro polígono com número ímpar de lados para o qual isto é possível. Queremos agradecer a R. Connelly pela idéia de considerar os pentágonos, que permite obter um lema como o que segue:

III.3.2. Lema. $|\mu|(\mathcal{F};P) + |\mu|(\mathcal{F}^{\perp};P) \geq 1$.

Demonstração. Se um dos vértices de P, for ponto de contato de $\mathcal{F}$, ou $\mathcal{F}^{\perp}$ com P, então nada resta a demonstrar, logo suporemos que nem $\mathcal{F}$, nem $\mathcal{F}^{\perp}$ é tangente a P em seus vértices. Suporemos também que os vértices de P não são singularidades de $\mathcal{F}$. As singularidades de $\mathcal{F}$ sendo isoladas esta condição é genérica, com relação à medida que introduzimos no conjunto dos segmentos geodésicos de H^2.

Seja F uma folha de $\mathcal{F}$ que passe por um vértice A_i de P. Existem duas possibilidades:

- F e exterior a P, isto é, localmente F só encontra P em A_i;
- F é interior a P, isto é, localmente uma semi-folha de F, determinada por A_i está no interior de P e a outra semi-folha está no exterior de P.

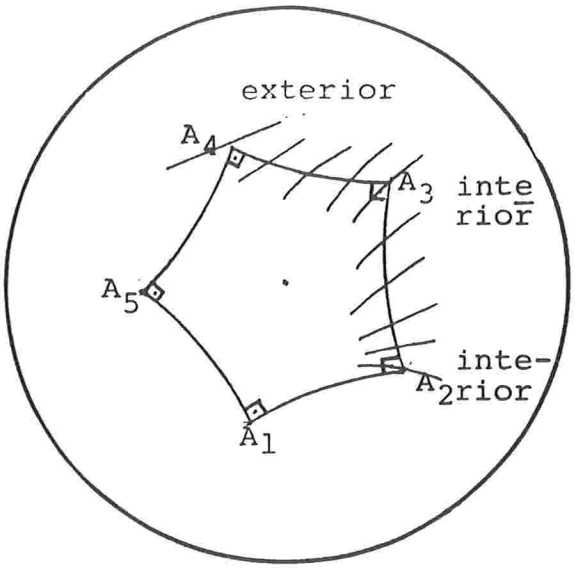


Figura 47

Como o número de vértices de P é ímpar, existem 2 vértices consecutivos A_i , A_j onde as folhas de F são ambas internas ou ambas externas.

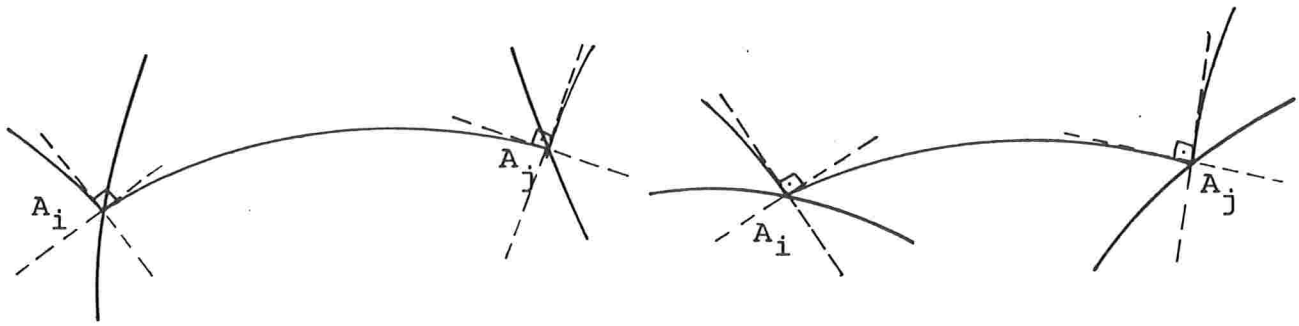


Figura 48

Se em A_i e A_j as folhas de F são <u>interiores</u> então existe $x \in A_iA_j$ onde a folha F_x é perpendicular à A_iA_j e portanto em x, A_iA_j é tangente a $F^{\perp}$.

Se em A_i e A_j as folhas são <u>exteriores</u>, então existe $x \in A_iA_j$ onde F é tangente a A_iA_j.

Em qualquer caso

$$|\mu|(F;P) + |\mu|(F^{\perp};P) \geq 1 \quad \square$$

Vamos completar a demonstração do Teorema III.3.1.

Fixamos o pentágono geodésico P de H^2, com ângulos internos iguais a $\frac{\pi}{2}$. Em vista do Teorema III.2.7 (Teorema da Troca para Segmentos Geodésicos).

Temos

$$K(F) + K(F^{\perp}) = \frac{1}{10\ell}\int_{\tilde{G}} |\mu|(gF;P) + \frac{1}{10\ell}\int_{\tilde{G}} |\mu|(gF^{\perp};P)$$

$$= \frac{1}{10\ell}\int_{\tilde{G}} \left[|\mu|(gF;P) + |\mu|(gF^{\perp};P)\right] \quad \text{e do Lema III.3.2}$$

acima vem

$$K(F) + K(F^{\perp}) \geq \frac{1}{10\ell}\int_{\tilde{G}} 1 = \frac{1}{10\ell}\, m(\tilde{G}).$$

III.3.3. <u>Lema</u>. $m(\tilde{G}) = 2\pi^2 \cdot |\chi(M)|$

<u>Demonstração</u>: Seja $[g] \in \tilde{G}$. Com a notação do parágrafo anterior temos

$$\psi: \tilde{G} \to \tilde{G}_\ell$$

$$\psi([g]) = [g(C_o)]$$

$g(C_o) \in \mathcal{G}_\ell$ e pode ser parametrizado por Θ, r e s como no parágrafo anterior, onde foi fixado um ponto $x \in P$. Para Θ variando num

intervalo de comprimento π, e $\underline{r}$ e $\underline{s}$ variando em intervalos dr, ds pequenos temos um conjunto de segmentos G_ℓ^1 tal que $\psi\big|_{\psi^{-1}(G_\ell^1)}$ é bijetora

$$\text{e} \quad m_{\tilde{G}}(\psi^{-1}(G_\ell^1)) = \pi \int \cosh r \, dr \, ds = \pi(\text{área de uma vizinhança de } x \text{ em } P_g).$$

Lembrando que $\psi^{-1}(C)$ é formada por 2 isometrias de $\tilde{G}$, segue $m(\tilde{G}) = 2\pi \cdot \text{área } F_g$.

Como a área de P_g é $2\pi|\chi(M)|$ (veja próximo parágrafo) segue $m(\tilde{G}) = 2\pi^2|\chi(M)|$ o que conclui a demonstração do Lema e do Teorema.

Observemos também que se $\mathcal{F}$ é uma folheação de M com só singularidades do tipo sela o resultado de Langevin/Levitt citado na introdução fornece:

$$K(\mathcal{F}) + K(\mathcal{F}^\perp) \geq 2(12 \log - 6 \log 3)|\chi(M)| \approx 3{,}45|\chi(M)|$$

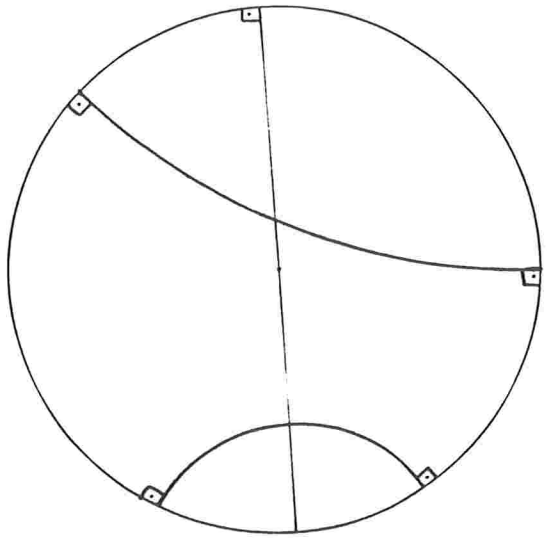
Esta estimativa é a melhor possível no sentido que existem folheações que realizam este valor mínimo. O Teorema III.3.1 acima fornece

$$K(\mathcal{F}) + K(\mathcal{F}^\perp) \geq \frac{\pi^2}{5\ell} |\chi(M)| \approx 0{,}46|\chi(M)|.$$

III.4. A Geometria do Disco de Poincaré

Neste parágrafo vamos recapitular alguns fatos simples sobre o Plano de Poincaré.

O Plano de Poincaré H^2 é o interior de um disco em R^2 e usualmente é apresentado como um "modelo de uma geometria não-euclidea na", neste modelo os "pontos" são os pontos do interior do disco, "retas" são diâmetros do disco ou arcos de circunferência perpendiculares ao bordo do disco.



Plano de Poincaré
Figura 49

Neste modelo temos uma métrica que induz em H^2 uma curvatura negativa constante igual a -1.

A geometria deste modelo é dita hiperbólica e toda superfície com curvatura constante igual a -1 é localmente isométrica a H^2. H^2 é ainda o Revestimento Universal destas superfícies.

III.4.1. Teorema: área de $F_g = 2\pi|\chi(M)|$.

Demonstração: segue imediatamente do Teorema de Gauss-Bonett

$$\sum \int_{\text{lados}} K_g(s)ds + \iint_{P_g} K\, d\sigma + \sum \alpha_i = 2\pi \cdot \chi(F_g)$$

onde α_i são os ângulos externos de F_g,

$$\iint_{P_g} -1 \, d\sigma + 4g\,\pi - 2\pi = 2\pi$$

$$- \text{Área } (F_g) = -4g + 4\pi = 2\pi(2-2g) = 2\pi\chi(M)$$

$$\text{Area } (F_g) = 2\pi|\chi(M)|.$$

III.4.2. <u>Teorema</u>: O comprimento ℓ do lado de P é solução (<u>única</u>) da equação

$$\cosh \ell = 1 + a^2 \operatorname{senh}^2 \ell - a^2 \operatorname{senh}^2 \ell \cdot \cos \frac{2\pi}{5},$$

onde $a = \dfrac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{4}}{\operatorname{sen} \frac{2\pi}{5}}$

<u>Demonstração</u>: Aplicando a Lei dos senos e a Lei dos cossenos ao triângulo ABC abaixo temos

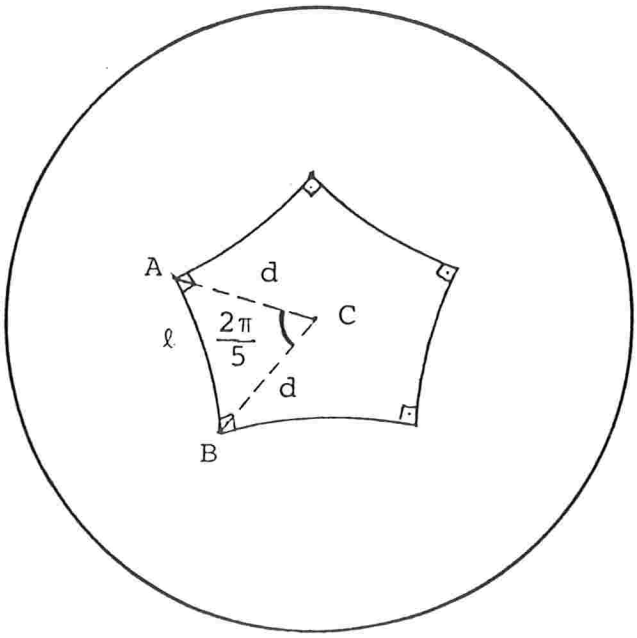


Figura 50

(1) $\dfrac{\text{senh } d}{\text{sen } \frac{\pi}{4}} = \dfrac{\text{senh } \ell}{\text{sen } \frac{2\pi}{5}}$

(2) $\cosh \ell = \cosh^2 d - \text{senh}^2 d \cdot \cos \frac{2\pi}{5}$

De (1) vem $\text{senh } d = \dfrac{\text{sen } \frac{\pi}{4}}{\text{sen } \frac{2\pi}{5}} \cdot \text{senh } \ell = a \text{ senh } \ell$.

e $\text{senh}^2 d = a^2 \text{ senh}^2 \ell$

Como $\cosh^2 d = 1 + \text{senh}^2 d$ (Teorema Fundamental da Trigonometria Hiperbólica), segue

$$\cosh^2 d = 1 + a^2 \text{ senh}^2 \ell.$$

Assim (2) fica:

$$\cosh \ell = 1 + a^2 \text{ senh}^2 \ell - a^2 \text{ senh}^2 \ell \cdot \cos \frac{2\pi}{5}.$$

Consideremos a função

$$f(\ell) = \cosh \ell - 1 + a^2 \text{ senh}^2 \ell \left(\cos \frac{2\pi}{5} - 1\right)$$

Esta função tem derivada negativa para $x > 0,7771...$, é positiva no intervalo $0 < x < 4$ e negativa para $x > 5$. Assim f possui uma única raiz positiva cujo valor aproximado é

$$\ell \approx 4,27539...$$

CAPÍTULO IV

O TEOREMA DA TROCA COM CURVAS

IV.I. Introdução

A técnica utilizada no capítulo anterior de "contar contatos" com polígonos geodésicos nos leva, de maneira natural, a procurar uma versão mais geral do Teorema da Troca, onde a "contagem de contatos" seja feita com curvas quaisquer.

Neste capítulo, exporemos, de forma sucinta, dois teoremas que apontam nesta direção: um onde levaremos em conta os contatos de uma folheação com os ângulos dos vértices de um polígono do plano e outro, também no plano, para curvas quaisquer.

Temos fortes suspeitas que resultados análogos a este último valem em dimensões mais altas.

IV.2. Teorema da Troca com Polígonos do Plano

Neste parágrafo W será um aberto limitado do plano e F uma folheação de W, por curvas.

A definição seguinte é natural, quando se pensa em "contar contatos" com curvas, aproximando-as por polígonos:

IV.2.1. Definição: Seja F uma folheação de W, $A \in W$, e $B\hat{A}C$ um ângulo de vértice A. Diremos que F e $B\hat{A}C$ tenha um ponto de contato em A se a reta tangente à folha F_A, T_AF_A, estiver contida no par de ângulos opostos pelo vértice A e suplementares a $B\hat{A}C$.

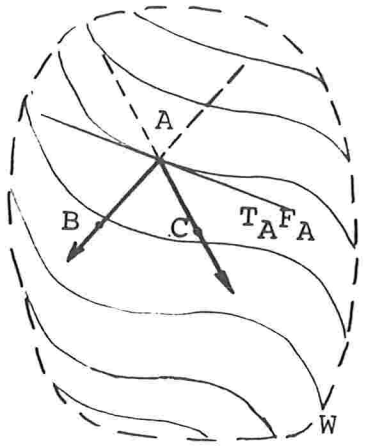


Figura 51

Quando A for vértice de um polígono regular a condição acima é a de que T_AF_A tem uma semi-reta determinada por A, contida no ângulo externo do polígono, no vértice A.

Podemos parametrizar um ângulo $B\hat{A}C$ de vértice A e medida $0 \leq \theta_o \leq \pi$, fixada, através de 3 parâmetros (x,y,θ) onde x e y são as coordenadas de A e θ é inclinação do lado $\overrightarrow{AB}$ medido com o eixo das abscissas (as medidas de ângulos se farão sempre no sentido anti-horário, e a partir do eixo das abscissas quando for o caso)

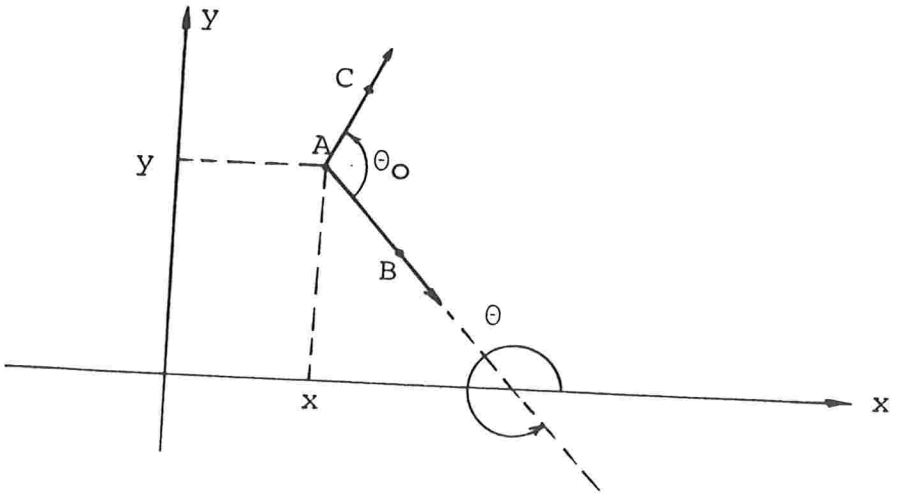


Figura 52

O par (x,y) percorre o plano $\mathbb{R}^2$ e Θ varia no intervalo $[0;2\pi[$.

Seja A_{Θ_o} o conjunto dos ângulos do plano de medida Θ_o com a parametrização acima. A_{Θ_o} pode ser pensado como o cilindro $\mathbb{R}^2 \times S^1$.

Em A_{Θ_o} temos uma medida canônica, que é invariante pelo grupo das isometrias do plano. Esta medida é dada localmente pela densidade

$$m = dx\, dy\, d\Theta \ .$$

De modo análogo ao que fizemos no capítulo anterior esta medida induz uma medida no grupo G das isometrias do plano que preservam a orientação do plano: fixamos um ângulo de medida Θ_o, tomando, por exemplo, B_o no eixo das abscissas e A_o como a origem, e definimos

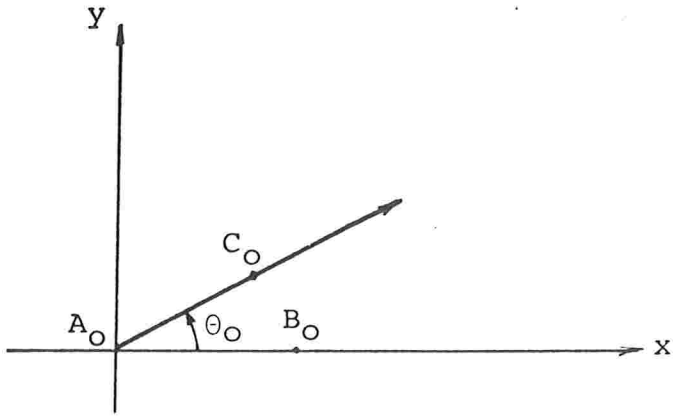


Figura 53

$$\varphi : A_{\Theta_o} \to G \ ,$$

definindo $\varphi(B\hat{A}C)$ como a isometria do plano que aplica $B_o\hat{A}_oC_o$ em

$B\hat{A}C$, isto é: $\varphi(B\hat{A}C) = g \Leftrightarrow g(B_o\hat{A}_oC_o) = B\hat{A}C$. Como φ é uma bijeção, ela induz a medida desejada.

Observação: G também pode ser pensado como sendo $\mathbb{R}^2 \times S^1$.

Por analogia às situações estudadas anteriormente vamos indicar por $|\mu|(F;g(B_o\hat{A}_oC_o)) \in \{0;1\}$ o número de pontos de contato entre F, e o ângulo $g(B_o\hat{A}_oC_o)$.

IV.2.2. Lema: com as notações acima

$$\int_G |\mu|(F;g(B_o\hat{A}_oC_o))\ dmg = \frac{1}{2}\ \text{área}\ (W).(\pi-\Theta_o)$$

Demonstração:

$$\int_G |\mu|(F;g(B_o\hat{A}_oC_o))\ dmg = \iint_{\mathbb{R}^2} \int_{[0,2\pi[} |\mu|(F;g(B_o\hat{A}_oC_o))d\Theta\ dxdy$$

$$= \text{área}\ (W).2(\pi-\Theta_o)$$

A última igualdade segue dos fatos:

- se $g(A_o) \notin W$, $|\mu|(F;g(B_o\hat{A}_oC_o)) = 0$
- se $g(A_o) \in W$ então existem 2 casos:

seja α o ângulo formado por $T_{g(A_o)}F_{g(A_o)}$ e o eixo das abscissas: $|\mu|(F;g(B_o\hat{A}_oC_o)) = 0 \Leftrightarrow$ o ângulo entre $g(\overrightarrow{A_oB_o})$ e o eixo das abscissas estiver entre $\alpha-\Theta_o$ e α ou entre $\alpha-\Theta_o+\pi$ e $\alpha+\pi$;

$|\mu|(F;g(B_o\hat{A}_oC_o) = 1$ caso contrário.

Se $P_n = A_1A_2 \ldots A_n$ for um polígono convexo do plano, com Θ_i = medida do ângulo interno de P em A_i, pomos:

$$|\mu|(F;P_n) = \sum_i |\mu|(F;A_i)$$ onde $|\mu|(F;A_i)$ é o número de pontos de contato entre F e ângulo de vértice A_i. Neste caso indicando a soma $\sum_{i=1}^{n} |\mu|(F;A_i)$ por $|\mu|(F; \measuredangle P_n)$, temos:

IV.2.3. <u>Lema</u>: $\int_G |\mu|(F; \measuredangle g(P_n)) = \text{área } (W) \cdot 4\pi.$

<u>Demonstração</u>: basta aplicar o Lema anterior e lembrar que a soma dos ângulos externos de um polígono convexo do plano é 2π.

<u>Observação</u>: Resultado semelhante vale para polígonos quaisquer não necessariamente convexos.

As considerações sobre o Teorema da Troca para segmentos, feitas no capítulo anterior, se aplicam também ao plano e obtemos um resultado semelhante:

IV.2.4. <u>Lema</u>: Se F é uma folheação da região aberta $W \subset \mathbb{R}^2$ e C_o é um segmento de reta de comprimento ℓ o plano, então

$$K(\mathcal{F}) = \frac{1}{2\ell} \int |\mu|(\mathcal{F};g(C_o))\, dm(g).$$

Se $P_n = A_1A_2 \ldots A_n$ é um polígono fixado de lados A_iA_j de comprimentos ℓ_i então obtemos o Lema:

IV.2.5. <u>Lema</u>: $K(\mathcal{F}) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2\ell_i} \int_G |\mu|(\mathcal{F};g(A_iA_{i+1}))dm(g)\right)$

Se P_n é um polígono regular de lado ℓ a igualdade acima fica

$$K(\mathcal{F}) = \frac{1}{2n\ell}\left(\sum_{i=1}^{n} \int_G |\mu|(\mathcal{F};g(A_iA_{i+1}))dm(g)\right) = \frac{1}{2n\ell}\int_G |\mu|(\mathcal{F};g(P_n))dm(g)$$

onde $|\mu|(\mathcal{F};g(P_n))$ é o número de pontos de contato de $\mathcal{F}$ e $g(P_n)$.

Juntando a observação acima com o Lema IV.2.3 obtemos:

IV.2.6. <u>Teorema</u>: Se $\mathcal{F}$ é uma folheação do aberto $W \subset \mathbb{R}^2$, e se P_n é um polígono convexo regular de lado ℓ, então

$$\frac{1}{2n\ell}\int_G |\mu|(\mathcal{F};g(P_n))dm(g) + \frac{1}{2}\int_G |\mu|(\mathcal{F};\ \measuredangle\ g(P_n))dm(g) = K(\mathcal{F}) + \text{área}(W).2\pi$$

IV.3. <u>Teorema da Troca com Curvas Regulares do Plano</u>

Neste parágrafo W será um aberto limitado do plano, $\mathcal{F}$ uma folheação de $\underline{W}$ por curvas e C será uma curva regular em $\mathbb{R}^2$ parametrizada pelo comprimento de arco, fixada.

Lembramos que o espaço G das isometrias do plano que preservam a orientação é o cilindro $\mathbb{R}^2 \times S^1$, e sobre G consideramos a medida dada pela densidade $m = dx\, dy\, d\theta$ como no parágrafo anterior.

Dado um ponto $(x,y,s) \in W \times C$ existem duas isometrias em G, g_1, g_2, que levam s sobre (x,y) em W do modo que a folha $F_{(x,y)}$ seja tangente em (x,y) à curva $g_i(C)$, i=1,2. Estas isometrias diferem por uma rotação de π.

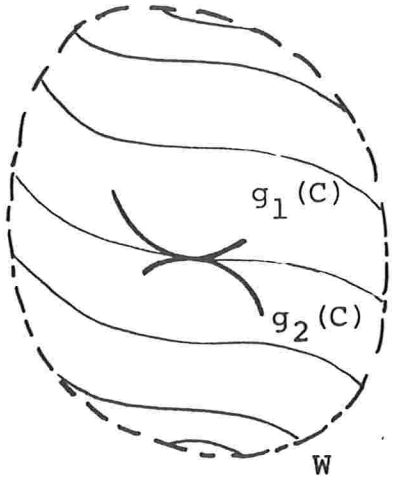


Figura 54

Identificamos g_1 e g_2, e chamaremos $\tilde{G}$ o quociente de G por esta relação de equivalência.

Definimos $\varphi: W \times C \to \tilde{G}$ pondo

$\varphi(x,y,s) = |g| \Leftrightarrow g$ é uma isometria do plano que leva s em (x,y) de modo que $F_{(x,y)}$ e g(C) sejam tangentes em (x,y).

IV.3.1. <u>Lema</u>: Orientando $F_{(x,y)}$ e $g(C)$ de modo que em (x,y) os vetores tangentes à $F_{(x,y)}$ e à $g(C)$ tenham mesmo sentido, temos

$$\text{Jac } \varphi_{(x,y,s)} = |K_F(x,y) - K_g(s)| \ ,$$

onde $K_F(x,y)$ é a curvatura da folha $F_{(x,y)}$ em (x,y) e $K_g(s)$ é a curvatura de $g(C)$ em s, ambas com sinal.

<u>Demonstração</u>: totamos a base ortogonal $[\vec{e}_1;\vec{e}_2,\vec{c}'(s)]$ no espaço tangente à $W \times C$ no ponto (x,y,s) com $[\vec{e}_1,\vec{e}_2]$ base canônica do $\mathbb{R}^2$ e a base ortogonal $[\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{f}]$ no tangente à $\tilde{G} = \mathbb{R}^2 \times S^1$ onde f é o vetor tangente à família de pares de isometrias em $\tilde{G}$ que rolam C sobre $F_{(x,y)}$ sem escorregar, (rotações) no sentido de $F_{(x,y)}$.

Quando C rola sobre $F_{(x,y)}$ sem escorregar o ponto de contato entre $g(C)$ e F tem velocidade de translação nula em cada instante e tem componente de rotação $K_F - K_g$

$$\text{Jac}_{(x,y,s)} = \left| \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & (K_F(x,y) - K_g(s)) \end{bmatrix} \right| =$$

$$= |K_F(x,y) - K_g(s)| \quad \square$$

Este Lema nos dá diretamente o Teorema da Troca com Curvas do Plano:

IV.3.2. <u>Teorema</u>: Sendo W aberto limitado do plano, $\mathcal{F}$ folheação de W por curvas, e C uma curva regular do plano, parametrizada por comprimento de arco, então

$$\frac{1}{2}\int_G |\mu|(\mathcal{F};g(C))dm(g) = \int_{W\times C} |K_F(x,y)-K_g(s)|\ dx\ dy\ ds$$

onde $|\mu|(\mathcal{F};g(C)$ é o número de pontos de contato entre folhas de $\mathcal{F}$ e a curva $g(C)$, $K_f(x,y)$ e $K_g(s)$ as curvaturas com sinal de $F(x,y)$ em (x,y) e $K_g(s)$ de $g(C)$ em s, respectivamente.

<u>Demonstração</u>:

$$\frac{1}{2}\int_G |\mu|(\mathcal{F};g(C))dm(g) = \int_{\tilde{G}} |\mu|(\mathcal{F};[g](C))dm|g| = \int_{\varphi(W\times C)} |\mu|(\mathcal{F};[g](C))dm([g])$$

$$= \int_{W\times C} |K_F(x,y) - K_g(s)|\ dx\ dy\ ds.$$

onde, $[g](C) = g_1(C) \cup g_2(C)$, se $[g] = \{g_1,g_2\}$.

BIBLIOGRAFIA

[A,A] R. Alexander, S. Alexander, "Geodesic in Riemannian Manifolds with Boundary". Indiana University Mathematics Journal, 30 (1981) 481-487.

[BLR] F. Brito, R. Langevin, H. Rosenberg: "Intégrales de courbure sur des varietés feuilletées; Jour. Diff. Geom. 16 (1981), 19-50.

[H] J. Hadamard,"Leçons sur le calcul des variations." (Hermann Paris 1910).

[K] A. Kafker, "Geodesic fields with singularities". Ph.D. Univ. of Pensylvania, fev. 1979.

[L.1] R. Langevin,"Courbure, Feuilletages et surfaces". Tese. Publications Mathematiques D'Orsay. 80-03.

[L.2] R. Langevin, "Feuilletages tendus". Bull. Soc. Math.France, 107 (1979) p. 271-281.

[L.L.1] R. Langevin, G. Levitt, "Courbure totale des feuilletages des surfaces". Comment. Math. Helvetici 57 (1982) 175 -195.

[L.L.2] R. Langevin, G. Levitt, "Sur la courbure totale des feuilletages des surfaces a bord". Bol. da Soc. Bras. de Mat. vol. 16, nº 1 (1985) 1-13.

[L.L.R] R. Langevin, G. Levitt, H. Rosenberg. "Herrisons et multiherrissons". (Enveloppes parametrees par leur application de Gauss). A aparecer.