Controles de tempo ótimo em grupos de Lie

Pedro Aladar Tonelli

Dissertação apresentada ao

Instituto de Matemática e Estatística

da

Universidade de São Paulo

Para a obtenção do grau de

Mestre em Matemática

Orientador: Prof. Dr. Antonio Kumpera

Área de Concentração: Geometria

São Paulo, dezembro de 1986

Agradecimentos

Este é um trabalho simples, mas que não teria sido concretizado não fosse o auxílio de várias pessoas as quais eu agradeço imensamente o apoio prestado. Dentre elas não posso deixar de citar algumas que mais diretamente estiveram envolvidas neste trabalho.

Em primeiro lugar, notadamente, o Professor Antonio Kumpera, meu orientador, uma pessoa extraordinária,que mesmo muito atarefado, sempre foi muito solícito e extremamente paciente para incentivar-me e orientar-me durante o tempo de elaboração da dissertação, além de proporcionar-me o prazer de trabalhar com um dos melhores matemáticos da atualidade.

O Victor, companheiro dos seminários do IMECC-UNICAMP, de quem recebi muitas sugestões que ajudaram no trabalho.

O João e a Lucrécia, amigos inseparáveis, destes com quem se pode contar para qualquer coisa e à qualquer hora e que ajudaram em tudo o que se possa pensar.

E finalmente os colegas do IME-USP que deram o estímulo e a ajuda nacessária.

São Paulo, 10 de dezembro de 1986.

Índice

Introdução

O objetivo principal deste trabalho é estudar as propriedades de trajetórias de tempo ótimo para sistemas invariantes à direita num grupo de Lie. A idéia é usar, para tanto,o algorítmo da integral multiplicativa principalmente para a demonstração do princípio máximo de Pontriaguin. Assim, no primeiro capítulo, damos algumas noções básicas sobre a teoria geométrica do controle em grupos de Lie; são aí apresentados alguns resultados clássicos sobre as propriedades dos conjuntos de acessibilidade de um sistema invariante à direita, tais como aqueles que aparecem em [4]. Além disto, constam deste capítulo um estudo sobre os levantamentos hamiltonianos, que serão posteriormente utilizados para a formulação do princípio do máximo, e um resumo do algorítmo da integral multiplicativa, cuja teoria, como está em [7], é utilizada durante todo o texto.

Um dos pontos principais da teoria do controle ótimo é o princípio do máximo de Pontriaguin; é este teorema que estudamos no capítulo 2, primeiro com o formalismo hamiltoniano habitual na variedade simplética T^*G com a estrutura simplética canônica, depois este formalismo é passado para a variedade TG, por uma tranformação de Legendre obtida através de uma métrica riemanniana invariante à esquerda colocada em G e permitindo usar a integral multiplicativa para expressar a solução do levantamento tangente do sistema. Este princípio, na verdade, dá uma condição necessária para que uma determinada trajetória fique na fronteira do conjunto de acessibilidade em tempo dado. A relação deste teorema com o problema do tempo ótimo é estudada a seguir (teorema 13.3) e dá neste caso uma condição necessária para uma trajetória ser de tempo ótimo, sendo este resultado utilizado no outro capítulo.

Para os sistemas lineares o princípio do máximo dá uma condição necessária e suficiente para descobrir os controles ótimos mas este não é

o caso para os sistemas não lineares, e em particular para os sistemas de controle evoluindo sobre um grupo de Lie. Um teorema importante no caso linear é que uma trajetória ótima provém de um controle bang-bang com um número finito de trocas, assim pode-se procurar os controles ótimos entre aqueles que são bang-bang com um número finito de trocas e que satisfazem o teorema de Pontriaguin. No terceiro e último capítulo estudamos, como uma aplicação do princípio do máximo, um teorema do bang-bang com um número finito de trocas para um sistema de controle invariante à direita, que é uma generalização do teorema para o caso linear, e que coloca em evidência a importância dos colchetes de Lie dos campos pertencentes à família de campos do sistema de controle satisfazerem determinadas relações.
Este último capítulo é uma adaptação para grupos de Lie do artigo de Sussman [9].*

*Durante a execução deste trabalho o autor recebeu auxílio do CNPq

Capítulo 1

Sistemas de controle invariantes à direita

§1 Introdução ao problema: Vamos, neste parágrafo, definir qual será o nosso problema de controle.

Definição: Um quarteto $\Sigma = (M, \Phi, U, \Omega)$ é um sistema de controle quando:

• SC1. M é uma variedade diferenciável.

• SC2. U é um subconjunto de um espaço vetorial de dimensão finita.

• SC3. Φ é uma família de campos dc vetores indexados por U.

• SC4. Ω é uma classe de funções de intervalos da reta em U, satisfazendo:

•• SC4.1. se $u: [a, b] \longrightarrow$ U está em Ω, então u é mensurável segundo Lebesgue.

•• SC4.2. se $u: I \longrightarrow U$ está em Ω, então $u\mid_J$ também está. Onde J é qualquer subintervalo de I e $u|_J$ é a restrição de u.

•• SC4.3. se $u_1: [a, b] \longrightarrow U$ e $u_2: [b, c] \longrightarrow U$ estão em Ω, então o controle $u_3: [a, c] \longrightarrow U$ definido por

$$u_3(t) = \begin{cases} u_1(t) & \text{se } a \leq t < b \\ u_2(t) & \text{se } b \leq t \leq c \end{cases}$$

também está em Ω .

•• SC4.4. se $u: I \longrightarrow U$ é constante por partes então $u \in \Omega$.

Definição: A classe Ω será chamada classe de controles admissíveis de Σ.

Escolhido um controle admissível u, definiremos a equação de evolução do sistema para o controle u como sendo a seguinte equação diferencial:

$$\dot{x}(t) = X(x, u(t)) \tag{1.1}$$

onde $X(x,u)$ é o elemento da família Φ indexado por $u \in U$.

Definição: Uma aplicação $\gamma: J \longrightarrow M$ de um intervalo na variedade M é uma trajetória de Σ para o controle u se

$$\dot{\gamma}(t) = X(\gamma(t), u(t)) \tag{1.2}$$

para quase todo $t \in J$.

Para garantir a existência e unicidade de solução maximal de (1.2) que cumpre a condição inicial $\gamma(t_0) = x_0$ utiliza-se um teorema clássico de Caratheodory. Não entraremos nestes detalhes aqui, pois nosso problema será mais específico.

Denotaremos por $\gamma(t, t_0, x_0, u)$ a solução de (1.2) que no instante t_0 passa por x_0.

Definição: Chamaremos de conjunto de acessibilidade em tempo T a partir de x_0 o conjunto:

$$A_\Sigma(T, x_0) = \{\gamma(T + t_0, t_0, x_0, u) : u \in \Omega\}$$

sendo que na fórmula acima $T + t_0$ deve estar no domínio da solução γ.

Definição: Chamaremos de conjunto de acessibilidade a partir de x_0 o conjunto:

$$A_\Sigma(x_0) = \bigcup_{t \in R} A_\Sigma(t, x_0)$$

obs.:$A_\Sigma(t, x_0)$ pode ser vazio.

O estudo das propriedades geométricas dos conjuntos de acessibilidade é um dos problemas fundamentais da teoria do controle.

Existem vários conceitos de controlabilidade, dentre os quais definiremos

• • Σ é completamente controlável a partir de x se $A_\Sigma(x) = M$.

• • Σ é completamente controlável se $A_\Sigma(x) = M$ para todo x de M.

• • Σ é localmente control vel se para todo x de M $A_\Sigma(x)$ contém uma vizinhança de x.

§2 Levantamentos hamiltonianos: Vamos tomar uma variedade, M analítica e seja X um campo vetorial analítico completo sôbre esta variedade. Denotemos por TM e T^*M os fibrados tangente e cotangente respectivamente. Vamos, a partir de X, construir um campo em TM e outro em T^*M.

Seja $X_t: M \longrightarrow M$ o grupo a um parâmetro de difeomorfismos associado ao campo X. Através da derivação obtemos o grupo a um parâmetro de difeomorfismos em TM:

$$X_{t*}: TM \longrightarrow TM$$

e um grupo a um parâmetro de difeomorfismos em T^*M:

$$X_t^{-1*}: T^*M \longrightarrow T^*M$$

A estes dois grupos a um parâmetros de difeomorfismos temos associados dois campos, um em TM que será denotado por $\tilde{X}$ e outro em T^*M que denotaremos por $\hat{X}$, este último será chamado de levantamento hamiltoniano do campo X. O motivo para chamá-lo assim é que $\hat{X}$ será um campo hamiltoniano para a estrutura simplética canônica do fibrado cotangente T^*M .

Daremos algumas propriedades do levantamento hamiltoniano. Tomemos $p: T^*M \longrightarrow M$ a projeção canônica do fibrado cotangente, então :
Propriedade 1:

$$p_* \circ \hat{X} = X \circ p$$

De fato, basta notar que

$$p \circ X^*_{-t} = X_t \circ p$$

que é decorrente da própria definição de X^*_{-t}. Tomemos agora um ponto $\omega \in T^*M$, então teremos

$$p \circ X^*_{-t}(\omega) = X_t \circ p(\omega)$$

derivando obtemos:

$$\frac{d}{dt} p \circ X^*_{-t}(\omega) \mid_{t=0} = \frac{d}{dt} X_t \circ p(\omega) \mid_{t=0}$$

ou seja

$$p_* \circ \hat{X}(\omega) = X(p(\omega))$$

o que demonstra nossa propriedade. Seja λ a forma de Liouville em T^*M.

Lembremos que dado um campo de vetores V em T^*M podemos definir a derivada de Lie de vários objetos definidos em T^*M, em particular para a forma de Liouville temos

$$\mathcal{L}_V\lambda = \lim_{t\to 0}\frac{(V_t^* \circ \lambda - \lambda)}{t}$$

Enunciemos agora a próxima propriedade:
propriedade 2:

$$\mathcal{L}_{\hat{X}}\lambda = 0$$

basta mostrar que $\hat{X}_t^* \circ \lambda = \lambda$.

Como $\hat{X}_t^* = (X_{-t}^*)^*$, escolhemos um $\omega \in T^*M$ e $v \in T_\omega T^*M$ e calculemos $< \hat{X}_t^* \circ \lambda, v >$ usando as definições de λ e $\hat{X}_t^*$ obtemos:

$$\begin{aligned} < \hat{X}_t^* \circ \lambda(\omega), v > &= < (X_{-t}^*)^* \circ \lambda(\omega), v > \\ &= < (X_{-t}^*)^*(\lambda(X_{-t}^*(\omega))), v > \\ &= < \lambda(X_{-t}^*(\omega)), (X_{-t}^*)_*(v) > \\ &= < X_{-t}^*(\omega), p_*(X_{-t}^*)_*(v) > \\ &= < X_{-t}^*(\omega), (X_t \circ p)_*(v) > \\ &= < \lambda(\omega), v > \end{aligned}$$

e portanto $\mathcal{L}_{\hat{X}}\lambda = 0$.

Obs. 1: Estas duas propriedades caracterizam o levantamento hamiltoniano, bastando para ver isto, escrever os campos em coordenadas locais.

Obs. 2: No caso de uma 1-forma a derivada de Lie pode-se escrever

$$\mathcal{L}_{\hat{X}}\lambda = i_{\hat{X}}d\lambda + di_{\hat{X}}\lambda$$

no nosso caso como a derivada de Lie se anula temos

$$i_{\hat{X}}d\lambda = -di_{\hat{X}}\lambda$$

como $d\lambda$ define a forma simplética canônica em T^*M concluimos que $\hat{X}$ é um campo hamiltoniano cuja função hamiltoniana é $H = i_{\hat{X}}\lambda$.

Tomando uma carta (U, x) em M e $(p^{-1}(U), \mathrm{x}\circ p, \mathrm{y})$ em T^*M tal que $d\lambda = \sum_i dx_i dy_i$, então podemos escrever

$$X = \sum a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \text{ e } \hat{X} = \sum b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + c_i \frac{\partial}{\partial y_i}$$

usando as propriedades 1 e 2 podemos calcular a expressão local do levantamento hamiltoniano

$$b_i = a_i \circ p$$
$$c_i = -\sum_j y_j \frac{\partial a_j}{\partial x_i}$$

donde a expressão do campo $\hat{X}$ fica

$$\hat{X} = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_i \Big(-\sum_j y_j \frac{\partial a_j}{\partial x_i}\Big) \frac{\partial}{\partial y_i} \tag{2.1}$$

O levantamento hamiltoniano ainda nos será útil do ponto de vista formal para a formulação do Princípio do máximo de Pontriaguin no próximo capítulo.

Com relação ao levantamento hamiltoniano temos o seguinte lema.

Lema 2.1 A aplicação que a cada campo de vetores analítico em M associa o seu levantamento hamiltoniano em T^*M será um homomorfismo de álgebras de Lie.

dem. De fato pelas observações 1 e 2 acima, para cada campo analítico X em M existe um único campo $\hat{X}$ em T^*M que satisfaz as propriedades 1 e 2.

Então sejam X e Y campos em M. Temos:

$$p_* \circ (\hat{X} + \hat{Y}) = p_* \circ \hat{X} + p_* \circ \hat{Y} = (X + Y) \circ p.$$

E como $\mathcal{L}_{\hat{X}+\hat{Y}} = \mathcal{L}_{\hat{X}} + \mathcal{L}_{\hat{Y}}$ segue imediatamente que $\mathcal{L}_{\hat{X}+\hat{Y}}\lambda = 0$ o que acarreta:

$$(\widehat{X+Y}) = \hat{X} + \hat{Y}$$

para mostrar que

$$[\widehat{X,Y}] = [\hat{X}, \hat{Y}]$$

notemos que

$$\mathcal{L}_{[\hat{X},\hat{Y}]} = [\mathcal{L}_{\hat{X}}, \mathcal{L}_{\hat{Y}}]$$

ou seja
$$\mathcal{L}_{[\hat{X},\hat{Y}]}\lambda = \mathcal{L}_{\hat{X}} \circ \mathcal{L}_{\hat{Y}}\lambda - \mathcal{L}_{\hat{Y}} \circ \mathcal{L}_{\hat{X}}\lambda = 0$$
como a primeira propriedade é imediata fica demonstrado o lema.
Obs.3. Para as propriedades da derivada de Lie veja a referência [1].

Seja X um campo de vetores analítico em M e seja $\gamma: I \longrightarrow M$ uma trajetória deste campo.

Definição: Uma trajetória de $\hat{X}$, $\lambda: I \longrightarrow T^*M$ é um *covetor adjunto* ou *solução adjunta* de γ se para todo $t \in I$ tivermos $\lambda(t) \in T^*_{\gamma(t)}M$.

Definição: Da mesma forma, uma trajetória , $v: I \longrightarrow TM$. de $\tilde{X}$ é um *vetor adjunto* de γ se para todo $t \in I$ tivermos $v(t) \in T_{\gamma(t)}M$.

A partir de nossas definições é imediato o seguinte lema:

Lema 2.2 Se $\lambda(t)$ é um covetor adjunto de γ e se $v(t)$ é um vetor adjunto de γ então temos para todo $t \in I$
$$< \lambda(t), v(t) >=< \lambda(0), v(0) >$$

dem. Pelo fato de $\lambda(t)$ ser trajetória de $\hat{X}$ temos que $\lambda(t) = X^*_{-t}(\lambda(0))$ pela nossa definição do campo $\hat{X}$. Temos também que $v(t) = X_{t*}(v(0))$ e portanto
$$< \lambda(t), v(t) >=< X^*_{-t}(\lambda(0)), X_{t*}(v(0)) >$$
de onde segue imediatamente o resultado.

Definição: Seja Φ uma família de campos de vetores em M indexados por um conjunto U. Dentotemos $\Phi = \{X_u\}_{u\in U}$. Então a família $\hat{\Phi}$ de campos de vetores em T^*M formada pelos levantamentos hamiltonianos dos campos de Φ é chamado levantamento hamiltoniano de Φ.

Definição: A família $\tilde{\Phi}$ de campos de vetores em TM constituida pelos levantamentos em TM de campos de Φ será chamado *levantamento tangente* de Φ.

Podemos escrever
$$\hat{\Phi} = \{\hat{X}_u\}_{u\in U} \quad \text{e} \quad \tilde{\Phi} = \{\tilde{X}_u\}_{u\in U}$$

Definição: O sistema de controle $\hat{\Sigma} = (T^*M, \hat{\Phi}, U, \Omega)$ será chamado *sistema conjugado hamiltoniano* de Σ e o sistema $\tilde{\Sigma} = (TM, \tilde{\Phi}, U, \Omega)$ será chamado de *levantamento tangente* do sistema Σ.

Lema 2.3 Se $\lambda: I \longrightarrow T^*M$ é uma trajetória de $\hat{\Sigma}$ para um controle admissível $u(t) \in \Omega$ então $p \circ \lambda: I \longrightarrow M$é uma trajetória de Σ para o mesmo controle.

dem. Como $\lambda(t)$ é trajetória de $\hat{\Sigma}$ para $u(t)$ então

$$\dot{\lambda}(t) = \hat{X}_{u(t)}(\lambda(t)) \quad \text{quase sempre}$$

então

$$\begin{aligned} \frac{d(p \circ \lambda(t))}{dt} &= p_* \circ \dot{\lambda}(t) \\ &= p_* \circ \hat{X}_{u(t)}(\lambda(t)) \\ &= X_{u(t)}(p \circ \lambda(t)) \end{aligned}$$

donde se conclui que $p \circ \lambda$ ' uma trajetória de Σ para o controle $u(t)$.

Da mesma maneira podemos mostrar um lema completamente análogo para o sistema $\tilde{\Sigma}$.

Faremos uma última observação a respeito dos covetores adjuntos de um levantamento hamiltoniano do sistema Σ, mais precisamente daremos a forma local das equações de evolução levantamento hamiltoniano.

Seja $(V, x_1, \ldots, x_n)$ uma carta local da variedade M, e seja $(p^{-1}(V), x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ uma carta local de T^*M. Tomemos uma uma trajetória $\gamma(t)$ de um campo X que nestas coordenadas se escreve

$$X(x) = a_1(x)\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + a_n(x)\frac{\partial}{\partial x_n}$$

Então definindo $x_i(t) = x_i \circ \gamma(t)$ as funções $x_i(t)$ devem satisfazer :

$$\dot{x}_i(t) = a_i(\gamma(t)).$$

Se $\lambda(t)$ é um covetor adjunto então podemos colocar $\lambda_i(t) = y_i \circ \lambda(t)$ e teremos em coordenadas

$$\lambda(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t), \lambda_1(t), \ldots, \lambda_n(t))$$

e portanto satisfaz

$$\dot{\lambda}(t) = \sum_i \dot{x}_i(t)\frac{\partial}{\partial x_i} + \dot{\lambda}_i(t)\frac{\partial}{\partial y_i} \tag{2.2}$$

como sabemos também que $\lambda(t)$ é uma trajetória de $\hat{X}$ e comparando a fórmula acima com a fórmula (2.1) deste parágrafo cocluimos que $\lambda(t)$ deve satisfazer a seguinte equação diferencial

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) & = a_i(t) \\ \\ \dot{\lambda}_i(t) & = -\sum_j \lambda_j(t) \frac{\partial a_j(t)}{\partial y_i} \end{cases} \tag{2.3}$$

Notemos agora que em V um vetor de T_xV pode-se representar por uma matriz coluna com suas coordenadas, e um covetor de T_x^*V por uma matriz linha, de modo que $<\lambda, v>= \sum \lambda_i v_i$. Se definimos uma função $H(\lambda, x) =<\lambda, a(x)>= \sum \lambda_i a_i(x)$ então a equação (2.3) pode-se escrever como

$$\begin{cases} \dot{x}_i & = \frac{\partial H(\lambda,x)}{\partial y_i} \\ \\ \dot{\lambda}_i & = -\frac{\partial H(\lambda,x)}{\partial x_i} \end{cases} \tag{2.4}$$

Obviamente quando $M = \mathbf{R}^n$ então as equações do covetor adjunto sempre se escreverão assim como em (2.4).

§3 Sistemas em grupos de Lie : A classe dos nossos sistemas de controle vistos até agora é muito grande para obtermos algum resultado fundamental. Para prosseguirmos no estudo teremos que reduzir substancialmente a classe dos sistemas de controle impondo restrições tanto na variedade de configuração do sistema, quanto na família de campos diferenciaveis, como também no conjunto de controles admissíveis.

De fato se tomarmos um caso simples em que $M = \mathbf{R}^n$, $\Phi = \{Ax + Bu\}_{u \in R^m}$ com A e B matrizes com coeficientes reais, $U \subset \mathbf{R}^m$ compacto e $\Omega = \{u : I \longrightarrow U \mid u \quad \text{mensurável}\}$, vemos que esta classe de sistemas já possui uma literatura enorme. São os chamados sistemas lineares. Na verdade é nos resultados desta classe de sistemas que basearemos nossos estudos. Trabalharemos com uma classe um pouco mais geral que chamaremos de *sistemas de controles invariantes à direita.*

Definição: Um sistema de controle invariante à direita é um sistema de controle $\Sigma_G = (G, \Phi, U, \Omega)$ onde G será um grupo de Lie conexo de dimensão finita, Φ uma família de campos de vetores sobre G tal que cada campo seja invariante à direita, U um subconjunto da álgebra de Lie $L(G)$ de G e Ω uma classe de controles admissíveis que definiremos de acordo com as circunstâncias.

Como existe um isomorfismo de álgebras de Lie entre o espaço tangente na identidade do grupo G (que para nós é $L(G)$) e o conjunto dos campos invariantes à direita dado pela translação à direita do grupo

$$\begin{aligned} R(x) : G &\longrightarrow G \\ y &\longrightarrow yx \end{aligned}$$

então nossa família de campos de vetores será dada por

$$\Phi = \{dR(x)_e(u)\}_{u \in U}$$

onde e representa a identidade do grupo.

A equação de evolução do sistema Σ_G será

$$\dot{x}(t) = dR(x(t))_e(u(t)) \tag{3.1}$$

onde $u : I \longrightarrow U$ será um controle admissível, x percorre G .

Como exemplo tomemos M um grupo de matrizes $n \times n, M \in Gl(n, \mathbf{R})$, então

$$R(X)(Y) = Y.X$$

e sabemos que $L(M) \in \mathcal{M}(n \times n)$, conjunto de todas as matrizes nxn com o colchete de Lie usual.

Seja $U \in L(M)$ então

$$dR(X)_I(U) = U.X \tag{3.2}$$

pois se $\gamma: I \longrightarrow M$ é uma curva diferenciável tal que $\gamma(0) = I$ e $\dot{\gamma}(0) = U$ então definindo

$$\delta(t) = R(X)(\gamma(t)) = \gamma(t).X$$

temos derivando em $t = 0$

$$\begin{aligned} \frac{d\delta(t)}{dt}\Big|_{t=0} &= dR(X)_I(U) \\ &= \dot{\gamma}(0).X \\ &= U.X \end{aligned}$$

neste caso a equação de evolução é

$$\dot{X}(t) = U(t).X(t)$$

Em [1], Brockett estuda sistemas de controle que evoluem em $SO(3)$ do tipo:

$$\dot{X}(t) = (A(t) + \sum_{i=1}^{k} u_i(t)B_i(t)).X(t)$$

onde neste caso, $A_i(t)$ e $B_i(t)$ são matrizes antissimétricas.

Uma outra forma de chegarmos a um sistema de controle invariante a direita é a partir de uma função de conjuntos

$$\Gamma: I \longrightarrow \mathcal{P}(L(G))$$

onde $\mathcal{P}(L(G))$ será o conjunto das partes da álgebra de Lie $L(G)$. Desta forma definimos a classe doscontroles admissíveis como sendo o conjunto das funções mensuráveis segundo Lebesgue $u: I \longrightarrow L(G)$ tal que $u(t) \in \Gamma(t)$ para todo $t \in I$.

Neste caso a equação de evolução fica

$$\dot{x}(t) = dR(x)_e(u(t)) \qquad u(t) \in \Gamma(t) \tag{3.3}$$

Obs.: Note que se $\Gamma(t) = \Gamma$ for constante e Γ um subsepaço afim de $L(G)$, isto é, $\Gamma = X + L$ onde L é um subespaço vetorial de $L(G)$, então teremos $u(t) = X + \sum_i u_i(t)Y_i$ com $Y_i \in L$, e (3.3) fica

$$\dot{x} = X(x) + \sum u_i(t)Y_i(x) \tag{3.4}$$

com $X(x) = dR(x)_e(X)$ e $Y_i(x) = dR(x)_e(Y_i)$.

Lema 3.1 Para todo $g \in G$ temos $A_{\Sigma_G}(T,g) = A_{\Sigma_G}(T,e)g$.

dem.: Seja $g_1 \in A(T,g)$ então existe um controle admissível $u: [0,T] \longrightarrow U$ tal que a trajetória associada, $\gamma_u(t)$, satisfaz $\gamma_u(0) = g$ e $\gamma_u(T) = g_1$.

Tomemos agora uma curva $\beta_u: I \longrightarrow G$ dada por

$$\beta_u(t) = \gamma_u(t).g^{-1} = R(g^{-1})(\gamma_u(t))$$

vemos rapidamente que $\beta_u(t)$ será uma trajetória de Σ_G associada a u.

De fato:

$$\begin{aligned}\dot{\beta}_u(t) &= dR(g^{-1})_{\gamma_u(t)}(\dot{\gamma}_u(t)) \\ &= dR(g^{-1})_{\gamma_u(t)} \circ dR(\gamma_u(t))_e(u(t)) \\ &= dR(\gamma_u(t)g^{-1})_e(u(t))\end{aligned}$$

Notemos agora que $\beta_u(0) = e$ e ainda $\beta_u(T) = g_1.g^{-1}$ daí segue que $g_1 g^{-1} \in A(T,e)$ ou seja $g_1 \in A(T,e)g$.

De outro lado, se $h \in A(T,e)g$ então $hg^{-1} \in A(T,e)$ donde existe controle admissível $u(t)$ e uma trajetória associada γ_u de Σ_G tal que $\gamma_u(0) = e$ e $\gamma_u(T) = hg^{-1}$.

Construimos agora a curva $\beta_u(t) = R(g)(\gamma_u(t))$, e verificamos, de forma análoga à anterior que $\beta_u(t)$ será uma trajetória de Σ_G associada ao controle u e que satisfaz $\beta_u(0) = g$ e $\beta_u(T) = h$, portanto $h \in A(T,g)$ que termina a demonstração do lema.

Notemos que, como conseqüencia imediata deste lema temos que $A_{\Sigma_G}(g) = A_{\Sigma_G}(e)g$.

Também como conseqüencia deste lema vemos que para demonstrar que o sistema Σ_G é completamente controlável basta demonstrar que $A_{\Sigma_G}(e) = G$.

Lema 3.2 $A_{\Sigma_G}(e)$ é um semi-grupo.

dem.: Vamos mostrar que se g e $g_1 \in A_{\Sigma_G}(e)$ então $g_1 g \in A_{\Sigma_G}(e)$.

De fato, g e $g_1 \in A_{\Sigma_G}(e)$ implica que existem T_0 e T_1 reais positivos tais que $g \in A_{\Sigma_G}(T_0, e)$ e $g_1 \in A\Sigma_G(T_1, e)$.

Então $g_1 g \in A_{\Sigma_G}(T_1, e)g$ e pelo lema 3.1 $g_1 g \in A_{\Sigma_G}(T_1, g)$. Daí segue que existem controles admissíveis $u_0 \colon [0, T_0] \longrightarrow U$ e $u_1 \colon [0, T_1] \longrightarrow U$ e trajetórias γ_{u_0} e γ_{u_1} tais que $\gamma_{u_0}(T_0) = \gamma_{u_1}(0) = g$, $\gamma_{u_0}(0) = e$ e $\gamma_{u_1}(T_1) = g_1 g$.

Definimos agora um novo controle u dado por

$$u(t) = \begin{cases} u_0(t) & \text{se } 0 \leq t < T_0 \\ \\ u_1(t) & \text{se } T_0 \leq t \leq T_0 + T_1. \end{cases} \tag{3.5}$$

Neste caso a trajetória de Σ_G associada a u que passa pela identidade do grupo no instante inicial coincide com $\gamma_{u_0}(t)$ no intervalo $[0, T_0]$ e para $t > T_0$ teremos $\gamma_u(t) = \gamma_{u_1}(t - T_0)$, portanto teremos

$$\gamma_u(T_0 + T_1) = \gamma_{u_1}(T_1) = g_1 g$$

o que acarreta $g_1 g \in A_{\Sigma_G}(T_0 + T_1)$, que termina a demonstração do lema.

Seja $\Sigma_G = (G, \Phi, U, \Omega)$ um sistema de controle invariante à direita. Denotemos por $L(U)$ a subálgebra de Lie gerada pelos elementos de U, e seja S o subgrupo de Lie conexo de G cuja álgebra de Lie seja $L(U)$.

Lema 3.3 $A_{\Sigma_G}(e) \subset S$.

dem.: Basta notar que pelo fato de todos os campos invariantes à direita da família Φ poderem se reduzir a campos invariantes à direita em S então o sistema de controle Σ_G pode ser reduzido a um sistema $\Sigma_S = (S, \Phi, U, \Omega)$ que continua sendo invariante à direita e daísegue que $A_{\Sigma_S}(e) = A_{\Sigma_G}(e)$, o que prova o lema.

Lema 3.4 Se $A_{\Sigma_G}(e)$ for um subgrupo de Lie de G então $A_{\Sigma_G}(e)$ coincide com S.

dem.: Seja K a álgebra de Lie de $A_{\Sigma_G}(e)$. Então como conseqüência do lema 3.3 temos $K \subset L(U)$.

Seja, agora,um $v \in U$ e consideremos o controle constante $u(t) = v$.Seja γ_u a trajetória de Σ_G associada a u que no instante inicial passa por e. Na verdade,como neste caso a equação de evolução fica:

$$\dot{x} = dR(x)_e(v)$$

a trajetória é dada pela exponencial $\gamma_u(t) = exp(tv)$ e $exp(tv) \in A_{\Sigma_G}(e)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ já que A_{Σ_G} é subgrupo. Mas então $\dot{\gamma}_u(0) = v$ está em K donde concluimos que $U \subset K$ e portanto $L(U) \subset K$ o que implica $L(U) = K$. Como S e $A_{\Sigma_G}(e)$ são conexos então $S = A_{\Sigma_G}(e)$ terminando a demonstração do nosso lema.

Os lemas acima indicam que a questão de controlabilidade está relacionada com o fato de descobrir quando que $A_{\Sigma_G}(e)$. é um subgrupo e especialmente quando que $A_{\Sigma_G}(e) = G$.

Note que, como conseqüência dos lemas acima temos o resultado:

Lema 3.5 Se $A_{\Sigma_G}(e)$ for um subgrupo de Lie e se $L(U) = L(G)$ então Σ_G é completamente controlável.

Passaremos a seguir ao estudo de como exprimir as trajetórias de um sistema de controle invariante à direita através de uma integral multiplicativa. O que nos dará, de passagem, a garantia da existência de trajetó rias únicas definidas em todo domínio de definição de um controle admissível. O objetivo será mostrar um princípio de extremalidade , que chamaremos de princípio de Pontriaguin, utilizando a integral multiplicativa.

O estudo da integral multiplicativa em grupos de Lie de dimensão finita bem como as aplicações em teoria do controle estão feitos no trabalho de San Martin [7]. O que faremos a seuir será um resumo deste trabalho, informando as idéias e os teoremas relativos a integral multiplicativa que usarei no próximo capítulo.

§4 **Integrais multiplicativas:** Antes de iniciarmos com as integrais multiplicativas vamos fixar nosso sistema de controle como aquele cuja equação de evolução é do tipo (3.3) e $\Gamma: [0, \infty] \longrightarrow P(L(G))$.

Seja G um grupo de Lie de dimensão finita e conexo e $L(G) = T_e G$ sua álgebra de Lie. Seja $u: [a, b] \longrightarrow L(G)$ uma função mensurável segundo Lebesgue. Definiremos uma aplicação Π que a cada função u da forma acima associará um um elemento de G e que será denotado por $\Pi_a^b u(t)dt$.

Para construirmos esta integral para toda u Lebesgue integrável,suporemos inicialmente que u seja constante por partes e que $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ seja uma partição do intervalo $[a, b]$ tal que

$$u|_{[t_{i-1}, t_i]} = u_i$$

de modo que cada u_i seja um vetor constante de $L(G)$. Neste caso temos

Definição: Se $u: [a, b] \longrightarrow L(G)$ for uma função constante por partes nas condições acima então a integral multiplicativa (à direita) de u será definida por

$$\prod_a^b u(\tau)d\tau = \prod_{i=1}^n exp([t_i - t_{i-1}]u_i) \tag{4.1}$$

onde

$$\prod_{i=1}^n exp([t_i - t_{i-1}]u_i) = exp([t_n - t_{n-1}]u_n) \ldots exp([t_1 - t_0]u_1)$$

Notemos que:

• A ordem de como é feita a multiplicação é importante pois os elementos do grupo podem não comutar .

• Não importa a escolha da partição, pois se

$$u|_{[t_{i-1}, t_i]} = u|_{[t_i, t_{i+1}]} = u_*$$

então

$$exp([t_{i+1} - t_i]u_*).exp([t_i - t_{i-1}]u_*) = exp([t_{i+1} - t_{i-1}]u_*)$$

Assim se $u: [a, b] \longrightarrow L(G)$ for uma função constante teremos

$$\prod_a^b u(\tau)d\tau = exp([b - a]u).$$

A definição da integral multiplicativa para o caso geral em que u for Lebesgue integrável está baseado no seguinte teorema que não demonstraremos.

Teorema 4.1 Seja $u: [a,b] \longrightarrow L(G)$ integrável segundo Lebesgue, e seja C o conjunto de todas as seqüências $u_k: [a,b] \longrightarrow L(G)$ tal que u_k seja constante por partes e tal que $\|u_k - u\|_1 \to 0$ então teremos:

(a) C não é vazio.

(b) A seqüência $g_k = \prod_a^b u_k(\tau)d\tau$ converge para toda seqüência $\{u_k\}_{k\in N}$ e o limite não depende da seqüência de C escolhida.

Então definimos $\prod_a^b u(\tau)d\tau = \lim_{k\to\infty} \prod_a^b u_k(\tau)d\tau$ onde $\{u_k\}_{k\in N} \in C$.

Enumeremos algumas propriedades da integral multiplicativa que são conseqüências diretas da definição:

Propriedade 1- Se $u: [a,b] \longrightarrow L(G)$ for Lebesgue integrável e se para todo $t_1, t_2 \in [a,b]$ tivermos que o colchete de Lie de $u(t_1)$ e $u(t_2)$ se anula então

$$\prod_a^b u(\tau)d\tau = exp(\int_a^b u(\tau)d\tau). \tag{4.2}$$

Propriedade 2- Para toda $u: [a,b] \longrightarrow L(G)$ Lebesgue integrável e para $c \in [a,b]$ temos

$$\prod_a^b u(\tau)d\tau = (\prod_c^b u(\tau)d\tau)(\prod_a^c u(\tau)d\tau) \tag{4.3}$$

Propriedade 3- Seja H um outro grupo de Lie, e seja $\gamma: G \longrightarrow H$ um homomorfismo de grupos de Lie. Então temos a relação com as exponenciais: $\gamma(exp_G(u(t))) = exp_H(d\gamma_e(u(t)))$ o que acarreta a propriedade seguinte

$$\gamma(\prod_a^b u(\tau)d\tau) = \prod_{a\;H}^b d\gamma_e(u\tau)d\tau. \tag{4.4}$$

Uma função $g: [a,b] \longrightarrow G$ será dita absolutamente contínua se for absolutamente contínua em cada sistema de coordenadas.

O próximo teorema é o teorema fundamental do cálculo para as integrais multiplicativas, é também o teorema que vai permitir exprimir as trajetórias de nossos sistemas de controles invariantes a direita por uma fórmula bem cômoda.

Teorema 4.2 Seja $u: [a, b] \longrightarrow L(G)$ uma função Lebesgue integrável e tomemos $g: [a, b] \longrightarrow G$ definida por

$$g(t) = \prod_a^t u(\tau)d\tau \tag{4.5}$$

então $g(t)$ será absolutamente contínua e ainda

$$\dot{g}(t) = dR(g(t))_e(u(t)). \tag{4.6}$$

Além disso se $g: [a, b] \longrightarrow G$ for uma função absolutamente contínua e definirmos

$$u(t) = dR(g(t)^{-1})_{g(t)}(\dot{g}(t)) \in L(G) \tag{4.7}$$

teremos

$$g(t) = (\prod_a^t u(\tau)d\tau)g(a) \tag{4.8}$$

dem.:

a) Se $u(t) = u_0$ for constante então a primeira parte é trivial pois $\prod_a^t u(\tau)d\tau = exp([t-a]u_0)$ de onde temos que

$$\dot{g}(t) = dR(exp([t-a]u_0)_e(u_0).$$

b) Quando $u(t)$ for constante por partes, também é fácil pois supondo que no intervalo $[t_0, t]$ u seja constante igual a u_0 então

$$\begin{aligned} g(t) &= (\prod_{t_0}^t u(\tau)d\tau)(\prod_a^{t_0} u(\tau)d\tau) \\ &= exp([t-t_0]u_0)\prod_a^{t_0} u(\tau)d\tau \\ &= R(g(t_0))(exp([t-t_0]u_0) \end{aligned}$$

e portanto

$$
\begin{aligned}
\dot{g}(t) &= dR(g(t_0))_{exp([t-t_0]u_0} \circ dR(exp([t-t_0]u_0))_e(u_0) \\
&= dR(g(t))_e(u(t))
\end{aligned}
$$

isto mostra a primeira parte do teorema para o caso em que $u(t)$ e constante por partes.

c) Para o caso geral, tomamos uma seqüência $\{u_k\}$ tal que $\|u_k - u\|_1 \to 0$ e definimos $g_k(t) = \prod_a^t u_k(\tau)d\tau$ então temos que g_k converge uniformemente para g (ver [3]).

Seja (ϕ, U) um sistema de coordenadas locais em G tal que $g_k(t) \in U$ para t percorrendo um subintervalo de $[a,b]$. definimos agora $h_k(t) = (\phi \circ g_k)(t)$ então verifica-se que h_k converge uniformemente para $h = \phi \circ g$, e temos

$$
\frac{dh_k(t)}{dt} = d\phi_{g_k(t)} \circ dR(g_k(t))_e(u_k(t)) \quad t \in J
$$

e portanto

$$
h_k(t) = h_k(c) + \int_c^t d(\phi \circ R(g_k(t)))_e(u_k(\tau)d\tau \quad c \in J
$$

passando ao limite $k \to \infty$ obtemos o resultado.

Para a segunda parte basta notar que definindo $h = \phi \circ g$ teremos h absolutamente contínua por definição e

$$
\begin{aligned}
\dot{h}(t) &= d\phi_{g(t)}(\dot{g}(t)) \\
&= d(\phi \circ R(g(t)))(u(t))
\end{aligned}
$$

e como a aplicação $t \to d(\phi \circ R(g(t)))$ e contínua e $\dot{h}(t)$ integrável, então $u(t)$ será integravel.

Agora definindo $g_*(t) = g(t)^{-1} \prod_a^t u(\tau)d\tau$ temos que:

$$
\dot{g}_*(t) = dL(g(t)^{-1})_{h(t)}(\dot{h}(t)) + dR(h(t))_{g(t)^{-1}}(\dot{g}(t)^{-1}) \qquad (4.9)
$$

chamando $h(t) = \prod_a^t u(\tau)d\tau$.

Sabemos pela primeira parte que (de (4.6):

$$\dot{h}(t) = dR(h(t))_e(u(t)) \tag{4.10}$$

por outro lado temos $g(t)g(t)^{-1} = e$ então

$$dL(g(t))_{g(t)^{-1}}(\dot{g}(t)^{-1}) = -dR(g(t)^{-1})_{g(t)}(\dot{g}(t))$$

ou seja

$$\dot{g}(t)^{-1} = -dL(g(t)^{-1})_e \circ dR(g(t)^{-1})_{g(t)}(\dot{g}(t))$$

ou ainda, levando em consideração (4.7) temos:

$$\dot{g}(t)^{-1} = -dL(g(t)^{-1})_e(u(t)) \tag{4.11}$$

substituindo (4.10) e (4.11) em (4.9) obtemos

$$\dot{g}_*(t) = dL(g(t)^{-1})_{h(t)}(dR(h(t))_e(u(t))) - dR(h(t))_{g(t)^{-1}}(dL(g(t)^{-1})_e(u(t)))$$

de onde concluimos que $\dot{g}_*(t) = 0$ quase sempre, e portanto

$$g(t)^{-1} \prod_a^t u(\tau)d\tau = g(a)^{-1}$$

de onde segue a fórmula (4.8) terminando também a demonstração do teorema.

Este teorema será importante para o nosso trabalho, pois através das relações (4.5) e (4.6) vemos que pela integral multiplicativa podemos escrever a solução da equação diferencial (3.3) do parágrafo anterior , mostrando ainda que se o controle admissível $u : [a, b] \longrightarrow U$ está definido em um intervalo $[a, b]$ então as soluções de (3.3) também estarão definidas no intervalo inteiro.

As trajetórias do sistema de controle (3.3) terão portanto a forma

$$\gamma_u(t) = (\prod_a^t u(\tau)d\tau)g$$

sendo que esta trajetória satisfaz $\gamma_u(a) = g \in G$.

Usando algumas propriedades de continuidade e diferenciabilidade da aplicação $\Pi^p \colon \mathcal{L}^p([a,b], L(G)) \longrightarrow G$ (ver [7]), pode-se mostrar algumas propriedades geométricas e topológicas dos conjuntos de acessibilidade.

Notemos que com a notação da integral multiplicativa podemos escrever

$$A_{\Sigma_G}(T,e) = \{\prod_0^T u(\tau)d\tau \mid \quad u \in \Omega\}$$

$$A_{\Sigma_G}(e) = \{\prod_0^t u(\tau)d\tau \mid \quad u \in \Omega \text{ e } t \in [0,\infty]\}$$

Apenas para ilustrar os tipos de propriedades que podemos mostrar,enunciaremos, novamente sem a demonstração que requer vários detalhes técnicos,um teorema ([7]) seguinte:

Teorema 4.3 Seja $\Gamma \colon [0,\infty) \longrightarrow \mathcal{P}(L(G))$ tal que cada $\Gamma(t)$ seja compacto e convexo e tal que Γ seja contínua na métrica de Haussdorff sôbre os compactos de L(G), então $A_{\Sigma_G}(T,e)$ será compacto em G, para cada $T \in [0,\infty)$.

O teorema acima será particularmente útil para nós, pois com as mesmas hipóteses do teorema poderemos garantir a existência de um controle de tempo ótimo.

Para precisar, consideremos o problema de atingir um ponto $g \in G$ a partir de e por uma trajetória de Σ_G no menor tempo possível. Para resolver este problema consideremos o conjunto:

$$S_g = \{t \in [0,\infty) \mid g \in A_{\Sigma_G}(t,e)\}$$

Em primeiro lugar não é garantido que este conjunto seja diferente do vazio, mas uma garantia para isto é que o sistema seja completamente controlável ou controlável a partir de e (são equivalentes no caso).De qualquer forma uma vez verificado que S_g não é vazio precisaremos das hipóteses do teorema anterior para garantir a existência de um controle ótimo. Ou seja:

Teorema 4.4 Nas mesmas hipóteses do teorema (4.3). Se S_g não for vazio e $t_* = \inf S_g$ então $t_* \in S_g$.(isto é t_* e tal que $g \in A_{\Sigma_G}(t_*,e)$ e se $t < t_*$ então $g \notin A_{\Sigma_G}(t,e)$).

dem.: Seja t_N uma seqüência de elementos em S_g tal que $t_N \to t_*$ e consideremos $u_N \in \Omega$ tal que $g = \prod_0^{t_N} u_N(\tau)d\tau$.

Como para todo N natural $t_* < t_N$ então podemos considerar os controles admissíveis $u_N^* = u_N|_{[0,t_*]}$. Do fato de $\Gamma(t)$ ser compacto e convexo o conjunto dos $u \in \Omega$ tal que u: $[0, t_*] \longrightarrow L(G)$, é fracamente compacto em $\mathcal{L}^2([0,t_*], L(G))$. Portanto existe u^*: $[0, t_*] \longrightarrow L(G)$ controle admissível tal que u_N^* converge fracamente para u^*. Então usando uma propriedade de continuidade de Π temos que $\prod_0^{t_*} u_N^*(\tau)d\tau$ converge para $\prod_0^{t_*} u^*(\tau)d\tau$.

Mas agora

$$\prod_0^{t_N} u_N(\tau)d\tau = \prod_{t_*}^{t_N} u_N(\tau)d\tau \prod_0^{t_*} u_N^*(\tau)d\tau$$

passando ao limite e da continuidade da multiplicação em G obtemos $g = \prod_0^{t_*} u^*(\tau)d\tau$ portanto $t_* \in S_g$ que era o que se queria demonstrar.

Portanto a hipótese acima é uma condição suficiente para a existência de controle ótimo em sistemas invariantes à direita.

Faremos ainda neste capítulo mais duas observações gerais a respeito dos grupos de Lie e de seus fibrados tangente e cotangente, e uma maneira de relacionar o fibrado tangente com a variedade simplética T^*G.

§5 A estrutura de grupo de Lie em TG: Para utilizarmos posteriormente, a integral multiplicativa no fibrado tangente, estudaremos um pouco da estrutura de grupo de Lie em TG. Esta estrutura de grupo será introduzida naturalmente através da multiplicação em G.

Denotemos por $m: G \times G \longrightarrow G$ a multiplicação em G e por $m_*: TG \times TG \longrightarrow TG$ a aplicação induzida nos fibrado tangente.

Denotemos por $\pi: TG \longrightarrow G$ a projeção do fibrado, se $v_b \in TG$ isto significa que $\pi(v_b) = b$.

Lema 5.1 Se $v_a \in TG$ e $v_b \in TG$ então teremos:

$$m_{*(a,b)}(v_a, v_b) = dR(b)_a(v_a) + dL(a)_b(v_b) \in \pi^{-1}(m(a,b)) \tag{5.1}$$

dem.: Seja (ϕ, U) uma carta em torno de a, (ψ, V) uma carta em torno de b e (θ, W) uma carta em torno de $m(a,b)$ e consideremos a função:

$$h = \theta \circ m \circ (\phi^{-1}, \psi^{-1}): U \times V \longrightarrow W$$

então

$$dh_{(\tilde{u},\tilde{v})}(V_1, V_2) = \partial h_x(V_1) + \partial h_y(V_2)$$

onde

$$\begin{gathered}\tilde{u} = \phi(a) \quad \tilde{v} = \psi(b) \\ \partial h_x(V_1) = dh(.,\tilde{v})_{\tilde{u}}(V_1) \\ \partial h_y(V_2) = dh(\tilde{u},.)_{\tilde{v}}(V_2)\end{gathered}$$

Para mostrar o resultado agora basta ver que:

a) $R(b): G \longrightarrow G$ quando escrita nas cartas acima fica $h(.,\tilde{v})$.

b) $L(a): G \longrightarrow G$ quando escrita nas mesmas cartas fica $h(\tilde{u},.)$.

De onde segue o resultado desejado, notando que $V_1 = d\phi_a(v_a)$ e $V_2 = d\psi_b(v_b)$.

Este lema permite mostrar que m_* define uma estrutura de grupo em TG.(Na verdade grupo de Lie pois m_* e analítica).

De fato, seja $\Phi: G \longrightarrow TG$ a secção nula do fibrado tangente, e coloquemos $0_e = \Phi(e)$. Então 0_e será o elemento neutro de m_*, ou seja, será a identidade do grupo (TG, m_*). Isto decorre imediatamente de (5.1).

Dado um $v_b \in TG$ então o inverso de v_b será denotado por v_b^{-1} e vale:

$$v_b^{-1} = d(R(b^{-1}) \circ L(b^{-1}))_b(-v_b) \tag{5.2}$$

e a verificação é imediata bastando colocar (5.2) na fórmula (5.1) substituindo v_a por v_b^{-1}.

Portanto (TM, m_*) é um grupo de Lie.

Obs. 1: Outra conseqüência trivial do lema 5.1 é que a projeção π é, na verdade, um homomorfismo de grupos de Lie.

Obs. 2 Seja $\alpha: \mathbb{R} \longrightarrow G$ e $\beta: \mathbb{R} \longrightarrow G$ duas curvas diferenciáveis, e consideremos a curva:

$$\delta(t) = m(\alpha(t), \beta(t))$$

então derivando obtemos

$$\dot{\delta}(t) = m_{*(\alpha(t),\beta(t))}(\dot{\alpha}(t), \dot{\beta}(t))$$

e portanto pelo lema 5.1 obtemos a fórmula

$$\dot{\delta}(t) = dR(\beta(t))_{\alpha(t)}(\dot{\alpha}(t)) + dL(\alpha(t))_{\beta(t)}(\dot{\beta}(t) \tag{5.3}$$

fórmula que já tivemos a necessidade de utilizar (veja (4.9)).

Vamos considerar agora a representação adjunta do grupo G.

$$Ad_g: L(G) \longrightarrow L(G)$$

dada por

$$Ad_g(v) = dR(g^{-1})_g \circ dL(g)_e(v)$$

esta representação define uma ação à direita do grupo G no espaço vetorial $L(G)$. E consideremos o grupo de Lie $L(G) \times_{Ad} G$ produto semi-direto de $L(G)$ (como grupo abeliano) por G através da ação Ad.

A lei de grupo definida em $L(G) \times_{Ad} G$ é a seguinte:

$$(u, g).(v, h) = (u + Ad_g(v), gh)$$

E fácil verificar que o elemento neutro deste grupo é $(0, e)$ e que se $(u, g) \in L(G) \times_{Ad} G$ então

$$(u, g)^{-1} = (-Ad_{g^{-1}}(u), g^{-1}).$$

Para detalhes do produto semi-direto ver [6].

Lema 5.2 (TG, m_*) é isomorfo a $L(G) \times_{Ad} G$.
dem.: Consideremos a aplicação:

$$\Theta: TG \longrightarrow L(G) \times_{Ad} G$$

dada por

$$\Theta(v_g) = (dR(g^{-1})_g(v_g), g) \tag{5.4}$$

e fácil ver que Θ é diferenciável pois $\Theta = (dR \circ i \circ \pi) \circ id \times \pi$ onde R é a translação à direita, π a projeção, i a inversão em G e id a identidade em TG.

Também é fácil ver que Θ é inversível e que sua inversa é dada por

$$\Theta^{-1}((u, g)) = dR(g)_e(u) \tag{5.5}$$

Resta apenas mostrar que Θ é um homomorfismo de grupos.

De fato:

$$\begin{aligned}
\Theta(v_g w_h) &= \Theta(m_*(v_g, w_h)) \\
&= \Theta(dR(h)_g(v_g) + dL(g)_h(w_h)) \text{ de } (5.1) \\
&= (dR([gh]^{-1})_{gh}(dR(h)_g(v_g) + dL(g)_h(w_h)), gh) \\
&= (dR(g^{-1})_g(v_g) + dR(g^{-1})_g \circ dL(g)_e \circ dR(h^{-1})_h(w_h), gh) \\
&= \Theta(v_g).\Theta(w_h)
\end{aligned}$$

e esta terminada a demontração.

Vamos agora demonstrar uma propriedade relativa aos levantamentos tangentes de campos de vetores em G.

Seja X um campo de vetores sôbre G e $\tilde{X}$ seu levantamento ao fibrado tangente, TG, então teremos a igualdade:

$$\pi_* \circ \tilde{X} = X \circ \pi \tag{5.6}$$

cuja demonstração é análoga àquela feita da propriedade 1 do parágrafo 2

Lema 5.3 Se X for um campo invariante à direita em G, então $\tilde{X}$ será um campo invariante à direita em TG.

dem.: Seja $\alpha: \mathbf{R} \longrightarrow G$ a solução da equação diferencial $\dot{g} = X(g)$, com a condição inicial $\alpha(0) = e$.

Como X é invariante à direita o grupo a um parâmetro de difeomorfismos associado a X é :

$$\phi_t = L(\alpha(t)): G \longrightarrow G$$

Assim pela definição do levantamento dada, o grupo a um parâmetro associado à $\tilde{\tilde{X}}$ é

$$(\phi_t)_* = dL(\alpha(t)): TG \longrightarrow TG$$

portanto a solução de $\dot{y} = \tilde{\tilde{X}}(y)$ que no instante $t = 0$ passa por 0_e, identidade de TG, é :

$$\gamma_0(t) = \phi_{t*}(0_e) = dL(\alpha(t))_e(0_e) = \Phi(\alpha(t))$$

onde Φ é a secção nula de TG.

Desta forma a solução de $\dot{y} = \tilde{\tilde{X}}(y)$ com a condição de passar por v no instante inicial $t = 0$ pode-se escrever como

$$\begin{aligned} \gamma_v(t) &= m_*(\gamma_0(t), v) \\ &= dL(\alpha(t))_{\pi(v)}(v) \end{aligned} \tag{5.7}$$

(basta usar novamente a fórmula (5.1)).

Definindo:

$$\tilde{\tilde{L}}(v_a) = m_*(v_a, .)$$

podemos escrever:

$$\gamma_v(t) = \tilde{\tilde{L}}(\gamma_0(t))(v) \tag{5.8}$$

e portanto

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_v(t) &= d\tilde{\tilde{R}}(v)_{\gamma_0(t)}(\dot{\gamma}_0(t)) \\ &= d\tilde{\tilde{R}}(v)_{\gamma_0(t)}(\tilde{\tilde{X}}(\gamma_0(t))) \end{aligned} \tag{5.9}$$

e por outro lado

$$\dot{\gamma}_v(t) = \tilde{\tilde{X}}(\gamma_v(t))$$

em particular quando $t = 0$ obtemos

$$\tilde{\tilde{X}}(v) = d\tilde{\tilde{R}}(v)_{0_e}(\tilde{\tilde{X}}(0_e)) \tag{5.10}$$

o que acaba de demonstrar o nosso lema.

Obs.: Notemos que se $\tilde{X}$, um campo de vetores em TG e se $\tilde{X}$ for o levantamento de algum campo X de G e se $\tilde{X}$ for invariante à direita então X deve ser invariante à direita.

De fato, se $\tilde{X}$ for invariante à direita então vale a igualdade (5.10) com $v \in TG$ e seja $\gamma_0 : \mathbb{R} \longrightarrow TG$ a trajetória de $\tilde{X}$ tal que $\gamma_0(0) = 0_e$ então temos também válida a relação (5.8), ou seja, o grupo a um parâmetros associado a $\tilde{X}$ é $\tilde{L}(\gamma_0(t))$.

Agora como $\tilde{X}$ é o levantamento de X, deve estar satisfeita a propriedade

$$\pi_* \circ \tilde{X} = X \circ \pi$$

de onde concluimos que, se ϕ_t for o grupo a um parâmetro associado a X, entào

$$\pi \circ \tilde{L}(\gamma_0(t)) = \phi_t \circ \pi$$

Agora, pelo fato de π ser um homomorfismo de grupo temos imediatamente

$$\pi \circ \tilde{L}(\gamma_0(t))(v) = L(\alpha(t)) \circ \pi(v) = \phi_t(v)$$

onde $\alpha(t) = \pi(\gamma_0(t))$ será a trajetória de X tal que $\alpha(0) = e$.

Assim concluimos que $\phi_t = L(\alpha(t))$ o que acarreta que o campo X também é invariante à direita.

Assim se Σ for um sistema de controle invariante à direita então $\tilde{\Sigma}$ também será invariante à direita.

Capítulo 2

O princípio do máximo de Pontriaguin

§6 Definições básicas: Vamos, neste parágrafo, dar as definições básicas do problema a ser tratado neste capítulo. O problema é essencialmente o seguinte: quando que um ponto $g \in G$ está na fronteira do conjunto de acessibilidade $A_\Sigma(T, e)$, de um sistema de controle invariante à direita ?

A resposta desta questão não pode ser dada completamente, uma vez que o teorema que demonstraremos dá apenas uma condição necessária para um ponto estar na fronteira, mas esta condição nem sempre é suficiente.

O sistema de controle aqui tratado será um sistema invariante à direita $\Sigma(G, \Phi, U, \Omega)$ onde $U \subset L(G)$ e a classe dos controles admissíveis são funções mensuráveis

$$u: [0, T] \longrightarrow U$$

onde T será um número real positivo.

Neste caso a equação de evolução do sistema será, como já vimos anteriormente.

$$\dot{x} = dR(x)_e(u(t)) \tag{6.1}$$

E dado um controle admissível $u \in \Omega$ definida num intervalo $[0, T]$, teremos a trajetória de Σ associada ao controle u e que passa pela identidade no instante inicial, dada pela expressão

$$x(t) = \prod_0^t u(\tau) d\tau \tag{6.2}$$

portanto podemos escrever

$$(6.3) \qquad A_\Sigma(T,e) = \{\prod_0^t u(\tau)d\tau \mid u \in \Omega\}$$

Notemos que por esta fórmula é bem mais fácil concluir que $A(T,g) = A(T,e)g$ (cf. lema 3.1).

definição: Diremos que uma trajetória $\gamma: [0,T] \longrightarrow G$ associada a um controle admissível do sistema Σ será ***extrema*** se e somente se para todo $t \in [0,T]$ temos que

$$\gamma(t) \in \delta A(T,e)$$

onde $\delta A(T,e)$ denota a fronteira de $A(T,e)$.

É fácil mostrar o seguinte lema.

Lema 6.1 Se $\gamma(t)$ for uma trajetória de Σ e $\gamma(t_1) \in \delta A(t_1,e)$ para algum $t_1 \in [0,T]$ então $\gamma(t) \in \delta A(t,e)$ para todo $t \in [0,t_1]$.

Para a demonstração deste lema faremos algumas considerações sobre sistemas de controle inverso de um sistema dado.

§7 **Sistemas inversos:** Seja $\Phi = \{X_u\}_{u\in U}$ uma família de campos de vetores numa variedade M. Então colocaremos $-\Phi = \{-X_u\}_{u\in U}$
definição: Dado um sistema de controle $\Sigma = (M, \Phi, U, \Omega)$ o sistema inverso deste sistema será:

$$\Sigma^{-1} = (M, -\Phi, U, \Omega)$$

definição: Um sistema de controle será dito simétrico quando $\Sigma^{-1} = \Sigma$ isto é $-\Phi = \Phi$.

No caso de um sistema de controle invariante à direita, dado um controle admissível u temos a equação de evolução do sistema dada por (6.1). Utilizando o mesmo controle a equação de evolução para o sistema Σ^{-1} será da forma:

$$\dot{x} = -dR(x)_e(u(t)) = dR(x)_e(-u(t)) \tag{7.1}$$

De onde concluimos que um sistema de controle invariante à direita é simétrico se e somente se $U = -U$ onde $U \subset L(G)$.

Notemos agora que para um mesmo controle $u: [0, T] \longrightarrow U$ teremos uma trajetória de Σ que no instante $t = 0$ passa por e $\gamma: [0, T] \longrightarrow G$ dada por

$$\gamma(t) = \prod_0^t u(\tau) d\tau \tag{7.2}$$

e também uma trajetória de Σ^{-1} passando por e no instante $t = 0$ e denotada por $\gamma^*: [0, T] \longrightarrow G$, que em vista de (7.1) também pode ser escrita como

$$\gamma^*(t) = \prod_0^t -u(\tau) d\tau \tag{7.3}$$

se multiplicarmos as duas relações (7.2) e (7.3) iremos obter

$$\gamma^*(t)\gamma(t) = \prod_0^t -u(\tau) d\tau \prod_0^t u(\tau) d\tau \tag{7.4}$$

Agora é uma conseqüência direta da definição da integral multiplicativa que o segundo membro da igualdade é a identidade do grupo G. (Basta tomar uma sequência u_n de funções constantes por partes que convirja para u e aplicar a definição da integral multiplicativa.)

Portanto $\gamma^*(t)\gamma(t) = e$. Assim demonstramos o seguinte lema:

Lema 7.1 Se $g \in A_\Sigma(t,e)$ então $g^{-1} \in A_{\Sigma^{-1}}(t,e)$.

Como conseqüência disto temos o seguinte:

Se $y \in A_\Sigma(T-t_0,x)$ então

$$y \in A_\Sigma(T-t_0,e)x$$

ou

$$yx^{-1} \in A_\Sigma(T-t_0,e)$$

de onde concluimos pelo lema acima

$$xy^{-1} \in A_{\Sigma^{-1}}(T-t_0,e)$$

ou

$$x \in A_{\Sigma^{-1}}(T-t_0,y).$$

Com estas observações demonstraremos o lema 6.1 enunciado no parágrafo anterior.

Demontração do lema 6.1:

Suponhamos, por absurdo, que exista um $t_0 \in [0,t_1]$ tal que $\gamma(t_0)$ seja interior a $A_\Sigma(t_0,e)$.

É fácil ver que $\gamma(t_1) \in A_\Sigma(t_1-t_0,\gamma(t_0))$. Portanto pela observação anterior temos que

$$\gamma(t_0) \in A_{\Sigma^{-1}}(t_1-t_0,\gamma(t_1))$$

Devido à dependência contínua das condições iniciais das soluções de (7.1), dada uma vizinhança aberta V de $\gamma(t_0)$ existe uma vizinhança W de $\gamma(t_1)$ tal que W será levado em V pela fluxo de (7.1).

Podemos, pela hipótese feita, tomar $V \subset A_\Sigma(t_0,e)$. Portanto dado um ponto $w \in W$ existe um $v \in V$ tal que $v \in A_{\Sigma^{-1}}(t_1-t_0,w)$ e pela mesma observação anterior temos que

$$w \in A_\Sigma(t_1-t_0,v)$$

e como $v \in A_\Sigma(t_0,e)$ vem que $w \in A_\Sigma(t_1,e)$ ou seja $W \subset A_\Sigma(t_1,e)$ o que é absurdo pois $\gamma(t_1)$ está na fronteira. E isto demonstra o lema.

Obviamente, de forma, dual isto também demonstra que se $\gamma(t_1)$ for um ponto interior ao conjunto de acessibilidade em tempo $t_1 \in [0,T]$. Então $\gamma(t)$ será interior para todo t maior que t_1.

§8 **Trajetórias de momento máximo:** Consideremos o sistema de controle invariante à direita como no parágrafo 6, e seja $\hat{\Sigma}$ o seu levantamento hamiltoniano.

Tomemos ainda em T^*G a estrutura simplética canonica determinada pela forma não degenerada $d\lambda$ onde λ aqui é a forma de Liouville em T^*G. Esta forma em T^*G permite construir uma aplicação que a cada campo de vetores X de G associa uma função

$$M_X: T^*G \longrightarrow \mathbf{R}$$

definida por

$$M_X(\omega) = <\lambda(\omega), \hat{X}(\omega)> = i_{\hat{X}}\lambda \tag{8.1}$$

ou levando em consideração a definição da forma de Liouville, podemos escrever

$$M_X(\omega) = <\omega, X>_{p(\omega)} \tag{8.2}$$

p a projeção do fibrado cotangente.

Definição: A função M_X será chamada de momento de X.

Observação: Se definirmos o colchete de Poisson de duas funções definidas em T^*G como $\{f,g\} = d\lambda(X_f, X_g)$ onde X_f e X_g são campos hamiltonianos associados a f e g. Então teremos $M_{[X,Y]}(\omega) = \{M_X, M_Y\}(\omega)$.

Seja $\gamma: [0,T] \longrightarrow G$ uma trajetória do sistema Σ associada a um controle admissível u. Então dado um ponto $\hat{\omega} \in p^{-1}(\gamma(t))$ para algum $t \in [0,T]$, existe uma única trajetória $\hat{\gamma}: [0,T] \longrightarrow T^*G$ do sistema $\hat{\Sigma}$ associada ao controle u e tal que $\hat{\gamma}(t) = \hat{\omega}$.

Definição: $\hat{\gamma}(t)$ será chamada de levantamento hamiltoniano de $\gamma(t)$ em $\hat{\omega}$.

Devido às propriedades dos levantamentos hamiltonianos notamos que se $\hat{\gamma}$ for uma trajetória de $\hat{\Sigma}$ associada a um controle u, então $p \circ \hat{\gamma}(t)$ será uma trajetória de Σ associada a u.

De fato,

$$\begin{aligned}
\frac{dp \circ \hat{\gamma}(t)}{dt} &= p_* \dot{\hat{\gamma}}(t) \\
&= p_* \circ \hat{X}_{u(t)}(\hat{\gamma}(t)) \\
&= X_{u(t)}(p \circ \hat{\gamma}(t))
\end{aligned}$$

Definição : Uma trajetória $\hat{\gamma}(t)$ de $\hat{\Sigma}$ para um controle admissível $u \in \Omega$ e dito de *hamiltoniano máximo* se para todo $v \in U$ tivermos

$$M_{X_{u(t)}}(\hat{\gamma}(t)) \geq M_{X_v}(\hat{\gamma}(t))$$

e $\hat{\gamma}(t)$ for não trivial.

No nosso caso a condição da definição será

$$M_{dR(p\circ\hat{\gamma}(t))_e(u(t))}(\hat{\gamma}(t)) \geq M_{dR(p\circ\hat{\gamma}(t))_e(v)}(\hat{\gamma}(t)) \qquad (8.3)$$

que também pode ser escrita, lembrando a fórmula (8.2) como

$$< \hat{\gamma}(t), dR(p \circ \hat{\gamma}(t))_e(u(t)) > \geq < \hat{\gamma}(t), dR(p \circ \hat{\gamma}(t))_e(v) > \qquad (8.4)$$

para todo $v \in U$.

Definição: Uma trajetória γ de Σ associada a um controle u será de *momento máximo* se e somente se existir um levantamento hamiltoniano de γ que seja de hamiltoniano máximo.

Isto termina a parte de definições básicas para o princípio do máximo, mas antes de enunciá-lo vamos demonstrar um lema que nos dá uma forma de construir levantamentos hamiltonianos de trajetórias de Σ.

§9 O levantamento hamiltoniano de uma trajetória:

Lema 9.1 Fixado um $u \in \Omega$ e $\omega \in p^{-1}(e)$, então existe uma única trajetória $\hat{\gamma}: [0,T] \longrightarrow T^*G$ do sistema de controle $\hat{\Sigma}$ associada ao controle u e tal que $\hat{\gamma}(0) = \omega$. Além disso $\hat{\gamma}$ e dada pela fórmula:

$$\hat{\gamma}(t) = (L(\prod_0^t u(\tau)d\tau))^{*-1}(\omega) \tag{9.1}$$

onde $L(x): G \longrightarrow G$ é a translação a esquerda do grupo G.

dem.: Vamos demonstrar que a curva $\hat{\gamma}(t)$ dada pela fórmula (9.1) é realmente uma trajetória de $\hat{\Sigma}$ uma vez escolhido o controle u. A unicidade decorre dos teoremas clássicos de equções diferenciais.

Dividiremos a demonstração em três etapas, partindo da forma mais simples do controle u para as formas mais complicadas, até o caso geral. Em todos os casos vamos provar que :

$$\frac{d\hat{\gamma}(t_1)}{dt} = X_{u(t_1)}(\hat{\gamma}(t_1)) \tag{9.2}$$

para quase todo $t_1 \in [0,T]$ e onde $X_{u(t)}$ representa o levantamento hamiltoniano do campo de vetores $dR(x)_e(u(t))$.

CASO 1: Se $u(t) = v$ constante.

Lembremos para este caso que a solução que passa por e no instante $t = 0$ do campo de vetores invariante à direita, $dR(x)_e(v)$ pode ser expressa pela exponencial, $exp(tv)$, e portanto o grupo a um parâmetro de difeomorfismos associado é

$$\phi_t = L(exp(tv)(.): G \longrightarrow G.$$

Assim ${\phi_t}^{*-1}$, que é o grupo a um parâmetro do grupo levantado em T^*G escreve-se como

$${\phi_t}^{*-1} = (L(exp(tv)))^{*-1}: T^*G \longrightarrow T^*G \tag{9.3}$$

e a solução que no instante inicial passa por ω fica

$$\gamma^s(t) = (L(exp(tv)))^{*-1}(\omega) \tag{9.4}$$

Mas quando $u(t) = v$ for constante então a integral multiplicativa de u fica pela definição:

$$\prod_0^t u(\tau)d\tau = exp(tv) \tag{9.5}$$

substituindo na fórmula (9.1) e comparando com a (9.4) obtemos $\gamma^s(t) = \hat{\gamma}(t)$ o que demonstra o resultado para o primeiro caso.
CASO 2: se $u(t)$ for constante por pedaços.

Neste caso fazemos:

$$u(t) = \begin{cases} v_1 & \text{se } 0 \leq t < t_1 \\ v_2 & \text{se } t_1 \leq t < t_2 \\ \vdots & \quad \vdots \\ v_n & \text{se } t_{n-1} \leq t \leq t_n = T \end{cases}$$

Vamos tomar um $\bar{t} \in (t_{k-1}, t_k)$ com $1 \leq k \leq n$. Então para t numa vizinhança de $\bar{t}$ teremos pela definição da integral multiplicativa que:

$$\prod_0^t u(\tau)d\tau = exp([t - t_{k-1}]v_k) \ldots exp(t_1 v_1) \tag{9.6}$$

Assim

$$\hat{\gamma}(t) = (L(\prod_{t_{k-1}}^t u(\tau)d\tau \prod_0^{t_{k-1}} u(\tau)d\tau)^{*-1}(\omega)$$

usando uma propriedade da integral multiplicativa.

Fatorando as translações a esquerda obtemos

$$\hat{\gamma}(t) = (L(exp([t - t_{k-1}]v_k)))^{*-1}(\omega_1) \tag{9.7}$$

onde $exp([t - t_{k-1}]v_k) = \prod_{t_{k-1}}^t u(\tau)d\tau$ e

$$\omega_1 = (L(\prod_0^{t_{k-1}} u(\tau)d\tau))^{*-1}(\omega)$$

ou ainda

$$\hat{\gamma}(t) = (L(exp(tv_k))^{*-1}(\omega_2) \tag{9.8}$$

com $\omega_2 = (L(exp(-t_{k-1}v_k))^{*-1}(\omega_1)$.

Neste caso
$$\frac{d\hat{\gamma}(t)}{dt}\Big|_{t=\bar{t}} = X_{v_k}(\hat{\gamma}(\bar{t}))$$
e nestas condições $X_{v_k} = X_{u(\bar{t})}$. Como o nosso $\bar{t}$ pode ser tomado genericamente com execção de um número finito de pontos em $[0,T]$, terminamos o caso 2.

CASO 3: $u(t)$ é uma função mensurável genérica.

Este é o caso geral, e aí sabemos pela construção da integral multiplicativa que existe uma seqüência u_n de $\mathcal{L}^1([0,T], L(G))$ tal que u_n e constante por partes para todo n e tal que $\|u_n - u\|_1 \to 0$ e neste caso temos
$$\lim_{n\to\infty} \prod_0^t u_n(\tau)d\tau = \prod_0^t u(\tau)d\tau.$$
Consideremos a aplicação:
$$\Psi_\omega : G \longrightarrow T^*G \tag{9.9}$$
que é definida por
$$\Psi_\omega(g) = (L(g))^{*-1}(\omega) \tag{9.10}$$
Notemos que Ψ_ω é diferenciável.

Consideremos agora as curvas :
$$\xi_n(t) = \Psi_\omega(\prod_0^t u_n(\tau)d\tau)$$
e
$$\xi(t) = \Psi_\omega(\prod_0^t u(\tau)d\tau)$$
como Ψ_ω é contínua temos $\xi_n(t) \longrightarrow \xi(t)$.

Agora
$$\frac{d\xi_n(t)}{dt}\Big|_{t=\bar{t}} = \Psi_{\omega *}(dR(\prod_0^{\bar{t}} u_n(\tau)d\tau)_e(u_n(\bar{t})))$$

e

$$\frac{d\xi(t)}{dt}\Big|_{t=\bar{t}} = \Psi_{\omega *}(dR(\prod_0^{\bar{t}} u(\tau)d\tau)_e(u(\bar{t})))$$

passando ao limite teremos

$$\dot{\xi}_n(\bar{t}) \longrightarrow \dot{\xi}(\bar{t})$$

mas

$$\dot{\xi}(\bar{t}) = \frac{d\hat{\gamma}(\bar{t})}{dt}$$

e pelo caso 2 temos

$$\dot{\xi}_n(\bar{t}) = X_{u_n(\bar{t})}(\hat{\gamma}_n(\bar{t}))$$

portanto

$$X_{u_n(\bar{t})}(\hat{\gamma}_n(\bar{t})) \longrightarrow \frac{d\hat{\gamma}(\bar{t})}{dt}$$

e por outro lado

$$X_{u_n(\bar{t})}(\hat{\gamma}_n(\bar{t})) \longrightarrow X_{u(\bar{t})}(\hat{\gamma}(\bar{t}))$$

o que demonstra o caso 3 e termina o lema 9.1.

§10 **O princípio do máximo:** Vamos neste parágrafo demonstrar o princípio de Pontriaguin para os sistemas da forma (6.1). O enunciado original deste princípio dá uma condição necessária para que uma determinada trajetória de um sistema de controle seja ótima, no sentido de minimizar um funcional de custo dado ([5]). Este mesmo princípio ligeiramente reelaborado pode ser interpretado como uma condição necessária para que uma trajetória seja extrema, no sentido definido no parágrafo 6; ou pode ser visto também como uma condição suficiente para um determinado ponto estar no interior do conjunto de acessibilidade em tempo T.

Observação: Se tivermos uma trajetória, $\gamma: [0,T] \longrightarrow G$ de um sistema de controle, se provarmos que $\gamma(T)$ está na fronteira do conjunto de acessibilidade $A(T,e)$ então γ será extrema pelo lema 6.1.

A idéia do princípio é a seguinte: se $x \in A(T,e)$ for um ponto de G, então construiremos um cone no espaço tangente T_xG que , em determinado sentido , aproxima o conjunto de acessibilidade $A(T,e)$. Se este cone fortodo o espaço T_xG então o ponto x será um ponto interior ao conjunto de acessibilidade. Por isso para que x esteja na fronteira este cone não poderá ser o espaço tangente inteiro.

Teorema 10.1 Se $\gamma: [0,T] \longrightarrow G$ for uma trajetória extrema do sistema de controle (6.1) associada ao controle $u^* \in \Omega$ então γ será de momento máximo.

dem.: Na primeira parte construiremos um cone no espaço tangente $T_{\gamma(T)}G$, a partir de perturbações no controle u^*.

Comecemos lembrando que no caso dos sistemas invariantes à direita a trajetória $\gamma: [0,T] \longrightarrow G$ que passa pela identidade no instante $t = 0$ pode-se escrever como

$$\gamma(t) = \prod_{0}^{t} u^*(\tau) d\tau \tag{10.1}$$

Vamos definir o que é uma perturbação do controle u^*.

Seja u_1 um controle admissível, t_1 um ponto interior de $[0,T]$, ϵ, λ números reais positivos tais que $t_1 - \lambda\epsilon > 0$, então definimos o controle perturbado de u^* pela perturbação $\pi(u_1, t_1, \lambda, \epsilon)$ como o controle admissível

$$u^{s}_{\pi(u_1,t_1,\lambda,\epsilon)}(\tau) = \begin{cases} u^*(\tau) & \text{se } 0 \leq \tau \leq t_1 - \lambda\epsilon \\ u_1(\tau) & \text{se } t_1 - \lambda\epsilon < \tau \leq t_1 \\ u^*(\tau) & \text{se } t_1 < \tau \leq T. \end{cases} \tag{10.2}$$

$u^s_{\pi(u_1,t_1,\lambda,\epsilon)}$ é controle admissível porque é concatenação de controles admissíveis.

Portanto a trajetória que passa pela identidade no instante $t = 0$ do sistema de controle (6.1) associada ao controle (10.2) pode-se escrever, usando novamente a integral multiplicativa, como:

$$\gamma_{\pi(u_1,t_1,\lambda,\epsilon)}(t) = \prod_0^t u^s_{\pi(u_1,t_1,\lambda,\epsilon)}(\tau)d\tau \tag{10.3}$$

Em particular $\gamma_{\pi(u_1,t_1,\lambda,\epsilon)}(T) \in A(T,e)$. E usando as propriedades da integral multiplicativa obtemos

$$\gamma_{\pi(u_1,t_1,\lambda,\epsilon)}(T) = \prod_{t_1}^{T} u^*(\tau)d\tau \prod_{t_1-\lambda\epsilon}^{t_1} u_1(\tau)d\tau \prod_0^{t_1-\lambda\epsilon} u^*(\tau)d\tau \tag{10.4}$$

Esta relação torna evidente como a solução (10.3) depende de ϵ, e permitindo ϵ variar no intervalo $(0, \frac{t_1}{\lambda})$ definimos a função

$$\xi_{\pi(u_1,t_1,\lambda,\epsilon)}(\epsilon) = \prod_{t_1}^{T} u^*(\tau)d\tau \prod_{t_1-\lambda\epsilon}^{t_1} u_1(\tau)d\tau \prod_0^{t_1-\lambda\epsilon} u^*(\tau)d\tau \tag{10.5}$$

notemos que pela própria definição e pelas observações anteriores temos que $\xi_{\pi(u_1,t_1,\lambda,.)}(\epsilon) \in A(T,e)$ para todo ϵ no intervalo de definição. Definindo, assim, uma curva em $A(T,e)$.

Além disso $\xi_{\pi(u_1,t_1,\lambda,.)}(0) = \prod_0^T u^*(\tau)d\tau = \gamma(T)$. Assim o vetor

$$v_{\pi(u_1,t_1,\lambda)} = \lim_{\epsilon\to 0^+} \left(\frac{d\xi_{\pi(u_1,t_1,\lambda,.)}(\epsilon)}{d\epsilon} \right)$$

será um vetor tangente que pertence a $T_{\gamma(T)}G$.

A seguir vamos calcular de forma explicita o vetor $v_{\pi(u_1,t_1,\lambda,)}$,derivando a fórmula (10.5) no instante $t = 0$. Para tanto escrevamos inicialmente

$$\xi_{\pi(u_1,t_1,\lambda,.)}(\epsilon) = a.b(\epsilon)$$

onde $a=\prod_{t_1}^{T} u^*(\tau)d\tau$ e

$$b(\epsilon)=\prod_{t_1-\lambda\epsilon}^{t_1} u_1(\tau)d\tau \prod_{0}^{t_1-\lambda\epsilon} u^*(\tau)d\tau$$

então

$$\frac{d\xi_{\pi(u_1,t_1,\lambda,.)}}{d\epsilon}\mid_{\epsilon=0}=dL(a)_{b(0)}(\frac{db}{d\epsilon}\mid_{\epsilon=0})$$

como $b(0)=\prod_0^{t_1} u^*(\tau)d\tau$ o termo a direita da igualdade acima pode-se escrever como:

$$dL(\prod_{t_1}^{T} u^*(\tau)d\tau)_{\gamma(t_1)}(\frac{db}{d\epsilon}\mid_{\epsilon=0})=v_{\pi(u_1,t_1,\lambda,)} \tag{10.6}$$

Note, pela fórmula acima, que $v_{\pi(u_1,t_1,\lambda,)}$ e a translação de um vetor de $T_{\gamma(t_1)}G$ por uma trajetória de $\tilde{\Sigma}$ associada ao controle u^*. Para notar isto,basta demonstrar de forma absolutamente análoga ao lema 9.1 o seguinte lema:

Lema 9.1a: Seja u um controle admissível do sistema (6.1) então dado um ponto $v\in\pi^{-1}(e)$, a trajetória de $\tilde{\Sigma}$ associado a u e que no instante $t=0$ passa por v e dada pela fórmula

$$\tilde{\gamma}(t)=dL(\prod_{0}^{t} u(\tau)d\tau)_e(v) \tag{10.7}$$

Voltemos agora à nossa fórmula (10.6). Resta-nos calcular $\frac{db}{d\epsilon}\mid_{\epsilon=0}$. Outra vez fazemos $b(\epsilon)=c(\epsilon)d(\epsilon)$ onde:

$$c(\epsilon)=\prod_{t_1-\lambda\epsilon}^{t_1} u_1(\tau)d\tau$$

e

$$d(\epsilon)=\prod_{0}^{t_1} u^*(\tau)d\tau$$

Usando a fórmula (5.3) e após alguns calculos usando a regra da cadeia iremos obter:

$$\frac{db}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0} = dR(\gamma(t_1))_e(\lambda u_1(t_1)) - \lambda dR(\gamma(t_1))_e(u^*(t)) \tag{10.8}$$

Combinando com (10.6) obtemos

$$v_{\pi(u_1,t_1,\lambda)} = \lambda(dL(\prod_{t_1}^{T} u^*(\tau)d\tau)_{\gamma(t_1)}\,(dR(\gamma(t_1))_e(u_1(t_1) - u^*(t_1))) \tag{10.9}$$

Chamaremos (10.9) de vetor de perturbação elementar associado à perturbação $\pi(u_1, t_1, \lambda, \epsilon)$.

Observação 1: O vetor de perturbação não vai depender de ϵ.

Observação 2: Pela fórmula (10.9) é fácil ver que

$$v_{\pi(u_1,t_1,\lambda)} = \lambda v_{\pi(u_1,t_1,1)} \tag{10.10}$$

ou seja se v for um vetor de perturbação elementar então λv também é um vetor de perturbação elementar para λ positivo.

Observação 3: Se os controles admissiveis u_1 e u^* coincidem num ponto $\bar{t}$ então $v_{\pi(u_1,\bar{t},\lambda)} = 0$.

Estamos prontos para definir o cone de Pontriaguin. Denotemos por $K_1 = \bigcup v_{\pi(u_1,t_1,\lambda)}$, a reunião de todos os vetores de perturbações elementares. Pela observação 2 anterior K_1 será um cone.

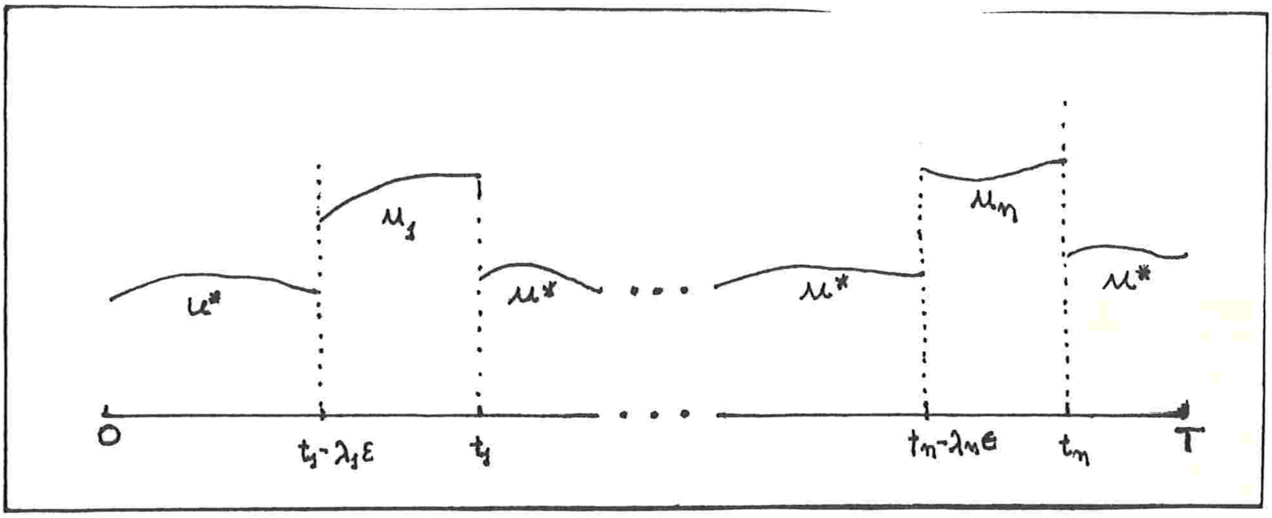
Definição: O fecho convexo do cone K_1 chamaremos de cone de Pontriaguin no ponto $\gamma(T)$ em relação à trajetória γ.

Mostraremos a seguir que esta definição é uma boa definição no sentido que, o cone de Pontriaguin,K_p, assim definido contém vetores de perturbações não elementares, o que é fundamental para entendermos K_p como um cone que aproxima $A(T, e)$ no ponto $\gamma(T)$.

Explicando melhor, podemos definir uma perturbação não elementar de u^* através de uma seqüência finita $u_1 \ldots u_n$ de controles admissiveis, $\epsilon > 0$ e uma seqüência finita de números positivos $\lambda_1 \ldots \lambda_2$ e $t_1 \ldots t_n$ com $0 < t_1 < \ldots < t_n < T$ satisfazendo ainda $t_j - \lambda_j\epsilon > t_{j-1}$

Definimos o novo controle

$$u^{\epsilon}_{\pi(u_i,t_i,\lambda_i)}(\tau) = \begin{cases} u_i(\tau) & \text{se } t_i - \lambda_i\epsilon \leq \tau \leq t_i \\ u^*(\tau) & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{10.11}$$



u^s pode ser visualizado num gráfico.

Obviamente $u^s_{\pi(u_i,t_i,\lambda_i)}$ será um controle admissível e a trajetória associada a este controle que passa por pela identidade quando $t = 0$ pode ser escria como

$$\gamma^s(T) = \prod_{t_n}^{T} u^*(\tau)d\tau.\prod_{t_n-\lambda_n\epsilon}^{t_n} u_n(\tau)d\tau\cdots\prod_{t_1-\lambda\epsilon}^{t_1} u_1(\tau)d\tau.\prod_{0}^{t_1-\lambda\epsilon} u^*(\tau)d\tau \tag{10.12}$$

e analogamente ao que foi feito anteriormente podemos definir uma função $\xi^s: [0,\epsilon_0) \longrightarrow A(T,e)$ definida através da fórmula (10.12) como:

$$\xi^s(\epsilon) = \gamma^s(T)$$

com $\epsilon_0 = \inf\{\frac{t_i-t_{i-1}}{\lambda_i}, \frac{t_1}{\lambda_1}\}$.

A fórmula acima define uma curva em $A(T,e)$. Definiremos o vetor de perturbação não elementar como

$$v^s_{\pi(u_i,t_i,\lambda_i)} = \frac{d\xi^s}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0} \tag{10.13}$$

Vamos demonstrar que v^s está em K_p. Na verdade, temos o seguinte lema:

Lema 10.2

$$v^s_{\pi(u_i,t_i,\lambda_i)} = \sum_{i=1}^{n} v_{\pi(u_i,t_i,\lambda_i)}.$$

dem.: A demonstração deste lema é simplesmente o cálculo da derivada de (10.13).

Faremos o cômputo apenas para o caso $i = 2$ para darmos uma idéia do processo de indução.

Se

$$\xi^s(\epsilon) = \prod_{t_2}^{T} u^*(\tau)d\tau \prod_{t_2-\lambda_2\epsilon}^{t_2} u_2(\tau)d\tau \prod_{t_1}^{t_2-\lambda_2\epsilon} u^*(\tau)d\tau \prod_{t_1-\lambda_1\epsilon}^{t_1} u_1(\tau)d\tau \prod_{0}^{t_1-\lambda_1\epsilon} u^*(\tau)d\tau$$

Então

$$\xi^{s\prime}(0) = dL(\prod_{t_2}^{T} u^*(\tau)d\tau)_{\gamma(t_2)}(c_1'(0)$$

onde $c_1(\epsilon) = g(\epsilon)f(\epsilon)$ com

$$g(\epsilon) = \prod_{t_2-\lambda_2\epsilon}^{t_2} u_2(\tau)d\tau \prod_{t_1}^{t_2-\lambda_2\epsilon} u^*(\tau)d\tau$$

e

$$f(\epsilon) = \prod_{t_1-\lambda_1\epsilon}^{t_1} u_1(\tau)d\tau \prod_{0}^{t_1-\lambda_1\epsilon} u^*(\tau)d\tau$$

Assim

$$c_1'(0) = dR(f(0))_{g(0)}(g'(0)) + dL(g(0))_{f(0)}(f'(0))$$

mas $f(0) = \gamma(t_1)$ e $g(0) = \prod_{t_1}^{t_2} u^*(\tau)d\tau$ e é fácil calcular $f'(0)$. Com um pequeno cálculo isto dá:

$$f'(0) = \lambda_1 dR(\gamma(t_1))_e(u_1(t_1) - u^*(t_1))$$

De onde fazendo as devidas substituições obtemos

$$\xi^{s\prime}(0) = dL(\prod_{t_2}^{T} u^*(\tau)d\tau)_{\gamma(t_2)} \circ dR(\gamma(t_1))_{\prod_{t_1}^{t_2} u^*(\tau)d\tau}(g'(0)) + v_{\pi(u_1,t_1,\lambda_1)}$$

só falta calcular $g'(0)$. Para isto fazemos novamente $g(\epsilon) = l(\epsilon).h(\epsilon)$ com $l(\epsilon) = \prod_{t_2-\lambda_2\epsilon}^{t_2} u_2(\tau)d\tau$ e $h(\epsilon) = \prod_{t_1}^{t_2-\lambda_2\epsilon} u^*(\tau)d\tau$.

Usando outra vez a relação (5.3) e utilizando a regra da cadeia obteremos

$$g'(0) = dR(h(0))_{l(0)}(l'(0)) + dL(l(0)_{h(0)}(h'(0))$$

com

$$l(0) = e \quad \text{e } h(0) = \prod_{t_1}^{t_2} u^*(\tau)d\tau$$

além disso

$$l'(0) = \lambda_2 u_2(t_2) \text{ e } dR(\gamma(t_1))_{\prod_{t_1}^{t_2} u^*(\tau)d\tau}(h'(0) = -\lambda_2 dR(\gamma(t_2))_e(u^*(t_2))$$

e substituindo convenientemente na fórmula (10.9) obtemos o resultado para $i = 2$.

Para o caso geral notemos que teremos outra vez

$$\xi^{s\prime}(0) = dL(\prod_{t_n}^{T} u^*(\tau)d\tau)_{\gamma(t_n)}(c'_{n-1}(0))$$

onde $c_{n-1}(\epsilon) = g(\epsilon)f(\epsilon)$ e:

$$g(\epsilon) = \prod_{t_n-\lambda_n\epsilon}^{t_n} u_n(\tau)d\tau \prod_{t_{n-1}}^{t_n-\lambda_n\epsilon} u^*(\tau)d\tau$$

e

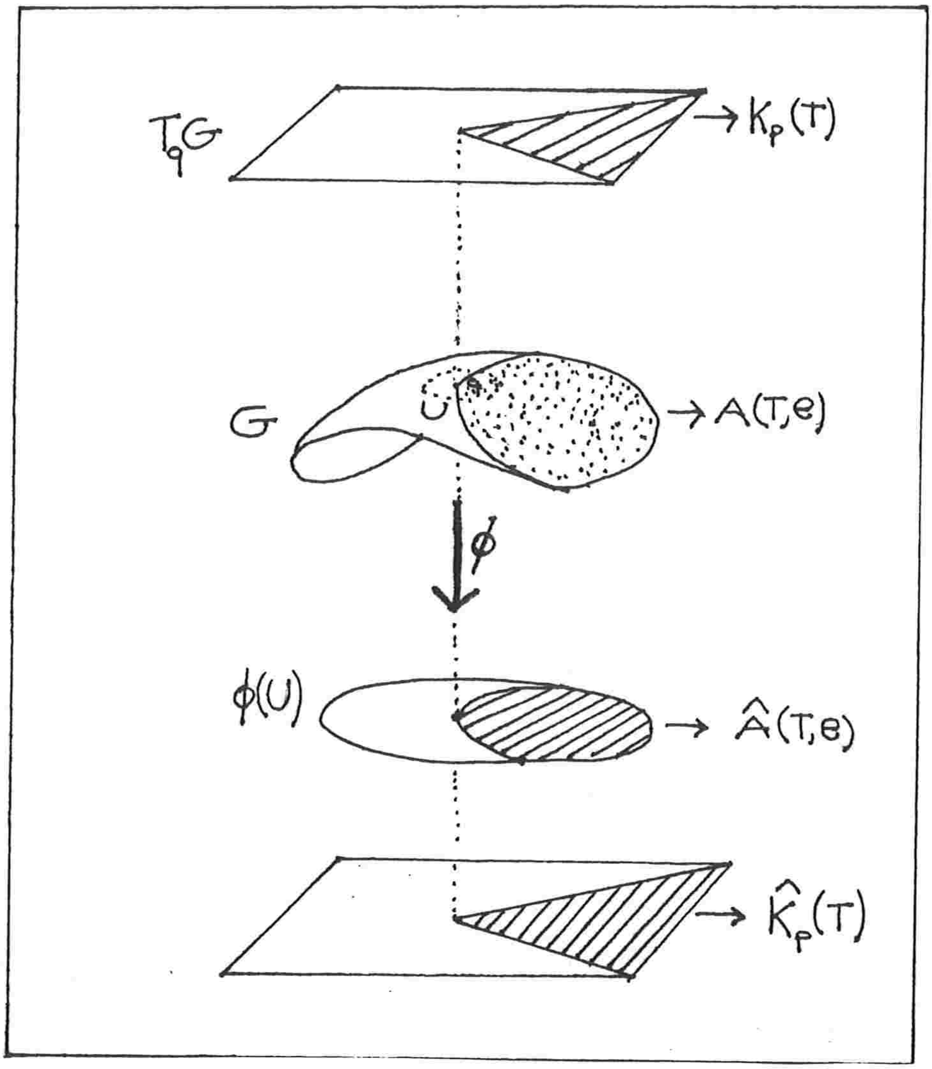
$$f(\epsilon) = \prod_{t_{n-1}-\lambda_{n-1}\epsilon}^{t_{n-1}} u_{n-1}(\tau)d\tau \cdots \prod_{0}^{t_1-\lambda_1\epsilon} u^*(\tau)d\tau$$

e segue-se o mesmo caminho dado que agora pela hipótese de indução conhecemos $f'(0)$. O que conclui a demonstração do lema 10.2 e, de passagem, mostra que os vetores de perturbação não elementares também estão em K_p.

Veremos agora como o cone de Pontriaguin,K_p, aproxima o conjunto de acessibilidade $A(T, e)$.

Vamos denotar por $q = \gamma(T)$, e tomemos (ϕ, U_q) uma carta em torno de q. Fixemos as seguintes notações:

$$\begin{aligned} \hat{q} &= \phi(q) \\ \hat{A}(T,e) &= \phi(A(T,e) \cap U_q) \\ \hat{K}_p(T) &= d\phi_q(K_p(T)) \\ \hat{\xi}(\epsilon) &= \phi(\xi(\epsilon)). \end{aligned}$$



onde $K_p(T)$ representa o cone de Pontriaguin no ponto $\gamma(T)$.

Notemos agora que $K_p = T_qG$ se e somente se $\hat{K}_p = T_{\hat{q}}\phi(U)$, dado que $d\phi_q$ é um isomorfismo de espaços vetoriais.

Seja $v \in K_p$ um vetor de perturbação não elementar. Então como vimos anteriormente podemos escrever

$$v = \sum_{i=1}^{n} v_{\pi(u_i,t_i,\lambda_i)} \tag{10.14}$$

para $u_i \in \Omega$.

Vamos supor que $u_i \neq u_j$ e $t_i \neq t_j$ se $i \neq j$. Neste caso o vetor v será obtido calculando-se a derivada da seguinte função no ponto zero:

$$\xi_v(T,\epsilon) = \prod_0^T u^\epsilon(\tau)d\tau$$

onde u^ϵ é dado pela relação (10.11). o que nos leva a obter

$$d\phi_q(\xi_v'(T,0)) = d\phi_q(v)$$

o que acarreta a seguinte igualdade

$$\lim_{\epsilon \to 0+} \frac{\hat{\xi}_v(T,\epsilon) - \hat{q}}{\epsilon} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \hat{v}_i.$$

onde $\hat{v}_i = d\phi_p(v_{\pi(u_i,t_i,\lambda_i)})$.

Esta última fórmula pode-se escrever

$$\hat{\xi}_v(T,\epsilon) = \hat{q} + \epsilon \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \hat{v}_i + o(\epsilon)$$

que chamaremos de fórmula fundamental das perturbações.

Esta fórmula mostra que para uma combinação linear de vetores de perturbações elementares com coeficientes positivos, fica definido um ponto $(\hat{q} + \epsilon \sum \lambda_i \hat{v}_i)$ que está em $\hat{A}(T,e)$ exceto por um erro $o(\epsilon)$, e que portanto o cone $\hat{K}_p$ serve como uma aproximação local do conjunto $\hat{A}(T,e)$ no ponto $\hat{q}$.

A demonstração de que se $\hat{K}_p = T_{\hat{q}}\phi(U)$ então q̂ é interior a $\hat{A}(T,e)$ segue de uma série de lemas topológicos e pode ser encontrada em [5] (lema 2.2 do capítulo 4 pp 251).

Portanto se $K_p = T_qG$ teremos como conseqüência que q será um ponto interior de $A(T,e)$ o que contraria a nossa hipótese de extremalidade.

Concluimos que se $\gamma(t)$ for extrema então existe $\omega \in T_q^*G$ tal que

$$<\omega, v>> 0 \quad \text{se } v \notin K_p$$

e

$$<\omega, v>\leq 0 \quad \text{se } v \in K_p$$

o que em particular acarreta, que para todo vetor de perturbação elementar

$$<\omega, dL(\prod_{t_1}^{T} u^*(\tau)d\tau)_{\gamma(t_1)}(dR(\gamma(t_1))_e(u_1(t_1) - u^*(t_1))) >\leq 0$$

Desta forma temos

$$< (dL(\prod_{t_1}^{T} u^*(\tau)d\tau))^*\omega, dR(\gamma(t_1))_e(u_1(t_1))) >\leq$$

$$\leq< (dL(\prod_{t_1}^{T} u^*(\tau)d\tau))^*\omega, dR(\gamma(t_1))_e(u^*(t_1))) >$$

basta agora notar que temos $(dL(\prod_{t_1}^{T} u^*(\tau)d\tau))^*\omega$ um levantamento hamiltoniano de $\gamma(t)$, e isto segue do lema 9.1. E assim concluimos a demonstração do teorema.

Note-se que pudemos enunciar o princípio do máximo utilizando a estrutura simplética canônica de T^*G e provamos a existência de uma trajetória não trivial de $\hat{\Sigma}$ satisfazendo uma certa propriedade de extremalidade.

Para transportarmos este teorema para o fibrado tangente TG precisaremos de uma estrutura simplética também em TG o que motivou o parágrafo seguinte.

§ 11 Dualidade entre TG e T^*G : Estudaremos a seguir uma forma de relacionar os fibrados tangente e cotangente tranportando ao primeiro a estrutura de variedade simplética. Colocando de outra forma procuraremos uma aplicação

$$S: TG \longrightarrow T^*G$$

que seja um isomorfismo de fibrados e além disso se $d\lambda$ for a forma simplética canônica em T^*G então $S^*d\lambda$ será uma 2 forma fechada não degenerada o que torna S um isomorfismo simplético.

Para isto, vamos adicionar uma estrutura a mais em G escolhendo no grupo uma métrica riemanniana invariante à esquerda,que denotaremos por $<,>$ e consideremos a aplicação

$$D: TG \longrightarrow T^*G$$

dada por

$$D(v) = < ., v > \in T^*G.$$

Esta aplicação é um homeomorfismo de fibrados pois obviamente preserva as fibras e

$$D(v_a + u_a) = < ., v_a + u_a > = < ., v_a > + < ., u_a > .$$

Vejamos algumas propriedades desta aplicação:

Lema 11.1 : Seja $V: G \longrightarrow TG$ um campo de vetores invariante à direita então :

$$D_* \circ \tilde{V} \circ D^{-1} = \hat{V}$$

(ou seja: este lema nos dá uma relação entre o levantamento tangente e o levantamento hamiltoniano de um campo de vetores invariante à direita).
dem. Seja $\phi_t: G \longrightarrow G$ o grupo a um parâmetro de V, pelo fato do campo ser invariante à direita então sabemos que

$$\phi_t = L(exp\ tv)$$

e como a métrica invariante é invariante à esquerda então ϕ_t são, na verdade, isometrias. Donde :

$$< \phi_{t_*}u, \phi_{t_*}v >=< u, v >$$

ou seja

$$< u, \phi_{t_*}v >=< \phi_{t_*}u, v >$$

ou

$$(D \circ \phi_{t_*}(v))(u) = D(v)(\phi_{-t_*}(u))$$

daí

$$D \circ \phi_{t_*}(v) = \phi_{-t}{}^* \circ D(v)$$

derivando dos dois lados para $t = 0$ obtemos:

$$D_* \circ \tilde{V}(v) = \hat{V} \circ D(v)$$

donde concluimos:

$$D_* \circ \tilde{V} \circ D^{-1} = \hat{V}$$

que demonstra o lema.

Deste resultado segue também que se $\gamma: \mathbf{R} \longrightarrow TG$ *é* uma trajetória de $\tilde{V}$ tal que $\gamma(0) = v$ então

$$D \circ \gamma: \mathbf{R} \longrightarrow T^*G$$

será uma trajetória de $\hat{V}$ tal que $D \circ \gamma(0) = D(v)$, ou seja a aplicação D leva trajetórias de $\tilde{V}$ em trajetórias de $\hat{V}$ e vice-versa.

Definição : Como D *é* um difeomorfismo podemos definir

$$\tilde{\lambda} = D^*\lambda \text{ e } (\lambda \text{ forma de Liouville})$$
$$\tilde{\omega} = D^*d\lambda$$

Estas serão formas diferenciáveis em TG e $\tilde{\omega}$ será fechada e não degenerada dando a TG uma estrutura de variedade simplética. Com esta estrutura simplética D *é*, por construção, um difeomorfismo simplético entre $(TG, \tilde{\omega})$ e (TG, ω).

Sejam novamente $V: G \longrightarrow TG$ campo de vetores em G, $\hat{V}$ seu levantamento hamiltoniano em T^*G e $\tilde{V}$ o levantamento em TG e seja H a função hamiltoniana de $\hat{V}$ temos os seguintes lemas

Lema 11.2 : A função $\tilde{H} = H \circ D: TG \longrightarrow \mathbb{R}$ *é* uma integral primeira do campo $\tilde{V}$.

dem. Seja $\alpha(t)$ uma trajetória de $\hat{V}$ então

$$\tilde{H}(\alpha(t)) = H \circ D \circ \alpha(t)$$

e como $D \circ \alpha(t)$ *é* uma trajetória de $\hat{V}$ pelo lema anterior, temos que

$$\tilde{H}(\alpha(t)) = cte$$

já que H *é* uma integral primeira de $\hat{V}$.

Lema 11.3 : $\tilde{H}$ *é* a função hamiltoniana de $\tilde{V}$.

dem. Lembramos que

$$i_{\tilde{V}}\tilde{\omega}(w) = \tilde{\omega}(\tilde{V}, w) = D^*\omega(\tilde{V}, w_1)$$

e

$$D^*\omega(\tilde{V}, w) = \omega(D_*\tilde{V}D^{-1}, D_*w) = \omega(\hat{V}, w_1)$$

mas

$$\begin{aligned} \omega(\hat{V}, w_1) &= -dH(w_1) \\ &= -dH(D_*w) \\ &= -d(H \circ D)(w) \end{aligned}$$

Assim $\tilde{V}$ *é* um campo hamiltoniano cuja hamiltoniana é $\tilde{H} = i_{\tilde{V}}\tilde{\lambda}$.

Veremos que nossa transformação D *é*, na verdade, a transformação de Legendre relativa à métrica $<,>$.

Seja $T: TG \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função. Vamos começar definindo o que seria a derivada vertical de T.

Denotemos por $T_a: T_aG \longrightarrow \mathbf{R}$ a restrição de T à fibra $\pi^{-1}(a)$. Já que T_a é um espaço vetorial então dado um ponto $v_a \in TG$ tal que $\pi(v_a) = a$ temos que

$$T_{a*v_a} = dT_a(v_a)$$

é uma aplicação linear de T_aG em $\mathbf{R}$.

Assim a aplicação dada por

$$FT(w) = dT_{\pi(w)}(w)$$

está bem definida e é chamada derivada fíbrica de T.

Se $T(v) = \frac{1}{2} < v, v >$ então temos a igualdade

$$FT(v_a) = D(v_a).$$

De fato, temos que

$$T|_{\pi^{-1}(a)} = T_a = \frac{1}{2} < v, v >_a$$

é uma forma quadrática definida em T_aG portanto sua derivada é

$$\begin{aligned} DT_a(v_a)(w_a) &= \frac{1}{2} < w_a, v_a > + \frac{1}{2} < w_a, v_a > \\ &= < w_a, v_a > \end{aligned}$$

donde concluimos o resultado.

O que também mostra ser D a transformação de Legendre associada ao sistema mecânico $(G, T, 0)$, isto é, o sistema mecânico cuja energia cinética é dada por T e cuja energia potencial é 0. (cf. Godbillion [3])

§ 12 O Princípio do Máximo no Fibrado Tangente: A idéia deste parágrafo é dar um enunciado do princípio do máximo de Pontriaguin no fibrado tangente e tirar algumas relações adicionais levando em consideração a estrutura de grupo de TG e a integral multiplicativa que pode ser definida neste grupo.

Vimos no parágrafo anterior que através de uma métrica invariante à esquerda existe, pela função D, uma relação biunívuca entre trajetórias de um campo $\hat{X}$ e trajetórias de um campo em TG, $\tilde{X}$, se X for um campo invariante à direta em G.

Analogamente para o sistema de controle Σ invariante à direita obtemos o lema

Lema 12.1 Seja Σ um sistema de controle invariante à direita, $\hat{\Sigma}$ e $\tilde{\Sigma}$ respectivamente os levantamentos hamiltonianos e tangente; $<,>$ uma métrica riemanniana invariante à esquerda do grupo G e $D: TG \longrightarrow T^*G$ definida como no parágrafo anterior. Fixemos $u \in \Omega$ um controle admissível. Então $\tilde{\gamma}$ *é* uma trajetória de $\tilde{\Sigma}$ associado ao controle u se, e somente se, $D \circ \tilde{\gamma}$ *é* uma trajetória de $\hat{\Sigma}$ associado a u.

dem. Seja $\tilde{\gamma}: [0,T] \longrightarrow TG$ uma trajetória de $\tilde{\Sigma}$ associada a u e consideremos $D \circ \tilde{\gamma}: [0,T] \longrightarrow T^*G$, então derivando com relação ao tempo obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{d\,(D \circ \tilde{\gamma}(t))}{dt} &= D_* \dot{\tilde{\gamma}}(t) \\ &= D_*(\tilde{X}_{u(t)}(\tilde{\gamma}(t)))\end{aligned}$$

onde $\tilde{X}_{u(t)}$ *é* o levantamento tangente de $X_{u(t)}$.

Então podemos escrever

$$\frac{d\,(D \circ \tilde{\gamma}(t))}{dt} = D_* \circ \tilde{X}_{u(t)} \circ (D^{-1} \circ D \circ \tilde{\gamma}(t))$$

agora usando o lema 11.1 temos

$$\frac{d\,(D \circ \tilde{\gamma}(t))}{dt} = \hat{X}_{u(t)} \circ (D \circ \tilde{\gamma}(t))$$

portanto $D \circ \tilde{\gamma}(t)$ *é* uma trajetória de $\hat{\Sigma}$.

Reciprocamente, se $\hat{\gamma}(t)$ é uma trajetória de $\hat{\Sigma}$ associada a u então consideremos $D^{-1} \circ \hat{\gamma}: [0,T] \longrightarrow TG$ e mostremos que é uma trajetória de $\tilde{\Sigma}$.

De fato, derivando com relação a t obtemos

$$\frac{d\left(D^{-1} \circ \hat{\gamma}(t)\right)}{dt} = D_*^{-1} \circ \dot{\hat{\gamma}}(t) = D_*^{-1} \circ \hat{X}_{u(t)} \circ \hat{\gamma}(t)$$

usando novamente o lema 11.1 temos

$$\frac{d\left(D^{-1} \circ \hat{\gamma}(t)\right)}{dt} = D_*^{-1} \circ D_* \circ \tilde{X}_{u(t)} \circ \left(D^{-1} \circ \hat{\gamma}(t)\right)$$

donde se conclui que $D^{-1} \circ \hat{\gamma}$ é uma trajetória de $\tilde{\Sigma}$ associada a u, o que mostra o lema.

Portanto temos também uma relação biunívoca entre as trajetórias de $\tilde{\Sigma}$ associadas a u e as trajetórias de $\hat{\Sigma}$ associadas ao mesmo controle u.

Conseguimos assim demonstrar o seguinte corolário:

Corolário 12.2 Seja $\gamma: [0,T] \longrightarrow G$ uma trajetória extrema de Σ associada ao controle $\bar{u} \in \Omega$, então existe uma trajetória $v: [0,T] \longrightarrow TG$ de $\tilde{\Sigma}$ associada ao controle $\bar{u}$ e diferente de zero tal que para todo $t \in [0,T]$ e $u_1 \in \Omega$ teremos satisfeita a condição de máximo:

$$< v(t), X_{u(t)}(\gamma(t)) > \geq < v(t), X_{u_1(t)}(\gamma(t) > \tag{12.1}$$

Observação Lembramos que neste caso $<,>$ é a métrica invariante à esquerda. Usaremos indistintamente $<,>$ para a métrica riemanniana e para a avaliação de 1-formas, a diferença fica clara pela natureza dos elementos que aparecem dentro do símbolo.

dem. : Pelo teorema 10.1 existe um trajetória $\lambda: [0,T] \longrightarrow T^*G$ de $\hat{\Sigma}$ associado a u e não trivial tal que para todo $t \in [0,T]$ e $u_1 \in \Omega$ temos

$$< \lambda(t), X_{u(t)}(\gamma(t)) > \geq < \lambda(t), X_{u_1(t)}(\gamma(t)) >$$

tomemos $v(t) = D^{-1}(\lambda(t))$, então pelo lema anterior $v(t)$ é uma trajetória de $\tilde{\Sigma}$ diferente de zero e associado a u e que satisfaz portanto:

$$D(v(t))(X_{u(t)}(\gamma(t))) \geq D(v(t))(X_{u_1(t)}(\gamma(t)))$$

e pela definição da função D obtemos:

$$< X_{u(t)}(\gamma(t)), v(t) > \geq < X_{u_1(t)}(\gamma(t)), v(t) >$$

o que conclui a demonstração do corolário.

Vimos, na demonstração do princípio do máximo, que $\lambda(t)$ é obtida por uma fórmula:

$$\lambda(t) = (dL(\prod_0^t \bar{u}(\tau)d\tau))^{*^{-1}} \tag{12.2}$$

Veja a fórmula (10.22). Onde

$$\omega_1 = (dL(\prod_0^t \bar{u}(\tau)d\tau))^{*}\omega \tag{12.3}$$

e ω é uma forma de $T\gamma(t)^*(G)$ tal que $\omega \leq 0$ se $u \in K_p$.

Assim $v(t)$ é a trajetória de $\tilde{\Sigma}$ que no instante $t = 0$ passa pelo ponto $D^{-1}(\omega_1)$ e temos

$$v(t) = dL(\prod_0^t \bar{u}(\tau)d\tau))_* \circ D^{-1}(\omega_1) \tag{12.4}$$

fórmula que também pode ser facilmente vista pelas relações:

$$D(v(t)) = (dL(\prod_0^t \bar{u}(\tau)d\tau))^{*^{-1}}\omega_1$$

donde, por isso:

$$D(v(t))(v) = < \omega_1, (dL(\prod_0^t \bar{u}(\tau)d\tau)))_*^{-1}v >$$

levando em consideração novamente a definição de D teremos:

$$D(v(t))(v) = < D^{-1}\omega_1, (dL(\prod_0^t \bar{u}(\tau)d\tau)))_*^{-1}v >$$

e pela invariança à esquerda da métrica riemanniana $< .,. >$ teremos finalmente

$$D(v(t))(v) = < dL(\prod_0^t \bar{u}(\tau)d\tau))D^{-1}\omega_1, v >$$

o que resulta na fórmula (12.4).

Lembremos agora que o sistema de controle $\tilde{\Sigma}$ *é* um sistema invariante à direita (lema 5.3) cujo espaço de configuração é o grupo de Lie TG isomorfo ao produto semi-direto $L(G) \times_{Ad} G$ (parágrafo 5) pelo isomorfismo Θ e cujo conjunto de controles admissíveis é o mesmo de Σ.

Seja $u \in U$,então o grupo a um parâmetro de G associado ao campo X_u será dado por :

$$\phi_t = L(exp\ tu)$$

e portanto pode ser escrito como:

$$u = \frac{d\ \phi_t(e)}{dt}|_{t=0}$$

e

$$X_u(g) = dR(g)_e(u).$$

Da mesma forma o grupo a um parâmetro em TG associado ao campo $\tilde{X}_u$ por definição é:

$$\phi_{t_*} = dL(exp\ tu) : TG \longrightarrow TG.$$

Consideremos o grupo a um parâmetro em $L(G) \times_{Ad} G$ dado pela composição comutativa

$$\begin{array}{ccc} TG & \xrightarrow{dL(exp\ tu)} & TG \\ \uparrow \Theta^{-1} & & \downarrow \Theta \\ L(G) \times_{Ad} G & \xrightarrow{\Psi_t} & L(G) \times_{Ad} G \end{array}$$

que define um grupo a um parâmetro associado a um campo invariante à direita em $L(G) \times_{Ad} G$ dado ser Θ um isomorfismo de grupos de Lie.

Calculando:

$$\Psi_t(0,e) = \Theta(dL(exp\ tu))0_e = (0, exp\ tu)$$

e portanto

$$\frac{d\,\Psi_t(0,e)}{dt}\Big|_{t=0} = (0,u) \in L(G) \times L(G) = L(L(G) \times_{Ad} G)$$

portanto temos que

$$\Theta_* \circ X_u(v,g) = d\tilde{R}(v,g)_{(0,e)}(0,u) \tag{12.5}$$

onde representamos por $\tilde{R}$ a translação à direita em $L(L(G) \times_{Ad} G$.

Então o sistema $\Theta^* \circ \tilde{\Sigma} = (L(L(G) \times_{Ad} G, \Theta^* \circ \tilde{X}_u, \tilde{U}, \tilde{V})$, onde $\tilde{V}$ *é* a classe das funções

$$\tilde{u}: [0,T] \longrightarrow L(G) \times L(G)$$

tais que $\tilde{u}(t) = (0, u(t))$ para algum $u \in \Omega$ *é* um sistema invariante à direita e a equação de evolução é dada pela fórmula:

$$\dot{x} = d\tilde{R}(x)_{(0,e)}(\tilde{u}(t)) \tag{12.6}$$

onde $\tilde{R}$ *é* a translação à direita em $L(L(G) \times_{Ad} G)$ e portanto as trajetórias do sistema de controle (12.6) são dadas pela integral multiplicativa em $L(L(G) \times_{Ad} G) \cong TG$. Se a trajetória se inicia num ponto $v \in L(G) \times G$ teremos:

$$x(t) = (\prod_0^t \tilde{u}(\tau)d\tau)v. \tag{12.7}$$

Da fórmula (12.4) podemos concluir que:

$$\begin{aligned}\Theta(v(t)) &= \Theta(dL(\prod_0^t \tilde{u}(\tau)d\tau)(D^{-1}(\omega_1))) \\ &= (\prod_0^t \tilde{u}(\tau)d\tau))(\Theta \circ D^{-1}(\omega))\end{aligned} \tag{12.8}$$

onde o produto no segundo membro é o produto semi-direto e $\tilde{u}(t) = (0, u(t))$.

Ou, levando em consideração a definição de Θ do parǵrafo 5 temos:

$$\Theta(v(t)) = (Ad_{\prod_0^t \tilde{u}(\tau)d\tau}(D^{-1}(\omega_1)), \prod_0^t \tilde{u}(\tau)d\tau)$$
$$= (\prod_0^t \tilde{u}(\tau)d\tau))(D^{-1}(\omega, e)) \qquad (12.9)$$

que é uma fórmula para o cálculo de $v(t)$.

§ 13 O Princípio do Máximo e o Problema de Tempo Ótimo :

O problema do tempo ótimo foi definido no parágrafo 4 (cf. Teorema 4.3). Daremos uma breve colocação do problema que para nós será o seguinte:

Denotaremos por $A(e) = \bigcup_{t\in[0,\infty)}$ e chamemo-lo o conjunto de acessibilidade a partir de e do sistema Σ e seja g um ponto de $A(e)$. Consideremos agora o conjunto:

$$S_g = \{t \in \mathbf{R} \mid g \in A(t,e)\}.$$

Chamemos $\bar{t} = \inf S_g$. Eventualmente $\bar{t} \in S_g$ neste caso $g \in A(\bar{t}, e)$ e portanto existe um controle admissível $\bar{u}$: $[0,\bar{t}] \longrightarrow U$ e uma trajetória de Σ associada a u dada por

$$\bar{\gamma}(t) = \prod_0^t \bar{u}(\tau)d\tau$$

tal que $\bar{\gamma}(0) = e$ e $\bar{\gamma}(\bar{t}) = g$.

Definição : Chamemos $\bar{u}$ de controle de tempo ótimo e $\bar{\gamma}$ de trajetória de tempo ótimo.

Observemos que o controle de tempo ótimo pode não existir, e se existir não precisa ser único. Uma condição de suficiência para a existência de controle ótimo é aquela dada pelo teorema 4.3.

Notem que uma outra maneira de definir o problema de controle ótimo é a seguinte:

Encontrar um controle $\bar{u}$ e a trajetória $\bar{\gamma}$ associada a este controle tal que:

$$\bar{\gamma}(0) = e, \quad \bar{\gamma}(\bar{t}) = g$$

e além disso seja minimizado o funcional:

$$F(\bar{\gamma}, \bar{u}) = \int_0^{t_\gamma} 1 d\tau.$$

Para estudarmos este problema do ponto de vista do princípio do máximo de Pontriaguin, lembremos que a equação de evolução do nosso sistema de controle invariante à direita dado por $\Sigma = (G, \Phi, U, \Omega)$ é dada pela equação diferencial

$$\dot{x} = dR(x)_e(u)$$

onde $dR(x)_e(u) \in \Omega$. Consideremos agora um sistema de controle Σ^e, que chamaremos de sistema extendido do sistema Σ que definimos como:

$$\Sigma^e = (G^e, \Phi^e, U, \Omega) \tag{13.1}$$

onde G^e *é* o produto direto dos grupos G e $\mathbf{R}$, ou seja $G^e = G \times \mathbf{R}$. Então o fibrado tangente $TG^e \cong TG \times T\mathbf{R} \cong TG \times R$.

Se $\Phi = \{X_u\}_{u \in U}$ então $\Phi^e = \{(X_u, 1)\}_{u \in U}$. Naturalmente, $(X_u, 1)$ *é* um campo de vetores em G^e, ainda mais, como X_u e invariante à direita em G então $(X_u, 1)$ também é invariante à direita em G^e.

De fato, em $\mathbf{R}$ com a estrutura de grupo abeliano a translação à direita é dada por $R(x)y = y + x$ e dai segue imediatamente que $dR(x)_0 = id_{\mathbf{R}}$ para todo $x \in \mathbf{R}$.

Assim nosso sistema Σ^e *é* um sistema de controle invariante à direita e, portanto, podemos escrever sua equação de evolução associada ao controle $u \in \Omega$ como

$$\dot{y} = dR(y)_{e'}(u(t)) \tag{13.2}$$

onde $y \in G^e$, R aqui é a translação à direita do grupo G^e cujo elemento identidade é e' e $u(t)$ estando na verdade em $L(G)$ pode ser pensado como o elemento $(u(t), 1)$ da álgebra de Lie $L(G^e)$ já que $L(G^e) = L(G) \times L(\mathbf{R})$.

Notem agora que o nosso problema de controle de tempo ótimo pode ser reformulado da seguinte forma:

Encontrar um controle $\bar{u} \in \Omega$ e uma trajetória γ^e do sistema (13.1) que parta da identidade $(e, 0)$ de G^e e atinja o conjunto $g \times [0, \infty)$ de tal modo que minimize a segunda projeção, P_2, de G^e.

$$\begin{aligned} P_2 \colon G^e &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (g, t) &\longmapsto t \end{aligned}$$

Reescrevemos a equação (13.2) separadamente para tornar mais clara algumas afirmações, ela é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} \dot{x} &= dR(x)_e(u(t)) \\ \dot{y} &= 1 \end{cases} \tag{13.3}$$

notem que a segunda equação do sistema (13.3) não utiliza nenhum controle e a primeira não depende de y, então concluimos de modo óbvio que

$$A^e(t,e') = A(t,e) \times t$$

onde denotamos por $A^e(t,e')$ o conjunto de acessibilidade de Σ^e em tempo t a partir de e' e $A(t,e)$ o análogo para o sistema Σ.

Desta forma se $\bar{u}$ *é* um controle de tempo ótimo e γ^e *é* a trajetória de Σ^e associada a $\bar{u}$, então as observações feitas até aqui nos permitem concluir que γ^e também é uma trajetória extrema. De fato, $A^e(t,e')$ não tem nenhum ponto interior (todos estão na fronteira).

Observando isto, é natural que possamos utilizar o teorema 10.1 para a trajetória γ^e, isto é, como γ^e *é* extrema, então é de momento máximo, mas também é natural esperar que esta afirmação não diga nada especial já que, na verdade, toda trajetória de Σ^e *é* de momento máximo.

Pelo teorema 10.1 sabemos que existe λ^e trajetória não trivial associada a $\bar{u}$ do sistema $\hat{\Sigma}^e$ tal que para todo t e todo $u_1 \in \Omega$ temos a relação:

$$< \lambda^e(t), (X_{u(t)}(\bar{\gamma}(t)), 1) > \geq < \lambda^e(t), (X_{u_1(t)}(\bar{\gamma}(t)), 1) >,$$

Mas $\lambda^e(t) = (\lambda(t), c)$ onde $\lambda(t)$ *é* uma trajetória adjunta de $\gamma(t)$ do sistema Σ e c é uma constante (para ver isto basta, por exemplo, a forma local do levantamento hamiltoniano) e como para $\lambda^e(t)$ não ser trivial basta que c seja diferente de zero (e no caso é) então a desigualdade acima não passa de uma relação trivial.

No entanto o próximo lema já oferece algum subsídio para uma propriedade das trajetórias de tempo ótimo.

Lema 13.1 Se $\bar{u}$ *é* um controle de tempo ótimo do sistema Σ e se γ *é* a trajetória de Σ^e associada ao controle $\bar{u}$ então $\gamma^e(t)$ está na fronteira de $A^e(e')$ para todo $t \in [0,\bar{t}]$.

dem. : Se existir um t_1 para o qual $\gamma^e(t_1)$ está no interior de $A(e)$, então existe uma vizinhança de $\gamma^e(t) = (\bar{\gamma}(t_1), t_1)$ da forma $W \times J$, onde W *é* uma vizinhança de $\bar{\gamma}(t_1)$ em G e J uma vizinhança de t_1 em $\mathbb{R}$, tal que $W \times J \subset A^e(e')$. Em particular , existe um $\epsilon > 0$ tal que $(\bar{\gamma}(t_1), t_1 - \epsilon) \in A^e(e')$ e isto, de maneira clara, significa que $\bar{\gamma}(t_1)$ pode ser atingido em tempo $t_1 - \epsilon$ por um controle $u_0 \in \Omega$ (Basta notar que $(\bar{\gamma}(t_1), t_1 - \epsilon) \in A^e(t_1 - \epsilon, e') = A(t_1 - \epsilon, e) \times \{t_1 - \epsilon\}$ donde $\bar{\gamma}(t_1) \in A(t_1 - \epsilon, e)$.

Agora utilizando o controle definido por

$$u^*(t) = \begin{cases} u_0(t) & \text{se } 0 \leq t \leq t_1 - \epsilon \\ \bar{u}(t+\epsilon) & \text{se } t_1 - \epsilon \leq t \leq \bar{t} - \epsilon \end{cases}.$$

Vemos que a solução γ^* de Σ associada a u^* satisfaz γ^* e $\gamma^*(\bar{t}-\epsilon) = \bar{\gamma}(\bar{t})$ o que contraria o fato de $\bar{\gamma}$ ser de tempo ótimo, logo $\gamma^e(t_1)$ está na fronteira de $A^e(e')$ como queriamos demonstrar.

Antes de prosseguirmos daremos um pequeno lema. O teorema 10.1 nos diz que se uma trajetória $\bar{\gamma}$ associada ao controle $\bar{u}$ *é* extrema então existe uma trjetória λ de $\hat{\Sigma}$ associada a $\bar{u}$ e satisfazendo:

$$M_{X_{\bar{u}(t)}}(\lambda(t)) \geq M_{X_{u(t)}}(\lambda(t)) \quad \forall t \in [0, T] \; e \; \forall u \in \Omega.$$

Lema 13.2 Neste caso $M_{X_{\bar{u}(t)}}(\lambda(t)) \colon [0, T] \longrightarrow \mathbf{R}$ *é* constante.

dem. : Tomemos uma carta $(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$ em T^*G em torno de um $\lambda(\tau)$ para algum $\tau \in (0, T)$, vamos mostrar que numa vizinhança de τ a derivada de $m(t) = M_{X_{\bar{u}(t)}}(\lambda(t))$ se anula.

Vamos supor que nestas coordenadas temos:

$$X_{\bar{u}(t)} = \sum_{i=1}^{n} f_i(q(t), \bar{u}(t)) \frac{\partial}{\partial q_i} \quad e$$

$$\lambda(t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t) dq_i.$$

Neste caso temos $M_{X_{\bar{u}(t)}}(\lambda(t)) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t) f_i(q(t), \bar{u}(t))$.

Se definirmos $H(\eta, q, u) = \sum_i^n \eta_i f_i(q, u)$ então claramente temos:

$$M_{X_{\bar{u}(t)}}(\lambda(t)) = H(\lambda(t), q(t), \bar{u}(t))$$

e sabemos pelo princípio do máximo que

$$H(\lambda(t), q(t), \bar{u}(t)) = \max_{u \in \Omega} H(\lambda(t), q(t), u).$$

Sabemos também que em coordenadas locais as equações de evolução do levantamento hamiltoniano ficam:

$$\begin{cases} \dot{q}_i & = f_i(q_i(t), u(t)) \\ \dot{\lambda}_i & = -\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \frac{\partial f_j(q_i(t), u(t))}{\partial q_i} \end{cases}$$

ou, levando em consideração a definição de H

$$\begin{cases} \dot{q}_i & = \frac{\partial H(\lambda(t), q(t), u(t))}{\partial p_i} \\ \dot{\lambda}_i & = -\frac{\partial H(\lambda(t), q(t), u(t))}{\partial q_i} \end{cases}$$

Neste caso fixemos um t_1 na vizinhança de τ onde $m(t)$ seja derivável ($m(t)$ *é* absolutamente contínua) e tomemos um t' tal que $t' > t_1$ então

$$\begin{aligned} m(t) - m(t') &\geq H(\lambda(t'), q(t'), \bar{u}(t_1)) - H(\lambda(t_1), q(t_1), \bar{u}(t_1)) \\ &= H(\lambda(t'), q(t'), \bar{u}(t_1)) - H(\lambda(t'), q(t_1), \bar{u}(t_1)) + \\ &+ H(\lambda(t'), q(t_1), \bar{u}(t_1)) - H(\lambda(t_1), q(t_1), \bar{u}(t_1)) \end{aligned}$$

dividindo ambos os lados por $t' - t_1$ e passando ao limite quando t' tende a t_1 obtemos

$$\frac{d\, m(t)}{dt}\Big|_{t=t_1} \geq \left(\frac{\partial H\ \dot{q}_i}{\partial q_i} + \frac{\partial H\ \dot{\lambda}_i}{\partial p_i}\right)\Big|_{t=t_1} = 0$$

pois

$$\frac{\partial H\ \dot{q}_i}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial q_i} f_i$$

e

$$\frac{\partial H\ \dot{\lambda}_i}{\partial p_i} = f_i(-\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial q_i}$$

donde $\frac{d\, m(t)}{dt} \geq 0$.

Para concluirmos o resultado basta agora tomar um $t' < t_1$ e repetirmos o processo concluindo então que

$$\left.\frac{d\,m(t)}{dt}\right|_{t=t_1} \leq 0$$

e portanto $\frac{d\,m(t)}{dt} = 0$ o que acarreta $m(t) =$ constante e prova o lema.

Agora em cada ponto $t \in [0,T]$ podemos definir o cone de Pontriaguin $K_p(t)$ como sendo o fecho convexo dos vetores do tipo $v_{\pi(u_1,t_1,\lambda_1)}$ onde

$$v_{\pi(u_1,t_1,\lambda)}(t) = \left.\frac{d\,\xi(t,\epsilon)}{d\xi}\right|_{\epsilon=0}$$

e

$$\xi(t,\epsilon) = \prod_0^t u^*_{\pi(u_1,t_1,\lambda_1,\epsilon)}(\tau)d\tau\ .$$

com $u^*_\pi(t)v$ o controle de perturbação de $\bar{u}(t)$.

Vimos acima que K_p *é* um cone que nos serve pouco para o problema do controle de tempo ótimo porque K_p será um cone que aproxima $A(T,e)$ e no caso do sistema Σ^e $A(T,e)$ não tem pontos interiores. A idéia então é procurar um outro cone que ao invés de aproximar $A(T,e)$ aproxime $A(e)$.

Juntemos ao cone $K_p(\tau)$ para $\tau \in (0,T)$ os vetores

$$v_+(\tau) = dR(\gamma(\tau))_e(\bar{u}(\tau))$$

e

$$v_-(\tau) = -dR(\gamma(\tau))_e(\bar{u}(\tau))$$

$\gamma(t)$ trajetória extrema associada a $\bar{u} \in \Omega$ e denotemos por por $K_A(\tau)$ o cone convexo gerado por $K_p(\tau) \cup \{v_+(\tau)\} \cup \{v_-(\tau)\}$.

Consideremos agora um elemento de K_A da forma

$$v(\tau) = v_\pi(\tau) + av_+(\tau)$$

onde $v_\pi(\tau)$ *é* o vetor de perturbação associado ao controle u^*_π, então para um ϵ suficintemente pequeno podemos escrever:

$$\xi(\tau+\epsilon a,\epsilon) = \prod_\tau^{\tau+\epsilon a} \bar{u}(t)dt \prod_0^\tau u^*_\pi(t)dt$$

ou seja

$$\xi(\tau+\epsilon a,\epsilon)=\prod_{\tau}^{\tau+\epsilon a}\bar{u}(t)dt\xi(\tau,\epsilon)$$

derivando com respeito a ϵ obtemos:

$$\left.\frac{d\ \xi(\tau+\epsilon a,\epsilon)}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0}=dR(\gamma(\tau))_\epsilon(\beta'(0))+\left.\frac{d\ \xi(\tau,\epsilon)}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0}$$

onde $\beta(\epsilon)=\prod_{\tau}^{\tau+\epsilon}\bar{u}(\tau)d\tau$, então

$$\left.\frac{d\ \xi(\tau+\epsilon a,\epsilon)}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0}=adR(\gamma(\tau))_\epsilon(\bar{u}(\tau))+av_\pi(\tau) \tag{13.4}$$

não é díficil notar que $\xi(\tau+\epsilon a,\epsilon)$ *é* uma curva em $A(e)$ e no ponto zero vale $\gamma(\tau)$.

Para o caso em que $a<0$ obtemos:

$$\xi(\tau+\epsilon a,\epsilon)\prod_{0}^{\tau+\epsilon a}u_\pi^*=(\prod_{\tau+\epsilon a}^{\tau}\bar{u}(t)dt)^{-1}\prod_{0}^{\tau}u_\pi^*(t)dt$$

e derivando novamente temos que:

$$\left.\frac{d\ \xi(\tau+\epsilon a,\epsilon)}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0}=av_\pi(\tau)+av_+(\tau)=av_\pi(\tau)-av_-(\tau)$$

portanto este cone K_A será um cone que aproxima o conjunto $A(e)$ no ponto $\gamma(\tau)$ no sentido que ele satisfaz as mesmas fórmulas de perturbações fundamentais do parágrafo 10.

Voltemos a considerar agora o sistema Σ^e seja γ^e uma trajetória associada ao controle $\bar{u}$ de tempo ótimo.

Seja (U,ϕ) uma carta local em torno de $\gamma^e(\tau)$, τ um ponto interior de $[0,T]$ e coloquemos as seguintes definições de notação:

$$\begin{gathered}\hat{K}_A(\tau)=\phi(K_A(\tau))\\ \hat{\gamma}^e(\tau)=\phi(\gamma^e(\tau))\\ \hat{A}(e')=\phi(U\cap A(e'))\\ \hat{U}=\phi(U)\\ \hat{\xi}(t,\epsilon)=\phi(\xi(t,\epsilon)).\end{gathered}$$

Então começamos observando que se v for um vetor de $K_A(\tau)$ então existe uma curva $\hat{\xi}(t,\epsilon)$ tal que $\frac{d\,\hat{\xi}(\tau+\epsilon a,\epsilon)}{d\epsilon} = v(\tau)$ e portanto:

$$\xi(\tau+\epsilon a,\epsilon) = \hat{\gamma}^e(\tau) + \epsilon v(\tau) + o(\epsilon)$$

e outra vez usando um lema de [5] (lema 2 da pag. 253) teremos que se $v(\tau)$ é interior a $\hat{K}_A(\tau)$ então existe um $l > 0$ tal que se $\epsilon < l$ então $\hat{\gamma}^e(\tau) + \epsilon v(\tau)$ é um ponto interior de $A(e')$.

Desta forma o vetor $(0,-1)$ de $T_{\gamma(\tau)}G^e = T_{\gamma(\tau)}G \times \mathbf{R}$ não pode ser interior a K_A pois desta forma $\hat{\gamma}^e(\tau) + \epsilon(0,-1)$ seria interior a $A^e(e')$ para algum ϵ o que significa que $(\gamma(\tau),\tau) + (0,-\epsilon) = (\gamma(\tau), \tau-\epsilon) \in A^e(e')$ o que já vimos pelo lema 13.1 que não pode ocorrer

Assim existe uma forma não nula η^e em $T_{\gamma(\tau)}G^e$ tal que $<\eta^e, v>\leq 0$ se $v \in K_A(\tau)$ e $<\eta^e, v>> 0$ se $v \notin K_A(\tau)$.

Seja $\eta^e(t)$ a trajetória de $\hat{\Sigma}^e$ tal que $\eta(\tau) = \eta^e$ encontrada acima, então pelo lema 13.2 temos

$$<\eta^e(t), dR(\gamma^e(t))_e(\bar{u}(t))> \text{ é constante}$$

e por outro lado

$$<\eta^e(t), dR(\gamma^e(t))_e(\bar{u}(t))>=<\eta^e(\tau), v_+(\tau)>\leq 0$$

$$<\eta^e(t), -dR(\gamma^e(t))_e(\bar{u}(t))>=<\eta^e(\tau), v_-(\tau)>\leq 0$$

implicam que

$$<\eta^e(t), dR(\gamma^e(t))_e(\bar{u}(t))>= 0$$

como podemos escrever $\eta^e(t) = (\lambda(t), c)$ onde $\lambda(t) \in T^*_{\gamma(t)}G$ e c uma constante menor que zero (pois $<c,-1>> 0$ o que implica $c < 0$). A relação do Pricípio do máximo de Pontriaguin mostra que devemos ter:

$$<\lambda(t), dR(\gamma(t))_e(\bar{u}(t))> +c \geq <\lambda(t), dR(\gamma(t))_e(u_1(t))> +c \qquad (13.5)$$

para todo $t \in [0,T]$ e todo $u_1 \in \Omega$.

Assim mostramos o teorema

Teorema 13.3 Seja Σ um sistema de controle invariante à direita e seja $\gamma\colon [0,T] \longrightarrow G$ uma trajetória de Σ tal que $\gamma(0) = e$ e associada a um controle de tempo ótimo $\bar{u}\colon [0,T] \longrightarrow U$ então existe uma trajetória não nula λ_1 do levantamento hamiltoniano $\hat{\Sigma}$ associado ao controle $\bar{u}$ e uma constante positiva ρ tal que para todo $t \in [0,T]$ e todo $u \in \Omega$ temos que

$$\rho = M_{X_{\bar{u}(t)}}(\lambda(t)) \geq M_{X_{u(t)}}(\lambda(t)) \tag{13.6}$$

dem. : De toda a argumentção acima e da fórmula (13.5) temos que $\rho = -c$.

Para notarmos que $\lambda(t)$ não é nula basta ver que se $\lambda(t) = 0$ então $\rho = 0$ pela fórmula (13.6) donde teríamos $(\lambda(t), c) = 0$, mas sabemos que $(\lambda(t), c) = \eta^e(t)$ *é* não trivial.

Isto conclui a demonstração.

Este último teorema também é chamado o princípipo do máximo de Pontriaguin para o problema de tempo ótimo.

Capítulo 3

Teorema do Bang-bang

§14 Trajetórias singulares : O princípio do máximo de Pontriaguin nos dá, como vimos anteriormente, condições necessárias para que uma determinada trajetória de um sistema de controle invariante à direita, associada a um determinado controle admissível, seja extrema ou de tempo ótimo. Isto significa que, dentre todas as trajetórias possíveis, aquelas que têm chance de serem extremas ou de tempo ótimo devem satisfazer o princípio.

É bem conhecida na teoria do controle clássica que no caso dos sistemas de controles lineares, ou seja, os da forma:

$$\dot{x} = Ax + Bu \text{ com } x \in \mathbf{R}^n \text{ e } u \in U \tag{14.1}$$

com U poliedro de $\mathbf{R}^p$, o princípio do máximo é uma condição necessária e suficiente para controle ótimo [5], mas para sistemas não lineares isto não é mais verdade.

O que iremos estudar aqui é justamente, como, a partir da condição de momento máximo para uma trajetória γ, podemos determinar o controle admissível que deu origem a esta trajetória.

Comecemos estudando um particular sistema de controle invariante à direita.

Seja G um grupo de Lie conexo e tomemos um espaço afim, F, de sua álgebra de Lie $L(G)$. Então podemos escrever:

$$F = X + \{Y_1, \ldots, Y_p\}_{e.v.} \tag{14.2}$$

onde $\{Y_1, \ldots, Y_p\}_{e.v.}$ denota um subespaço vetorial de $L(G)$ gerados pelos vetores $Y_1, \ldots, Y_p$. Consideremos o sistema de contole invariante à direita $\Sigma = (G, \Phi, U, \Omega)$, onde U será um subconjunto de F definido por $v \in U$ se e somente se $v = X + \sum_{i=1}^{p} u_i Y_i$ e $u_i \in \mathbb{R}$ com $|u_i| \leq 1$. De acordo com o parágrafo 3 podemos escrever a equação de evolução deste sistema de controle como:

$$\dot{x} = X(x) + \sum_{i=1}^{p} u_i(t) Y_i(x) \tag{14.3}$$

$u_i \colon [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$ mensurável segundo Lebesgue e $X(x)$, $Y_i(x)$ são campos invariantes à direita tal que $X(e) = X$ e $Y_i(e) = Y_i$.

Vamos supor,agora,que γ seja uma trajetória de Σ associada a um controle admissíel $\bar{u}$ e de momento máximo. Vale dizer que neste caso $\bar{u}(t) = X + \sum_{i=1}^{p} \bar{u}_i(t) Y_i$ e no que segue usaremos abusivamente desta relação entre um controle $u \in \Omega$ e uma seqüência finita de funções reais u_i.

Como γ e de momento máximo então existe uma trajetória λ não trivial do sistema $\hat{\Sigma}$ associada a $\bar{u}$ satisfazendo:

$$< \lambda(t), X(\gamma(t)) + \sum_{i=1}^{p} \bar{u}_i(t) Y_i(\gamma(t)) > \geq < \lambda(t), X(\gamma(t)) + \sum_{i=1}^{p} v_i Y_i(\gamma(t)) > \tag{14.4}$$

para todo $t \in [0, T]$ e todo v_i tal que $|v_i| \leq 1$.

Da relação (14.4) pode-se concluir facilmente levando-se em consideração a linearidade de λ, o seguinte:

$$\sum_{i=1}^{p} (\bar{u}_i(t) - v_i). < \lambda(t), Y_i(\gamma(t)) > \geq 0. \tag{14.5}$$

Fixemos um número $j \in \{1, \ldots, p\}$ e $t \in [0, T]$ e tomemos números v_i tal que $v_i = \bar{u}_i(t)$ se $i \neq j$ e v_j deixamos variar livremente com módulo menor ou igual a um.

A relação (14.5) deve ser cumprida, portanto

$$u_j(t) - v_j). < \lambda(t), Y_j(\gamma(t)) > \geq 0 \tag{14.6}$$

para todo v_j com $|v_j| \leq 1$.

Faremos agora três hipóteses sobre $< \lambda(t), Y_j(t) >$

1 . Se $< \lambda(t), Y_j(t) >> 0$. Neste caso devemos ter $(\bar{u}_j(t) - v_j) \geq 0$ para todo v_j e portanto devemos ter

$$\bar{u}_j(t) = 1 \tag{14.7}$$

2 . Se $< \lambda(t), Y_j(t) >< 0$. Neste caso de maneira análoga à anterior devemos necessariamente ter

$$\bar{u}_j(t) = -1 \tag{14.8}$$

e finalmente

3 . Se $< \lambda(t), Y_j(t) >= 0$, não podemos determinar o valor do controle $\bar{u}_j(t)$.

Sumarizando, acabamos de demonstrar o seguinte lema:

Lema 14.1 Seja γ uma trajetória de momento máximo associada ao controle $\bar{u}$ do sistema de controle (14.3). Seja $\lambda(t)$ uma trajetória não trivial de $\hat{\Sigma}$ de hamiltoniano máximo(i.e. satisfaz (14.4)). Se todas as funções ϕ_i definidas por

$$\phi_i(t) =< \lambda(t), Y_i(t) > \tag{14.9}$$

têm um número finito de zeros no intervalo $[0, T]$ então os controles $\bar{u}_i(t)$ ficam, neste intervalo, unicamente determinados (a menos por um número finito de pontos) pela fórmula:

$$\bar{u}_i(t) = sgn(\phi_i(t)) \tag{14.10}$$

sgn denota a função sinal.

Infelizmente este não é sempre o caso. Então daremos a definição seguinte

Definição: Uma trajetória γ juntamente com seu levantamento hamiltoniano λ será chamada de *singular* se para algum $i \in \{1, \ldots, p\}$ e para algum intervalo $(a, b) \subset [0, T]$ temos que $\phi_i(t) = 0$ em (a, b).

§15 **Um exemplo:** Vamos supor que a trajetória de (14.3) associada ao controle $\bar{u} = 0$ seja de momento máximo. Neste caso as relações (14.6) nos dariam

$$-v_j < \lambda(t), Y_j(t) > \geq 0$$

para todo v_j com $|v_j| \leq 1$, de onde, escolhendo $v_j = 1$ e $v_j = -1$ devemos necessariamente ter

$$< \lambda(t), Y_j(t) >= 0$$

o que significa que esta trajetória é singular. Na verdade esta trajetória é o subgrupo a um parâmetro associado ao campo $X(x)$, o que nos permite escrever

$$\gamma(t) = exp(tX)$$

(Obs. Estamos sempre considerando trajetórias que comecem na identidade do grupo.)

Tomemos os elementos $\{X, Y_1, \ldots, Y_p\}$ e denotemos por L a álgebra de Lie gerada por eles e por S o subgrupo de Lie conexo de G cuja álgebra de Lie é L e $S(x)$ será a variedade integral de L passando por $x \in G$.

Denotemos por L_0 o ideal de L gerado por $\{Y_1, \ldots, Y_p\}$, e por S_0 o subgrupo de Lie conexo de S que está associado a L_0. Notemos desde já que S_0 será normal em S. Continuando nesta linha $S_0(x)$ denotará a variedade integral associada a L_0 que passa por $x \in G$.

É fácil ver que L_0 e de codimensão 0 ou 1 em L,ou seja, $dimS = dimS_0$ ou $dimS = dimS_0 + 1$,vamos tomar esta última alternativa como hipótese.

Fixemos um $T \in [0.\infty)$, consideremos o ponto $q = exp(TX)$ e vamos considerar o problema de atingir o ponto q a partir da origem em tempo ótimo.

Seja Φ_t o grupo a um parametros de difeomorfismos associado ao campo $X(x)$:

$$\Phi_t: G \longrightarrow G$$

está definido por

$$\Phi_t(g) = exp(tX)g. \tag{15.1}$$

Utilizaremos ainda a notação $L_0(x) = \{v \in T_xG \mid \exists v_0 \in L_0 \text{ com } v = dR(x)_e(v_0)\}$.

Por um lema de Sussmann-Jurdjevic [10] (lema 3.5) temos que Φ_t leva uma variedade integral de L_0 em variedade integral de L_0, isto é:

$$\Phi_t(S_0(x)) = S_0(\Phi_t(x)). \tag{15.2}$$

Em conseqüência disto temos que

$$\Phi_{t*}(L_0(x)) = L_0(\Phi_t(x)). \tag{15.3}$$

Vamos agora definir campos de vetores dependentes do tempo pelas fórmulas

$$h_i(g,t) = \Phi_{-t*}(Y_i(\Phi_t(g))) \tag{15.4}$$

Notemos que $h_i(g,t) \in L_0(g)$, portanto se tomarmos g percorrendo o subgrupo S_0 então $h_i(g,t)$ será um campo em S_0, isto significa que uma trajetória de h_i que passe por um ponto de S_0 permanecerá sempre em S_0.

Fixemos agora p funções mensuráveis $u_i: [0,T] \longrightarrow [-1,1]$ (que por sua vez define também um controle de (14.3)), e definamos a equação diferencial

$$\dot{y} = \sum_{i=1}^{p} u_i(t) h_i(y,t). \tag{15.5}$$

Pelas observações acima vemos que se $y(t)$ for uma solução de (15.5) que passa por $x \in G$ para algum instante t_0 então $y(t) \in S_0(x)$ para todo t do domínio de y.

Tomemos agora a solução $y_u: [0,T] \longrightarrow G$ de (15.5) tal que $y(0) = e$. Assim $y_u(t) \in S_0$ para todo $t \in [0,T]$.

Definimos uma função $x_u: [0,T] \longrightarrow G$ dada por

$$x_u(t) = \Phi_t(y_u(t)) \tag{15.6}$$

Notemos, em primeiro lugar, que $x_u(0) = e$ e que x_u e absolutamente contínua. Derivando (15.6) em relação ao tempo obtemos

$$\begin{aligned}
\dot{x}_u(t) &= X(\Phi_t(y_u(t))) + \Phi_{t*}(\dot{y}_u(t)) \\
&= X(x_u(t)) + \Phi_{t*}(\sum_{i=1}^{p} u_i(t) h_i(y_u(t),t)) \\
&= X(x_u(t)) + \sum_{i=1}^{p} u_i(t) Y_i(x_u(t))
\end{aligned}$$

o que significa que $x_u(t)$ e uma trajetória de (14.3) associada ao controle $u(t) = X + \sum_{i=1}^{p} u_i(t) Y_i$, logo qualquer trajetória do sistema de controle

(14.3) que comece na identidade vai poder ser escrito como a fórmula (15.6). E como este sistema é invariante à direita a relação (15.6) fica

$$\prod_0^t u(\tau)d\tau = exp(tX)y_u(t) \tag{15.7}$$

ou

$$y_u(t) = exp(-tX)\prod_0^t u(\tau)d\tau \tag{15.8}$$

Como conseqüência particular da fórmula (15.7) obtemos o lema

Lema 15.1 $A(T, e) \subset S_0(exp(tX))$.

Em particular, qualquer trajetória γ do sistema (14.3) associada a u e tal que $\gamma(0) = e$ satisfaz $\gamma(t) \in S_0(exp(tX))$.Se fizermos a hipótese de que além de normal o grupo S_0 seja fechado em S (o que acontece se S for simplesmente conexo por exemplo), então podemos afirmar que existe um número positivo ϵ tal que para todo t_1 e $t_2 \in [0, \epsilon]$ teremos que se $t_1 \neq t_2$ então $S_0(exp(t_1X)) \cap S_0(exp(t_2X)) = \emptyset$.

Neste caso temos o lema:

Lema 15.2 Considerando o sistema de controle (14.3), e supondo que estejam satisfeitas as condições: L_0 tem codimensão 1 em L e S_0 e fechado em S. Então a trajetória $exp(tX)$ associada ao controle $u_i = 0$ (ou $u = X$) que vai de e até um ponto $exp(TX) = q$ para $T \in [0, \epsilon]$, é uma trajetória de tempo ótimo.

dem.: Com as observações feitas antes do enunciado do lema, se existir um controle u^* tal que a trajetória γ^* associada satisfaz $\gamma^*(0) = e$ e $\gamma^*(T_1) = q$ com $T_1 < T$, então pelo lema 15.1 temos que $\gamma^*(T_1) \in S_0(exp(T_1X))$ mas isto significa que $q \in S_0(exp(T_1X)) \cap S_0(exp(TX))$ o que contraria a nossa hipótese sobre a escolha de T. Logo não pode haver uma tal trajetória γ^*,terminando o lema.

§16 Trajetórias fortemente extremas: Neste parágrafo generalizaremos um pouco as idéias do anterior, em busca de critérios para substituir uma trajetória que ligue a identidade a um ponto g do grupo, associada a um controle u por outra que também irá da identidade até g no mesmo tempo mas com algumas propriedades de extremalidade melhores.

Vamos considerar o sistema de controle (14.3) e L,L_0, $L(x)$ e$L_0(x)$ serão como no parágrafo anterior. Suponhamos que $\gamma(t)$ seja uma trajetória de (14.3) associada a um controle $\hat{u}(t)$, de tempo ótimo e que satisfaz $\gamma(0) = e$ e $\gamma(T_1) = g$.

Então pelo princípio do máximo (teorema 13.3) existe uma trajetória $\lambda(t)$ levantamento hamiltoniano de $\gamma(t)$ não trivial e tal que satisfaz a relação de momento máximo (13.6).

Utilizando o lema 2.2 é trivial demonstração do seguinte lema

Lema 16.1 Seja $T(t)$ uma família de subespaços satisfazendo:

a)$T(t) \subset T_{\gamma(t)}G$

b) $T(t) = dL(\prod_0^t \hat{u}(\tau)d\tau)_e(T(0))$.

Então se $\lambda(t_0)$ for não trivial em $T(t_0)$, $\lambda(t)$ será não trivial em $T(t)$ para todo $t \in [0, T_1]$.

Como a trajetória $\gamma(t)$ passa por pela identidade, ela está toda contida no subgrupo S. Podemos assim considerar o sistema de controle (14.3) reduzido ao grupo de Lie S, já que: $X(x) + \sum_{i=1}^p u_i(t)Y_i(x) \in L(x)$, denotaremos este sistema por Σ^r. Então $\gamma(t)$ também será uma trajetória de tempo ótimo para este sistema reduzido, uma vez que se houvesse outra trajetória que realizasse o percurso em tempo menor, esta também seria trajetória do sistema original. E assim podemos aplicar o teorema (13.3) também para este sistema reduzido, isto é, existe uma trajetória $\mu(t)$ de $\hat{\Sigma}^r$ levantamento hamiltoniano de $\gamma(t)$ tal que $\mu(t)$ seja não trivial em $L(\gamma(t))$ e satisfaz a relação (13.6).

Tomemos $\mu(0) \in L^*$ e seja $\lambda_0 \in L(G)^*$ tal que

$$< \lambda_0, v > = < \mu(0), v >$$

para todo $v \in L$, e consideremos $\lambda(t)$ o levantamento hamiltoniano de $\gamma(t)$ no sistema original que no instante inicial passa por λ_0. Então temos

$$< \lambda(t), v(t) > = < \mu(t), v(t) >$$

sempre que $v(t) \in L(\gamma(t))$, pois isto significa que $v(t) = dL(\prod_0^t \hat{u}(\tau)d\tau)_e(v_0)$ para algum v_0 em L,e ainda $\lambda(t)$ satisfaz a relação (13.6). Resumindo acabamos de demonstrar o seguinte :

Lema 16.2 Se $\gamma(t)$ for uma trajetória de tempo ótimo do sistema (14.3) associado a um controle $\hat{u}$, então existe um levantamento hamiltoniano $\lambda(t)$ não trivial em $L(\gamma(t))$ que satisfaz a relação (13.6), ou seja $\gamma(t)$ e de hamiltoniano máximo.

O lema acima nos induz a perguntar se para a trajetória $\gamma(t)$ do lema não existiria um levantamento hamiltoniano e de hamiltoniano máximo e que fosse não trivial em $L_0(\gamma(t))$. Isto não é sempre verdade o que provoca uma nova definição

Definição: Se $\gamma(t)$ for uma trajetória de tempo ótimo e existir $\lambda(t)$ levantamento hamiltoniano de hamiltoniano máximo não trivial em $L_0(\gamma(t))$ diremos que $\gamma(t)$ é uma *trajetória fortemente extrema* e o controle associado a estas trajetórias também será dito fortemente extremo.

Vamos,agora demonstrar o seguinte lema que nos permite obter trajetórias fortemente extremas.

Lema 16.3 Seja $\gamma(t)$ uma trajetória de tempo ótimo do sistema (14.3) associado a um controle $\hat{u}$,tal que $\gamma(0) = e$ e $\gamma(T_1) = g$. Então existe um controle admissível $u^*: [0, T_1] \longrightarrow U$ que é concatenação de um controle fortemente extremo e um controle constante e tal que a trajetória de (14.3),γ^* associada ao controle u^* verifica $\gamma^*(0) = e$ e $\gamma^*(T_1) = g$.

dem.: Tomemos $u_0 \in U$ arbitrário (ou $u_0 = X + \sum_{i=1}^{p} u_{0_i} Y_i$) e consideremos a equação :

$$\dot{x} = X(x) + \sum_{i=1}^{p} u_{0_i} Y_i(x) = dR(x)_e(u_0) \tag{16.1}$$

Naturalmente o campo do lado direito da equação é invariante à direita e denotemos por $\phi_t^{u_0}$ seu grupo a um parâmetro de difeomorfismos. Também sabemos que

$$\phi_t^{u_0} = L(exp(tu_0) \tag{16.2}$$

Exatamente da mesma forma que no parágrafo anterior, construimos os campos dependentes do tempo:

$$h_i^{u_0}(g, t) = \phi_{-t_*}^{u_0} Y_i(\phi_t^{u_0}(g)) \tag{16.3}$$

Observação Decorre imediatamente de (16.2) que para cada t fixado $h_i^{u_0}(g,t)$ será um campo invariante à direita.

Dadas p funções mensuráveis u_i: $[0,T_1] \longrightarrow [-1,1]$ podemos considerar a equação seguinte que pode ser pensada como a equação de evolução de um sistema de controle

$$\dot{y}(t) = \sum_{i=1}^{p} (u_i(t) - u_{0i}) h_i^{u_0}(y,t) \tag{16.4}$$

levando em consideração a última observação e o mesmo raciocínio feito no parágrafo anterior podemos considerar o sistema acima como um sistema de controle evoluindo em S_0,(pois o fluxo $\phi_t^{u_0}$ leva variedades integrais em variedades integrais de L_0) e um sistema invariante à direita pois para cada t o segundo membro é um campo invariante á direita.

Criamos,assim, um sistema de controle invariante á direita que chamaremos $\Sigma_0 = (S_0, \phi_0, V, \Omega_0)$

Denotaremos por $y_u(t)$ a solução de (16.4) associada ao controle u que cumpre $y_u(0) = e$ (lembrando que então $y_u(t) \in S_0$) e definimos

$$x_u(t) = \phi_t^{u_0}(y_u(t)) \tag{16.5}$$

derivando isto com relação ao tempo vemos que,como anteriormente , $x_u(t)$ e a trajetória de (14.3) associada ao controle u e tal que $x_u(0) = e$.

Em particular:

$$\gamma(t) = x_{\hat{u}}(t) = \phi_t^{u_0}(y_{\hat{u}}(t)) \tag{16.6}$$

e portanto

$$q = x_{\hat{u}}(T_1) = \phi_{T_1}^{u_0}(y_{\hat{u}}(T_1))$$

Pela relação (16.5) percebemos que

$$A_{\Sigma_0}(t,e) = \phi_{-t}^{u_0}(A_\Sigma(t,e)) \tag{16.7}$$

onde Σ e o sistema dado por (14.3).

Como $A_\Sigma(t,e)$ é compacto (teorema 4.3) então $A_{\Sigma_0}(t,e)$ também é compacto e as trajetórias $y_u(t)$ pode-se escrever como

$$y_u(t) = \phi_{-t}^{u_0}(\prod_0^t u(\tau)d\tau) \tag{16.8}$$

ou

$$y_u(t) = exp(-tu_0)\prod_0^t u(\tau)d\tau \tag{16.9}$$

Se pusermos $y_u(T_1) = g^1$ então pelo teorema 4.4 existe uma trajetória de tempo ótimo para Σ_0 que transfere o ponto $e \in S_0$ ao ponto $g^1 \in S_0$. Denotemos então por u^* este controle que fornece a trajetória de tempo ótimo e por T^* o tempo tal que

$$y_{u^*}(T^*) = g^1 \text{ e } y_{u^*}(0) = e \tag{16.10}$$

Definimos o controle u^s: $[0, T_1] \longrightarrow U$ por

$$u^s(t) = \begin{cases} u^*(t) & \text{se } 0 \leq t \leq T^* \\ u_0 & \text{se } T^* < t \leq T_1 \end{cases}$$

Assim $x_{u^s}(t)$ é uma trajetória de (14.3) tal que $x_{u^s}(0) = e$ e $x_{u^s}(T_1) = g$. De fato

$$\begin{aligned} x_{u^s}(T_1) &= \prod_{T^*}^{T_1} \hat{u}_0 d\tau \prod_0^{T^*} \hat{u}^*(\tau)d\tau \\ &= exp([T_1 - T^*]u_0)\prod_0^{T^*} \hat{u}^*(\tau)d\tau \\ &= exp([T_1 - T^*]u_0)\phi_{T^*}^{u_0}(y_{u^*}(T^*)) \\ &= exp([T_1 - T^*]u_0)\phi_{T^*}^{u_0} \circ \phi_{T_1}^{u_0} \\ &= g \end{aligned}$$

Para completar a demonstração do lema vamos mostrar que o controle u^s será fortemente extremo. Pelo teorema 13.3 existe uma trajetória $\mu(t)$ de $\hat{\Sigma}_0$ levantamento hamiltoniano de y_{u^*} não trivial e satisfazendo a condição (13.6) que aqui se traduzem como:

$$< \mu(t), \sum_{i=1}^{p}(u_i^*(t) - u_{0i})h_i^{u_0}(y_{u^*}(t),t) > \quad \geq$$

$$\geq \quad < \mu(t), \sum_{i=1}^{p}(w_i - u_{0i})h_i^{u_0}(y_{u^*}(t),t) > \qquad (16.11)$$

para todo t e todo $w_i \in [-1,1]$.

É claro que $\mu(t) \in T^*_{y_{u^*}(t)}S_0 = (L_0(y_{u^*}(t)))^*$, logo $\rho(t) = \phi_{-t}^{u_0\,*}(\mu(t))$ está em $(L_0(x_{u^*}(t)))^*$ e ainda $\rho(t)$ é não trivial em $L_0(x_{u^*}(t)$. Da relação (16.11) ainda decorre

$$< \rho(t), \sum_{i=1}^{p}(u_i^*(t) - u_{0i})h_i^{u_0}(y_{u^*}(t),t) > \geq < \rho(t), \sum_{i=1}^{p}(w_i - u_{0i})h_i^{u_0}(y_{u^*}(t),t) >$$

ou seja

$$< \rho(t), \sum_{i=1}^{p}(u_i^*(t) - u_{0i})Y_i(x_{u^*}(t)) > \geq < \rho(t), \sum_{i=1}^{p}(w_i - u_{0i})Y_i(x_{u^*}(t)) > \qquad (16.12)$$

para todo $t \in [0, T^*]$ e $w_i \in [-1,1]$.

Da relção (16.5) decorre que a aplicação

$$\Psi_s = \phi_{-s}^{u_0} \circ \Phi_s$$

define um fluxo da equação (16.4) para um controle u fixado, onde Φ_s e um fluxo da equação (14.3) para o mesmo u escolhido.

Então

$$\Psi^{*\,-1}_{-s} = \phi_{-s}^{u_0\,*-1} \circ \Phi_s^{*-1}$$
$$\Phi_s^{*-1} = \phi_{-s}^{u_0\,*} \circ \Psi_s^{*-1}$$

como $\mu(t) = \Psi_t^{*-1}(\mu_0)$ para algum $\mu_0 \in L_0^*$ então $\rho(t) = \Phi_t^* - 1(\mu_0)$ o que significa que $\rho(t)$ é trajetória de $\hat{\Sigma}$.

Agora tomemos uma forma linear $\omega_0 \in L(G)^*$ tal que $< \omega_0, v > = < \rho(0), v >$ quando $v \in L_0$ e tomemos um levantamento hamiltoniano de $x_{u^*}(t)$, $\omega(t)$ tal que $\omega(0) = \omega_0$.

Então pelo lema 16.1 temos

$$< \omega(t), v(t) >=< \rho(t), v(t) >$$

se $v(t) \in L_0(x_{u^*}(t))$ e portanto $\omega(t)$ satisfaz :

$$< \omega(t), \sum_{i=1}^{p}(u_i^*(t) - u_{0i})Y_i(x_{u^*}(t)) >\geq< \omega(t), \sum_{i=1}^{p}(w_i - u_{0i})Y_i(x_{u^*}(t)) > \tag{16.13}$$

para todo $t \in [0, T^*]$ e $w_i \in [-1, 1]$. e somando dos dois lados o termo

$$< \omega(t), X(x_{u^*}(t)) + \sum_{i=1}^{p} u_{0i}Y_i(x_{u^*}(t)) >$$

e obtemos o resultado, demonstrando o lema 16.3.

Resumindo, o que obtivemos foi que se $\gamma(t)$ for uma trajetória de tempo ótimo ligando a identidade do grupo a um elemento g então podemos substitui-la por outra também de tempo ótimo mas que seja concatenação de uma trajetória de controle constante e outra fortemente extrema.

§17 **O princípio do bang-bang:** Vimos no parágrafo anterior que se tivermos uma trajetória $\gamma(t)$ do sistema de controle invariante à direita (14.3) e que leva a identidade e em um ponto $g \in G$ em tempo ótimo pode ser substituida por uma trajetória cujo controle é a concatenação de um fortemente extremo com um controle constante. Mas na teoria do controle não são as trajetórias fortemente extremas as mais importantes mas as do tipo bang-bang queremos definir.

Consideraremos novamente o sistema de controle (14.3). Então os controles admissíveis são funções mensuráveis $u: [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^p$ com $u(t) = (u_1(t), \ldots, u_p(t))$ e $|u_i| \leq 1$.

Definição: Um controle bang-bang é um controle do tipo acima tal que $|u_i(t)| = 1$ para todo $t \in [0, T]$

Definição: Um controle bang-bang chama-se *bang-bang com número finito de trocas* se cada $u_i(t)$ for constante por partes.

A questão agora é saber quando existe uma trajetória do sistema de controle acima que está associada a um controle bang-bang com um número finito de trocas.

Lembremos que no parágrafo 15 concluimos que se $\lambda(t)$ fosse um levantamento hamiltoniano de $\gamma(t)$ e se as funções $\phi_i(t)$ definidas àquela altura tivessem uma quantidade finita de zeros então determinaríamos $u_i(t)$ que seriam bang-bang com um número finito de trocas.

Para mostrarmos a existência de controles bang-bang com um número finito de trocas, a idéia é mostrar que tais funções ϕ_i têm um número finito de raizes.

Fixemos a notação:

$$(adX)(Y) = [X, Y] \text{ e } (adX)^j(Y) = adX \circ (adX)^{j-1}(Y)$$

Claro que como X, Y_k são campos invariantes à direita, também serão os campo $(adX)^j(Y_k)$.

Faremos agora uma hipótese adicional sobre o sistema (14.3). Suporemos que para todo x de G e todos r, s números naturais, e $j \geq 0$ inteiro, tenhamos :

$$[Y_s, (adX)^j(Y_r)] = \sum_{k=0}^{j} a_k^{jsr}(adX)^k(Y_r) + b_{jsr}(adX)^{j+1}(Y_r) \qquad (17.1)$$

com $|b_{jsr}| < 1$.

Demonstremos o seguinte resultado.

Lema 17.1 Se o sistema de controle (14.3) satisfaz a hipótese (17.1), então toda trajetória fortemente extrema $\gamma(t)$ associada a um controle $\hat{u}$ é uma trajetória bang-bang com um número finito de trocas.
dem.: Como $\gamma(t)$ é fortemente extrema, existe uma trajetória $\lambda(t)$ levantamento hamiltoniano de γ que não trivial em $L_0(\gamma(t))$ para todo $t \in [0,T]$ e que satisfaz o princípio do máximo de Pontriaguin, ou seja:

$$\hat{u}_i(t) < \lambda(t), Y_i(\gamma(t)) > \geq v_i < \lambda(t), Y_i(\gamma(t)) >$$

para todo $v \in [-1.1]$.

Notemos ainda que como a álgebra de Lie de G tem dimensão finita,existe um m inteiro positivo tal que para todo k:

$$(adX)^{m+1}(Y_k) = \sum_{i=0}^{m} c_i (adX)^i (Y_k) \tag{17.2}$$

c_i são constantes reais.

Seja $f(t) =< \lambda(t), Z(\gamma(t)) >$, onde Z será um campo invariante à direita. Então um rápido cálculo em coordenadas locais, e levando-se em consideração as equações diferenciais de $\gamma(t)$ e $\lambda(t)$ (ver a fórmula (2.3)), obtemos a seguinte relação:

$$\dot{f}(t) =< \lambda(t), [X, Z](\gamma(t) > +\hat{u}(t) < \lambda(t), [Y, Z](\gamma(t)) > \tag{17.3}$$

Consideremos agora as funções

$$\phi_j^r =< \lambda(t), (adX)^{j-1}(Y_r) > \tag{17.4}$$

Então pela relação (17.3) obtemos

$$\dot{\phi}_j^r(t) =< \lambda(t), (adX)^j (Y_r)(\gamma(t)) > +$$

$$+ \sum_{s=1}^{p} \hat{u}_s(t) < \lambda(t), [Y_s, (adX)^{j-1}(Y_r)](\gamma(t) > \tag{17.5}$$

pela hipótese (17.1)

$$[Y_s, (adX)^{j-1}(Y_r)] = \sum_{i=0}^{j-1} a_i^{j-1sr}(adX)^i(Y_r) + b_{j-1sr}(adX)^j(Y_r)$$

pela definição de ϕ_j^r temos que

$$\dot{\phi}_j^r(t) = (1 + \sum_{s=1}^{p} \hat{u}_s(t) b_{j-1sr})\phi_{j+1}^r + \sum_{k=1,s=1}^{j,p} a_{k-1}^{j-1sr}\phi_k^r(t) \qquad (17.6)$$

isto para $0 \leq j \leq m$, para $j = m+1$ temos

$$\phi_{j+1}^r(t) = \phi_{m+2}^r(t) = < \lambda(t), (adX)^{m+1}(Y_r)(\gamma(t)) >$$

e pela relação (17.2) temos

$$\phi_{m+2}^r(t) = \sum_{i=1}^{m+1} c_{i-1}\phi_i^r(t)$$

e portanto

$$\dot{\phi}_{m+1}^r(t) = \sum_{k=1,s=1}^{m+1,p} [(1 + \hat{u}_s(t)b_{msr})c_{k-1} + \hat{u}_s(t)a_{k-1}^{msr}]\phi_k^r(t) \qquad (17.7)$$

Assim as funções $\phi_1^r, \ldots, \phi_{m+1}^r$ são absolutamentes contínuas e satisfazem a equação diferencial:

$$\begin{aligned}
\dot{\phi}_1^r &= \alpha_{1,1}^r(t)\phi_1^r(t) + \beta_2^R(t)\phi_2^r(t) \\
\dot{\phi}_2^r(t) &= \alpha_{2,1}^r(t)\phi_1^r(t) + \alpha_{2,2}^r(t)\phi_2^r(t) + \beta_3^r(t)\phi_3^r(t) \\
&\vdots \\
\dot{\phi}_{m+1}^r(t) &= \alpha_{m+1,1}^r(t)\phi_1^r(t) + \cdots + \alpha_{m+1,m+1}^r(t)\phi_{m+1}^r(t)
\end{aligned}$$

onde $\alpha_{i,j}^r$ e β_j^r são definidas de forma óbvia a partir de (17.6) e (17.7). Destas relações também concluimos que β_j^r são funções sempre positivas e limitadas e $\alpha_{i,j}^r$ são funções limitadas.

Com estes preliminares podemos agora aplicar o lema 4.1 de Sussmann [9] que afirma que nestas condições a função ϕ_1^r ou é identicamente nula ou se anula,no máximo, em m pontos.

Se ϕ_1^r se anula em m pontos no máximo, para todo $r \in \{1, \ldots, p\}$ então isto implica que $< \lambda(t), Y_r(\gamma(t)) >$ tem um número finito de raízes para cada r, e portanto $\gamma(t)$ será bang-bang com um número finito de trocas. Para terminar a demonstração do lema, resta eliminar o caso em que ϕ_1^r e identicamente nula para algum r.

Pela forma das equações diferenciais das ϕ_j^r, se ϕ_1^r for identicamente nula também o são todas as ϕ_j até $j = m + 1$. Então suponhamos,por absurdo, que isto aconteça e consideremos Q o conjunto dos campos invariantes à direita que são combinações lineares dos campos

$$Y_r, (adX)(Y_r), \ldots, (adX)^m(Y_r)$$

.

Vemos que se $Z \in Q$ então

$$Z = \sum_{i=0}^{m} d_i (adX)^i (Y_r)$$

e portanto

$$[X, Z] = \sum_{i=0}^{m} d_i (adX)^{i+1} (Y_r)$$

e tendo em vista (17.2) temos que $[X, Z] \in Q$.

Considerando agora $[Y_s, Z]$ temos

$$[Y_s, Z] = \sum_{i=0}^{m} d_i [Y_s, (adX)^i (Y_r)]$$

e pela hipótese (7.1) descobrimos que também Y_s para todo $s \in \{1, \ldots, p\}$, está em Q. Provamos assim que Q ′ um ideal de L, e como $Y_s \in Q$ concluimos que $L_0 \subset Q$. Mas se $Z \in Q$ verifica-se

$$< \lambda(t), Z(\gamma(t)) >= \sum_{i=0}^{m} d_i \phi_{i+1}^r(t) = 0$$

o que implica que $\lambda(t)$ anula $L_0(\gamma(t))$ o que é absurdo já que tomamos $\lambda(t)$ não trivial nestes subespaços. Fica assim demonstrado o lema.

Bibliografia

[1] Brockett,H.- *Lie theory and control systems defined on spheres*, SIAM J. Appl. Math. 26 (1973) pp 213-225

[2] Helgason,S.- *Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces*, New York, Academic Press, 1978

[3] Godbillon,C.-*Géométrie differentielle et mécanique analytique*, Paris, Hermann, 1969

[4] Jurdjevic,V.& Sussmann,H - *Control systems on Lie groups*, J. Diff. Equations, 12 (1972), pp. 313-329

[5] Lee,E. & Markus,L.- *Foundations of optimal control theory*, New York, Wiley, 1976

[6] Postnikov,M.- *Leçons de géométrie: groupes et algèbras de Lie*, Moscou, Mir, 1985

[7] San Martin, L.B.- *Integral multiplicativa e teoria do controle em grupos de Lie* Campinas, Tese Unicamp, 1983

[8] Sec, A.- *Forme de Liouville et trajectoires extrémales*, C. R. Acad. Sc. Paris, t.286 (1978) Série A pp 413-415.

[9] Sussman,H.- *A bang-bang theorem with bounds on the number of switchings*, SIAM J. Control Optim. 17 (1979) pp. 629-651.

[10] Sussmann,H. & Jurdjevic,V.- *Controllability of nonlinear systems*, J. Diff. Equations, 12 (1972), pp 95-116.