Auto Valores do Laplaciano em Regiões Simétricas

Antônio Luiz Pereira

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE
DOUTOR
EM
MATEMÁTICA

Orientador: **Prof. Dr. Daniel Bauman Henry**

– SÃO PAULO, Julho de 1989 –

Ao Júlio
para quem,
muito sensatamente,
isto nada significa.

Agradecimentos

Ao Daniel, meu orientador, cuja dedicação e competência, ainda que inatingíveis, foram sempre um grande estímulo.
A todos os colegas que me ajudaram, esclarecendo dúvidas e discutindo partes deste trabalho, entre os quais o Ruy, o Luiz Augusto, o Verderesi e o Paulo.
À Lúcia e ao Júlio, pelo milagre de existirem.
À Nádia por estes anos todos, nunca tranquilos, mas sempre ricos.
Aos amigos queridos: os do dia a dia e aqueles que o tempo ou a distância já me roubaram; eles são o sal da terra.

(e ao alpereir pelo trabalho de datilografia).

Conteúdo

1 Preliminares **1**

1.1 Uma topologia no conjunto dos domínios 1

1.2 Regiões regulares 2

1.3 Cálculo Diferencial para perturbações da fronteira 2

1.4 O Teorema da Transversalidade 5

2 Alguns Exemplos **7**

2.1 O Caso Excepcional: $G = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_2$ 8

2.1.1 Uma Decomposição Conveniente em $\mathrm{L}^2(\Omega)$ 8

2.1.2 Genericidade dos auto-valores simples 9

2.2 $G = \mathbb{Z}_n (n > 2)$ 14

2.2.1 Complexificação 14

2.2.2 A necessidade da forma forte do Teorema da Transversalidade 15

2.2.3 Genericidade dos auto-valores simples 16

2.2.4 Retorno aos espaços reais 19

2.3 $G = D_3$ 20

2.3.1 Alguns Conceitos da Teoria de Representação de Grupos . . . 21

2.3.2 As representações ortogonais irredutíveis de D_3 22

2.3.3 Decomposição em $\mathrm{L}^2(\Omega)$ 22

2.3.4 Multiplicidade dos auto-valores em M_3 23

2.3.5 A situação genérica para G = D_3 24

3 Multiplicidade dos Auto-Valores do Laplaciano em Regiões Simétricas **28**

3.1 Uma decomposição conveniente em $L^2(\Omega, C)$ 29

3.2 Multiplicidade dos auto-valores 30

3.3 Representações matriciais e auto-valores do Laplaciano 32

3.4 Retorno aos espaços reais 33

4 A situação genérica para o Problema de Auto-Valores do Laplaciano **36**

4.1 Alguns lemas técnicos 37

4.2 O Caso de Grupos Comutativos Finitos 39

4.3 O Caso de Grupos Comutativos Infinitos 59

4.4 O caso de grupos não comutativos 61

A Representações Unitárias de Grupos Compactos **71**

A.1 Alguns Resultados da Teoria de Representações 71

A.2 Representações Ortogonais 78

A.3 A Representação 'quase-regular' 88

B Cálculo de Alguns Operadores de Fronteira **98**

B.1 O Método 98

B.2 Cálculos para o operador Γ 103

B.3 Cálculos para o operador Θ 117

Abstract

It was shown by Michelleti [9] that the eigenvalues of the Dirichlet problem for the Laplacian are 'generically' all simple in the set of the $\mathcal{C}^2$-regions with an appropriate topology.

In this work we show that this does not remain true if we restrict our attention to the subset of regions wich are invariant under a group of symmetries. We also prove, in some cases, that generically the eigenspaces are irreducible spaces for the action of the group.

Introdução

Consideremos o problema de auto-valores:

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0 & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado suficientemente regular (classe $\mathcal{C}^3$ é suficiente).

É bem conhecido que os autovalores do problema acima são todos reais e positivos, têm o $+\infty$ como único ponto de acumulação e multiplicidade (isto é: a dimensão do auto-espaço associado) finita.

Dizemos que um auto-valor é *simples* se a dimensão do auto-espaço associado é 1 e *múltiplo* caso contrário.

Auto-valores múltiplos podem ocorrer e de fato ocorrem em muitos exemplos calculáveis mais ou menos explicitamente. É natural perguntar se esta ocorrência é um fenômeno excepcional, possível apenas em um conjunto relativamente 'pequeno' ou 'raro' de regiões. Em um sentido mais preciso: é possível encontrar um conjunto residual de regiões (isto é: interseção enumerável de abertos densos) em uma topologia adequada tal que em qualquer região Ω deste conjunto os autovalores de Δ sejam todos simples?

Essa pergunta foi respondida afirmativamente por Michelletti [9] e Uhlenbeck [12] usando métodos diferentes. Uma demonstração clara e curta, usando o Teorema da Transversalidade, pode ser encontrada em Henry [3]. No mesmo texto, prova-se também que o mesmo resultado continua verdadeiro se nos restringimos às regiões Ω que satisfazem uma condição de simetria do tipo: $J\Omega = \Omega$, onde J é uma transformação linear ortogonal ($J^\tau = J^{-1}$) e J satisfaz: $J^2 = Id$, $J \neq Id$.

Em vista desses resultados 'genéricos' podemos ficar intrigados ao examinar exemplos específicos. Aparentemente, auto-valores múltiplos sempre ocorrem nas regiões em que uma análise mais detalhada é possível.

Os casos do disco e do retângulo no plano são bem conhecidos. Mencionemos um outro exemplo: o triângulo equilátero no plano. Nesse caso existem auto-valores de multiplicidade arbitrariamente alta (ver Pinsky [10]).

Uma característica comum a esses exemplos é que as regiões exibem, em maior ou menor grau, propriedades de simetria. Em outras palavras, cada uma delas é invariante para um determinado subgrupo G do grupo O(n) dos operadores ortogonais em $\mathbb{R}^n$. Por exemplo: o triângulo equilátero é invariante para o subgrupo de O(2) gerado pelos operadores:

$$\begin{array}{lcl} \delta : \ z & \longrightarrow & e^{2\pi i/3} z \\ \tau : \ z & \longrightarrow & \bar{z} \end{array}$$

(estamos identificando $\mathbb{R}^2$ com os complexos para facilitar a notação). Outro exemplo bem conhecido é o disco em $\mathbb{R}^2$, que é invariante para todo o grupo ortogonal.

De fato, são essas propriedades de simetria que permitem, em muitos casos, uma análise mais fina do problema, por exemplo, através de separação de variáveis. É tentador conjecturar que essas mesmas propriedades são responsáveis pelo aparecimento de situações 'não genéricas' como a existência de auto- valores múltiplos. Isso é o que passaremos a discutir no que segue. Os resultados que apresentaremos são relativamente fáceis de enunciar exceto por um ponto: precisaremos utilizar fatos e a linguagem da Teoria de Representação de Grupos. Como esse tópico não parece ser familiar à maioria das pessoas que trabalham na área de Equações Diferenciais escolhemos a seguinte estratégia de exposição: No capítulo 2 examinaremos alguns grupos particulares de modo a apresentar os resultados essenciais com o mínimo de tecnicalismo possível. As provas das afirmações neste capítulo serão, em grande parte, postergadas para os capítulos seguintes onde estudaremos o problema numa forma mais geral.

Os fatos pertinentes à Teoria de Representação indispensáveis para o entendimento do problema serão apresentados de forma sucinta no capítulo 1 e reapresentados de forma um pouco mais detalhada no apêndice A.

Finalmente, no apêndice B, exporemos a parte mais penosa deste trabalho; os longos cálculos necessários à demonstração dos resultados centrais.

Capítulo 1

Preliminares

Muitos problemas de perturbação de fronteira para equações a derivadas parciais foram estudadas por Henry em [3]. Para isso ele desenvolveu uma espécie de Cálculo Diferencial no qual a variável independente é o domínio de definição do problema com valor de fronteira.

Exporemos aqui apenas o estritamente necessário para os nossos propósitos. Uma exposição completa (com as demonstrações) pode ser encontrada no trabalho acima referido.

1.1 Uma topologia no conjunto dos domínios

Dado um conjunto aberto e limitado $\Omega_0 \subset \mathbf{R}^n$ e k ≥ 1, definimos uma sub-base das vizinhanças de Ω_0 como o conjunto das regiões:

$$\{ \ h(\Omega_0) \ | \ h \text{ está numa pequena vizinhança da inclusão } i_{\Omega_0} : \Omega_0 \to \mathbf{R}^n \text{ na topologia de } \mathcal{C}^k(\Omega_0, \mathbf{R}^n)\}$$

Se $\| h - i_{\Omega_0} \|_{\mathcal{C}^k}$ é suficientemente pequeno, h é um mergulho de classe $\mathcal{C}^k$ de Ω_0 em $\mathbf{R}^n$ e, portanto, um difeo $\mathcal{C}^k$ sobre a imagem.

Micheletti [8] provou que esta topologia é metrizável e o conjunto:

$$\mathcal{M}_k(\Omega) = \{ \ h(\Omega) \mid h : \Omega \to \mathbf{R}^n \text{ é mergulho de classe } \mathcal{C}^k \ \}$$

é um espaço métrico separável e completo.

1.2 Regiões regulares

Suponhamos que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado. Diremos que Ω é uma região de classe $\mathcal{C}^m$ (ou que é $\mathcal{C}^m$-regular) se existir uma função $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^m$, da qual 0 é valor regular e $\Omega = \{x \mid \varphi(x) > 0\}$.

Se $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ está próxima de φ em $\mathcal{C}^m(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ então Ω_ψ está próxima de Ω_φ na topologia definida acima. É conveniente em muitas situações, tomar ψ analítica ou $\mathcal{C}^\infty$.

Denotaremos por: $Diff^m(\mathbb{R}^n)$ os difeomorfismos de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^m$ (isto é: $h \in Diff^m(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow h$ e h^{-1} são de classe $\mathcal{C}^m$). $Diff^m(\mathbb{R}^n)$ é um aberto em $\mathcal{C}^m(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Se Ω é limitada e de classe $\mathcal{C}^m$ e $h : \Omega \to \mathbb{R}^n$ é um mergulho de classe $\mathcal{C}^m$ podemos estender h a um difeomorfismo em $Diff_0^m(\mathbb{R}^n)$ (isto é : h - Id e suas derivadas até ordem m vão a zero quando $|x| \to \infty$).

Se $t \to h(t, .) \in \mathcal{C}^m(\Omega, \mathbb{R}^n)$ é uma curva lisa de mergulhos, podemos estendê-la a uma curva lisa de difeomorfismos. Consideraremos as imagens: $t \longrightarrow \Omega(t) = h(t, \Omega)$ como uma curva "lisa" no espaço das regiões. Se $h(t,x)$ e $\frac{\partial}{\partial t}h(t,x)$ são de classe $\mathcal{C}^m$ em ambas as variáveis, podemos encontrar um campo vetorial $V(t,x)$ ($V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$) tal que: $\frac{\partial h}{\partial t}(t,x) = V(t, h(t,x))$ para $x \in \Omega$. V será então a "velocidade da deformação". Reciprocamente, dado um tal V, a solução $h(t, .)$ da equação diferencial acima com $h(0,x) = x$ é uma curva diferenciável de difeomorfismos.

1.3 Cálculo Diferencial para perturbações da fronteira

Diremos que uma função F definida no espaço $\mathcal{M}_m$ de Micheletti a valores em um espaço de Banach é de classe $\mathcal{C}^k$ ou analítica se $h \longrightarrow F(h(\Omega))$ é $\mathcal{C}^k$ ou analítica (como aplicação entre espaços de Banach). Por exemplo, um auto-valor simples do Laplaciano para o problema de Dirichlet ou de Neumann em uma região limitada $\Omega \in \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^2$ é uma função analítica em $\mathcal{M}_2(\Omega)$; qualquer que seja a multiplicidade, os auto-valores são pelo menos contínuos.

Mais especificamente, consideremos um operador diferencial não linear formal F_Ω

definido por:

$$F_\Omega(u)(x) = f(x, Lu(x)) \text{ para } x \in \Omega.$$

onde L é um operador diferencial linear de ordem m a coeficientes constantes, digamos:

$$Lu(x) = \left(u(x); \quad \frac{\partial u}{\partial x_j}(x)\,(1 \leq j \leq n); \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}\,(1 \leq j, k \leq n); \quad etc. \right)$$

e $f(x, \lambda)$ uma função lisa dada.

F_Ω pode ser então ser considerada (com hipóteses convenientes) como uma aplicação (com domínio aberto) de $\mathcal{C}^m(\Omega)$ em $\mathcal{C}^0(\Omega)$, ou de $\mathbf{W}_p^m(\Omega)$ em $\mathbf{L}_p(\Omega)$.

Se $h : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^n$ é um mergulho $\mathcal{C}^m$, podemos também considerar:

$$\begin{aligned} F_{h(\Omega)} : \mathcal{C}^m(h(\Omega)) &\longrightarrow \mathcal{C}^0(h(\Omega)) \\ (\mathbf{W}_p^m(h(\Omega)) &\longrightarrow \mathbf{L}_p(h(\Omega)) \end{aligned}$$

Mas então, temos o problema colocado em espaços diferentes dos originais. Para trazer o problema de volta à região de partida Ω, consideraremos o "pull-back" de h:

$$h^\star : \mathcal{C}^k(h(\Omega)) \longrightarrow \mathcal{C}^k(\Omega) \quad (0 \leq k \leq m)$$

definido por:

$$h^\star(\varphi) = \varphi \circ h$$

(que é um isomorfismo); e então: $h^\star F_{h(\Omega)} h^{\star -1}$ vai novamente de $\mathcal{C}^m(\Omega)$ em $\mathcal{C}_0(\Omega)$ Essa forma é mais conveniente se queremos aplicar, por exemplo, o Teorema das Funções Implícitas (ou da Transversalidade) pois nos permite trabalhar em espaços fixados. Por outro lado, introduzimos uma nova variável h. É então necessário estudar a função: $(h, u) \longrightarrow h^\star F_{h(\Omega)} h^{\star -1}$ quanto à diferenciabilidade. Isto está feito em [3], onde se mostra que, se $(y, \lambda) \to f(y, \lambda)$ é $\mathcal{C}^k$ ou analítica então :

$$\begin{gathered} (h, u) \longrightarrow h^\star F_{h(\Omega)} h^{\star -1} = f(h(.), h^\star L h^{\star -1} u) \\ Diff^m(\Omega) \times \mathcal{C}^m(\Omega) \longrightarrow \mathcal{C}^0(\Omega) \end{gathered}$$

é $\mathcal{C}^k$ ou analítica respectivamente (outros espaços podem ser usados no lugar de $\mathcal{C}^m(\Omega)$).

Seja agora $t \longrightarrow (h(t,.), u(t,.)) \in Diff^m(\Omega) \times \mathcal{C}^m(\Omega)$ uma curva lisa. A "derivada anti-convectiva":

$$D_t = \frac{\partial}{\partial t} - U(t,x).\frac{\partial}{\partial x} \qquad (U(t,x) = h_x^{-1} h_t)$$

ao longo da curva é dada então por :

$$D_t h^\star F_{h(\Omega)} h^{\star -1} = h^\star \dot{F}_{h(\Omega)} h^{\star -1} + h^\star F'_{h(\Omega)} h^{\star -1} D_t u$$

onde:

$$\begin{aligned} F(t)(v)(y) &= f(t,y,Lv(y)) \\ \dot{F}(t)(v)(y) &= \frac{\partial f}{\partial t}(t,y,Lv(y)) \\ F'(t(v)).w(y) &= \frac{\partial f}{\partial \lambda}(t,y,Lv(y)).Lw(y) \end{aligned}$$

(a igualdade sendo entendida entre curvas num espaço de Banach).

Em particular, suponhamos que:

$$f(t,y,Lv(y)) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(t,y)(\partial/\partial y)^\alpha v$$

e:

$$h(t,x) = x + t\dot{h}(x) + o(t) \text{ quando } t \to 0$$

Denotando por ". " a derivada $\frac{\partial}{\partial t}$ em relação a t, temos:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}_{|t=0} h^\star \left(\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(t) \partial^\alpha \right) h^{\star^{-1}} u = \\ &\sum_{|\alpha| \leq m} \dot{a}_\alpha(0) \partial^\alpha) u + \\ &\left(\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(0) \partial^\alpha \right) \dot{u} + \left[\dot{h}.\nabla \, , \sum_\alpha a_\alpha(0) \partial^\alpha \right] u \end{aligned}$$

e o último termo, o comutador do operador com $\dot{h}.\nabla$, é a contribuição devida à variação do domínio.

1.4 O Teorema da Transversalidade

Uma ferramenta básica para a obtenção dos nossos resultados será o Teorema da Transversalidade numa versão devida a Henry [3].

Teorema 1.1 (da Transversalidade) *Sejam k e m números inteiros positivos; X, Y, Z variedadades de Banach de classe C^k; $A \subset X \times Y$ aberto; $f : A \to Z$ uma aplicação de classe C^k e ξ um ponto em Z.*

Suponhamos que para cada $(x,y) \in f^{-1}(\xi)$:

(1) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) : T_xX \to T_\xi Z$ *é semi-Fredholm de índice* $< k$.

(2) *Vale uma das seguintes alternativas:*

(α) $Df(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) : T_xX \times T_yY \to T_\xi Z$ *é sobrejetora*

(β) $dim\left\{\mathcal{R}\left(Df(x,y)\right)\mathcal{R}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)\right\} \geq m + dim\mathcal{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)$

Além disso suponhamos que:

(3) $(x,y) \to y : f^{-1}\xi \to Y$ *é σ-própria, isto é:*
$f^{-1}(\xi) = \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{M}_j$ *é uma união enumerável de conjuntos $\mathcal{M}_j$ tais que*
$(x,y) \to y : \mathcal{M}_j \to Y$ *é uma aplicação própria, para cada j* [Dada $(x_\nu, y_\nu) \in \mathcal{M}_j$ tal que y_ν converge em Y, existe uma subsequência (ou subnet) convergente em $\mathcal{M}_j$]

Observemos que (3) é satisfeita se $f^{-1}(\xi)$ é Lindelöf [toda cobertura aberta possui subcobertura enumerável] ou, mais específicamente, se $f^{-1}(\xi)$ é um espaço métrico separável ou se X, Y são espaços métricos separáveis.

$$\textit{Seja} \qquad A_y = \{x | (x,y) \in A\} \qquad e$$

$$Y_{crit} = \{y \mid \xi \textit{ é valor crítico de } f(.,y) : A_y \to Z\}$$

Então Y_{crit} é um conjunto magro em Y e se $(x,y) \to y : f^{-1}(\xi) \to Y$ é própria, Y_{crit} é também fechado. Se ind $\frac{\partial f}{\partial x} \leq -m < 0$ em $f^{-1}(\xi)$, então 2(α) implica 2(β) e:

$$Y_{crit} \doteq \{y | \xi \in f(A_y, y)\}$$

tem codimensão $\geq m$ em Y.[ver [3] para definição de codimensão; em particular Y_{crit} é magro se e só se codim $Y_{crit} \geq 1$].

Observação 1.1 *A hipótese usual é que ξ seja um valor regular de f e, portanto, 2(α) se verifica. Se 2(β) se verifica em um ponto então ind $\frac{\partial f}{\partial x} \leq -m$ neste ponto já que codim $\mathcal{R}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \geq$ dim $\{\frac{\mathcal{R}(Df)}{\mathcal{R}(\frac{\partial f}{\partial x})}\}$. Se ind $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \leq -m$ e 2(α) vale então 2(β) também vale. Portanto 2(β) é mais geral para o caso de índice negativo(em muitos exemplos o índice é $-\infty$).*

Capítulo 2

Alguns Exemplos

Iremos nos referir ao problema de auto-valores:

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0 & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

como o Problema de auto-valores do Problema de Dirichlet para o Laplaciano ou, mais simplesmente, Problema de auto-valores para o Laplaciano.

De fato, estaremos interessados nos auto-valores do operador:

$$-\Delta : \mathbf{H}^2 \cap \mathbf{H}_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\Omega)$$

Como trabalharemos ora com funções a valores complexos ora com funções a valores reais, usaremos, neste último caso, as notações:
$\mathbf{H}^2 \cap \mathbf{H}_0^1(\Omega, \mathbf{C}), \mathbf{L}^2(\Omega, \mathbf{C})$ etc... para evitar confusão.

Como a intenção neste capítulo é, primariamente, esclarecer os pontos centrais do nosso trabalho, procuraremos simplificar a exposição de duas maneiras :
1) Alguns resultados não serão enunciados na maior generalidade possível(por ex. nos teoremas 2.2 e 2.1 as regiões poderiam ser de classe $\mathcal{C}^2$ e não necessáriamente conexas)
2) Muitas demonstrações serão adiadas para os capítulos seguintes.

2.1 O Caso Excepcional: $G = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_2$

Suponhamos que $J_1, \ldots, J_m \in O(n)$ satisfazem:

$$J_i^2 = Id, \quad J_i \neq Id \qquad J_i J_k = J_k J_i \;\; \forall i, k = 1, \ldots, m.$$

O subgrupo G de $O(n)$ gerado por $J_1, \ldots, J_m$ é então isomorfo a $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_2$.

Vamos nos restringir às regiões Ω que são *G-simétricas ou G-invariantes* (isto é: $g(\Omega) = \Omega$, $\forall g \in G$) e usar, nesse conjunto, a topologia induzida pela descrita em 1.1.

Queremos mostrar que, nesse caso, os auto-valores do Laplaciano são, genericamente, todos simples. A prova é, essencialmente, a mesma de Henry [3] para o caso G= $\mathbb{Z}_2$ mas acreditamos que sua apresentação aqui será útil para ilustrar técnicas que serão utilizadas nos outros casos.

Para reduzir as dificuldades técnicas vamos impor ainda que as regiões consideradas sejam conexas e de classe $\mathcal{C}^3$.

2.1.1 Uma Decomposição Conveniente em $\mathrm{L}^2(\Omega)$

Seja $\mathcal{X} : G \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ satisfazendo:

$$\mathcal{X}(1) = 1 \,,\; \mathcal{X}(g \cdot h) = \mathcal{X}(g) \cdot \mathcal{X}(h) \,,\; \forall g, h \in G$$

Tais funções são denominadas caracteres de G (falaremos mais sobre isto adiante). No caso presente, $\mathcal{X}$ é sempre caracter *real* isto é : $\mathcal{X}(g) = \pm 1 \;\; \forall g \in G$ (De fato: $g^2 = 1 \Rightarrow \mathcal{X}(g^2) = 1 \Rightarrow \mathcal{X}(g)^2 = 1$) Consideremos o espaço $M_{\mathcal{X}}$ definido por:

$$M_{\mathcal{X}} = \{u \in \mathrm{L}^2(\Omega) \,|u \circ g^{-1} = \mathcal{X}(g) \cdot u, \forall g \in G\}$$

(No caso $\mathcal{X}(g) = 1$, $\forall g$; temos $u \circ g^{-1} = u \;\forall g$, para $u \in M_{\mathcal{X}}$; chamamos tais funções *pares*). Como $\Delta(u \circ g) = (\Delta \circ g)$, $M_{\mathcal{X}}$ é invariante pelo Laplaciano.

Além disso, $\mathrm{L}^2(\Omega)$ pode ser escrito como soma direta ortogonal dos espaços $M_{\mathcal{X}}$ para $\mathcal{X}$ variando no conjunto dos caracteres de G. De fato: para cada $\mathcal{X}$ podemos

definir uma projeção ortogonal:

$$P_{\mathcal{X}}\ u = \frac{1}{\sharp G} \cdot \sum_{g \in G} \mathcal{X}(g) \cdot u \circ g^{-1}$$

(onde $\sharp G$ indica a cardinalidade de G).
e:

$$M_{\mathcal{X}}\ = Im P_{\mathcal{X}}$$

2.1.2 Genericidade dos auto-valores simples

Vamos estudar o problema inicialmente em cada espaço $M_{\mathcal{X}}$.

Lema 2.1 *Se $G = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_2$, os autovalores do operador:*

$$-\Delta : M_{\mathcal{X}}\ \cap H^2 \cap H_0^1(\Omega) \longrightarrow M_{\mathcal{X}}$$

são todos simples para um conjunto residual de regiões Ω de classe $\mathcal{C}^3$ conexas e G-simétricas.

Demonstração. Seja Ω_0 uma região G-simétrica de classe $\mathcal{C}^3$ e

$E = \{h : \Omega_0 \to \mathbb{R}^n$ mergulhos de classe $\mathcal{C}^3$ equivariantes (isto é: $h \circ g = g \circ h \forall g \in G)\}$

(Note-se que $h(\Omega_0)$ também é G-simétrica)

Consideremos a aplicação :

$$F : M_{\mathcal{X}}\ \cap\ \mathbf{H}^2 \cap \mathbf{H}_0^1(\Omega_0) \setminus \{0\} \times \mathbb{R} \times \mathbf{E} \longrightarrow M_{\mathcal{X}}$$

definida por:

$$F(u, \lambda, h) = h^{\star}(\Delta + \lambda) h^{\star -1} u$$

Suponhamos que, para algum h, 0 é valor regular de:

$$(u, \lambda) \longrightarrow F(u, \lambda, h)$$

Então, fazendo $\Omega = h(\Omega_0)$ seguirá que 0 é valor regular de:

$$\begin{aligned} (v,\lambda) &\longrightarrow \Delta v + \lambda v \\ M_{\mathcal{X}} \cap \mathbf{H}^2 \cap \mathbf{H}_0^1(\Omega) \setminus \{0\} \times \mathbb{R} &\longrightarrow M_{\mathcal{X}} \end{aligned}$$

Em outras palavras, sempre que $\Delta v + \lambda v = 0$ $v \neq 0$, teremos que:

$$\begin{aligned} (\dot{v},\dot{\lambda}) &\longrightarrow (\Delta + \lambda)\dot{v} + \dot{\lambda} v \\ M_{\mathcal{X}} \cap \mathrm{H}^2 \cap \mathrm{H}_0^1(\Omega) \times \mathbb{R} &\longrightarrow M_{\mathcal{X}} \end{aligned}$$

é sobrejetora e, portanto, $(\Delta + \lambda)_{|M_{\mathcal{X}} \cap \mathrm{H}^2 \cap \mathrm{H}_0^1(\Omega)}$ tem imagem (fechada) de codimensão 1 e λ é auto-valor simples.

Tudo o que temos a demonstrar então é que 0 é valor regular de $F(\cdot, \cdot, h)$ para um conjunto residual de h_s

Agora , F é analítica, $F(.,.,h)$ é Fredholm para cada h e os espaços são separáveis. Se pudermos mostrar que 0 é valor regular de F o resultado será consequência do Teorema 1.1 (da Transversalidade).

Suponhamos que isto é falso. Existirá então um ponto crítico (u_0, λ_0, h_0) tal que $F(u_0, \lambda_0, h_0) = 0$. Podemos "transferir a origem" de Ω_0 para $\Omega = h_0(\Omega_0)$ definindo $v_0 = h_0^{*-1} u_0 \in \mathrm{H}^2 \cap \mathrm{H}_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ e:

$$\tilde{F} : M_{\mathcal{X}} \cap \mathbf{H}^2 \cap \mathbf{H}_0^1(\Omega) \setminus \{0\} \times \mathbb{R} \times \tilde{E} \longrightarrow M_{\mathcal{X}}$$

$$\tilde{F}(v, \lambda, h) = h^*(\Delta + \lambda) h^{*-1} v$$

$$(\tilde{E} = \text{mergulhos de } \Omega \text{ em } \mathbb{R}^n, \ \mathcal{C}^3 \text{ equivariantes})$$

Então a aplicação:

$$\tilde{F} : (v, \lambda, h) \to h_0^{*-1} F(h_0^* v, \lambda, h \circ h_0)$$

tem um ponto crítico $(v_0, \lambda_0, i_\Omega)$ com $\tilde{F}(v_0, \lambda_0, i_\Omega) = 0$. (observe-se que h_0^* é isomorfismo).

Com esta "mudança de origem" podemos sempre supor que $h_0 = i_\Omega$ e ela será feita no que segue sem comentários adicionais.

Temos então:

$$\tilde{F}(v_0, \lambda_0, i_\Omega) = 0$$

e:

$$(\dot{v}, \dot{\lambda}, \dot{h}) \longrightarrow D\tilde{F}(v_0, \lambda_0, i_\Omega)(\dot{v}, \dot{\lambda}, \dot{h}) =$$
$$(\Delta + \lambda_0)\dot{v} + \dot{\lambda}v_0 + (\dot{h} \cdot \nabla)(\Delta + \lambda_0)v_0 - (\Delta + \lambda_0)\dot{h} \cdot \nabla v_0$$

não é sobrejetora.

Como $\tilde{F}(.,.,h)$ é Fredholm,

$$(\dot{v}, \dot{\lambda}) \longrightarrow \tilde{F}'(v_0, \lambda_0, i_\Omega)(\dot{v}, \dot{\lambda}, 0)$$

tem imagem fechada de codimensão finita e, portanto, $\tilde{F}'(v_0, \lambda_0, i_\Omega)$ goza da mesma propriedade.

Mas $(v_0, \lambda_0, i_\Omega)$ é ponto crítico e, portanto, existe $\psi \neq 0$ em $M_{\mathcal{X}}$ ortogonal à imagem de $D\tilde{F}(v_0, \lambda_0, i_\Omega)$. Portanto, para todo $(\dot{v}, \dot{h}, \dot{\lambda})$:

$$0 = \int_\Omega \psi(\Delta + \lambda_0)(\dot{v} - \dot{h} \cdot \nabla v_0) + \dot{\lambda}\psi v_0$$

Fazendo $\dot{h} = 0$ e $\dot{v} = 0$ vemos que $\int_\Omega \psi v_0 = 0$. Fazendo $\dot{h} = 0$ e variando $\dot{v}$ vemos que:

$$0 = \int_\Omega (\Delta + \lambda_0)\dot{v}\psi \qquad \forall \dot{v} \in M_{\mathcal{X}} \ \cap \ \mathbf{H}^2 \cap \mathbf{H}_0^1(\Omega)$$

É claro que, se $\dot{v} \in {M_{\mathcal{X}}}^\perp$ também temos:

$$\int_\Omega (\Delta + \lambda_0)\dot{v}\psi = 0$$

Segue que :

$$\int_\Omega (\Delta + \lambda_0)w \cdot \psi = 0$$

para todo $w \in \mathrm{H}^2 \cap \mathrm{H}_0^1(\Omega)$. ψ é então solução fraca e, portanto, forte de $(\Delta + \lambda_0)\psi = 0$ em Ω, $\psi = 0$ em $\partial\Omega$. Como $\partial\Omega$ é de classe $\mathcal{C}^3$, ψ e v_0 são de classe $\mathcal{C}^{2,\alpha} \cap \mathcal{W}_p^3(\Omega)$, para todo $0 < \alpha < 1$ e para todo $p < \infty$.

Variando agora $\dot{h}$ (e usando a $2^{\underline{a}}$ identidade de Green):

$$\begin{aligned}
0 &= \int_\Omega -((\Delta+\lambda_0)\dot{h}\cdot\nabla v_0)\cdot\psi \\
&= \int_\Omega \dot{h}\cdot\nabla v_0(\Delta+\lambda_0)\psi - ((\Delta+\lambda_0)\dot{h}\cdot\nabla v_0)\cdot\psi \\
&= \int_\Omega (\dot{h}\cdot\nabla v_0)\cdot\Delta\psi - \Delta(\dot{h}\cdot\nabla v_0)\cdot\psi \\
&= \int_{\partial\Omega} \dot{h}\cdot\nabla v_0\frac{\partial\psi}{\partial N} \\
&= \int_{\partial\Omega} \dot{h}\cdot N\cdot\frac{\partial v_0}{\partial N}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial N}
\end{aligned}$$

(Observe-se que $\dot{h}\cdot\nabla v_0 \in \mathcal{W}^{2,p}(\Omega)$, por isso estamos trabalhando em domínios de classe $\mathcal{C}^3$).

Agora, $\frac{\partial v_0}{\partial N}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial N}$ é função par, isto é:

$$\left(\frac{\partial v_0}{\partial N}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial N}\right)\circ g = \frac{\partial v_0}{\partial N}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial N}\ \forall g\in G$$

De fato:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial v_0}{\partial N}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial N}\right)\circ g &= \langle g^{-1}\nabla v_0\circ g, g^{-1}\nabla\psi\circ g\rangle \\
&= \mathcal{X}(g)\cdot\mathcal{X}(g)\langle\nabla v_0,\nabla\psi\rangle \\
&= \frac{\partial v_0}{\partial N}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial N}
\end{aligned}$$

Nessas condições, como provaremos no capítulo 4, lema 4.1 existe $\dot{h}$, equivariante, tal que $\dot{h}\cdot N$ está arbitrariamente próxima de $\frac{\partial v_0}{\partial N}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial N}$ na topologia uniforme. Segue que $\frac{\partial v_0}{\partial N}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial N}\equiv 0$ em $\partial\Omega$. Concluímos que existe um aberto U em $\partial\Omega$ onde uma das funções $\frac{\partial v_0}{\partial N}$ $\frac{\partial\psi}{\partial N}$ se anula. Suponhamos que $\frac{\partial\psi}{\partial N}\equiv 0$ em U (se $\frac{\partial v_0}{\partial N}\equiv 0$ o raciocínio é o mesmo). Como $\Delta\psi+\lambda\psi=0$ em Ω obtemos, por unicidade no problema de Cauchy para equações elípticas de $2^{\underline{a}}$ ordem que $\psi\equiv 0$ (usamos aqui a conexidade de Ω). Mas isto é falso e, por contradição, 0 é valor regular de $\tilde{f}$ como queríamos demonstrar $\square$.

Como os espaços $M_{\mathcal{X}}$ são em número finito, segue imediatamente do lema acima que existe um conjunto residual de regiões tal que os auto-valores do Laplaciano são

todos simples quando nos restringimos a cada um dos $M_{\mathcal{X}}$. Poderão, entretanto, existir auto-valores múltiplos associados a auto-funções em dois ou mais desses espaços.

Vejamos como se pode "separar " estes auto-valores.

Teorema 2.1 *Se $G = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_2$, os auto-valores do operador:*

$$-\Delta : H^2 \cap H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$$

são todos simples para um conjunto residual de regiões Ω de classe $\mathcal{C}^3$, G-simétricas e conexas.

Demonstração. Para $k \in \mathbb{N}$ seja U_k o conjunto das regiões G-invariantes e de classe $\mathcal{C}^3$ tais que os auto-valores $\leq k$ são todos simples. Como os auto-valores variam continuamente (ver 4.1) esse conjunto é aberto. Precisamos mostrar que é também denso.

Suponhamos que em uma dada região Ω de classe $\mathcal{C}^3$ e G-simétrica anterior comparece um auto-valor λ_0 de $-\Delta$, simples quando restrito a cada $M_{\mathcal{X}}$, associado a auto funções u_0 e v_0 em $M_{\mathcal{X}}$ e $\mathrm{M}_{\mathcal{X}'}$ respectivamente.

Seja $h(t,x) = x + t \cdot V(x)$ (com V equivariante) uma perturbação. Para t pequeno teremos funções analíticas $\lambda_{\mathcal{X}}$ e $\lambda_{\mathcal{X}'}$ que fornecem o único auto-valor de $-\Delta$ em $M_{\mathcal{X}}$ $(h_t(\Omega))$ e $M_{\mathcal{X}'}$ $(h_t(\Omega))$ respectivamente próximo de λ_0.

Temos então (ver [3]):

$$\lambda_{\mathcal{X}}(t) = \lambda_0 - t \cdot \int_{\partial\Omega} V \cdot N_\Omega (\frac{\partial u_0}{\partial N})^2 + \mathcal{O}(t^2)$$

$$\lambda_{\mathcal{X}'}(t) = \lambda_0 - t \cdot \int_{\partial\Omega} V \cdot N_\Omega (\frac{\partial v_0}{\partial N})^2 + \mathcal{O}(t^2)$$

A função: $((\frac{\partial u_0}{\partial N})^2 - (\frac{\partial v_0}{\partial N})^2)$ é par. Podemos então encontrar V tal que $\lambda_{\mathcal{X}}$ (t) $\neq$ $\lambda_{\mathcal{X}'}$ (t) para t pequeno, a menos que $(\frac{\partial u_0}{\partial N})^2 = (\frac{\partial v_0}{\partial N})^2$ em $\partial\Omega$. Vejamos que isto não pode ocorrer. Seja $w_\pm = u_0 \pm v_0$. Então $w_\pm$ são auto-funções em Ω que se anulam em $\partial\Omega$ e $\frac{\partial w_+}{\partial N}\frac{\partial w_-}{\partial N} = 0$. Portanto ao menos uma delas se anula em um aberto de $\partial\Omega$. Por unicidade no problema de Cauchy concluímos que $w_+ = 0$ ou $w_- = 0$. Mas isso não pode ocorrer pois u_0 e v_0 são independentes.

Dessa maneira, podemos separar, um a um, os autovalores $\leq k$ que comparecem em mais de um $M_{\mathcal{X}}$ até conseguir uma região $\tilde{\Omega}$ próxima de Ω na qual os auto-valores $\leq k$ são todos simples $\square$.

2.2 $G = \mathbb{Z}_n (n > 2)$

Seja $J \in O(n)$ tal que $J^n = Id$ e $J^m \neq Id$ se $0 < m < n$. O subgrupo gerado por J é agora (isomorfo a) $\mathbb{Z}_n$. Se tentarmos repetir o procedimento do exemplo anterior, a primeira dificuldade que encontraremos será conseguir uma decomposição conveniente em $\mathrm{L}^2(\Omega)$. O problema é que, agora, os caracteres de G podem assumir valores complexos não reais. De fato, se $\theta = 2\pi/n$ então os caracteres de G estão determinados por:

$$\mathcal{X}_k(J) = e^{ik\theta} \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

Se $e^{ik\theta} = \pm 1$, podemos proceder exatamente como no exemplo anterior para concluir que, restringindo o problema a cada espaço $\mathbf{M}_{\mathcal{X}_k} \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ os auto-valores são simples. Entretanto, se $e^{ik\theta}$ não é real somos forçados a trabalhar em espaços complexos.

2.2.1 Complexificação

Indicaremos por $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathbb{C})$ e $\mathrm{H}^2 \cap \mathrm{H}_0^1(\Omega, \mathbb{C})$ os espaços de funções a valores complexos cujas partes real e imaginária estão respectivamente em $\mathrm{L}^2(\Omega)$ e $\mathrm{H}^2 \cap \mathrm{H}_0^1(\Omega)$. Estes espaços serão vistos como espaços vetoriais sobre $\mathbb{C}$.

O Laplaciano de $u \in \mathrm{H}^2 \cap \mathrm{H}_0^1(\Omega, \mathbb{C})$ é por definição:

$$\Delta u = \Delta(Re(u)) + i\Delta(Im(u))$$

A decomposição em subespaços invariantes é agora, análoga à do exemplo anterior. Definimos:

$$M_{\mathcal{X}} = \{u \in \mathrm{L}^2(\dot{\Omega}, \mathbb{C}) \,|u \circ g^{-1} = \mathcal{X}(g), \forall g \in G\}$$

e $P_{\mathcal{X}}$ como antes. Temos, novamente, $M_{\mathcal{X}} = \mathrm{Im}\, P_{\mathcal{X}}$.

2.2.2 A necessidade da forma forte do Teorema da Transversalidade

Seja:

$$F_{\mathcal{X}} : M_{\mathcal{X}} \cap \mathrm{H}^2 \cap \mathrm{H}_0^1(\Omega, \mathbb{C}) \setminus \{0\} \times \mathbb{C} \times \mathbf{E} \longrightarrow M_{\mathcal{X}}$$

definida por:

$$F(u, \lambda, h) = h^{\star}(\Delta + \lambda)h^{\star -1}u$$

Como veremos no capítulo 3, se pudessemos provar que 0 é valor regular de $F_{\mathcal{X}}$ seguir-se-ia que os auto-valores do Laplaciano são genericamente todos simples em $M_{\mathcal{X}}$ (na estrutura complexa). Suponhamos que tal não ocorre. Então a imagem da derivada:

$$\begin{aligned}(\dot{u}, \dot{\lambda}, \dot{h}) &\longrightarrow DF_{\mathcal{X}}(u, \lambda, i_{\Omega})(\dot{u}, \dot{\lambda}, \dot{h}) = \\ &(\Delta + \lambda)\dot{u} + \dot{\lambda}u + (\dot{h}\nabla)(\Delta + \lambda)u - (\Delta + \lambda)\dot{h}\nabla u\end{aligned}$$

é fechada, de codimensão finita e não é sobre para alguma região Ω de classe $\mathcal{C}^3$ G-simétrica.

Infelizmente, só sabemos que essa imagem é um sub-espaço real de $M_{\mathcal{X}}$ ($\dot{h}$ é necessariamente real). Existe então $\psi \neq 0$ em $M_{\mathcal{X}}$ ortogonal à imagem de $DF_{\mathcal{X}}(u, \lambda, i_{\Omega})$ na estrutura real de $M_{\mathcal{X}}$,isto é:

$$0 = Re \int_{\Omega} \overline{\psi}(\Delta + \lambda)(\dot{u} - \dot{h} \cdot \nabla u) + \dot{\lambda}\overline{\psi}u$$

Fazendo $\dot{h} = 0$ e variando $\dot{u}, \dot{\lambda}$:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} u \cdot \overline{\psi} \\ &= \int_{\Omega} (\Delta + \lambda)\dot{u}\overline{\psi} \end{aligned}$$

$\forall \dot{u} \in M_{\mathcal{X}} \cap \mathrm{H}^2 \cap \mathrm{H}_0^1(\Omega, \mathbb{C})$. É claro que, se $\dot{u} \in {M_{\mathcal{X}}}^{\perp}$ (na estrutura complexa), temos também:

$$\int_{\Omega} (\Delta + \lambda)\dot{u}\overline{\psi} = 0$$

Assim,

$$\int (\Delta + \lambda) w \overline{\psi} = 0 \quad \forall w \in \mathrm{H}^2 \cap \mathrm{H}_0^1(\Omega, \mathbb{C})$$

e ψ é solução fraca, portanto forte de:

$$(\Delta + \lambda)\psi = 0 \text{ em } \Omega, \quad \psi = 0 \text{ em } \partial\Omega$$

Variando $\dot{h}$:

$$\begin{aligned}
0 &= Re \int_\Omega -((\Delta + \lambda)\dot{h} \cdot \nabla u) \cdot \psi \\
&= Re \int_\Omega \dot{h} \cdot \nabla u (\Delta + \lambda)\overline{\psi} - ((\Delta + \lambda)\dot{h} \cdot \nabla u) \cdot \overline{\psi} \\
&= Re \int_\Omega (\dot{h} \cdot \nabla u)\Delta\overline{\psi} - \Delta(\dot{h} \cdot \nabla u) \cdot \overline{\psi} \\
&= Re \int_{\partial\Omega} \dot{h} \cdot \nabla u \cdot \frac{\partial \overline{\psi}}{\partial N} \\
&= Re \int_{\partial\Omega} \dot{h} \cdot N \frac{\partial u}{\partial N} \cdot \frac{\partial \overline{\psi}}{\partial N}
\end{aligned}$$

É fácil verificar que $\frac{\partial u}{\partial N} \cdot \frac{\partial \overline{\psi}}{\partial N}$ é função par e então:

$$Re \frac{\partial u}{\partial N} \cdot \frac{\partial \overline{\psi}}{\partial N} = 0 \text{ em } \partial\Omega.$$

Mas agora não temos uma contradição imediata.

É para superar esta dificuldade que necessitaremos do Teorema da Transversalidade de Henry.

2.2.3 Genericidade dos auto-valores simples

Lema 2.2 *Seja $G \subset O(n)$, Ω uma região de classe C^3 G-simétrica e conexa, e $\mathcal{X}$ um caracter não real de G. Seja:*

$$M_{\mathcal{X}}{}^2 = M_{\mathcal{X}} \cap H^2 \cap H_0^1(\Omega, C)$$

Consideremos o operador:

$$G_{\mathcal{X}} : (M_{\mathcal{X}}{}^2 \setminus \{0\}) \times (M_{\overline{\mathcal{X}}}{}^2 \setminus \{0\}) \times D_n \times E \longrightarrow M_{\mathcal{X}} \times M_{\overline{\mathcal{X}}} \times \mathbb{Z}$$

definido por:

$$G_{\mathcal{X}}(\varphi,\psi,\lambda,h) = (h^*(\Delta+\lambda)h^{*-1}\varphi, h^*(\Delta+\lambda)h^{*-1}\psi, h^*B_{h(\Omega)}h^{*-1}(\varphi,\psi))$$

onde:

- D_n = *disco fechado de raio* n *em* C
- $E = \{$*mergulhos equivariantes de* Ω *em* $\mathbb{R}^n$ *de classe* $\mathcal{C}^3$ $\}$
- $\mathbb{Z} = \{\ u \in \mathbf{L}^1(\partial\Omega) | u \circ g = u\ \ \forall g \in G\ \}$
- $B_\Omega(u,v) = Re\left(\frac{\partial\varphi}{\partial N} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial N}\right)$
- $\overline{\mathcal{X}}(g) = \overline{\mathcal{X}(g)}$

Então o conjunto:

$$\tilde{E} = \{h \in E \ \ tais\ que\ \ 0 \in Im(G_{\mathcal{X}}(.,.,.,h))\}$$

é raro (isto é : fechado e de interior vazio).

A prova deste resultado é bastante longa e baseada no Teorema da Transversalidade de Henry. Vamos adiá-la para o próximo capítulo e ver que consequências podemos obter se o supomos verdadeiro.

Lema 2.3 *Se* $G = \mathbb{Z}_n$, *os autovalores do problema de Dirichlet para o Laplaciano são todos simples* (isto é : dimensão do auto-espaço complexo = 1) *para um conjunto residual de regiões* Ω *de classe* $\mathcal{C}^3$ G *- simétricas e conexas, se nos restringimos a cada um dos sub-espaços* $M_{\mathcal{X}}$.

Demonstração: No caso em que $\mathcal{X}(g) = \pm 1\ \ \forall g \in G$ já sabemos que o resultado vale em espaços reais e daí segue facilmente o mesmo resultado para espaços complexos.

Suponhamos $\mathcal{X}(g) \neq \pm 1$ para algum $g \in G$. Consideremos o conjunto das regiões (G-simétricas) tais que os auto-valores de módulo $\leq n \in \mathbb{N}$ são todos simples. Este

conjunto é aberto em consequência do Teorema das Funções Implícitas. Precisamos mostrar que é também denso.

Seja Ω uma região nas condições do enunciado. Agora apliquemos o Teorema da Transversalidade (na versão usual) para:

$$F_{\mathcal{X}} : (M_{\mathcal{X}} \cap \mathrm{H}^2 \cap \mathrm{H}_0^1(\Omega, \mathbb{C}) \setminus \{0\} \times D_n \times E^0 \longrightarrow M_{\mathcal{X}}$$

definido por:

$$F_{\mathcal{X}}(u, \lambda, h) = h^*(\Delta + \lambda)h^{*-1}u$$

onde E^0 é o complementar do conjunto $\tilde{E}$ fornecido pelo lema acima; portanto aberto e denso.

A aplicação $F_{\mathcal{X}}$ é a mesma definida em 2.2.2 acima, somente com domínio convenientemente restringido. As mesmas considerações lá feitas se aplicam agora e, se supusermos que 0 não é valor regular, seguirá que existem auto-funções φ e $\psi \in M_{\mathcal{X}}(\Omega)$ associadas a um auto-valor λ de módulo $\leq n$ tais que: $G_{\mathcal{X}}(\varphi, \psi, \lambda, h) = 0$
Mas isso é impossível se $h \in E_0$.

Portanto 0 é valor regular e os auto-valores de módulo $\leq n$ em $\mathrm{h}(\Omega)$ são todos simples se $\mathrm{h} \in E_0$

Para obter o resultado desejado, basta fazer interseção com n variando em $\mathbb{N}$ $\square$.

Vemos então que os auto-valores do Laplaciano são genericamente, simples em cada sub-espaço $M_{\mathcal{X}}$. Podem, entretanto, existir auto-valores múltiplos associados a auto-funções em subespaços $M_{\mathcal{X}}$ e $M_{\mathcal{X}'}$ distintos. De fato, como os auto-valores são reais, se $u \in M_{\mathcal{X}}$ é auto-função associada a λ então $\overline{u} \in M_{\overline{\mathcal{X}}}$ também o é.

Em vista disso propomos a seguinte definição que será adequada para grupos comutativos em geral. Para a definição geral de G-simples ver def. 4.1.

Definição 2.1 *Seja $G \subset O(n)$ um grupo comutativo. Um auto-valor do Laplaciano em uma região Ω G-simétrica é* G-simples *se o seu auto-espaço tem uma base da forma $\{ u, \overline{u} \}$ com $u \in M_{\mathcal{X}}$ para algum caracter $\mathcal{X}$ de G. (No caso de caracter real $u = \overline{u}$).*

Temos então o resultado abaixo, cuja demonstração será feita no capítulo 4 , usando o Teorema da Transversalidade de Henry (Teorema 1.1).

Teorema 2.2 *Se $G = \mathbb{Z}_n$, os auto-valores do Laplaciano são todos G-simples para um conjunto residual de regiões Ω de classe C^3 G-simétricas.*

2.2.4 Retorno aos espaços reais

Os resultados anteriores foram obtidos em espaços complexos. No entanto, a 'tradução' do teorema 2.2 para espaços reais é bastante simples.

Corolário 2.1 *Se $G = \mathbb{Z}_n$, então, para um conjunto residual de regiões Ω de classe C^3 , G-invariantes temos somente 2 tipos de auto-valores do problema de Dirichlet para o Laplaciano:*

1 - $\mathcal{X}(g) = \pm 1 \forall g \in G$. *Auto-valores simples, associados a auto-funções reais originadas de auto-funções complexas em $M_{\mathcal{X}}$.*

2 - $\mathcal{X}(g) \neq \pm 1$ **para algum** $g \in G$. *Auto-valores duplos, associados a pares de auto-funções $v = Re(u)$, $w = Im(u)$, onde u é auto-função complexa em $M_{\mathcal{X}}$ e $\mathcal{X}(g) \neq \pm 1$ para algum $g \in G$.*

Nesse caso teremos:

$$\begin{bmatrix} v \circ g^{-1} \\ w \circ g^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_g & -\sin\theta_g \\ \sin\theta_g & \cos\theta_g \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}$$

onde $e^{i\theta_g} = \mathcal{X}(g)$.

Demonstração. Seja $u = v + iw$ auto-função em $M_{\mathcal{X}}$. É claro que v e w são auto-funções associadas ao mesmo auto-valor λ.

Tudo o que precisamos mostrar então é que v e w são linearmente dependentes sobre $\mathbb{R}$ se e somente se, $\mathcal{X}(g) = \pm\ 1$ para todo $g \in G$.

Suponhamos que v e w são L.D. sobre $\mathbb{R}$. Então existem constantes reais a e b tais que:

$$\begin{aligned} av + bw &= 0 \\ av \circ g^{-1} + bw \circ g^{-1} &= 0 \end{aligned} \quad \forall g \in G.$$

Escrevendo $\mathcal{X}(g) = e^{i\theta_g}$, temos:

$$\begin{aligned} av + bw &= 0 \\ a(cos\theta_g v - sen\theta_g w) + b(sen\theta_g v + cos\theta_g w) &= 0 \end{aligned}$$

e, portanto:

$$\begin{aligned} 0 &= cos\theta_g(av + bw) + sen\theta_g(-aw + bv) \\ 0 &= sen\theta_g(-aw + bv) \end{aligned}$$

Se $bv - aw = 0$, seguiria $a = b = 0$, contra a hipótese. Portanto

$$sen\theta_g = 0 \quad e \quad \mathcal{X}(g) = \pm 1 \ \forall g \in G$$

como queríamos.

Reciprocamente, se

$$\mathcal{X}(g) = \pm 1 \, \forall g \in G$$

é fácil ver que v e w são auto-funções em $M_{\mathcal{X}}$ associadas a λ e, portanto, linearmente dependentes sobre $\mathbb{C}$. Sendo funções reais elas devem ser também linearmente dependentes sobre $\mathbb{R}$ $\square$.

Observação 2.1 *Como veremos no próximo capítulo, os espaços $M_{\mathcal{X}}$ são todos não triviais(de fato de dimensão ∞ sob hipóteses modestas). Assim, existem, em qualquer região Ω G-simétrica, auto-valores duplos (pelo menos), exceto no caso em que todos os caracteres são reais o que só ocorre se $G = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_2$.*

2.3 $G = D_3$

O grupo D_3 das simetrias do triângulo equilátero é o subgrupo de $O(2)$ gerado pelos operadores:

$$\begin{array}{lllll} \text{rotação:} & g: & z & \longrightarrow & e^{2\pi/3iz} \\ \text{reflexão:} & h: & z & \longrightarrow & \bar{z} \end{array}$$

(estamos identificando $\mathbb{R}^2$ com os complexos para facilitar a notação).
Este grupo é isomorfo a S_3, o grupo de permutações de 3 elementos.
Se tentarmos aqui o mesmo procedimento dos exemplos anteriores iremos encontrar uma séria dificuldade: não conseguiremos uma decomposição conveniente de $L^2(\Omega)$ (ou $L^2(\Omega, \mathbb{C})$) como antes. Num certo sentido, nós não temos agora um

"número suficiente" de caracteres. Para esclarecer melhor este ponto precisamos introduzir alguns conceitos da Teoria de Representação de Grupos (para mais detalhes ver apêndice A ou [4]).

2.3.1 Alguns Conceitos da Teoria de Representação de Grupos

Seja G um grupo e $L(E)$ o espaço dos operadores em um espaço vetorial E. Uma *representação de G em E* é uma aplicação:
$V : G \longrightarrow L(E)$ satisfazendo :

a) $V_{xy} = V_x.V_y \quad \forall x, y \in G$

b) $V_e = Id$

A dimensão do *espaço de representação E* é a *dimensão de V*. V é *redutível* se existe um subespaço $E' \subset E$ que é invariante para todo V_x. Caso contrário V é *irredutível*. Se E é um espaço normado V é dita *(fortemente) contínua* se:

$$\lim_{x \to e} V_x \xi = \xi \quad \forall \xi \in E$$

Se E é um espaço de Hilbert, uma representação contínua V é dita *unitária (ortogonal no caso real)* se todo V_x é unitário (ortogonal), ou seja:

$$\langle V_x \xi \, , \, V_x \eta \rangle \; = \; \langle \xi \, , \, \eta \rangle \;\; \forall \xi \, , \, \eta \in E$$

Duas representações unitárias(ortogonais) ; $V : G \to L(E)$ e $V' : G \to L(V')$ são *equivalentes* se existe uma isometria linear B : $E \to$ E' tal que:

$$V_x \; = \; B^{-1} V_x B \;\; \forall x \in G.$$

Agora, se G é comutativo compacto pode-se provar que *toda representação unitária irredutível tem dimensão 1*, ou seja é um caracter de G. Reciprocamente, *se toda representação unitária irredutível é unidimensional então G é comutativo.*

Se G é não comutativo, para obter uma decomposição de algum modo análoga à dos exemplos anteriores, precisaremos utilizar representações de dimensão > 1. No caso $G = D_3$, precisaremos utilizar representações de dimensão 2 quer trabalhemos em espaços complexos ou reais. Escolhemos por isto, trabalhar em espaços reais.

2.3.2 As representações ortogonais irredutíveis de D_3

Vamos descrever as classes de equivalência de representações ortogonais irredutíveis de D_3. Para tanto, basta descrever a imagem dos 2 geradores de D_3 ; a rotação que denotamos por g e a reflexão que denotamos por h.

Existem 3 classes das quais indicamos representantes como segue:

1. $\begin{array}{lcl} g & \longrightarrow & 1 \\ h & \longrightarrow & 1 \end{array}$

2. $\begin{array}{lcl} g & \longrightarrow & 1 \\ h & \longrightarrow & -1 \end{array}$

3. $\begin{array}{lcl} g & \longrightarrow & \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \\ h & \longrightarrow & \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$

(onde estamos identificando operadores em $\mathbf{R}^2$ e matrizes da maneira usual).

2.3.3 Decomposição em $\mathrm{L}^2(\Omega)$

A cada classe de equivalência de representação ortogonal corresponde uma projeção ortogonal em $\mathrm{L}^2(\Omega)$ (ver apêndice A). Temos então:

$$\begin{aligned} P_1(u) &= 1/6 \sum_{x \in G} u \circ x^{-1} \\ P_2(u) &= 1/6(u + u \circ g^2 + u \circ g - u \circ h - u \circ g \circ h - u \circ g^2 \circ h) \\ P_3(u) &= 1/6(4u - 2u \circ g^2 - 2u \circ g) \\ &= 1/3(2u - u \circ g^2 - u \circ g) \end{aligned}$$

As 2 primeiras são completamente análogas às dos exemplos anteriores.

Se fizermos $M_i = P_i(\ \mathrm{L}^2(\Omega)\ )$ $i = 1, 2, 3$ teremos:

$$M_1 = \{u \in \mathrm{L}^2(\Omega) \ | u \circ x^{-1} = \mathcal{X}_1(x)u \quad \forall x \in G\}$$

$$M_2 = \{u \in \mathrm{L}^2(\Omega) \ | u \circ x^{-1} = \mathcal{X}_2(x)u \quad \forall x \in G\}$$

onde $\mathcal{X}_1$ e $\mathcal{X}_2$ são os caracteres determinados pelas representações 1. e 2. acima.

Já o subespaço M_3 não pode ser caracterizado de maneira tão simples; tudo o que podemos dizer é que existe uma base ortonormal $\{u_1, v_1, u_2, v_2, \ldots, u_n, v_n \ldots\}$ de M_3 tal que:

$$\begin{array}{rclrcl} u_i \circ g^{-1} & = & (1/2)u_i - (\sqrt{3}/2)v_i & u_i \circ h^{-1} & = & -u_i \\ v_i \circ g^{-1} & = & (\sqrt{3}/2)u_i - (1/2)v_i & v_i \circ h^{-1} & = & v_i \end{array}$$

ou seja:

$$\begin{bmatrix} u_i \circ g^{-1} \\ v_i \circ g^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_i \circ h^{-1} \\ v_i \circ h^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix}$$

M_3 é também invariante pelo Laplaciano, mas agora temos uma nova situação quanto à multiplicidade dos auto-valores que será descrita abaixo.

2.3.4 Multiplicidade dos auto-valores em M_3

Proposição 2.1 *Seja Ω uma região de classe C^2, D_3 G-simétrica. Então todo auto-valor do operador:*

$$-\Delta : H^2 \cap H_0^1(\Omega) \cap M_3 \longrightarrow M_3$$

é (no mínimo) duplo.

Demonstração. Suponhamos que λ é auto-valor simples do operador acima, associado à auto-função $u \neq 0$. Então $u \circ g$ também é auto-função associada a λ e $u \circ g \in M_3$. Segue que u e $u \circ g$ devem ser L.D. e, de fato, $u = \pm u \circ g$ já que g é uma isometria. Ainda mais, como $g^3 = 1$ não podemos ter $u = -u \circ g$ pois, nesse caso:

$$u = u \circ g^3 = ((u \circ g) \circ g) \circ g = -u$$

e então $u = 0$.

Portanto, devemos ter $u = u \circ g$.

Mas então:

$$u = (P_3 u) = 1/6(4u - 4u) = 0$$

contra a hipótese $\square$.

Observação 2.2 *É fácil ver aqui (e provaremos em um caso mais geral) que $M_3 \neq \{0\}$. Portanto, ocorrem auto-valores múltiplos (ao menos duplos) em toda região D_3 - simétrica. Além disso, ao contrário dos exemplos anteriores, não podemos evitar esta ocorrência passando para espaços de funções complexas.*

O ponto fundamental aqui é que, sendo D_3 não comutativo, existem representações irredutíveis de dimensão 2, mesmo se permitirmos representações complexas.

2.3.5 A situação genérica para G = D_3

Em vista da observação acima o "melhor" que podemos esperar é que os auto-valores do Laplaciano em regiões D_3 simétricas tenham multiplicidade ≤ 2. Isso de fato é o que ocorre como veremos a seguir.

Lema 2.4 *Se $G = D_3$, os auto-valores do operador:*

$$-\Delta : M_i \cap H^2 \cap H_0^1(\Omega) \longrightarrow M_i \quad \textit{são:}$$

- *simples para $i = 1,2$.*
- *duplos para $i = 3$*

num conjunto residual de regiões G-simétricas, conexas, C^3.

Esboço da Demonstração. Em M_1 e M_2 a demonstração é a mesma do exemplo 1 (ver lema 2.1)

Para tratar do problema em M_3, porém, precisaremos de uma nova estratégia. Introduzimos o espaço $\mathbf{X} \subset \mathrm{L}^2(\Omega) \times \mathrm{L}^2(\Omega)$ definido por:

$$\mathbf{X} = \{(u,v) \in \mathrm{L}^2(\Omega) \times \mathrm{L}^2(\Omega) \quad \text{satisfazendo a) e b) abaixo}\}$$

$$\text{a)} \quad \begin{bmatrix} u \circ g^{-1} \\ v \circ g^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

$$\text{b)} \quad \begin{bmatrix} u \circ h^{-1} \\ v \circ h^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

Note-se que, se $(u,v) \in \mathbf{X} \setminus \{0\}$ então u e v são linearmente independentes pois:

$$\int_{\Omega=h^{-1}(\Omega)} u \cdot v = \int_{\Omega} (u \circ h^{-1}) \cdot (v \circ h^{-1}) = -\int_{\Omega} u \cdot v \Longrightarrow \int_{\Omega} u \cdot v = 0$$

Uma *auto-função de* $-\Delta$ *em* $\mathbf{X}$ é, por definição, um par $(u,v) \in \mathbf{X}$ tal que: u e v são auto-funções associadas ao mesmo auto-valor. Se λ é auto-valor simples de $-\Delta$ em $\mathbf{X}$ então λ é auto-valor duplo de $-\Delta$ em M_3. De fato, se $(u,v) \in \mathbf{X}$ é não nula então é fácil de ver que u e v são ambas não nulas e, portanto, L.I. como observado acima. Além disso, temos:

$$\begin{aligned} P_3 u &= 1/6\left(4u - 2(-(1/2)u - (\sqrt{3}/2)v) - 2(-(1/2)u + (\sqrt{3}/2)v)\right) \\ &= u \end{aligned}$$

e analogamente:

$$P_3 v = v.$$

Segue que u e v estão em M_3.
Seja:

$$\mathbf{E} = \{h : \Omega \to \mathbf{R}^n, \text{ mergulhos de classe } \mathcal{C}^3 \text{ tais que } h \circ x = x \cdot h \ \ \forall x \in G\}$$

Consideremos a aplicação:

$$\mathbf{F} : \mathbf{X} \cap (\mathrm{H}^2 \cap \mathrm{H}_0^1(\Omega))^2 \setminus \{0\} \times \mathbf{R} \times \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{X}$$

definida por:

$$\mathbf{F}\left((u,v)\,,\,\lambda\,,\,h\right) = \begin{bmatrix} h^{\star}(\Delta + \lambda)h^{\star -1}u \\ h^{\star}(\Delta + \lambda)h^{\star -1}v \end{bmatrix}$$

Se pudermos provar que 0 é valor regular desta aplicação, seguiria que os auto-valores de $-\Delta$ em $\mathbf{X}$ são, genericamente, simples e, portanto, os auto-valores de $-\Delta$ em M_3 são, genericamente, duplos.

Se, por contradição, supusermos que 0 não é valor regular concluiremos que a derivada de $\mathbf{F}$ em $h = i_{\Omega}$: $F'(i_\Omega, (u,v), \lambda)$

$$\begin{aligned} &\left(\dot{h}\,,\,(\dot{u},\dot{v})\,,\,\dot{\lambda}\right) \longrightarrow \mathbf{F}'(i_{\Omega}, u, \lambda)(\dot{h}, \dot{u}, \dot{\lambda}) = \\ &\quad (\Delta + \lambda)(\dot{u},\dot{v}) \;+\; \dot{\lambda}(u,v) \;+\; (\dot{h} \cdot \nabla)(\Delta + \lambda)(u,v) \;-\; (\Delta + \lambda)\dot{h} \cdot \nabla(u,v) \end{aligned}$$

não é sobrejetora. Existirá então, $\Phi = (\varphi, \psi) \neq 0$ em $\mathbf{X}$ ortogonal à imagem da derivada.

$$\therefore \int_\Omega \varphi(\Delta + \lambda)\dot{u} + \psi(\Delta + \lambda)\dot{v} = 0 \qquad \forall(\dot{u}, \dot{v}) \in \mathbf{X} \cap (\mathrm{H}^2 \cap \mathrm{H}_0^1(\Omega))^2$$

e, trivialmente, para todo $(\dot{u}, \dot{v}) \in \mathbf{X}^\perp$ e, portanto, para todo

$$(\dot{u}, \dot{v}) \in (\mathrm{H}^2 \cap \mathrm{H}_0^1(\Omega))^2$$

Tomando $\dot{u}$, $\dot{v}$, sucessivamente nulos concluímos que φ e ψ satisfazem:

$$\begin{aligned} (\Delta + \lambda)\varphi = (\Delta + \lambda)\psi &= 0 \quad \text{em} \quad \Omega \\ \varphi_{|\partial\Omega} = \psi_{|\partial\Omega} &= 0 \end{aligned}$$

Variando agora $\dot{h}$:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega ((\Delta + \lambda)\dot{h} \cdot \nabla u)\varphi + ((\Delta + \lambda)\dot{h} \cdot \nabla v)\psi \\ &= -\int_{\partial\Omega} \dot{h} \cdot N(\frac{\partial u}{\partial N} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial N} + \frac{\partial v}{\partial N} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial N}) \end{aligned}$$

Como

$$(\frac{\partial u}{\partial N} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial N} + \frac{\partial v}{\partial N} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial N})$$

é par,

$$(\frac{\partial u}{\partial N} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial N} + \frac{\partial v}{\partial N} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial N}) \equiv 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega$$

Isto não nos leva imediatamente a uma contradição. Assim sendo, procedemos de maneira análoga à exemplo anterior; primeiro provamos que a igualdade acima só pode ocorrer num conjunto raro de regiões, usando o Teorema da Transversalidade de Henry e, em seguida, aplicamos o Teorema da Transversalidade usual no conjunto complementar para obter, finalmente, a contradição procurada $\square$.

Ainda podemos ter auto-valores de multiplicidade maior do que 2, associados a auto-funções em subespaços invariantes distintos(por exemplo, em M_1 e M_3). Essa situação pode ser desfeita, porém usando novamente o Teorema da Transversalidade de Henry. Obtemos então o seguinte resultado:

Teorema 2.3 *Para um conjunto residual de regiões de classe C^3, D_3 - simétricas os auto-valores do problema de Dirichlet para o Laplaciano podem ser de dois tipos:*

1. simples *e associados a uma auto-função em M_1 ou M_2.*
2. duplos *e associados a um par de auto-funções u e v em M_3 satisfazendo:*

$$\begin{bmatrix} u \circ g^{-1} \\ v \circ g^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u \circ h^{-1} \\ v \circ h^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

(onde g é a rotação de ângulo $2\pi/3$ e h a reflexão)

Capítulo 3

Multiplicidade dos Auto-Valores do Laplaciano em Regiões Simétricas

Como já fizemos no capítulo 2, iremos nos referir ao problema de auto-valores:

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0 & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

onde Ω é um domínio limitado de classe $\mathcal{C}^2$, como o Problema de auto-valores do Problema de Dirichlet para o Laplaciano ou, mais simplesmente, Problema de auto-valores para o Laplaciano.

Neste capítulo, G indicará sempre um subgrupo do grupo ortogonal $O(n)$ e Ω uma região *G-invariante (ou G-simétrica)* ou seja: $g\Omega = \Omega \ \forall g \in G$. Queremos mostrar que, neste caso, (e com mais uma hipótese técnica adicional) existem, necessariamente, auto-valores múltiplos para o problema acima (de fato de multiplicidade pelo menos tão alta quanto a dimensão das representações irredutíveis de G).

Estaremos interessados, em princípio, no Problema de auto-valores para o Laplaciano em espaços de funções *a valores reais*, isto é, nos autovalores do operador:

$$-\Delta : \mathbf{H}^2 \cap \mathbf{H}_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\Omega)$$

onde $\mathrm{L}^2(\Omega)$, etc... são espaços de funções a valores reais. Entretanto, por razões técnicas, será útil considerar o problema também na forma complexa. Neste caso,

indicaremos por $L^2(\Omega, \mathbb{C})$, $H^2 \cap H_0^1(\Omega, \mathbb{C})$, etc... os espaços de funções a valores complexos que serão considerados como espaços vetoriais sobre $\mathbb{C}$.

3.1 Uma decomposição conveniente em $L^2(\Omega, C)$

Para obter uma decomposição de $L^2(\Omega, \mathbb{C})$ adequada aos nossos propósitos lançaremos mão do teorema A.4 do apêndice A. De fato a representação:

$$\Gamma : G \to L^2(\Omega, \mathbb{C})$$

definida por:

$$\Gamma_g u = u \circ g^{-1} \quad \forall g \in G, \quad \forall u \in L^2(\Omega, \mathbb{C})$$

(que denominamos representação quase-regular de G no apêndice A) é uma representação unitária. Esta representação goza ainda de outra propriedade muito importante para os nossos propósitos: ela 'comuta' com o Laplaciano ou seja:

$$(\Gamma_g \circ \Delta)u = \Gamma_g(\Delta u) = (\Delta u) \circ g^{-1} = \Delta(u \circ g^{-1}) = (\Delta \circ \Gamma_g)u$$

para todo $u \in H^2 \cap H_0^1(\Omega, \mathbb{C})$, para todo $g \in G$.

Observação 3.1 *Precisaremos agora utilizar resultados e a notação do Apêndice A. Procuraremos lembrá-los sucintamente à medida que os formos utilizando. É provável, porém, que uma leitura ainda que rápida do Apêndice A (em especial da seção A.1) seja conveniente neste ponto.*

Para cada $\sigma \in \hat{G}$ (isto é: para cada classe de equivalência de representações irredutíveis de G), seja P_σ a projeção definida no Teorema A.4. Ou seja:

$$P_\sigma : L^2(\Omega, \mathbb{C}) \to L^2(\Omega, \mathbb{C})$$

definida por:

$$\langle P_\sigma f \ , \ g \rangle = \int_G \langle \Gamma_g f \ , \ g \rangle \, d_\sigma \overline{\chi_\sigma(g)} \, dg$$

onde $\langle u \ , \ v \rangle = \int_\Omega u.\bar{v}$ é o produto interno usual em $L^2(\Omega, \mathbb{C})$.

(Se $G \xrightarrow{V} L(H)$ é uma representação de G na classe σ então: $\mathcal{X}_\sigma(g) = trV_g$ é o caracter de σ, $d_\sigma = dimH$ é a dimensão de σ e dg é a medida de Haar em G).
O teorema A.4 afirma então que, fazendo $M_\sigma = P_\sigma(\ \mathrm{L}^2(\Omega, \mathbb{C})\ )$, os M_σ são subespaços (fechados), ortogonais dois a dois de $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathbb{C})$ e:

$$\mathrm{L}^2(\Omega, \mathbb{C}) = \bigoplus_{\sigma \in \hat{G}} M_\sigma$$

3.2 Multiplicidade dos auto-valores

Lema 3.1 *Os subespaços M_σ definidos como acima são invariantes pelo Laplaciano. Mais precisamente, o operador Laplaciano é uma transformação linear de $M_\sigma \bigcap H^2 \cap H_0^1(\Omega, C)$ em M_σ.*

Demonstração. Sejam u e v funções em $\mathrm{H}^2 \cap \mathrm{H}_0^1(\Omega, \mathbb{C})$. Temos então:

$$\begin{aligned}
\langle P_\sigma \Delta u\ ,\ v\rangle &= \int_G \langle (\Delta u) \circ g^{-1}\ ,\ v\rangle d_\sigma \overline{\mathcal{X}_\sigma}(g) dg \\
&= \int_G \langle \Delta(u \circ g^{-1})\ ,\ v\rangle d_\sigma \overline{\mathcal{X}_\sigma}(g) dg \\
&= \int_G \langle u \circ g^{-1}\ ,\ \Delta v\rangle d_\sigma \overline{\mathcal{X}_\sigma}(g) dg \\
&= \langle P_\sigma u\ ,\ \Delta v\rangle \\
&= \langle \Delta P_\sigma u\ ,\ v\rangle
\end{aligned}$$

(note-se que $P_\sigma u \in \mathrm{H}^2 \cap \mathrm{H}_0^1(\Omega, \mathbb{C})$.)
Como $\mathrm{H}^2 \cap \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ é denso em $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathbb{C})$, segue que:

$$P_\sigma \Delta u = \Delta P_\sigma u$$

isto é: P_σ e Δ comutam.
O resultado desejado segue imediatamente desta relação $\square$.

Proposição 3.1 *Cada um dos espaços M_σ pode ser decomposto em soma direta de subespaços $M_\sigma{}^i$ satisfazendo:*

1. *$M_\sigma{}^i$ é invariante para a representação Γ e $\Gamma_{|M_\sigma{}^i}$ é uma representação irredutível na classe σ ($M_\sigma{}^i$ é de dimensão finita por A.1).*

2. *$M_\sigma{}^i$ é invariante para o Laplaciano e $\Delta_{|M_\sigma{}^i}$ é um múltiplo da Identidade (ou seja: $M_\sigma{}^i$ é constituído de auto-funções do Laplaciano associadas a um mesmo auto-valor λ).*

Demonstração: Em primeiro lugar, escrevemos M_σ como soma direta de auto-espaços do Laplaciano.

$$M_\sigma = \oplus V_\lambda$$

Como Γ comuta com Δ, se u é auto-função associada a um auto-valor λ então, para todo $g \in G$, $\Gamma_g u = u \circ g^{-1}$ também o é.

Portanto, cada auto-espaço V_λ é invariante para a representação Γ. Seja $V_\lambda = V_\lambda^1 \oplus \ldots \oplus V_\lambda^k$ a decomposição de V_λ em soma direta de sub-espaços irredutíveis (cuja existência é garantida pelo teorema A.4). Isto fornece a decomposição procurada de M_σ □.

Corolário 3.1 *A multiplicidade de cada auto-valor do Laplaciano em M_σ é um múltiplo (não nulo se $M_\sigma \neq \{0\}$) da dimensão d_σ de uma representação irredutível na classe σ.*

Demonstração É consequência imediata de 3.1 □.

Teorema 3.1 *Suponhamos que $G \subset O(n)$ possui um ponto livre $x \in \Omega$ (isto é: $G_x = \{Id\}$).*

Então, para cada $\sigma \in \hat{G}$ existe um auto-valor λ do Problema de auto-valores para o Laplaciano e um subespaço H do auto-espaço associado V_λ tal que $\Gamma_{|H}$ está na classe σ. Em particular, para todo $\sigma \in \hat{G}$, existem (infinitos) auto-valores cuja multiplicidade é um múltiplo não nulo da dimensão d_σ de qualquer representação de G na classe σ.

Demonstração. Em vista do Teorema A.8, cada M_σ é um espaço de dimensão infinita. A afirmação segue então imediatamente da proposição 3.1 □.

Observação 3.2 *Seja H como no Teorema 3.1 acima. Se v é auto-função em H então a 'órbita de v por G' $= \{v \circ g \mid g \in G\}$ é um conjunto de geradores de H, já que H é irredutível (ver prop A.4). Em outras palavras, podemos obter tantas auto-funções linearmente independentes quanto for a dimensão de H, pela composição de v com os elementos do grupo G.*

3.3 Representações matriciais e auto-valores do Laplaciano

Queremos agora colocar os resultados até aqui obtidos numa forma mais explícita (embora correndo o risco de sermos repetitivos).

Seja $\varphi : G \to L(V)$ uma representação unitária e irredutível de G. Escolhendo uma base ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de V, a representação pode ser dada, indicando, para cada $g \in G$ a matriz de φ_g em relação a esta base:

$$g \longrightarrow \begin{bmatrix} a_{11}(g) & \ldots & a_{1n}(g) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}(g) & \ldots & a_{nn}(g) \end{bmatrix}$$

O teorema 3.1 nos diz então que existe um subespaço H de $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathbb{C})$ formado por auto-funções do Laplaciano tal que $\Gamma_{|H}$ é equivalente a V. Em outras palavras, existe uma isometria linear $T : V \to H$ que faz comutar o diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} & V & \xrightarrow{T} & H & \\ \varphi_g & \downarrow & & \downarrow & \Gamma_{g|H} \\ & v & \xrightarrow{T} & H & \end{array} \quad \text{para todo } g \in G.$$

Façamos $v_i = T(e_i)$. A matriz de $\Gamma_{g|H}$ na base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é então igual à matriz de φ_g na base $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Em outras palavras, as auto-funções $v_1, \ldots, v_n$ satisfazem à relação:

$$v_i \circ g^{-1} = \sum_j a_{ji}(g) v_j$$

que podemos indicar na forma:

$$\begin{bmatrix} v_1 \circ g^{-1} \\ \vdots \\ v_n \circ g^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}(g) & a_{21}(g) & \dots & a_{n1}(g) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n}(g) & a_{2n}(g) & \dots & a_{nn}(g) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

3.4 Retorno aos espaços reais

Obtivemos nossos resultados até aqui, trabalhando em espaços de funções a valores complexos, embora nosso interesse principal seja por funções a valores reais. O motivo deste procedimento é que a Teoria de Representações é apresentada, nos textos-padrão, em espaços complexos. Poderíamos obter os resultados da Teoria que precisamos em espaços reais utilizando a 'complexificação'. De fato, utilizaremos esta técnica no apêndice A1 para obter um teorema de decomposição de representações reais. Os resultados que lá obtivemos poderiam ser utilizados para conseguir resultados sobre multiplicidade dos auto-valores em espaços reais de maneira análoga à que utilizamos no caso complexo. Aqui, entretanto, pretendemos estender os resultados sobre multiplicidade dos auto-valores para espaços reais, utilizando apenas um mínimo indispensável da teoria.

Nesta seção G será sempre um subgrupo compacto de $O(n)$ e Ω uma região $G-$invariante na qual existe um ponto livre sob a ação de G. Indicaremos por $\Gamma_{\mathbb{R}}$ a representação quase-regular no espaço real $\mathrm{L}^2(\Omega)$ para distingui-la da representação Γ em $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathbb{C})$.

Proposição 3.2 *Seja $\varphi : G \to L(H)$ uma representação ortogonal (isto é: φ_g é operador ortogonal para todo $g \in G$) e irredutível de G no espaço (real) H.*

Então existe (pelo menos) um auto-valor cuja multiplicidade é um múltiplo não nulo da dimensão de H.

Demonstração. Vamos indicar por $\tilde{\varphi}_g$ o "complexificado" de φ_g. Em outras palavras, $\tilde{\varphi}_g$ é o operador linear definido em $\tilde{H} = H + iH$, o complexificado de H, definido por:

$$\tilde{\varphi}_g(v_1 + iv_2) = \varphi_g v_1 + i\varphi_g v_2$$

É fácil ver que $g \to \tilde{\varphi}_g$ é uma representação unitária de G em $\tilde{H}$ (onde o produto interno em $\tilde{H}$ está definido da maneira óbvia).
Vamos examinar os dois casos possíveis:

1. *$\tilde{\varphi}$ é irredutível*

   Neste caso, em vista do teorema 3.1 podemos encontrar $n = dimH$ auto-funções complexas linearmente independentes associadas a um mesmo auto-valor λ. É claro então que podemos obter (pelo menos) n auto-funções reais associadas ao mesmo auto-valor λ, considerando as partes real e imaginária das auto-funções complexas.

2. *$\tilde{\varphi}$ é redutível*

   Seja $F \subset \tilde{H}$ um subespaço invariante e irredutível para $\tilde{\varphi}$. Denotemos por $\overline{F}$ o subespaço.

$$\overline{F} = \{v_1 - iv_2 \mid v_1 + iv_2 \in F\}$$

   Afirmamos que $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}_{|F} \oplus \tilde{\varphi}_{|\overline{F}}$. Para prová-lo, observemos primeiro que $dimF = n/2$. De fato, se $\{w_1, \ldots, w_d\}$ é base de F então os $2d$ vetores $Rew_1, \ldots, Rew_d, Imw_1, \ldots, Imw_d$ geram um subespaço de H invariante por φ. Esse espaço deve ser todo o H pela irredutibilidade de φ o que não pode ocorrer se $d < n/2$.

   Agora, se $dimF > n/2$ então $dimF^{\perp} < n/2$ e basta repetir o argumento com $F^{\perp}$ no lugar de F.

   O subespaço $\overline{F}$ é também invariante por $\tilde{\varphi}$ (e de dimensão d). Portanto, a intersecão $F \bigcap \overline{F}$ é invariante e segue que $F \bigcap \overline{F} = \{0\}$ ou $F \bigcap \overline{F} = F$. A última hipótese não pode ocorrer pois, nesse caso, $ReF = \{w + \overline{w} \mid w \in F\}$ seria um subespaço de H de dimensão $n/2$ e invariante por φ. Isto prova nossa afirmação.

   O teorema 3.1 garante a existência de um subespaço $\tilde{W}$ contido em um auto-espaço $\tilde{V} - \lambda$ do Laplaciano tal que:

$$\Gamma_{|\tilde{W}} \simeq \tilde{\varphi}_{|F} \text{ e, portanto, } \Gamma_{|\overline{\tilde{W}}} \simeq \tilde{\varphi}_{|\overline{F}}$$

Segue que: $\Gamma_{|\tilde{W}\oplus\overline{\tilde{W}}} \simeq \tilde{\varphi}_{|F\oplus\overline{F}} = \tilde{\varphi}$

Como $\tilde{W}\oplus\overline{\tilde{W}} \subset V_\lambda$ obtemos, novamente n auto-funções complexas e, portanto, n auto-funções reais $\square$.

Proposição 3.3 *Suponhamos que G não é soma direta finita de grupos cíclicos de ordem 2 (ou seja G não é isomorfo a $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_2$). Então existem sempre auto-valores múltiplos (isto é: o auto-espaço tem dimensão real ≥ 2) para o Problema de auto valores para o Laplaciano em toda região G-simétrica.*

Demonstração. Se G não é comutativo, existe uma representação complexa de dimensão ≥ 2 conforme a proposição A.1 e, portanto, também uma real. O resultado segue então da proposição 3.2 acima.

Suponhamos que G é comutativo e, portanto, soma direta de cíclicos. Se um dos seus fatores não é isomorfo a $\mathbb{Z}_2$ então conforme comentário A.1 existe um caracter de $\mathcal{X}$ de G cuja imagem não está contida em $\{1, -1\}$. Mas, nesse caso, existe uma representação real de dimensão 2 e concluímos como acima.

Finalmente, se $G \subset O(n)$ é comutativo ele não pode conter infinitos elementos de ordem 2. De fato, podemos encontrar uma base em $\mathbb{R}^n$ onde qualquer desses elementos é uma matriz do tipo: $\begin{bmatrix} \pm 1 & & \\ & \ddots & \\ & & \pm 1 \end{bmatrix}$ $\square$.

Capítulo 4

A situação genérica para o Problema de Auto-Valores do Laplaciano

Seja $G \subset O(n)$ compacto e $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ uma região G-simétrica. Como vimos no capítulo anterior, o Problema de Dirichlet para o Laplaciano sempre apresenta, nessas condições, auto-valores múltiplos. De fato, como vimos, cada auto-espaço é invariante para a representação quase regular : $\Gamma(g)(u) = u \circ g^{-1}$ e, portanto, o "melhor" que podemos esperar é que cada auto-espaço V_λ seja irredutível. Porém, se estamos trabalhando em espaços de funções complexas, devemos observar ainda que, se V_λ é irredutível então $\overline{V_\lambda} = \{\overline{u} \mid u \in V_\lambda\} \subset V_\lambda$ e, portanto, devemos ter $\overline{V_\lambda} = V_\lambda$. Em geral, entretanto, isto não ocorre. Em particular, isto não pode ocorrer se o caracter da representação Γ restrita a V_λ (que estamos supondo irredutível) não é real (ou seja: $\mathcal{X}(g) \notin \mathbf{R}$ para algum $g \in G$). Propomos então a seguinte definição:

Definição 4.1 *Seja $G \subset O(n)$ grupo compacto, $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ uma região G-simétrica e λ um auto-valor do Laplaciano com auto-espaço V_λ. Então, se estamos trabalhando em espaços de funções a valores reais, diremos que λ é G-*simples *se V_λ é subespaço irredutível para a representação quase-regular de G em Ω.*
No caso de espaços complexos, dizemos que λ é $G-$ simples se V_λ é irredutível ou $V_\lambda = W \oplus \overline{W}$ com W e $\overline{W}$ irredutíveis.

Vamos provar adiante (prop. 4.1) que auto-valores G-simples não podem ser separados por pequenas perturbações que conservem a simetria. Nesse sentido, eles se comportam de maneira análoga aos auto-valores simples na ausência de simetria. Agora, dado um grupo $G \subset O(n)$, teremos como vimos no capítulo precedente, auto-valores $G-simples$ com multiplicidade tão alta quanto a dimensão das representações irredutíveis de G. Este desvio da situação genérica usual é imposta pela existência de simetrias. O que gostaríamos de provar é que, genericamente, não aparecem outras "degenerescências". Vamos apresentar então a seguinte:

Conjectura 4.1 *Se $G \subset O(n)$ é subgrupo compacto então os auto-valores do Laplaciano para o Problema de Dirichlet são genericamente G-simples, no conjunto das regiões G-simétricas.*

Observação 4.1 *Como consequência da proposição 4.1, seguirá facilmente que a propiedade de serem os auto-valores contidos em um compacto de Ctodos G-simples é aberta. A parte difícil da conjectura é, portanto, a densidade.*

O restante deste capítulo será dedicado à prova de resultados parciais nessa direção.

Em particular, provaremos que ela é verdadeira no caso em que G é comutativo e finito e no caso de subgrupos finitos de $O(2)$.

4.1 Alguns lemas técnicos

Seja $G \subset O(n)$ compacto e $A \subset \mathbb{R}^n$ G-simétrico. Lembremos que uma função $\varphi : A \to \mathbb{R}$ é denominada *par* se $\varphi \circ g = \varphi \ \forall g \in G$. Dizemos também que um campo $V : A \to \mathbb{R}^n$ é *equivariante* se $V(gx) = gV(x) \quad \forall g \in G, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Lema 4.1 *Seja $G \subset O(n)$ compacto ,$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ região G-simétrica e $\varphi : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ uma função contínua par. Indiquemos por N o vetor normal em Ω.*
Então existe um campo $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^∞ e equivariante tal que $V.N_{|\partial\Omega}$ está arbitrariamente próxima de φ na topologia uniforme. (Se $\varphi \in L^p(\partial\Omega)$ a aproximação pode ser feita em $L^p(\partial\Omega)$).

Demonstração. Seja $W : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ e próxima de $\varphi.N$ na topologia uniforme. Definimos $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ por:

$$V(x) = \int_G g^{-1}W(gx)dx$$

É claro que V é equivariante. Além disso temos:

$$\begin{aligned} V(x) - \varphi(x)N(x) &= \int_G g^{-1}W(gx) - \varphi(x)g^{-1}N(gx)\,dg \\ &= \int_G g^{-1}(W(gx) - \varphi(x)N(gx))\,dg \end{aligned}$$

e V está próxima de $\varphi.N$ na topologia uniforme. □

Queremos estudar o que acontece com os auto-valores do Laplaciano quando uma região Ω é transformada em uma região $\Omega_h = h(\Omega)$, onde h é um mergulho de classe $\mathcal{C}^2$ definido em Ω e próximo da inclusão: $i_\Omega \to \mathbb{R}^n$. Como indicamos em 1.3 este problema é equivalente a estudar os auto-valores do operador: $h^\star \Delta_{\Omega_h} h^{\star -1}$ na região fixa Ω.

Observemos que, se h é equivariante e Ω é G-simétrica então Ω_h também é G-simétrica.

Lembremos ainda, de 1.2, que, se Ω é limitada e de classe $\mathcal{C}^m$ podemos estender um mergulho $h : \Omega \to \mathbb{R}^n$ a um difeomorfismo em $Diff_o^m(\mathbb{R}^n)$.

Se $t \to h(t,.) \in \mathcal{C}^m\,(\Omega, \mathbb{R}^n)$ é uma curva lisa de mergulhos podemos estendê-la a uma curva lisa de difeomorfismos. Se h (ou $h(t,.)$) é equivariante a extensão pode ser feita a um difeomorfismo (ou curva de difeomorfismos) equivariante usando o mesmo argumento de "simetrização" do lema 4.1. Finalmente, o mesmo tipo de argumento mostra que toda região próxima de Ω e equivariante é imagem de Ω por um mergulho (ou difeo) próximo de i_Ω e equivariante.

Os resultados seguintes pertencem à Teoria de Perturbação de Operadores Lineares. Para a demonstração iremos nos referir ao texto clássico de Kato: "Perturbation Theory for Linear Operators".

Lema 4.2 *Consideremos uma curva de difeomorfismos em $\mathbb{R}^n$ da forma: $h(t,x) = x + t\phi(x)$ com ϕ de classe $\mathcal{C}^2$ e façamos: $A(t) = h_t^\star \Delta_{\Omega_{h_t}} h_t^{\star -1}$. Então existe*

um intervalo aberto I contendo o 0, uma sequência de funções escalares μ_n e uma sequência de funções $\varphi_n : I \to L^2(\Omega)$ todas analíticas em I e tais que para todo $t \in I$ os $\mu_n(t)$ representam os auto-valores de $A(t)$, contados com sua multiplicidade, e as $\varphi_n(t)$ formam uma família ortonormal completa de auto-funções associadas.

Demonstração. Este resultado pode ser extraído de [5] (ver VII-6.5, VII-6.2, observações VII-4.7 e VII-4.22 e teorema VII-3.9).

Lema 4.3 *Seja λ auto-valor de multiplicidade m do Laplaciano em Ω. Então existe uma vizinhança de λ em $\mathbb{R}$ tal que, para h C^2-suficientementemente próximo de i_Ω existem exatamente m auto-vaores $\lambda_1(h), \ldots, \lambda_m(h)$ (contados com sua multiplicidade) de $h^\star \Delta_{h(\Omega)} h^{\star -1}$. Além disso, podemos encontrar uma base ortonormal $v_1^1(h), \ldots, v_1^{k_1}(h), \ldots, v_m^1(h), \ldots, v_m^{k_m}(h)$ de $V_{\lambda_1(h)} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_m(h)}$ com as $v_i^{k_j}$ funções contínuas de h.*

Observação 4.2 *Não estamos afirmando a existência de base ortonormal* **para cada** *$V_{\lambda_i(h)}$, apenas para a soma direta desses subespaços.*

Lema 4.4 *Se I é um intervalo aberto contendo k auto-valores de Δ_Ω (contados com multiplicidade) então, para h C^2 suficientemente próximo de i_Ω existem exatamente k auto-valores de $h^\star \Delta_{h(\Omega)} h^{\star -1}$.*

Demonstração dos Lemas. Os lemas acima são consequências do Teorema IV-3.16 e IV-2.14 de [5] se observarmos que:

$$\| h^\star \Delta_{h(\Omega)} h^{\star -1} u - \Delta u \|_{L^2(\Omega)} \leq C(\| h - Id \|_{C^2(\Omega)} (\| u \|_{L^2(\Omega)} + \| \Delta u \|_{L^2(\Omega)})$$

□

4.2 O Caso de Grupos Comutativos Finitos

Vamos começar com o caso mais simples: $G \subset O(n)$ um subgrupo finito e abeliano (muitos resultados abaixo, porém, não dependem dessa hipótese, como deixaremos claro no enunciado).

Seja $\mathcal{X} : G \to \mathbb{C}$ um caracter de G. Como antes, um tal caracter será denominado real se $\mathcal{X}(g) = \pm 1$ para todo $g \in G$ e complexo caso contrário. Da Teoria de Representação de Grupos (conforme exposto no apêndice A) segue que $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathbb{C})$ pode ser decomposto como soma direta ortogonal de um número finito de subespaços $M_{\mathcal{X}}$, onde:

$$M_{\mathcal{X}} = \{u \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathbb{C}) \ : u \circ g^{-1} = \mathcal{X}(g)u \ \forall g \in G\}$$

Lema 4.5 *Seja $G \subset O(n)$ e $\mathcal{X}$ um caracter real de G. Então os auto-valores do operador*

$$-\Delta : M_{\mathcal{X}} \bigcap H^2 \cap H_0^1(\Omega) \to M_{\mathcal{X}}$$

são todos simples para um conjunto residual de regiões Ω de classe $\mathcal{C}^3$ conexas e G-invariantes.
(Neste lema estamos indicando por $M_{\mathcal{X}}$ o espaço real*:*

$$M_{\mathcal{X}} = \{u \in L^2(\Omega) \ : u \circ g^{-1} = \mathcal{X}(g)u \ \ \forall g \in G\}$$

Demonstração. De fato, a demonstração é praticamente a mesma feita no exemplo 1 do capítulo 2 (ver lema 2.1). Todavia a repetiremos aqui para maior completude. (Observe-se que aqui não necessitamos supor G comutativo ou finito).
Seja Ω_0 uma região G-simétrica de classe $\mathcal{C}^3$ e

$$E = \{h : \Omega_0 \to \mathbb{R}^n \ \text{ mergulhos de classe } \mathcal{C}^3 \text{ equivariantes.}\}$$

(Note-se que $h(\Omega_0)$ também é G-simétrica).

Consideremos a aplicação :

$$F : M_{\mathcal{X}} \ \cap \ \mathbf{H}^2 \cap \mathbf{H}_0^1(\Omega_0) \setminus \{0\} \times \mathbb{R} \times \mathbf{E} \longrightarrow M_{\mathcal{X}}$$

definida por:

$$F(u, \lambda, h) = h^*(\Delta + \lambda)h^{*-1}u$$

Suponhamos que, para algum h, 0 é valor regular de:

$$(u, \lambda) \longrightarrow F(u, \lambda, h)$$

Então, fazendo $\Omega = h(\Omega_0)$ seguirá que 0 é valor regular de

$$(v, \lambda) \longrightarrow \Delta v + \lambda v$$

$$M_{\mathcal{X}} \cap \mathbf{H}^2 \cap \mathbf{H}_0^1(\Omega) \setminus \{0\} \times \mathbf{R} \longrightarrow M_{\mathcal{X}}$$

Em outras palavras, sempre que $\Delta v + \lambda v = 0$ $v \neq 0$, teremos que:

$$(\dot{v}, \dot{\lambda}) \longrightarrow (\Delta + \lambda)\dot{v} + \dot{\lambda} v$$

$$M_{\mathcal{X}} \cap \mathrm{H}^2 \cap \mathrm{H}_0^1(\Omega) \times \mathbf{R} \longrightarrow M_{\mathcal{X}}$$

é sobrejetora e, portanto, $(\Delta + \lambda)_{|M_{\mathcal{X}} \cap \mathrm{H}^2 \cap \mathrm{H}_0^1(\Omega)}$ tem imagem (fechada) de codimensão 1 e λ é auto-valor simples.

Tudo o que temos a demonstrar então é que 0 é valor regular de F(·, ·,h) para um conjunto residual de h_s.

Agora, F é analítica, $F(.,.,h)$ é Fredholm para cada h e os espaços são separáveis. Se pudermos mostrar que 0 é valor regular de F o resultado será consequência do Teorema 1.1 (da Transversalidade).

Suponhamos que isto é falso. Existirá então um ponto crítico (u_0, λ_0, h_0) tal que $F(u_0, \lambda_0, h_0) = 0$. Podemos "transferir a origem" de Ω_0 para $\Omega = h_0(\Omega_0)$ definindo:

$$v_0 = h_0^{*-1} u_0 \in \mathrm{H}^2 \cap \mathrm{H}_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$$

e:

$$\tilde{F} : M_{\mathcal{X}} \cap \mathbf{H}^2 \cap \mathbf{H}_0^1(\Omega) \setminus \{0\} \times \mathbf{R} \times \tilde{E} \longrightarrow M_{\mathcal{X}}$$

por:

$$\tilde{F}(v, \lambda, h) = h^*(\Delta + \lambda) h^{*-1} v$$

(onde: $\tilde{E}$ = mergulhos de Ω em $\mathbf{R}^n$, C^3 equivariantes).

Então $\tilde{F} : (v, \lambda, h) \longrightarrow h_0^{*-1} F(h_0^* v, \lambda, h \circ h_0)$ tem um ponto crítico $(v_0, \lambda_0, i_\Omega)$ com:

$$\dot{\tilde{F}}(v_0, \lambda_0, i_\Omega) = 0$$

(observe-se que h_0^* é isomorfismo).

Com esta "mudança de origem" podemos sempre supor que $h_0 = i_\Omega$ e ela será feita no que segue sem comentários adicionais.
Temos então:

$$\tilde{F}(v_0, \lambda_0, i_\Omega) = 0$$

e:

$$(\dot{v}, \dot{\lambda}, \dot{h}) \longrightarrow D\tilde{F}(v_0, \lambda_0, i_\Omega)(\dot{v}, \dot{\lambda}, \dot{h}) =$$
$$(\Delta + \lambda_0)\dot{v} + \dot{\lambda}v_0 + (\dot{h} \cdot \nabla)(\Delta + \lambda_0)v_0 - (\Delta + \lambda_0)\dot{h} \cdot \nabla v_0$$

não é sobrejetora.
Como $\tilde{F}(.,.,h)$ é Fredholm,

$$(\dot{v}, \dot{\lambda}) \longrightarrow \tilde{F}'(v_0, \lambda_0, i_\Omega)(\dot{v}, \dot{\lambda}, 0)$$

tem imagem fechada de codimensão finita e, portanto, $\tilde{F}'(v_0, \lambda_0, i_\Omega)$ goza da mesma propriedade.
Mas $(v_0, \lambda_0, i_\Omega)$ é ponto crítico e, portanto, existe $\psi \neq 0$ em $M_{\mathcal{X}}$ ortogonal à imagem de $D\tilde{F}(v_0, \lambda_0, i_\Omega)$. Portanto, para todo $(\dot{v}, \dot{h}, \dot{\lambda})$:

$$0 = \int_\Omega \psi(\Delta + \lambda_0)(\dot{v} - \dot{h} \cdot \nabla v_0) + \dot{\lambda}\psi v_0$$

Fazendo $\dot{h} = 0$ e $\dot{v} = 0$ vemos que $\int_\Omega \psi v_0 = 0$.
Fazendo $\dot{h} = 0$ e variando $\dot{v}$ vemos que:

$$0 = \int_\Omega (\Delta + \lambda_0)\dot{v}\psi \quad \forall \dot{v} \in M_{\mathcal{X}} \ \cap \ \mathbf{H}^2 \cap \mathbf{H}_0^1(\Omega)$$

É claro que, se $\dot{v} \in M_{\mathcal{X}}{}^{\perp}$ também temos:

$$\int_\Omega (\Delta + \lambda_0)\dot{v}\psi = 0$$

Segue que :

$$\int_\Omega (\Delta + \lambda_0)w \cdot \psi = 0, \qquad \text{para todo } w \in \mathrm{H}^2 \cap \mathrm{H}_0^1(\Omega)$$

ψ é então solução fraca e, portanto, forte de $(\Delta + \lambda_0)\psi = 0$ em Ω, $\psi = 0$ em $\partial\Omega$. Como $\partial\Omega$ é de classe $\mathcal{C}^3$, ψ e v_0 são de classe $\mathcal{C}^{2,\alpha} \cap \mathcal{W}_p^3(\Omega,)$ para todo $0 < \alpha < 1$ e para todo $p < \infty$.

Variando agora $\dot{h}$ (e usando a 2ª identidade de Green):

$$\begin{aligned}
0 &= \int_\Omega -((\Delta + \lambda_0)\dot{h} \cdot \nabla v_0) \cdot \psi \\
&= \int_\Omega \dot{h} \cdot \nabla v_0 (\Delta + \lambda_0)\psi - ((\Delta + \lambda_0)\dot{h} \cdot \nabla v_0) \cdot \psi \\
&= \int_\Omega (\dot{h} \cdot \nabla v_0) \cdot \Delta\psi - \Delta(\dot{h} \cdot \nabla v_0) \cdot \psi \\
&= \int_{\partial\Omega} \dot{h} \cdot \nabla v_0 \, \tfrac{\partial\psi}{\partial N} \\
&= \int_{\partial\Omega} \dot{h} \cdot N \cdot \tfrac{\partial v_0}{\partial N} \cdot \tfrac{\partial\psi}{\partial N}
\end{aligned}$$

(Observe-se que $\dot{h} \cdot \nabla v_0 \in \mathcal{W}^{2,p}(\Omega)$, por isso estamos trabalhando em domínios de classe $\mathcal{C}^3$).

Agora, $\frac{\partial v_0}{\partial N} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial N}$ é função par, isto é:

$$(\frac{\partial v_0}{\partial N} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial N}) \circ g = \frac{\partial v_0}{\partial N} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial N} \quad \forall g \in G$$

De fato:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_0}{\partial N} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial N} \circ g &= \langle g^{-1}\nabla v_0 \circ g, g^{-1}\nabla\psi \circ g\rangle \\
&= \mathcal{X}(g) \cdot \mathcal{X}(g)\langle \nabla v_0, \nabla\psi\rangle \\
&= \frac{\partial v_0}{\partial N} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial N}
\end{aligned}$$

Pelo lema 4.1 existe $\dot{h}$, equivariante tal que $\dot{h} \cdot N$ está arbitrariamente próxima de $\frac{\partial v_0}{\partial N} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial N}$ na topologia uniforme. Segue que

$$\frac{\partial v_0}{\partial N} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial N} \equiv 0 \quad \text{em } \partial\Omega.$$

Concluímos que existe um aberto U em $\partial\Omega$ onde uma das funções $\frac{\partial v_0}{\partial N}$ $\frac{\partial\psi}{\partial N}$ se anula. Suponhamos que:

$$\frac{\partial\psi}{\partial N} \equiv 0 \quad \text{em } U$$

(se $\frac{\partial v_0}{\partial N} \equiv 0$ o raciocínio é o mesmo).
Como

$$\Delta\psi + \lambda\psi = 0 \quad \text{em } \Omega$$

obtemos, por unicidade no problema de Cauchy para equações elípticas de 2ª ordem que

$$\psi \equiv 0 \quad \text{em } \Omega$$

(usamos aqui a conexidade de Ω).
Mas isto é falso e, por contradição, 0 é valor regular de $\tilde{f}$ como queríamos demonstrar □.

Corolário 4.1 *Seja $G \subset O(n)$ (não necessáriamente abeliano ou finito) e $\mathcal{X}$ um caracter real de G. Então os auto-valores do operador:*

$$-\Delta : M_{\mathcal{X}} \bigcap H^2 \cap H_0^1(\Omega, C) \to M_{\mathcal{X}}$$

são todos simples para um conjunto residual de regiões Ω de classe C^3 conexas e G-invariantes (observe-se que agora estamos em espaços complexos).

Demonstração. Imediata a partir do lema anterior □.

Vamos agora tratar do caso em que o caracter é complexo.

Lema 4.6 *Seja $G \subset O(n)$ (não necessáriamente abeliano ou finito) e Ω região de classe C^2 G-simétrica. Nessas condições, se $u = v + iw$ é auto-função do Laplaciano em $M_{\mathcal{X}}$ associada a um auto-valor simples λ, ou mais precisamente auto-função do operador:*

$$-\Delta : M_{\mathcal{X}} \cap H^2 \cap H_0^1(\Omega, C) \setminus \{0\} \times C \to M_{\mathcal{X}}$$

então u e v são (auto-funções) linearmente independentes sobre $\mathbb{R}$ se e somente se $\mathcal{X}$ é caracter real.

Demonstração. Já a fizemos no corolário 2.1 □.

Lema 4.7 *Seja $G \subset O(n)$ e Ω uma região G-simétrica de classe C^2. Para cada caracter complexo de G, consideremos a aplicação:*

$$(u, \lambda) \longrightarrow \Delta u + \lambda u$$

$$M_{\mathcal{X}} \cap H^2 \cap H_0^1(\Omega, C) \setminus \{0\} \times C \longrightarrow M_{\mathcal{X}}$$

Temos:

1. *Essa aplicação é de Fredholm de índice 1 na estrutura de espaço complexo de $M_{\mathcal{X}}$ e de índice 2 na estrutura de espaço real de $M_{\mathcal{X}}$.*
2. *Se 0 é valor regular então os autovalores (do Laplaciano em $M_{\mathcal{X}}$) são todos simples na estrutura complexa e duplos na estrutura real.*

Demonstração.

1) A derivada da aplicação acima é dada por:

$$(\dot{u}, \dot{\lambda}) \to (\Delta + \lambda)\dot{u} + \dot{\lambda}u$$

Como $\dot{u} \to (\Delta + \lambda)\dot{u}$ tem índice 0 (na estrutura real ou complexa) a aplicação:

$$(\dot{u}, \dot{\lambda}) \to (\Delta + \lambda)\dot{u}$$

tem índice 1 na estrutura complexa e 2 na estrutura real.
Sendo $(\dot{u}, \dot{\lambda}) \to \dot{\lambda}u$ compacta, o ítem 1) segue.

2) Se 0 é valor regular temos:

$$dim_{\mathbb{C}}\, Ker[(\dot{u}, \dot{\lambda}) \to (\Delta + \lambda)\dot{u} + \dot{\lambda}u] = 1$$

(onde $dim_{\mathbb{C}}$ indica dimensão complexa).
Portanto:

$$dim_{\mathbb{C}}\, Ker[\dot{u} \to (\Delta + \lambda)\dot{u}] \leq 1$$

e, sendo λ auto-valor ele deve ser simples (na estrutura complexa). Usando o lema 4.6 acima o resultado segue $\square$.

Comentário 4.1 *Se tentarmos agora provar a "genericidade" dos auto-valores em $M_{\mathcal{X}}$, usando o mesmo argumento do lema 4.5 acima, concluiremos (como na seção 2.2.2) que existem auto-funções u e ψ satisfazendo:*

$$Re\left(\frac{\partial u}{\partial N}\frac{\partial \overline{\psi}}{\partial N}\right) = 0 \text{ em } \partial\Omega$$

Mas isto não nos leva agora a uma contradição imediata.
Para superar esta dificuldade temos que lançar mão do Teorema da Transversalidade de Henry (Teo 1.1).

Lema 4.8 *Seja $G \subset O(n)$, um subgrupo finito(não necessariamente abeliano), Ω uma região de classe C^3 G-simétrica e conexa, e $\mathcal{X}$ um caracter não real de G. Seja:*

$$M_{\mathcal{X}}{}^2 = M_{\mathcal{X}} \cap H^2 \cap H_0^1(\Omega, C)$$

Consideremos o operador:

$$G_{\mathcal{X}} : (M_{\mathcal{X}}{}^2 \setminus \{0\}) \times (M_{\overline{\mathcal{X}}}{}^2 \setminus \{0\}) \times D_n \times E \longrightarrow M_{\mathcal{X}} \times M_{\overline{\mathcal{X}}} \times \mathbb{Z}$$

definido por:

$$G_{\mathcal{X}}(\varphi, \psi, \lambda, h) = \Big(h^*(\Delta + \lambda)h^{*-1}\varphi, \quad h^*(\Delta + \lambda)h^{*-1}\psi, \quad h^* B_{h(\Omega)} h^{*-1}(\varphi, \psi)\Big)$$

onde:

- D_n = *disco fechado de raio n em C*
- $E = \{$*mergulhos equivariantes de Ω em $\mathbb{R}^n$ de classe C^3* $\}$
- $\mathbb{Z} = \{\ u \in \mathbf{L}^1(\partial\Omega) | u \circ g = u \forall g \in G\ \}$
- $B_\Omega(u, v) = Re\frac{\partial\varphi}{\partial N} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial N}$
- $\overline{\mathcal{X}}(g) = \overline{\mathcal{X}(g)}$

Então o conjunto:

$$\tilde{E} = \{h \in E \ \text{ tais que } \ 0 \in Im(G_{\mathcal{X}}(.,.,.,h))\}$$

é raro (isto é: fechado e de interior vazio).

Suponhamos, provisoriamente que o lema 4.8 está demonstrado. Podemos então provar o seguinte:

Teorema 4.1 *Seja G um subgrupo finito (não necessariamente abeliano) de $O(n)$. Então os auto-valores do Laplaciano são todos simples sobre C(isto é dimensão do auto-espaço como subespaço complexo de $L^2(\Omega, C) = 1$), para um conjunto residual de regiões Ω de classe C^2 e G-simétricas, se nos restringimos a cada um dos espaços $M_{\mathcal{X}}$.*

Demonstração. Consideremos o conjunto das regiões (G-simétricas) tais que os auto-valores de módulo $\leq n \in \mathbb{N}$ são todos simples. Este conjunto é aberto em consequência do Teorema das Funções Implícitas (ou do lema 4.3). Precisamos mostrar que é também denso.

Fixemos Ω_0 conexa e satisfazendo as condições enunciadas acima, e seja Ω C^2-próxima de Ω_0 de classe C^3 e G-simétrica.
Agora apliquemos o Teorema da Transversalidade (na versão usual) para:

$$F_{\mathcal{X}} : M_{\mathcal{X}} \cap \mathrm{H}^2 \cap \mathrm{H}_0^1(\Omega, \mathbb{C}) \setminus \{0\} \times D_n \times E^0 \longrightarrow M_{\mathcal{X}}$$

definida por:

$$F_{\mathcal{X}}(u, \lambda, h) = h^{\star}(\Delta + \lambda)h^{\star -1}u$$

onde E^0 é o complementar do conjunto $\tilde{E}$ fornecido pelo lema acima; portanto aberto e denso.
A aplicação $F_{\mathcal{X}}$ é a mesma definida no lema 4.5 acima, somente com domínio convenientemente restringido. As mesmas considerações lá feitas se aplicam agora e, se supusermos que 0 não é valor regular, seguirá que existem auto-funções φ e $\psi \in M_{\mathcal{X}}(\Omega)$ associadas a um auto-valor λ de módulo $\leq$ n tais que:

$$G_{\mathcal{X}}(\varphi, \psi, \lambda, h) = 0$$

Mas isso é impossível se $h \in E_0$.
Portanto 0 é valor regular e os auto-valores de módulo $\leq n$ em $h(\Omega)$ são todos simples se $h \in E_0$, em particular, para Ω arbitrariamente próxima de Ω_0 (na topologia C^2).

Se Ω_0 é desconexa, o argumento se aplica a cada uma de suas componentes conexas. Uma nova pequena perturbação separa os auto-valores que aparecem em componentes conexas distintas.

Para obter o resultado desejado, basta fazer interseção com n variando em $\mathbb{N}$ $\square$.

Demonstração do lema 4.8

Vamos mostrar, inicialmente, que $\tilde{E}$ é fechado.

Seja:

$$M_{\mathcal{X}}{}^2 = M_{\mathcal{X}} \cap \mathrm{H}^2 \cap \mathrm{H}_0^1(\Omega, \mathbb{C}).$$

Suponhamos que $h_k \to h$ em $Diff^3(\Omega)$ e existem $(\varphi_k, \psi_k) \in M_{\mathcal{X}}{}^2 \cap M_{\overline{\mathcal{X}}}{}^2$ e $\lambda_k \in D_n$ tais que:

$$G_{\mathcal{X}}(\varphi_k\ ,\ \psi_k\ ,\ \lambda_k\ ,\ h_k) = 0$$

Então φ_k e ψ_k são limitados em $M_{\mathcal{X}}{}^2$ e $M_{\overline{\mathcal{X}}}{}^2$ e, portanto, tomando uma subsequência, convergem em $M_{\mathcal{X}}$ e $M_{\overline{\mathcal{X}}}$ respectivamente a φ e ψ (e $\lambda_k \to \lambda$).

Mas então φ e $\psi \in \mathrm{H}^2 \cap \mathrm{H}_0^1(\Omega, \mathbb{C})$ e:

$$G_{\mathcal{X}}(\varphi\ ,\ \psi\ ,\ \lambda\ ,\ h) = 0$$

Agora queremos aplicar o Teorema da Transversalidade de Henry para mostrar que $\tilde{E}$ tem interior vazio. Nossos espaços são separáveis, $G_{\mathcal{X}}$ é de classe $\mathcal{C}^3$ e $\frac{\partial G_{\mathcal{X}}}{\partial(\varphi,\psi,\lambda)}$ é semi-Fredholm com índice $-\infty$.

A única condição delicada a verificar então é:

$$dim \left\{ \frac{ImDG_{\mathcal{X}}(\varphi, \psi, \lambda, h)}{Im\left[\frac{\partial G_{\mathcal{X}}}{\partial(\varphi,\psi,\lambda)}\right]} \right\} > dim\mathcal{N}\left[\frac{\partial G_{\mathcal{X}}}{\partial(\varphi, \psi, \lambda)}\right]$$

Sabemos que o lado direito é finito. Basta então provar que o lado esquerdo é infinito. Podemos "transladar a origem" para $h(\Omega)$ (como no lema 4.5) e então calcular as derivadas supondo $h = inclusão$, o que facilita os cálculos.

Vamos então supor, por contradição, que a dimensão acima é menor ou igual a um número m, isto é:

$$\exists\, \theta_1, \ldots, \theta_m \in ImDG_{\mathcal{X}} \subset M_{\mathcal{X}} \times M_{\overline{\mathcal{X}}} \times Z$$

tais que:

$$\forall \dot{h} \in E\,;\ \exists \dot{\varphi}, \dot{\psi}, \dot{\lambda} \quad \text{e} \quad c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{R}$$

tais que:

$$\begin{aligned}
\sum_1^m c_j \theta_j &= DG_{\mathcal{X}}(\dot{\varphi}, \dot{\psi}, \dot{\lambda}, \dot{h}) \\
&= \left\{ \begin{array}{l} (\Delta+\lambda)(\dot{\varphi} - \dot{h}\cdot\nabla\varphi) - \dot{\lambda}\varphi\,, \quad (\Delta+\lambda)(\dot{\psi} - \dot{h}\cdot\nabla\psi) - \dot{\lambda}\psi\,, \\ Re\left[\nabla\varphi\cdot\nabla(\dot{\psi} - \dot{h}\cdot\nabla\psi) + \nabla\psi\cdot\nabla(\dot{\varphi} - \dot{h}\cdot\nabla\varphi) + \dot{h}\cdot\nabla(\nabla\varphi\cdot\nabla\psi)\right] \end{array} \right\} (4.1)
\end{aligned}$$

(onde: $\theta_j = (\theta_j^1, \theta_j^2, \theta_j^3)$)
Vamos definir operadores:

$$\begin{array}{lll}
\mathcal{A}_{\Delta+\lambda}: & \mathrm{L}^2(\Omega, \mathbb{C}) & \longrightarrow \mathrm{H}^2 \cap \mathrm{H}_0^1(\Omega, \mathbb{C}) \\
\mathcal{B}_{\Delta+\lambda}: & \mathrm{H}^2 \cap \mathrm{H}_0^1(\Omega, \mathbb{C})_{|\partial\Omega} & \longrightarrow \mathrm{H}^2 \cap \mathrm{H}_0^1(\Omega, \mathbb{C})
\end{array}$$

por:

$$v = \mathcal{A}_{\Delta+\lambda} f + \mathcal{B}_{\Delta+\lambda} g$$

quando:

$$\left\{ \begin{array}{ll} (\Delta+\lambda)v - f & \in \quad \mathcal{N}(\Delta+\lambda) \\ v_{|\partial\Omega} = g & , \quad v \perp \mathcal{N}(\Delta+\lambda) \end{array} \right.$$

Da primeira componente de 4.1 temos:

$$\dot{\varphi} - \dot{h}\cdot\nabla\varphi = \sum_{i=1}^{dim(\mathcal{N}(\Delta+\lambda))} b_i \xi_i + \sum_{j=1}^{m} c_j \mathcal{A}_{\Delta+\lambda}\theta_j^1 - \mathcal{B}_{\Delta+\lambda}(\dot{h}\cdot\nabla\varphi)$$

e analogamente para:

$$\dot{\psi} - \dot{h}\cdot\nabla\psi$$

Substituindo na terceira componente de 4.1 segue que:

$$Re\left[\dot{h}\cdot N\frac{\partial}{\partial N}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial N}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial N}\right) - \frac{\partial\varphi}{\partial N}\frac{\partial}{\partial N}\mathcal{B}_{\Delta+\lambda}\left(\dot{h}\cdot N\frac{\partial\psi}{\partial N}\right) - \frac{\partial\psi}{\partial N}\frac{\partial}{\partial N}\mathcal{B}_{\Delta+\lambda}\left(\dot{h}\cdot N\frac{\partial\varphi}{\partial N}\right)\right]_{|\partial\Omega}$$

pertence a um subespaço de dimensão finita de Z para cada $\dot{h} \in T_{i_\Omega}E$,isto é, $h \in \mathcal{C}^3(\Omega, \mathbb{R}^n)$ e é equivariante.

Sabemos que:

$$Re\left(\frac{\partial\varphi}{\partial N}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial N}\right)_{|\Omega}=0$$

e (no $\partial\Omega$):

$$0=(\Delta+\lambda)\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial N^2}+H\frac{\partial\varphi}{\partial N}$$

$$0=(\Delta+\lambda)\psi=\frac{\partial^2\psi}{\partial N^2}+H\frac{\partial\psi}{\partial N}$$

(onde H é a curvatura média de $\partial\Omega$).

Segue que:

$$Re\left(\frac{\partial\psi}{\partial N}\frac{\partial^2\varphi}{\partial N^2}\right)_{|\partial\Omega}=0=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial N}\frac{\partial^2\psi}{\partial N^2}\right)_{|\partial\Omega}$$

e, portanto:

$$Re\frac{\partial}{\partial N}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial N}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial N}\right)_{|\partial\Omega}=0$$

Queremos então mostrar que (fazendo $\sigma=\dot{h}\cdot N$):

$$\sigma\xrightarrow{\Gamma}Re\left[\frac{\partial\varphi}{\partial N}\frac{\partial}{\partial N}\mathcal{B}_{\Delta+\lambda}\left(\sigma\frac{\partial\psi}{\partial N}\right)+\frac{\partial\psi}{\partial N}\frac{\partial}{\partial N}\mathcal{B}_{\Delta+\lambda}\left(\sigma\frac{\partial\varphi}{\partial N}\right)\right]_{|\partial\Omega}$$

não tem posto finito quando σ varia no conjunto das aplicações pares de classe $\mathcal{C}^3$ em $\partial\Omega$. Usando o Teorema B.1 no caso $n>2$ e B.2 no caso $n=2$ concluímos que:

$$Re\left(\frac{\partial\varphi_N}{\partial\tau}\cdot\frac{\partial\psi_N}{\partial\tau}\right)\equiv 0 \tag{4.2}$$

em uma vizinhança U de $\partial\Omega$, para todo vetor τ no espaço tangente a $\partial\Omega\cap U$ (estamos usando φ_N para indicar $\frac{\partial\varphi}{\partial N}$).

Para terminar nosso argumento, tudo o que precisamos mostrar é que as hipóteses:

1. φ e ψ são auto-funções em $M_{\mathcal{X}}$ e $M_{\overline{\mathcal{X}}}$ respectivamente.
2. $Re\left(\frac{\partial\varphi}{\partial N}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial N}\right)\equiv 0$ em um aberto U do $\partial\Omega$.
3. $Re\left(\frac{\partial\varphi_n}{\partial\tau}\cdot\frac{\partial\psi_n}{\partial\tau}\right)\equiv 0$ em U para todo τ no espaço tangente.

não podem ocorrer simultaneamente.

Vamos escrever:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial N} = q = q_1 + iq_2 \quad \text{e} \quad \frac{\partial\psi}{\partial N} = r = r_1 - ir_2 \tag{4.3}$$

Escolhendo coordenadas locais $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ no $\partial\Omega$ a condição 3) acima implicará que:

$$\frac{\partial q_1}{\partial x_j}\frac{\partial r_1}{\partial x_k} + \frac{\partial q_2}{\partial x_j}\frac{\partial r_2}{\partial x_k} + \frac{\partial q_1}{\partial x_k}\frac{\partial r_1}{\partial x_j} + \frac{\partial q_2}{\partial x_k}\frac{\partial r_2}{\partial x_j} = 0 \quad , \quad 1 \leq j, k \leq n-1 \tag{4.4}$$

em um aberto $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$.

Por outro lado, da condição 2) segue que:

$$\begin{array}{l} r_1 = \alpha q_2 \\ r_2 = -\alpha q_1 \end{array} \quad \text{onde:} \quad \alpha = \frac{r_1 q_2 - r_2 q_1}{{q_1}^2 + {q_2}^2} \tag{4.5}$$

e então:

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\alpha\frac{\partial q_2}{\partial x_j} + \frac{\partial\alpha}{\partial x_j}q_2\right)\frac{\partial q_1}{\partial x_k} - \left(\alpha\frac{\partial q_1}{\partial x_j} + \frac{\partial\alpha}{\partial x_j}q_1\right)\frac{\partial q_2}{\partial x_k} \\ &\quad + \left(\alpha\frac{\partial q_2}{\partial x_k} + \frac{\partial\alpha}{\partial x_k}q_2\right)\frac{\partial q_1}{\partial x_j} - \left(\alpha\frac{\partial q_1}{\partial x_k} + \frac{\partial\alpha}{\partial x_k}q_1\right)\frac{\partial q_2}{\partial x_k} \\ &= \frac{\partial\alpha}{\partial x_j}\left(q_2\frac{\partial q_1}{\partial x_k} - q_1\frac{\partial q_1}{\partial x_k}\right) + \frac{\partial\alpha}{\partial x_k}\left(q_2\frac{\partial q_1}{\partial x_j} - q_1\frac{\partial q_2}{\partial x_j}\right) \end{aligned} \tag{4.6}$$

Portanto, para $1 \leq j, k \leq n$ temos:

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{q_2}{q_1}\right) + \frac{\partial\alpha}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{q_2}{q_1}\right) = 0 \tag{4.7}$$

(podemos supor $q_1 \neq 0$ em U ; q_1 não pode se anular num aberto pois, nesse caso, como $\varphi \in M_{\mathcal{X}}$, q_2 também se anularia e então: $\frac{\partial\varphi}{\partial N} = 0$ de onde $\varphi = 0$ por unicidade no problema de Cauchy).

Fazendo $j = k$:

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{q_2}{q_1}\right) \equiv 0 \qquad \text{para } 1 \leq j \leq n-1 \tag{4.8}$$

Se $\nabla\alpha_j \equiv 0$ em um aberto de $\partial\Omega$ então $\alpha \equiv cte$. Mas, neste caso:

$$r_1 + ir_2 = -i\alpha(q_1 + iq_2)$$

e φ, ψ satisfazem:

$$\begin{aligned}
(\Delta+\lambda)(\varphi+i\alpha\psi) &= 0 && \text{em } \Omega. \\
\varphi+i\alpha\psi &= 0 && \text{em } \partial\Omega. \\
\tfrac{\partial\varphi}{\partial N}+i\alpha\tfrac{\partial\psi}{\partial N} &= 0 && \text{em um aberto de } \partial\Omega.
\end{aligned}$$

Por unicidade no problema de Cauchy segue que φ e ψ são linearmente dependentes o que não pode ocorrer pois estão em subespaços ortogonais.

Suponhamos então $\frac{\partial\alpha}{\partial x_j} \neq 0$ em um aberto de $\partial\Omega$ para algum $1 \leq j \leq n-1$ (e portanto $\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{q_2}{q_1}\right) \equiv 0$ neste aberto)
usando 4.7:

$$0 = \frac{\partial\alpha}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{q_2}{q_1}\right) = \frac{\partial\alpha}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{q_2}{q_1}\right)$$

para todo $1 \leq k \leq n-1$ em um aberto de $\partial\Omega$. Segue que $\nabla\left(\frac{q_2}{q_1}\right) \equiv 0$ em um aberto e, portanto, $q_2 = kq_1$ onde k é constante real em um aberto de $\partial\Omega$. Mas, nesse caso, escrevendo $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$, teremos:

$$\begin{aligned}
(\Delta+\lambda)(k\varphi_1-\varphi_2) &= 0 \\
(k\varphi_1-\varphi_2)_{|\partial\Omega} &= 0 \\
\frac{\partial}{\partial N}(k\varphi_1-\varphi_2) &= 0
\end{aligned}$$

em um aberto de $\partial\Omega$.
Por unicidade no problema de Cauchy:

$$\varphi_2 = k\varphi_1 \quad \text{em } \Omega.$$

Mas isto não pode ocorrer se $\varphi \in M_{\mathcal{X}}$ como vimos no lema 4.6 $\square$.

Provamos então que os auto-valores do Laplaciano são simples em cada espaço $M_{\mathcal{X}}$.
É claro, entretanto, que ainda podemos ter auto-valores múltiplos associados a auto-funções em subespaços $M_{\mathcal{X}}$ e $M_{\mathcal{X}'}$ distintos. De fato, se $u \in M_{\mathcal{X}}$ é auto-função associada a λ então $\overline{u} \in M_{\bar{\mathcal{X}}}$ também o é.

Nosso objetivo será mostrar que os auto-valores são, genericamente *G-simples* no sentido da definição 4.1. No caso de grupos comutativos, como as representações

complexas irredutíveis têm dimensão 1 (conforme teorema A.1) a definição 4.1 pode ser enunciada simplesmente como segue (esta definição foi antecipada no capítulo 2).

Definição 4.2 *Seja $G \subset O(n)$ grupo compacto e comutativo, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ uma região G-simétrica e λ um auto-valor do Laplaciano com auto-espaço V_λ. Então, (em espaços complexos), dizemos que λ é $G-$ simples se V_λ possui uma base da forma $\{u\}$ (se $\mathcal{X}$ é real) ou $\{u, \overline{u}\}$ (se $\mathcal{X}$ é complexo).*

Teorema 4.2 *Seja $G \subset O(n)$ comutativo e finito. Então os auto-valores do Laplaciano são todos G-simples para um conjunto residual de regiões Ω de classe $\mathcal{C}^2$ G-simétricas.*

Demonstração. É fácil ver, usando os lemas 4.2 e 4.3 que a condição de que os auto-valores de módulo menor que um dado $n \in \mathbb{N}$ sejam G-simples é aberta. Queremos mostrar que é também densa. Para isto, podemos usar a topologia $\mathcal{C}^3$, e assumir que Ω_0 é de classe $\mathcal{C}^3$.
Suponhamos então que existe Ω_0 G-simétrica tal que, para cada Ω, $\mathcal{C}^3$-próxima de Ω_0 existe um auto-valor λ de módulo $< n$ não G-simples associado a auto-funções $u_0 \in M_{\mathcal{X}_1}$ e $v_0 \in M_{\mathcal{X}_2}$.
Como o número de auto-valores de módulo $< n$ é finito isso implicará a existência de uma função contínua $\lambda(\Omega)$ definida numa vizinhança de Ω_0 tal que $\lambda(\Omega)$ está associada a auto-funções $u(\Omega)$ e $v(\Omega)$ em $M_{\mathcal{X}_1}$ e $M_{\mathcal{X}_2}$ respectivamente. Podemos também supor que $\lambda(\Omega)$ é auto-valor simples quando nos restringimos a $M_{\mathcal{X}_1}$ e $M_{\mathcal{X}_2}$ em vista do Teorema 4.1.
Consideremos uma curva de difeomorfismos da forma:

$$x \longrightarrow x + t\dot{h}(x) + o(t) = h(t,x)\,, \quad h(t,.) \text{ equivariante para cada t.}$$

Então teremos funções analíticas $\lambda_{\mathcal{X}_1}(t)$ e $\lambda_{\mathcal{X}_2}(t)$ que fornecem o único auto-valor de $-\Delta$ em $M_{\mathcal{X}_1}$ e $M_{\mathcal{X}_2}$ respectivamente, próximo de $\lambda(\Omega_0) = \lambda_{\mathcal{X}_1}(0) = \lambda_{\mathcal{X}_2}(0)$.
Temos:

$$\frac{d}{d\,t}_{|t=0} \lambda_{\mathcal{X}_1}(t) = -\int_{\partial\Omega} \dot{h} \cdot N \left|\frac{\partial u_0}{\partial N}\right|^2, \quad \text{onde: } u_0 = u(\Omega_0)$$

$$\frac{d}{d\,t}_{|t=0}\lambda_{\mathcal{X}_2}(t) = -\int_{\partial\Omega} \dot{h}\cdot N\left|\frac{\partial v_0}{\partial N}\right|^2 \quad \text{onde: } v_0 = v(\Omega_0)$$

Como $\dot{h}$ pode ser qualquer difeo $\mathcal{C}^3$ equivariante e $\left|\frac{\partial u_0}{\partial N}\right|^2 e \left|\frac{\partial v_0}{\partial N}\right|^2$ são funções pares, o lema 4.1 permite-nos concluir que:

$$\left|\frac{\partial u_0}{\partial N}\right|^2 = \left|\frac{\partial v_0}{\partial N}\right|^2 \quad \text{no} \quad \partial\Omega.$$

O mesmo vale para cada Ω $\mathcal{C}^3$-próxima de Ω_0 e, portanto:

$$\exists u \in M_{\mathcal{X}_1} \ , \ v \in M_{\mathcal{X}_2} \quad u, v \not\equiv 0$$

satisfazendo:

$$\begin{cases} (\Delta+\lambda)u = 0 \quad (\Delta+\lambda)v = 0 \quad \text{em} \quad \Omega \\ B_\Omega(u,v) = \mid \nabla u \mid^2 - \mid \nabla v \mid^2 = 0 \quad \text{no} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

para toda Ω, $\mathcal{C}^3$ próxima de Ω_0.
Seja $\Omega = h(\Omega_0)$, h difeo $\mathcal{C}^3$ equivariante próximo da Identidade.
Façamos $\varphi = u \circ h = h^\star u$, $\psi = v \circ h = h^\star v$.
Então existem: $\lambda \in \mathbb{C}, \varphi \in M_{\mathcal{X}_1}(\Omega_0), \psi \in M_{\mathcal{X}_2}(\Omega_0)$, $\varphi, \psi \not\equiv 0$ tais que:

$$\begin{aligned} F(\varphi,\psi,\lambda,h) &= \left(h^\star(\Delta+\lambda)h^{\star-1}\varphi \ , \ h^\star(\Delta+\lambda)h^{\star-1}\psi \ , \ h^\star B_{h(\Omega_0}h^{\star-1}(\varphi,\psi)\right) \\ &= (0\ ,\ 0\ ,\ 0) \in M_{\mathcal{X}_1}(\Omega_0) \times M_{\mathcal{X}_2}(\Omega_0) \times Z \end{aligned}$$

(onde $Z = \{u \in L^1(\partial\Omega) | u \circ g = u \ , \ \forall g \in G\}$)
para cada h difeo $\mathcal{C}^3$ equivariante próximo da Identidade.
Queremos mostrar que isto é impossível novamente usando o Teorema da Transversalidade de Henry. Como no teorema 4.1 a parte difícil é mostrar que :

$$dim\left\{\frac{ImDF(\varphi,\psi,\lambda,h)}{Im\left[\frac{\partial F}{\partial(\varphi,\psi,\lambda)}\right]}\right\} = \infty$$

Raciocinando de maneira análoga à do Teorema citado, veremos que, para tanto, basta mostrar que o operador:

$$\sigma \xrightarrow{\Theta} Re\left[\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial N}\frac{\partial}{\partial N}\mathcal{B}_{\Delta+\lambda}\left(\sigma\frac{\partial\varphi}{\partial N}\right) - \frac{\partial\overline{\psi}}{\partial N}\frac{\partial}{\partial N}\mathcal{B}_{\Delta+\lambda}\left(\sigma\frac{\partial\psi}{\partial N}\right)\right]_{|\partial\Omega}$$

não tem posto finito quando σ varia no espaço das aplicações pares de classe $\mathcal{C}^3$ em $\partial\Omega$. Usando o Teorema B.3 decorre que uma condição necessária para que Θ seja de posto finito é que:

$$\left|\frac{\varphi_N}{\partial\tau}\right|^2 - \left|\frac{\psi_N}{\partial\tau}\right|^2 \equiv 0 \tag{4.9}$$

em uma vizinhança U de $\partial\Omega$, para todo τ no espaço tangente a $\partial\Omega \cap U$.
À semelhança do teorema 4.1 acima, para terminar o nosso argumento vamos mostrar que se φ e ψ são auto-funções em $M_{\mathcal{X}_1}$ e $M_{\mathcal{X}_2}$ satisfazendo:

$$|\varphi_N|^2 - |\psi_N|^2 \equiv 0 \quad e \quad \left|\frac{\varphi_N}{\partial\tau}\right|^2 - \left|\frac{\psi_N}{\partial\tau}\right|^2 \equiv 0$$

em uma vizinhança U de $\partial\Omega$, para todo τ no espaço tangente a $\partial\Omega \cap U$, *então* $\mathcal{X}_1 = \mathcal{X}_2$*(e nesse caso* φ *e* ψ *são linearmente dependentes) ou* $\mathcal{X}_1 = \overline{\mathcal{X}}_2$ *(e nesse caso* φ *e* $\overline{\psi}$ *são linearmente dependentes).*

Vamos escrever:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial N} = q = q_1 + iq_2 \quad \text{e} \quad \frac{\partial\psi}{\partial N} = r = r_1 + ir_2 \tag{4.10}$$

Escolhendo coordenadas locais $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ no $\partial\Omega$ teremos:

$$Re\left[\frac{\partial q}{\partial x_i}\frac{\partial \overline{q}}{\partial x_j} - \frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial \overline{r}}{\partial x_j}\right] = 0, \quad 1 \leq i, j \leq n-1 \tag{4.11}$$

Como $\mid r \mid = \mid q \mid$, temos:

$$r = e^{i\theta(x)}q, \qquad \overline{r} = e^{-i\theta(x)}\overline{q} \tag{4.12}$$

Portanto:

$$\begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial \overline{r}}{\partial x_j} &= \left(i\frac{\partial\theta}{\partial x_i}e^{i\theta}q + e^{i\theta}\frac{\partial q}{\partial x_i}\right)\left(-i\frac{\partial\theta}{\partial x_j}e^{-i\theta}\overline{q} + e^{-i\theta}\frac{\partial\overline{q}}{\partial x_j}\right)\\ &= \frac{\partial\theta}{\partial x_i}\frac{\partial\theta}{\partial x_j}q\overline{q} + i\left(\frac{\partial\theta}{\partial x_i}\frac{\partial\overline{q}}{\partial x_j}q - \frac{\partial\theta}{\partial x_j}\frac{\partial q}{\partial x_i}\overline{q}\right) + \frac{\partial q}{\partial x_i}\frac{\partial\overline{q}}{\partial x_j}\end{aligned}$$

De 4.11 temos:

$$Re\left[\frac{\partial\theta}{\partial x_i}\frac{\partial\theta}{\partial x_j}q\overline{q} + i\left(\frac{\partial\theta}{\partial x_i}\frac{\partial\overline{q}}{\partial x_j}q - \frac{\partial\theta}{\partial x_j}\frac{\partial q}{\partial x_i}\overline{q}\right)\right] = 0$$

Portanto:

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial\theta}{\partial x_i}\frac{\partial\theta}{\partial x_j}q\overline{q} - Im\left(\frac{\partial\theta}{\partial x_i}\frac{\partial\overline{q}}{\partial x_j}q - \frac{\partial\theta}{\partial x_j}\frac{\partial q}{\partial x_i}\overline{q}\right)\\
&= \frac{\partial\theta}{\partial x_i}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial\theta}{\partial x_j}q\overline{q} - Im\frac{\partial\overline{q}}{\partial x_j}q\right) + \frac{\partial\theta}{\partial x_j}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial\theta}{\partial x_i}q\overline{q} + Im\frac{\partial q}{\partial x_i}\overline{q}\right)\\
&= \frac{\partial\theta}{\partial x_i}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial\theta}{\partial x_j}q\overline{q} + q_1\frac{\partial q_2}{\partial x_j} - q_2\frac{\partial q_1}{\partial x_j}\right) + \frac{\partial\theta}{\partial x_j}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial\theta}{\partial x_i}q\overline{q} + q_1\frac{\partial q_2}{\partial x_i} - q_2\frac{\partial q_1}{\partial x_i}\right)
\end{aligned}
$$

e então:

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial\theta}{\partial x_i}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial\theta}{\partial x_j} + \frac{q_1\frac{\partial q_2}{\partial x_j} - q_2\frac{\partial q_1}{\partial x_j}}{{q_1}^2 + {q_2}^2}\right) + \frac{\partial\theta}{\partial x_j}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial\theta}{\partial x_i} + \frac{q_1\frac{\partial q_2}{\partial x_i} - q_2\frac{\partial q_1}{\partial x_i}}{{q_1}^2 + {q_2}^2}\right)\\
&= \frac{\partial\theta}{\partial x_i}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial\theta}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}arctg\left(\frac{q_2}{q_1}\right)\right) + \frac{\partial\theta}{\partial x_j}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial\theta}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i}arctg\left(\frac{q_2}{q_1}\right)\right)\\
&= \frac{\partial\theta}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{2}\theta + arctg\left(\frac{q_2}{q_1}\right)\right) + \frac{\partial\theta}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{2}\theta + arctg\left(\frac{q_2}{q_1}\right)\right) \qquad (4.13)
\end{aligned}
$$

(Se $q_1 = 0$, podemos escrever $arccotg\left(\frac{q_1}{q_2}\right)$)
Vamos examinar dois casos:

1. $\nabla\theta \equiv 0$ em um aberto de $\partial\Omega$

   Neste caso, $r = k \cdot q$, onde k é constante e então $\varphi - k\psi$ satisfaz:

$$
\begin{cases}
\Delta(\varphi - k\psi) + \lambda(\varphi - k\psi) \equiv 0 & \text{em } \Omega\\
\varphi - k\psi \equiv 0 & \text{em } \partial\Omega\\
\frac{\partial}{\partial N}(\varphi - k\psi) \equiv 0 & \text{em um aberto de } \partial\Omega
\end{cases}
$$

   Por unicidade no problema de Cauchy teremos:

$$\varphi = k\psi, \quad \mathcal{X}_1 = \mathcal{X}_2.$$

2. $\nabla\theta \neq 0$ em um aberto denso de $\partial\Omega$.

   Seja j tal que: $\frac{\partial\theta}{\partial x_j} \neq 0$ em um aberto $V \subset \partial\Omega$.

   (Vamos supor $q_1 \neq 0$. Se $q_2 \neq 0$ o raciocínio é análogo).

Seja $1 \leq k \leq n-1$.

Se $\frac{\partial\theta}{\partial x_k} \neq 0$ em um aberto $V' \subset V$, fazendo $k = i = j$ em 4.13 teremos:

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{1}{2}\theta + arctg\left(\frac{q_2}{q_1}\right)\right) = 0 \quad \text{em} \quad V'$$

Se $\frac{\partial\theta}{\partial x_k} \equiv 0$ em V, fazendo $i = k$ em 4.13 obtemos:

$$\frac{\partial\theta}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{1}{2}\theta + arctg\left(\frac{q_2}{q_1}\right)\right) = 0 \quad \text{em} \quad V$$

e, novamente:

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{1}{2}\theta + arctg\left(\frac{q_2}{q_1}\right)\right) = 0 \quad \text{em} \quad V$$

Concluímos que:

$$\nabla\left(\frac{1}{2}\theta + arctg\left(\frac{q_2}{q_1}\right)\right) = 0 \quad \text{em} \quad V$$

e, de fato:

$$\nabla\theta = -2\nabla arctg\left(\frac{q_2}{q_1}\right) \quad \text{ou} \quad \nabla\theta = -2\nabla arccotg\left(\frac{q_1}{q_2}\right)$$

em um aberto e denso de $\partial\Omega$.

Mas então, se $q_1 \neq 0$:

$$\begin{aligned}
\nabla\theta &= -2\nabla arctg\left(\frac{q_2}{q_1}\right) \Rightarrow \\
r &= cte\frac{q}{\left(e^{iarctg\left(\frac{q_2}{q_1}\right)}\right)^2} \\
&= cte\frac{q}{\left(\frac{q}{|q|}\right)^2} \\
&= cte\frac{q\overline{q}}{q} = cte\overline{q}
\end{aligned}$$

(e analogamente se $q_2 \neq 0$)

Portanto $r = cte.\overline{q}$ e novamente por unicidade no problema de Cauchy:

$$\psi = cte.\overline{\varphi}, \quad \mathcal{X}_1 = \mathcal{X}_2.$$

Resumindo, começamos com auto-funções $\varphi \in M_{\mathcal{X}_1}$ e $\psi \in M_{\mathcal{X}_2}$ associadas a um mesmo auto-valor λ e concluímos que:

$$\text{ou } \mathcal{X}_1 = \mathcal{X}_2 \text{ e } \varphi \text{ e } \psi \text{ são L.D. ou } \overline{\mathcal{X}}_1 = \mathcal{X}_2 \text{ e } \overline{\varphi} \text{ e } \psi \text{ são L.D.}$$

Isso mostra que λ é G-simples. Segue que, para um conjunto aberto e denso de regiões G-simétricas os auto-valores de módulo $\leq n$ são todos G-simples.
O resultado desejado segue então tomando interseção da maneira usual □.

Estivemos até aqui trabalhando em espaços de funções a valores complexos. No entanto, a 'tradução' do teorema 4.2 para espaços reais é bastante simples.

Corolário 4.2 *Se $G \subset O(n)$ é um grupo comutativo e finito, então, para um conjunto residual de regiões Ω de classe C^2, G-simétricas temos somente 2 tipos de auto-valores do problema de Dirichlet para o Laplaciano em espaços reais:*

1 - $\mathcal{X}(g) = \pm 1 \forall g \in G$ *Auto-valores simples, associados a auto-funções reais originadas de auto-funções complexas em $M_{\mathcal{X}}$.*

2 -$\mathcal{X}(g) \neq \pm 1$ **para algum** $g \in G$ *Auto-valores duplos, associados a pares de auto-funções $v = Re(u)$, $w = Im(u)$, onde u é auto-função complexa em $M_{\mathcal{X}}$ e $\mathcal{X}(g) \neq \pm 1$ para algum $g \in G$.*
Nesse caso teremos:

$$\begin{bmatrix} v \circ g^{-1} \\ w \circ g^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_g & -\sin\theta_g \\ \sin\theta_g & \cos\theta_g \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}$$

(onde $e^{i\theta_g} = \mathcal{X}(g)$)

Demonstração. É consequência imediata do Teorema 4.2 e do lema 4.6 □

4.3 O Caso de Grupos Comutativos Infinitos

Para o caso de grupos comutativos infinitos(compactos) muitos dos argumentos usados na seção anterior ainda valem. Em particular, as representações irredutíveis são todas de dimensão (complexa) 1 e $L^2(\Omega, \mathbb{C})$ pode ser decomposto em soma direta de subespaços $M_{\mathcal{X}} = \{u \in L^2(\Omega, \mathbb{C}) \mid u \circ g = \mathcal{X}(g)u\}$, com a única diferença de que agora temos uma quantidade infinita (enumerável) de tais subespaços.

Queremos agora provar o análogo do teorema 4.1 : os auto-valores do Laplaciano são, genericamente, todos simples em cada espaço $M_{\mathcal{X}}$. O raciocínio desenvolvido na seção anterior se transporta sem mudanças para o caso presente (em particular o resultado é verdadeiro se $\mathcal{X}$é real), exceto pela parte final do lema 4.8. De fato, para provar o análogo deste lema precisamos de uma hipótese adicional sobre a dimensão de G.

Lema 4.9 *Seja $G \subset O(n)$, um subgrupo compacto e comutativo. Suponhamos que $dimG < n-2$ (n = dimensão do espaço ambiente > 2). Seja ainda Ω uma região de classe C^3 G-simétrica e conexa, e $\mathcal{X}$um caracter não real de G, e:*

$$M_{\mathcal{X}}{}^2 = M_{\mathcal{X}} \cap H^2 \cap H_0^1(\Omega, C)$$

Consideremos o operador:

$$G_{\mathcal{X}} : (M_{\mathcal{X}}{}^2 \setminus \{0\}) \times (M_{\overline{\mathcal{X}}}{}^2 \setminus \{0\}) \times D_n \times E \longrightarrow M_{\mathcal{X}} \times M_{\overline{\mathcal{X}}} \times \mathbb{Z}$$

$$G_{\mathcal{X}}(\varphi, \psi, \lambda, h) = (h^*(\Delta + \lambda)h^{*-1}\varphi, h^*(\Delta + \lambda)h^{*-1}\psi, h^* B_{h(\Omega)} h^{*-1}(\varphi, \psi)$$

onde:

- D_n = *disco fechado de raio n em C*
- $E = \{$*mergulhos equivariantes de Ω em $\mathbb{R}^n$ de classe C^3* $\}$
- $\mathbb{Z} = \{ u \in L^1(\partial\Omega) | u \circ g = u \forall g \in G \}$
- $B_\Omega(u, v) = Re\ \frac{\partial\varphi}{\partial N} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial N}$
- $\overline{\mathcal{X}}(g) = \overline{\mathcal{X}(g)}$

Então o conjunto:

$$\tilde{E} = \{h \in E \ \ tais\ que\ \ 0 \in Im(G_{\mathcal{X}}(.,.,.,h))\}$$

é raro (isto é : fechado e de interior vazio).

Demonstração. A demonstração do lema 4.8 pode ser repetida aqui linha por linha. Apenas observamos que a hipótese: codimensão de $G(x)$ em $\partial\Omega > 1$ não é mais automática como no caso de grupos finitos (se $dim\partial\Omega > 1$) $\square$.

Teorema 4.3 *Seja $G \subset O(n)$, um subgrupo compacto e comutativo. Suponhamos que $dimG < n-2$.*
Então os auto-valores do Laplaciano são todos simples sobre C(isto é dimensão do auto-espaço como subespaço complexo de $L^2(\Omega, C) = 1$) , para um conjunto residual de regiões Ω de classe C^2 e G-simétricas, se nos restringimos a cada um dos espaços $M_{\mathcal{X}}$.

Demonstração. A demonstração segue as linhas do teorema 4.1.

Comentário 4.2 *Se tentarmos imitar o procedimento da seção anterior para provar que os auto-valores são G-simples encontraremos a seguinte dificuldade: como antes teremos auto-funções φ e ψ em $M_{\mathcal{X}_1}$ e $M_{\mathcal{X}_2}$ respectivamente, satisfazendo*

$$|\varphi_N|^2 - |\psi_N|^2 = 0 \quad em\ um\ aberto\ de\ \partial\Omega$$

Mas agora não conseguimos provar que o operador:

$$\sigma \xrightarrow{\Theta} Re\left[\frac{\partial\varphi}{\partial N}\frac{\partial}{\partial N}\mathcal{B}_{\Delta+\lambda}\left(\sigma\frac{\partial\varphi}{\partial N}\right) - \frac{\overline{\partial\psi}}{\partial N}\frac{\partial}{\partial N}\mathcal{B}_{\Delta+\lambda}\left(\sigma\frac{\partial\psi}{\partial N}\right)\right]_{|\partial\Omega}$$

não tem posto finito (embora isto pareça ser bastante improvável). De fato, o passo crucial para a prova deste fato foi. o lema B.3 que só pudemos provar no caso de grupos finitos.

4.4 O caso de grupos não comutativos

Sendo a teoria de representação para grupos não comutativos mais complicada, não é surpreendente que nosso problema se torne correspondentemente mais difícil. Em primeiro lugar, mesmo trabalhando em espaços complexos sempre existirão representações irredutíveis de dimensão ≥ 2(ver Teo. A.1).
Por este motivo, nesta seção trataremos o Problema de Auto-valores para o Laplaciano *em espaços reais.*

Usaremos nesta seção a notação e os resultados do apêndice A, em especial da seção A.2.

Como antes, gostaríamos de provar que, genericamente, os auto-valores são G-simples. Não será possível fazê-lo no caso geral. Podemos, porém, obter alguns resultados parciais.

Para começar seja λ auto-valor de multiplicidade m em uma região Ω de classe $\mathcal{C}^2$. Lembremos do lema 4.3 que, para h suficientemente próximo de i_Ω (na topologia $\mathcal{C}^2$) existem, numa vizinhança de λ exatamente m auto-valores $\lambda_1(h), \ldots, \lambda_m(h)$ (contados com sua multiplicidade) de $h^\star \Delta_{h(\Omega)} h^{\star -1}$, e uma base ortonormal $v_1(h), \ldots, v_m(h)$ de $V_{\lambda_1(h)} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_m(h)}$ com as v_i funções contínuas de h.
Temos então:

Proposição 4.1 *Seja $G \subset O(n)$ compacto e Γ a representação quase regular de G em $L^2(\Omega)$. Suponhamos que:*

$$\Gamma_{|V_\lambda} \quad \textit{é irredutível.}$$

Então existe $\varepsilon > 0$ tal que, se $\| i_\Omega - h \|_{\mathcal{C}^2} < \varepsilon$ e h é equivariante,

$$\Gamma_{|V_{\lambda_1(h)} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_m(h)}} \quad \textit{é irredutível.}$$

Demonstração. Tendo em vista a proposição A.4 basta mostrar que todo vetor não nulo $w \in V_{\lambda_1(h)} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_m(h)}$ é cíclico.
Podemos também supor que $\| w \| = 1$, isto é:

$$w \in V_{\lambda_1(h)} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_m(h)} \cap S^m$$

Para cada h seja $v_1(h), \ldots, v_m(h)$ a base ortonormal cuja existência é garantida pelo lema 4.3. Definimos:

$$T_h : V_\lambda \cap S^m \longrightarrow V_{\lambda_1(h)} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_m(h)} \cap S^m$$

por:

$$a_1 v_1(i_\Omega) + \ldots + a_m v_m(i_\Omega) \longrightarrow a_1 v_1(h) + \ldots + a_m v_m(h)$$

$T(v,h)$ é, claramente, sobrejetora.
Para cada $v_0 \in V_\lambda \cap S^m$ existe uma vizinhança U de (i_Ω, v_0) tal que $T(h,v)$ é cíclico se $(h,v) \in U$. Em outras palavras, o conjunto:

$$\{\Gamma_g(T(h,v)) \mid g \in G\}$$

gera $\oplus V_{h_i}(h)$, para todo $(h,v) \in U$.
De fato, se

$$[\ \Gamma_{g_1}(v_0), \ldots, \Gamma_{g_m}(v_0)\ ] = V_\lambda$$

(onde $[\ \Gamma_{g_1}(v_0), \ldots, \Gamma_{g_m}(v_0)\ ]$ é o subespaço gerado pelos vetores $\Gamma_{g_i}(v_0)$ e M é a matriz dos coeficientes dos $\Gamma_{g_i}(v_0)$ na base $\{v_1(i_\Omega), \ldots, v_m(i_\Omega)\}$) devemos ter:

$$det\ M \neq 0$$

Agora, como a base $\{v_i(h)\}$ varia continuamente com h, T é contínua em v e as $\Gamma_{g_1}, \ldots, \Gamma_{g_m}$ são funções contínuas, se $M(h,v)$ é a matriz dos coeficientes dos $\Gamma_{g_i}(T(h,v))$ na base $\{v_1(h), \ldots, v_m(h)\}$ teremos, para h próximo de i_Ω e v próximo de v_0 :

$$detM(h,v) \neq 0$$

e, portanto, $T_h(v)$ é cíclico.

A vizinhança U de (i_Ω, v_0) acima pode ser suposta da forma:

$$U = \mathcal{O}_{v_0} \times \{h \mid \| h - i_\Omega \|_{C_2} < \varepsilon(v_0)\}$$

onde $\mathcal{O}_{v_0}$ é vizinhança de v_0 em $V_\lambda \cap S^m$. As $\mathcal{O}_v$ formam uma cobertura aberta de $V_\lambda \cap S^m$.

Seja $\mathcal{O}_{v_1} \cup \ldots, \cup \mathcal{O}_{v_k}$ uma sub-cobertura finita, e $\varepsilon = min\{\varepsilon(v_i),\ i = 1, \ldots, k\}$. Então, se $\| h - i_\Omega \|_{C^2} < \varepsilon$, $T_h(v)$ é cíclico para todo $v \in V_\lambda$. Como $T_h(v)$ é sobrejetora segue que todo vetor em $\oplus V_{\lambda_i(h)}$ é cíclico e $\oplus V_{\lambda_i(h)}$ é irredutível $\square$.

Corolário 4.3 *Sejam G, e λ nas condições do teorema acima. Então existe $\varepsilon > 0$ tal que se $\| i_\Omega - h \|_{C^2} < \varepsilon$ temos:*

$$\lambda_1(h) = \lambda_2(h) = \ldots = \lambda_m(h)$$

(onde as $\lambda_i(h)$ são as funções contínuas do lema 4.3)

Demonstração. Como $\Gamma_{|\oplus V_{\lambda_i(h)}}$ é irredutível pela proposição acima e cada $V_{\lambda_i(h)}$ é invariante o resultado segue imediatamente $\square$.

Comentário 4.3 *Lembremos que um auto-valor nas condições da proposição e do corolário acimas é denominado G-simples. O que esses resultados estão dizendo então é que auto-valores G-simples não podem ser separados conservando a simetria. Eles se comportam de maneira parecida com os auto-valores simples na ausência de simetria.*

Segue das considerações acima que a propriedade de todos os auto-valores de módulo $< n$ serem G-simples é aberta. Se pudessemos provar que essa propriedade é também densa nossa conjectura estaria demonstrada.

Vamos então olhar para cada subespaço invariante M_σ da representação quase-regular (ver apêndice A, em especial seção A.2).

Cada sub-representação irredutível em M_σ é equivalente à representação matricial:

$$g \to A_\sigma(g)$$

onde $A_\sigma(g)$ é matriz ortogonal de dimensão d_σ para cada g.

Vamos considerar o sub-espaço $X_{A_\sigma} \subset (\ \mathrm{L}^2(\Omega)\ )^{d_\sigma}$, definido por:

$$X_{A_\sigma} = \left\{ \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{d_\sigma} \end{bmatrix} \in \mathrm{L}^2(\Omega)^{\ d_\sigma} \quad t.\,q. \quad \begin{bmatrix} u_1 \circ g^{-1} \\ \vdots \\ u_{d_\sigma} \circ g^{-1} \end{bmatrix} = A_\sigma^t \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{d_\sigma} \end{bmatrix} \right\}$$

Definição 4.3 *Diremos que uma d_σ-upla $[u_1, \ldots, u_{d_\sigma}]$ em X_{A_σ} é uma auto-função do Laplaciano em X_{A_σ} com auto-valor λ se u_i é auto-função do Laplaciano em $H^2 \cap H_0^1(\Omega)$ com auto-valor λ para $1 \leq i \leq d_\sigma$.*

Proposição 4.2 *Se λ é auto-valor do Laplaciano em X_{A_σ} e $[u_1, \ldots, u_{d_\sigma}]$ é auto-função associada então $u_1, \ldots, u_{d_\sigma}$ são auto-funções linearmente independentes do Laplaciano em M_σ.*

Demonstração. Como, por definição, a representação Γ restrita ao subespaço gerado pelas u_i está na classe σ segue do teorema A.7 (parte de unicidade) que cada u_i deve estar em M_σ (uma demonstração mais direta pode ser feita exatamente como em A.8).

Além disso, em vista do mesmo teorema, as funções $u_1, \ldots, u_{d_\sigma}$ devem ser linearmente independentes pois, caso contrário, teríamos um subespaço invariante de M_σ de dimensão menor do que d_σ $\square$.

Proposição 4.3 *Se λ é auto-valor simples de $\Delta : X_{A_\sigma} \to X_{A_\sigma}$ então:*

$$\Gamma : V_\lambda \cap M_\sigma \to V_\lambda \cap M_\sigma$$

é irredutível.

Demonstração. Suponhamos que:

$$\Gamma : V_\lambda \cap M_\sigma \to V_\lambda \cap M_\sigma$$

é redutível.

Teremos então dois subespaços W_1 e W_2, $W_1 \cap W_2 = \{0\}$, contidos em $V_\lambda \cap M_\sigma$ tais que: $\Gamma_{|W_i}$ está na classe σ, para $i = 1, 2$.
Mas então, tomando bases convenientes em W_1 e W_2 teremos duas auto-funções linearmente independentes de Δ em X_{A_σ} $\square$.

Proposição 4.4 *Consideremos a aplicação:*

$$\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \ u_{d_\sigma} \end{bmatrix}, \lambda\right) \to \begin{bmatrix} (\Delta+\lambda)u_1 \\ \vdots \\ (\Delta+\lambda)u_{d_\sigma} \end{bmatrix}$$
$$X_{A_\sigma} \setminus \{0\} \times \mathbb{R} \to X_{A_\sigma}$$

Então esta aplicação é de Fredholm de índice 1 e se 0 é valor regular, os auto-valores (em X_{A_σ}) são todos simples.

Demonstração. A demonstração é 'mutatis mutandis' a mesma do lema 4.7 □.

Gostaríamos agora de aplicar o Teorema da Transversalidade para concluir que os auto-valores de $\Delta : X_{A_\sigma} \to X_{A_\sigma}$ são simples. Esta pretensão esbarra, porém em dificuldades técnicas que não pudemos superar.

Vamos então, no que segue, tratar apenas dos grupos *cujas representações irredutíveis têm dimensão d_σ no máximo 2.*
Nesse caso, temos 3 possibilidades:

1. $d_\sigma = 1$.
2. $d_\sigma = 2$, e as complexificadas das representações em M_σ são redutíveis.
3. $d_\sigma = 2$, e as complexificadas das representações em M_σ são irredutíveis (uma tal representação é denominada *absolutamente irredutível).*

Não precisamos nos preocupar muito com os casos 1 e 2, a rigor eles já foram tratados na seção 4.2.

Lema 4.10 *Suponhamos que G é um subgrupo finito de $O(n)$ e σ uma classe de representações irredutíveis com dimensão $d_\sigma = 2$. Suponhamos ainda que σ é absolutamente irredutível. Então os auto-valores de*

$$\Delta : X_{A_\sigma} \to X_{A_\sigma}$$

são todos simples para um conjunto residual de regiões de classe C^3, G-simétricas.

Demonstração. Tendo em vista a proposição 4.4 basta provar que 0 é valor regular do operador:

$$\begin{array}{rcl} \left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \lambda\right) & \to & \begin{bmatrix} (\Delta+\lambda)u_1 \\ \vdots \\ (\Delta+\lambda)u_2 \end{bmatrix} \\ X_{A_\sigma} \setminus \{0\} \times \mathbb{R} & \to & X_{A_\sigma} \end{array}$$

Aplicando o Teorema da Transversalidade usual, ao operador:

$$F : X_{A_\sigma} \setminus \{0\} \cap (\mathrm{H}^2 \cap \mathrm{H}_0^1(\Omega))^2 \times \mathbb{R} \times E \to X_{A_\sigma}$$

(onde: $E = \{$mergulhos equivariantes deΩ em $\mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^3\}$)
definido por:

$$\left(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \lambda, h\right) \to \begin{bmatrix} h^*(\Delta+\lambda)h^{*-1}u \\ h^*(\Delta+\lambda)h^{*-1}v \end{bmatrix}$$

concluiremos que se 0 não é valor regular então existem auto-funções

$$\begin{aligned} \varphi &= \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} \\ \psi &= \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

satisfazendo:

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial N}\frac{\partial\psi_1}{\partial N} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial N}\frac{\partial\psi_2}{\partial N} = 0 \quad \text{no } \partial\Omega.$$

Como na demonstração do lema 4.8, aplicamos o Teorema da Transversalidade de Henry para mostrar que das regiões onde isto pode ocorrer é raro.
De fato, raciocinando por contradição encontraremos auto-funções φ e ψ em X_{A_σ} satisfazendo:

1. $\frac{\partial\varphi_1}{\partial N}\frac{\partial\psi_1}{\partial N} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial N}\frac{\partial\psi_2}{\partial N} = 0$ no $\partial\Omega$.
2. $\frac{\partial\varphi_{1N}}{\partial\tau}\frac{\partial\psi_{1N}}{\partial\tau} + \frac{\partial\varphi_{2N}}{\partial\tau}\frac{\partial\psi_{2N}}{\partial\tau} = 0$ em um aberto de $\partial\Omega$, para todo τ no espaço tangente.

Fazendo:

$$q = (q_1, q_2) = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial N}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial N}\right) \quad r = (r_1, r_2) = \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial N}, \frac{\partial \psi_2}{\partial N}\right)$$

teremos:

$$\begin{array}{rcl} r_1 & = & \alpha q_2 \\ r_2 & = & -\alpha q_1 \end{array} \quad \text{onde: } \alpha = \frac{r_1 q_2 - r_2 q_1}{{q_1}^2 + {q_2}^2}$$

e então raciocinando de maneira análoga ao da demonstração do lema 4.8 teremos :

$$\begin{array}{rcl} \nabla \alpha & = & 0 \quad \text{em um aberto de } \partial\Omega \\ ou: & & \\ \nabla \dfrac{q_2}{q_1} & = & 0 \quad \text{em um aberto de } \partial\Omega \end{array}$$

Se $\nabla \alpha = 0$ em um aberto de $\partial\Omega$ então:

$$\begin{array}{rcl} r_1 & = & k.q_2 \\ r_2 & = & -k.q_1 \end{array} \quad \text{onde } k \text{ é constante real} \tag{4.14}$$

Façamos:

$$A_\sigma(g) = \begin{bmatrix} a_{11}(g) & a_{12}(g) \\ a_{21}(g) & a_{22}(g) \end{bmatrix}$$

Como $\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} \in X_{A_\sigma}$ teremos para todo $g \in G$:

$$r_1 \circ g = a_{11}(g) r_1 + a_{12}(g) r_2$$

$$r_2 \circ g = a_{21}(g) r_1 + a_{22}(g) r_2$$

Por outro lado, de 4.14:

$$\begin{array}{rcl} r_1 \circ g & = & a_{22}(g) r_1 - a_{21}(g) r_2 \\ r_2 \circ g & = & -a_{12}(g) r_1 + a_{11}(g) r_2 \end{array}$$

Se r_1 e r_2 fossem linearmente dependentes teríamos, por unicidade no problema de Cauchy, que ψ_1 e ψ_2 também o são. Mas isso não pode ocorrer em vista da proposição 4.2.

Segue então que devemos ter:

$$\begin{aligned} a_{11} &\equiv a_{22} \\ a_{12} &\equiv -a_{21} \end{aligned}$$

Mas então σ é absolutamente redutível contra a hipótese.

Se, por outro lado, $\nabla \frac{q_2}{q_1} = 0$ em um aberto de $\partial\Omega$, então, novamente por unicidade, φ_1 e φ_2 seriam linearmente dependentes o que não pode ocorrer como vimos $\square$.

Corolário 4.4 *Se G é um subgrupo finito de $O(n)$, com representações irredutíveis de dim ≤ 2 então, para um conjunto residual de regiões Ω, C^2 e $G-$simétricas, a representação:*

$$\Gamma : V_\lambda \cap M_\sigma \to V_\lambda \cap M_\sigma$$

é irredutível para todo auto-valor λ do Laplaciano em Ω

Demonstração. Suponhamos primeiro que $d_\sigma = 1$. Usando a notação da seção 4.2, teremos :

$$M_\sigma = M_\mathcal{X}$$

onde $\mathcal{X}$ é um caracter real, e basta então aplicar o lema 4.5.

Se $d_\sigma = 2$ e o *complexificado* $\tilde{M}_\sigma$ de M_σ (ver seção A.2) é redutível, teremos:

$$\tilde{M}_\sigma = M_\mathcal{X} \oplus \overline{M_\mathcal{X}}$$

e usamos o teorema 4.1.

Finalmente, se $d_\sigma = 2$ e σ é absolutamente irredutível basta usar o lema 4.10 acima $\square$.

Corolário 4.5 *Se G é um subgrupo finito de $O(n)$, com representações irredutíveis de dim ≤ 2 os autovalores do operador:*

$$-\Delta : M_\sigma \cap H^2 \cap H_0^1(\Omega) \longrightarrow M_\sigma \quad \textit{são:}$$

- *simples se $d_\sigma = 1$*

- *duplos se* $d_\sigma = 2$

num conjunto residual de regiões G-simétricas, $\mathcal{C}^2$.

Demonstração. Imediata a partir do corolário acima □.

Teorema 4.4 *Suponhamos que G é um subgrupo finito de* $O(n)$ *cujas representações irredutíveis têm dimensão* ≤ 2. *Então, para um conjunto residual de regiões de classe* $\mathcal{C}^2$, *G - simétricas os autovalores do problema de Dirichlet para o Laplaciano podem ser de dois tipos:*

1. simples *e associados a uma auto-função em* M_σ *com* $d_\sigma = 1$
2. duplos *e associados a um par de auto-funções* u_1 *e* u_2 *em* M_σ *com* $d_\sigma = 2$ *satisfazendo:*

$$\begin{bmatrix} u_1 \circ g^{-1} \\ \vdots \\ u_2 \circ g^{-1} \end{bmatrix} = A_\sigma^t \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Em outras palavras, os auto-valores são, "genericamente", G − simples.

Demonstração. Usamos aqui as mesmas idéias da demonstração do teorema 4.2. Teremos porém uma pequena dificuldade técnica. Queremos calcular a derivada de auto-valores $\lambda(t)$, em um espaço M_σ ao longo de curvas de difeomorfismos da forma:

$$x \to x + t\dot{h}(x) + o(t) = h(t,x), \quad h(t,.) \text{ equivariante para cada t.}$$

Mas agora, se $d_\sigma = 2$, λ não será auto-valor simples em M_σ e sim duplo. Portanto, não segue imediatamente do Teorema das Funções Implícitas que λ é função diferenciável de t. Para garantir isto, usamos então o lema 4.2. Um cálculo simples (ver [3]) mostra então que se $\lambda_\sigma(t)$ é auto-valor de $-\Delta$ em M_σ e $\{u(t), v(t)\}$ base ortonormal (variando analíticamente em t) do auto-espaço V_λ então:

$$\frac{d}{dt}_{|t=0} \lambda_\sigma(t) = -\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} \dot{h} \cdot N \left(\left|\frac{\partial u_0}{\partial N}\right|^2 + \left|\frac{\partial v_0}{\partial N}\right|^2 \right)$$

(onde $u_0 = u(0)$, $v_0 = v(0)$)

Observemos que

$$\left(\left|\frac{\partial u_0}{\partial N}\right|^2 + \left|\frac{\partial v_0}{\partial N}\right|^2\right)$$

é função par.

Se λ é auto-valor associado a auto-funções em subespaços M_{σ_1} e M_{σ_2} temos três possibilidades:

1. $d_{\sigma_1} = d_{\sigma_2} = 1$. Então, aplicando o Teorema da Transversalidade na versão usual, concluiremos que existem auto-funções φ e ψ em M_{σ_1} e M_{σ_2} respectivamente satisfazendo $(\frac{\partial \varphi}{\partial N})^2 = (\frac{\partial \psi}{\partial N})^2$ e então $\varphi = \pm\psi$ o que não pode ocorrer.

2. $d_{\sigma_1} = 1$ e $d_{\sigma_2} = 2$. Usamos o Teorema da Transversalidade de Henry para concluir que existe uma auto-função φ_1 em M_{σ_1} e um par de auto-funções ψ_1 e ψ_2 em M_{σ_2} satisfazendo (com $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_1$ e $\psi = \psi_1 + i\psi_2$):

$$|\varphi_N|^2 - |\psi_N|^2 \equiv 0 \quad e \quad \left|\frac{\partial \varphi_N}{\partial \tau}\right|^2 - \left|\frac{\partial \psi_N}{\partial \tau}\right|^2 \equiv 0$$

   em um aberto de $\partial\Omega$ para todo τ no espaço tangente. Raciocinando como em 4.2 chegaremos à conclusão de que $\varphi = \psi$ o que não pode ocorrer.

3. $d_{\sigma_1} = d_{\sigma_2} = 2$ o procedimento é análogo ao do ítem anterior $\square$.

Apêndice A

Representações Unitárias de Grupos Compactos

A.1 Alguns Resultados da Teoria de Representações

Apresentaremos aqui alguns exemplos da teoria de representações de grupos compactos. A demonstração dos mesmos pode ser encontrada em [4],[11], [14] ou [15].

Definição A.1 Seja G um grupo e $L(E)$ o espaço dos operadores em um espaço vetorial E. Uma *representação de G em E* é uma aplicação $V{:}G \to L(E)$ satisfazendo:

1. $V_{xy} = V_x \circ V_y, \ \forall x, y \in G$
2. $V_e = Id$

(onde e é a unidade de G e Id o operador Identidade de E em E).

Observação A.1 Como $V_{x^{-1}} \circ V_x = V_x \circ V_{x^{-1}} = V_e = Id$, V_x é inversível para todo $x \in G$. V e, portanto, um homomorfismo de G no grupo $GL(E)$ dos operadores inversíveis de E.

Suporemos, no que segue, que G é um grupo compacto, $E = H$ é um espaço de Hilbert *complexo*, embora muitas definições e resultados se apliquem em um contexto

mais geral. A integração em G será sempre com respeito à sua (única) medida de Haar.

Observemos que na definição A.1 não estamos exigindo que V_x seja operador contínuo. (De fato, isso nem faz sentido em geral pois E é apenas espaço vetorial).

Definição A.2 Diremos que uma representação V: $G \to$ L(H) é (fortemente) *contínua* se :

$$\lim_{x \to e} V_x \xi = \xi \ \forall \xi \in H$$

Proposição A.1 Se a representação V:$G \to L(H)$ é contínua então a aplicação:

$$(x, \xi) \longrightarrow V_x \xi$$

de $G \times H$ em H é contínua. (Em particular V_x é um operador contínuo para cada $x \in H$.)

Definição A.3 Sejam $V : G \to L(H)$ e $V' : G \to L(H')$ representações contínuas de G. Diremos que V e V' são *equivalentes* se existir uma isometria linear $T : H \to H'$ tal que:

$$V_{x'} \circ T = T \circ V_x \quad \forall x \in G$$

Definição A.4 Diremos que uma representação contínua V:$G \to L(H)$ é *unitária* se V_x é um operador unitário para cada $x \in G$, ou seja:

$$\langle V_x \xi \, , \, V_x \eta \rangle \ = \ \langle \xi \, , \, \eta \rangle \ \forall x \in G, \forall \xi, \eta \in H.$$

(ou ainda: $V_x^\star = V_{\xi^{-1}}$, onde $V_x^\star$ é o operador adjunto de V_x).

Proposição A.2 Seja $V : G \to L(H)$ uma representação contínua (não necessariamente unitária). Então existe um isomorfismo T: $H \to H$ (isto é um operador linear contínuo com inversa contínua tal que $V' = T \circ V \circ T^{-1}$ é uma representação unitária de G em H.

Definição A.5 Seja $V : G \longrightarrow L(H)$ representação contínua.

1. Um subespaço $H_1 \subset H$ é *invariante para* V se $V_x H_1 \subset H_1$ para todo $x \in G$. A representação $V' : G \to \mathrm{L}(H_1)$ definida por: $V'_x \xi = V_x \xi \ \ \forall \xi \in H_1$ é denominada *sub-representação* de V e indicada por $V_{|H_1}$.
2. V é *cíclica* se existe $\xi \in H$ tal que o espaço gerado por $\{V_x \xi \mid x \in G\}$ é denso em H (nesse caso, ξ é dito cíclico).
3. V é *irredutível* se os únicos subespaços fechados invariantes para V são $\{0\}$ e H. Caso contrário, V é dita *redutível*.(Diz-se que um subespaço próprio invariante H_1 *reduz* V).
4. Se $H = H_1 \oplus H_2 \oplus \ldots \oplus H_m \ldots$, onde os H_i são invariantes para V escrevemos $V = V_{|H_1} \oplus \ldots \oplus V_{|H_m} \oplus \ldots$ e diremos que V é *soma direta* das representações $V_{|H_i}$.

Proposição A.3 Seja V representação unitária de G e $\mathrm{L} \subset H$ subespaço fechado. Então L é invariante para V se, e somente se, o operador projeção, $\mathrm{P} : H \to H$ comuta com V, isto é:

$$P \circ V_x = V_x \circ P \quad \text{para todo } x \in G.$$

Proposição A.4 Seja V representação unitária de G. São equivalentes:

1. V é irredutível.
2. Todo vetor não nulo $\xi \in H$ é cíclico para V.
3. Os únicos operadores limitados de $L(H)$ que comutam com V são os da forma: $\alpha\, I$ ($\alpha \in \mathbb{C}$).

Definição A.6 Diremos que a representação V de G em H é de *dimensão finita* se H é de dimensão finita e escrevemos dim V = dim H. (H subespaço invariante?)

(A representação possui subespaço invariante de dim=0)

Teorema A.1 Toda representação unitária e irredutível de G é de dimensão finita. Se G é abeliano, V é necessariamente de dimensão 1. Reciprocamente, se toda representação irredutível unitária de G é unidimensional, então G é abeliano.

Teorema A.2 Para todo $a \in G$, $a \neq e$, existe uma representação unitária e irredutível V de G tal que: $V_a \neq Id$.

Definição A.7 Um caracter de G é uma função limitada e não nula $\mathcal{X}$: $G \to \mathbb{C}$ satisfazendo:

$$\mathcal{X}(x.y) = \mathcal{X}(x).\mathcal{X}(y) \ \forall x, y \in G$$

(É fácil mostrar que $\mathcal{X}(\mathrm{e}) = 1$ e $\mid \mathcal{X}(x) \mid = 1 \ \forall x \in G$. Portanto um caracter de G é um homomorfismo de G em S^1).

Proposição A.5 O conjunto dos caracteres contínuos de G, com a multiplicação ponto a ponto é um grupo denominado *grupo dos caracteres de G.*

Proposição A.6 Sejam G_1, $G_2, \ldots, G_m$ grupos abelianos com grupo de caracteres X_1, $X_2, \ldots, X_m$ respectivamente . Indiquemos por :

$$\prod_{j=1}^{m} X_j \quad \text{e} \quad \prod_{j=1}^{m} G_j$$

o produto direto dos grupos X_j e G_j respectivamente.

Para cada $(\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_m) \in \prod_{j=1}^{m} X_j$, seja $[\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_m]$ a função:

$$(x_1, \ldots, x_m) \longrightarrow \mathcal{X}_1(x_1).\mathcal{X}_2(x_2) \ldots \mathcal{X}_m(x_m)$$

definida em $\prod_{j=1}^{m} G_j$. Então a aplicação:

$$(\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_m) \longrightarrow [\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_m]$$

é um isomorfismo topológico de $\prod_{j=1}^{m} X_j$ no grupo dos caracteres de $\prod_{j=1}^{m} G_j$.

(Sucintamente, o grupo dos caracteres de $\prod_{j=1}^{m} G_j$. "é" o produto $\prod_{j=1}^{m} X_j$ dos grupos de caracteres dos G_j).

Comentário A.1 Se $G = \{0, 1, \ldots, m-1\}$ é o grupo cíclico com m elementos, seu grupo de caracteres é o grupo das aplicações:

$$k \longrightarrow e^{2\pi i k/m}$$

(isto não é apenas 1 caracter?)

Acho que é assim

$$\chi_j(k) = \begin{cases} 1, & k \neq j \\ e^{2\pi i k/m}, & k = j \end{cases}$$

$0 \leq j \leq m-1$

que é isomorfo a G.

Segue da proposição A.6 acima que o grupo de caracteres de um grupo abeliano finito é isomorfo a G.

No caso de um grupo abeliano infinito, a aplicação de G no grupo de caracteres W do grupo de caracteres X de G definida por:

$$(\Theta(x))(\mathcal{X}) = \mathcal{X}(x)$$

é um isomorfismo topológico.

Definição A.8 O conjunto das classes de equivalência de representações unitárias, irredutíveis de G será denominado *objeto dual* ou simplesmente *dual* de G e indicado por $\hat{G}$.

Teorema A.3 (Lema de Schur) Sejam $V_1 : G \to L(H_1)$, $V_2 : G \to L(H_2)$ representações irredutíveis. Suponhamos que exista uma transformação linear $A : H_1 \to H_2$ tal que: $A \circ V_{1x} = V_{2x} \circ A \quad \forall x \in G$.
Então ou A = 0 ou A é isomorfismo.

Definição A.9 Seja σ um elemento arbitrário de $\hat{G}$, V uma representação na classe σ e $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{d_\sigma}\}$ uma base ortonormal no espaço de representação H de V. Para $j, k \in \{1, 2, \ldots, d_\sigma\}$ seja $u_{j,k}$ a função em G definida por:

$$u_{j,k}(x) = \langle\, V_x \xi_k \,,\, \xi_j \,\rangle$$

para $x \in G$. As funções u_{jk} são denominadas *funções coordenadas para* $V \in \sigma$ *e a base* $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{d_\sigma}\}$.

Proposição A.7 Para cada $\sigma \in \hat{G}$, seja $\{u_{jk} : j = 1, 2, \ldots, d_\sigma\}$ um conjunto de funções coordenadas para uma representação V na classe σ e uma base fixa $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{d_\sigma}\}$ no espaço de representação H de V. Então o conjunto de todas as funções $d_\sigma^{1/2} u_{jk}$, onde $j, k \in \{1, 2, \ldots, d_\sigma\}$ e $\sigma \in \hat{G}$, é um conjunto ortonormal em $L^2(\Omega)$. Em particular temos:

$$\int_G u_{jk} \overline{u_{lm}} = \frac{1}{d_\sigma} \delta_{jl} \delta_{km}.$$

Definição A.10 Seja V representação de dimensão finita de G.
O *caracter da representação* V, denotado por $\mathcal{X}_V$ é a função:

$$x \in G \longrightarrow trV_x$$

(onde trV_x indica o traço do operador V_x).

Observação A.2

1. Se V é de dimensão 1, o caracter da representação V é um caracter do grupo G.
2. Se V e V' são equivalentes então $\mathcal{X}_V = \mathcal{X}_{V'}$. Podemos então escrever $\mathcal{X}_\sigma$ para indicar o caracter de qualquer representação na classe $\sigma \in \hat{G}$ e d_σ para indicar a dimensão de qualquer uma dessas representações.

Teorema A.4 Seja V representação unitária de G em H. Para cada $\sigma \in \hat{G}$, seja P_σ o operador em H definido por:

$$\langle P_\sigma \xi \, , \, \eta \rangle = \int_G \langle V_x \xi \, , \, \eta \rangle d_\sigma \overline{\mathcal{X}_\sigma(x)} \, dx$$

Então P_σ é operador projeção em H. Façamos $M_\sigma = P_\sigma H$.
Se $\sigma \neq \sigma'$ então M_σ e $M_{\sigma'}$ são subespaços ortogonais de H e $H = \bigoplus_{\sigma \in \hat{G}} M_\sigma$.
Para cada $\sigma \in \hat{G}, M_\sigma$ é $\{0\}$ ou uma soma direta de m_σ subespaços invariantes $L_{\sigma,j}$ com dim $L_{\sigma,j} = d_\sigma$ e $V_{|L_{\sigma,j}} \in \sigma$.
O número cardinal m_σ pode ser finito ou infinito.
O subespaço M_σ é o menor subespaço fechado de H contendo todos os subespaços invariantes de H restrito aos quais V está em σ.
Essa soma é única no seguinte sentido:

$$\text{Se} \quad H = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda$$

(Com relação a V)

onde N_λ é irredutível para todo $\lambda \in \Lambda$ então:

$$\{N_\lambda \mid V_{|N_\lambda} \in \sigma\} = M_\sigma$$

e existem m_σ subespaços N_λ tais que $V_{|N_\lambda} \in \sigma$.

Proposição A.8 Se $G_o \subset G$ é subgrupo fechado, então toda representação unitária V_o de G_o pode ser estendida a uma representação unitária de G. Se V_o é irredutível esta extensão pode ser tomada irredutível.

Definição A.11 *A representação regular (à esquerda) de* G é a representação:

$$\mathcal{R} : G \longrightarrow L(L^2(G)) \quad \text{definida por:}$$

$$(\mathcal{R}_x f)(y) = f(x^{-1}.y) \ q.s.$$

(onde $L^2(G)$ é o espaço das funções $f : G \to \mathbb{C}$ de quadrado integrável).

Teorema A.5 A representação regular é uma representação unitária de G. Seja:

$$L^2(G) = \bigoplus_{\sigma \in \hat{G}} M_\sigma$$

a decomposição fornecida pelo teorema A.4 acima. Então cada subespaço M_σ é soma direta de d_σ subespaços $L_{\sigma,j}$ tais que $V_{|L_{\sigma,j}} \in \sigma$. Em outras palavras, toda representação unitária irredutível de G comparece (módulo equivalência) na decomposição acima com multiplicidade igual à sua dimensão.

Comentário A.2 No caso em que G é um grupo *finito* temos alguns resultados especiais:

1. A medida de Haar em G é, simplesmente, a medida de contagem normalizada e $L^2(G) = \{f : G \to \mathbb{C}\}$.
2. $\hat{G} = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_s\}$ é finito e $\sharp G = dim L^2(G) = {d_{\sigma_1}}^2 + {d_{\sigma_2}}^2 + \ldots + {d_{\sigma_s}}^2$ ($\sharp$ indica a cardinalidade).
3. O produto de convolução em $L^2(G)$, no caso de G finito pode ser definido por:

$$f \star g = \sum_{y \in G} f(x.y^{-1}) g(y)$$

Seja L^2_z o centro da álgebra $L^2(G)$ com o produto de convolução.
($f \in L^2_z \Leftrightarrow f \star g = g \star f \quad \forall g \in L^2(G)$)
Então as seguintes afirmações são equivalentes:

(a) $f(xy) = f(yx)\ \forall x, y \in G$

(b) f é constante nas classes de conjugação de G

(c) $f \in L^2_z(G)$

4. Os caracteres das representações de G, $\mathcal{X}_{\sigma_j}$ formam uma base de $L^2_z(G)$ e, portanto, o número de elementos de elementos de $\hat{G}$ é igual ao número de classes de conjugação de G.

A.2 Representações Ortogonais

Na secão anterior, acompanhando a maioria dos textos (ver por exemplo [4] ou [7]), enunciamos resultados exclusivamente para representações de grupos *em espaços complexos*. Precisamos, porém, especialmente no capítulo 4, trabalhar em espaços reais. Como não encontramos um tratamento adequado aos nossos propósitos, desenvolvemos abaixo a teoria que necessitamos.

Felizmente, as definições dadas para representações em espaços complexos (que aqui denominaremos simplesmente *representações complexas*), podem ser mantidas aqui e muitos dos resultados anteriores podem ser reobtidos usando a "*complexificação*" da representação em um espaço real (que denominaremos *representação real*), conforme descreveremos abaixo. Nosso principal objetivo nesta seção será obter o análogo do teorema A.4 para representações reais. Em toda esta seção G será um subgrupo compacto do grupo ortogonal $O(n)$.

Seja E um espaço vetorial real. O *complexificado de* E, usualmente indicado por $E_{\mathbb{C}}$ é o espaço vetorial obtido de E simplesmente permitindo que os escalares sejam complexos. Em outras palavras,

$$E_{\mathbb{C}} = \{u + iv | u, v \in E\}$$

e as operações são definidas da maneira óbvia (mais formalmente $E_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} E$).

Se V é uma representação de G em E podemos definir uma representação de $V_{\mathbb{C}}$ em $E_{\mathbb{C}}$ denominada *representação complexificada de* V impondo que $(V_{\mathbb{C}})_x$ seja

linear em $E_{\mathbb{C}}$ e coincida com V em E. Em outras palavras:

$$(V_{\mathbb{C}})_x(u+iv) = V_x u + iV_x v.$$

Seja $\tilde{V}$ uma representação complexa do grupo G em um espaço (complexo) $\tilde{E}$. Dizemos que $\tilde{V}$ *é realizável real (ou realizável sobre* $\mathbb{R}$*)* se existir uma representação real V em um espaço (real) E tal que $\tilde{V}$ é equivalente a $V_{\mathbb{C}}$.

Proposição A.9 *Seja $\tilde{V}$ representação complexa em $\tilde{E}$ de dimensão finita. São equivalentes:*

1. *$\tilde{V}$ é realizável real.*
2. *Existe um sub-espaço real E_o em E invariante para $\tilde{V}$ tal que:*

$$\tilde{E} = E_o \oplus iE_o = \mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}} E_o$$

   ou seja: $\tilde{V} = (\tilde{V}_{|E_o})_{\mathbb{C}}$.

3. *Existe uma base de $\tilde{E}$ tal que a matriz de $\tilde{V}$ nesta base é real.*

(De fato não precisamos da hipótese da dimensão ser finita para a equivalência entre 1) e 2)).

Demonstração.

1) $\Rightarrow$ 2)

Seja E espaço real tal que: $V_{\mathbb{C}} \cong \tilde{V}$, e $T : E_{\mathbb{C}} \to \tilde{E}$ isomorfismo satisfazendo:

$$\tilde{V} \circ T = T \circ V_{\mathbb{C}}.$$

Façamos

$$E_o = T(E)$$

É imediato que E_o satisfaz o que se requer.

2) $\Rightarrow$ 1)

É imediata.

2) $\Rightarrow$ 3)

Como

$$E_o \cap iE_o = \{0\}$$

e E_o é invariante por $\tilde{V}$, segue que a matriz de $\tilde{V}_{|E_o}$ em uma base qualquer β de E_o deve ser real. Mas β é também base de E e a matriz de $\tilde{V}$ é então real nessa base.

3) $\Rightarrow$ 1)

Basta tomar um base de $\tilde{E}$ e o espaço real gerado por esta base como E $\square$.

Definição A.12 *Seja $\tilde{H}$ espaço de Hilbert* complexo. *Uma transformação*

$$D : \tilde{H} \to \tilde{H}$$

é uma conjugação se:

i) $D(\alpha.\xi + \eta) = \bar{\alpha}(D\xi) + D\eta \quad \forall \xi, \eta \in \tilde{H}, \forall \alpha \in C$

ii) $\langle D\xi \, , \, D\eta \rangle = \langle \xi \, , \, \eta \rangle \quad \forall \xi, \eta \in \tilde{H}$

ii) $D^2 = Id$

Observação A.3 *Pode-se provar (ver [4]) que, se D é conjugação em $\tilde{H}$, existe uma base ortonormal ξ_ι em $\tilde{H}$ tal que: $D(\sum \alpha_\iota \xi_\iota) = \sum \bar{\alpha}_\iota \xi_\iota$ e , se D' é outra conjugação em $\tilde{H}$, existe uma isometria T em $\tilde{H}$ tal que: $D' = TDT^{-1}$.*

Definição A.13 *Dada uma representação complexa $\tilde{V}$ em $\tilde{H}$, e uma conjugação D definimos uma representação denominada (uma)* conjugada de $\tilde{V}$ *por:*

$$x \longrightarrow DV_xD^{-1} = DV_xD$$

Em vista da observação acima, duas representações conjugadas de $\tilde{V}$ devem ser equivalentes e, portanto, dada uma classe σ de representações irredutíveis, a classe $\bar{\sigma}$ está bem definida (a rigor, é necessário mostrar que a conjugada de uma representação irredutível é irredutível; para isto ver [15]). Além disso, no caso de dimensão finita, se conhecemos a matriz (a_{ij}) de $\tilde{V}$ em uma base ortonormal, a matriz $(\bar{a}_{ij})$ é matriz de uma conjugada de $\tilde{V}$ nessa mesma base.

Proposição A.10 *Uma representação complexa $\tilde{V}$ em $\tilde{H}$ é realizável real se, e somente se, existe uma conjugação $D : \tilde{H} \to \tilde{H}$ que comuta com $\tilde{V}$.*

Demonstração. Suponhamos que $\tilde{V}$ é realizável real e $\tilde{H} = H_o \bigoplus iH_o$, com H_o invariante. Definimos uma conjugação em $\tilde{H}$ por:

$$D(u + iv) = u - iv$$

Então:

$$\begin{aligned} \tilde{V} \circ D(u + iv) &= \tilde{V}(u - iv) \\ &= \tilde{V}(u) - i\tilde{V}(v) \\ &= D(\tilde{V}(u) + i\tilde{V}(v)) \\ &= D \circ \tilde{V}(u + iv) \end{aligned}$$

Suponhamos agora que exista uma conjugação D com as propriedades requeridas. Definimos:

$$H_o = D(\tilde{H}) + \tilde{H} = \{(Du + u) | u \in \tilde{H}\}$$

É fácil ver que H_o é subespaço real de H e, como $\tilde{V}$ comuta com D,

$$\begin{aligned} \tilde{V}(H_o) &= \tilde{V}(D(\tilde{H}) + \tilde{H}) \\ &= D(V\tilde{H}) + V\tilde{H} \subset H_o \end{aligned}$$

Além disso, temos, para todo $u \in \tilde{H}$:

$$\begin{aligned} u &= (u + Du)/2 + (u - Du)/2 \\ &= (u + Du)/2 + i(-iu + D(-iu))/2 \end{aligned}$$

e, portanto:

$$\tilde{H} = H_o + iH_o$$

Finalmente, se $(u + Du) = i(v + Dv)$ teremos:

$$\begin{aligned} u + Du &= D(u + Du) \\ &= D(i(v + Dv)) \\ &= -i(v + Dv) \end{aligned}$$

Portanto,

$$u + Du = 0$$

provando que

$$H_o \cap iH_o = \{0\}$$

□.

Suponhamos agora, que H é um espaço de Hilbert real. Como já sabemos, uma representação V em H é *ortogonal* se V_x conserva o produto interno em H. Não é difícil mostrar que, nesse caso, a complexificada $V_{\mathbb{C}}$ é uma representação unitária em $H_{\mathbb{C}}$ (com o produto interno em $H_{\mathbb{C}}$ definido da maneira óbvia).

Observação A.4 Em $\tilde{H} = H_{\mathbb{C}}$ temos uma conjugação "natural" dada por:

$$D(u + iv) = \overline{u + iv} = u - iv$$

Aqui temos um ponto que pode se tornar fonte de confusão se não formos cuidadosos (ao menos foi o que aconteceu com o autor). Se $\tilde{W}$ é subrepresentação de $\tilde{\mathrm{V}}$ em um subespaço $\tilde{E} \subset \tilde{H}$ e $\overline{\tilde{E}} = \{u - iv \mid u + iv \in \tilde{E}\} \subset \tilde{E}$ *então* $\tilde{W}$ *é realizável real.* Isto é uma consequência imediata da prop A.10 já que D é uma conjugação que comuta com $\tilde{\mathrm{V}}$ e, portanto, com $\tilde{W}$. Mas esta condição é apenas suficiente, não necessária. De fato, podemos ter um subespaço real de $\tilde{E}$, invariante por $\tilde{W}$ que não é subespaço de H (ou, o que é a mesma coisa, uma conjugação distinta de D que comuta com $\tilde{W}$).

Por outro lado, se $\tilde{W}$ é realizável real e D^* é a conjugação da proposição A.10 então a representação conjugada: $\tilde{W}^* = D^* \circ \tilde{W} \circ D^*$ é equivalente a $\tilde{W}$. Não vale porém a recíproca: podemos ter a representação conjugada na mesma classe de $\tilde{W}$ e, ainda assim, $\tilde{W}$ pode não ser representável real. (O resultado seguinte descreve as situações possíveis).

Teorema A.6 (Frobenius-Schur) *Seja* $\tilde{V}$ *uma representação complexa e irredutível de dimensão* n *do grupo* G *e* $\mathcal{X}$ *o seu caracter. Então existem 3 casos possíveis, mutuamente exclusivos:*

1. *Um dos valores de $\mathcal{X}$ não é real (e portanto $\overline{\tilde{V}}$ não é equivalente a $\tilde{V}$). Por restrição de escalares, $\tilde{V}$ define uma representação irredutível sobre $\mathbb{R}$ de dimensão $2n$ e caracter $\mathcal{X}+\overline{\mathcal{X}}$.*

2. *Todos os valores de $\mathcal{X}$ são reais e $\tilde{V}$ é realizável por uma representação V irredutível sobre $\mathbb{R}$.*

3. *Todos os valores de $\mathcal{X}$ são reais, mas $\tilde{V}$ não é realizável sobre $\mathbb{R}$. Por restrição de escalares, $\tilde{V}$ define uma representação irredutível sobre $\mathbb{R}$ de dimensão $2n$ e com caracter $2\mathcal{X}$.*

Além disso, qualquer representação irredutível de G sobre $\mathbb{R}$ pode ser obtida por um dos procedimentos acima.

Demonstração. Ver [11] ou [15] □.

Para a prova do resultado principal desta seção, precisamos do seguinte:

Lema A.1 *Seja G um subgrupo compacto de $O(n)$ e H um espaço de Hilbert real. Então toda representação ortogonal V de G em H possui uma sub-representação irredutível que é, necessariamente, de dimensão finita.*

Demonstração. Seja $\tilde{V} = V_{\mathbb{C}}$ a representação complexificada de V e $\tilde{W}$ subrepresentação irredutível de $\tilde{V}_{\mathbb{C}}$ em $\tilde{E} \subset \tilde{H}$. Temos:

$$\tilde{E} + \overline{\tilde{E}} = E_o \oplus iE_o$$

com $E_o \subset H$ e E_o invariante por $\tilde{V}$ e, portanto, por V (ver demonstração da proposição A.10).

Como $\tilde{E}$ é de dimensão finita E_o também o é. Agora, para representações de dimensão finita o problema de encontrar uma subrepresentação irredutível é um problema algébrico simples (Observe que, se V já fosse irredutível teríamos, necessáriamente $H = E_o$ e, portanto, V de dimensão finita) □.

Teorema A.7 *Seja G subgrupo compacto de $O(n)$ e V representação ortogonal de G em H. Para cada $\sigma \in \hat{G}$, seja P_σ o operador em H definido por:*

$$\langle P_\sigma \xi \, , \, \eta \rangle = \int_G \langle V_x \xi \, , \, \eta \rangle d_\sigma \mathcal{X}_\sigma(x) \, dx$$

Então P_σ é operador projeção em H. Façamos $M_\sigma = P_\sigma H$.
Se $\sigma \neq \sigma'$ então M_σ e $M_{\sigma'}$ são subespaços ortogonais de H e $H = \bigoplus_{\sigma \in \hat{G}} M_\sigma$.
Para cada $\sigma \in \hat{G}, M_\sigma$ é $\{0\}$ ou uma soma direta de m_σ subespaços invariantes $L_{\sigma,j}$ com dim $L_{\sigma,j} = d_\sigma$ e $V_{|L_{\sigma,j}} \in \sigma$.
O número cardinal m_σ pode ser finito ou infinito.
O subespaço M_σ é o menor subespaço fechado de H contendo todos os subespaços invariantes de H restrito aos quais V está em σ.
Essa soma é única no seguinte sentido:

$$Se \quad H = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda$$

onde N_λ é irredutível para todo $\lambda \in \Lambda$ então:

$$\{N_\lambda \mid V_{|N_\lambda} \in \sigma\} = M_\sigma$$

e existem m_σ subespaços N_λ tais que $V_{|N_\lambda} \in \sigma$.

Demonstração. Vamos mostrar, inicialmente, que V pode ser decomposta como soma direta de subrepresentações irredutíveis.

Consideremos a classe dos subespaços de H que podem ser escritos na forma: $\bigoplus_{\gamma \in \Gamma} H_\gamma$ com os H_γ ortogonais dois a dois e $V_{|H_\gamma}$ irredutível para todo $\gamma \in \Gamma$. O lema A.1 acima permite-nos mostrar que esta classe é não vazia. Ordenê-mo-la por inclusão; e seja E um elemento maximal (obtido por aplicação do Lema de Zorn). Afirmamos que $E = H$. De fato, se tal não fosse o caso, teríamos em $E^\perp$ um subespaço irredutível H_λ e $E \bigoplus H_\lambda$ conteria E propriamente.

Queremos, agora, escrever H na forma: $H = \bigoplus_{\sigma \in \hat{G}} M_\sigma$ com as propriedades acima enunciadas.

Seja $\tilde{H} = \bigoplus_{\sigma \in \hat{G}} \tilde{M}_\sigma$ a decomposição do teorema A.4 e $\tilde{P}_\sigma$ com $\sigma \in \hat{G}$ as projeções correspondentes.

(Para sermos precisos deveríamos escrever algo como $\sigma_{\mathbb{R}} \in \hat{G}_{\mathbb{R}}$ para distinguir as classes de representações irredutíveis *reais* das complexas. Não o faremos, porém, para não carregar demais a notação).

Consideremos as projeções do teorema A.4:

$$\begin{array}{llllll} 1) & \tilde{P}_\sigma & : & \tilde{H} & \longrightarrow & \tilde{M}_\sigma & \text{caso } \sigma = \overline{\sigma} \\ 2) & \tilde{P}_\sigma \oplus \tilde{P}_{\overline{\sigma}} & : & \tilde{H} & \longrightarrow & \tilde{M}_\sigma \oplus \tilde{M}_{\overline{\sigma}} & \text{caso } \sigma \neq \overline{\sigma} \end{array}$$

Como as projeções acima levam funções reais (isto é: com parte imaginária nula) em funções reais, podemos definir: $P_\sigma : H \longrightarrow H$ por:

$$P_\sigma u = \tilde{P}_\sigma(u) = Re(\tilde{P}_\sigma(u + iv)) \quad \forall v \in H$$

(no caso 1)

$$P_\sigma u = (\tilde{P}_\sigma \oplus \tilde{P}_{\overline{\sigma}})(u)$$

(no caso 2)

Façamos

$$M_\sigma = P_\sigma(H).$$

É claro que $H = M_\sigma$ em virtude das propriedades das $\tilde{P}_\sigma$.

Vamos estudar a decomposição de cada M_σ como soma direta de subespaços irredutíveis, considerando cada uma das situações descritas no Teorema A.6 separadamente.

Suponhamos primeiro que σ é tal que as representações da classe σ sejam realizáveis sobre $\mathbb{R}$.

Seja $E \subset M_\sigma$ subespaço irredutível para V. Vamos mostrar que $\tilde{E} = E + iE$ é subespaço irredutível para $\tilde{V}$. De fato, é claro que $\tilde{E}$ é subespaço invariante para $\tilde{V}$ e $\tilde{E} \subset \tilde{M}_\sigma$ (se $u, v \in M_\sigma$ então $u = P_\sigma u', v = P_\sigma v' \Rightarrow u + iv = P_\sigma(u' + iv')$). Além disso, se $\tilde{F} \subset \tilde{E}$ é irredutível, como $\tilde{V}_{|\tilde{E}}$ é realizável real, podemos escolher uma base β em $\tilde{F}$ tal que a matriz de $\tilde{V}$ nessa base seja real. As partes reais das funções em β geram então um subespaço invariante em E que deve ser igual a E. Segue que

$$\tilde{F} = \tilde{E}$$

e E é irredutível.

Observemos que a representação $\tilde{V}_{|\tilde{E}}$ é a complexificada da representação $V_{|E}$. Em particular o caracter de $V_{|E}$ é igual ao caracter de $\tilde{V}_{|\tilde{E}}$.

Concluímos que, neste caso, as subrepresentações irredutíveis de M_σ são todas equivalentes, com caracter igual ao caracter de qualquer sub-representação irredutível em $\tilde{M}_\sigma$, e M_σ é soma direta dessas subrepresentações.

Suponhamos agora que σ é tal que os caracteres $\mathcal{X}_\sigma$ são reais mas as representações na classe σ não são realizáveis em $\mathbb{R}$.

Seja $E \subset M_\sigma$ subespaço irredutível para V. Afirmamos que, agora, $\tilde{E} = E + iE$ é da forma:

$$\tilde{E} = \tilde{F} \oplus \overline{\tilde{F}} \text{ (onde: } \overline{\tilde{F}} = \{u - iv | u + iv \in \tilde{F}\})$$

com $\tilde{F} \subset \tilde{M}_\sigma$ e $\overline{\tilde{F}} \subset \tilde{M}_{\bar{\sigma}}$ irredutíveis.

Observemos primeiro que $\tilde{E}$ não pode ser irredutível, pois, nesse caso, como $\tilde{E}$ é invariante pela conjugação: $D(u+iv) = \overline{u+iv} = u - iv$, teríamos uma representação na classe σ representável real pela proposição A.10.

Seja $\tilde{F} \subset \tilde{E}$ sub-espaço irredutível para $\tilde{V}$. Temos

$$\overline{\tilde{F}} \subset \overline{\tilde{E}} = \tilde{E}.$$

Além disso,

$$\tilde{F} \cap \overline{\tilde{F}} = \{0\}$$

pois caso contrário, $\overline{\tilde{F}} \subset \tilde{F}$ e, novamente, teríamos representação na classe σ realizável em $\mathbb{R}$.

Finalmente, como $\tilde{F} + \overline{\tilde{F}}$ é da forma $E' + iE'$ com $E' \subset E$ invariante, devemos ter

$$E' = E$$

e, portanto,

$$\tilde{E} = \tilde{F} + \overline{\tilde{F}}.$$

Observemos que, agora, a complexificada $\tilde{V}_{|\tilde{E}}$ da representação $V_{|E}$ não é irredutível, mas soma direta de duas representações irredutíveis, ambas na classe σ. Os

caracteres das sub-representações irredutíveis em M_σ são, no caso presente, da forma $2.\mathcal{X}_\sigma$ onde $\mathcal{X}_\sigma$ é caracter de qualquer sub-representação irredutível em M_σ.

A situação na qual o caracter $\mathcal{X}_\sigma$ assume valores não reais pode ser tratada de maneira análoga à anterior. Se $E \subset M_\sigma$ é subespaço irredutível obtemos:

$$(V_{|E})_{\mathbb{C}} = \tilde{V}_{|\tilde{F}} \oplus \tilde{V}_{|\overline{\tilde{F}}}$$

onde: $\tilde{F} \subset \tilde{E} = E + iE$ é subespaço irredutível para $\tilde{V}$.

Agora, porém, $\tilde{V}_{|\tilde{F}}$ e $\tilde{V}_{|\overline{\tilde{F}}}$ não são equivalentes já que $\sigma \neq \overline{\sigma}$. O caracter de uma subrepresentação irredutível em M_σ é da forma: $\mathcal{X}_\sigma + \mathcal{X}_{\bar{\sigma}}$, onde $\mathcal{X}_\sigma$ é o caracter de qualquer subrepresentação irredutível em $\tilde{M}_\sigma$.

Segue da discussão acima que as projeções P_σ são, de fato, dadas por:

$$\langle P_\sigma \xi \, , \, \eta \rangle = \int_G \langle V_x \xi \, , \, \eta \rangle d_\sigma \mathcal{X}_\sigma(x) \, dx$$

onde $\mathcal{X}_\sigma$ é o caracter (*real*) e d_σ a dimensão de uma representação irredutível (*real*) na classe σ.

Queremos agora mostrar que todo subespaço $E \subset H$ irredutível para V está contido em M_σ para algum σ.

Seja então $\tilde{F} \subset \tilde{E} = E + iE$ um subespaço irredutível (para $\tilde{V}$). Então $\tilde{F} \subset \tilde{M}_\sigma$ para algum σ.

O subespaço $\tilde{F} + \overline{\tilde{F}}$ está contido em $\tilde{E}$ e $\tilde{F} + \overline{\tilde{F}} = G + iG$ com $G \subset E$ $(G = \{u + \bar{u} | u \in \tilde{F} + \overline{\tilde{F}}\})$.

Como E é irredutível e G é invariante, devemos ter $G = E$ e $\tilde{F} + \overline{\tilde{F}} = \tilde{E}$. Portanto:

$$(\tilde{P}_\sigma + \tilde{P}_{\bar{\sigma}})_{|\tilde{E}} = Id_{|\tilde{E}}$$

e daí:

$$P_{\sigma|E} = Id_{|E} \Rightarrow E \subset M_\sigma$$

Segue então que M_σ é o menor subespaço fechado de H contendo todos os subespaços invariantes de H, restrito aos quais V está em σ.

Falta provar a unicidade. Suponhamos que $H = \bigoplus_{\lambda\in} N_\lambda$ onde $V_{|N_\lambda}$ é irredutível para todo λ. Então temos:

$$\tilde{H} = \tilde{N}_\lambda \quad \text{e} \quad \bigoplus_\lambda \{\tilde{N}_\lambda | \tilde{V}_{|N_\lambda} \in \sigma\} = \tilde{M}_\sigma$$

Agora, notando que uma função está em M_σ se e somente se ela é parte real de uma função em $\tilde{M}_\sigma + \tilde{M}_{\bar{\sigma}}$, concluímos que :

$$\bigoplus_\lambda \{N_\lambda : V_{|N_\lambda}\} = M_\sigma$$

como queríamos $\square$.

A.3 A Representação 'quase-regular'

Nesta seção G indicará sempre um subgrupo compacto de $O(n)$. Diremos que uma região $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ é *G-invariante ou G-simétrica* se $g\Omega = \Omega$ para todo $g \in \Omega$.

Nessas condições temos uma ação natural de G em $\mathbf{R}^n$: $(g, x) \to g.x$. Denotaremos, como é usual, por G_x o grupo de isotropia de um ponto $x \in \mathbf{R}^n$. (ou seja: $G_x = \{g \in G \mid gx = x\}$) e por $G(x)$ a *órbita* de x sob a ação de G (isto é : $G(x) = \{gx \mid g \in G\}$).

O resultado que segue é bem conhecido e sua demonstração pode ser encontrada, por exemplo em [1].

Proposição A.11 *A aplicação:*

$$\beta : \frac{G}{G_x} \longrightarrow G(x)$$

definida por:

$$\beta(g.G_x) = g(x)$$

é um difeomorfismo (de variedades diferenciáveis). Em particular, se $G_x = \{Id\}$ então $G(x)$ é difeomorfa a G e, portanto, um grupo de Lie com a estrutura induzida por β.

Proposição A.12 *Seja $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $G_x = \{Id\}$ e $V = TN_x$ o espaço normal a $G(x)$ no ponto x. Consideremos a aplicação:*

$$\Psi : G \times V \longrightarrow \mathbb{R}^n \text{ definida por:}$$

$$\Psi(g, v) = g(v)$$

Então existe uma vizinhança V_ε de x em V tal que a restrição de Ψ a $G \times V_\varepsilon$ é um difeomorfismo sobre uma vizinhança aberta Ω' de $G(x)$ em $\mathbb{R}^n$.

Demonstração. Está demonstrado em [1] que Ψ é um homeo sobre uma vizinhança aberta Ω'. Como Ψ é também difeo local o resultado segue □.

Definição A.14 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto G-invariante. Podemos então definir uma representação Γ de G em $L^2(\Omega, C)$ por:*

$$\Gamma_g(u) = u \circ g^{-1} \ \forall g \in G$$

(onde $L^2(\Omega, C)$ é o espaço das funções de Ω em Cde quadrado integrável).

É fácil ver que Γ é, de fato, uma representação unitária de G que denominaremos representação quase regular de G em Ω.

Para a demonstração do resultado principal desta seção precisaremos do seguinte resultado técnico:

Lema A.2 *Nas condições da proposição A.12 (e usando a mesma notação) indiquemos por $d\mu$ a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$, dg a medida de Haar em G e $d\eta$ a medida em V_ε induzida por $d\mu$. (ou seja: se $\{v_1, \ldots, v_{n-k}\}$ é base de $T_v V_\varepsilon = V$, $d\eta(v_1, \ldots, v_k) = d\mu(v_1, \ldots, v_{n-k}, w_1, \ldots, w_k)$ onde $\{w_1, \ldots, w_k\}$ é uma base ortornormal de $T_x G(x)$).*

Vale então a igualdade:

$$(\Psi^* d\mu)_{(g,v)} = \theta(v).dg_g.d\eta_v$$

onde

$$\theta : V_\varepsilon \to \mathbb{R}$$

é uma função contínua e positiva e

$$\Psi^\star d\mu$$

é o "pull - back" de $d\mu$ por Ψ.

Demonstração. Indiquemos por:
$\{X_1, \ldots, X_{n-k}\}$ uma base de V
e por:
$\{g.Y_1, \ldots, g.Y_k\}$ uma base de T_gG
($Y_1, \ldots, Y_k$ são matrizes antisimétricas).

Um cálculo simples mostra que:

$$\begin{aligned}(\Psi_\star d\mu)(g,v)(X_1,\ldots,X_{n-k},g.Y_1,\ldots,g.Y_k) &= \\ d\eta_{g.v}(X_1,\ldots,X_{n-k},Y_1(v),\ldots,Y_k(v)) & \qquad (A.1)\end{aligned}$$

Fixada então uma base ortonormal de T_vV_ε, $\{v_1, \ldots, v_{n-k}\}$, definimos uma k-forma ω^v em G pondo:

$$\begin{aligned} w_g^v(g.Y_1,\ldots,g.Y_k) &= (\Psi^\star d\mu)(v_1,\ldots,v_{n-k},gY_1,\ldots,g.Y_k) \\ &\overset{(por A.12)}{=} d\mu_{g.v}(v_1,\ldots,v_{n-k},Y_1(v),\ldots,Y_k(v)) \end{aligned}$$

É fácil mostrar que, ω^ν é uma forma invariante em G e, portanto,

$$\omega^\nu = \theta dg$$

onde θ é constante positiva, para cada v. A constante θ depende continuamente de v pois:

$$\begin{aligned} \frac{\theta(v)}{\theta(x)} &= \frac{\omega^v(g.Y_1,\ldots,g.Y_k)}{\omega^x(g.Y_1,\ldots,g.Y_k)} \\ &= \frac{d\mu_{g.v}(v_1,\ldots,v_{n-k},Y_1(v),\ldots,Y_k(v))}{d\mu_{g.x}(v_1,\ldots,v_{n-k},Y_1(x),\ldots,Y_k(x))} \end{aligned}$$

Finalmente, sejam :

$$\begin{array}{lcl} \{X_1, \ldots, X_{n-k}\} & \text{base de} & T_v V_\varepsilon = V \\ \{g.Y_1, \ldots, g.Y_k\} & \text{base de} & T_g G \\ \{w_1, \ldots, w_k\} & \text{base ortonormal de} & T_x G(x) \end{array}$$

Temos:

$$\begin{aligned} & (d\eta_v dg_g)(X_1, \ldots, X_{n-k}, g.Y_1, \ldots, g.Y_k) \\ &= d\eta_v(X_1, \ldots, X_{n-k}).dg_g(g.Y_1, \ldots, g.Y_k) \\ &= d\mu_v(X_1, \ldots, X_{n-k}, w_1, \ldots, w_k) \cdot \frac{1}{\theta(v)} \omega_g^v(g.Y_1, \ldots, g.Y_k) \\ &= \frac{1}{\theta(v)} d\mu_v(X_1, \ldots, X_{n-k}, w_1, \ldots, w_k).d\mu_{g.v}(v_1, \ldots, v_{n-k}, Y_1(v), \ldots, Y_k(v)) \\ &= \frac{1}{\theta(v)} d\mu_{g.v}(X_1, \ldots, X_{n-k}, Y_1(v), \ldots, Y_k(v)) \\ &= \frac{1}{\theta(v)} (\Psi^\star\, dx)(X_1, \ldots, X_{n-k}, g.Y_1, \ldots, g.Y_k) \end{aligned}$$

Portanto:

$$\Psi^\star\, dx = \theta(v)\, d\eta dg$$

como queríamos □.

Teorema A.8 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto G-invariante e suponhamos que existe $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $G_x = \{Id\}$. Seja ainda $\sigma \in \hat{G}$ de dimensão d_σ e V_ε como na proposição A.12.*

Então, dado um conjunto ortonormal em $L^2(V_\varepsilon)$ (com relação à medida $\theta d\eta$, θ do lema A.2 acima) de funções contínuas: $\{f_1, \ldots, f_{d_\sigma}\}$ podemos estender as f_i a funções $\tilde{f}_i$ de tal forma que $\{\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_{d_\sigma}\}$ seja um conjunto ortonormal em $L^2(\Omega)$, satisfazendo as seguintes propriedades:

i) Γ *restrita ao subespaço gerado pelas $\tilde{f}_i$ está na classe σ.*
ii) $\tilde{f}_i \in M_\sigma$.

Demonstração. Vamos usar as notações da proposição A.12.

Seja $T : G \to L(V)$ uma representação de G na classe σ.

Escolhendo uma base ortonormal de V, a representação pode ser dada indicando, para cada $g \in G$, a matriz de T_g em relação a esta base:

$$g \to A_g = \begin{bmatrix} a_{11}(g) & \dots & a_{1d_\sigma}(g) \\ a_{d_\sigma 1}(g) & \dots & a_{d_\sigma d_\sigma}(g) \end{bmatrix}$$

Seja Ω' a vizinhança de $G(x)$ cuja existência é assegurada pela proposição A.12.

Definimos d_σ funções $\tilde{f}_i, \dots, \tilde{f}_{d_\sigma}$ em $L^2(\Omega')$ por:

$$\begin{bmatrix} \tilde{f}_1(g.v) \\ \vdots \\ \tilde{f}_{d_\sigma}(g.v) \end{bmatrix} = \overline{A}_g \begin{bmatrix} f_1(v) \\ \vdots \\ f_{d_\sigma}(v) \end{bmatrix}$$

É claro que as funções $\tilde{f}_i$ são L.I. Agora, se $h \in G$ temos:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \Gamma_h \tilde{f}_1(g.v) \\ \vdots \\ \Gamma_h \tilde{f}_{d_\sigma}(g.v) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} f_1(h^{-1}gv) \\ \vdots \\ f_{d_\sigma}(h^{-1}gv) \end{bmatrix} \\ &= \overline{A}(h^{-1}).\overline{A}(g) \begin{bmatrix} f_1(v) \\ \vdots \\ f_{d_\sigma}(v) \end{bmatrix} \\ &= A^t(h) \begin{bmatrix} \tilde{f}_1(g.v) \\ \vdots \\ \tilde{f}_{d_\sigma}(g.v) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Isto é, a matriz de Γ_g na base $\{\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_{d_\sigma}\}$ é $A(g)$.

Estendemos $\tilde{f}_i$ a Ω pondo $\tilde{f}_i \equiv 0$ em $\Omega \setminus \Omega'$. Vamos provar que $\{\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_{d_\sigma}\}$ é um conjunto ortonormal.

$$\begin{aligned} \int_\Omega \tilde{f}_i.\overline{\tilde{f}}_j \, d\mu &= \int_{\Omega'} \tilde{f}_i.\overline{\tilde{f}}_j \, d\mu \\ &= \int_{G \times V_\epsilon} (\tilde{f}_i.\overline{\tilde{f}}_j) \circ \psi\psi^\star \, d\mu \\ &= \int_{G \times V_\epsilon} (\sum_n a_{in}(g) f_n(v))(\sum_n \overline{a_{jm}(g)}.\overline{f_m(v)})\psi^\star \, d\mu \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\overset{lemaA.2}{=} & \int_{G\times V_\epsilon} (\sum_{n,m} a_{in}.\overline{a_{jm}} f_n \overline{f_m})\theta(v)\, dg d\eta \\
= & \int_G (\sum_{n,m} a_{in}.\overline{a_{jm}})(\int_{V_\epsilon} (f_n \overline{f}_m)\theta(v)\, d\eta)\, dg \\
= & \int_G (\sum_n a_{in}\overline{a}_{jn})\, dg \\
= & \int_G \delta_{ij}\, dg \\
= & \delta_{ij}
\end{aligned}
$$

Como a matriz de Γ_g restrita ao subespaço gerado pelos $\tilde{f}_i$, relativamente a uma base ortonormal é $A(g)$, a afirmação i) segue imediatamente.

Resta mostrar que os $\tilde{f}_i$ estão em M_σ. De fato isto resulta imediatamente da unicidade da decomposição quase-regular garantida pelo Teorema A.4. Podemos, porém, fornecer uma prova mais direta.

Seja $P_\sigma : L^2(\Omega) \to M_\sigma$ a projeção do teorema A.4. Indicando por $\langle\, .\, ,\, .\,\rangle$ o produto interno em $L^2(\Omega)$ temos:

$$
\begin{aligned}
\langle\, P_\sigma \tilde{f}_i\, ,\, u\,\rangle &= \int_G \langle\, \tilde{f}_i \circ g^{-1}\, ,\, u\,\rangle d_\sigma \overline{\mathcal{X}}_\sigma(g)\, dg \\
&= \int_G (\langle\, \sum a_{ij}(g).f_j\, ,\, u\,\rangle)\, d_\sigma \sum_k \overline{a}_{kk}(g)\, dg \\
&= \sum_j \langle\, f_j\, ,\, u\,\rangle \int_g a_{ij}(\sum_k \overline{a}_{kk})\, d_\sigma d_g \\
&= \langle\, f_i\, ,\, u\,\rangle
\end{aligned}
$$

(Na última igualdade estamos usando a proposição A.7) □.

Corolário A.1 *Nas condições do teorema A.8, toda representação unitária e irredutível de G é equivalente a um número infinito de subrepresentações da representação quase-regular Γ de G em Ω.*

Demonstração. Imediata a partir do Teo A.8. □

Gostaríamos agora de fazer alguns comentários sobre a hipótese

$$G(x) = \{Id\}$$

que aparece no teorema A.8 (Um ponto $x \in \mathbb{R}^n$ com esta propriedade é dito um *ponto livre*).

1. Suponhamos que $G \subset O(n)$ é um grupo finito.Neste caso, sempre existe um ponto livre.

   De fato: para cada $g \in G \setminus \{Id\}$, o conjunto $U_g \subset \mathbb{R}^n$, formado pelos pontos $x \in \mathbb{R}^n$ tais que $gx \neq x$ é um aberto denso. Basta então escolher $x \in \bigcap_{g \in G} U_g$ que é não vazio pelo Teorema de Baire.

2. Suponhamos agora que $G \subset O(n)$ é comutativo.

   Podemos então escolher uma base ortonormal em $\mathbb{R}^n$ tal que todo $g \in G$ tem matriz nesta base da forma:

$$\begin{pmatrix} cos(\theta_1) & sen(\theta_1) & & & & \\ -sen(\theta_1) & cos(\theta_1) & & & & \\ & & cos(\theta_2) & sen(\theta_2) & & \\ & & -sen(\theta_2) & cos(\theta_2) & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & cos(\theta_k) & sen(\theta_k) \\ . & & & & -sen(\theta_k) & cos(\theta_k) \end{pmatrix}$$

   Se as coordenadas de x nesta base são dadas por: $x = (1, 1, \ldots, 1)$ então é fácil ver que x é livre.

3. Se $dimG \leq 2$ e G é conexo, então G é comutativo,e recaímos no caso 2).

4. Se $dimG > 2$, existem exemplos em que a hipótese $G_x = \{Id\}$ se verifica (para algum x) e outras em que isto não ocorre (os exemplos deste ítem me foram mostrados por R. Miatello).

   Consideremos, em primeiro lugar, o grupo $G = SO(k), k \geq 2$, imerso em $SO(n)$

da forma usual ($n \geq k$).

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix} \in SO(k) \longrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & & & \\ \vdots & & \vdots & & I_{n-k} & \\ 0 & \dots & 0 & & & \end{pmatrix}$$

Dado $x \in \mathbb{R}^n$ temos ou $G_x = G$ (se as k primeiras coordenadas de x forem nulas) ou $G_x \simeq SO(k-1)$ (caso contrário), e não existem pontos livres.

Para ver uma situação diferente, consideremos a acão de $O(n)$ no espaço $M_n(\mathbb{R})$ das matrizes reais $n \times n$ por multiplicação á esquerda: $\pi(g).b = g.b$.

$M_n(\mathbb{R})$ é um espaço euclidiano com o produto interno, invariante pela ação de $O(n)$, e, portanto, $\pi(O(n)) \subset O(M_n(\mathbb{R}), \langle\ ,\ \rangle)$. É fácil ver que, para todo $b \in \mathcal{GL}(n, \mathbb{R})$ (isto é: $det\, b \neq 0$) temos: $G_b = \{Id\}$.

5. Queremos agora mostrar que a hipótese $G_x = \{Id\}$ é essencial para o teorema A.8. Para isto tomemos $G = O(2)$ e $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x < 1\}$, o disco aberto do $\mathbb{R}^2$.

   Os elementos de $O(2)$ podem ser identificados com as matrizes:

$$R_+^\phi = \begin{bmatrix} cos(\phi) & sen(\phi) \\ -sen(\phi) & cos(\phi) \end{bmatrix}$$

   (a rotação de ângulo $-\phi$).

$$R_-^\phi = \begin{bmatrix} cos(\phi) & sen(\phi) \\ sen(\phi) & -cos(\phi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos(\phi) & sen(\phi) \\ -sen(\phi) & cos(\phi) \end{bmatrix}$$

   (rotação de ângulo $-\phi$ seguida de reflexão em torno do eixo das abcissas).

   Definimos uma representação de dimensão 1 (e, portanto, irredutível de G) por:

$$\begin{matrix} R_+^\phi & \longrightarrow & 1 \\ R_-^\phi & \longrightarrow & -1 \end{matrix}, \forall \phi \in \mathbb{R}$$

Se $x = (rcos\theta, rsen\theta) \in \Omega$ então $R_-^{2\theta}(x) = x$ e, portanto, $G_x \neq \{Id\}$.

Vamos mostrar que a representação acima não é equivalente a nenhuma subrepresentação da representação quase regular Γ de G em Ω.

Raciocinando por contradição, suponhamos que esta subrepresentação exista. Teremos então uma função $f \in L^2(\Omega)$ não nula, tal que, para todo $\phi \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \Gamma_{R_+^\phi}(f) &= f \\ \Gamma_{R_-^\phi}(f) &= -f \end{aligned}$$

e então, usando coordenadas polares:

$$\begin{aligned} f \circ (R_+^\phi)^{-1} &= f \quad \Longrightarrow \quad f(r, \theta + \phi) = f(r, \theta) \\ f \circ (R_-^\phi)^{-1} &= -f \quad \Longrightarrow \quad f(r, -\theta + \phi) = -f(r, \theta) \end{aligned}$$

(É claro que as igualdades acima valem apenas fora de um conjunto de medida nula).

Se f é *contínua* isto não pode ocorrer, pois então teríamos igualdade para todo (r, θ) e, tomando $\theta = 0$:

$$f(r, \phi) = f(r, 0) = -f(r, \phi)$$

de onde seguiria

$$f \equiv 0$$

contra a hipótese.

Resta-nos mostrar que podemos, de fato, assumir a continuidade de f. Para tanto lembremos que o teorema A.4 afirma a unicidade da decomposição em soma direta de irredutíveis. Vamos então usar uma decomposição especial da representação Γ.

Primeiro, escrevemos $L^2(\Omega)$ como soma direta dos auto-espaços do Laplaciano (com condição de Dirichlet). Como a representação Γ comuta com o Laplaciano, segue que cada auto-espaço é invariante por Γ. Decompondo agora cada auto-espaço em soma direta de irredutíveis obtemos uma decomposição de Γ tal

que os somandos são constituídos por funções contínuas. Isto prova o que queríamos$\square$.

Apêndice B

Cálculo de Alguns Operadores de Fronteira

O passo mais difícil na demonstração dos resultados principais do Capítulo 4 foi provar que certos 'operadores de fronteira' não têm posto finito. Para isto, lançaremos mão de um método desenvolvido por D. Henry (ver [3]). Tendo em vista que o texto referido não está (ainda!) publicado, faremos, inicialmente, uma exposição sucinta do método.

B.1 O Método

Seja $b_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}^{p\times p}$ de classe $\mathcal{C}^{r+2}(1 \leq j \leq n)$, $c : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}^{p\times p}$ de classe $\mathcal{C}^{r+1}$ e consideremos o operador:

$$L = \Delta I + \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j} + c(x)$$

Vamos primeiro construir uma solução assintótica formal (quando $\omega \to +\infty$),

$$u = e^{\omega S(x)}\phi(x,\omega) = e^{\omega S(x)}\left(\phi_0(x) + \frac{1}{2\omega}\phi_1(x) + \frac{1}{(2\omega)^2}\phi_2 + \dots\right) \tag{B.1}$$

de:

$$L\left(e^{\omega S(x)}\left(\phi_0(x) + \frac{1}{2\omega}\phi_1(x) + \dots\right)\right) = 2\omega e^{\omega S} f$$

$$= 2\omega e^{\omega S}\left(f_0(x) + \frac{1}{2\omega}f_1(x) + \ldots\right) \quad \text{(B.2)}$$

com:

$$\begin{aligned} u_{|\partial\Omega} &= g e^{i\omega\theta(x)} \\ &= e^{i\omega\theta(x)}\left(g_0(x) + \frac{1}{2\omega}g_1(x) + \ldots\right) \end{aligned}$$

onde $S_{|\partial\Omega} = i\theta, \quad Re\frac{\partial S}{\partial N}_{|\partial\Omega} > 0,$
e $\theta : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ é uma função lisa tal que $\nabla_{\partial\Omega}\theta \neq 0$ em $supp\{g_0, g_1, \ldots\}$ e de fato assumiremos $\mid \nabla_{\partial\Omega}\theta \mid \equiv 1$ na região de interesse. Usando a equação B.2 (e fazendo $\phi_1 \equiv 0$), obtemos:

$$\begin{aligned} 0 &= Lu - 2\omega e^{\omega S} f \\ &= e^{\omega S}\left\{\sum_{j\geq 0}(2\omega)^{1-j}(\Lambda\phi + L\phi_{j-1} - f_j) + \omega^2(\nabla S)^2\phi\right\} \end{aligned} \quad \text{(B.3)}$$

onde:

$$\Lambda\phi = \nabla S \cdot \nabla\phi + \frac{1}{2}(\Delta S + b \cdot \nabla S) \cdot \phi$$

Escolhendo S tal que:

$$\nabla S^2 = \nabla S \cdot \nabla S = 0 \quad \text{(B.4)}$$

obtemos:

$$\begin{aligned} S(x(t,y)) &= S(y + tN(y)) \\ &= i\theta(y) + t - \frac{t^2}{2} \cdot q(y) + \\ &= \frac{t^3}{3!}\left(3 \mid K \cdot \nabla_{\partial\Omega}\theta \mid^2 + i\frac{\partial q}{\partial\theta} - q^2\right) + \mathcal{O}(t^4) \end{aligned} \quad \text{(B.5)}$$

onde:

- $t = \pm dist(x, \partial\Omega)$
- y é o ponto de $\partial\Omega$ mais próximo de x (está provado em [3] que (t, y) é um sistema de coordenadas na vizinhança de $\partial\Omega$)

- $K = DN$ é a matriz de curvatura
- $q(y) = \nabla_{\partial\Omega}\theta(y) \cdot K(y) \cdot \nabla_{\partial\Omega}\theta(y)$
- $\frac{\partial}{\partial\theta} = \nabla_{\partial\Omega}\theta\nabla_{\partial\Omega}$

e escrevemos $H = trK$ para indicar a curvatura média. Escrevendo:

$$\phi_j = g_j(y) + t\dot{\phi}_j(y) + \frac{t^2}{2}\ddot{\phi}_j(y) + \dots$$

$$f_j = f_j(y) + t\dot{f}_j(y) + \frac{t^2}{2}\ddot{f}_j(y) + \dots$$

teremos após alguns cálculos (que indicaremos com mais detalhes à frente para o caso $L = \Delta + \lambda$) :

$$\begin{aligned}
&\Lambda\phi_j + L\phi_{j-1} - f_j = \\
&\left(\frac{1}{2}\alpha + i\frac{\partial}{\partial\theta}\right) g_j + \dot{\phi}_j + (\Delta_{\partial\Omega} + \lambda + b \cdot \nabla_{\partial\Omega})g_{j-1} + \\
&(H + b \cdot N)\dot{\phi}_{j-1} + \ddot{\phi}_{j-1} - f_j + \\
&t \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\beta g_j - 2iK \cdot \nabla_{\partial\Omega}\theta \cdot \nabla_{\partial\Omega} g_j + \left(\frac{1}{2}\alpha - q + i\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\dot{\phi}_j + \ddot{\phi}_j + \\ \left(\nabla_{\partial\Omega}H + \frac{\partial b}{\partial N}\right)\nabla_{\partial\Omega} g_{j-1} - 2div_{\partial\Omega}(K \cdot \nabla_{\partial\Omega} g_{j-1}) - \\ b \cdot K \cdot \nabla_{\partial\Omega} g_{j-1} - \left(tr(K^2) + \Delta_{\partial\Omega} + \lambda + \frac{\partial b}{\partial N}\right)\dot{\phi}_{j-1} + \\ b \cdot \nabla_{\partial\Omega}\dot{\phi}_{j-1} + (H + b \cdot N)\ddot{\phi}_{j-1} + \dddot{\phi}_{j-1} - \dot{f}_j \end{bmatrix} + \\
&\mathcal{O}(t^2)
\end{aligned} \tag{B.6}$$

onde:

$$\begin{aligned}
\alpha &= H - q + i\Delta_{\partial\Omega} + b \cdot N + ib \cdot \nabla_{\partial\Omega}\theta \\
\beta &= -tr(K^2) - qH - q^2 + 3 \cdot \mid K \cdot \nabla_{\partial\Omega}\theta \mid^2 + i\frac{\partial q}{\partial\theta} + i\frac{\partial H}{\partial\theta} - \\
&\quad 2idiv_{\partial\Omega}K \cdot \nabla_{\partial\Omega}\theta - qb \cdot N + \frac{\partial b}{\partial N} \cdot N - ib \cdot K\nabla_{\partial\Omega}\theta + i\frac{\partial b}{\partial N} \cdot \nabla_{\partial\Omega}\theta
\end{aligned}$$

Os coeficientes de ϕ podem agora ser obtidos comparando coeficientes na equação B.3. Por exemplo, tomando $j = 0$:

$$\dot{\phi}_0 = -\left(\frac{1}{2}\alpha + i\frac{\partial}{\partial\theta}\right) g_0 + f_0 \quad \text{(do coeficiente em } t^0\text{)}$$

$$\ddot{\phi}_0 = -\frac{1}{2}\beta g_0 + +2iK \cdot \nabla_{\partial\Omega}\theta \cdot \nabla_{\partial\Omega} g_0 - \left(\frac{1}{2}\alpha - q + i\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\dot{\phi}_0 + \dot{f}_0 \quad \text{(do coeficiente em } t^1\text{)}$$

E, tomando $j = 1$:

$$\dot{\phi}_1 = -\left(\frac{1}{2}\alpha + i\frac{\partial}{\partial\theta}\right) g_1 - (\Delta_{\partial\Omega} + \lambda + b \cdot \nabla_{\partial\Omega})\, g_0 - (H + b \cdot N)\dot{\phi}_0 - \ddot{\phi}_0 + f_1$$

De fato, iremos precisar de mais termos, mas vamos mostrar primeiro que esses cálculos formais permitem encontrar uma solução aproximada do nosso problema.

Seja:

$$v = \mathcal{B}_L\left(e^{i\omega\theta} g\right)$$

(isto é: $Lv \in KerL, \quad v \perp KerL, \quad v_{|\partial\Omega} = e^{i\omega\theta} g$)
onde $|\nabla_{\partial\Omega}\theta| = 1 \quad em\ supp\, g \in \partial\Omega$ e seja:

$$u = e^{\omega S(x)}\left(\phi_0(x) + \frac{1}{2\omega}\phi_1(x) + \frac{1}{(2\omega)^2}\phi_2 + \ldots + \frac{1}{(2\omega)^N}\phi_N\right)$$

satisfazendo:

$$\begin{aligned} (\nabla S)^2 &= \mathcal{O}\left(|\, t\,|^{N+2}\right) \\ \Lambda\phi_j + L\phi_{j-1} &= \mathcal{O}\left(|\, t\,|^{N+1-j}\right) \end{aligned}$$

quando $t \to \infty \qquad (j = 0, 1 \ldots, N \quad \phi_{-1} \equiv 0)$
com:

$$\phi_{j|\partial\Omega} = g \quad \text{para } j = 0, \qquad 0 \text{ para } j > 0$$

Temos então:

$$\begin{aligned} Lu &= e^{\omega S}\left\{\sum_{j\geq 0}(2\omega)^{1-j}\left(\Lambda\phi_j + L\phi - j - 1\right) + \omega^2(\nabla S)^2 \cdot \phi\right\} \\ &= e^{\omega S}\left\{\sum_{j=0}^{N}(2\omega)^{1-j} t^{N+1-j}\frac{\Lambda\phi_j + L\phi_{j-1}}{t^{N+1-j}} + \frac{1}{(2\omega)^N}\cdot\phi_N + \omega^2 t^{N+2}\frac{(\nabla S)^2}{t^{N+2}}\phi\right\} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (2\omega)^{-N} e^{\omega S} \left\{ \sum_{j=0}^{N} (2t\omega)^{N+1-j} \frac{\Lambda\phi_j + L\phi_{j-1}}{t^{N+1-j}} + L\phi^N + \frac{1}{4}(2t\omega)^{N+2} \frac{(\nabla S)^2}{t^{N+2}} \phi \right\} \\
&= \mathcal{O}\left((2\omega)^{-N} e^{\frac{\omega t}{2}} \left\{ \sum_{k=0}^{N+2} \mid t\omega \mid^k \right\} \right) \\
&= \mathcal{O}(\omega^{-N})
\end{aligned}
$$

quando $\omega \to +\infty$, uniformemente para $-\delta_0 \leq t \leq 0 \quad (\delta_0 > 0)$

Seja $\mathcal{X}$ função de classe $\mathcal{C}^\infty$ que se anula quando $dist(x, \partial\Omega) > \delta_0$, $\mathcal{X} \equiv 1$ em uma vizinhança de $\partial\Omega$.

Então

$$
\begin{aligned}
L(\mathcal{X}u) &= \mathcal{O}(\omega^{-n}) \\
\mathcal{X}u_{|\partial\Omega} &= g e^{i\omega\theta}
\end{aligned}
$$

Agora, $v = \mathcal{B}_L(g \cdot e^{i\omega\theta})$ é a solução do problema:

$$
Lv = \sum_{j=1}^{m} q_j \sigma_j(x) \quad \text{em } \Omega \qquad (\text{para certos } q_1, \ldots, q_m \in \mathbb{C})
$$

tal que:

$$
v_{|\partial\Omega} = g \cdot e^{i\omega\theta} \quad e \quad \int_\Omega \tau_j(x) \cdot v(x) = 0, \quad \text{para } j = 1, \ldots, m
$$

As funções $\{\sigma_j \ , \ \tau_j\}$ são funções lisas tais que este problema é bem posto: a restrição de L a $W^{2,p} \cap W_0^{1,p} \cap \{\tau_j\}^\perp$ é um isomorfismo sobre um sub-espaço fechado de $L^p(\Omega)$, com um complementar dado pelo fecho do espaço gerado por: $\{\tau_1, \ldots, \tau_m\}$.

Seja:

$$
z = \mathcal{X}u - v - \sum_{j=1}^{m} r_j \bar{\tau}_j
$$

com os $r_j \in \mathbb{C}$ escolhidos de tal forma que: $\int_\Omega \tau_k z = 0 \quad (k = 1, \ldots, m)$, isto é:

$$
\sum_{j=1}^{m} r_j \int_\Omega \tau_k \bar{\tau}_j = \int_\Omega \mathcal{X} e^{\omega S} \left(\phi^0 + \frac{1}{2\omega} + \ldots + \frac{1}{(2\omega)}^N \phi_N \right) \cdot \tau_k
$$

Se supusermos que $\partial\Omega$, os coeficientes b_j e c e g, θ são lisas segue (ver [?]) que:

$$
r_j = \mathcal{O}(\omega^N) \quad \text{quando } \omega \to \infty
$$

Além disso, se $\{\psi_1, \ldots, \psi_m\}$ é uma base para o núcleo da adjunta L^* então:

$$\begin{aligned}\sum_k q_k \int_\Omega \psi_j \sigma_k &= \int_\Omega \psi_j L v - L^* \psi_j v \\ &= \int_{\partial\Omega} -\frac{\partial \psi_j}{\partial N} g e^{i\omega\theta} \\ &= \mathcal{O}(\omega^{-N})\end{aligned}$$

Portanto $q_k = \mathcal{O}(\omega^{-N})$ e segue que:

$$\begin{aligned} Lz &= \mathcal{O}(\omega^{-N}) \quad \text{uniformemente em } \Omega \\ z_{|\partial\Omega} &= 0 \qquad\qquad z \perp \tau_k \quad (k = 1, \ldots, m)\end{aligned}$$

e então:

$$\| z \|_{W^{2,p}} = \mathcal{O}(\omega^{-N}) \quad \text{quando } \omega \to +\infty$$

Assim, por exemplo, (supondo $p > n$ para que $W^{2,p} \subset C^1(\Omega)$) :

$$\frac{\partial}{\partial N} \mathcal{B}_L(g \cdot e^{i\omega\theta})_{|\partial\Omega} = e^{i\omega\theta} \left(\omega g + \sum_{j=0}^{N} (2\omega)^{-j} \dot{\phi}_j \right) + \mathcal{O}\left(\omega^{-N}\right)$$

quando $\omega \to +\infty$ uniformemente no $\partial\Omega$, com os $\dot{\phi}_i$ calculados conforme indicado acima.

B.2 Cálculos para o operador Γ

No capítulo 4 precisamos mostrar que o operador Γ definido por:

$$\sigma \longrightarrow Re\left\{ \tfrac{\partial\varphi}{\partial N} \frac{\partial}{\partial N} \mathcal{B}_{\Delta+\lambda}\left(\sigma \tfrac{\partial\psi}{\partial N}\right) + \tfrac{\partial\psi}{\partial N} \frac{\partial}{\partial N} \mathcal{B}_{\Delta+\lambda}\left(\sigma \tfrac{\partial\varphi}{\partial N}\right) \right\}_{|\partial\Omega\cap V}$$

não tem posto finito, embora $Re\left(\frac{\partial\varphi}{\partial N} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial N} \right) \equiv 0$ em $\partial\Omega \cap V$. De fato, veremos que, se Γ tem posto finito, então obtemos várias igualdades envolvendo derivadas de $\frac{\partial\varphi}{\partial N}$ e $\frac{\partial\psi}{\partial N}$ que foram usadas no capítulo 4 para conseguir uma contradição.

Aqui σ deve ser uma função par em relação a um grupo compacto $G \subset O(n)$ isto é: $\sigma \circ g = \sigma \quad \forall g \in G$.

Suporemos também que existe em $\partial\Omega$ um ponto livre sob a ação de G (isto é: $G_x = \{g \in G \mid gx = x\} = Id$). Nessas condições, o conjunto dos pontos $x \in \partial\Omega$ com esta propriedade é um aberto denso. (ver [1] Teor. 3.1). Iremos, então trabalhar em um vizinhança do $\partial\Omega$ onde todos os pontos são livres.

Usaremos o método descrito na seção anterior (e também a notação) com $L = \Delta + \lambda$. Teremos, após alguns cálculos:

$$S(t,y) = i\theta(y) + S_1(y) \cdot t + S_2(y) \cdot \frac{t^2}{2} + S_3(y) \cdot \frac{t^3}{3!} + \dots$$

com:

$$\begin{aligned}
S_1 &= 1 \\
S_2 &= -q \\
S_3 &= -q^2 + 3 \cdot r + i\frac{\partial q}{\partial \theta} \\
S_4 &= -3q^3 + 9 \cdot q \cdot r - 6i\theta' K q' - 12 \cdot s + i\frac{\partial}{\theta}\left(\frac{5}{2}q^2 - 3 \cdot r - i\frac{\partial q}{\partial \theta}\right)
\end{aligned}$$

onde ' ' ' indica derivação em relação à variável y (ou $\nabla_{\partial\Omega}$), $q = \theta' \cdot K \cdot \theta'$, $r = \theta' \cdot K^2 \cdot \theta'$, $s = \theta' \cdot K^3 \cdot \theta'$,
e então:

$$
\begin{aligned}
&\Lambda\phi_j + L\phi_{j-1} - f_j \;=\\
&\left(\tfrac{1}{2}\alpha + i\tfrac{\partial}{\partial\theta}\right) g_j + H\dot{\phi}_{j-1} + \ddot{\phi}_{j-1} + (\Delta_{\partial\Omega} + \lambda)\, g_{j-1} - f_j\\
+\, t\, &\left(\begin{array}{l} \tfrac{1}{2}\beta g_j - 2iK\theta' g_j' + \left(\tfrac{1}{2}\alpha - i\tfrac{\partial}{\partial\theta} - q\right)\dot{\phi}_j + \ddot{\phi} + (\Delta_{\partial\Omega} + \lambda - tr(K^2))\,\dot{\phi}_{j-1} + \\ H\ddot{\phi}_{j-1} + \dddot{\phi}_{j-1} + H' g_{j-1}' - 2div_{\partial\Omega} K g_{j-1}' - \dot{f}_j \end{array}\right)\\
+\, \tfrac{t^2}{2}\, &\left(\begin{array}{l} \tfrac{1}{2}\gamma g_j - q' g_j' + 6iK^2\theta' g_j' + (S_3 + \beta)\dot{\phi}_j - 4iK\theta'\dot{\phi}_j' + \left(\tfrac{1}{2}\alpha + i\tfrac{\partial}{\partial\theta} - 2q\right)\ddot{\phi}_j + \\ 2tr(K^3)\dot{\phi}_{j-1} + (\Delta_{\partial\Omega} + \lambda - 2tr(K^2))\ddot{\phi}_{j-1} + H\dddot{\phi}_{j-1} + \ddddot{\phi}_{j-1} - \\ tr(K^2)' g_{j-1}' - 4KH' g_{j-1}' + 6div_{\partial\Omega} K^2 g_{j-1}' + 2H'\dot{\phi}_{j-1}' - \\ 4div_{\partial\Omega} K\dot{\phi}_{j-1}' - \ddot{f}_j \end{array}\right)\\
+\, \tfrac{t^3}{3}\, &\left(\begin{array}{l} \tfrac{1}{2}\delta g_j + S_3' g_j' + 6\cdot Kq' g_j' - 24iK^3\theta' g_j' + \left(S_4 + \tfrac{3}{2}\gamma\right)\dot{\phi}_j - 3q'\dot{\phi}_j' + \\ 18iK^2\theta'\dot{\phi}_j' + \left(\tfrac{3}{2}\beta + 3S_3\right)\ddot{\phi}_j + \left(\tfrac{1}{2}\alpha - 3q + i\tfrac{\partial}{\partial\theta}\right)\dddot{\phi} + \ddddot{\phi}_j - \\ 6iK\theta'\ddot{\phi}_j' - 6tr(K^4)\dot{\phi}_{j-1} + 6tr(K^3)\ddot{\phi}_{j-1} + (\Delta_{\partial\Omega} + \lambda - 3tr(K^2))\dddot{\phi}_{j-1} + \\ H\ddddot{\phi}_{j-1} + \dddddot{\phi}_{j-1} + 2tr(K^3)' g_{j-1}' + 18K^2 H' g_{j-1}' + 6tr(K^3)' K g_{j-1}' - \\ 24div_{\partial\Omega} K^3 g_{j-1}' - 12KH'\dot{\phi}_{j-1}' - 3tr(K^2)\dot{\phi}_{j-1}' + 18div_{\partial\Omega} K^2\dot{\phi}_{j-1}' + \\ 3H'\ddot{\phi}_{j-1}' - 6div_{\partial\Omega} K\ddot{\phi}_{j-1}' \end{array}\right)
\end{aligned}
$$

onde:

$$
\begin{aligned}
\alpha &= (H - q + i\Delta_{\partial\Omega}\theta)\\
\beta &= \left(-tr(K^2) - qH + S_3 + i\frac{\partial H}{\partial\theta} - 2idiv_{\partial\Omega}(K\theta')\right)\\
\gamma &= \left(\begin{array}{l} HS_3 + 2tr(K^2)q + 2tr(K^3) + S_4 - i\tfrac{\partial}{\partial\theta}(tr(K^2) + H) - \\ \Delta_{\partial\Omega} q + 6idiv_{\partial\Omega}(K^2\theta)' \end{array}\right)\\
\delta &= \left(\begin{array}{l} HS_4 - 3tr(K^2)S_3 - 6tr(K^3)\cdot q - 6tr(K^4) + S_5 + \\ 2i\tfrac{\partial}{\partial\theta} tr(K^3) + 6iK\theta' tr(K^2)' H' - 3q'H' + 18iK^2\theta' H' + \\ \Delta_{\partial\Omega} S_3 + 6div_{\partial\Omega} Kq' - 24idiv_{\partial\Omega} K^3\theta' \end{array}\right)
\end{aligned}
$$

Tomando então $j = 0$, obtemos:.

$$
-\dot{\phi}_0 \;=\; \left(i\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{2}\alpha\right) g \tag{B.7}
$$

$$
\begin{aligned}
-\ddot{\phi}_0 &= \left(i\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{2}\alpha-q\right)\dot{\phi}_0+\left(\frac{1}{2}\beta-2iK\nabla_{\partial\Omega}\theta\cdot\nabla_{\partial\Omega}\right)g && \text{(B.8)}\\
-\dddot{\phi}_0 &= \left(\frac{1}{2}\gamma+6iK^2\nabla_{\partial\Omega}\theta\cdot\nabla_{\partial\Omega}-\nabla_{\partial\Omega}q\cdot\nabla_{\partial\Omega}\right)g+\\
&\quad(\beta-4iK\nabla_{\partial\Omega}\theta\cdot\nabla_{\partial\Omega}+S_3)\,\dot{\phi}_0+\\
&\quad\left(i\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{2}\alpha-2q\right)\ddot{\phi}_0 && \text{(B.9)}\\
-\ddddot{\phi}_0 &= \left(\nabla_{\partial\Omega}S_3\cdot\nabla_{\partial\Omega}+6\cdot K\cdot\nabla_{\partial\Omega}q\cdot\nabla_{\partial\Omega}-24iK^3\nabla_{\partial\Omega}\theta-\nabla_{\partial\Omega}+\frac{1}{2}\delta\right)g+\\
&\quad\left(-3\nabla_{\partial\Omega}q\cdot\nabla_{\partial\Omega}+18iK^2\nabla_{\partial\Omega}\theta\cdot\nabla_{\partial\Omega}+S_4+\frac{3}{2}\gamma\right)\dot{\phi}_0+\\
&\quad\left(-6iK\cdot\nabla_{\partial\Omega}\theta\cdot\nabla_{\partial\Omega}+3S_3+\frac{3}{2}\beta\right)\ddot{\phi}_0+\\
&\quad\left(i\frac{\partial}{\partial\theta}-3q+\frac{1}{2}\alpha\right)\dddot{\phi}_0 && \text{(B.10)}
\end{aligned}
$$

Tomando $j=1$:

$$
\begin{aligned}
-\dot{\phi}_1 &= (\Delta_{\partial\Omega}+\lambda)g+H\dot{\phi}_0+\ddot{\phi}_0 && \text{(B.11)}\\
-\ddot{\phi}_1 &= \nabla_{\partial\Omega}H\nabla_{\partial\Omega}g-2div_{\partial\Omega}K\cdot\nabla_{\partial\Omega}g++\left(-tr(K^2)+\Delta_{\partial\Omega}+\lambda\right)\dot{\phi}_0+\\
&\quad H\ddot{\phi}_0+\dddot{\phi}_0+\left(i\frac{\partial}{\partial\theta}-q+\frac{1}{2}\alpha\right)\dot{\phi}_1 && \text{(B.12)}\\
-\dddot{\phi}_1 &= \left(-tr(K^2)'\nabla_{\partial\Omega}-4K\nabla_{\partial\Omega}H\cdot\nabla_{\partial\Omega}\right)g+6div_{\partial\Omega}K^2\cdot\nabla_{\partial\Omega}g+\\
&\quad\left(2tr(K^2)+2div_{\partial\Omega}H\cdot div_{\partial\Omega}\right)\dot{\phi}_0-4div_{\partial\Omega}K\cdot\nabla_{\partial\Omega}\dot{\phi}_0+\\
&\quad\left(-2tr(K^2)+\Delta_{\partial\Omega}+\lambda\right)\ddot{\phi}_0+H\dddot{\phi}_0+\ddddot{\phi}_0+\\
&\quad(-4iK\cdot\nabla_{\partial\Omega}\theta\cdot\nabla_{\partial\Omega}+S_3+\beta)\,\dot{\phi}_1+\left(i\frac{\partial}{\partial\theta}-2q+\frac{1}{2}\alpha\right)\ddot{\phi}_1 && \text{(B.13)}
\end{aligned}
$$

Tomando $j=2$,

$$
\begin{aligned}
-\dot{\phi}_2 &= H\dot{\phi}_1+\ddot{\phi}_1 && \text{(B.14)}\\
-\ddot{\phi}_2 &= \left(-tr(K^2)+\Delta_{\partial\Omega}+\lambda\right)\dot{\phi}_1+h\ddot{\phi}_1+\\
&\quad\dddot{\phi}_1+\left(i\frac{\partial}{\partial\theta}-q+\frac{1}{2}\alpha\right)\dot{\phi}_2 && \text{(B.15)}
\end{aligned}
$$

Tomando $j = 3$,

$$-\dot{\phi}_3 = H\dot{\phi}_2 + \ddot{\phi}_2 \tag{B.16}$$

Nos nossos cálculos, queremos σ a valores reais. Será conveniente, entretanto, iniciar os cálculos com a exponencial complexa e depois tomar a parte par em θ. Ao longo dos cálculos podemos (e iremos) desprezar os termos ímpares em θ. Temos então:

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(\sigma \cdot e^{i\omega\theta}\right) &= Re\left\{ \tfrac{\partial\varphi}{\partial N} \frac{\partial}{\partial N}\mathcal{B}_{\Delta+\lambda}\left(\sigma \cdot e^{i\omega\theta} \cdot \tfrac{\partial\psi}{\partial N}\right) + \tfrac{\partial\psi}{\partial N} \frac{\partial}{\partial N}\mathcal{B}_{\Delta+\lambda}\left(\sigma \cdot e^{i\omega\theta} \cdot \tfrac{\partial\varphi}{\partial N}\right)\right\} \\
&= Re\left\{ e^{i\omega\theta}\left[\tfrac{\partial\varphi}{\partial N}\left(\omega \cdot \sigma \tfrac{\partial\psi}{\partial N} + \dot{\psi}_0 + \frac{1}{2\omega}\dot{\psi}_1 + \frac{1}{(2\omega)^2}\ddot{\psi}_2\right) + \ldots + \right.\right. \\
&\qquad \left.\left. \tfrac{\partial\psi}{\partial N}\left(\omega \cdot \sigma \tfrac{\partial\varphi}{\partial N} + \dot{\varphi}_0 + \frac{1}{2\omega}\dot{\varphi}_1 + \frac{1}{(2\omega)^2}\ddot{\varphi}_2\right) + \ldots\right]\right\} \\
&= Re\left\{ e^{i\omega\theta}\left[2\omega \cdot \sigma \tfrac{\partial\varphi}{\partial N} \tfrac{\partial\psi}{\partial N} + \left(\tfrac{\partial\varphi}{\partial N}\dot{\psi}_0 + \tfrac{\partial\psi}{\partial N}\dot{\varphi}_0\right) + \right.\right. \\
&\qquad \frac{1}{2\omega}\left(\tfrac{\partial\varphi}{\partial N}\dot{\psi}_1 + \tfrac{\partial\psi}{\partial N}\dot{\varphi}_1\right) + \\
&\qquad \left.\left. \frac{1}{(2\omega)^2}\left(\tfrac{\partial\varphi}{\partial N}\dot{\psi}_2 + \tfrac{\partial\psi}{\partial N}\dot{\varphi}_2\right) + \ldots\right]\right\}
\end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned}
\Gamma(\sigma\cos\omega\theta) &= Re\left\{ \text{ parte par em } \theta \text{ de } \left(e^{i\omega\theta} \cdot 2\omega\sigma \tfrac{\partial\varphi}{\partial N} \tfrac{\partial\psi}{\partial N}\right)\right\} + \\
&\quad Re\left\{ \text{ parte par em } \theta \text{ de } \left(e^{i\omega\theta}\left(\tfrac{\partial\varphi}{\partial N}\dot{\psi}_0 + \tfrac{\partial\psi}{\partial N}\dot{\varphi}_0\right)\right)\right\} + \\
&\quad \mathcal{O}(1/\omega)
\end{aligned}$$

Agora:

$$\begin{aligned}
Re\left\{ \text{ parte par } \left(e^{i\omega\theta} \cdot 2\omega\sigma \tfrac{\partial\varphi}{\partial N} \tfrac{\partial\psi}{\partial N}\right)\right\} &= 2\omega \cdot \sigma\cos\omega\theta Re \tfrac{\partial\varphi}{\partial N} \tfrac{\partial\psi}{\partial N} \\
&= 0
\end{aligned}$$

e:

$$Re\left\{\text{parte par } \left(e^{i\omega\theta}\left(\tfrac{\partial\varphi}{\partial N}\dot{\psi}_0 + \tfrac{\partial\psi}{\partial N}\dot{\varphi}_0\right)\right)\right\} =$$

$$\sigma\cos\omega\theta(q-H)\ \ Re\left(\tfrac{\partial\varphi}{\partial N}\cdot\tfrac{\partial\psi}{\partial N}\right)+$$
$$\sigma\cdot\Delta_{\partial\Omega}\theta\mathrm{sen}\omega\theta\ \ Re\left(\tfrac{\partial\varphi}{\partial N}\cdot\tfrac{\partial\psi}{\partial N}\right)+$$
$$\frac{\partial\sigma}{\partial\theta}\mathrm{sen}\omega\theta\ \ Re\left(\tfrac{\partial\varphi}{\partial N}\cdot\tfrac{\partial\psi}{\partial N}\right)+$$
$$\sigma\mathrm{sen}\omega\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\ \ Re\left(\tfrac{\partial\varphi}{\partial N}\cdot\tfrac{\partial\psi}{\partial N}\right)\ \ =0$$

Portanto:

$$\Gamma(\sigma\cos\omega\theta)=\mathcal{O}\left(1/w\right)\qquad\text{quando }\ \omega\longrightarrow+\infty$$

e devemos calcular termos de ordem mais alta em $\left(\frac{1}{2\omega}\right)$.

Para simplificar a notação, denotaremos por T o operador

$$T\ :\ u\longrightarrow Re\left(\text{parte par em }\theta\text{ de }\left(e^{i\omega\theta}u\right)\right)$$

e por φ_N e ψ_N as derivadas de φ e ψ na direção da normal ao $\partial\Omega$. Não é difícil ver, (usando $Re\,(\varphi_N\psi_N)\equiv 0$) que, se M é um operador diferencial de ordem ≤ 1 então:

$$T\left(\varphi_N\cdot M(\psi_N)+\psi_N M(\varphi_N)\right)=0$$

Levando isto em conta, teremos:

$$\begin{aligned}T\left(\psi_N\dot{\varphi}_1+\varphi_N\dot{\psi}_1\right)\ &=\ T\left(\psi_N\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(\sigma\varphi_N)\right)+\varphi_N\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(\sigma\psi_N)\right)\right)-\\ &\quad T\left(\psi_N\left(\Delta_{\partial\Omega}(\sigma\varphi_N)\right)+\varphi_N\left(\Delta_{\partial\Omega}(\sigma\psi_N)\right)\right)\end{aligned}$$

Agora observemos que:

$$\begin{aligned}0\ &=\ \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(\varphi_N\psi_N)\\ &=\ 2\frac{\varphi_N}{\partial\theta}\frac{\psi_N}{\partial\theta}+\varphi_N\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\psi_N+\psi_N\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\varphi_N\end{aligned}$$

e, portanto:

$$\begin{aligned}T\left(\psi_N\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(\sigma\varphi_N)+\varphi_N\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(\sigma\dot{\psi_N})\right)\ &=\ T\left(\sigma\psi_N\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(\varphi_N)+\sigma\varphi_N\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(\psi_N)\right)\\ &=\ -2\sigma\cos\omega\theta\ \ Re\left(\frac{\partial\varphi_N}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial\psi_N}{\partial\theta}\right)\end{aligned}$$

e, analogamente:

$$T\left(\psi_N \Delta_{\partial\Omega}(\sigma\varphi_N) + \varphi_N \Delta_{\partial\Omega}(\sigma\psi_N)\right) = -2\sigma\cos\omega\theta \;\; Re\left(\nabla_{\partial\Omega}\varphi_N \cdot \nabla_{\partial\Omega}\psi_N\right)$$

Portanto:

$$\begin{aligned}\Gamma(\sigma\cdot\cos\omega\theta) &= \sigma\cdot\frac{1}{\omega}\cos\omega\theta \;\; Re\left(\nabla_{\partial\Omega}\varphi_N\cdot\nabla_{\partial\Omega}\psi_N - \frac{\partial\varphi_N}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial\psi_N}{\partial\theta}\right) + \\ &\quad \mathcal{O}\left(\omega^{-2}\right)\end{aligned} \tag{B.17}$$

quando $\omega \longrightarrow +\infty$.

Para que Γ tenha posto finito é necessário então que o operador:

$$\sigma \longrightarrow \sigma\cdot\frac{\cos\omega\theta}{\omega} \;\; Re\left[\left(\nabla_{\partial\Omega}\varphi_N\cdot\nabla_{\partial\Omega}\psi_N\right) - \left(\frac{\partial\varphi_N}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial\psi_N}{\partial\theta}\right)\right]$$

tenha posto finito (θ deve ser *função par*) . Para isto é necessário que:

$$Re\left[\left(\nabla_{\partial\Omega}\varphi_N\cdot\nabla_{\partial\Omega}\psi_N\right) - \left(\frac{\partial\varphi_N}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial\psi_N}{\partial\theta}\right)\right] = 0$$

Agora vamos precisar de alguns resultados auxiliares.

Lema B.1 *Seja $\mathcal{X}$ um caracter do grupo (compacto) $G \subset O(n)$ e*

$$M_{\mathcal{X}} = \{u \in L^2(\Omega) \mid u\circ g = \mathcal{X}(g)\cdot u\}$$

(conforme definido em 2.11).
Se $\varphi \in M_{\mathcal{X}}$, $\psi \in M_{\bar{\mathcal{X}}}$ (e são suficientemente lisas) então:

$$Re\left(\frac{\partial\varphi_N}{\partial\tau_1}\cdot\frac{\partial\psi_N}{\partial\tau_2}\right) = 0 \quad para \;\; \tau_1,\tau_2 \;\; em \; T_xG(x)$$

(onde $T_xG(x)$ indica o espaço tangente à órbita de x no ponto x).

Demonstração. Seja τ em $T_xG(x)$ e $\gamma : \mathbb{R} \to G$ uma curva lisa tal que:

$$\gamma(0) = Id, \quad \gamma'(0) = A_\tau$$

com A_τ escolhido de tal forma que: $\tau = \frac{d}{dt}(\gamma(t)\cdot x)_{|t=0}$.
Se $u \in M_{\mathcal{X}}$ temos $u(\gamma(t)\cdot x) = e^{i\theta(\gamma(t))}\cdot u(x)$ e então:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial \tau} &= \frac{d}{dt}_{|t=0}\left(e^{i\theta(\gamma(t))}\right)\cdot u(x)\\ &= i\theta'(\gamma(0))\cdot\gamma'(0)u(x)\\ &= i\theta'_{Id}(A_\tau)\cdot u(x)\end{aligned}$$

Se, agora $v \in M_{\bar{\mathcal{X}}}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial \tau_1}\cdot\frac{\partial v}{\partial \tau_2} &= i\theta'_{Id}(A_{\tau_1})u(x)\cdot -i\theta'_{Id}(A_{\tau_2})v(x)\\ &= \theta'_{Id}(A_{\tau_1})\cdot\theta'_{Id}(A_{\tau_2})\cdot u(x)v(x)\end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned}Re\left(\frac{\partial \varphi_N}{\partial \tau_1}\cdot\frac{\partial \psi_N}{\partial \tau_2}\right) &= \theta'_{Id}(A_{\tau_2})\ \ Re\ \ (\varphi_N\cdot\psi_N)\\ &\equiv 0\end{aligned}$$

□.

Lema B.2 *Se $u : \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é função par ($u \circ g = u$) e lisa então: $\nabla_{\partial\Omega}u \perp G(x)$.*

Demonstração. De fato, usando as mesmas notações do lema B.1 :

$$\begin{aligned}u(\gamma(t)\cdot x) &= u(x) \Rightarrow\\ \nabla_{\partial\Omega}u\cdot\tau &= \frac{d}{dt}_{|t=0}u(\gamma(t)\cdot x)\\ &= \frac{d}{dt}_{|t=0}u(x)\\ &= 0\end{aligned}$$

□.

Lema B.3 *Se V_ε é uma vizinhança do espaço normal a $G(x)$ no ponto x então, dada uma função contínua em V_ε é sempre possível estendê-la a uma função par em Ω. Como consequência, ∇u pode ser qualquer vetor normal a $G(x)$, mesmo impondo que u seja par.*

Demonstração. É consequência imediata do teorema A.8 □.

Teorema B.1 *Seja $G \subset O(n)$ subgrupo compacto que possui um ponto livre em $\partial\Omega$ e tal que a codimensão de $G(x)$ em $\partial\Omega$ é > 1. Suponhamos ainda que φ e ψ são auto-funções do problema de Dirichlet para o Laplaciano em Ω satisfazendo:*

$$Re\left(\frac{\partial\varphi}{\partial N}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial N}\right)\equiv 0 \quad \textit{em uma vizinhança } V \textit{ de } \partial\Omega.$$

Então se o operador Γ acima definido, (com domínio nas funções pares e lisas de $\partial\Omega$) tem posto finito devemos ter necessariamente:

$$Re\left(\frac{\partial\varphi_N}{\partial\tau}\cdot\frac{\partial\psi_N}{\partial\tau}\right)\equiv 0 \quad \textit{em uma vizinhança } U \textit{ de } \partial\Omega$$

para todo vetor τ no espaço tangente a $\partial\Omega\cap U$.

Demonstração. Como vimos acima para que Γ tenha posto finito devemos ter:

$$Re\left(\nabla_{\partial\Omega}\varphi_N\cdot\nabla_{\partial\Omega}\psi_N\right)=Re\left(\left(\nabla_{\partial\Omega}\varphi_N\cdot\nabla_{\partial\Omega}\theta\right)\left(\nabla\psi_N\cdot\nabla_{\partial\Omega}\cdot\theta\right)\right)$$

para toda função par com $\nabla_{\partial\Omega}\theta\equiv 1$ (usaremos, daqui em diante " ∇ " ao invés de " $\nabla_{\partial\Omega}$ " para facilitar a notação). Escrevendo:

$$\nabla\varphi_N=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial\varphi_N}{\partial\tau_i}\cdot\tau_i+\sum_{i=m+1}^{n}\frac{\partial\varphi_N}{\partial\tau_i}\cdot\tau_i$$

com:

$$\{\ \tau_1,\ldots,\ldots\tau_m\}\in \text{ espaço ortogonal a } G(x)$$

$$\{\tau_{m+1},\ldots,\tau_n\}\in \text{ espaço tangente a } G(x)$$

e analogamente para $\nabla\psi_N$, teremos em vista dos lemas B.1, B.2, B.3 acima:

$$Re\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial\varphi_N}{\partial\tau_i}\cdot\frac{\partial\psi_N}{\partial\tau_i}=Re\frac{\partial\varphi_N}{\partial\tau_k}\cdot\frac{\partial\varphi_N}{\partial\tau_k},\quad k=1,\ldots,m$$

Se $m=$ codim de $G(x)$ em $\partial\Omega$ é >1, seguirá que

$$Re\left(\frac{\partial\varphi_N}{\partial\tau_i}\cdot\frac{\partial\psi_N}{\partial\tau_i}\right)=0 \quad \text{para } i=1,\ldots,m$$

Para $i>m$ esta igualdade já foi provada no lema B.1 □.

Observação B.1 *No caso em que codim $G(x)$ no $\partial\Omega$ é $= 1$ nada podemos concluir sobre a derivada na direção ortogonal a $\partial\Omega$.*
Isto ocorre, em particular, quando G é finito e $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Precisamos então calcular termos de ordem mais alta em $1/\omega$. Podemos porém supor, daqui em diante que:

$$Re\left(\nabla\varphi_N \cdot \nabla\psi_N\right) = Re\left(\frac{\partial\varphi_N}{\partial\tau} \cdot \frac{\partial\psi_N}{\partial\tau}\right)$$

onde τ é um vetor no espaço tangente ao $\partial\Omega$ e ortogonal à órbita de G.

Fazendo as substituições na fórmula B.14 (e eliminando termos desprezíveis) obteremos:

$$\begin{aligned}
\dot{\phi}_2 \;=\; & \left.\begin{array}{l}
(-8q + 3i\Delta_{\partial\Omega}\theta)\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}g \\
+(2q - i\Delta_{\partial\Omega}\theta)\Delta_{\partial\Omega}g \\
+8\frac{\partial}{\partial\theta}K \cdot \nabla\theta\nabla g \\
+2div_{\partial\Omega}K \cdot \nabla g
\end{array}\right\} \quad \text{termos de ordem 2} \\
& + \left.\left(-i\Delta_{\partial\Omega}\frac{\partial}{\theta}g + 2i\frac{\partial^3}{\partial\theta^3}\Delta_{\partial\Omega}g\right)\right\} \quad \text{termos de ordem 3}
\end{aligned}$$

Tomando $g = \sigma\varphi_N$ obteremos $\dot{\varphi}_2$ e tomando $g = \sigma\psi_N$ obteremos $\dot{\psi}_2$.

Para obter uma forma mais conveniente para a expressão $T\left(\varphi_N\dot{\varphi}_2 + \psi_N\dot{\psi}_2\right)$, precisamos manipular os operadores diferenciais acima. Isto é bastante trabalhoso, mas não apresenta dificuldades teóricas maiores. Para dar uma idédia dos cálculos envolvidos consideremos, por exemplo, o operador $-i\frac{\partial}{\partial\theta}\Delta_{\partial\Omega}$ (usaremos que $Re(\varphi_N\psi_N) = 0$).

Temos:

$$T\left\{-i\left[\psi_N\frac{\partial}{\partial\theta}\Delta_{\partial\Omega}(\varphi_N\cdot\sigma)+\varphi_N\frac{\partial}{\partial\theta}\Delta_{\partial\Omega}(\psi_N\cdot\sigma)\right]\right\} \quad =$$

$$T\left\{-i\left[\psi_N\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sigma\Delta_{\partial\Omega}\varphi_N+2\nabla\varphi_N\nabla\sigma\right)+\varphi_N\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sigma\Delta_{\partial\Omega}\psi_N+2\nabla\psi_N\cdot\nabla\sigma\right)\right]\right\} \quad =$$

$$T\left\{-i\left[\psi_N\left(\sigma\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\Delta_{\partial\Omega}\varphi_N\right)+\frac{\partial\sigma}{\partial\theta}\cdot\Delta_{\partial\Omega}\varphi_N+2\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\nabla\sigma\cdot\nabla\varphi_N\right)\right.\right. \quad +$$
$$\left.\left.\varphi_N\left(\sigma\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\Delta_{\partial\Omega}\psi_N\right)+\frac{\partial\sigma}{\partial\theta}.\Delta_{\partial\Omega}\psi_N+2\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\nabla\sigma\cdot\nabla\psi_N\right)\right]\right\} \quad =$$

$$T\left\{-i\left[2\psi_N\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\nabla\sigma\cdot\nabla\varphi_N\right)\right)+2\varphi_N\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\nabla\sigma\cdot\nabla\psi_N\right)\right)\right]\right\} \quad +$$
$$T\left\{-i\sigma\left[\psi_N\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\Delta_{\partial\Omega}\varphi_N\right)+\varphi_N\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\Delta_{\partial\Omega}\psi_N\right)\right]\right\} \quad +$$
$$T\left\{-i\frac{\partial\sigma}{\partial\theta}\left[\psi_N\Delta_{\partial\Omega}\varphi_N+\varphi_N\Delta_{\partial\Omega}\psi_N\right]\right\} \quad =$$

$$T\left\{-2i\left[\psi_N\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(\nabla\sigma)\cdot\nabla\varphi_N\right)\right.\right. \quad +$$
$$\left.\left.\psi_N\left(\nabla\sigma\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}(\nabla\varphi_N)\right)+\varphi_N\left(\nabla\sigma\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}(\nabla\psi_N)\right)\right]\right\} \quad +$$
$$T\left\{i\sigma\left[\Delta_{\partial\Omega}\varphi_N\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\psi_N+\Delta_{\partial\Omega}\psi_N\frac{\partial}{\partial\theta}\varphi_N+2\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\nabla\varphi_N\cdot\nabla\psi_N\right)\right]\right\} \quad -$$
$$2\ \mathrm{sen}\omega\theta\frac{\partial\sigma}{\partial\theta}\quad Re\left(\nabla\varphi_N\cdot\nabla\psi_N\right) \quad =$$

$$T\left\{-2i\left[\nabla\sigma\cdot\left(\psi_N\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\nabla\varphi_N\right)+\varphi_N\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\nabla\psi_N\right)\right)\right]\right. \quad -$$
$$\sigma\ \mathrm{sen}\omega\theta\quad Re\left[(\Delta_{\partial\Omega}\varphi_N)\frac{\partial}{\partial\theta}\psi_N+(\Delta_{\partial\Omega}\psi_N)\frac{\partial}{\partial\theta}\varphi_N\right] \quad -$$
$$2\sigma\ \mathrm{sen}\omega\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\quad Re\left(\nabla\varphi_N\cdot\nabla\psi_N\right) \quad -$$
$$2\frac{\partial\sigma}{\partial\theta}\ \mathrm{sen}\omega\theta\quad Re\left(\nabla\varphi_N\cdot\nabla\psi_N\right) \quad =$$

$$T\left\{2i\left[\nabla\sigma\cdot\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\psi_N\cdot\nabla\varphi_N+\frac{\partial}{\partial\theta}\nabla\varphi_N\cdot\nabla\psi_N\right)\right]\right\} \quad -$$
$$\sigma\ \mathrm{sen}\omega\theta\quad Re\left[\Delta_{\partial\Omega}\varphi_N\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\psi_N+\Delta_{\partial\Omega}\psi_N\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\varphi_N\right] \quad -$$
$$-2\ \mathrm{sen}\omega\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sigma\quad Re\left(\nabla\varphi_N\cdot\nabla\psi_N\right)\right] \quad =$$

$$-2\ \mathrm{sen}\omega\theta\cdot\nabla\sigma\quad Re\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\psi_N\cdot\nabla\varphi_N\right)+\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\varphi_N\cdot\nabla\psi_N\right)\right] \quad -$$
$$\sigma\ \mathrm{sen}\omega\theta\quad Re\left[\Delta_{\partial\Omega}\varphi_N\frac{\partial}{\partial\theta}\psi_N+\Delta_{\partial\Omega}\psi_N\frac{\partial}{\partial\theta}\varphi_N\right] \quad -$$
$$2\sigma\ \mathrm{sen}\omega\theta\quad Re\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\nabla\varphi_N\cdot\nabla\psi_N\right) \quad -$$
$$2\frac{\partial\sigma}{\partial\theta}\cdot\ \mathrm{sen}\omega\theta\quad Re\left(\nabla\varphi_N\cdot\nabla\psi_N\right)$$

Agora, usando que $\nabla\varphi_N \cdot \nabla\psi_N = \frac{\partial\varphi_N}{\partial\theta} \cdot \frac{\partial\psi_N}{\partial\theta}$ teremos:

$$\begin{aligned}
&T\left(-i\left[\psi_N \tfrac{\partial}{\partial\theta}\Delta_{\partial\Omega}(\sigma\varphi_N) + \varphi_N \tfrac{\partial}{\partial\theta}\Delta_{\partial\Omega}(\sigma\psi_N)\right]\right) = \\
&-2\sigma \operatorname{sen}\omega\theta \;\; Re\tfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\tfrac{\partial\varphi_N}{\partial\theta} \cdot \tfrac{\partial\psi_N}{\partial\theta}\right) - \\
&2\tfrac{\partial\sigma}{\partial\theta} \operatorname{sen}\omega\theta \;\; Re\left(\tfrac{\partial\varphi_N}{\partial\theta} \cdot \tfrac{\partial\psi_N}{\partial\theta}\right) - \\
&\sigma \operatorname{sen}\omega\theta \;\; Re\left(\Delta_{\partial\Omega}\varphi_N \cdot \tfrac{\partial\psi_N}{\partial\theta} + \Delta_{\partial\Omega}\psi_N \tfrac{\partial\varphi_N}{\partial\theta}\right) - \\
&2 \operatorname{sen}\omega\theta \;\; Re\left[\left(\tfrac{\partial}{\partial\theta}\psi_N \cdot \nabla\varphi_N\right) + \left(\tfrac{\partial}{\partial\theta}\varphi_N \nabla\psi_N\right)\right]
\end{aligned} \tag{B.18}$$

Manipulando os demais termos de forma semelhante, obteremos:

$$\begin{aligned}
&T\left(\psi_N\dot{\varphi}_2 + \varphi_N\dot{\psi}_2\right) = \\
&12q\sigma\cos\omega\theta \;\; Re\left(\tfrac{\partial\varphi_N}{\partial\theta} \cdot \tfrac{\partial\psi_N}{\partial\theta}\right) + \\
&4\Delta_{\partial\Omega}\theta\sigma \operatorname{sen}\omega\theta \;\; Re\left(\tfrac{\partial\varphi_N}{\partial\theta} \cdot \tfrac{\partial\psi_N}{\partial\theta}\right) + \\
&8\tfrac{\partial\sigma}{\partial\theta} \operatorname{sen}\omega\theta \;\; Re\left(\tfrac{\partial\varphi_N}{\partial\theta} \cdot \tfrac{\partial\psi_N}{\partial\theta}\right) + \\
&4\sigma \operatorname{sen}\omega\theta \;\; Re\tfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\tfrac{\partial\varphi_N}{\partial\theta} \cdot \tfrac{\partial\psi_N}{\partial\theta}\right) - \\
&2\sigma \operatorname{sen}\omega\theta \;\; Re\left(\nabla\left(\tfrac{\partial\varphi_N}{\partial\theta}\right) \cdot \nabla\psi_N + \nabla\left(\tfrac{\partial\psi_N}{\partial\theta}\right) \cdot \nabla\varphi_N\right) - \\
&2\sigma \operatorname{sen}\omega\theta \;\; Re\left(\tfrac{\partial\varphi_N}{\partial\theta} \cdot \Delta_{\partial\Omega}\psi_N + \tfrac{\partial\psi_N}{\partial\theta} \cdot \Delta_{\partial\Omega}\varphi_N\right) - \\
&4 \operatorname{sen}\omega\theta \cdot \nabla\sigma \;\; Re\left(\nabla\varphi_N \cdot \tfrac{\psi_N}{\partial\theta} + \nabla\psi_N \cdot \tfrac{\varphi_N}{\partial\theta}\right) - \\
&8\sigma\cos\omega\theta \;\; Re\left(\tfrac{\partial\psi_N}{\partial\theta}(K \cdot \nabla\theta) \cdot \nabla\varphi_N + \tfrac{\partial\varphi_N}{\partial\theta}(K \cdot \nabla\theta) \cdot \nabla\psi_N\right) + \\
&4\sigma\cos\omega\theta \;\; Re\left(\nabla\psi_N \cdot K \cdot \nabla\varphi_N\right)
\end{aligned} \tag{B.19}$$

Como estamos supondo codimensão de G em $\partial\Omega = 1$, teremos ainda, em vista do lema B.2.

$$\nabla\sigma = \frac{\partial\sigma}{\partial\theta} \cdot \nabla\theta \tag{B.20}$$

e pelo lema B.1

$$\begin{aligned}
&Re\left(\nabla\frac{\partial\varphi_N}{\partial\theta} \cdot \nabla\psi_N + \nabla\frac{\partial\psi_N}{\partial\theta} \cdot \nabla\psi_N\right) = \\
&Re\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial\varphi_N}{\partial\theta} \cdot \frac{\partial}{\partial\theta}\psi_N + \frac{\partial}{\partial\theta}\varphi_N \cdot \frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial\psi_N}{\partial\theta}\right) = \\
&\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial\varphi_N}{\partial\theta} \cdot \frac{\partial\psi_N}{\partial\theta}\right)
\end{aligned} \tag{B.21}$$

e então:

$$
\begin{aligned}
& T\left(\psi_N \dot{\varphi}_2 + \varphi_N \dot{\psi}_2\right) \quad = \\
& 12\, q\sigma \cos\omega\theta \;\; Re\left(\tfrac{\partial \varphi_N}{\partial \theta} \cdot \tfrac{\partial \psi_N}{\partial \theta}\right) + \\
& 4\, \Delta_{\partial\Omega}\theta \cdot \sigma \;\mathrm{sen}\omega\theta \;\; Re\left(\tfrac{\partial \varphi_N}{\partial \theta} \cdot \tfrac{\partial \psi_N}{\partial \theta}\right) + \\
& 2\, \sigma \;\mathrm{sen}\omega\theta \;\; Re \tfrac{\partial}{\partial \theta}\left(\tfrac{\partial \varphi_N}{\partial \theta} \cdot \tfrac{\partial \psi_N}{\partial \theta}\right) - \\
& 2\, \sigma \;\mathrm{sen}\omega\theta \;\; Re\left(\tfrac{\partial \varphi_N}{\partial \theta} \Delta\psi_N + \tfrac{\partial \psi_N}{\partial \theta} \cdot \Delta\varphi_N\right) - \\
& 8\, \sigma \cos\omega\theta \;\; Re\left(\tfrac{\partial \psi_N}{\partial \theta} \cdot K \cdot \nabla\theta \cdot \nabla\varphi_N + \tfrac{\partial \varphi_N}{\partial \theta} \cdot K \cdot \nabla\theta \cdot \nabla\psi_N\right) + \\
& 4\, \sigma \cos\omega\theta \;\; Re\left(\nabla\varphi_N \cdot K \cdot \nabla\psi_N\right)
\end{aligned}
$$

Temos ainda (sempre supondo codimensão de $G(x)$ em $\partial\Omega = 1$):

- $\Delta\varphi_N = div_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial \varphi_N}{\partial \theta} \cdot \nabla\theta + \nabla_{G(x)}\varphi_N\right) = \Delta\theta \cdot \frac{\partial \varphi_N}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \varphi_N}{\partial \theta^2} + div_{\partial\Omega}\nabla_{G(x)}$

  e, portanto:

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial \varphi_N}{\partial \theta} \cdot \Delta\psi_N + \frac{\partial \psi_N}{\partial \theta} \cdot \Delta\varphi_N = \\
& \quad 2\,\Delta\theta \cdot \frac{\partial \varphi_N}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \psi_N}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial \varphi_N}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \psi_N}{\partial \theta}\right) + \\
& \quad \frac{\partial \varphi_N}{\partial \theta} \cdot div_{\partial\Omega}\left(\nabla_{G(x)}\psi_N\right) + \frac{\partial \psi_N}{\partial \theta} \cdot div_{\partial\Omega}\left(\nabla_{G(x)}\varphi_N\right)
\end{aligned} \tag{B.22}
$$

- $\frac{\partial \psi_N}{\partial \theta} \cdot K \cdot \nabla\theta \cdot \nabla\varphi_N = q \cdot \frac{\partial \psi_N}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \varphi_N}{\partial \theta} + \frac{\partial \psi_N}{\partial \theta} \cdot K \cdot \nabla\theta \cdot \nabla_{G(x)}\varphi_N$

  e, portanto:

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial \psi_N}{\partial \theta} \cdot K \cdot \nabla\theta \cdot \nabla\varphi_N + \frac{\partial \varphi_N}{\partial \theta} \cdot K \cdot \nabla\theta \cdot \nabla\psi_N \quad = \\
& \quad 2\, q \cdot \frac{\partial \varphi_N}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \psi_N}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi_N}{\partial \theta} \cdot K \cdot \nabla\theta \cdot \nabla_{G(x)}\psi_N + \\
& \quad \frac{\partial \psi_N}{\partial \theta} \cdot K \cdot \nabla\theta \cdot \nabla_{G(x)}\varphi_N
\end{aligned} \tag{B.23}
$$

-

$$
\begin{aligned}
& \nabla\psi_N \cdot K \cdot \nabla\varphi_N \quad = \\
& \quad q \cdot \frac{\partial \varphi_N}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \psi_N}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi_N}{\partial \theta} \cdot K \cdot \nabla\theta \cdot \nabla_{G(x)}\varphi_N + \\
& \quad K \cdot \nabla_{G(x)}\varphi_N \cdot \nabla_{G(x)}\psi_N
\end{aligned} \tag{B.24}
$$

e obteremos finalmente:

$$\begin{aligned}
&\Gamma\left(\sigma\cos\omega\theta\right) \quad = \\
&-\frac{1}{\omega^2}\,\sigma\cos\omega\theta\ Re\left(\frac{\partial\varphi_N}{\partial\theta}\cdot K\cdot\nabla\theta\cdot\nabla_{G(x)}\psi_N+\frac{\partial\psi_N}{\partial\theta}\cdot K\cdot\nabla\theta\cdot\nabla_{G(x)}\varphi_N\right)\\
&-\frac{1}{2\omega^2}\,\sigma\ \mathrm{sen}\omega\theta\ Re\left(\frac{\partial\varphi_N}{\partial\theta}\cdot div_{\partial\Omega}\left(\nabla_{G(x)}\psi_N\right)+\frac{\partial\psi_N}{\partial\theta}\cdot div_{\partial\Omega}\left(\nabla_{G(x)}\varphi_N\right)\right)+\\
&\mathcal{O}\left(\omega^{-3}\right)
\end{aligned}\tag{B.25}$$

uniformemente em $\partial\Omega$.

Em particular, se dim $\partial\omega = 1$, não teremos os termos na direção tangente a $G(x)$ e, portanto:

$$\Gamma\left(\sigma\cos\omega\theta\right)=\mathcal{O}\left(\omega^{-3}\right)\tag{B.26}$$

Portanto, para que Γ tenha posto finito as expressões que comnparecem acima multiplicando $\sigma\cos\omega\theta$ e $\sigma\ \mathrm{sen}\omega\theta$ devem se anular em $\partial\Omega\cap V$.
Como isto não fornece nenhuma informação sobre as derivadas na direção normal a $G(x)$ precisamos calcular o termo em ω^{-3}. Isto pode ser feito usando basicamente as mesmas idéias (agora, porém, os cálculos são extremamente longos). O resultado final será:

$$\begin{aligned}
&\Gamma\left(\sigma\cos\omega\theta\right) \quad = \\
&(\text{ termos em } \omega^{-2}\ )+\\
&\left(\begin{array}{l}-\lambda-1/2\ tr\left(K^2\right)-5/4q^2+1/4H^2+3/2r-\\ 1/2\ \frac{\partial}{\partial\theta}\Delta_{\partial\Omega}\theta+1/4(\Delta_{\partial\Omega}\theta)^2\end{array}\right)\sigma\cos\omega\theta\ Re\left(\tfrac{\partial\varphi_N}{\partial\theta}\cdot\tfrac{\partial\psi_N}{\partial\theta}\right)-\\
&1/4\,\sigma\cos\omega\theta\ Re\left(\tfrac{\partial\varphi_N}{\partial\theta}\cdot div_{\partial\Omega}\nabla_{G(x)}\tfrac{\partial\psi_N}{\partial\theta}+\tfrac{\partial\psi_N}{\partial\theta}\cdot div_{\partial\Omega}\nabla_{G(x)}\tfrac{\partial\varphi_N}{\partial\theta}\right)+\\
&1/4\,\sigma\cos\omega\theta\ Re\left(div_{\partial\Omega}\nabla_{G(x)}\varphi_N\cdot div_{\partial\Omega}\nabla_{G(x)}\psi_N\right)-\\
&3\,\sigma\cos\omega\theta\ Re\left(\tfrac{\partial\varphi_N}{\partial\theta}K^2\cdot\nabla\theta\cdot\nabla_{G(x)}\psi_N+\tfrac{\partial\psi_N}{\partial\theta}K^2\cdot\nabla\theta\cdot\nabla_{G(x)}\varphi_N\right)-\\
&\sigma\ \mathrm{sen}\omega\theta\ Re\left(\tfrac{\partial^2\varphi_N}{\partial\theta^2}\left(K\cdot\theta\cdot\nabla_{G(x)}\psi_N\right)+\tfrac{\partial^2\psi_N}{\partial\theta^2}\left(K\cdot\nabla\theta\cdot\nabla_{G(x)}\varphi_N\right)\right)+\\
&1/2\,\sigma\ \mathrm{sen}\omega\ Re\left(\tfrac{\partial\varphi_N}{\partial\theta}K\cdot\nabla\theta\cdot\nabla_{G(x)}\tfrac{\partial\psi_N}{\partial\theta}+\tfrac{\partial\psi_N}{\partial\theta}K\cdot\nabla\theta\cdot\nabla_{G(x)}\tfrac{\partial\varphi_N}{\partial\theta}\right)-\\
&\sigma\ \mathrm{sen}\omega\theta\ Re\left(K\cdot\nabla\theta\cdot\nabla_{G(x)}\varphi_N\cdot div_{\partial\Omega}\left(\nabla_{G(x)}\psi_N\right)+K\cdot\nabla\theta\cdot\nabla_{G(x)}\psi_N\cdot div_{\partial\Omega}\left(\nabla_{G(x)}\varphi_N\right)\right)-\\
&\sigma\ \mathrm{sen}\omega\theta\ Re\left(\tfrac{\partial\varphi_N}{\partial\theta}\cdot div_{\partial\Omega}\left(K\cdot\nabla_{G(x)}\psi_N\right)+\tfrac{\partial\psi_N}{\partial\theta}\cdot div_{\partial\Omega}\left(K\cdot\nabla_{G(x)}\varphi_N\right)\right)+\\
&\mathcal{O}\left(\omega^{-4}\right)
\end{aligned}$$

Em particular, se dim $\partial\Omega = 1$, temos:

$$\Gamma(\sigma\cos\omega\theta) = -\frac{\lambda}{\omega^3}\sigma\cos\omega\theta \; Re\left(\frac{\partial\varphi_N}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial\psi_N}{\partial\theta}\right) + \mathcal{O}\left(\omega^{-4}\right) \tag{B.27}$$

Temos então o seguinte:

Teorema B.2 *Seja $G \subset O(2)$ subgrupo finito , e $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.*
Suponhamos ainda que φ e ψ são autofunções do problema de Dirichlet para o Laplaciano satisfazendo:

$$Re\left(\tfrac{\partial\varphi}{\partial N}\cdot\tfrac{\partial\psi}{\partial N}\right) \equiv 0 \quad \textit{em uma vizinhança } V \textit{ de } \partial\Omega$$

Então se o operador Γ acima definido, com domínio nas funções pares e lisas de $\partial\Omega\cap V$ tem posto finito, devemos ter:

$$Re\left(\frac{\partial\varphi_N}{\partial\tau}\cdot\frac{\partial\psi_N}{\partial\tau}\right) \equiv 0 \quad \textit{em uma vizinhança } U \textit{ de } \partial\Omega$$

para todo τ no espaço tangente a $\partial\Omega\cap U$.

B.3 Cálculos para o operador Θ

Vamos agora considerar o operador Θ definido por:

$$\sigma \longrightarrow Re\left\{\tfrac{\partial\overline{\varphi}}{\partial N}\frac{\partial}{\partial N}\mathcal{B}_{\Delta+\lambda}\left(\sigma\tfrac{\partial\varphi}{\partial N}\right) + \tfrac{\partial\overline{\psi}}{\partial N}\frac{\partial}{\partial N}\mathcal{B}_{\Delta+\lambda}\left(\sigma\tfrac{\partial\psi}{\partial N}\right)\right\}_{|\partial\Omega\cap V}$$

com $|\varphi_N|^2 - |\psi_N|^2_{|\partial\Omega\cap V} \equiv 0$.

Os cálculos iniciais são os mesmos da seção anterior e permitem-nos mostrar que:

$$\Theta(\sigma\cos\omega\theta) = \mathcal{O}(1/w) \quad \text{quando } \omega\to\infty$$

uniformemente em $\partial\Omega$.
Raciocinando de maneira ainda completamente análoga à da seção anterior, podemos mostrar que:

$$\Theta(\sigma\cos\omega\theta) = \frac{2}{\omega}\left[\sigma\cos\omega\theta\left(|\nabla\varphi_N|^2 - |\nabla\psi_N|^2 - \left|\frac{\partial\varphi_N}{\partial\theta}\right|^2 + \left|\frac{\partial\psi_N}{\partial\theta}\right|^2\right)\right] + \mathcal{O}\left(\omega^{-2}\right) \tag{B.28}$$

Mas agora não temos o análogo do lema B.1 da seção anterior; não conseguimos mostrar que: $|\frac{\partial\varphi_N}{\partial\tau}|^2 - |\frac{\partial\psi_N}{\partial\tau}|^2 = 0$ nas direções τ tangentes à órbita de $G(x)$. Por este motivo vamos considerar, nesta seção, apenas o caso de *grupos finitos.*
Neste caso, obtemos:

$$\sum_{i=1}^{m=dim\partial\Omega} |\frac{\partial\varphi_N}{\partial\tau_i}|^2 - |\frac{\partial\varphi_N}{\partial\tau_i}|^2 = |\frac{\partial\varphi_N}{\partial\tau_k}|^2 - |\frac{\partial\varphi_N}{\partial\tau_k}|^2 \quad k = 1, \ldots, m$$

e, se dim $\partial\Omega > 1$, segue o:

Teorema B.3 *Seja $G \subset O(n)$ subgrupo finito e suponhamos que φ e ψ são autofunções do Laplaciano satisfazendo:*

$$|\varphi_N|^2 - |\psi_N|^2 \equiv 0 \quad \textit{em uma vizinhança } V \textit{ de } \partial\Omega.$$

Então para que o operador Θ tenha posto finito, devemos ter , necessariamente:

$$|\frac{\partial\varphi_N}{\partial\tau}|^2 - |\frac{\partial\varphi_N}{\partial\tau}|^2 \quad \textit{em uma vizinhança } U \textit{ de } \partial\Omega$$

para todo τ no espaço tangente a $\partial\Omega \cap U$.

Se estamos em dimensão 2 (isto é dim $\partial\Omega = 1$) então da fórmula B.28 segue imediatamente que:

$$\Theta(\sigma\cos\omega\theta) = \mathcal{O}\left(\omega^{-2}\right)$$

e somos forçados a calcular termos de ordem mais alta em $1/\omega$.
Após cálculos semelhantes aos da seção anterior obtemos:

$$\Theta(\sigma\cos\omega\theta) = -\frac{\lambda\cos\omega\theta}{2\omega^3}\left(|\frac{\partial\varphi_N}{\partial\theta}|^2 - |\frac{\partial\psi_N}{\partial\theta}|^2\right) + \mathcal{O}\left(\omega^{-4}\right) \tag{B.29}$$

e podemos concluir que o teorema B.3 ainda vale se eliminarmos a hipótese dim $\partial\Omega > 1$. æ

Bibliografia

[1] G. E. Bredon (1972), *Introduction to Compact Transformation Groups*, Academic Press.

[2] D. B. Henry(1982), *Topics in Nonlinear Analysis*, Universidade de Brasília, Trabalho de Matemática n° 192.

[3] D. B. Henry(1985), *Perturbation of the Boundary in Boundary Value Problems of PDEs*, notas não publicadas.

[4] E. Hewit and K. A. Ross(1970), *Abstract Harmonic Analysis*, Springer Verlag.

[5] T. Kato(1960), *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer Verlag.

[6] A.A.Kirillov(1976), *Elements of the Theory of Representation*, Springer Verlag.

[7] W. Mackey(1976), *Unitary Representations* , Benjamin Cummingan Co.

[8] A. M. Micheletti(1972), *Metrica per famiglia di domini limitati e proprietà generiche degli autovalori*, Analli della Scuola Norm. Sup. Pisa ser. II, v. 26 p. 683-694.

[9] A. M. Micheletti(1972).*Perturbazione dello Spettro dell'Operatore di Laplace in relazione ad una variazione del Campo.*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa Ser. II, v.26, pp. 151-169.

[10] M. A. Pinsky(1980), *The Eigenvalues of an equilateral triangle*, SIAM J. Math. v.II p.819-827.

[11] J.P.Serre(1977), *Representations of Finite Groups*, Springer Verlag.

[12] K. Uhlenbeck(1972), *Eigenfunctions of Laplace Operator*, Bull. Am. Math. Soc. 78 p.1073-1076.

[13] K. Uhlenbeck(1976), *Generic Properties of eigenfunctions*, Amer. J. Math 98 p. 1059-1078.

[14] A. L. Vanderbauwhede(1980), *Local Bifurcation and Symmetry*, Instituut voor Theoretische Mechanica Rijksuniversitat, Gent Belgium (Phd. Thesis).

[15] J. A. Wolf(1972), *Spaces of Constant Curvature*, publicado pelo autor.