Sobre a 2ª conjetura de Brauer Thrall

Alegria Gladys Chalon de Oliveira

Dissertação apresentada
ao
Instituto de Matemática e Estatística
da
Universidade de São Paulo
para obtenção do grau de mestre
em
Matemática

Área de concentração: Álgebra
Orientador: Prof. Dr. Hector A. Merklen
Apoio: CAPES

São Paulo, fevereiro de 1989

AGRADECIMENTOS

Ao terminar este trabalho, gostaria de agradecer a todos os que contribuiram para a sua realização.

Agradeço ao professor Hector Merklen pela sua infinita paciência e dedicação na orientação deste trabalho.

A meu marido, meu agradecimento não só pelo estímulo e apoio como pela datilografia de todo o trabalho.

Agradeço a todos os professores do IME-USP, responsáveis pela minha formação e que tanto me incentivaram todos estes anos.

Agradeço a todos os funcionários do IME-USP, em particular aos funcionários da CPG e do Departamento de Matemática pelo seu carinho e aos funcionários da biblioteca que com sua gentileza e solicitude muito colaboraram com este trabalho.

E, por fim, agradeço a todos os meus amigos que, estando longe ou perto, sempre me acompanharam.

Índice

	página
1. Introdução	1
2. Preliminares	5
3. Resultados intermediários	12
4. O passo de indução	16
5. Um pouco da teoria de reticulados	20
6. Sobre álgebras não distributivas	30
7. Categorias de raios	38

SOBRE A 2ª CONJETURA DE BRAUER THRALL

1. INTRODUÇÃO

Há muitos anos vem-se estudando a categoria dos módulos sobre uma álgebra, e a pergunta que primeiro nos fazemos é: que propriedades da álgebra Λ considerada se refletem, ou trazem conseqüências na categoria dos módulos sobre ela ?

Para certos tipos de álgebras, para as quais vale o teorema de Krull-Schmidt, o estudo da categoria dos módulos finitamente gerados se reduz sensivelmente, pois neste caso nos é necessário apenas estudar os módulos indecomponíveis.

Poderíamos pensar que teríamos 4 situações diferentes:

1) Λ tem tipo de representação finito, ou seja, existe apenas um número finito de classes de isomorfia de módulos finitamente gerados indecomponíveis.

2) Λ tem tipo de representação limitado, ou seja, existem infinitas classes de isomorfia de módulos finitamente gerados e indecomponíveis e existe um número natural n tal que o comprimento de todo módulo indecomponível finitamente gerado é menor ou igual ao natural n.

3) Λ tem tipo de representação não limitado, ou seja, existem infinitas classes de isomorfia de módulos finitamente gerados indecomponíveis, tais que seus comprimentos formam um subconjunto de naturais que não é limitado, mas tem um número finito dessas classes em quase todas as dimensões (ou seja, existem apenas um número finito de naturais n_i tais que existem infinitas classes de isomorfia de módulos finitamente gerados indecomponíveis com comprimento igual a n_i).

4) Λ tem tipo de representação fortemente não limitado. Neste caso, existem infinitos naturais n_i tais que para cada n_i temos infinitas classes de isomorfia de módulos finitamente gerados indecomponíveis tais que o comprimento desses módulos é igual a n_i.

De acordo com as clássicas conjeturas de Brauer Thrall, apenas dois desses casos ocorrem. As duas conjeturas são as seguintes:

1) Se Λ é uma álgebra de tipo de representação limitado então ela é, de fato, de tipo finito.

2) Se Λ é uma álgebra sobre um corpo infinito, Λ de tipo ilimitado, então ela é, de fato de tipo fortemente não limitado.

As conjeturas surgem impressas em 1957 num artigo de J.P.Jans[J], mas há indícios de que se pensa nisso desde 1940. Em 1968 Roiter [R] provou a primeira conjetura de Brauer Thrall para álgebras de Artin e mais tarde Auslander[A] veio a dar uma demonstração para anéis de Artin usando métodos categóricos. O mesmo resultado foi obtido em 1978 por Yamagata[Y] para anéis de Artin provando primeiramente que seqüências que quase cindem existem para anéis de Artin de tipo finito.

A demonstração da segunda conjetura de Brauer Thrall percorreu um longo caminho até chegar a bom termo. J. P. Jans em seu trabalho reduziu o problema ao caso em que a álgebra Λ sobre um corpo algébricamente fechado é distributiva, isto é, que o reticulado de seus ideais bilaterais é finito.

Uma primeira demonstração foi comunicada por Nazarova e Roiter em 1973 para álgebras de Artin sobre corpos perfeitos.

Esta primeira prova, baseada em algorítmos de problemas matriciais, nunca foi publicada em revistas científicas, além de apresentar passos pouco claros e de conter erros importantes.

Posteriormente, Smalø [S] em 1980 provou o passo de indução da 2ª conjetura de Brauer Thrall para álgebras de Artin usando o resultado de Harada e Sai que diz respeito à composição de não isomorfismos entre módulos indecomponíveis e as técnicas de Auslander e Reiten relacionadas com seqüências que quase cindem.

Depois do artigo de Smalø, Bautista, Gabriel, Roiter, e Salmeron provaram o teorema das bases multiplicativas [TBM].

As técnicas usadas neste trabalho se referem principalmente a métodos diagramáticos desenvolvidos por Gabriel e em métodos combinatoriais, que permitem algumas vezes uma visão mais ampla. Os funtores de clivagem, lá definidos, são, por exemplo, um poderoso instrumento.

Nessas técnicas se baseia Bautista [Bt] em 1985, para dar uma demostração da 2ª conjetura de Brauer Thrall para álgebras sobre um corpo algebricamente fechado de característica diferente de 2.

O resultado de K. Bongartz[B], publicado simultaneamente, estende a validade da demonstração de Bautista ao caso de característica 2.

Finalmente, outro trabalho de Fischbascher [F], publicado também no mesmo ano simplifica consideravelmente a prova de Bautista, apoiando-se em técnicas de espaços de recobrimento do trabalho de Bongartz e Gabriel [BG].

Assim, depois de mais de 40 anos, os problemas clássicos de Brauer Thrall que foram os que mais influenciaram o crescimento da teoria das representações de álgebras, estão hoje *satisfatoriamente* concluidos. É notável, também, que esses problemas não foram resolvidos por uma única técnica, ou por um único matemático, mas utilizando todas as técnicas conhecidas de representações e com a combinação dos esforços de muitos matemáticos de diversas épocas.

O capítulo 2 é devotado a dar um background necessário na teoria de seqüências que quase cindem. Como uma aplicação obtemos, no capítulo 3, a 1ª conjectura de Brauer Thrall para álgebras de Artin. No capítulo 4 provamos um resultado importante conhecido como "o passo de indução na prova de Brauer Thrall II", devido a Smalø. Ele pode ser enunciado assim:

Seja Λ uma Álgebra de Artin tal que existe um inteiro positivo n com a propriedade que existem $\aleph \geq \aleph_o$ módulos indecomponíveis não isomorfos de comprimento n (onde $\aleph_o$ é a cardinalidade de um conjunto enumerável). Então, existem infinitos inteiros n_i tais que existem $\aleph$ módulos indecomponíveis não isomorfos de comprimento n_i.

Este resultado é uma parte da segunda conjetura de Brauer Thrall sobre álgebras de Artin de tipo infinito. O resultado que obteremos usando técnicas baseadas na teoria das seqüências que quase cindem não impõe restrições ao centro de Λ. Como uma conseqüência deste resultado, fica provada uma conjetura de Auslander que ele chamou de "a conjectura de Brauer Thrall $1\frac{1}{2}$" que é o seguinte: Se o número de módulos indecomponíveis finitamente gerados não isomorfos sobre uma álgebra de Artin Λ é $\aleph$, $\aleph \geq \aleph_o$ então para cada inteiro positivo n, o número de módulos indecomponíveis finitamente gerados não isomorfos de comprimento maior que n é $\aleph$.

No capítulo 5 daremos uma introdução à teoria de reticulados para que no capítulo 6 possamos provar resultados já clássicos de J. P. Jans. Entre estes, o mais importante teorema de Jans tem o seguinte enunciado:

Seja Λ uma k-álgebra de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado, k. Se o reticulado de ideais de Λ for não distributivo, então Λ é de tipo fortemente não limitado.

Nossa prova resulta substancialmente simplificada pelos resultados obtidos no capítulo 4.

No capítulo 7 procuramos dar uma introdução às categorias de raios, que explicitam em parte os métodos categóricos e além disso, são muito importantes para a classificação de álgebras de tipo de representação finito.

Esperamos que estes resultados propiciem ao leitor familiarizado com as técnicas combinatoriais e de recobrimentos uma melhor compreensão da demonstração da 2ª conjetura de Brauer Thrall feita por Fischbacher.

2. PRELIMINARES

Def 2.1 Λ é uma álgebra de Artin se existe um anel comutativo artiniano r tal que Λ é uma r-álgebra finitamente gerada como r-módulo. Ou equivalentemente, Λ é um anel de Artin que é finitamente gerado como módulo sobre seu centro que também é um anel de Artin.

Def 2.2 Λ é uma álgebra de tipo finito se existe apenas um número finito de módulos finitamente gerados indecomponíveis não isomorfos. Λ é uma álgebra de tipo infinito se existem infinitos módulos finitamente gerados indecomponíveis não isomorfos.

Def 2.3 Se Λ é uma álgebra de Artin, denotamos por Λ-mod a categoria dos módulos à esquerda sobre Λ, finitamente gerados.

Lema 2.1 (Nakayama [DK]) : Sejam M e N módulos finitamente gerados sobre uma álgebra de Artin Λ. Então um homomorfismo $f : M \longrightarrow N$ é um epimorfismo se e somente se o homomorfismo induzido $\overline{f} : M/rad\ M \longrightarrow N/rad\ N$ é um epimorfismo, onde $rad\ M$ significa radical de M.

Teorema [DK] 2.2: *Seja Λ uma álgebra de Artin e $\Lambda = P_1 \oplus \ldots \oplus P_s$ uma decomposição de Λ em ideais à esquerda indecomponíveis.*

Então:

1) Todo projetivo em Λ-mod é isomorfo a uma soma direta de cópias de alguns projetivos P_i;

2) Se $R = rad\Lambda$, RP_i é o único submódulo maximal de P_i e $\Lambda/R = \frac{P_1}{RP_1} \oplus \ldots \oplus \frac{P_s}{RP_s}$ é uma decomposição de Λ/R em Λ-módulos simples;

3) $P_i \cong P_j$ se e só se $\frac{P_i}{RP_i} \cong \frac{P_j}{RP_j}$

Assim em Λ-mod há tantas classes de isomorfismo de indecomponíveis projetivos quantas classes de isomorfismo de simples.

Lema 2.3 (Harada e Sai[M]) : Seja Λ uma álgebra de Artin e M_i $(i = 1....n = 2^b)$ Λ-módulos indecomponíveis tais que $\ell(Mi) \leq b$, onde $\ell(M)$ é o compri-

mento de M. Então toda cadeia de Λ-homomorfismos

$$M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \longrightarrow \ldots . \xrightarrow{f_{n-1}} M_n$$

onde os f_i são não-isomorfismos, tem composta 0.

Dem: basta mostrar por indução em k $(1 \leq k \leq b)$ que

$$\ell(Im(f_{2^k-1} \ldots . f_1)) \leq b - k.$$

Neste caso então, para $n = 2^b$ tenho $\ell(Im(f_{n-1} \ldots f_1)) \leq b - b = 0$ logo a composta é nula.

Fazendo a indução: para $k = 1$, como f não é isomorfismo tenho que: ou $Imf_1 \neq M_2$ ou $Imf_1 = M_2$ mas $kerf_1 \neq 0$.

Se $Imf_1 \neq M_2$ então $\ell(Imf_1) < \ell(M_2) \leq b$, logo $\ell(Imf_1) \leq b - 1$.

Se $Imf_1 = M_2 \cong M_1/kerf_1$ mas $kerf_1 \neq 0$, então

$\ell(Imf_1) = \ell(M_2) = \ell(M_1/kerf_1) < \ell(M_1) \leq b$, logo $\ell(Imf_1) \leq b - 1$.

Sejam

$$f = f_{2^k-1} \ldots f_1$$

$$g = f_{2^k}$$

$$h = f_{2^{k+1}-1} \ldots f_{2^k+1}.$$

$$M_1 \xrightarrow{f} M_{2^k} \xrightarrow{g} M_{2^k+1} \xrightarrow{h} M_{2^{k+1}}$$

Suponhamos que a fórmula vale para k, ou seja

$$\ell(Imf) \leq b - k, \ell(Imh) \leq b - k$$

$$g\ f = f_{2^k} f_{2^k-1} \ldots f_1.$$

$$h\ g = f_{2^{k+1}-1} \ldots f_{2^k+1} f_{2^k}.$$

$$h\ g\ f = f_{2^{k+1}-1} \ldots f_{2^k} \cdot f_{2^k-1} \ldots f_1.$$

queremos provar que $\ell(Im(h\ g\ f)) \leq b - (k+1)$.

Se $f, g, h, g\ f, h\ g, h\ g\ f$ são nulas nada há a demonstrar.

Logo, suponho que $f, g, h, g\ f, h\ g, h\ g\ f$ são não nulas.

Como $Im(g\ f) = Im(g_{|Imf})$, então $\ell(Im(g\ f)) \leq \ell(Imf)$.

Segue daí que $\ell(Im(h\ g\ f)) \leq \ell(Imf) \leq b-k$.

Suponhamos por absurdo que $\ell(Im(h\ g\ f)) = \ell(Imf) = b-k$.

Neste caso, $g_{|Imf}$ e $h_{|Im(g\ f)}$ são monomorfismos e portanto $kerg \cap Imf = 0$, $kerh \cap Im(g\ f) = 0$.

Por outro lado, $\ell(Im(h\ g\ f)) \leq \ell(Im\ h) \leq b-k$ implica que $\ell(Im\ h) = \ell(Im(h\ g)) = b-k$. Como, para qualquer homomorfismo $\varphi : A \longrightarrow B$ tem-se que $\ell(A) = \ell(Im\ \varphi) + \ell(ker\ \varphi)$ obtemos:

$$\ell(ker(h\ g)) = \ell(M_{2^k}) - (b-k).$$

$$\ell(kerh) = \ell(M_{2^k+1}) - (b-k).$$

Portanto $M_{2^k} = Imf \oplus ker(h\ g)$ e $M_{2^k+1} = Im(g\ f) \oplus ker\ h$.

Como os M_i são indecomponíveis, resulta que

$$ker(h\ g) = 0$$

$$ker\ h = 0.$$

Agora, como hg é um monomorfismo e gf é um epimorfismo isto implica que g é um isomorfismo.

Absurdo.

Logo $\ell(Im\ (h\ g\ f)) < b-k$ e portanto $\ell(Im\ (h\ g\ f)) \leq b-k-1 = b-(k+1)$.

Def 2.4 [M] Uma seqüência exata $0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \longrightarrow 0$ em Λ-*mod* é uma seqüência que quase cinde se as seguintes condições se verificam:

a) a seqüência não cinde;

b) A e C são indecomponíveis;

c) Se $f : X \to C$ não é um epimorfismo que cinde (ou seja, não existe $g : C \to X$ tal que $f\ g = 1_c$) então f se levanta a B (ou seja, $\exists h : X \to B$ tal que $p\ h = f$);

c') Se $g : A \to Y$ não é um monomorfismo que cinde (ou seja, não existe $f : Y \to A$ tal que $f\ g = 1_A$) então g se estende a B(ou seja, $\exists j : B \to Y$ tal que $j\ i = g$).

Observação: Na verdade, uma das condições *c)*, *c')* pode ser omitida, pois é fácil provar que *a),b),c)* $\Rightarrow$ *c')* e, dualmente, *a),b),c')* $\Rightarrow$ *c)*.

Vamos agora enumerar certas propriedades das seqüências que quase cindem, também chamadas de seqüências de Auslander Reiten e denotadas por A.R.S.

Teorema 2.4 : *Para cada Λ-módulo indecomponível $A(C)$ não injetivo (não projetivo) em Λ-mod existe uma seqüência que quase cinde $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ que é única salvo isomorfismos.*

Se na seqüência que quase cinde escrevemos $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ e $B = \oplus B_i$ com B_i indecomponível para todo i, então todos os morfismos induzidos $A \longrightarrow B \longrightarrow B_i$ tem a propriedade que se o diagrama

$$\begin{array}{ccccc} A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & B_i \\ & \searrow f & & \nearrow g & \\ & & D & & \end{array}$$

comuta, então ou f é um monomorfismo que cinde ou g é um epimorfismo que cinde. Isto sugere a seguinte definição:

Def. 2.5 Uma função $f : B \longrightarrow C$ em Λ-*mod* é dita irredutível se não é nem um epimorfismo que cinde, nem um monomorfismo que cinde e onde quer que tenhamos $f = g\ h$ para algum $h : B \longrightarrow D$ e $g : D \longrightarrow C$ ou h é um monomorfismo que cinde ou g é um epimorfismo que cinde (em particular, f não é um isomorfismo !).

Proposição 2.5 : *Seja Λ uma álgebra de Artin e A um Λ-módulo indecomponível.*

Então:

a) Todos os morfismos irredutíveis entre módulos indecomponíveis são monomorfismos próprios ou epimorfismos próprios (ou seja, que não são isomorfismos).

b) Se A é não injetivo, então existe um morfismo irredutível $f : A \longrightarrow B'$ se e só se f é da forma $f = p\ f_1$ onde $p : B \longrightarrow B'$ é um epimorfismo que cinde e $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f_1} B \xrightarrow{f_2} C \longrightarrow 0$ é a A.R.S. que começa em A.

b') Se A não é projetivo existe um morfismo irredutível $f : B' \longrightarrow A$ se e somente se $f = j\ f_2$ onde $j : B' \longrightarrow B$ é monomorfismo que cinde e $0 \longrightarrow C \xrightarrow{f_1} B \xrightarrow{f_2} A \longrightarrow 0$ é a A.R.S. que termina em A.

c) Se A é injetivo, existe um morfismo irredutível $f : A \longrightarrow B'$ se e só se f é da forma $f = p\ c$ onde $c : A \longrightarrow A/socA$ é o epimorfismo canônico e $p : A/socA \longrightarrow B'$ é um epimorfismo que cinde.

c') Se A é projetivo então existe um morfismo irredutível $f : B' \longrightarrow A$ se e só se f é da forma $f = i\ j$ onde $i : radA \longrightarrow A$ é o monomorfismo canônico e $j : B' \longrightarrow radA$ é um monomorfismo que cinde.

Dem:

a) Seja $f : A \longrightarrow B$ irredutível, e consideremos a fatoração canônica

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & B \\ & A/Kerf \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd}$$

Como i é um monomorfismo, se i for também um epimorfismo, então será um isomorfismo, logo f será um epimorfismo.

Por outro lado, se p for um monomorfismo, como é um epimorfismo, será um isomorfismo, logo f será um monomorfismo.

b) Suponhamos A não injetivo e $f : A \longrightarrow B'$ irredutível.

Então seja

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f"] & B \arrow[r, "f_2"] \arrow[dl, "p"] & C \arrow[r] & 0 \quad ARS \\ & B' & & & \end{tikzcd}$$

Como f é irredutível, f não é um monomorfismo que cinde logo existe $p : B \longrightarrow B'$ tal que $f = p\ f_1$. Como f é irredutível e f_1 não cinde temos que p é um epimorfismo que cinde.

Por outro lado, suponhamos que $f = p\ f_1$ onde $p : B \longrightarrow B'$ em um epimorfismo que cinde. Para provar que f é irredutível, vamos supor que $p\ f_1 = g\ h$, onde h não é um monomorfismo que cinde.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "h"] & B \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "p"] \arrow[dl, "\overline{h}"] & C \arrow[r] \arrow[dl, "k"] & 0 \\ & X \arrow[r, "g"] & B' \arrow[u, bend left, "\omega"] & & \end{tikzcd}$$

Queremos provar que g é um epimorfismo que cinde. Como p é um epimorfismo que cinde, $\exists \omega : B' \longrightarrow B$ tal que $p\ \omega = 1_{B'}$.

Como h não é um monomorfismo que cinde, h se estende a B por $\overline{h}$ tal que

$\overline{h}\ f_1 = h$.

$g\ \overline{h}\ f_1 = g\ h = p\ f_1$.

Logo $g\ \overline{h}\ f_1 - p\ f_1 = 0$.

Ou seja $(g\ \overline{h} - p)\ f_1 = 0$.

Então, $\exists! k : C \longrightarrow B'$ tal que $g\overline{h} - p = k\ f_2$.

Logo $(g\overline{h} - p)\ \omega = k\ f_2\ \omega$.

$g\overline{h}\omega - p\ \omega = kf_2\omega$.

Supondo B' indecomponível, então $End(B')$ é um anel local. Como $g\overline{h}\omega - kf_2\omega = 1_{B'}$ temos que ou $g\overline{h}\omega$ é um automorfismo de B', ou $kf_2\omega$ é um automorfismo de B'. (pois se ambos fossem nilpotentes, estariam no radical de $EndB'$ e a soma não poderia ser a identidade).

Se $g\overline{h}\omega$ for um automorfismo então $g\overline{h}\omega = \varphi$ e $g\overline{h}\omega\varphi^{-1} = 1_{B'}$ logo g é um epimorfismo que cinde.

Veremos agora que $kf_2\omega$ não pode ser um automorfismo. Suponhamos que $kf_2\omega = \varphi \in Aut(B')$ e seja $j = f_2\ \omega : B' \longrightarrow C$ então $kj = \varphi \Rightarrow \varphi^{-1}kj = 1_{B'}$.

Portanto j é um monomorfismo que cinde. Como C é indecomponível, j é um isomorfismo.

Mas $j = f_2\omega$ e então f_2 cinde. Absurdo !

Com isso, provamos que nenhuma componente de B é isomorfa à A e dualmente, nenhuma componente de B é isomorfa a C. No caso geral, se considerarmos $B' = \overset{\oplus}{j} B'_j$, B'_j indecomponíveis, $i_j : B'_j \longrightarrow B'$ a injeção natural $\Pi_j : B' \longrightarrow B'_j$ a projeção natural teremos que

$$k\ f_2\omega = \sum_{j,l} i_j \Pi_j k f_2 \omega i_l \Pi_l$$

e como $\Pi_j k f_2 \omega i_l : B'_l \longrightarrow B'_j$ se fatora através de C que não é isomorfo a nenhum deles, cada componente de $kf_2\omega$ está no radical de $End\ B'$!

Portanto $g\overline{h}\omega = 1 + kf_2\omega$ é um automorfismo de B' e g é um epimorfismo que cinde.

c) Suponhamos A projetivo indecomponível e $f : B' \longrightarrow A$ irredutível, f não pode ser epimorfismo, e então como $f(radB') \subset radA$, f induz um morfismo $\overline{f} : \frac{B'}{radB'} \longrightarrow \frac{A}{radA}$ que não pode ser epimorfismo, (pois senão contradiria o lema de Nakayama). Mas A é proj indecomponível $\Rightarrow \frac{A}{radA}$ é simples, logo como $Im\overline{f} \neq \frac{A}{radA}$ temos $\overline{f} = 0$.

Logo

$$f(B') \subset radA \Rightarrow \begin{array}{ccc} B' & \xrightarrow{f} & A \\ \searrow j & & \nearrow i \\ & radA & \end{array}$$

então $f = i\ j$, como i não pode cindir, j é um monomorfismo que cinde. Reciprocamente, seja $f : B' \longrightarrow A$ tal que $f = i\ j$ onde $j : B' \longrightarrow radA$ é um monomorfismo que cinde e $i : radA \longrightarrow A$.

Então:

$$\begin{tikzcd} B' \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "h"'] & radA \arrow[r, "i"] \arrow[l, bend right, "\omega"'] & A \\ & X \arrow[u, "g^*"'] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

como j é um monomorfismo que cinde, $\exists \omega : radA \longrightarrow B'$ tal que $\omega\ j = 1_{B'}$.

Suponhamos que $f = g\ h$, se g for epimorfismo, imediatamente cinde.

Se g não for epimorfismo, temos, como antes, que g se fatora através do $radA$, $i\ g^* = g$.

Como $gh = ij \Rightarrow ig^*h = ij \Rightarrow i(g^*h - j) = 0$. Como i é um monomorfismo então $g^*h - j = 0$.

Neste caso, $g^*h = j \Rightarrow \omega g^*h = \omega j = 1_{B'}$ então h é um monomorfismo que cinde.

Observação: Seja A um Λ-*módulo* à esquerda indecomponível. Se A não é injetivo, seja $A \xrightarrow{f_1} A$ o monomorfismo da A.R.S. que começa em A. Se A é injetivo seja f_1, o epimorfismo canônico $A \longrightarrow A/soc\ A$. Dado $f : A \longrightarrow B$ que não é um monomorfismo que cinde, sabemos que f se fatora através de f_1 no primeiro caso. Mas isto também é verdade no segundo caso. Com efeito, se A é injetivo, $soc\ A$ é simples e, se f não é um monomorfismo que cinde, f não é um monomorfismo. Portanto, $f(soc\ A) = 0$ e f se fatora através de f_1.

Def. 2.6 Este homomorfismo f_1, dado pela observação acima, chama-se *aplicação fonte* de A ou com domínio A.

Como um corolário trivial segue que:

Corolário 2.6 : *Seja Λ uma álgebra de Artin, então para todo Λ-mod A indecomponível existe apenas um número finito de módulos indecomponíveis não isomorfos B que admitem morfismos irredutíveis $f : A \longrightarrow B$.*

Dem: Decorre da proposição acima, lembrando que as A.R.S. são únicas a menos de isomorfismo.

3. RESULTADOS INTERMEDIÁRIOS

A prova do "passo de indução" de Smalø se baseia na existência de cadeias $\ldots \longrightarrow M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \ldots$ de módulos e morfismos entre eles que satisfaçam as condições do lema de Harada e Sai.

Def. 3.1 Sejam A e B módulos indecomponíveis em Λ-*mod*. Dizemos que A e B estão ligados por morfismos irredutíveis se existe uma cadeia de módulos indecomponíveis e morfismos irredutíveis $f_i : M_i \longrightarrow M_{i+1}$ tais que,para algum n e algum m, com $n > m$, $A \cong M_n$, $B \cong M_m$ e $f_n \circ \ldots \circ f_m$ é diferente de zero. Dizemos então que esta cadeia liga A e B.

Lema 3.1 : *Seja A um módulo indecomponível em Λ-mod. Então, salvo isomorfismo, existe apenas um número finito de módulos indecomponíveis B que estão ligados a A por cadeias tais que os comprimentos dos seus módulos são limitados por um inteiro n.*

Dem: Seja a cadeia

$$\begin{array}{ccccccccc} M_{n-1} & \xrightarrow{f_{n-1}} & M_n & \xrightarrow{f_n} & M_{n+1} & \longrightarrow & \ldots & M_{n+r} & \longrightarrow \\ & & \cong & & & & & \cong & \\ & & A & & & & & B & \end{array}$$

Salvo isomorfismos, o número de possibilidades para M_{n+1} é finito pelo corolário 2.6. Segue por indução que isso é verdade para todos os M_{n+t}.

Por outro lado, se os módulos de uma cadeia que liga B a A tem comprimento limitado, pelo lema de Harada e Sai a cadeia tem comprimento limitado. Portanto, o número de módulos B também é finito.

Proposição 3.2 : *Sejam A e B módulos indecomponíveis tais que existe um morfismo não nulo, não isomorfismo $f : A \longrightarrow B$ que não é uma soma de composições de morfismos irredutíveis. Então existe uma cadeia infinita $A \xrightarrow{f_0} A_1 \xrightarrow{f_1} A_2 \ldots$ de módulos indecomponíveis A_i e morfismos irredutíveis $f_i : A_i \longrightarrow A_{i+1}$ tal que qualquer composta $f_i \ldots f_0$ é não nula para todo i.*

Dem: Temos que $f : A \longrightarrow B$ não é um monomorfismo que cinde (pois se fosse, A seria somando direto de B, como ambos são indecomponíveis, e f não é isomorfismo isso não pode ocorrer).

Ao longo da demonstração chamaremos de sucessor de C, denotado por $S(C)$ ao módulo que é contradomínio da aplicação fonte de S (ver definição 2.6). Então $f : A \longrightarrow B$ se fatora através de $S(A)$.

Consideremos o diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h_0"] \arrow[d, "f"] & S(A) \arrow[dl, "g_0"] & = & \coprod_i A_{i,0} \\ B & & & \end{tikzcd}$$

onde h_0 é a aplicação fonte de A e onde $\coprod_i A_{i,0}$ é uma decomposição de $S(A)$ em soma direta de módulos indecomponíveis.

Denotemos por $j_i : A_{i,o} \longrightarrow S(A)$ a inclusão e por $p_i : S(A) \longrightarrow A_{i,o}$ a projeção canônicas correspondentes.

Então $h_{i,0} = p_i h_0 : A \longrightarrow A_{i,0}$ são as componentes irredutíveis de h_0 e $g_{i,0} = g_0 j_i : A_{i,0} \longrightarrow B$ as componentes de g_0.

A seguir definimos $f_1 = f - \coprod g_{i,0} h_{i,0}$ onde a soma é dos termos tais que $g_{i,0}$ é isomorfismo ou morfismo irredutível. Como f não é soma de compostas de irredutíveis $f_1 \neq 0$ e além disso $f_1 = \coprod g_{i,0} h_{i,0}$ onde a soma é tomada sobre os índices i's tais que $g_{i,0}$ não é nem morfismo irredutível nem isomorfismo. Estes componentes $g_{i,0}$ não são monomorfismos que cindem.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "h_0"] \arrow[d, "f_1"] & \coprod A_{i,0} \arrow[r] \arrow[dl, "\coprod g_{i,0}"] & S(A) \arrow[dl, "\hat{g}_0"] \\ B & & \end{tikzcd}$$

Então cada $g_{i,0}$ desta família pode se fatorar através da aplicação fonte $h_{i,1}$ de $A_{i,0}$.

$$\begin{tikzcd} A_{i,0} \arrow[r, "h_{i,1}"] \arrow[d, "g_{i,0}"] & S(A_{i,0}) \arrow[dl, "g_{i,1}"] & = & \bigoplus_{k_1} A_{i,k_1} \\ B & & & \end{tikzcd}$$

Tomando então a soma temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
\overset{\oplus}{i} A_{i,0} \arrow[r] \arrow[d, "p_{i,0}"] & \overset{\oplus}{i} S(A_{i,0}) \arrow[d] & = & \overset{\oplus}{i}(\overset{\oplus}{k_1} A_{i,k_1}) \\
A_{i,0} \arrow[r, "h_{i,1}"] \arrow[d, "g_{i,0}"] & S(A_{i,0}) \arrow[dl, "g_{i,1}"] & = & \overset{\oplus}{k_1} A_{i,k_1} \\
B & & &
\end{tikzcd}$$

Seja h_i a soma direta das aplicações fonte $h_{i,1}$ e seja $g_i : \oplus S(A_{i,0}) \longrightarrow B$ o homomorfismo definido pelos $g_{i,1}$. Temos

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "h_0"] \arrow[dr, "f_1"] & \oplus A_{i,0} \arrow[r, "h_1"] \arrow[d, "\hat{g}_0"] & \oplus S(A_{i,0}) = \overset{\oplus}{i}(\overset{\oplus}{k_i} A_{i,k}) \arrow[dl, "g_1"] \\
& B &
\end{tikzcd}$$

Observamos que existe um i e um $k \in k_i$ tais que a componente correspondente $g_{i,k}$ de g_1 é diferente de zero e não é composta de irredutíveis e tais que a componente de $h_1 h_0$ define uma cadeia $A \longrightarrow A_{i,0} \longrightarrow A_{i,k}$ cuja composta é não nula.

Agora podemos repetir o argumento tomando $A_{i,k}$ no lugar de A e $g_{i,k}$ no lugar de f_1.

Isto prova a proposição por indução.

Corolário 3.3: *Seja Λ uma álgebra de Artin de tipo finito. Então todos os morfismos entre módulos indecomponíveis são somas de compostas de morfismos irredutíveis ou isomorfismos.*

Dem: Suponhamos por absurdo que exista um morfismo $f : A \longrightarrow B$ não nulo, que não é soma de compostas de irredutíveis e não é um isomorfismo, onde A e B são indecomponíveis. Então, pelo lema anterior podemos produzir uma cadeia infinita de morfismos irredutíveis entre módulos indecomponíveis cuja composta é não nula. Mas pelo lema 3.1 temos que não há limitação no comprimento de módulos finitamente gerados, o que nos dá a desejada contradição.

Agora a 1ª conjetura de Brauer Thrall para álgebras de Artin segue facilmente.

Teorema 3.4 : *Seja Λ uma álgebra de Artin de tipo infinito. Então não existe uma limitação no comprimento dos Λ-módulos indecomponíveis, finitamente gerados.*

Dem: Seja Λ de tipo infinito e $\{M_i\}$ uma família infinita de módulos indecomponíveis finitamente gerados e não isomorfos. Então como existem apenas um número

finito de Λ-módulos simples (que são aliás os da decomposição de $\Lambda/rad\Lambda$ em simples) existe um Λ-módulo simples S que é somando direto de $M_i/radM_i \cong \frac{M_i}{R.M_i}$ $(R = rad\Lambda)$ para infinitos módulos M_i da família $\{M_i\}$. Então temos que existem infinitos módulos M_i indecomponíveis e não isomorfos e infinitos morfismos não nulos $M_i \longrightarrow S$ sobre o mesmo módulo simples S. Agora se todos esses morfismos fossem somas de compostas de morfismos irredutíveis existiriam cadeias ligando cada M_i a S. Pelo lema 3.1, o comprimento dessas cadeias seria limitado e, pelo corolário 2.6, o número dos M_i seria finito. Portanto, a proposição 3.2 é aplicável e isto novamente conduz, pelo lema 3.1, a uma contradição.

4. O PASSO DE INDUÇÃO

Pelo teorema 2.4, dado o Λ-módulo A, indecomponível não injetivo, o módulo C que completa a seqüência que quase cinde $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ é único salvo isomorfismo.

A seguir indicamos como calcular C (na seqüência que quase cinde $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$).

Seja Λ uma álgebra, R o seu centro, e $I_0(R/radR)$ a envolvente injetiva de $R/radR$. Então definimos $D(A) = Hom_R(A, I_0(R/radR))$, $D : \Lambda\text{-}mod \longrightarrow \Lambda^{op}\text{-}mod$.

É bem conhecido que D é uma dualidade (chamada dualidade usual) tal que $D^2 \cong id$.

Além disso, se $M \in \Lambda\text{-}mod$, seja $P_1 \xrightarrow{f} P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$ uma resolução projetiva minimal, então o módulo $coker f^* \in \Lambda^{op}\text{-}mod$ é dito transposta de M e denotado por TrM. (Aqui, $*$ indica a dualidade $Hom_\Lambda(-, \Lambda)$ entre projetivos de Λ e projetivos de Λ^{op}). Então, dado A não injetivo, o módulo C que aparece na A.R.S. que começa em A é $C = TrDA$.

Se A é não injetivo, DA é não projetivo, $TrDA$ é bem definido e está determinado salvo isomorfismos.

Precisamos ainda de mais um lema:

Lema 4.1 : *Seja Λ uma álgebra de Artin , A e B Λ-módulos indecomponíveis, finitamente gerados e suponhamos que exista $f : A \longrightarrow B$ morfismo irredutível, então: $|\ell(A) - \ell(B)| \leq \ell(A)m^2$ onde $m = max\{\ell(\Lambda_\Lambda), \ell({}_\Lambda\Lambda)\}$.*

Dem: Se M,N,L são Λ-módulos finitamente gerados e $0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow L \longrightarrow 0$ é exata então $\ell(M) + \ell(L) = \ell(N)$.

Se $f : A \longrightarrow B$ é irredutível e A é injetivo então f é um epimorfismo e portanto $|\ell(A)$ - $\ell(B)| \leq \ell(A) \leq \ell(A)m^2$.

Se $f : A \longrightarrow B$ é irredutível e A é não injetivo então B é somando direto de C onde $0 \longrightarrow A \longrightarrow C \longrightarrow Tr\ DA \longrightarrow 0$ é a A.R.S. que começa em A.

Neste caso então $\ell(C) = \ell(A) + \ell(Tr\ DA)$ e portanto $\ell(B) \leq \ell(A) + \ell(Tr\ DA)$.

Se $\ell(B) > \ell(A)$, $\ell(B) - \ell(A) \leq \ell(Tr\ DA)$; se $\ell(B) \leq \ell(A)$,$\ell(A) - \ell(B) \leq \ell(A)$.

Portanto $|\ell(A) - \ell(B)| \leq max\{\ell(A), \ell(Tr\ DA)\}$.

Provemos primeiro que $\ell(A) = \ell(DA)$ por indução em $\ell(A)$.

Suponhamos por absurdo que A seja simples e DA não. Então, existe uma seqüência exata de Λ^{op}-*módulos* $0 \longrightarrow X \longrightarrow DA \longrightarrow Y \longrightarrow 0$ com $X, Y \neq 0$. Logo $0 \longrightarrow DY \longrightarrow DDA \longrightarrow DX \longrightarrow 0$ é exata e $DX, DY \neq 0$. Como $DDA \cong A$ isto não pode acontecer. Então DA é simples. Suponhamos agora que a hipótese acima é válida para $\ell(A) < n$ e seja A tal que $\ell(A) = n$. Existe uma seqüência exata $0 \longrightarrow X \longrightarrow A \longrightarrow Y \longrightarrow 0$ com $X, Y \neq 0$.

Então $0 \longrightarrow DY \longrightarrow DA \longrightarrow DX \longrightarrow 0$ é exata e $DX, DY \neq 0$ o que implica que $\ell(DA) = \ell(DY) + \ell(DX) = \ell(Y) + \ell(X) = \ell(A)$.

Para limitar $\ell(TrDa)$ consideremos: $P_1 \xrightarrow{f} P_0 \xrightarrow{g} DA \longrightarrow 0$, uma resolução projetiva minimal.

Então $Tr\ DA = coker f^* = \frac{Hom(P_1,\Lambda)}{Im f^*}$ logo $\ell(Tr\ DA) \leq \ell(Hom(P_1, \Lambda))$. Ora, $P_1 = \bigoplus_{i=1}^{n} P_i$,$P_i$ indecomponíveis, é também cobertura projetiva de $\frac{kerg}{rad(kerg)}$ e portanto $n = \ell(\frac{kerg}{rad(kerg)}) \leq \ell(P_0)$.

Como $Hom(P_1, \Lambda)$ é um projetivo indecomponível de Λ_Λ, $\ell(Hom(P_1, \Lambda)) \leq \ell(\Lambda_\Lambda)$ e então $\ell(Hom(P_1, \Lambda)) \leq n.\ell(\Lambda_\Lambda) \leq \ell(P_0)\ell(\Lambda_\Lambda)$.

Analogamente, se $P_0 = \bigoplus_{k=1}^{m} P'_k$, então $m \leq \ell(DA)$.

Portanto $\ell(P_0) \leq \ell(DA).\ell({}_\Lambda\Lambda)$.

Então $\ell(Tr\ DA) \leq \ell(P_0)\ell(\Lambda_\Lambda) = \ell(DA)\ell({}_\Lambda\Lambda).(\Lambda_\Lambda)$, ou seja $\ell(Tr\ DA) \leq \ell(A)m^2$ onde $m = max\{\ell(\Lambda_\Lambda), \ell({}_\Lambda\Lambda)\}$.

Finalmente obtemos: $|\ell(A) - \ell(B)| \leq max\{\ell(A), \ell(Tr\ DA)\} \leq \ell(A)m^2$.

Teorema 4.2 : *Seja $\aleph$ um número cardinal infinito, $\aleph \geq \aleph_0$. Suponha que Λ é uma álgebra de Artin tal que existem $\aleph$ módulos indecomponíveis finitamente gerados de comprimento n não isomorfos.. Então existem infinitos inteiros positivos n_i tais que existem $\aleph$ módulos indecomponíveis finitamente gerados não isomorfos de comprimento n_i.*

Dem: Seja n um inteiro positivo tal que existe uma família $\{M_i\}_{i \in I}$ de $\aleph$ módulos finitamente gerados não isomorfos indecomponíveis de comprimento n.

Se conseguirmos uma função crescente $f : Z \longrightarrow Z$ tal que para cada $m \in Z_+, m \geq n$ o intervalo $]m, f(m)]$ for não vazio e houver $\aleph \geq \aleph_0$ módulos finitamente gerados

indecomponíveis não isomorfos cujos comprimentos pertençam a $]m, f(m)]$, como o intervalo é finito, existirá um $m^* \in]m, f(m)] \subseteq Z$ com $\aleph \geq \aleph_0$ módulos finitamente gerados indecomponíveis não isomorfos de comprimento m^* e com isso teremos provado o teorema.

Vamos agora fazer por partes:

Seja $\{M_i\}_{i \in I}$ a família de $\aleph \geq \aleph_0$ módulos finitamente gerados indecomponíveis não isomorfos de comprimento n.

Sabemos que o número de Λ-módulos simples é finito e portanto existe um Λ-módulo simples S que é somando direto de $\frac{M_i}{RM_i}$ para $\aleph$ dos M_i's. Portanto existem morfismos não nulos, não isomorfismos $f_i : M_i \longrightarrow S$ para $\aleph$ dos M_i's. Logo é suficiente considerar apenas 2 casos já que ao menos um deles ocorre:

a) $\aleph$ dos morfismos $f_i : M_i \longrightarrow S$ não são somas de compostas de irredutíveis.

b) $\aleph$ dos morfismos $f_i : M_i \longrightarrow S$ são somas de compostas de irredutíveis.

Pela proposição 3.2 e pelo corolário 2.6, dado um número natural N, existem nos dois casos $\aleph$ indecomponíveis M_i's ligados a S por uma cadeia de comprimento maior ou igual a N. Obtemos então a cadeia $M_i \longrightarrow M_{i,1} \longrightarrow M_{i,2} \longrightarrow \ldots$

Mostraremos que os módulos $M_{i,j}$ obtidos em cada cadeia, não podem aparecer senão num número finito de cadeias. Suponhamos por absurdo que um módulo $M_{i,j}$ apareça num número infinito de cadeias. Então ele estaria ligado por cadeias de comprimento limitado a infinitos M_i's. Como os M_i's são não isomorfos, isso não pode acontecer.

Então, se para cada cadeia obtivermos um módulo $M_{i,j}$ de comprimento n^*, teremos conseguido $\aleph$ módulos não isomorfos de comprimento n^*.

Vamos agora construir a função $f : Z \longrightarrow Z$.

Seja $M_{i,0} = M_i \longrightarrow M_{i,1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow \ldots M_{i,N}$ uma cadeia com $\ell(M_i) = n$, $m \geq n$ e $N = 2^m - 1$.

Se tivéssemos $\ell(M_{i,j}) \leq m$ para todo $j = 0, 1, \ldots, 2^m - 1$ teríamos a composta nula pelo lema de Harada e Sai, logo como a cadeia tem composta não nula, teremos obrigatóriamente pelo menos um módulo $M_{i,j}$ de comprimento $\ell(M_{i,j}) > m$.

Vamos agora limitar superiormente o comprimento dos módulos $M_{i,j}$ com $j = 0, 1, 2, \ldots, 2^m - 1$.

Pelo lema 4.1 tenho que

$$|\ell(M_{i,1}) - \ell(M_{i,0})| \leq \ell(M_{i,0})p^2 = np^2$$

onde $p = max\{\ell({}_\Lambda\Lambda), \ell(\Lambda_\Lambda)\}$, chamando $\ell_j = \ell(M_{i,j})$ então $|\ell_i - \ell_{i-1}| \leq \ell_{i-1}p^2 \Rightarrow$

$\ell_i \leq \ell_{i-1}.p^2 + \ell_{i-1} = (\ell_{i-1})(p^2+1)$.

$|\ell_1 - \ell_0| \leq n.p^2 \Rightarrow \ell_1 \leq n.(p^2+1)$

$|\ell_2 - \ell_1| \leq \ell_1.p^2 \leq n(p^2+1).p^2$

$\ell_2 \leq n(p^2+1).p^2 + \ell_1 = n.(p^2+1).p^2 + n(p^2+1) = n(p^2+1)^2$.

E assim $l_j \leq n(p^2+1)^{j-1}$ e para $j = 2^m - 1$.

$\ell(M_{i,2^m-1}) \leq n.(p^2+1)^{2^m-2}$.

Portanto, podemos definir $f(m) = max\left\{m+1, n.(p^2+1)^{2^m-2}\right\}$.

Como uma conseqüência simples deste teorema, obtemos a conjetura de Brauer Thrall $1\frac{1}{2}$.

Corolário 4.3 : *Seja Λ uma álgebra de Artin. Se o número de Λ-módulos indecomponíveis finitamente gerados não isomorfos é $\aleph \geq \aleph_0$, então para cada n inteiro positivo o número de Λ-módulos indecomponíveis finitamente gerados não isomorfos de comprimento maior que n é $\aleph$.*

Dem: Suponhamos por absurdo que para certo n, o número de módulos finitamente gerados indecomponíveis não isomorfos de comprimento maior que n é menor que $\aleph$.

Neste caso, o número de módulos indecomponíveis de comprimento menor ou igual a n é $\aleph$. Então existe um m menor ou igual a n tal que existem $\aleph \geq \aleph_0$ indecomponíveis de comprimento m.

Pelo teorema 4.2, temos então que existem infinitos inteiros n_i maiores do que m tais que existem $\aleph$ módulos indecomponíveis de comprimento n_i. Porém, não pode ocorrer que todos esses n_i sejam menores ou iguais a n. Assim chegamos a uma contradição.

5. UM POUCO DA TEORIA DE RETICULADOS

Passamos agora a preparar a apresentação de importantes resultados obtidos por Jans em 1957.

O resultado principal a ser provado no capítulo 6 afirma o seguinte:

Seja Λ uma k-álgebra de dimensão finita sobre um corpo k algebricamente fechado. Se o reticulado de seus ideais bilaterais não é distributivo (e portanto infinito) então Λ é de tipo fortemente não limitado.

Os resultados obtidos neste capítulo se referem às propriedades de reticulados de ideais, espaços vetoriais ou submódulos. Assim, a notação está adaptada a este caso.

Apesar de que as hipóteses nestes capítulos são mais restritivas do que nos capítulos anteriores, pois se referem a álgebras sobre um corpo algebricamente fechado, estes resultados reduzem sensivelmente a demonstração da conjetura de Brauer Thrall II ao caso em que a k-álgebra considerada tem apenas um número finito de ideais bilaterais. Isto significa inclusive que se e_i, e_j são idempotentes ortogonais primitivos de Λ, $e_i\Lambda e_j$ será um $e_i\Lambda e_i - e_j\Lambda e_j$ bimódulo uniserial cíclico sobre $e_i\Lambda e_i$ ou sobre $e_j\Lambda e_j$.

No presente capítulo, introduziremos alguns resultados sobre reticulados que serão necessários, deixando para o próximo capítulo os resultados principais.

Começamos com um teorema que daremos sem demonstração:

Teorema 5.1 (Wedderburn-Maltsev [DK]) : *Seja Λ uma k-álgebra de dimensão finita sobre k e tal que $\overline{\Lambda} = \Lambda/rad\Lambda$ seja separável. Então $\overline{\Lambda}$ é isomorfa a uma subálgebra de Λ que é complemento (como espaço vetorial) do $rad\Lambda$. (Isto é $\Lambda \cong \overline{\Lambda} \oplus rad\Lambda$ como espaços vetoriais).*

Def 5.1 Seja $\Re$ um conjunto e $\subseteq$ uma relação de ordem parcial em $\Re$. $\Re$ é um reticulado se e somente se :

Para todo $M, N \in \Re$, existe $inf(M,N) = M \cap N$ e existe $sup(M,N) = M + N$ em $\Re$.

Def 5.2 Sejam $\Re_1$ e $\Re_2$ reticulados. $\varphi : \Re_1 \longrightarrow \Re_2$ é um homomorfismo de reticulados se para quaisquer $M, N \in \Re_1$ $\varphi(inf(M,N)) = inf(\varphi(M), \varphi(N))$ e $\varphi(sup(M,N)) = sup(\varphi(M), \varphi(N))$. (Isto implica que φ preserva a relação de ordem).

Def 5.3 Seja $\Re$ um reticulado. $\Re$ é modular se e somente se para todos $X, Y, Z \in \Re$, $X \subset Z$ implica que $X + (Y \cap Z) = (X + Y) \cap Z$.

Def 5.4 Seja $\Re$ um reticulado. $\Re$ é distributivo se e somente se: $\forall X, Y, Z \in \Re$, $X \cap (Y + Z) = (X \cap Y) + (X \cap Z)$. Esta condição é equivalente a dizer que $X + (Y \cap Z) = (X + Y) \cap (X + Z)$.

Lema 5.2: *Seja $\Re$ um reticulado distributivo. Então $\Re$ é um reticulado modular.*

Dem: Sejam $X, Y, Z \in \Re$ tais que $X \subset Z$, então $(X \cap Z) + (Y \cap Z) = (X + Y) \cap Z$ e isto é: $X + (Y \cap Z) = (X + Y) \cap Z$.

Lema 5.3: *Seja V um espaço vetorial sobre um corpo k e seja $\Re$ um subreticulado do reticulado dos subespaços vetoriais de V. Então $\Re$ é modular.*

O Lema é válido para qualquer reticulado de ideais ou submódulos.

Dem: Sejam X, Y, Z subespaços vetoriais de V tais que $X \subset Z$. Queremos provar que $X + (Y \cap Z) = (X + Y) \cap Z$.

Seja $z \in X + (Y \cap Z)$, $z = x + y$ onde $x \in X$,$y \in Y \cap Z$. Como $x \in X$ implica $x \in Z$, $z \in (X + Y) \cap Z$. Logo $X + (Y \cap Z) \subset (X + Y) \cap Z$.

Reciprocamente, seja $z \in (X + Y) \cap Z$. Como $z \in X + Y$ e $z \in Z$, $z = x + y$, $x \in X$, $y \in Y$, $X \subset Z$, $y \in Y \cap Z$.

Logo $z = x + y \in X + (Y \cap Z)$. Então $(X + Y) \cap Z \subset X + (Y \cap Z)$ o que conclui a demonstração.

Vejamos agora como são os reticulados não distributivos.

Proposição 5.4 (caracterização de reticulados modulares não distributivos)[BK]: *$(\Re, \subseteq)$ é um reticulado modular, não distributivo se e somente se existe um subreticulado $\{A, B, C, D, E\} \subset \Re$ tal que:*

$A = B \cap C = B \cap D = C \cap D$

$E = B + C = B + D = C + D$,

A, B, C, D, E são distintos

(ou, equivalentemente, B, C, D são não comparáveis).

Dem: Suponhamos por absurdo que $\Re$ é distributivo e que existe $\{A, B, C, D, E\}$ como acima. Então $C = C \cap (B + C) = C \cap (B + D) = (C \cap B) + (C \cap D) =$

$(B \cap D) + (C \cap D) = (B + C) \cap D = (B + D) \cap D = D$. Logo $B = C = D = A = E$, o que contraria a hipótese. Suponhamos que $\Re$ é não distributivo. Então, existem $X, Y, Z \in \Re$ tais que $(X \cap Y) + (X \cap Z) \subset X \cap (Y + Z)$ mas $(X \cap Y) + (X \cap Z) \neq X \cap (Y + Z)$.

Sejam

$A = (X \cap Y) + (X \cap Z) + (Y \cap Z)$

$B = (Y + Z) \cap [X + (Y \cap Z)]$

$C = (X + Z) \cap [Y + (X \cap Z)]$

$D = (X + Y) \cap [Z + (X \cap Y)]$

$E = (X + Y) \cap (X + Z) \cap (Y + Z)$.

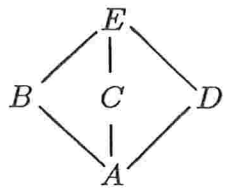
Devemos provar agora que $\{A, B, C, D, E\}$ assim definido satisfaz às condições:

1) $A = B \cap C = B \cap D = C \cap D$

2) $E = B + C = B + D = C + D$

3) B, C, D são não comparáveis

4) A, B, C, D, E são distintos: obtendo assim um diagrama da forma



1) $X \cap Y \subset X \subset X + Z$

$X \cap Y \subset Y \subset Y + (Z \cap X)$

$X \cap Y \subset C$

$X \cap Z \subset Y + (X \cap Z)$

$X \cap Z \subset X + Z$

$X \cap Z \subset C$

$Y \cap Z \subset Z \subset X + Z$

$Y \cap Z \subset Y \subset Y + (X \cap Z)$

$Y \cap Z \subset C$

então $(X \cap Y) + (X \cap Z) + (Y \cap Z) = A \subset C$.

Por simetria, temos $A \subset B$ e $A \subset D$. Vejamos que $A = B \cap C$, o resto decorre por simetria.

$B \cap C = \Big[(Y + Z) \cap [X + (Y \cap Z)]\Big] \bigcap \Big[(X + Z) \cap [Y + (X \cap Z)]\Big]$ como $Y \cap Z \subset Y + Z$ e $X \cap Z \subset X + Z$, por modularidade temos:

$$B \cap C = \Big[\big(Y \cap Z\big) + \big(X \cap (Y+Z)\big)\Big] \cap \Big[\big(X \cap Z\big) + \big(Y \cap (X+Z)\big)\Big].$$

Como $X \cap Z \subset X \cap (Y+Z) \subset \Big[\big(Y \cap Z\big) + \big(X \cap (Y+Z)\big)\Big]$, então $B \cap C = (X \cap Z) + \Big[[(Y \cap Z) + (X \cap (Y+Z))] \cap (Y \cap (X+Z))\Big]$.

Como $Y \cap Z \subset Y \cap (X+Z)$, então: $B \cap C = (X+Z) + \Big[(Y \cap Z) + (Y \cap (X+Z)) \cap \big(X \cap (Y+Z)\big)\Big] = (X \cap Z) + (Y \cap Z) + \Big(Y \cap (X+Z) \cap X \cap (Y+Z)\Big) = (X \cap Z) + (Y \cap Z) + (X \cap Y) = A$.

2) $X + Y \subset E$

$Y + (X \cap Z) \subset Y + X \subset E$ logo $(X+Z) \cap \Big(Y + (X \cap Z)\Big) = C \subset E$. Por simetria, $B, C, D \subset E$. Provemos que $B + C = E$, o resto decorre por simetria.

$B + C = \Big\{(Y+Z) \cap [X + (Y \cap Z)]\Big\} + \Big\{(X+Z) \cap [Y + (X \cap Z)]\Big\}$.

Como $X + (Y \cap Z) \subset (X+Z)$ então $(Y+Z) \cap [X + (Y \cap Z)] \subset (X+Z)$, por modularidade $B + C = (X+Z) \cap \Big\{[(Y+Z) \cap [X + (Y \cap Z)]] + [Y + (X \cap Z)]\Big\}$ mas $Y + (X \cap Z) \subset Y + Z$ então $B + C = (X+Z) \cap \Big\{(Y+Z) \cap [X + (Y \cap Z) + Y + (X \cap Z)]\Big\} = (X+Z) \cap (Y+Z) \cap (X+Y) = E$.

3) Suponhamos por absurdo que $B \subset C$. Então $A = B \cap C = B$.

$(Y \cap Z) + (X \cap Z) + (X \cap Y) = (Y \cap Z) + [X \cap (Y+Z)]$. Interceptando por $X \cap (Y+Z)$, como $(X \cap Y) + (X \cap Z) \subset X \cap (Y+Z)$ obtemos:

$\Big\{(Y \cap Z) + [X \cap (Y+Z)]\Big\} \cap \Big[X \cap (Y+Z)\Big] = X \cap (Y+Z) = [X \cap (Y+Z)] \cap [(Y \cap Z) + (X \cap Z) + (X \cap Y)] = [(X \cap Z) + (X \cap Y)] + [Y \cap Z \cap X \cap X \cap (Y+Z)] = (X \cap Z) + (X \cap Y) + (X \cap Y \cap Z) = (X \cap Z) + (X \cap Y)$ o que contraria a hipótese de não distributividade.

Lema 5.5: *Seja $\varphi : \Re \longrightarrow \Re'$ um homomorfismo de reticulados e seja $\{A, B, C, D, E\} \subset \Re$ um subreticulado como na caracterização de reticulados não distributivos. Então ou $\varphi(A) = \varphi(B) = \varphi(C) = \varphi(D) = \varphi(E)$ ou $\Big\{\varphi(A), \varphi(B), \varphi(C), \varphi(D), \varphi(E)\Big\}$ é um subreticulado de $\Re'$ com as mesmas propriedades.*

Sabemos que reticulados de subespaços vetoriais são sempre modulares. Veremos agora que esses reticulados, quando distributivos tem boas propriedades.

Proposição 5.6: *Seja V um $k-$espaço vetorial de dimensão finita e seja $\Re$ um reticulado de subespaços vetoriais de V. Se $\Re$ é distributivo, então $\Re$ é finito.*

Dem: Por indução.

Para $n \in N$, seja $A_n = \{M \in \Re | M$ é soma de um número finito de subespaços de $\Re$ de dimensão menor ou igual a $n\}$.

Para $n = 0$, $A_n = \emptyset$ ou $A_n = \{0\}$, A_n é finito.

Seja $n \in N$ e seja M maximal em A_n. $M = N_1 + \ldots + N_t$, $dimN_i \leq n$.

Seja $M' \in A_n$, então $M' + M \in A_n$ e $M \subset M' + M$. Como M é maximal $M' + M \subset M \Rightarrow M' \subset M$.

$M' = M' \cap M = M' \cap (N_1 + N_2 + \ldots + N_t) = M' \cap N_1 + M' \cap N_2 + \ldots + M' \cap N_t$ (pois $\Re$ é distributivo).

Neste caso ou $M' \cap N_i = N_i$ para alguns índices i ou $M' \cap N_i \neq N_i$ para todo i, mas então $dim(M' \cap N_i) < n$, M' é soma de elementos de dimensão $m < n$, $M' \in A_m$.

Então $A_n = \{X + Y | Y \in A_{n-1}$, X é soma de alguns dos N_i's $\}$.

Logo $|A_n - A_{n-1}|$ é finita. Como a dimensão máxima é limitada, $\Re$ é um reticulado finito.

Se considerarmos k um corpo infinito, então esta condição será necessária e suficiente.

Proposição 5.7 [Jans] : *Sejam k um corpo infinito, Λ uma $k-$álgebra de dimensão finita sobre k, M um $\Lambda-$módulo finitamente gerado sobre Λ e $\Re$ o reticulado de submódulos de M. Então $\Re$ é finito se e somente se $\Re$ é distributivo.*

Dem: Pela proposição anterior se $\Re$ é distributivo então $\Re$ é finito.

Suponhamos então que $\Re$ não é distributivo. Então, pela proposição 5.4 existe um subreticulado $\{A, B, C, D, E\}$ com as propriedades que

$A = B \cap C = B \cap D = C \cap D$ e

$E = B + C = B + D = C + D$,

B, C, D não comparáveis.

Passando ao quociente M/A podemos supor que $A = 0$.

Neste caso, $B + C = B \oplus C = E$

$B + D = B \oplus D = E$

então $C \subset B \oplus D \cong B \times D$.

Seja $p : C \longrightarrow D$ a projeção, $c \in C$ então $c = (b, d)$, $p(c) = d$.

Então $p(c) = 0$ implica que $d = 0$ ou seja $c = b$ mas $C \cap B = \{0\}$ então $b = c = 0$ logo $kerp = 0$ ou seja, p é um monomorfismo.

Além disso, $D \subset B \oplus C$ então para $d \in D$ existem $b \in B$ e $c \in C$ tal que $d = b + c$, logo $c = -b + d$ e $p(c) = d$.

Então p é um isomorfismo, portanto $C \cong D$ e similarmente, $B \cong C$ (como bimódulos !!). Vamos agora construir infinitos submódulos.

Seja $\varphi : B \longrightarrow D$ um isomorfismo.

Seja $N_\alpha = \{b + \alpha\varphi(b) | b \in B\}$, para $\alpha \in k$. N_α é um $\Lambda-$submódulo contido em $B + D$ para cada $\alpha \in k$.

Além disso, se $\alpha \neq \beta$, teremos $N_\alpha \neq N_\beta$.

Pois suponhamos que $\alpha \neq \beta$ e $N_\alpha = N_\beta$.

Então, existe para cada $b \in B$, um $b' \in B$ tal que $b + \alpha\varphi(b) = b' + \beta\varphi(b')$ mas $b - b' = \beta.\varphi(b') - \alpha\varphi(b) \in B \cap D = \{0\}$ então $b = b'$ e $\beta\varphi(b) = \alpha\varphi(b) \Rightarrow \alpha = \beta$ absurdo.

Logo os N_α são submódulos diferentes e k é um corpo infinito, portanto existem infinitos submódulos.

A partir de agora k representa um corpo algebricamente fechado. Se Λ é uma $k-$álgebra de dimensão finita sobre k algebricamente fechado, tem-se trivialmente que $\overline{\Lambda} = \Lambda/rad\Lambda$ é separável. Neste caso, sempre teremos (pelo teorema de Wedderburn-Maltsev) que $\Lambda \cong \overline{\Lambda} \oplus rad\Lambda$, a soma tomada como $k-$espaços vetoriais. Além disso, podemos supor também que Λ é uma álgebra básica, pois se Γ for uma álgebra tal que Λ é sua álgebra básica então $\Lambda-$mod e $\Gamma-$mod serão categorias Morita-equivalentes [DK].

Proposição 5.8 : *Seja Λ uma $k-$álgebra de dimensão finita e $e_1, e_2, \ldots e_n$ uma família de idempotentes primitivos ortogonais de Λ. Seja $\Re$ reticulado de ideais bilaterais de Λ.*

Então $\Re$ é distributivo se e somente se $e_i\Lambda e_j$ são uniseriais como $e_i\Lambda e_i - e_j\Lambda e_j$ bimódulos, para todo i, j.

Dem: Seja $\varphi_{i,j} : \Re \longrightarrow \Re_{i,j}$

$\varphi_{ij}(I) = e_i I e_j$ para todo i, j e para todo ideal I de $\Re$.

Então: $e_i I e_j = I \cap e_i\Lambda e_j$.

Segue daí que φ_{ij} é um homomorfismo de reticulados pois $\varphi_{ij}(I \cap J) = I \cap J \cap (e_i\Lambda e_j) = (I \cap e_i\Lambda e_j) \cap (J \cap e_i\Lambda e_j) = \varphi_{ij}(I) \cap \varphi_{ij}(J)$ e $\varphi_{ij}(I + J) = e_i(I + J)e_j = (e_iI + e_iJ)e_j = e_iIe_j + e_iJe_j = \varphi_{ij}(I) + \varphi_{ij}(J)$.

Suponhamos que $\Re$ é não distributivo: Então existe um subreticulado $\{A, B, C, D, E\}$ com as propriedades enunciadas na proposição 5.4.

Como os e_i's são uma decomposição da unidade, se tivermos $I \neq J$, existem índices i, j tais que $e_i I e_j \neq e_i J e_j$.

Como $B \neq C$, existem índices i, j tais que $\varphi_{ij}(B) \neq \varphi_{ij}(C)$ e neste caso, $\varphi_{ij}(B)$ e $\varphi_{ij}(C)$ são não comparáveis. Portanto, $e_i \Lambda e_j$ não é uniserial.

Suponhamos agora que para algum e_i, e_j, $e_i \Lambda e_j$ não seja uniserial.

Provaremos então que existem infinitos ideais, logo $\Re$ não será distributivo.

Para um ideal A, denotaremos por $A' = \varphi_{ij}(A)$.

Se $e_i \Lambda e_j$ não é uniserial, existe A_0 tal que existem 2 subbimódulos A'_1 e A'_2 em $e_i \Lambda e_j$ tais que $A'_1 \cap A'_2 = A'_0$, A'_1 e A'_2 são não comparáveis e $\frac{A'_1}{A'_0}$ e $\frac{A'_2}{A'_0}$ são bimódulos simples. Como k é algebricamente fechado, pelo teorema de Wedderburn-Maltsev temos $\Lambda \cong \overline{\Lambda} \oplus R$ onde $R = rad\Lambda$ e $\overline{\Lambda} = \Lambda / R$.

Seja $x \in A'_1 - A'_0 \subset e_i \Lambda e_j$.

Seja $Cx = \Lambda x \Lambda = (\overline{\Lambda} \oplus R) x (\overline{\Lambda} \oplus R) = \overline{\Lambda} x \overline{\Lambda} + \overline{\Lambda} x R + R x \overline{\Lambda} + R x R = kx \oplus (Rx + xR + RxR)$.

Observamos que os subbimódulos de $e_i \Lambda e_j$ se correspondem bijetivamente com os $e_i \Lambda e_i \otimes (e_j \Lambda e_j)^{op}$–submódulos. Desta forma, $\frac{A'_1}{A'_0}$ é um submódulo simples de $(e_i \Lambda e_i) \otimes (e_j \Lambda e_j)^{op}$ e portanto $rad\Big[(e_i \Lambda e_i) \otimes (e_j \Lambda e_j)^{op}\Big].\frac{A'_1}{A'_0} = 0$ ou seja, $rad\Big[(e_i \Lambda e_i) \otimes (e_j \Lambda e_j)^{op}\Big].A'_1 \subset A'_0$.

Como $rad(e_i \Lambda e_i) = e_i R e_i$ e $rad(e_j \Lambda e_j) = e_j R e_j$ então $(e_i R e_i) \otimes (e_j \Lambda e_j)^{op} \subset rad\Big[(e_i \Lambda e_i) \otimes (e_j \Lambda e_j)^{op}\Big]$ e $(e_i \Lambda e_i) \otimes (e_j R e_j)^{op} \subset rad\Big[(e_i \Lambda e_i) \otimes (e_j \Lambda e_j)^{op}\Big]$.

Neste caso

$\Big[(e_i R e_i) \otimes (e_j \Lambda e_j)^{op}\Big] x = e_i R e_i x e_j \Lambda e_j \subset A'_0$ e

$\Big[(e_i \Lambda e_i) \otimes (e_j R e_j)^{op}\Big] x = e_i \Lambda e_i x e_j R e_j \subset A'_0$.

Isto implica que $e_i(Rx + xR + RxR)e_j \subset A'_0$.

Seja B a soma dos ideais $L \subset R$ tais que $e_i L e_j \subset A'_0$, então $B \subset R$ e $Rx + xR + RxR \subset B$.

Seja $B_x = kx + B$, B_x é ideal e $B_x = kx \oplus B$.

Pois $\Lambda(B_x) = (\overline{\Lambda} \oplus R)(kx + B) = \overline{\Lambda} x + Rx + \overline{\Lambda} B + RB \subset kx + B$.

Por simetria, temos que $(B_x)\Lambda \subset B_x$. Além disso, como $x \notin A'_0$, se, por absurdo, tivessemos $x \in B$ então $x = e_i x e_j \subset e_i B e_j \subset A'_0$, absurdo. Logo $x \notin B$ o que implica que $B_x = kx \oplus B$. Se, novamente, escolhemos $y \in A'_2 - A'_0$ teremos, como antes, $B_y = ky \oplus B$.

Seja agora, para todo $\alpha \in k$, $B_\alpha = k(x + \alpha y) + B$.

B_α é um ideal e se $\alpha \neq \beta$ então $B_\alpha \neq B_\beta$, pois, suponhamos por absurdo que $\alpha \neq \beta$ e $B_\alpha = B_\beta$.

Neste caso, para todo $b \in B$, existem $c \in k$ e $b' \in B$ tais que $x + \alpha y + b = c(x+\beta y) + b'$ e então $(x+\alpha y) - c(x+\beta y) = b' - b \in B$. Então $x(1-c) + y(\alpha - c\beta) \in B$.

$e_i[x(1-c) + y(\alpha - c\beta)]e_j = (1-c)e_i x e_j + (\alpha - c\beta)e_i y e_j \in e_i B e_j \subset A'_0$.

Como A'_1 e A'_2 são submódulos isto implicaria que $(1-c)x + (\alpha - c\beta)y \in A'_1$ $(1-c)x + (\alpha - c\beta)y \in A'_2$, como $y \in A'_2$ então $(1-c)x \in A'_2$ como $x \in A'_1$ então $(1-c)x \in A'_0$ logo $1 - c = 0$, $c = 1$.

Identicamente $(\alpha - \beta)y \in A'_0$, logo $\alpha = \beta$, contradição.

Logo existem infinitos ideais distintos, portanto $\Re$ é não distributivo.

Lema 5.9: *Seja Λ uma álgebra e $e_1 \ldots e_n$ uma família de idempotentes primitivos ortogonais. Se $e_i\Lambda e_i$ for um anel local e $e_i\Lambda e_j$ for um $e_i\Lambda e_i - e_j\Lambda e_j$ bimódulo uniserial, para todo i, j então $e_i\Lambda e_i$ é da forma $\frac{k[X]}{(X^n)}$ e $e_i\Lambda e_j$ é cíclico sobre $e_i\Lambda e_i$ ou sobre $e_j\Lambda e_j$.*

Dem: Seja $T = T_i = e_i\Lambda e_i$ e $R = R_i = radT$.

Como T é uniserial, $T/R, R/R^2 \ldots R^{n-1}/R^n$ são bimódulos simples.

Como k é algebricamente fechado e $e_i\Lambda e_i$ é anel local, $T/R \cong k = \overline{T}$ então pelo teorema de Wedderburn-Maltsev tem-se que: $T \cong \overline{T} \oplus R$.

Seja $z \in R/R^2$, então $kz + R^2$ é ideal bilateral pois $T(kz+R^2) = (\overline{T} \oplus R)(kz+R^2) = \overline{T}kz + \overline{T}R^2 + Rkz + R^3 \subset kz + R^2$ pois $R^3 \subset R^2$ e $Rkz \subset R^2$.

Da mesma forma, obtemos que $(kz + R^2)T \subset kz + R^2$.

Como $R^2 \subset kz + R^2 \subset R$, mas $R^2 \neq kz + R^2$ e R/R^2 é simples então $R = kz + R^2$.

Repetindo o argumento tem-se que:

$T = k.1 + R$

$R = kz + R^2$

$R^2 = kz^2 + R^3$

$\vdots$

$R^{n-1} = kz^{n-1}$

$R^n = 0.$

Então, $T = k.1 + k.z + \ldots + k.z^{n-1}$. Portanto $T \cong k[x]/x^n$.

Sejam agora $T_i = e_i\Lambda e_i$, $\quad R_i = radT_i$,

$$T_j = e_j \Lambda e_j, \qquad R_j = radT_j.$$

Então $e_i\Lambda e_j$ é um $T_i - T_j$ bimódulo uniserial.

Consideremos $M_n \subset \ldots \subset M_1 \subset M_0 = e_i\Lambda e_j$ uma série de composição para o bimódulo $e_i\Lambda e_j$.

Seja $a \in e_i\Lambda e_j - M_1$. Como $\frac{e_i\Lambda e_j}{M_1}$ é um subbimódulo simples e $R_i \otimes (T_j)^{op} \subset rad(T_i \otimes (T_j)^{op})$ então:

$R_i \otimes (T_j)^{op}.\frac{e_i\Lambda e_j}{M_1} = 0$, o que significa que $R_i \otimes (T_j)^{op}.a = R_iaT_j \subset M_1$.

Neste caso, $R_iaT_j \subset e_i\Lambda e_j$ mas $R_iaT_j \neq e_i\Lambda e_j$.

Similarmente: $T_iaR_j \subset e_i\Lambda e_j$ mas $T_iaR_j \neq e_i\Lambda e_j$.

Como $e_i\Lambda e_j$ é uniserial, um deve conter o outro. Suponhamos então que $T_iaR_j \subset R_iaT_j$.

$e_i\Lambda e_j = ka + T_iaR_j + R_iaT_j + M_1 = ka + M_1$ pois $T_iaR_j \subset R_iaT_j \subset M_1$.

Podemos então escrever M_1 da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
M_1 = {} & kaz' + kaz'^2 + \ldots + kaz'^{m-1} \\
& + kza + kz^2a + \ldots + kz^{n-1}a \\
& + kzaz' + kz^2az' + \ldots + kz^{n-1}az' + \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + kzaz'^{m-1} + kz^2a'^{m-1} + \ldots + kz'^{n-1}az'^{m-1}.
\end{aligned}$$

Mas, se $T_iaR_j \subset R_iaT_j$, então $az' = P(z)a$ pois $az' = P'(z)aQ'(z')$ onde $P'(z) \in R_i$, logo P' não tem termo constante.

Mostraremos por indução decrescente em d que se $P_1(z) = z^dP_2(z)$ então

$$P_1(z)a.Q(z') = P_3(z)a$$

Isto é claro se $d = n-1$ (onde n é o indice de nilpotência de R_i) pois

$$z^{n-1}.P_2(z)aQ(z') =$$

$$z^{n-1}.P_2(z)a\big(\alpha + z'Q_1(z')\big) =$$

$$z^{n-1}.P_2(z)a.\alpha + z^{n-1}.P_2(z)az'Q_1(z') =$$

$$z^{n-1}.P_2(z)\alpha.a + z^{n-1}P_2(z)P'(z)aQ'(z')Q_1(z').$$

Mas $P'(z)$ não tem termo constante, logo $z^{n-1}P_2(z)P'(z)aQ'(z')Q_1(z') = 0$.

Se vale para $d+1$ e se $Q(z') = \alpha + z'Q_1(z')$ e $P_1(z) = z^d P_2(z)$ temos:

$$P_1(z)aQ(z') =$$

$$P_1(z)a\big(\alpha + z'Q_1(z')\big) =$$

$$\alpha P_1(z)a + P_1(z)P'(z)aQ'(z')Q_1(z')$$

e, neste caso, $P_1(z).P'(z) = z^{d+1}P_2'(z)$ a hipótese de indução nos permite escrever $P_1(z)aQ(z') = \alpha P_1(z)a + P_3(z)a$.

Em particular, $az' = P'(z)aQ'(z') = P(z)a$.

Então $M_1 = kza + (kz^2a + kz^3a + \ldots) = kza + N$.

Porém N é um bimódulo e é maximal em M_1, logo $N = M_2$. Com isso, obtem-se $e_i\Lambda e_j = ka + M_1$.

$M_1 = kza + M_2$

.....

$M_i = kz^ia + M_{i+1}$

Mas isto significa que $e_i\Lambda e_j$ é gerado pelo elemento a sobre $e_i\Lambda e_i$ o que conclui a demonstração.

6. SOBRE ÁLGEBRAS NÃO DISTRIBUTIVAS

Os resultados obtidos no capítulo anterior não apresentam, à primeira vista, nenhuma relação com a 2ª conjetura de Brauer Thrall . Apesar disso, poderemos com estes instrumentos provar agora o teorema de Jans que nos diz que se Λ é uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado e o reticulado de seus ideais bilaterais é não distributivo, então ela é de tipo fortemente não limitado.

Dados os resultados obtidos no capítulo 4, é suficiente mostrar que existe um inteiro positivo n para o qual existem infinitos módulos indecomponíveis, finitamente gerados, não isomorfos de comprimento n.

Observamos que k é um corpo algebricamente fechado e isto implica que o comprimento de um módulo M será igual à sua dimensão como espaço vetorial.

É bem conhecido que, dada uma k-álgebra Λ de dimensão finita, todo Λ-módulo finitamente gerado M é um k-espaço vetorial de dimensão finita e sua estrutura de módulo sobre Λ está determinada pelo homomorfismo de k-álgebras $T : \Lambda \longrightarrow End_k(M)$ definido por $T : \lambda \longrightarrow T_\lambda, T_\lambda(m) = \lambda m \quad (\forall m \in M)$ (*).

Com efeito:

$T(\alpha\beta)(m) = T(\alpha)T(\beta)(m)$

$T(\alpha + \beta)(m) = T(\alpha)(m) + T(\beta)(m)$

$T(1)(m) = m$

$T(\alpha)(m_1 + m_2) = T(\alpha)(m_1) + T(\alpha)(m_2)$

$T(\alpha)(am) = aT(\alpha)(m)$ para todos $\alpha, \beta \in \Lambda, \qquad m_1, m_2, m \in M$ e $a \in k$.

A seguir, podemos escolher uma base de M e, fixada esta base, B, teremos, para cada $\alpha \in \Lambda$ uma matriz $[T(\alpha)]$, a matriz da transformação $T(\alpha)$ na base B. A esta família de matrizes $\left\{[T(\alpha)]\right\}_{\alpha\in\Lambda}$ chamamos de representação matricial de Λ. Em outras palavras, uma representação matricial de Λ é um homomorfismo de álgebras $R : \Lambda \longrightarrow M_m(k)$.

Reciprocamente, dada uma base de um espaço V e uma representação matricial de Λ, teremos definido, através da identidade (*), uma estrutura de Λ-módulo sobre V.

Convém observar que duas representações matriciais de Λ, T e T' definem módulos isomorfos se e somente se existe uma matriz inversível U tal que $UT(\alpha) = T'(\alpha)U, \forall \alpha \in \Lambda$ ou $T'(\alpha) = UT(\alpha).U^{-1}$.

Teorema 6.1 : *Seja Λ uma k-álgebra de dimensão finita sobre um corpo k. Se o reticulado de ideais de Λ é não distributivo, então Λ é de tipo fortemente não limitado.*

Dem: Podemos supor, sem perda de generalidade, que Λ é básica.

Seja $1 = e_1 + e_2 + \ldots + e_n$ uma decomposição da unidade em idempotentes primitivos ortogonais. Como $\Re$, o reticulado de ideais bilaterais de Λ é não distributivo, existe um subreticulado $\{A, B, C, D, E\} \subset \Re$ tal que

a) B, C, D são não comparáveis.

b) $A = B \cap C = B \cap D = D \cap C$

c) $E = B + C = B + D = C + D$

Neste caso, ocorre que:

$\frac{E}{D} = \frac{B+D}{D} \cong \frac{B}{B \cap D} = \frac{B}{A}$ e $\frac{E}{D} = \frac{C+D}{D} \cong \frac{C}{C \cap D} = \frac{C}{A}$, de onde tem-se que $\varphi : \frac{B}{A} \longrightarrow \frac{C}{A}$ é um isomorfismo de Λ-bimódulos, pois os ideais considerados são bilaterais. Além disso, os k-espaços vetoriais Λ/C e Λ/B são tais que $\Lambda/B \cong \frac{\Lambda/A}{B/A} \cong \frac{\Lambda/A}{C/A} \cong \Lambda/C$ ou seja são isomorfos como k espaços vetoriais.

Mas $C/A = \frac{C}{C \cap B} = \frac{C+B}{B} \subset \Lambda/B$ e $B/A = \frac{B}{B \cap C} = \frac{B+C}{C} \subset \Lambda/C$.

Como a soma dos e_i's é a unidade de Λ, existem índices i, j tais que e_iAe_j, e_iBe_j, e_iCe_j, e_iDe_j, e_iEe_j são todos distintos.

Para $i \neq j$, temos $e_i\Lambda e_j \cong Hom(\Lambda e_i, \Lambda e_j) \subset rad(End_\Lambda(\Lambda)) \cong rad\Lambda$.

Se i=j, $e_i\Lambda e_i = End_\Lambda(\Lambda e_i)$ é um anel local e neste caso e_iBe_i e e_iCe_i estão contidos em $rad\Lambda$.

Como $\frac{B}{A}$ é um bimódulo, existe $B' \subset B$ tal que $\frac{B'}{A}$ seja um bimódulo simples.

Seja $x \in B'$ tal que $\frac{\Lambda x + A}{A}$ seja um Λ-módulo simples à esquerda.

Como $rad\Lambda \otimes \Lambda^{op} + \Lambda \otimes (rad\Lambda)^{op} \subset rad(\Lambda \otimes \Lambda^{op})$ temos então que $rad\Lambda.\frac{B'}{A} = 0$ e $\frac{B'}{A}.rad\Lambda = 0$. Em particular, $rad\Lambda.x \subset A$ e $x.rad\Lambda \subset A$.

Mais ainda, existem índices i, j tais que $e_i x e_j \in e_i B e_j$ e $e_i x e_j \notin e_i A e_j$ e neste caso $\frac{\Lambda e_i x e_j + A}{A}$ é simples. Estes índices são tais que o subreticulado $\{A,B,C,D,E\}$ não se reduz a um ponto em $e_i \Lambda e_j$.

Seja $\varphi : \frac{B}{A} \longrightarrow \frac{C}{A}$ um isomorfismo de Λ-bimódulos e seja $\varphi(\overline{x}) = \overline{y} \in \frac{C}{A}$, então $\varphi(e_i \overline{x} e_j) = e_i \varphi(\overline{x}) e_j = e_i \overline{y} e_j \neq 0$, $e_i y e_j \in e_i C e_j$ e $e_i y e_j \notin e_i A e_j$.

Note-se que $e_i x e_j \in e_i B e_j - e_i A e_j$ implica que $e_j \notin C$ e analogamente $e_j \notin B$. Verifica-se também que $e_j \notin B + C$ ou seja, $e_j \notin E$.

Mas $\frac{\Lambda e_i x e_j + A}{A} \cong \frac{\Lambda e_i y e_j + A}{A}$ então $\frac{\Lambda e_i y e_j + A}{A}$ é simples e $\overline{y}.rad\Lambda = 0$ pois $\overline{x}.rad\Lambda = 0$.

Sejam $\beta_1 = e_i x e_j \in e_i B e_j$

$\beta_2 = e_i y e_j \in e_i C e_j$.

Com isto, β_1 e β_2 satisfazem as seguintes condições:

1) $\frac{\Lambda \beta_1 + A}{A} \cong \frac{k\beta_1 + A}{A} \subset B/A$ é simples

$\frac{\Lambda \beta_2 + A}{A} \cong \frac{k\beta_2 + A}{A} \subset C/A$ é simples

2) $\frac{\Lambda \beta_1 + A}{A} \cong \frac{\Lambda \beta_2 + A}{A}$

3) $\beta_1 \in e_i B e_j$, $\beta_1 \notin C$ e $\beta_1.rad\Lambda \subset A$

$\beta_2 \in e_i C e_j$, $\beta_2 \notin B$ e $\beta_2.rad\Lambda \subset A$.

Vamos agora escolher bases convenientes para estudar as correspondentes representações matriciais de Λ/B e Λ/C.

Sejam M,N_1,N_2 módulos à esquerda tais que:

a) $B \subset N_1 \subset M \subset \Lambda$

$C \subset N_2 \subset M \subset \Lambda$

b) $N_1 = \Lambda\beta_2 + B$, $N_2 = \Lambda\beta_1 + C$. Então $\frac{N_1}{B} = \frac{\Lambda\beta_2 + B}{B} \cong \frac{\Lambda\beta_2 + A}{A} \cong \frac{\Lambda\beta_1 + A}{A} \cong \frac{\Lambda\beta_1 + C}{C} \cong \frac{N_2}{C}$ são Λ-módulos simples.

c) M maximal em Λ tal que $e_j \notin M$.

$M = \bigoplus_{m \neq j} \Lambda e_m + rad\Lambda e_j$.

Seja então uma base de Λ/B dada por $\{\overline{e_j}, \overline{v_1}, \overline{v_2}, \ldots, \overline{v_m}, \overline{\beta_2}\}$ onde $\{\overline{e_j}\}$ (módulo M/B) é uma base de Λ/M, $\{\overline{v_1}, \overline{v_2}, \ldots, \overline{v_m}\}$ (módulo N_1) é uma base de M/N_1 e $\{\overline{\beta_2}\}$ é uma base de N_1/B.

Analogamente podemos escolher uma base de Λ/C da seguinte forma:

$\{\overline{e_j}, \overline{u_1}, \overline{u_2}, \ldots, \overline{u_m}, \overline{\beta_1}\}$ onde $\{\overline{e_j}\}$ (módulo M) é uma base de Λ/M, $\{\overline{u_1}, \overline{u_2}, \ldots, \overline{u_m}\}$ é uma base (módulo N_2) de M/N_2 e $\{\overline{\beta_1}\}$ é uma base de N_2/C.

Lembramos que Λ/B e Λ/C tem a mesma dimensão pois são isomorfos como k-espaços vetoriais. Seja $R_1 : \Lambda \longrightarrow End_k(\Lambda/B)$ a representação matricial dada pelo Λ-módulo Λ/B com relação à base escolhida. Calculando $R_1(\alpha)$ nos vetores da base, vemos que: $R_1(\alpha)\overline{e_j} = x(\alpha)\overline{e_j} + P_{11}(\alpha)\overline{v_1} + \ldots + P_{1m}(\alpha)\overline{v_m} + y_1(\alpha)\overline{\beta_2}$.

Como M/B é submódulo então $\alpha M/B \subset M/B$ então para $i = 1, \ldots, m$ temos que

$$R_1(\alpha)\overline{v_i} = \sum_j Q_{1ij}(\alpha)\overline{v_j} + S_{1i}(\alpha)\overline{\beta_2}$$

.

Como $\overline{\beta_2}$ é base de $\frac{\Lambda\beta_2+A}{A}$ que é um submódulo, $\alpha\overline{\beta_2} \subset \frac{\Lambda\beta_2+A}{A}$ logo $R_1(\alpha)\overline{\beta_2} = x'(\alpha)\overline{\beta_2}$.

Podemos escrever a matriz:

$$R_1(\alpha) = \begin{bmatrix} x(\alpha) & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ P_{11}(\alpha) & Q_{111}(\alpha) & \vdots & Q_{1,m1}(\alpha) & 0 \\ \vdots & \vdots & Q_{1,m2}(\alpha) & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{1m}(\alpha) & Q_{11m}(\alpha) & \vdots & \vdots & 0 \\ y_1(\alpha) & S_{1,1}(\alpha) & \vdots & S_{1,m}(\alpha) & x'(\alpha) \end{bmatrix}$$

ou escrevendo em blocos:

$$R_2(\alpha) = \begin{bmatrix} x(\alpha) & 0 & 0 \\ P_1(\alpha) & Q_1(\alpha) & 0 \\ y_1(\alpha) & S_1(\alpha) & x'(\alpha) \end{bmatrix}$$

Similarmente, dada a base de Λ/C, podemos considerar a representação matricial correspondente R_2 que terá seguinte forma:

$$R_2(\alpha) = \begin{bmatrix} x(\alpha) & 0 & 0 \\ P_2(\alpha) & Q_2(\alpha) & 0 \\ y_2(\alpha) & S_2(\alpha) & x'(\alpha) \end{bmatrix}$$

Lembramos que $\frac{\Lambda\beta_2+A}{A} \cong \frac{\Lambda\beta_1+A}{A}$.

Além disso, como $\beta_1 \in B$, $\beta_1.\Lambda/B = 0$ e $R_1(\beta_1) = 0$ e similarmente $R_2(\beta_2) = 0$.

Também $\beta_2.\overline{e_j} = \overline{\beta_2 e_j} = \overline{\beta}_2$. Vejamos que $\beta_2.\frac{M}{B} = 0$. Com efeito $\beta_2.M = \beta_2 e_j M = \beta_2.rad\Lambda \subset A$. Assim

$$R_1(\beta_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e da mesma maneira,

$$R_2(\beta_1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Se $dim\Lambda/B = dim\Lambda/C = m+2$, seja V um k-espaço vetorial de dimensão $2m+2$ e uma base fixada em V.

Então para cada $c \in k$, $c \neq 0$ construiremos uma representação $R_c(\alpha) : \Lambda \longrightarrow End_k(V)$ que irá definir para cada $c \neq 0$ uma estrutura de Λ-módulo para V.

Definimos $R_c(\alpha)$ por blocos:

$$R_c(\alpha) = \begin{bmatrix} x(\alpha) & 0 & 0 & 0 \\ P_1(\alpha) & Q_1(\alpha) & 0 & 0 \\ P_2(\alpha) & 0 & Q_2(\alpha) & 0 \\ y_1(\alpha) + cy_2(\alpha) & S_1(\alpha) & S_2(\alpha) & x'(\alpha) \end{bmatrix}$$

R_c é uma representação e além disso,

$$R_c(\beta_1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e,

$$R_c(\beta_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para cada $c \in k$, seja M_c o módulo dado pela representação R_c sobre V. Se f for um endomorfismo de M_c, (como Λ-módulo) então $f(\alpha m) = \alpha f(m)$ para todo $\alpha \in \Lambda$ e $m \in M$.

Escrevendo a matriz de f na base fixada, isto significa que as matizes comutam $[R_c(\alpha)].[f] = [f].[R_c(\alpha)]$

Seja $P = [f]$, $P \in M_{2m+2}(k)$.

Escrevendo P em blocos como R_c, tem-se

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{14} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & P_{24} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} & P_{34} \\ P_{41} & P_{42} & P_{43} & P_{44} \end{bmatrix}$$

e $P.R_c(\alpha) = R_c(\alpha).P \ \forall \alpha \in \Lambda$.

Em particular,

$$P.R_c(\beta_2) = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{14} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & P_{24} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} & P_{34} \\ P_{41} & P_{42} & P_{43} & P_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & 0 & 0 & 0 \\ P_{21} & 0 & 0 & 0 \\ P_{31} & 0 & 0 & 0 \\ P_{41} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$R_c(\beta_2).P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{14} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & P_{24} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} & P_{34} \\ P_{41} & P_{42} & P_{43} & P_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ P_{41} & P_{42} & P_{43} & P_{44} \end{bmatrix}$$

Portanto $P_{14} = P_{24} = P_{34} = P_{12} = P_{13} = P_{14} = 0$ e $P_{11} = P_{44}$.

Então P tem a forma

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & 0 & 0 & 0 \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & 0 \\ P_{21} & P_{32} & P_{33} & 0 \\ P_{41} & P_{42} & P_{43} & P_{11} \end{bmatrix}$$

(lembrando que a dimensão do bloco P_{11} é 1 x 1).

Seja γ o último vetor da base fixada em V.

$R_c(\alpha)\gamma = x'(\alpha).\gamma$ então $V_0 = \Lambda\gamma = k\gamma$ é um submódulo simples, contido em M_c para todo $c \in k$, $c \neq 0$ e além disso, para todo endomorfismo P de M_c, tem-se que $P(\gamma) \subset k\gamma$, logo $P(V_0) \subset V_0$.

Então, para todo $c \in k$, $c \neq 0$, existe V_c componente indecomponível de M_c tal que $V_0 \subset V_c$ e $dimV_c \leq dimM_c = 2m + 2$.

Vejamos que se $c \neq c'$, então $V_c \ncong V_c'$.

Suponhamos por absurdo que existe $\varphi : V_c \longrightarrow V_c'$, φ um isomorfismo.

Existem W_c e W_c' complementos (como Λ-módulos) respectivamente em M_c e em M_c' ou seja,$M_c \cong V_c \oplus W_c$,$M_c' \cong V_c' \oplus W_c'$ e podemos estender φ a M_c da seguinte maneira:

$\Phi : M_c \longrightarrow M_c'$, $\Phi(v, \omega) = (\varphi(v), 0)$.

Φ é um homomorfismo de Λ-módulos que restrito a V_c é um isomorfismo sobre V_c'.

Seja P a matriz de Φ. Como $\Phi(\beta_1 m) = \beta_1 \Phi(m)$ para todo $m \in M_c$, tem-se que $P.R_c(\beta_1) = R_c'(\beta_1)P$, o que implica que

$$\begin{bmatrix} P_{11} & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & 0 \\ . & . & . & 0 \\ . & . & . & P_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ c' & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & 0 \\ . & . & . & 0 \\ . & . & . & P_{11} \end{bmatrix}$$

ou $P_{11}c = P_{11}c'$, mas $c \neq c'$ implica que $P_{11} = 0$. Porém, P_{11} representa a restrição de P a V_0 que é um isomorfismo, logo $P_{11} \neq 0$, obtendo-se assim uma contradição.

Então, se $c \neq c'$ significa $V_c \ncong V_c'$.

Obtivemos assim, infinitos (a cardinalidade de k) módulos V_c não isomorfos e indecomponíveis, de comprimento menor ou igual a $2m+2$, então existe um inteiro n^* ou igual a $2m+2$ tal que existem infinitos módulos finitamente gerados indecomponíveis não isomorfos de comprimento n^*. Pelo teorema 4.2 Λ é do tipo fortemente não limitado.

No caso de uma álgebra comutativa a condição de distributividade é necessária e suficiente.

Se a álgebra Λ comutativa tem o reticulado dos seus ideais bilaterais distributivo temos, pelos resultados do capítulo anterior, que se $1 = e_1 + \ldots + e_t$ é uma decomposição da unidade em idempotentes ortogonais primitivos então: $e_i \Lambda e_i = \Lambda e_i \cong \frac{k[X]}{(X^{n_i})}$ e $e_i \Lambda e_j = \Lambda e_i e_j = 0$.

Isto significa que a álgebra Λ é da forma: $\Lambda = \frac{k[X]}{(X^{n_1})} \oplus \ldots \oplus \frac{k[X]}{(X^{n_t})}$.

Portanto, se M é um Λ-módulo finitamente gerado indecomponível então M é um $\frac{k[X]}{(X^{n_i})}$-módulo indecomponível para algum índice i.

Seja $R : \frac{k[X]}{(X^n)} \longrightarrow End_k(M)$ uma representação de $k[X]$ para o módulo indecomponível M e seja $R(x)$ a matriz correspondente a $x = X + (X^n)$. Se para alguma base B de M, tivessemos $R(x)$ decomponível na forma $\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$ teriamos que M seria soma direta de dois submódulos. Logo, para toda base B de M, $R(x)$ é indecomponível. Como k é algebricanmente fechado, $R(x)$ é semelhante a um bloco de Jordan da forma

$$\begin{bmatrix} a & & \ldots & 0 \\ 1 & a & \vdots & \\ 0 & \ldots & 1 & a \end{bmatrix}$$

e, como x é nilpotente, $a = 0$ e o tamanho de $R(x)$ é menor ou igual a n.

Reciprocamente, toda matriz da forma

$$\begin{bmatrix} 0 & & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & \vdots & \\ 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

de tamanho menor do que n define uma representação indecomponível de $k(X)/(X^n)$.

Isto prova que $\frac{k[X]}{(X^n)}$ tem exatamente n classes de isomorfia de módulos indecomponíveis. Portanto, toda álgebra comutativa cujo reticulado de ideais é distributivo é de tipo de representação finito.

7. CATEGORIAS DE RAIOS

Aqui, novamente, mudamos de ponto de vista, ou melhor dizendo, procuramos ver o problema por outro ângulo.

As categorias de raios, apesar de serem descobertas recentes, cumprem um papel muito importante tanto na demonstração da 2ª conjetura de Brauer-Thrall, como na classificação de todas as álgebras de tipo de representação finito.

Graças aos resultados de Jans sobre álgebras cujo reticulado de ideais bilaterais é distributivo, demonstrou-se recentemente ([TBM], veja terorema 2.10 e [B]) que uma álgebra de tipo de representação finito é "standard", ou seja, é isomorfa à linearização de uma categoria de raios.

Como a natureza das categorias de raios é intrinsecamente combinatória, o que simplifica bastante o seu estudo, essas categorias são a chave para a classificação de álgebras de tipo de representação finito.

Ao longo deste capítulo, k denota um corpo algebricamente fechado.

Como veremos, as categorias de raios estendem de certa forma a noção de quivers - grafos orientados - estudados por Gabriel e posteriormente por Auslander e Reiten [CLS]. Dada esta identificação iremos escrever a composição da esquerda para a direita.

Def 7.1 [TBM] Uma categoria C é dita uma categoria de raios se possue as seguintes propriedades:

1) C é uma categoria com zeros, ou seja, para $x, y \in ObjC$, existe um morfismo ${}_x0_y : x \longrightarrow y$ tal que $0.u = 0$ e $v.0 = 0$ sempre que a composição estiver definida.

2) Para todo $x \in ObjC$, $\rho \in C(x,x)$ é nilpotente se e só se $\rho \neq 1_x$.

3) Objetos distintos são não isomorfos.

4) Para todo $x \in ObjC$ existe apenas um número finito de morfismos não nulos que começam ou terminam em x.

5) Para cada par $x, y \in ObjC$, $C(x,y)$ é linearmente ordenado pela relação $u \leq v$ se e somente se $v = \rho u \tau$ para alguns endomorfismos ρ e τ.

6) $uv = u\rho v \neq 0$ implica que ρ é um automorfismo.

Observamos que a condição 4 implica que os conjuntos $C(x,x)$ e $C(x,y)$ são finitos para todo $x, y \in ObjC$.

Além disso, da condição 5 concluimos que existe $\rho \in C(x,x)$ tal que $C(x,x)$ é da forma $\{1_x, \rho, \rho^2, \ldots, \rho^n = 0_x\}$.

Em primeiro lugar, tem-se que 1_x é o mínimo e 0_x é o máximo dessa relação.

Veremos por indução que se γ é o sucessor de 1_x e $u \in C(x,x)$ ocupa o lugar $i+1$ então u é igual a γ^i.

A indução é válida para $i = 0$ e $i = 1$.

Suponhamos que é válida para $i - 1$.

Seja $u \in C(x,x)$ tal que $\gamma^{i-1} \leq u \leq \gamma^i$.

Então $u = \rho_1 \gamma^{i-1} \sigma_1$ e $\rho_1 \leq u$, $\sigma_1 \leq u$.

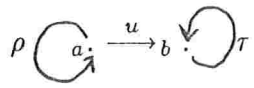
Se $\rho_1 = u$, teriamos $u.1_x = u.\gamma^{i-1}.\sigma_1.1_x$, e $\gamma^{i-1}.\sigma_1$ seria automorfismo. Então, $\rho_1 = \gamma^j$ e $\sigma_1 = \gamma^t$ para $j, t \leq i - 1$.

Além disso, $C(x,y)$ é cíclico sobre $C(x,x)$ ou sobre $C(y,y)$.

A demonstração disto usa um argumento semelhante.

Vejamos um exemplo.

Seja o quiver Q dado por



Procuramos estudar as categorias de raios associadas a esse quiver. (Em particular, esse exemplo foi estudado por J. Weissman em 1987).

C tem 2 objetos

$ObjC = \{a, b\}$.

$C(a,a)$ e $C(b,b)$ são cíclicos.

$C(a,a) = \{1_a, \rho, \rho^2, \ldots, \rho^{s-1}, \rho^s = 0\}$

$s \geq 2$.

$C(b,b) = \{1_b, \tau, \tau^2, \ldots, \tau^{t-1}, \tau^t = 0\}$

$t \geq 2$.

Como de b a a não há nenhuma flecha, temos $C(b,a) = \{0\}$.

Como $C(a,b)$ é cíclico sobre $C(a,a)$ ou sobre $C(b,b)$ e é trivialmente gerado por u, temos:

i) $C(a,b) = \{u, u\tau, u\tau^2, \ldots, u\tau^m = 0\}$ com $m \leq t$ ou

ii) $C(a,b) = \{u, \rho u, \rho^2 u, \ldots, \rho^q u = 0\}$ onde $q \leq s$.

Consideraremos apenas o caso i, pois o outro é análogo.

Precisamos então analisar as possíveis tábuas de multiplicação. Temos a seguinte relação: $\rho u = u\tau^n \quad 1 \leq n \leq m$ pois u é irredutível e não podemos ter $\rho u = u$. Como além disso, $0.u = 0$ então $0 = \rho^s u = u\tau^{n.s}$ então $s.n \geq m$.

Então, dado o quiver Q, a categoria de raios associada a Q, fica totalmente determinada pelos invariantes s, t, n, m submetidos às condições:

$2 \leq s, t, \qquad 1 \leq n \leq m \leq t$

$m \leq s.n.$

Vejamos mais de perto como se comportam as categorias de raios e como se relacionam com álgebras cujo reticulado de ideais bilaterais é distributivo. Para isto, usaremos o conceito de k-categoria, uma generalização (como veremos adiante) do conceito de álgebra básica.

Este conceito é essencial na teoria de funtores de recobrimento desenvolvida por Bongartz e Gabriel [BG] que desempenhou um papel da maior importância nos desenvolvimentos recentes da teoria das representações e particularmente nas demonstrações da 2ª conjetura de Brauer Thrall.

Def 7.2 Uma categoria C é dita uma k-categoria se os conjuntos $C(x,y)$ de todos os morfismos de x a y, $x, y \in ObjC$ são k-espaços vetoriais.

A composição se requer bilinear. A dimensão de uma k-categoria C é o cardinal

$$\sum_{x,y \in ObjC} \Big[C(x,y) : k \Big]$$

.

Def 7.3 Uma k-categoria C é dita localmente limitada se satisfaz às condições seguintes:

a) Objetos distintos são não isomorfos

b) As álgebras $C(x,x)$ são locais para todo $x \in ObjC$.

c) Para todo $x \in ObjC$,

$$\sum_{y \in ObjC} \Big[C(x,y) : k \Big]$$

e

$$\sum_{y \in ObjC} \left[C(y,x) : k \right]$$

são finitos.

Def 7.4 Um ideal I de uma k-categoria C é uma família de subespaços $I(x,y) \subset C(x,y)$ tais que:

$$I(x,y).C(y,z) \subset I(x,z)$$

e

$$C(x,y).I(y,z) \subset I(x,z).$$

para todos $x, y, z \in ObjC$.

O produto $I.J$ de dois ideais I, J é definido por

$$I.J(x,y) = \sum_{z \in ObjC} I(x,z).J(z,y)$$

(equivalentemente, é o subespaço gerado pelas compostas λu onde $\lambda \in I(x,z), u \in J(z,y)$ para todo $z \in ObjC$).

É fácil ver que a família dos ideais de C forma um reticulado para a relação de ordem $I \leq J$ se e só se $I(x,y) \subset J(x,y)$ para todo $x, y \in ObjC$.

Def 7.5 O radical RC de uma categoria localmente limitada é o ideal formado por todos os morfismos não inversíveis.

Os morfismos que pertencem a RC mas não a R^2C (onde R^2C denota a potência 2 de RC) são ditos irredutíveis. Pode-se ver que esses morfismos são irredutíveis no sentido da definição 2.5.

Seja uma k-álgebra básica de dimensão finita. Seja $1 = e_1 + e_2 + \ldots + e_n$ uma decomposição da unidade em idempotentes primitivos ortogonais.

Podemos ver Λ como uma k-categoria $\underline{\Lambda}$ considerando como objetos $Obj\underline{\Lambda} =: \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ e como espaço de morfismos para cada i, j $\underline{\Lambda}(e_i, e_j) =: e_i \Lambda e_j = Hom(\Lambda e_i, \Lambda e_j)$. $e_i \Lambda e_j$ é um k-espaço vetorial para cada i, j que além disso tem dimensão finita, e como Λ é básica, objetos distintos são não isomorfos.

Se I é um ideal bilateral de Λ ele define naturalmente um ideal da k-categoria acima da maneira seguinte: dados os objetos $e_i, e_j, \in Obj\underline{\Lambda}$, pomos

$$I(e_i, e_j) = e_i I e_j$$

É fácil ver que o ideal de $\underline{\Lambda}$ definido por J (o radical de Jacobson de Λ) é exatamente $R\underline{\Lambda}$.

Além disso, como Λ é de dimensão finita, então $\underline{\Lambda}$ é localmente limitada e tem um número finito de objetos.

Inversamente, dada uma k-categoria $\underline{\Lambda}$ com um número finito de objetos, fica associada a ela, de maneira natural, uma k-álgebra de dimensão finita, básica, da forma seguinte:

Como k-espaço vetorial Λ é a soma direta $\bigoplus_{i,j} \underline{\Lambda}\ (e_i, e_j)$ e a multiplicação é induzida linearmente pela composição de morfismos de $\underline{\Lambda}$ estendida a todos os pares de morfismos (σ, ρ) estipulando que se a composta $\sigma\rho$ não está definida então $\sigma\rho = 0 \in \Lambda$.

É conveniente simplificar a notação designando cada identidade $1.e_i$ simplesmente por e_i. É claro então que os e_i resultam idempotentes ortogonais de Λ cuja soma é a unidade 1. É fácil ver também que dado um ideal da k-categoria $\underline{\Lambda}$, fica associado a ele um ideal bilateral da álgebra Λ cujo espaço vetorial subjacente é $\bigoplus_{i,j} I(e_i, e_j)$.

Def 7.6 Uma k-categoria C localmente limitada é dita distributiva se o reticulado de seus ideais bilaterais for distributivo.

Para isto, é necessário e suficiente que todas as subcategorias plenas definidas por dois objetos x, y de C sejam distributivas. Portanto C é distributiva se e só se todas as álgebras associadas a estas subcategorias plenas tem seus reticulados de ideais bilaterais distributivos.

Como conseqüência, esta propriedade pode ser caracterizada também pelo fato de que todas essas subcategorias plenas tem um número finito de ideais.

Esta condição implica que $C(x, y)$ é um $C(x, x) - C(y, y)$ bimódulo uniserial e além disso, $C(x, y)$ é um módulo cíclico sobre $C(x, x)$ ou sobre $C(y, y)$.

Def 7.7 Seja C uma categoria de raios. Podemos associar a ela, uma k-categoria $k(C)$, com os mesmos objetos de C, e como espaços de morfismos para cada par x, y o espaço vetorial que tem base $C(x, y)$ módulo $k\ {}_x0_y$. A composição de $k(C)$ é linearmente induzida pela composição de C. Neste caso, $k(C)$ diz-se a linearização da categoria de raios C.

Def 7.8 Uma álgebra Λ cuja k-categoria associada é distributiva, chama-se "standard" se $\Lambda \cong k(\overrightarrow{\Lambda})$ onde $\overrightarrow{\Lambda}$ é a categoria de raios definida por Λ.

Veremos que dada uma k-álgebra de dimensão finita Λ cujo reticulado de ideais bilaterais é distributivo, podemos construir uma categoria de raios associada a ela. Observamos que isso não significa que ela seja "standard", pois pode ocorrer que a linearização dessa categoria de raios não seja isomorfa à álgebra Λ.

A idéia principal que levou à definição das categorias de raios (devida a Gabriel) foi a introdução de uma relação de equivalência nos conjuntos $C(x,y)$ dos morfismos de x a y.

Em tudo que segue, C denotará uma k-categoria localmente limitada e distributiva.

Def 7.9 Seja $u \in C(x,y)$ um morfismo não inversível. Podem ocorrer duas situações:

1) Existe um natural n tal que $u \in R^n C(x,y)$ mas $u \notin R^{n+1}C(x,y)$.

Neste caso, diremos que u tem profundidade n,$d(u) = n$.

2) Não existe um natural n tal que $u \in R^n C(x,y)$ e $u \notin R^{n+1}C(x,y)$.

Neste caso, $u \in R^n C(x,y)$ para todo $n \in N^*$.

Diremos então que u tem profundidade infinito, ou seja, $d(u) = +\infty$.

Observamos que $u \in R^n C(x,y)$ se e somente se $d(u) \geq n$.

Lema 7.1 : *Sejam $u \in C(x,y)$ e $v \in C(y,z)$ morfismos tais que $d(u) = n_1$ e $d(v) = n_2$. Então $d(u.v) \geq n_1 + n_2$.*

Lema 7.2 : *Seja $u \in C(x,y)$ tal que $d(u) = +\infty$. Então u é o morfismo nulo.*

Dem: Seja $\rho \in C(x,y), \rho \neq 0$ e $\rho \in R^n C$.

Então, existe uma composta não nula $\rho = \rho_1 . \rho_2 . \rho_3 \ldots \rho_n$, $x \xrightarrow{\rho_1} x_1 \xrightarrow{\rho_2} x_2 \longrightarrow \ldots \xrightarrow{\rho_n} x_n = y$ com $\rho_i \in RC$. Como C é localmente limitada o número de objetos z tais que $C(x,z) \neq 0$ é finito.

Se n fosse suficientemente grande, existiria um objeto z tal que $x_i = z$ para um número de índices i maior que o índice de nilpotência de $RC(z,z)$.

Isto prova que n é limitado, e portanto, se $\rho \neq 0$, $\rho \notin R^n C(x,y)$, para n suficientemente grande.

Def 7.10 Seja $u \in C(x,y)$ e seja C' o subbimódulo de $C(x,y)$ gerado por u. $C' = C(x,y)uC(y,y)$. Como $C(x,y)$ é de uma das formas $C(x,x)u$ ou $uC(y,y)$ então podem ocorrer apenas duas situações:

1) $C' = C(x,x)u$, ou seja, dado $\rho \in C(y,y)$ existe $\rho' \in C(x,x)$ tal que $u\rho = \rho' u$. Neste caso dizemos que u permite cotrânsito.

2) $C' = uC(y,y)$, ou seja, dado $\rho \in C(x,x)$ existe $\rho' \in C(y,y)$ tal que $\rho u = u\rho'$. Neste caso, diremos que u permite trânsito.

Se u permite trânsito e cotrânsito, diz-se que u permite bitrânsito.

Se o gerador do subbimódulo permite trânsito (respectivamente cotrânsito) todo morfismo do subbimódulo também permite trânsito (respectivamente cotrânsito).

Diz-se que u proíbe trânsito se $C' = C(x,x)u$ e $C' \neq uC(y,y)$.

Igualmente definimos que u proíbe cotrânsito.

Lema 7.3 : *Todo elemento do socle de $C(x,y)$ permite bitrânsito.*

Dem: Suponhamos que $C(x,y) = C(x,x).u$. Então todo elemento de $socC(x,y)$ permite cotrânsito. Além disso, como $C(x,y)$ é uniserial, $socC(x,y)$ é simples.

Se $C(x,y) = ku + k\eta u + \ldots + k\eta^{m-1}u$ então $socC(x,y) = k\eta^{m-1}u$.

Mas $\eta^l.\eta^{m-1}.u = 0 = \eta^{m-1}.u.0$ para todo $l > 0$ e $1.\eta^{m-1}.u = \eta^{m-1}.u = \eta^{m-1}.u.1$.

Então os elementos do $socC(x,y)$ permitem bitrânsito.

Def 7.11 Sejam $u, v \in C(x,y)$.

Dizemos que u é equivalente a v ($u \sim v$) se e somente se $d(u) = d(v)$, ou em outras palavras $u = \rho v \tau$ onde ρ e τ são automorfismos.

Def 7.12 Seja $u \in C(x,y)$, definimos $\vec{u}$ o raio de u como a classe de equivalência de u. A classe do zero sendo ${}_x0_y = \{u | d(u) = +\infty\} = \{0\}$.

Além disso, definimos a profundidade de um raio $\vec{u}$ de maneira óbvia: $d(\vec{u}) = d(u)$.

Def 7.13 Sejam u e v morfismos tais que $u.v$ existe. Então:

$$\vec{u}.\vec{v} = \begin{cases} \vec{uv} & \text{se o raio independe do representante} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Iremos agora verificar que esses raios dão origem de fato a uma categoria de raios. Para isso, veremos como esta composição se comporta.

Lema 7.4 : *Dados dois morfismos $u \in C(b,c)$ e $v \in C(c,a)$ uma das mutuamente exclusivas situações ocorre:*

1) $d(uv) = d(u\gamma v)$ *para todo* $\gamma \in C(c,c)$ *inversível. Isto ocorre se e somente se:* $uRC(c,c)v \subset RC(b,b)uv + uvRC(a,a)$

2) Os morfismos $u\gamma v$ onde γ percorre os automorfismos de $C(c,c)$ formam um subbimódulo distinto de $C(b,a)$. Isto ocorre se e somente se:

$uRC(c,c)v \not\subset uvRC(a,a) + RC(b,b)uv$ e equivalentemente se e somente se $uv \in uRC(c,c)v \neq 0$.

Dem: É óbvio que as duas condições são mutuamente exclusivas e que se uma delas não ocorre a outra deve ocorrer. Então basta provar apenas as equivalências.

Suponhamos primeiramente que $C(b,a) = \tau C(a,a)$.

Neste caso, os morfismos de $C(b,a)$ permitem trânsito. O outro caso, em que os morfismos de $C(b,a)$ permitam cotrânsito é similar.

Como $RC(b,b)uv \subset C(b,a)$ então $RC(b,b)uv \subset uvC(a,a)$.

Seja $\rho \in RC(b,b)$ então $\rho uv \in RC(b,b)uv$ logo existe $\rho' \in C(a,a)$ tal que $\rho uv = uv\rho'$.

Como $d(uv\rho') = d(\rho uv) = d(\rho) + d(uv) \leq d(uv) + 1$, temos que ρ' não pode ser um automorfismo. Logo $\rho' \in RC(a,a)$ e $RC(b,b)uv \subset uvRC(a,a)$ logo $RC(b,b)uv + uvRC(a,a) \subset uvRC(a,a)$.

Além disso, suponhamos que u permite cotrânsito e seja $\rho \in RC(c,c)$ então existem $\rho' \in C(b,b)$ e $\rho'' \in C(a,a)$ tais que $u\rho v = \rho' uv = uv\rho''$.

Como antes, $d(u\rho v) \geq d(uv)$ e ρ'' não pode ser automorfismo.

Neste caso, $uRC(c,c)v \subset uvRC(a,a)$.

Similarmente se v permite trânsito tem-se que $uRC(c,c)v \subset uvRC(a,a)$.

Fazemos a hipótese de que $uRC(c,c)v \not\subset uvRC(a,a)$. (1)

Então u proíbe cotrânsito e v proíbe trânsito; logo u permite trânsito e v permite cotrânsito. Então, dado $\rho \in C(b,b)$ existe $\rho' \in C(c,c)$ tal que $\rho.u.v = u\rho' v$ e dado $\delta \in C(a,a)$ existe $\delta' \in C(c,c)$ tal que $uv\delta = u\delta' v$.

Então $C(b,b)uv \subset uC(c,c)v$ e $uvC(a,a) \subset uC(c,c)v$.

Mas $uRC(c,c)v$ e $uC(c,c)v$ são subbimódulos de $C(b,a)$ pois u permite trânsito e v permite cotrânsito.

Provemos então que $uv \in uRC(c,c)v$.

Então, a hipótese (1) implica que $uvRC(a,a) \subset uRC(c,c)v$, mas $uvRC(a,a) \neq uRC(c,c)v$, de onde $uRC(c,c)v = uvC(a,a)$.

Logo $uv \in uRC(c,c)v$.

Neste caso, existe $\rho \in RC(c,c)$ tal que $uv = u\rho v$. Seja $\tau \in RC(c,c)$ tal que $d(u\tau v)$ é mínima.

Então, para todo $\xi \in uRC(c,c)v$, $d(\xi) \geq d(u\tau v)$.

O elemento $u\tau v$ é um elemento gerador de $uRC(c,c)v \subset C(b,a)$. Então, $\xi = u\tau v\nu$ para algum $\nu \in C(a,a)$.

Mas então $\xi = u\tau\nu' v \quad \nu' \in C(c,c)$. Mas $\xi = uv - uv + \xi = uv - u\rho v + u\tau\nu' v = u(1 - \rho + \tau\nu')v$. Mas $1 - \rho + \tau\nu'$ é inversível pois ρ e $\tau\nu$ estão no radical.

Então $uRC(c,c)v \subset uUC(c,c)v$ e como $u.1.v \in uRC(c,c)v$ então $uUC(c,c)v = uRC(c,c)v$. Deduzimos assim que no caso considerado, $uRC(c,c)v \not\subset uvRC(a,a)$ implica que $uUC(c,c)v$ é um subbimódulo não nulo.

Observamos que isto implica que $d(uv) \neq d(u\rho v)$ para alguns $\rho \in UC(c,c)$. Assim sendo, por negação obtemos também que $d(uv) = d(u\gamma v)$ para todo $\gamma \in UC(c,c)$ implica que $uR(c,c)v \subset uvRC(a,a)$.

Suponhamos agora que $uRC(c,c)v \subset uvRC(a,a)$.

Provaremos que $d(uv) = d(u\gamma v)$ para todo $\gamma \in UC(c,c)$. Com efeito $uR(c,c)v \subset uvRC(a,a)$ implica que $u\gamma v = uv\gamma'$ com γ' inversível.

Além disso, se $uUC(c,c)v$ é um subbimódulo não nulo então seus elementos não têm profundidade constante e portanto $uRC(c,c)v \not\subset uvRC(a,a)$. Assim concluimos a demonstração.

Em conseqüência, veremos que a multiplicação de raios se torna apenas uma "questão de trânsito".

Lema 7.5 : *Sejam $u \in C(a,b)$ e $v \in C(b,c)$ morfismos. Então se u permite cotrânsito ou v permite trânsito, então $\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{uv}$*

Dem: Se u permite cotrânsito ou v permite trânsito então $d(u\gamma v) = d(uv)$ para todo $\rho \in UC(b,b)$. Neste caso então $\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{uv}$ pois o raio independe do representante.

Lema 7.6 : *O produto de raios assim definido é associativo.*

Dem: Sejam $\vec{u}, \vec{v}, \vec{t}$ raios tais que $u \in C(x,y)$,$v \in C(y,z)$, $t \in C(z,w)$.

Para cada morfismo, tem-se três possibilidades: ou ele proíbe trânsito, ou proíbe cotrânsito ou ele permite bitrânsito, perfazendo assim um total de 27 possibilidades.

a) Suponhamos primeiramente que u permite cotrânsito e v permite cotrânsito. Então $u.v$ permite cotrânsito pois dado $\rho \in C(z,z), \exists\rho' \in C(y,y)$ e $\exists\rho'' \in C(x,x)$ tal que $u.v.\rho = u\rho' v = \rho'' uv$ e então $(\vec{u}.\vec{v}).\vec{t} = \overrightarrow{uv}.\vec{t} = \overrightarrow{uvt}$. Como v permite cotrânsito então $\vec{v}.\vec{t} = \overrightarrow{vt}$ e $\vec{u}(\vec{v}.\vec{t}) = \vec{u}.\overrightarrow{vt} = \overrightarrow{uvt}$.

Assim $\vec{u}(\vec{v}.\vec{t}) = (\vec{u}.\vec{v}).\vec{t}$.

b) Se v e t permitem trânsito então $\vec{u}.\vec{v} = \vec{uv}$. Como t permite trânsito então $\vec{uv}.\vec{t} = \overrightarrow{uvt}$.

Além disso, se v e t permitem trânsito $v.t$ permite trânsito e então $\vec{u}(\vec{v}.\vec{t}) = \vec{u}.\vec{vt} = \vec{uvt}$.

Assim, nesse caso temos $\vec{u}(\vec{v}.\vec{t}) = (\vec{u}.\vec{v})\vec{t}$.

c) Se u e t proíbem trânsito e v proíbe cotrânsito então u e t permitem cotrânsito e v permite trânsito.

Como u permite cotrânsito então $\vec{u}.\vec{v} = \vec{uv}$. Se $\vec{v}.\vec{t} = 0$ então $\vec{u}(\vec{v}.\vec{t}) = 0$.

Suponhamos por absurdo que $\vec{uv}.\vec{t} \neq 0$. Neste caso, $d(uv\rho t) = d(uvt)$ para todo $\rho \in C(z,z), \rho$ inversível.

Porém $\{v\rho t | \rho \in UC(z,z)\}$ é um subbimódulo não nulo. Logo existe ρ' tal que $v\rho' t = 0$, então $uv\rho' t = 0$ $d(uvt) = d(uv\rho' t) = +\infty$ contradição.

Se $\vec{v}.\vec{t} = \vec{vt}$, então $\vec{u}(\vec{v}.\vec{t}) = \vec{u}.(\vec{vt}) = \overrightarrow{uvt}$.

Mas, por outro lado, $(\vec{u}.\vec{v}).\vec{t} = \vec{uv}.\vec{t}$.

Se $\vec{uv}.\vec{t} \neq \overrightarrow{uvt}$ então, existe ρ inversível $\rho \in C(z,z)$ tal que $(uv)\rho t = 0$, logo $u(v\rho t) = 0$. Como $\vec{v}\vec{t} = \vec{vt}$ existe ρ' inversível tal que $uv\rho t = uvt\rho'$ ou $uv\rho t = \rho' uvt$.

Isto implica que $uvt = 0$ e portanto $\overrightarrow{uvt} = 0$ contradição.

Os outros casos são similares.

Assim, dada uma k-categoria C localmente limitada e distributiva, temos associada a ela uma categoria de raios $\vec{C}$ tal que $ObjC = Obj\vec{C}$ e os morfismos de $\vec{C}$ de a até b são exatamente os raios $\vec{u}$ onde $u \in C(a,b)$.

Proposição 7.7 : *$\vec{C}$ é uma categoria de raios como na definição 7.1.*

Dem: As propriedades 1 e 2 são imediatas.

Como $\vec{u}$ é um isomorfismo se e só se u é um isomorfismo, vale 3. Como C é localmente limitada, dado $x \in ObjC = Obj\vec{C}$, existe um número finito de objetos y e de objetos z tal que $C(x,y) \neq 0$ e $C(x,z) \neq 0$. Por outro lado, o número de elementos de $\vec{C}(x,y)$ é igual ao número de profundidades de morfismos de $C(x,y)$.

Assim vale a propriedade 4. A relação definida na propriedade 5: $\vec{u} \leq \vec{v} <\Rightarrow \vec{v} = \vec{\rho}\vec{u}\vec{\sigma}$ equivale a dizer: $\vec{u} \leq \vec{v} <\Rightarrow d(\vec{u}) \leq d(\vec{v})$ e portanto é uma ordem total.

Finalmente, se $\vec{u}.\vec{v} = \vec{u}\vec{\rho}\vec{v} \neq 0$ temos $\vec{uv} = \overrightarrow{u\rho v}$ o que implica que $d(uv) = d(u\rho v)$ e então ρ é um automorfismo.

Voltando ao problema original, se Λ é uma k-álgebra de dimensão finita, básica, cujo reticulado de ideais bilaterais é distributivo, já vimos que Λ pode ser vista como uma k-categoria localmente limitada e distributiva.

Assim, temos associada à álgebra Λ uma categoria de raios $\overrightarrow{\Lambda}$.

Para terminar, citamos um teorema extremamente importante para mostrar a evolução da conjetura de Brauer-Thrall II. Omitimos a demonstração por considerar que envolve instrumentos muito técnicos que ficam fora do objetivo deste trabalho.

Caracterização de álgebras "standard"([TBM], 2.10 e [B])

Toda k-categoria tal que todo quociente Λ/I, $I \neq 0$ é de tipo de representação finito e cuja categoria de raios não contém cadeias infinitas é "standard", ou seja, é isomorfa à linearização de sua categoria de raios.

Este resultado de baseia numa generalização de um teorema de Jans([J],3.2) batizado como "critério de Jans-Roiter" ([TBM],1.9).

A prova de Bautista-Fischbacher da 2ª conjetura de Brauer Thrall decorre da demonstração de que não existem álgebras "standard" com tipo de representação infinito não fortemente não limitado.

Bibliografia

[A] - **Auslander,M.**, *Applications of morphisms determinated by modules,* Representation theory of algebras (proc. Conf. Temple University, 1976) Lecture Notes in Pure and Applied Math. Vol. 37, (M. Dekker, N.Y., 1978)

[B] - **Bongartz,K.**, *Indecomposables are standard,* Comm. Math Helv. **60** (1985) 400-410.

[BG] - **Bongartz,K. e Gabriel,P.**, *Covering spaces in representation theory,* Inv. Math. **65** (1982) 331-378.

[BK] - **Birkhoff,G.**, *Lattice theory,* American Mathematical Society - Colloquium publications vol. XXV, 1940.

[Bt] - **Bautista,R.**, *On algebras of strongly unbounded representation type,* Comm. Math. Helv. **60** (1985), 392-399.

[CLS] - **Cibilis,C.; Larrión,F.; Salmerón,L.**, *Metodos diagramaticos en la teoria de representaciones,* Monografias del Instituto de Matemáticas **11** (1982) México.

[DK] - **Drozd,A. e Kirichenko,V.**,*Algebras de dimension finita,* Universidad de Kiev, URSS (1980) versão ao espanhol de Victor de Leon, Universidad Autonoma de Puebla, México.

[F] - **Fischbacher,U.**,*Une nouvelle preuve d'un théoreme de Nazarova et Roiter,* C. R. Acad. Sc. Paris t. 300 série I, n° 9, 1985, 259-262.

[J] - **Jans,J.**, *On the indecomposable representations of algebras,* Ann. Math. **66**, **418-429**, (1957).

[M] - **Merklen,H.**,*Métodos categóricos na teoria das representações,* Notas de curso, IME-USP, São Paulo, 1980.

[R] - **Roiter,V.**,*Unboundness of the dimension of the indecomposable representations of an algebra wich has infinitely many indecomposable representations,* Izv. Akad. SSR. Sev Math. **32** (1968), **1275-1282**.

[S] - **Smalø,S.**,*The inductive step of the second Brauer - Thrall Conjecture,* - Can. J. Math. vol XXXII n° 2, 1980, **342-349**.

[TBM] - **Bautista,R.; Gabriel,P.; Roiter,V. e Salmerón,L.**, *Representation-finite algebras and multiplicative bases,* Inv. Math. **81**,(1985) **217-285**.

[Y] - **Yamagata,K.**, *On Artin rings of finite representation type,* J. of Algebra **50**, n° 2, 1978.