A MENSURABILIDADE DA REUNIÃO NÃO-ENUMERÁVEL DE CONJUNTOS DE MEDIDA NULA.

José Angelo Pezzotta

DISSERTAÇÃO APRESENTADA AO

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

DA

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE

EM

MATEMÁTICA

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: ANÁLISE

ORIENTADORA:

Prof.ª Dr.ª IRACEMA MARTIN BUND

São Paulo, março de 1990

Á Gladys, Patrícia e Tatiana

Agradecimentos

À Profª Drª Iracema Martin Bund que, com sua dedicada orientação, amizade, sugestões e apoio auxiliou a concretização desta dissertação, os nossos mais sinceros agradecimentos.

Agradecemos á Profª Drª Alciléa Augusto Homem de Melo pela sua valiosa colaboração, orientando-nos durante o Curso de Pós-Graduação.

Agradecemos também a RAS-Reviri Empresa de Contabilidade e Computação Ltda. de São Roque, ao Centro Estadual de Educação Tecnológica Paula Souza que nos permitiram realizar os trabalhos de digitação e impressão; ao aluno Marcos R. A. Guimarães pelo excelente trabalho de digitação e aos amigos que nos estimularam com o seu apoio.

Prefácio

Na introdução do artigo "The Measurability of Uncountable Unions" os autores, Joseph Kupka e Karel Prikry, argumentam que os cursos padrões da teoria da medida relegam a um papel secundário os conjuntos de medida nula, os conjuntos não-mensuráveis, as operações booleanas envolvendo uma quantidade não-enumerável de conjuntos; além disso, esses cursos deixam a impressão de que são inúteis as pesquisas nessa área, assim como o critério da mensurabilidade de Lusin. No entanto, continuam os autores, isto não é verdade pois dentro da moderna teoria da medida estes preceitos são comparáveis com as leis do movimento de Newton, as quais resolvem muito bem os problemas clássicos e são ineficazes para os modernos. Assim sendo, eles pretendem indicar aos leitores como a teoria avançada do medida está ativa, e mostrar alguns resultados recentes que podem ser obtidas com técnicas elementares e não excessivamente complicadas.

Seguindo as diretrizes traçadas pelos autores do artigo acima, procuramos estudar o problema da medida de uma coleção não-enumerável de conjuntos de medida nula utilizando conceitos elementares da teoria dos conjuntos e da topologia.

O objetivo principal do nosso estudo é provar o teorema, denominado por Teorema Fundamental.

"Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu, \mathfrak{F})$ um espaço com medida de Radon finita e $\mathfrak{F}$ uma coleção de elementos μ-nulos de $\mathcal{A}$ tal que $\bigcup \mathcal{B} \in \mathcal{A}$, para toda subcoleção $\mathcal{B}$ de $\mathfrak{F}$. Então $\mu(\bigcup \mathfrak{F})=0$."

Este resultado é conhecido se a coleção $\mathcal{F}$ é enumerável. Abordamos o caso em que $\mathcal{F}$ é não-enumerável. Aplicações e exemplos completam este estudo e visam ressaltar a importância do resultado.

Embora o artigo de J. Kupka e K. Prikry esteja bem escrito, notamos que muitas das afirmações nele contidas necessitavam ser verificadas. Assim julgamos que se estas provas fossem realizadas teríamos ás mãos um texto completo.

Com esta finalidade apresentamos a prova completa de um teorema tipo-Ramsey; visando a prova do Teorema Fundamental. Na busca da justificação de todas as asserções, construímos os parágrafos cinco e seis, e aqui sentimos que a indexação por conjuntos bem ordenados, e em particular por números ordinais, tornavam a leitura do texto mais acessível; e, mostramos como o Teorema de Fremlin é utilizado nas aplicações sugeridas pelo artigo.

Esta dissertação é constituída por nove parágrafos e dois apêndices, cujos conteúdos resumimos abaixo.

No §1 apresentamos os números cardinais e os números ordinais. A nossa intenção, ao incluirmos esta seção, não foi tratar os números cardinais e os números ordinais de uma forma exaustiva e completa - o leitor facilmente observará que algumas propriedades bastante conhecidas de tais números não estão incorporadas ao texto. Apenas procuramos desenvolver o tema de forma que os resultados necessários, para o desenvolvimento do trabalho, fossem obtidos dentro de uma sequência lógica e precisa, porém não-axiomática. E. Hewitt e K. Stromberg [R.10] foram tomados como base.

O motivo para esta introdução deveu-se ao fato de optarmos por indexar famílias de conjuntos utilizando números ordinais para índices, uma vez que necessitávamos de conjuntos bem ordenados ou totalmente ordenados.

No §2 o destaque é para a prova do teorema tipo-Ramsey seguindo as sugestões de J. Kupka e K. Prikry [R.13]. Este teorema será utilizado na obtenção do principal resultado do §5 e mostrar mais uma aplicação da teoria de Ramsey na Análise Matemática.

No §3 definimos espaços com medida de Radon finita e provamos o teorema de Lusin para estes espaços; o §4 exibe a prova de uma propriedade referente ás famílias não-enumeráveis de conjuntos de medida não-nula.

Estes quatro primeiros parágrafos podem ser considerados como preliminares para os resultados essenciais, que serão exibidos nos §5 a §8.

O §5 destina-se á prova do Teorema Fundamental considerando o caso de a medida ser atômica. Aqui, pela primeira vez, usamos conjuntos de números ordinais para indexar famílias. Dados um espaço com medida e uma família de elementos mensuráveis indexada por um conjunto de números ordinais definimos sobre a coleção de subconjuntos deste uma medida. Esta medida e aquela do espaço dado se relacionam. Estudamos as propriedades que decorrem deste fato.

A versão do Teorema Fundamental quando se considera medida não-atômica é estudada no §6. Ainda provamos teoremas relativos á cardinalidade de subconjuntos ou de famílias de subconjuntos não-enumeráveis de [0,1], sem utilizarmos a Hipótese do Contínuo, e exibimos uma prova de existência de uma partição do espaço, constituída por conjuntos de medida nula, num espaço com medida de Radon finita.

Iniciamos o §7 provando o Teorema Fundamental. Em vista dos resultados obtidos nos parágrafos anteriores, a demonstração encontra-se bem simplificada. Seguem-se algumas aplicações do teorema.

A conseqüência mais importante, neste texto, do Teorema Fundamental é o seguinte teorema, devido a Fremlin:

"Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu, \mathfrak{T})$ um espaço com medida de Radon finita, Y um espaço métrico e f uma função de X em Y. Se f é $\mathcal{A}$-$\mathfrak{B}$-mensurável então existe S, subespaço separável de Y tal que $f(x) \in S$ μ-q.s."

A prova deste teorema juntamente com as suas aplicações encontra-se no §8. No que se refere ás aplicações, discutiremos a mensurabilidade da soma de duas funções mensuráveis definidas num espaço com medida de Radon e com valores num espaço de Banach. Ainda sobre este tipo de função veremos o problema da existência de uma seqüência de funções simples e mensuráveis que convergem para uma função mensurável dada. Mostraremos, também, que os conceitos de função Lusin-mensurável e função $\mathcal{A}$-$\mathfrak{B}$-mensurável são equivalentes quando estudamos as funções definidas num espaço com medida de Radon finita, completa, e com valores num espaço métrico arbitrário. Encerramos o parágrafo demonstrando uma versão do teorema de Lusin para estes espaços.

Reservamos o §9 para o estudo da mensurabilidade da reunião não-enumerável de conjuntos não todos μ-nulos. O resultado essencial é um teorema devido a Dorothy Maharam considerado básico nos tópicos que envolvem topologias introduzidas por medidas. Para a prova desse teorema necessitamos introduzir o

§1. Números cardinais e números ordinais.

O desenvolvimento dos números cardinais e dos números ordinais aqui enfocados será não-axiomática. Seguiremos na maior parte do texto a orientação dada por E. Hewitt e K. Stromberg no §4 de [R.10]; também consultamos E. Farah [R.5] e P. R. Halmos [R.8].

Efetuamos a prova de alguns teoremas de [R.10] cujas demonstrações julgamos não elementares ou nas quais introduzimos alguma alteração; dos outros cujos resultados são bastante conhecidos, omitimos a prova.

Os resultados (1.10), (1.11), (1.15), (1.28), (1.33), (1.35), (1.37), (1.54), (1.63) e (1.65) serão os mais utilizados no decorrer do texto.

(1.1) Definição. Diz-se que um conjunto A é equivalente a um conjunto B se e somente se uma das seguintes condições estiver verificada:

(*i*) $A = B = \emptyset$;

(*ii*) existe uma função bijetora de A em B.

A notação $A \sim B$ designa que A é equivalente a B. Indica-se a negação de $A \sim B$ por $A \nsim B$.

(1.2) Observação. As seguintes propriedades são facilmente verificadas, quaisquer que sejam os conjuntos A, B e C:

(a) $A \sim A$;

(b) se $A \sim B$, então $B \sim A$;

(c) se $A \sim B$ e $B \sim C$, então $A \sim C$.

(1.3) Teorema (Bernstein-Cantor). Se um conjunto A é equivalente a um subconjunto de um conjunto B, e se B é equivalente a um subconjunto de A, então A é equivalente a B.

Demonstração. O resultado é imediato se $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$.

Suponhamos A não-vazio; decorre da hipótese que B é não-vazio.

Sejam $A_0 \subset A$, $B_0 \subset B$ tais que $A \sim B_0$ e $B \sim A_0$, e sejam f e g bijeções, respectivamente, de A em B_0 e de B em A_0.

O que faremos a seguir é determinar um subconjunto E de A que satistaça a condição

$$g^{-1}(A \cap E') = B \cap (f(E))'. \qquad (1)$$

Para tal fim consideremos $\mathcal{C} = \{ X \subset A : (A \cap A_0') \cup (gof)(X) \subset X \}$. É claro que $\mathcal{C}$ é não-vazio pois $A \in \mathcal{C}$. Seja, então,

$$E = \bigcap_{X \in \mathcal{C}} X.$$

O fato de $(A \cap A_0') \cup (gof)(E) \subset (A \cap A_0') \cup (gof)(X) \subset X$, para todo $X \in \mathcal{C}$, acarreta que

$$(A \cap A_0') \cup (gof)(E) \subset E. \qquad (2)$$

Logo, $(A \cap A_0') \cup (gof)((A \cap A_0') \cup (gof)(E)) \subset (A \cap A_0') \cup (gof)(E)$, ou seja $(A \cap A_0') \cup (gof)(E) \in \mathcal{C}$. Daí, pela definição de E, temos

$$E \subset (A \cap A_0') \cup (gof)(E). \qquad (3)$$

De (2) e (3) segue-se que $E = (A \cap A_0') \cup (gof)(E)$.

Agora, como $A \cap E' = A \cap \Big((A \cap A_0') \cup (gof)(E)\Big)' = A \cap \Big((A \cap A_0')' \cap ((gof)(E))'\Big)$

$= A_0 \cap ((gof)(E))'$, então $g^{-1}(A \cap E') = g^{-1}(A_0) \cap ((g^{-1}og)(f(E)))' = B \cap (f(E))'$, **satisfazendo (1).**

Decorre de (1) que a função h, de A em B, definida por

$$h(x) = \begin{cases} f(x), \text{ se } x \in E \\ g^{-1}(x), \text{ se } x \in A \cap E' \end{cases}$$

é bijetora. Daí, por (1.1), A ~ B. □

(1.4) Notações. Se A e B são conjuntos, a notação $A \leq B$ significa que $A \sim B_0$ para algum conjunto B_0 contido em B; e, a notação $A < B$ significa que $A \leq B$ e $A \not\sim B$.

(1.5) Observação. Quaisquer que sejam os conjuntos A, B e C, tem-se:

(a) $A \leq A$;

(b) se $A \leq B$ e $B \leq A$, então $A \sim B$;

(c) se $A \leq B$ e $B \leq C$, então $A \leq C$;

(d) se $A \subset B$, então $A \leq B$.

(1.6) Teorema. Quaisquer que sejam os conjuntos A e B, tem-se $A \leq B$ ou $B \leq A$.

Demonstração. A conclusão é óbvia se $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$.

Admitamos que A e B sejam não-vazios e que $\mathfrak{F}$ seja o conjunto de todas as funções injetoras cujos domínios e imagens são, respectivamente, subconjuntos de A e de B.

Verifica-se, sem dificuldade, que $\mathfrak{F}$ é não-vazio e parcialmente ordenado por inclusão.

Seja $\mathcal{C}$ uma cadeia em $\mathfrak{F}$. É claro que $g = \bigcup_{f \in \mathcal{C}} f$ é uma função cujos domínio e imagem estão, respectivamente, contidos em A e em B. Vamos mostrar que $g \in \mathfrak{F}$, provando que ela é injetora.

Quaisquer que sejam x_1 e x_2, elementos distintos no domínio de g, existem f_1 e f_2 em $\mathcal{C}$ tais que $(x_1, f_1(x_1)) \in f_1$ e $(x_2, f_2(x_2)) \in f_2$. Como $\mathcal{C}$ é linearmente ordenada podemos assumir que $f_1 \subset f_2$. Assim, $g(x_1) = f_1(x_1) = f_2(x_1) \neq f_2(x_2) = g(x_2)$, verificando a nossa asserção.

Portanto, pelo Lema de Zorn, $\mathcal{F}$ contém um elemento maximal que denotaremos por h.

Afirmamos que

$$\mathrm{dom}(h) = A \text{ ou } \mathrm{im}(h) = B.$$

De fato, seja $\mathrm{dom}(h) \neq A$ e suponhamos, por absurdo, que $\mathrm{im}(h) \neq B$.

Tomando $x_o \in A \cap (\mathrm{dom}(h))'$ e $y_o \in B \cap (\mathrm{im}(h))'$, a função h_1, de $\mathrm{dom}(h) \cup \{x_o\}$ em $\mathrm{im}(h) \cup \{y_o\}$, definida por

$$h_1(x) = \begin{cases} h(x), & \text{se } x \in \mathrm{dom}(h) \\ y_o, & \text{se } x = x_o \end{cases}$$

é injetora. Logo, $h_1 \in \mathcal{F}$ e $h < h_1$, contrariando a definição de h. Portanto, $\mathrm{im}(h) = B$.

Agora, se $\mathrm{dom}(h) = A$ então, por (1.4), $A \leq B$. Se $\mathrm{im}(h) = B$ então, como h é injetora, a função p, de B em A, dada por $p(y) = x$ se $y = h(x)$ é injetora e daí $B \leq A$. $\square$

(1.7) Teorema. Qualquer que seja o conjunto A, tem-se $A < \mathcal{P}(A)$.

Demonstração. É claro que $A \leq \mathcal{P}(A)$, para todo conjunto A. Vamos mostrar que $A \nsim \mathcal{P}(A)$.

O resultado é imediato para $A = \emptyset$.

Seja A não-vazio e suponhamos , por absurdo, que $A \sim \mathcal{P}(A)$. Por (1.1) segue-se que existe uma bijeção f de A em $\mathcal{P}(A)$.

Seja $E = \{x \in A : x \notin f(x)\}$. Como f é sobrejetora, existe um elemento x_o de A tal que $f(x_o) = E$.

Agora vejamos as contradições: se $x_o \in E$ então $x_o \in f(x_o)$, logo $x_o \notin E$, o que é absurdo; se $x_o \notin E$ então $x_o \in f(x_o)$ e daí $x_o \in E$, novamente temos um absurdo. Portanto $A \nsim \mathcal{P}(A)$. $\square$

(1.8) Definição. A cada conjunto A associamos um símbolo, denominado número

cardinal de A e denotado por #A, satisfazendo a seguinte condição: #A = #B se e somente se A ~ B. Serão utilizadas letras latinas minúsculas para denotar os números cardinais.

A negação de #A = #B é expressa por #A $\neq$ #B.

(1.9) Observação. A definição acima é imprecisa uma vez que não torna claro o que são os símbolos associados a um conjunto. Porém, como estamos fazendo um desenvolvimento não-axiomático da teoria dos conjuntos, ela atende os nossos objetivos.

(1.10) Definições. Dados os números cardinais a e b, sejam A e B conjuntos tais que #A = a e #B = b. Diz-se que $a \leq b$ (a é menor que b) ou $b \geq a$ (b é maior que a) se e somente se A $\leq$ B. Diz-se que $a < b$ ou $b > a$ (respectivamente, a é estritamente menor que b ou b é estritamente maior que a) se e somente se A $<$ B.

Verifica-se que estas definições independem dos conjuntos A e B.

(1.11) Observações. (*a*) A relação $\leq$ é de ordem total em qualquer conjunto de números cardinais, isto é, sendo a, b e c números cardinais tem-se:

(*i*) $a \leq a$;

(*ii*) se $a \leq b$ e $b \leq a$, então $a = b$;

(*iii*) se $a \leq b$ e $b \leq c$, então $a \leq c$;

(*iv*) $a \leq b$ ou $b \leq a$.

(*b*) se A $\subset$ B então #A $\leq$ #B;

(c) #A $<$ #$\mathcal{P}$(A), para todo conjunto A.

(1.12) Teorema. Dado um número cardinal a, existe um número cardinal b tal que $a < b$.

Demonstração. Se A é um conjunto tal que a = #A então, por (1.7) e (1.10), $a <$ #$\mathcal{P}$(A) $= b$. □

O próximo teorema é relevante, pois afirma a inexistência de um conjunto que contenha todos os números cardinais.

(1.13) Teorema. Os números cardinais não formam um conjunto.

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que A seja o conjunto dos números cardinais. Para cada $x \in A$ designemos por M_x um conjunto tal que $\#M_x = x$.

Seja $M = \bigcup_{x \in A} M_x$. Então, por (1.5.*d*), $M_x \leq M$. Daí, segundo (1.10)

$$x \leq \#M, \text{ para todo } x \in A. \qquad (1)$$

Por outro lado, de acordo com (1.12), existe $b \in A$ tal que $\#M < b$. Este resultado e (1) se contradizem. □

Agora veremos que a relação $\leq$ estabelece um boa ordem sobre qualquer conjunto não-vazio de números cardinais.

A prova do teorema (1.14) encontra-se em [R.17]. Como citam os próprios autores do artigo, C. Metelli e L. Salce, é interessante apresentar, numa introdução não-axiomática, uma demonstração que todo conjunto de números cardinais é bem ordenado sem exigir o conhecimento prévio dos números ordinais. Os autores ainda provam, no mesmo artigo, que este teorema é equivalente ao Axioma da Escolha.

(1.14) Teorema. Seja *a* um número cardinal. Então o conjunto $A = \{ x : x$ é um número cardinal e $x < a\}$ é bem ordenado pela relação definida em (1.10).

Demonstração. Seja $\mathcal{M} = (M_x)_{x \in A}$ uma família de conjuntos tal que $\#M_x = x$, para cada $x \in A$, e seja B um subconjunto não-vazio de A. Provemos que B tem mínimo.

Se $x_0 = \#\emptyset$ e $x_0 \in B$ então, por (1.5.*d*) e (1.10), temos que $x_0 \leq x$, para todo $x \in B$.

Se $x_0 \notin B$, então $M_x \neq \emptyset$, para todo $x \in B$. Logo o produto cartesiano $M = \prod_{x \in B} M_x$ é não-vazio.

Para cada $x \in B$, designemos por π_x a função projeção de M sobre M_x e, por $\mathfrak{F}$, a coleção dos subconjuntos D de M, tal que para todo $x \in B$, a restrição de π_x ao conjunto D é injetora. A coleção $\mathfrak{F}$ é não-vazia, pois dado z em M temos $\pi_x(\{z\})$ é injetora para todo x em B. É claro que $\mathfrak{F}$ é parcialmente ordenada por inclusão.

Procedendo de forma análoga áquela de (1.6) prova-se que, em $\mathfrak{F}$, toda cadeia $\mathfrak{C}$ possui um majorante dado por $E = \bigcup_{D \in \mathfrak{C}} D$.

Portanto, pelo Lema de Zorn, $\mathfrak{F}$ contém um elemento maximal que denotaremos por N.

Afirmamos que existe x_1 em B tal que $\pi_{x_1}(N) = M_{x_1}$.

De fato, se $\pi_x(N) \neq M_x$ então existe $a_x \in M_x \cap (\pi_x(N))'$ para cada $x \in B$. Daí $(a_x)_{x \in B} \in M \cap N'$ e, para todo $x \in B$, a função π_x, restrita ao conjunto $N \cup \{(a_x)_{x\in B}\}$, é injetora. Logo $N \cup \{(a_x)_{x \in B}\} \in \mathfrak{F}$ contrariando a maximalidade de N.

Como, por (1.5.*d*), $\pi_x(N) \leq M_x$, para todo $x \in B$, então

$$M_{x_1} = \pi_{x_1}(N) \sim N \sim \pi_x(N) \leq M_x,$$

e daí, por (1.10), $x_1 \leq x$. □

(1.15) Teorema. Todo conjunto de números cardinais é bem ordenado pela relação $\leq$.

Demonstração. Seja A um conjunto de números cardinais. Por (1.11.*a*), A é totalmente ordenado.

Para cada elemento x de A designemos por M_x um conjunto tal que $\#M_x = x$.

Seja $M = \bigcup_{x \in A} M_x$. Então, por (1.5.*d*), $M_x \leq M$. Daí segundo (1.10), $x \leq \#M$, para todo $x \in A$. Mas, por (1.12), existe um número cardinal b tal que $b > \#M$. Logo A é um subconjunto de $\{x : x \text{ é um número cardinal}, x < b\}$ que, pelo teorema anterior, é bem ordenado. □

(1.16) Notações. Designaremos por $\aleph_0$ o número cardinal do conjunto dos números naturais; por $P_n = \{k \in \mathbb{N} : k < n\}$ e, provisoriamente, por $\bar{n} = \#P_n$ **(identificaremos $\bar{n}$ com n em (1.27)). Como $P_0 = \emptyset$, então $\#\emptyset = \bar{0}$.**

(1.17) Teorema. **Se m e n são números naturais distintos, então $P_m \not\sim P_n$.**

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que o conjunto R dos números naturais r para os quais existe um número natural n, com $n > r$, tal que $P_n \sim P_r$, seja não-vazio. Admitamos, ainda, que m é o mínimo de R e que f é uma bijeção de P_n em P_m

Como $P_n \neq \emptyset$ temos $m \neq 0$. Se $m = 1$ e $n > 1$ então nenhuma função g de P_n em P_1 pode ser bijetora uma vez que $g(0) = g(1) = 0$. Portanto $m > 1$.

Se $f(n-1) = m-1$, a restrição da função f ao conjunto P_{n-1} é uma bijeção de P_{n-1} em P_{m-1}. Se $f(n-1) \neq m-1$, a função h de P_{n-1} em P_{m-1} definida por

$$h(x) = \begin{cases} f(x), \text{ se } f(x) \neq m-1, \\ f(n-1), \text{se } f(x) = m-1, \end{cases}$$

é bijetora. Logo existe uma bijeção de P_{n-1} em P_{m-1}.

Segue-se que $(m - 1) \in$ R, contradizendo a definição de m. □

(1.18) Teorema. Sejam m e n números naturais. Então, $m<n$ se e somente se $\overline{m} < \overline{n}$.

Demonstração. Se $m<n$ então $P_m \subset P_n$. Segue-se, por (1.11.*b*) que $\overline{m} \leq \overline{n}$. Como por (1.17), $P_m \not\sim P_n$, então $\overline{m} \neq \overline{n}$. Logo $\overline{m} < \overline{n}$

Para a recíproca observemos que se $m \geq n$ então $P_n \subset P_m$ e daí, por (1.11.*b*), $\overline{n} \leq \overline{m}$, contrariando a hipótese. □

(1.19) Teorema. Para todo número natural n, tem-se: $\overline{n} < \aleph_0$.

Demonstração. É imediato que $\overline{n} \leq \aleph_0$; provemos que $\overline{n} \neq \aleph_0$.

Admitamos, por absurdo, que exista $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mathbb{N} \sim P_{n_0}$ e seja f uma bijeção de $\mathbb{N}$ em P_{n_0}. Portanto a restrição de f ao conjunto P_{n_0+1} é um bijeção de P_{n_0+1} em Q, subconjunto de P_{n_0}. Segue-se, por (1.4), que $P_{n_0+1} \leq P_{n_0}$ e , por (1.10), que $\overline{n_0+1} \leq \overline{n_0}$. Mas isto é absurdo pois contraria (1.18). □

(1.20) Definição. **Um número cardinal a é chamado finito se e somente se a = $\bar{n}$, para algum $n \in \mathbb{N}$. Um número cardinal que não é finito é chamado infinito.**

Observemos que, por (1.19), $\aleph_0$ é um número cardinal infinito.

(1.21) Definição. Diz-se que um conjunto A é finito se #A é finito; e infinito, se #A é infinito. Diz-se que um conjunto A é infinito enumerável se #A = $\aleph_0$; e que A é enumerável se A é finito ou infinito enumerável.

Os dois teoremas a seguir são importantes. O primeiro mostra que $\aleph_0$ é o menor número cardinal infinito; e, o segundo caracteriza os números cardinais finitos.

(1.22) Teorema. Todo conjunto infinito admite um subconjunto infinito enumerável.

Demonstração. Seja A um conjunto infinito. Utilizando o segundo princípio de indução provaremos que existe uma função injetora f de $\mathbb{N}$ em A.

Sejam $\mathfrak{F}$ a coleção de todos os subconjuntos não-vazios de A e g uma função escolha para a coleção $\mathfrak{F}$, isto é, $g(B) \in B$ para todo $B \in \mathfrak{F}$.

Façamos $f(0) = g(A)$; logo a função f está definida para $n = 0$. Supondo determinados $f(0), \ldots , f(n-1)$ em A definamos

$$f(n) = g(A \cap \{f(0), \ldots , f(n-1)\}').$$

A função f está bem definida para cada número natural n uma vez que, como A é infinito então $A \cap \{f(0), \ldots , f(n-1)\}' \neq \emptyset$. Segue-se que $(A \cap \{f(0), \ldots , f(n-1)\}') \in \mathfrak{F}$.

Vamos mostrar que f é injetora.

Dados os números naturais m e n, distintos, suponhamos que $m < n$. Então, como g é uma função escolha, $f(n) \in A \cap \{f(0), \ldots , f(n-1)\}'$, ou seja, $f(n) \notin \{f(0), \ldots , f(m), \ldots , f(n-1)\}$. Portanto $f(n) \neq f(m)$. O subconjunto $\{f(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ de A verifica a asserção. $\square$

(1.23) Teorema. Seja a um número cardinal. Então, a é finito se e somente se $a < \aleph_0$.

Demonstração. Se a é finito então $a = \bar{n} < \aleph_0$, para algum $n \in \mathbb{N}$.

Para a recíproca, suponhamos, por absurdo, que a seja um número cardinal infinito. Seja A um conjunto tal que $\#A = a$. Pelo teorema anterior existe um subconjunto B de A tal que $\#B = \aleph_0$.

Mas de $B \subset A$ segue-se, por (1.11.*b*), que $\aleph_0 \leq a$, contrariando a hipótese. □

Deste teorema decorre imediatamente o corolário.

(1.24) Corolário. Um número cardinal a é infinito se e somente se $a \geq \aleph_0$.

O próximo passo será a definição das operações de adição, multiplicação e potenciação de números cardinais. Antes de enunciá-las observemos que o conjunto $A \times \{p\}$ goza das propriedades

$$A \times \{p\} \sim A$$

$$\text{se } p \neq q, \text{ então } (A \times \{p\}) \cap (A \times \{q\}) = \emptyset.$$

Isto posto, definimos

(1.25) Definição. Sejam a e b dois números cardinais e A e B conjuntos tais que $\#A = a$ e $\#B = b$. A soma de a e b , o produto de a e b e a potência *b-ésima* de a designadas, respectivamente, por $a + b$, $a \cdot b$ e a^b, são definidas por:

(*i*) $a + b = \#((A \times \{0\}) \dot{\cup} (B \times \{1\}))$;

(*ii*) $a \cdot b = \#(A \times B)$;

(*iii*) $a^b = \#(A^B)$.

Note-se que se A e B são conjuntos disjuntos, então $A \dot{\cup} B \sim (A \times \{0\}) \dot{\cup} (B \times \{1\})$ e, deste modo, (*i*) pode ser escrito de modo equivalente,

(*iv*) $a + b = \#(A \dot{\cup} B)$.

Verifica-se, sem dificuldades, que esta definição independe dos conjuntos A e B escolhidos.

Dentre as propriedades decorrentes da definição citamos a associativa e a comutativa que utilizaremos sem explicitar.

A seguir mostraremos que as operações de adição e multiplicação são compatíveis com a relação de ordem definida em (1.10).

(1.26) Teorema. Sejam a, b e c números cardinais com $b \leq a$. Então,

(*i*) $b + c \leq a + c$;

e

(*ii*) $b.c \leq a.c$.

Demonstração. Sejam A, B e C, com B $\subset$ A, conjuntos tais que #A = a, #B = b e #C = c.

Os itens (*i*) e (*ii*) seguem-se, respectivamente, do fato de serem injetoras as funções f e g , de $(B \times \{0\}) \dot{\cup} (C \times \{1\})$ em $(A \times \{0\}) \dot{\cup} (C \times \{1\})$ e de $B \times C$ em $A \times C$, definidas por $f(x) = x$ e $g(x,y) = (x,y)$. □

O teorema (1.27) nos permitirá identificar um número natural n com o número cardinal $\bar{n}$. Com isto abandonaremos a notação $\bar{n}$ introduzida em (1.16).

(1.27) Teorema. Quaisquer que sejam os números naturais m e n, tem-se:

(*i*) $\overline{m+n} = \bar{m} + \bar{n}$

(*ii*) $\overline{m \cdot n} = \bar{m} \cdot \bar{n}$

(*iii*) $\bar{m} \leq \bar{n}$ se e somente se $m \leq n$.

Demonstração. O item (*i*) segue do fato de ser bijetora a função f, de P_{m+n} em $\{(r,0) : r \in P_m\} \dot{\cup} \{(s,1) : s \in P_n\}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} (x,0), \text{ se } 0 \leq x < m \\ (x-m,1), \text{ se } m \leq x < m+n \end{cases}.$$

O item (*ii*) segue da bijeção g, de $P_{m.n}$ em $\{(r,s) : r \in P_m, s \in P_n\}$, definida por

$$f(p) = (r,s), \text{ se } sm + r \leq p < (s+1)m.$$

O item (*iii*) segue de (1.18). □

De (1.28) a (1.32) faremos a verificação de algumas propriedades envolvendo os números cardinais infinitos.

(1.28) Teorema. Se a é um número cardinal infinito, então $a + a = a$.

Demonstração. Seja A um conjunto tal que $\#A = a$. Como $a + a = \#((A \times \{0\}) \dot{\cup} (A \times \{1\})) = \#((A \times \{0,1\})$, provemos que $A \times \{0,1\} \sim A$.

Se $\#A = \aleph_0$ então, escrevendo $A = \{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, segue-se que a função f_0, de A em $A \times \{0,1\}$, definida por

$$f_0(a_i) = \begin{cases} (a_{\frac{i}{2}},0), \text{ se } i \text{ é par}, \\ (a_{\frac{i+1}{2}},1), \text{ se } i \text{ é impar}, \end{cases}$$

é bijetora.

Se $\#A > \aleph_0$ então a coleção $\mathfrak{F}$ da funções bijetoras f tais que dom(f) está contido em A, $\#(\text{dom}(f)) \geq \aleph_0$ e $\text{im}(f) = \text{dom}(f) \times \{0,1\}$ é não-vazia e parcialmente ordenada por inclusão.

Procedendo de forma análoga àquela de (1.6) prova-se que em $\mathfrak{F}$ toda cadeia $\mathcal{C}$ tem um majorante dada pela função $g = \bigcup_{f \in \mathcal{C}} f$, que tem por domínio $\bigcup_{f \in \mathcal{C}} \text{dom}(f)$.

Portanto, pelo Lema de Zorn, $\mathfrak{F}$ contém um elemento maximal h cujo domínio chamaremos de D_h.

Como h é uma função bijetora de D_h em $D_h \times \{0,1\}$ temos que $D_h \sim D_h \times \{0,1\}$.

Verifiquemos que $D_h \sim A$.

Inicialmente observemos que se $\#(A \cap D'_h) > \aleph_0$ então, escolhemos F, subconjunto de $A \cap D'_h$, infinito enumerável.

Se u é uma bijeção de F em $F\times\{0,1\}$ então a função ν, de $D_h \dot{\cup} F$ em $(D_h \dot{\cup} F) \times \{0,1\}$, definida por

$$\nu(x) = \begin{cases} h(x), \text{ se } x \in D_h \\ u(x), \text{ se } x \in F \end{cases}$$

é bijetora. Logo $\nu \in \mathfrak{F}$ e verifica $\nu \supset h$, $\nu \neq h$. Isto é absurdo pois contraria a maximalidade de h em $\mathfrak{F}$. Portanto $\#(A \cap D'_h) \leq \aleph_0$.

Seja $H = \{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ um subconjunto infinito enumerável de D_h.

Agora, se $A \cap D'_h = \{b_j\}_{j=0}^{n}$ então a função w_1, de A em $D_h \times \{0,1\}$, definida por

$$w_1 = \begin{cases} h(x_j), \text{ se } x = b_j, \text{ com } 0 \leq j \leq n, \\ h(x_{i+n+1}), \quad \text{se } x = x_i, \ i \in \mathbb{N} \\ h(x), \text{ se } x \in D_h \cap H' \end{cases}$$

é bijetora, e $A \sim D_h \times \{0,1\} \sim D_h$, neste caso.

Se $A \cap D'_h = \{c_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, então a função w_2, de A em $D_h \times \{0,1\}$, definida por

$$w_2(x) = \begin{cases} h(x_{2k}), \text{ se } x = c_k, \ k \in \mathbb{N}, \\ h(x_{2i+1}), \text{ se } x = x_i, \ i \in \mathbb{N}, \\ h(x), \text{ se } x \in D_h \cap H', \end{cases}$$

é bijetora e, novamente, $A \sim D_h \times \{0,1\} \sim D_h$. □

(1.29) Corolário. Se a é um número cardinal infinito e b é um número cardinal tal que $b \leq a$ então $a + b = a$.

Demonstração. Se $0 \leq b \leq a$, então por (1.26.*i*) e (1.28), temos $a \leq a+b \leq a+a=a$. □

(1.30) Corolário. Se a é um número cardinal infinito e b e c são números cardinais tais que $b<a$ e $c<a$ então $b+c<a$.

Demonstração. Se $a = \aleph_0$, o resultado é imediato. Se $a > \aleph_0$ tomamos $d=\max(\aleph_0,b,c)$. Então $d<a$ e, por (1.26.i) e (1.28), temos $b+c\leq d+d=d<a$. □

(1.31) Teorema. Seja a um número cardinal infinito. Então $a.a = a$.

Demonstração. Seja A um conjunto com #A = a. Provemos que A ~ A X A.

Se A é infinito enumerável, escrevemos $A = \{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. A asserção segue do fato de ser bijetora a função f_0, de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$, definida por $f_0(r,s) = 2^r(2s + 1) -1$.

Suponhamos que $\#A > \aleph_0$ e, por (1.22), seja B um subconjunto infinito enumerável de A. Como B ~ B×B, então a coleção $\mathcal{F}$ das bijeções f de dom(f) em dom(f)×dom(f), onde dom(f) está contido em A e $\#(\text{dom}(f)) \geq \aleph_0$ é não-vazia e parcialmente ordenada por inclusão.

Prova-se com argumentos semelhantes aos utilizados em (1.6) que em $\mathcal{F}$ toda cadeia $\mathcal{C}$ tem um majorante, $g = \bigcup_{f\in\mathcal{C}} f$, cujo domínio é $\bigcup_{f\in\mathcal{C}} \text{dom}(f)$.

Segue-se, pelo Lema de Zorn, que $\mathcal{F}$ possui um elemento maximal h cujo domínio denotaremos por D_h.

Agora, se provarmos que A ~ D_h, como $D_h \sim D_h \times D_h$, a demonstração estará completa. Para isto mostraremos inicialmente que

$$\#(A \cap D_h') < \#D_h. \tag{1}$$

Verifiquemos, então, que a suposição $\#(A \cap D_h') \geq \#D_h$ nos conduz a uma contradição.

De fato, desta hipótese segue-se que existe E, contido em $A \cap D_h'$ tal que $E \sim D_h$. Segue-se que $E \sim D_h \times E \sim E \times D_h \sim E \times E$ e, utilizando (1.25.iv) e (1.28), $\#E = \#\big((E\times D_h) \dot\cup (D_h\times E) \dot\cup (E\times E)\big)$. Logo existe uma bijeção u de E em $(E\times D_h) \dot\cup (D_h\times E) \dot\cup (E\times E)$.

Lembrando que

$$(D_h\dot\cup E) \times (D_h\dot\cup E) = (D_h\times D_h) \dot\cup (E\times D_h) \dot\cup (D_h\times E) \dot\cup (E\times E)$$

temos que a função v, de $D_h \dot\cup E$ em $(D_h \dot\cup E)\times(D_h \dot\cup E)$, definida por

$$\nu(x) = \begin{cases} h(x), \text{ se } x \in D_h, \\ u(x), \text{ se } x \in E, \end{cases}$$

é bijetora. Portanto $\nu \in \mathfrak{F}$, $\nu \supset h$ e $\nu \neq h$. Isto é absurdo pois contraria a maximalidade de h.

De (1) e utilizando (1.29), temos: $\#A = \#D_h + \#(A \cap D_h') = \#D_h$. Daí $A \sim D_h$. □

(1.32) Corolário. Seja a um número cardinal infinito e b um número cardinal tal que $1 \leq b \leq a$. Então $a.b=a$.

Demonstração. Por (1.26.*ii*) e (1.31), temos $a \leq a.b \leq a.a=a$. □

(1.33) Teorema. Sejam I um conjunto com $\#I \leq \aleph_0$ e $(A_i)_{i \in I}$ uma família de conjuntos tais que $\#A_i \leq \aleph_0$, para cada $i \in I$. Então $\#(\bigcup_{i \in I} A_i) \leq \aleph_0$.

Demonstração. Inicialmente observemos que $I \leq \mathbb{N}$ e que $A_i \sim A_i \times \{i\}$ e $A_i \leq \mathbb{N}$, para todo $i \in I$.

Portanto se a família $(A_i)_{i \in I}$ é constituída por conjuntos dois a dois disjuntos, então

$$\bigcup_{i \in I} A_i \sim \bigcup_{i \in I} (A_i \times \{i\}) \leq \bigcup_{i \in I} (\mathbb{N} \times \{i\}) = \mathbb{N} \times I \leq \mathbb{N} \times \mathbb{N}.$$

Se existem i e j em I, distintos, tais que $A_i \cap A_j \neq \emptyset$, então tomamos a família $(B_i)_{i \in I}$, definida por: $B_0 = A_0$ e $B_i = A_i \cap (\bigcup_{j=0}^{i-1} A_j)'$. Segue-se que a família $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ é constituída por conjuntos dois a dois disjuntos e

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} B_i \leq \mathbb{N} \times \mathbb{N}.$$

A asserção segue por (1.31). □

Os resultados dos teoremas (1.34) e (1.36) são bastante conhecidos, assim omitiremos sua prova.

(1.34) Teorema. Se a é um número cardinal então $a < 2^a$.

(1.35) Notação. Designaremos por Γ o conjunto de todas as aplicações de $\mathbb{N}$ em $\{0,1\}$. Por (1.25.*iii*), tem-se $\#\Gamma = 2^{\aleph_0}$. O número cardinal $2^{\aleph_0}$ também é denotado por c e chama-se potência do contínuo.

(1.36) Teorema. Tem-se:

(*i*) $\#\mathbb{Q} = \aleph_0$;

(*ii*) $\#]0,1[= \#[0,1] = c$

(*iii*) $\#\{x \in]0,1[: x \text{ é irracional}\} = c$.

(1.37) Teorema. Seja A um conjunto infinito. Tem-se:

(*i*) se n é um número natural não-nulo e $\mathfrak{F}(n)$ é a coleção dos subconjuntos de A com n elementos, então $\#\mathfrak{F}(n) = \#A$;

(*ii*) se $\mathfrak{F}$ é a coleção dos subconjuntos finitos de A, então $\#\mathfrak{F} = \#A$.

Demonstração. Iniciemos a prova de (*i*) tomando $B = \{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, subconjunto enumerável de A. Como a função f, de A em $\mathfrak{F}(n)$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \{x_1,\ldots,x_{n-1},x_{n+i}\}, \text{ se } x=x_i, \text{ com } i \in \mathbb{N} \\ \{x_1,\ldots,x_{n-1},x\}, \text{ se } x \in A \cap B', \end{cases}$$

é injetora, então

$$\#A \leq \#\mathfrak{F}(n). \tag{1}$$

Por outro lado a função g, de $\mathfrak{F}(n)$ em A^n, definida por $g(\{y_1,\ldots,y_n\}) = (y_1,\ldots,y_n)$ é injetora; logo, lembrando (1.31),

$$\#\mathfrak{F}(n) \leq \#A^n = \#A. \tag{2}$$

De (1) e (2) segue-se a igualdade.

Para a prova de (*ii*) observemos que $\mathfrak{F}(n) \sim A\times\{n\}$, para cada número natural

n, não-nulo. Portanto $\mathcal{F} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}(n) \sim A \times \mathbb{N}$. Segue-se, utilizando (1.32), que $\#\mathcal{F} = \#(A \times \mathbb{N}) = \#A$. □

Introduziremos a seguir os números ordinais. Observemos que a principal diferença entre os números cardinais e os números ordinais reside no fato que a todo conjunto está associado um número cardinal, enquanto números ordinais estão associados somente a conjuntos bem ordenados.

(1.38) Definição. Diz-se que um conjunto A é isomorfo a um conjunto B se e somente se uma das seguintes condições estiver verificada:

(*i*) $A = B = \emptyset$;

(*ii*) A e B são não-vazios, totalmente ordenados, e existe uma bijeção f, de A em B, que preserva o ordem.

Se A é isomorfo a B escreve-se $A \approx B$. Em caso contrário, escreve-se $A \not\approx B$.

Se A e B são não-vazios e $A \approx B$, a função f de (1.38.*ii*) chama-se isomorfismo de ordem de A em B. É claro que f^{-1} é um isomorfismo de ordem de B em A.

(1.39) Observações. Quaisquer que sejam os conjuntos A, B e C, não-vazios e totamente ordenados, tem-se:

(*a*) $A \approx A$;

(*b*) se $A \approx B$ então $B \approx A$;

(*c*) se $A \approx B$ e $B \approx C$, então $A \approx C$.

(1.40) Teorema. Se B é bem ordenado e $A \approx B$, então A é bem ordenado.

Demonstração. Seja f um isomorfismo de ordem de A em B e seja D um subconjunto não-vazio de A. Se $m = \min\{f(x) : x \in D\}$ então $f^{-1}(m) \leq f^{-1}(f(x)) = x$, para todo $x \in D$. □

(1.41) Teorema. Se A é um conjunto bem ordenado e f é uma função injetora de A em A que preserva a ordem, então $x \leq f(x)$, para todo $x \in A$.

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que o conjunto $B = \{x \in A : f(x) < x\}$ seja não-vazio e seja $x_0 = \min B$. A hipótese acarreta que $f(f(x_0)) < f(x_0)$. Logo $f(x_0) \in B$ e $f(x_0) < x_0$, o que é uma contradição. □

(1.42) Teorema. Se A e B são bem ordenados e $A \approx B$ então existe um único isomorfismo de ordem de A em B.

Demonstração. Admitindo que f e g sejam isomorfismos de ordem de A em B então $f^{-1}og$ e $g^{-1}of$ são isomorfismos de ordem de A em A. Aplicando (1.41), temos

$$x \leq (f^{-1}og)(x) \text{ e } x \leq (g^{-1}of)(x),$$

para todo $x \in A$. Portanto $f(x) \leq g(x)$ e $g(x) \leq f(x)$. Daí $f = g$. □

(1.43) Definição. Sejam A um conjunto bem ordenado e x um elemento de A. O conjunto $A_x = \{y \in A : y < x\}$ é denominado segmento inicial de A determinado por x. Se $x_0 = \min A$, então $A_{x_0} = \emptyset$.

(1.44) Teorema. Seja A um conjunto bem ordenado. Então:

(*i*) para todo $x \in A$, tem-se $A \not\approx A_x$;

(*ii*) quaisquer que sejam x e y em A, se $x \leq y$ tem-se $(A_y)_x = A_x$;

(*iii*) quaisquer que sejam x e y em A, se $A_x \approx A_y$ tem-se $x = y$.

Demonstração. Supondo que exista $x \in A$ tal que $A \approx A_x$, então f, isomorfismo de ordem de A em A_x, verifica $f(x) < x$, contradizendo (1.41). Isto prova (*i*).

O item (*ii*) é imediato.

Para a prova de (*iii*) supomos, por absurdo, que $x \neq y$. Admitindo-se $x < y$ temos, por (*ii*), que $A_y \approx A_x = (A_y)_x$, contradizendo (*i*). □

(1.45) Teorema. Sejam A e B conjuntos bem ordenados com $A \approx B$. Se f é isomorfismo de ordem de A em B então, para todo x em A, tem-se:

(*i*) $f(A_x) = B_{f(x)}$;

(*ii*) $A_x \approx B_{f(x)}$.

Demonstração. Para a prova de (i) seja $z \in A_X$. Logo $z < x$ e daí $f(z) < f(x)$, mostrando que $f(A_X) \subset B_{f(X)}$.

Para verificarmos a igualdade tomemos $w \in B_{f(X)}$. Logo $w < f(x)$ e daí $f^{-1}(w) < x$. Portanto $f^{-1}(w) \in A_X$ e, desta relação, segue-se que $w \in f(A_X)$.

O item (ii) é imediato. □

(1.46) Definição. Sejam A e B conjuntos bem ordenados. Diz-se que $A \lesssim B$ se e somente se $A \approx B$ ou $A \approx B_y$, para algum $y \in B$. Diz-se que $A < B$ se $A \lesssim B$ e $A \not\approx B$.

Como $\emptyset \approx B_{y_0}$, onde $y_0 = \min B$, então completa-se a definição colocando $\emptyset \lesssim B$, para todo conjunto B bem ordenado.

(1.47) Observações. (a) De acordo com (1.44.iii) o elemento y de B tal que $A \approx B_y$, na definição acima, é único.

(b) Se A é um conjunto bem ordenado então, quaisquer que sejam x e y em A, tem-se $A_X \lesssim A_y$ se e somente se $x \leq y$.

(1.48) Teorema. Quaisquer que sejam os conjuntos A, B e C, bem ordenados, tem-se:

(i) se $A \lesssim B$ e $B \lesssim A$, então $A \approx B$;

(ii) se $A \lesssim B$ e $B \lesssim C$, então $A \lesssim C$;

(iii) $A \lesssim B$ ou $B \lesssim A$.

Demonstração. Para a prova de (i) mostremos que não ocorre $A < B$ e $B < A$. De fato, se tal ocorresse então $A \approx B_y$ e $B \approx A_X$, para algum y em B e algum x em A.

Designando por f o isomorfismo de ordem de B em A_X, teríamos, lembrando (1.45.ii) e (1.44.ii), $A \approx B_y \approx (A_X)_{f(y)} = A_{f(y)}$, contrariando (1.44.$i$).

No item (ii) se $A \approx B$ ou $B \approx C$ então a conclusão é imediata.

Se existem $y \in B$ e $z \in C$ tais que $A \approx B_y$ e $B \approx C_z$, e se g é o isomorfismo de ordem de B em C, então $A \approx B_y \approx (C_z)_{g(y)} = C_{g(y)}$.

Para a prova do item (iii) observemos que para $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$ a conclusão é imediata.

Suponhamos que A e B sejam não-vazios e seja $\mathfrak{F}$ a coleção dos isomorfismos de ordem cujo domínio é o conjunto A ou um segmento inicial determinado por um dos seus elementos e cuja imagem é o conjunto B ou um segmento inicial determinado por um dos seus elementos. É imediato que $\mathfrak{F}$ é não-vazia e parcialmente ordenada por inclusão.

Verifica-se, utilizando-se de procedimentos análogos àqueles de (1.6), que em $\mathfrak{F}$ toda cadeia $\mathcal{C}$ tem um majorante dado por $g = \bigcup_{f \in \mathcal{C}} f$, o qual é um isomorfismo de ordem definido em $\bigcup_{f \in \mathcal{C}} \mathrm{dom}(f)$ e com imagem em $\bigcup_{f \in \mathcal{C}} \mathrm{im}(f)$.

Segue-se, pelo Lema de Zorn, que $\mathfrak{F}$ admite um elemento maximal que chamaremos de h.

Agora, se mostrarmos que $\mathrm{dom}(h) = A$ ou $\mathrm{im}(h) = B$, a prova estará completa.

Seja $\mathrm{dom}(h) \neq A$. Admitamos que existam x_0 em A e, por absurdo, y_0 em B, tais que $\mathrm{dom}(h) = A_{x_0}$ e $\mathrm{im}(h) = B_{y_0}$.

Se $x_1 = \min\{x \in A : x_0 < x\}$, quando $A_{x_0} \bigcup \{x_0\} \neq A$, e $y_1 = \min\{y \in B : y_0 < y\}$, quando $B_{y_0} \bigcup \{y_0\} \neq B$ então a função ν, definida em A ou em A_{x_1}, dada por

$$\nu(x) = \begin{cases} h(x), \text{ se } x \in A_{x_0}, \\ y_0, \text{ se } x = x_0 \end{cases}$$

é um isomorfismo de ordem cuja imagem é B ou B_{y_1}. Portanto $\nu \in \mathfrak{F}$, $\nu \supset h$ e $\nu \neq h$. Isto contradiz a maximalidade de h. Segue-se, então, que $\mathrm{im}(h) = B$. $\square$

(1.49) Definição. A cada conjunto A, bem ordenado, está associado um símbolo, denominado número ordinal de A denotado por ord(A), satisfazendo a seguinte condição : $\mathrm{ord}(A) = \mathrm{ord}(B)$ se e somente se $A \approx B$. Estende-se a definição ao conjunto vazio designando seu número ordinal por $\mathrm{ord}(\emptyset)$.

Usualmente utilizaremos letras gregas minúsculas para designar o número ordinal de um conjunto.

(1.50) Definições. Dados os números ordinais α e β, distintos de $\mathrm{ord}(\emptyset)$, sejam A e B conjuntos bem ordenados tais que $\mathrm{ord}(A) = \alpha$ e $\mathrm{ord}(B) = \beta$. Diz-se que

$\alpha \leq \beta$ (α é menor que β) ou que $\beta \geq \alpha$ (β é maior que α) se e somente se $A \lesssim B$. Diz-se que $\alpha < \beta$ ou $\beta > \alpha$ (respectivamente, α estritamente menor que β e β estritamente maior que α) se e somente se $A < B$. Estende-se a definição para $\alpha = \text{ord}(\emptyset)$ tomando $A = \emptyset$.

Verifica-se,sem dificuldade, que as definições independem dos conjuntos A e B escolhidos.

(1.51) Observações. (a) A relação $\leq$ é de ordem total em qualquer conjunto de números ordinais, isto é, sendo α, β e γ números ordinais tem-se:

(*i*) $\alpha \leq \alpha$;

(*ii*) se $\alpha \leq \beta$ e $\beta \leq \alpha$ então $\alpha = \beta$;

(*iii*) se $\alpha \leq \beta$ e $\beta \leq \gamma$ então $\alpha \leq \gamma$;

(*iv*) $\alpha \leq \beta$ ou $\beta \leq \alpha$.

(*b*) Para todo número ordinal α, tem-se $\text{ord}(\emptyset) \leq \alpha$.

(c) Para todo número ordinal β denota-se por $P_\beta = \{\alpha : \alpha$ é um número ordinal, $\alpha < \beta\}$. É claro que $P_{\text{ord}(\emptyset)} = \emptyset$ e que $\alpha \leq \beta$ se e somente se $P_\alpha \subset P_\beta$.

(1.52) Teorema. Seja φ um número ordinal. Tem-se:

(*i*) se $\varphi \neq \text{ord}(\emptyset)$ então P_φ é bem ordenado;

(*ii*) $\text{ord}(P_\varphi) = \varphi$.

Demonstração. Para a prova de (*i*) seja B um conjunto bem ordenado tal que $\text{ord}(B) = \varphi$ e, para cada α em P_φ, $\alpha \neq \text{ord}(\emptyset)$, seja $A(\alpha)$ um conjunto bem ordenado com $\text{ord}(A(\alpha)) = \alpha$. Se $\alpha = \text{ord}(\emptyset)$ tomamos $A(\alpha) = \emptyset$.

Segue-se que, para todo α em P_φ, $A(\alpha) < B$ e, por (1.47.a), existe um único x_α em B tal que $A(\alpha) \approx B_{x_\alpha}$. Portanto está bem definida a função f, de P_φ em B, dada por $f(\alpha) = x_\alpha$.

Provemos que f é um isomorfismo de ordem.

Dados α_1 e α_2 em P_φ, com $\alpha_1 < \alpha_2$, temos que $A(\alpha_1) < A(\alpha_2)$. Daí $B_{x_{\alpha_1}} < B_{x_{\alpha_2}}$ e, lembrando (1.47.*b*), $x_{\alpha_1} < x_{\alpha_2}$. Por outro lado, dado $y \in B$, se $\gamma = \text{ord}(B_y)$ então $A(\gamma) \approx B_y$ e $f(\text{ord}(B_y)) = y$, mostrando que f é sobrejetora.

Segue-se que $P_\varphi \approx B$ e, de acordo com (1.40), P_φ é bem ordenado.

O item (*ii*) é trivial. □

(1.53). Corolário. Seja a um número cardinal. Então existem um número ordinal α tal que $\#P_\alpha = a$.

Demonstração. Se $a = 0$, tomamos $\alpha = \mathrm{ord}(\emptyset)$. Se $a \neq 0$ escolhemos um conjunto A, bem ordenado, tal que $\#A = a$.

Seja $\alpha = \mathrm{ord}(A)$. Então, por (1.52.*ii*), $A \approx P_\alpha$. Daí $A \sim P_\alpha$. □

(1.54) Teorema. Todo conjunto de números ordinais é bem ordenado.

Demonstração. Seja P um conjunto de números ordinais e A um subconjunto não-vazio de P.

Se γ é um elemento de A tal que $\gamma \leq \alpha$, para todo $\alpha \in A$, então $\gamma = \min A$; se existe β em A tal que $\beta < \gamma$ tomamos $B = \{\beta \in A : \beta < \gamma\}$.

Como $B \subset P_\gamma$, e este é bem ordenado, segue-se que B é bem ordenado. Portanto $\delta = \min B = \min A$. □

(1.55) Teorema. Os números ordinais não formam um conjunto.

Demonstração. Suponhamos que L seja o conjunto dos números ordinais. Então, por (1.54), L é bem ordenado. Segue-se que $\mathrm{ord}(L) \in L$ e, por (1.52.*ii*), $L \approx P_{\mathrm{ord}(L)} = L_{\mathrm{ord}(L)}$, contradizendo (1.44.*i*). □

(1.56) Corolário. Seja A um conjunto não-vazio de números ordinais. Então existe um número ordinal γ tal que $\alpha < \gamma$, para todo $\alpha \in A$.

Demonstração. Supondo que para cada número ordinal β exista um número ordinal α em A tal que $\beta \leq \alpha$, então $\left(\bigcup_{\alpha \in A} P_\alpha\right) \cup A$ é o conjunto dos números ordinais.

Isto contraria (1.55). $\square$

(1.57) Corolário. Qualquer que seja o número ordinal α existe um número ordinal β tal que $\alpha < \beta$.

A seguir definiremos a soma e o produto de números ordinais e faremos a identificação dos números naturais com os números ordinais estritamente menores que ord($\mathbb{N}$).

Inicialmente observamos que

(1.58) Observações. (*a*) Se A e B são conjuntos disjuntos e bem ordenados então $A \dot{\bigcup} B$ é bem ordenado pela relação $\leq$ definida por $x \leq y$ se e somente se uma das seguintes condições é válida:

(*i*) $x \in A$, $y \in A$ e $x \leq y$ (em A), ou

(*ii*) $x \in B$, $y \in B$ e $x \leq y$ (em B), ou

(*iii*) $x \in A$ e $y \in B$.

(*b*) Se A e B são conjuntos bem ordenados então $A \times B$ é bem ordenado pela relação $\leq$ definida por $(x_1,y_1) \leq (x_2,y_2)$ se e somente se uma das seguintes condições é válida:

(*a*) $y_1 < y_2$, ou

(*b*) se $y_1 = y_2$ então $x_1 \leq x_2$.

(1.59) Definições. Sejam α e β números ordinais distintos de ord($\emptyset$). A soma e o produto dos números ordinais α e β são definidas, respectivamente, por:

(*i*) $\alpha + \beta = \text{ord}(A \dot{\bigcup} B)$, onde A e B são conjuntos disjuntos, bem ordenados, tais que $\text{ord}(A) = \alpha$, $\text{ord}(B) = \beta$ e $A \dot{\bigcup} B$ é ordenado como em (1.58.*a*).

(*ii*) $\alpha \,.\, \beta = \text{ord}(A \times B)$, onde A e B são conjuntos bem ordenados tais que $\text{ord}(A) = \alpha$, $\text{ord}(B) = \beta$ e $A \times B$ é ordenado como em (1.58.*b*).

Completa-se a definição colocando-se

$$\alpha + \text{ord}(\emptyset) = \text{ord}(\emptyset) + \alpha = \alpha$$

e

$$\alpha \,.\, \text{ord}(\emptyset) = \text{ord}(\emptyset) \,.\, \alpha = \text{ord}(\emptyset),$$

para cada número ordinal α.

Verifica-se que estas definições independem dos conjuntos bem ordenados A e B.

(1.60) Notações. Designaremos por ω o número ordinal do conjunto dos números naturais, com a ordem habitual. Segue-se, por (1.52.*ii*), que $\mathbb{N} \approx P_\omega$.

Relembrando que $P_n = \{k \in \mathbb{N} : k < n\}$ (veja 1.16), denotaremos por $\overset{\approx}{n} = \mathrm{ord}(P_n)$. Como $P_n < \mathbb{N}$, segue, por (1.50) que $\overset{\approx}{n} \in P_\omega$.

(1.61) Teorema. Quaisquer que sejam m e n números naturais, tem-se:

(*i*) $\overset{\sim}{\overline{m+n}} = \overset{\approx}{m} + \overset{\approx}{n}$;

(*ii*) $\overset{\sim}{\overline{m\,.\,n}} = \overset{\approx}{m}\ .\ \overset{\approx}{n}$;

(*iii*) $m \leq n$ se e somente se $\overset{\approx}{m} \leq \overset{\approx}{n}$.

Demonstração. As asserções são triviais se $m = 0$ ou $n = 0$.

Admitamos m e n não-nulos e seja $B = \{s \in \mathbb{N} : m \leq s < m + n\}$. Então $P_m \dot{\cup} B = P_{m+n}$ e daí

$$\mathrm{ord}(P_m \dot{\cup} B) = \overset{\sim}{\overline{m+n}} \qquad (1)$$

Por outro lado $B \approx P_n$. Logo, por (1.59.*i*),

$$\mathrm{ord}(P_m \dot{\cup} B) = \overset{\approx}{m} + \overset{\approx}{n}. \qquad (2)$$

De (1) e (2) segue-se a igualdade , provando (*i*).

Para a prova de (*ii*) notemos que

$$\mathrm{ord}(P_m \times P_n) = \overset{\approx}{m}\ .\ \overset{\approx}{n}. \qquad (3)$$

A função f, do conjunto $P_{m.n}$ em $P_m \times P_n$, com a relação de ordem dada em (1.58.*b*), e definida por

$$f(p) = (r,s) \text{ se } sm + r \leq p < (s+1)m$$

é um isomorfismo de ordem. Logo

$$\mathrm{ord}(P_m \times P_n) = \overset{\sim}{\overline{m\,.\,n}}. \qquad (4)$$

De (3) e (4) segue-se a igualdade.

Na prova de *(iii)* é imediato que se $m \leq n$ então $\tilde{\tilde{m}} \leq \tilde{\tilde{n}}$. A recíproca segue de : se $\tilde{\tilde{m}} \leq \tilde{\tilde{n}}$ então $P_m \subset P_n$. □

Assim cada número natural é idêntico a um número ordinal de P_ω. Utilizaremos os números naturais indistintamente como números cardinais finitos ou números ordinais de P_ω.

(1.62) Definição. Um número ordinal α é chamado finito se e somente se $\alpha < \omega$; é chamado transfinito se e somente se $\alpha \geq \omega$.

O próximo teorema mostra a existência de um único número ordinal, que denotaremos por Ω em todo este trabalho, satisfazendo as condições do teorema

(1.63) Teorema. Existe um único número ordinal Ω que satisfaz as seguintes condições:

(i) P_Ω é não-enumerável;

(ii) para todo α em P_Ω tem-se que P_α é enumerável;

(iii) qualquer que seja D, subconjunto enumerável de P_Ω, existe δ em P_Ω tal que $\alpha < \delta$, para todo α em D.

Demonstração. Lembrando (1.15), (1.53) e (1.54), sejam $\aleph_1=\min\{a : a$ é um número cardinal, $\aleph_0 < a\}$ e $\Omega=\min\{\alpha : \alpha$ é um número ordinal, $\#P_\alpha = \aleph_1\}$. Logo *(i)* é válida.

Se $\alpha < \Omega$, tem-se $P_\alpha \subset P_\Omega$. Daí, por (1.11.*b*) e pela definição de Ω, $\#P_\alpha < \aleph_1$, provando *(ii)*.

Para a prova de *(iii)* seja $E = \left(\bigcup_{\alpha \in D} P_\alpha\right) \cup D$. Então $E \subset P_\Omega$ e, por (1.33), E é enumerável. Segue-se, como P_Ω é não-enumerável, que $P_\Omega \cap E'$ é não-vazio. Escolhendo δ em $P_\Omega \cap E'$ não podemos ter $\delta \leq \alpha_0$, para algum α_0 em D senão $\delta \in E$. Portanto $\delta > \alpha$, para todo $\alpha \in D$.

Para verificarmos a unicidade consideremos Ω_1 um número ordinal que verifica *(i)*-*(iii)*. É claro que $\Omega_1 \geq \Omega$. Agora, se $\Omega_1 > \Omega$ então, por *(ii)*, P_Ω é

enumerável, contradizendo (*i*). $\square$

Encerrando este parágrafo introduziremos os conceitos de número ordinal sucessor, número ordinal limite e ressaltaremos outras propriedades do número ordinal Ω, que nos serão úteis.

(1.64) Definição. Sejam α e β números ordinais. Diz-se que β é um sucessor de α se e somente se $\beta = \alpha + 1$. Se β não é o sucessor de nenhum número ordinal diz-se que β é um número ordinal limite.

(1.65) Teorema. Sejam α e β números ordinais. Se β é um sucessor de α então $\beta > \alpha$.

Demonstração. A asserção é trivial se $\alpha = 0$.

Suponhamos $\alpha \neq 0$. Seja A um conjunto bem ordenado, com ord(A) $= \alpha$, e seja *a* um elemento tal que *a* $\notin$ A. O conjunto A $\dot{\cup}$ (*a*) é bem ordenado pela relação de ordem dada em (1.58.*a*). Segue-se que A $<$ A $\dot{\cup}$ (*a*) e, por (1.50), que

$$\alpha = \text{ord}(A) < \text{ord}(A \;\dot{\cup}\; (a)) = \alpha + 1 = \beta. \;\square$$

(1.66) Exemplos. 0 e ω são números ordinais limites.

De fato se 0 fosse o sucessor de algum número ordinal α_0 teríamos, pelo teorema anterior, que $0 > \alpha_0$, contrariando (1.51.*b*).

Da mesma forma se existisse um número ordinal α_1 tal que $\alpha_1 + 1 = \omega$ então, pelo teorema anterior, $\alpha_1 < \omega$. Segue-se que α_1 é um número natural e daí $\omega = \alpha_1 + 1$ é um número natural. Logo $\omega \in P_\omega$ o que é absurdo.

(1.67) Teorema. Sejam α e β números ordinais tais que $\alpha < \beta \leq \alpha + 1$. Então $\beta = \alpha + 1$.

Demonstração. Seja B um conjunto bem ordenado tal que ord(B) $= \beta$. Como $\alpha < \beta$ então, por (1.50) e (1.46), existe $y \in$ B tal que ord(B_y) $= \alpha$.

O conjunto $B_y \dot{\bigcup} \{y\}$ é bem ordenado pela relação de ordem dada em (1.58.*a*). Logo, por (1.59.*i*), $\alpha + 1 = ord(B_y \dot{\bigcup} \{y\})$.

Por outro lado a relação de ordem acima é a restrição da boa ordem de B ao conjunto $B_y \dot{\bigcup} \{y\}$. Portanto, com a relação de ordem do conjunto B,

$$ord(B_y \dot{\bigcup} \{y\}) = \alpha + 1. \tag{1}$$

Agora se $B_y \dot{\bigcup} \{y\} = B$ então $ord(B_y \dot{\bigcup} \{y\}) = \beta$. Este resultado, juntamente com (1), verifica a asserção.

Se $B_y \dot{\bigcup} \{y\} \neq B$ tomamos $z = \min\{x \in B : y < x\}$. Então $B_y \dot{\bigcup} \{y\} = B_z$ e daí $ord(B_y \dot{\bigcup} \{y\} \leq ord(B) \leq \beta$. Este resultado, (1) e a hipótese $\beta \leq \alpha + 1$ nos conduzem, utilizando (1.51.*a*), á igualdade $\beta = \alpha + 1$. □

O corolário a seguir mostra a unicidade do sucessor de um número ordinal.

(1.68) Corolário. Se β e γ são sucessores de um número ordinal α então $\beta = \gamma$.

Alertamos o leitor que na prova do item (*ii*) do próximo teorema, utilizamos a propriedade associativa da adição de números ordinais que não se encontra incluída no texto.

(1.69) Teorema. Tem-se:

(*i*) Ω é um número ordinal limite.

(*ii*) Para todo α em P_Ω existe um número ordinal limite β em P_Ω tal que $\beta > \alpha$.

(*iii*) O conjunto $A = \{\gamma \in P_\Omega : \gamma$ é um número ordinal limite$\}$ é não-enumerável.

Demonstração. Provamos (*i*) supondo que Ω seja um número ordinal sucessor. Logo $\Omega = \Omega_1 + 1$, por (1.65), $\Omega > \Omega_1$. Então, de acordo com(1.63.*ii*), P_{Ω_1} é enumerável e daí P_Ω é enumerável o que é absurdo.

Para a prova de (*ii*) admitamos, por absurdo, que exista um número ordinal δ_0 em P_Ω tal que $\delta_0 \geq \alpha$, qualquer que seja o número ordinal limite α.

Seja $D = \{\delta_n \in P_\Omega\ ;\ \delta_n = \delta_o + n,\ n \in \mathbb{N}\}$. Mostremos que

$$D = P_\Omega \cap P'_{\delta_o}. \tag{1}$$

A inclusão $D \subset P_\Omega \cap P'_{\delta_o}$ segue-se da verificação, por indução sobre n, que $\delta_n \geq \delta_o$ para todo número natural n.

Agora, se $P_\Omega \cap P'_{\delta_o} \cap D'$ é não-vazio escolhemos $\varsigma = \min\{\xi \in P_\Omega : \xi \in P_\Omega \cap P'_{\delta_o} \cap D'\}$.

Se $\delta_o < \varsigma \leq \delta_o + 1$ então, por (1.67), $\varsigma = \delta_o + 1$ o que é uma contradição. Logo $\varsigma > \delta_o + 1$. Mas ς é um número ordinal sucessor, logo existe $\varsigma_1 \in P_\Omega$ tal que $\varsigma = \varsigma_1 + 1$.

Se $\varsigma_1 < \delta_o$ então, lembrando (1.67), $\varsigma = \varsigma_1 + 1 \leq \delta_o$; novamente uma contradição. Então $\varsigma_1 > \delta_o$ e, pela escolha de ς, $\varsigma_1 = \delta_o + m$ para algum número natural m. Segue-se que $\varsigma = \delta_o + (m+1)$ o que é absurdo. Portanto $P_\Omega \cap P'_{\delta_o} \cap D' = \emptyset$ e (1) é válida.

Segue-se, observando (1), que $P_\Omega = P_{\delta_o} \dot{\cup} D$ e, como P_{δ_o} e D são enumeráveis, então P_Ω é enumerável contradizendo (1.63.*i*).

Quanto ao item (*iii*), se A fosse enumerável então, por (1.63.*iii*) existiria δ em P_Ω tal que $\alpha \leq \delta$, para todo α em A, contradizendo (*ii*). □

§2. Um Teorema Tipo-Ramsey

O teorema tipo-Ramsey que apresentamos em (2.12) é relevante não somente pela sua utilização na prova do teorema fundamental no §5, mas pelo resultado em si.

É importante citarmos que os autores do texto, que nos serve de guia, não demonstram este teorema, porém revelam, de forma bastante clara, o caminho a ser seguido para a verdadeira prova. Esta indicação nos permite sugerir ao leitor a técnica a ser utilizada na demonstração dos teoremas (2.11) e (2.12), o que faremos antes de enunciá-los.

(2.1) Definição. Sejam X um conjunto não-vazio e $\mathcal{H}$ uma coleção de subconjuntos de X. Diz-se que $\mathcal{H}$ é um ultrafiltro sobre X, se e somente se estão satisfeitas as seguintes condições:

(*i*) para todo subconjunto A de X tem-se que somente uma das relações $A \in \mathcal{H}$ ou $A' \in \mathcal{H}$ é verdadeira;

(*ii*) se $A \in \mathcal{H}$ e B é um subconjunto de X que contém A, então $B \in \mathcal{H}$;

(*iii*) quaisquer que sejam A e B em $\mathcal{H}$ tem-se que $A \cap B \in \mathcal{H}$.

(2.2) Observações. São conseqüências da definição:

(*a*) $\mathcal{H}$ é não-vazia;

(*b*) $X \in \mathcal{H}$ e $\emptyset \notin \mathcal{H}$.

(2.3) Teorema. Sejam $\mathcal{F} = (A_\lambda)_{\lambda\in L}$ uma família não-vazia de subconjuntos de X e $\mathcal{H}$ um ultrafiltro sobre X. Se

(*i*) $\bigcup_{\lambda\in L} A_\lambda \in \mathcal{H}$;

(*ii*) $\bigcap \mathcal{E} \in \mathcal{H}$, para toda subcoleção $\mathcal{E}$ de $\mathcal{H}$ com $\#\mathcal{E} = \#L$, então existe um λ_o em L, tal que $A_{\lambda_o} \in \mathcal{H}$.

Se os elementos de $\mathcal{F}$ são dois a dois disjuntos então este λ_o é único.

Demonstração. A conclusão é óbvia para $\#L = 1$. Admitamos que $\#L > 1$ e suponhamos, por absurdo que $A_\lambda \notin \mathcal{H}$ para todo $\lambda \in L$. Portanto, por (2.1.i), $A'_\lambda \in \mathcal{H}$ para todo $\lambda \in L$ e, aplicando (ii), $\left(\bigcup_{\lambda\in L} A_\lambda\right)' = \bigcap_{\lambda\in L} A'_\lambda \in \mathcal{H}$. Este resultado e (i) contradizem (2.1.i).

A asserção restante é imediata. □

No restante do parágrafo utilizamos as seguintes notações.

(2.4) Notações. Qualquer que seja o conjunto X, indicamos por S(X), a coleção de todos os subconjuntos finitos de X; e, por $S_n(X)$, a coleção de todos os subconjuntos de X com n elementos.

(2.5) Notações. Sejam X e L conjuntos não-vazios, $\mathcal{H}$ um ultrafiltro sobre X, f uma função de S(X) em L, n um número natural não-nulo e r um elemento de L.

(a) Se $n=1$, designaremos: $A_r^o(1) = \{z \in X : f(\{z\}) = r\}$

(b) Se $n > 1$ e $x_1,\ldots,x_{n-1}$ são elementos distintos de X, então designaremos:

(*i*) $A_r^{n-1}(n;x_1,\ldots,x_{n-1}) = \{z \in X : z \neq x_i\ (i = 1,\ldots,n-1),\ f(\{x_1,\ldots,x_{n-1},z\}) = r\}$

(*ii*) $A_r^m(n;x_1,\ldots,x_m) = \{z \in X : z \neq x_i\ (i = 1,\ldots,m),\ A_r^{m+1}(n;x_1,\ldots,x_m,z) \in \mathcal{H}\}$, para todo $0<m<n-1$, e

(*iii*) $A_r^o(n) = \{z \in X : A_r^1(n;z) \in \mathcal{H}\}$.

Utilizando estas notações provamos que se f é uma função de S(X) em L e $\mathcal{H}$ é um ultrafiltro sobre X, constituído por subconjuntos de X com infinitos elementos, tal que (2.3.ii) esteja satisfeita então, para cada número natural n não-nulo, existe

um único elemento r de L, dependente de n, tal que $A_r^0(n) \in \mathcal{H}$.

Antes, porém, precisamos de dois resultados auxiliares.

(2.6) Teorema. Sejam X, L, f e $\mathcal{H}$ como em (2.5) e suponha que

(i) $\aleph_0 \leq \#A$, para todo $A \in \mathcal{H}$,

(ii) $\bigcap \mathcal{E} \in \mathcal{H}$, para toda subcoleção $\mathcal{E}$ de $\mathcal{H}$ com $\#\mathcal{E} = \#L$.

Se n é um número natural maior que 1 então para cada $\{a_1,\dots,a_{n-1}\} \in S_{n-1}(X)$ existe um único $r \in L$ tal que $A_r^{n-1}(n;a_1,\dots,a_{n-1}) \in \mathcal{H}$.

Demonstração. Seja $\{a_1,\dots,a_{n-1}\} \in S_{n-1}(X)$. É imediato que a família $(A_r^{n-1}(n;a_1,\dots,a_{n-1}))_{r\in L}$ é não-vazia e constituída por conjuntos dois a dois disjuntos. Se mostrarmos que ela satisfaz (2.3.i), a conclusão seguirá por (2.3).

É claro que

$$\bigcup_{r\in L} A_r^{n-1}(n;a_1,\dots,a_{n-1}) \subset (\{a_1,\dots,a_{n-1}\})'. \tag{1}$$

Por outro lado, se $z \in (\{a_1,\dots,a_{n-1}\})'$ então $\{a_1,\dots,a_{n-1},z\} \in S_n(X)$. Logo como $f(\{a_1,\dots,a_{n-1},z\}) = r_0$ para algum $r_0 \in L$, então $z \in A_{r_0}^{n-1}(n;a_1,\dots,a_{n-1})$ e daí

$$(\{a_1,\dots,a_{n-1}\})' \subset \bigcup_{r\in L} A_r^{n-1}(n;a_1,\dots,a_{n-1}). \tag{2}$$

De (1) e (2) segue-se a igualdade.

Consultando a hipótese (i) e (2.1.i) concluímos que $\bigcup_{r\in L} A_r^{n-1}(n;a_1,\dots,a_{n-1}) \in \mathcal{H}$, verificando (2.3.i). □

(2.7) Teorema. Sejam X, L, f e $\mathcal{H}$ como em (2.6). Se $n > 2$ é um número natural então, para cada número natural k com $0<k<n-1$ e para cada $\{a_1,\dots,a_k\} \in S_k(X)$ existe um único $r \in L$ tal que $A_r^k(n;a_1,\dots,a_k) \in \mathcal{H}$.

Demonstração. **Verificaremos a asserção para $k = n-2$. A prova para os demais valores de k, em ordem decrescente dá-se de forma análoga.**

Decorre de (2.6) que a família $(A_r^{n-2}(n;a_1,\dots,a_{n-2}))_{r\in L}$ é constituída por conjuntos não-vazios e dois a dois disjuntos.

Mostremos que $\dot{\bigcup_{r\in L}} A_r^{n-2}(n;a_1,\dots,a_{n-2}) = ((a_1,\dots,a_{n-2}))'$. **Daí a hipótese** (*i*) **e** **(2.1.i)**

acarretam que $\dot{\bigcup_{r\in L}} A_r^{n-2}(n;a_1,\dots,a_{n-2}) \in \mathcal{H}$, **verificando** (2.3.i).

A inclusão

$$\dot{\bigcup_{r\in L}} A_r^{n-2}(n;a_1,\dots,a_{n-2}) \subset ((a_1,\dots,a_{n-2}))' \tag{1}$$

é imediata.

Por outro lado, se $z \in ((a_1,\dots,a_{n-2}))'$ então $(a_1,\dots,a_{n-2},z) \in S_{n-1}(X)$. Segue-se, pelo teorema anterior, que existe um único $r_1 \in L$ tal que $A_{r_1}^{n-1}(n;a_1,\dots,a_{n-2},z) \in \mathcal{H}$. Portanto $z \in A_{r_1}^{n-2}(n;a_1,\dots,a_{n-2})$ e daí

$$((a_1,\dots,a_{n-2}))' \subset \dot{\bigcup_{r\in L}} A_r^{n-2}(n;a_1,\dots,a_{n-2}) \tag{2}$$

De (1) e (2) temos a igualdade. □

(2.8) Teorema. Sejam X, L, f e $\mathcal{H}$ como em (2.6). Então, para cada número natural não-nulo n, existe um único $r \in L$ tal que $A_r^0(n) \in \mathcal{H}$.

Demonstração. Como nos teoremas anteriores provemos que as famílias $(A_r^0(1))_{r\in L}$ e $(A_r^0(n))_{r\in L}$, para $n > 1$, são constituídas por elementos dois a dois disjuntos que satisfazem (2.3.i). A conclusão seguirá por (2.3).

Inicialmente suponhamos $n=1$. É fácil ver que a família $(A_r^0(1))_{r\in L}$ é constituída por dois a dois disjuntos e que $\dot{\bigcup_{r\in L}} A_r^0(1) = X \in \mathcal{H}$, verificando (2.3.i).

Seja $n > 1$. Mostremos que os elementos da família $(A_r^0(n))_{r\in L}$ são dois a dois disjuntos. De fato se r e s são elementos distintos de L e $u \in A_r^0(n) \cap A_s^0(n)$ então $A_r^1(n;u) \in \mathcal{H}$ e $A_s^1(n;u) \in \mathcal{H}$, contrariando (2.6),se $n = 2$, e (2.7), se $n > 2$.

Agora utilizando (2.6), se $n = 2$, e (2.7), se $n > 2$, temos que $\dot{\bigcup_{r\in L}} A_r^0(n) = X \in \mathcal{H}$, novamente verificando (2.3.i). □

(2.9) Observação. O teorema (2.8) define uma função s de $\mathbb{N}$ em L de modo que, para cada número natural n tenhamos $A_{s(n)}^0(n) \in \mathcal{H}$.

Faremos $A_{s(n)}^0(n) = A_{s(n)}^0$ para simplificar a notação.

O comentário que segue visa tornarem mais claras as idéias que regem as provas dos teoremas (2.11) e (2.12).

Grosseiramente falando veremos que se X é um conjunto não-enumerável, a é um número cardinal menor que #X e estritamente maior que $\aleph_0$ e f é uma função de S(X) em L onde #L $< a$, então é possível determinar, verificadas as demais hipóteses, um subconjunto Q de X cuja cardinalidade é a, tal que, para cada número natural n não-nulo, a restrição da função f ao conjunto $S_n(Q)$ é constante.

Suponhamos que esteja definido sobre X um ultrafiltro $\mathcal{H}$, fechado para a interseção de toda família com menos de a elementos e tal que cada um dos seus elementos seja não-enumerável.

Com estas hipóteses tomamos a sequência $\{A^0_{r(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos de $\mathcal{H}$. É claro que $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} A^0_{r(n)} \in \mathcal{H}$. Escolhendo x_0 em B temos:

$$f(\{x_0\}) = r(1) \tag{$*$}$$

$$A^1_{r(n)}(n;x_0) \in \mathcal{H}, \text{ para todo } n \geq 2.$$

Novamente as hipóteses sobre $\mathcal{H}$ acarretam que $B \cap \bigcap_{n=2}^{\infty} A^1_{r(n)}(n,x_0) \in \mathcal{H}$. Escolhendo x_1 nessa interseção, seguem:

$$f(\{x_1\}) = r(1) \tag{$*$}$$

e

$$f(\{x_0, x_1\}) = r(2) \tag{$**$}$$

e, para todo $n \geq 2$ e $n \geq 3$, respectivamente,

$$A^1_{r(n)}(n;x_1) \in \mathcal{H} \text{ e } A^2_{r(n)}(n;x_0, x_1) \in \mathcal{H}.$$

Agora teremos

$$B \cap \bigcap_{n=2}^{\infty} A^1_{r(2)}(n;x_0) \cap \bigcap_{n=2}^{\infty} A^1_{r(n)}(n;x_1) \cap \bigcap_{n=3}^{\infty} A^2_{r(n)}(n;x_0, x_1) \in \mathcal{H}.$$

A escolha de x_2 nessa interseção acarreta

$$f(\{x_2\}) = r(1), \tag{$*$}$$

$$f(\{x_0,x_2\}) = f(\{x_1,x_2\}) = r(2), \tag{$**$}$$

$$f(\{x_0,x_1,x_2\}) = r(3) \tag{$***$}$$

e,

$$A^1_{r(n)}(n;x_2) \in \mathcal{H}, \text{ para todo } n \geq 2,$$

$$A^2_{r(n)}(n;x_0,x_2) \in \mathcal{H} \text{ e } A^2_{r(n)}(n;x_2,x_1) \in \mathcal{H}, \text{ para todo } n \geq 3$$

$$A^3_{r(n)}(n;x_o,x_1,x_2) \in \mathcal{H}, \text{ para todo } n \geq 4.$$

Mais uma vez das hipóteses: $B \cap \bigcap_{n=2}^{\infty} A^1_{r(n)}(n;x_o) \cap \bigcap_{n=2}^{\infty} A^1_{r(n)}(n;x_1) \cap \bigcap_{n=2}^{\infty} A^1_{r(n)}(n;x_2)$

$$\cap \bigcap_{n=3}^{\infty} A^2_{r(n)}(n;x_o,x_1) \cap \bigcap_{n=3}^{\infty} A^2_{r(n)}(n;x_o,x_2) \cap \bigcap_{n=3}^{\infty} A^2_{r(n)}(n;x_1,x_2) \cap \bigcap_{n=4}^{\infty} A^3_{r(n)}(n;x_o,x_1,x_2) \in \mathcal{H}.$$

Escolhendo x_3 nessa interseção, vem:

$$f(\{x_3\}) = r(1) \qquad (*)$$

$$f(\{x_o,x_3\}) = f(\{x_1,x_3\}) = f(\{x_2,x_3\}) = r(2), \qquad (**)$$

$$f(\{x_o,x_1,x_3\}) = f(\{x_o,x_2,x_3\}) = f(\{x_1,x_2,x_3\}) = r(3) \qquad (***)$$

$$f(\{x_o,x_1,x_2,x_3\}) = r(4) \qquad (****)$$

e,

$$A^1_{r(n)}(n;x_3) \in \mathcal{H}, \text{ para todo } n \geq 2,$$

$$A^2_{r(n)}(n;x_o,x_3) \in \mathcal{H},\ A^2_{r(n)}(n;x_1,x_3) \in \mathcal{H},\ A^2_{r(n)}(n;x_2,x_3) \in \mathcal{H}, \text{ para todo } n \geq 3,$$

$$A^3_{r(n)}(n;x_o,x_1x_3) \in \mathcal{H},\ A^3_{r(n)}(n;x_o,x_2,x_3) \in \mathcal{H},\ A^3_{r(n)}(n;x_1,x_2,x_3) \in \mathcal{H}, \text{ para todo } n \geq 4,$$

$$A^4_{r(n)}(n;x_o,x_1,x_2,x_3) \in \mathcal{H}, \text{ para todo } n \geq 5.$$

Se o leitor tiver a generosa paciência de fazer o passo seguinte, isto é, determinar x_4, obterá relações análogas a (*), (**), (***) e (****) para subconjuntos de $\{x_o,x_1,x_2,x_3,x_4\}$.

Finalmente salientamos que, nas relações acima, efetuando as combinações simples dos elementos determinados, veremos que

$$A^i_{r(n)}(n;x_{\alpha_1},\ldots,x_{\alpha_i}) \in \mathcal{H}, \text{ para } 1 \leq i \leq n-1$$

e que o elemento seguinte pertence a todos esses conjuntos.

Com isso acreditamos estar aptos para a prova dos teoremas.

Ainda uma observação.

(2.10) Observação. Na prova de (2.11) utilizamos a coleção de conjuntos $C(n,i)$ cuja definição daremos a seguir. Solicitamos a atenção do leitor, em particular, para a sua cardinalidade.

Seja $\rho \geq 1$ um número ordinal e suponhamos que a cada número ordinal ξ em P_ρ esteja associado um elemento x_ξ em X. Se, dados os números naturais n e i, com

$n \geq 2$ e $1 \leq i \leq \min(n-1, \#P_\rho)$, tivermos

$$A^i_{r(n)}(n; x_{\xi_1}, \dots, x_{\xi_i}) \in \mathcal{H}, \text{ para todo } (\xi_1, \dots, \xi_i) \in S_i(P_\rho),$$

então designaremos por $C(n;i)$ o subconjunto de $\mathcal{H}$ constituído por tais elementos.

É imediato que $C(n;i)$ é finito quando P_ρ é finito e que, por (1.37.*i*), $\#C(n;i) = \#P_\rho$ quando P_ρ é infinito.

(2.11) Teorema. Sejam X um conjunto e φ um número ordinal tais que $\aleph_0 < \#P_\varphi \leq \#X$. Sejam L um conjunto não-vazio com $\#L < \#P_\varphi$ e f uma função de $S(X)$ em L. Suponhamos que $\#P_\xi < \#P_\varphi$, para todo $\xi \in P_\varphi$, e que $\mathcal{H}$ seja um ultrafiltro sobre X satisfazendo:

(*i*) $\aleph_0 \leq \#A$, para todo $A \in \mathcal{H}$;

(*ii*) $\bigcap \mathcal{E} \in \mathcal{H}$, para toda subcoleção $\mathcal{E}$ de $\mathcal{H}$ com $\#\mathcal{E} < \#P_\varphi$.

Então, para cada β em P_φ, existe um elemento x_β de X tal que $x_\beta \in A^0_{r(n)}$, para todo número natural $n \geq 1$ e, sendo $Q(\beta) = \{x_\alpha : \alpha \in P_\beta\}$, para todo $\beta \geq 1$, temos: quaisquer que sejam os números naturais n e i com $n \geq 2$ e $1 \leq i \leq \min(n-1, \#P_\beta)$ e qualquer que seja $(x_{\xi_1}, \dots, x_{\xi_i}) \in S_i(Q(\beta))$,

(*iii*) $A^i_{r(n)}(n; x_{\xi_1}, \dots, x_{\xi_i}) \in \mathcal{H}$,

(*iv*) $x_\beta \in A^i_{r(n)}(n; x_{\xi_1}, \dots, x_{\xi_i})$.

Demonstração. A prova será efetuada utilizando o princípio da indução transfinita.

As hipóteses permitem aplicar (2.8). Assim, observando (*ii*),

$$B = \bigcap_{n=1}^{\infty} A^0_{r(n)} \in \mathcal{H}.$$

Seja g uma função escolha para X e seja $x_0 = g(B)$. É claro que $x_0 \in A^0_{r(n)}$, para todo número natural $n \geq 1$, e lembrando (2.5.*b*.*iii*),

$$A^1_{r(n)}(n; x_0) \in \mathcal{H}, \text{ para todo } n \geq 2.$$

Tomando $Q(1) = \{x_0\}$, o item (*iii*) está verificado para $\beta = 1$.

Novamente por (*ii*), $\bigcap_{n=2}^{\infty} A^1_{r(n)}(n; x_0) \in \mathcal{H}$ e daí

$$C = B \cap \bigcap_{n=2}^{\infty} A^1_{r(n)}(n; x_0) \in \mathcal{H}.$$

A escolha de $x_1 = g(C)$ acarreta que $x_1 \in A^0_{r(n)}$, para todo número natural $n > 1$, e que x_1 verifica (*iv*). Isto completa a prova no caso $\beta = 1$.

Seja $\rho \geq 2$ e suponhamos que para cada ξ em P_ρ sejam conhecidos x_ξ e $Q(\xi)$ verificando as conclusões do teorema. Determinemos x_ρ e mostremos que x_ρ e $Q(\rho)$ também satisfazem essas afirmações.

Para cada ξ em P_ρ, temos que $x_\xi \in B$. Logo

$$A^1_{r(n)}(n;x_\xi) \in \mathcal{H}, \text{ para todo } n \geq 2,$$

verificando (*iii*) para $i = 1$.

Sejam n e i números naturais tais que $n \geq 2$ e $2 \leq i \leq \min(n-1,\#P_\rho)$. Se, para todo $(\xi_1,\ldots,\xi_i) \in S_i(P_\rho)$, admitirmos que $\xi_i = \max(\xi_1,\ldots,\xi_i)$, então $\xi_i \geq i-1$ e $(x_{\xi_1},\ldots,x_{\xi_{i-1}}) \subset Q(\xi_i)$. Portanto $\#P_{\xi_i} \geq \#P_{i-1} = i-1$ e, como $1 \leq i-1 \leq \min(n-2, \#P_{\xi_i})$, então $x_{\xi_i} \in A^{i-1}_{r(n)}(n;x_{\xi_1},\ldots,x_{\xi_{i-1}})$ e daí $A^i_{r(n)}(n;x_{\xi_1},\ldots,x_{\xi_i}) \in \mathcal{H}$, encerrando a prova de (*iii*).

De (*iii*), lembrando (2.10) e (*ii*), segue-se que

$$\bigcap \mathcal{C}(n;i) \in \mathcal{H},$$

para cada número natural $n \geq 2$ e cada $1 \leq i \leq \min(n-1,\#P_\rho)$.

Fazendo i assumir todos os valores de 1 a j, $j = \min(n-1,\#P_\rho)$ temos, por (*ii*), que

$$\bigcap_{i=1}^{j} \bigcap \mathcal{C}(n;i) \in \mathcal{H}$$

e, deste resultado,

$$D = \bigcap_{n=2}^{\infty} \bigcap_{i=1}^{j} \bigcap \mathcal{C}(n;i) \in \mathcal{H}.$$

Agora, aplicando (2.1.*iii*) temos que $B \cap D \in \mathcal{H}$. Tomando $x_\rho = g(B \cap D)$ é fácil verificar que as condições do teorema estão satisfeitas para ρ. Fica assim provado o teorema. □

O particular teorema tipo-Ramsey a seguir nos auxiliará na prova de (5.13) que é o resultado fundamental do §5. Ele tem, no entanto, interesse pelo resultado em si.

(2.12) Teorema. Sejam X um conjunto e a um número cardinal, tais que $\aleph_0 < a \leq \#X$. Sejam L um conjunto não-vazio com $\#L < a$ e f uma função de $S(X)$ em L. Seja $\mathcal{H}$ um ultrafiltro sobre X tal que

(*i*) $\aleph_0 \leq \#A$, para todo $A \in \mathcal{H}$,

(*ii*) $\bigcap \mathcal{E} \in \mathcal{H}$, para toda subcoleção $\mathcal{E}$ de $\mathcal{H}$ tal que $\#\mathcal{E} < a$.

Então existe um subconjunto Q de X tal que

(*iii*) $\#Q = a$

(*iv*) a restrição de f à parte $S_n(Q)$ é constante para cada número natural n não-nulo.

Demonstração. Recordando (1.53) e (1.54) seja $\varphi = \min\{\gamma : \gamma$ é número ordinal , $\#P_\gamma = a\}$. Estão satisfeitas as hipóteses de (2.11). Então, para cada $\alpha \in P_\varphi$, seja x_α como lá definido.

Seja $Q = \{x_\alpha\}_{\alpha \in P_\varphi}$.

Dados β_1 e β_2 em P_φ, distintos, suponhamos que $\beta_1 < \beta_2$. Por (2.11.*iv*), $x_{\beta_2} \in A^1_{r(3)}(3; x_{\beta_1})$. Lembrando (2.5.*ii*), vem que $x_{\beta_2} \neq x_{\beta_1}$. Isto mostra que $\#Q = \#P_\varphi = a$, provando (*iii*).

Agora, de $x_\beta \in A^o_{r(n)}$, para todo número natural $n \geq 1$ e todo $\beta \in P_\varphi$, segue-se que $x_\beta \in A^o_{r(1)}$. Isto acarreta que $f(\{x_\beta\}) = r(1)$ verificando (*iv*) para $n = 1$.

Seja $n \geq 2$. Então, aplicando (2.11.*iv*) para todo $\{x_{\xi_1},\dots,x_{\xi_n}\} \in S_n(Q)$ e admitindo que $\xi_n = \max\{\xi_1,\dots,\xi_n\}$, vem $x_{\xi_n} \in A^{n-1}_{r(n)}(n; x_{\xi_1},\dots,x_{\xi_{n-1}})$. Portanto $f(\{x_{\xi_1},\dots,x_{\xi_n}\}) = r(n)$. $\square$

§ 3. O teorema de Lusin para espaços com medida de Radon finita

A definição da medida de Radon (finita) que apresentaremos encontra-se em [R.13]. Neste parágrafo provaremos o teorema de Lusin para estes espaços e o utilizaremos na prova de (7.2). Seu corolário será útil em (6.19).

(3.1) Definição. Seja $(X,\mathcal{A},\mu)$ um espaço com medida finita e seja $(X,\mathfrak{T})$ um espaço topológico de Hausdorff. A medida μ é chamada medida de Radon se e somente se satisfaz as seguintes condições:

(*i*) $\mathfrak{T} \subset \mathcal{A}$,

(*ii*) para cada elemento A de $\mathcal{A}$ tem-se que:

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subset A,\ K \text{ compacto}\}.$$

A quadrúpla $(X,\mathcal{A},\mu,\mathfrak{T})$ chama-se espaço com medida de Radon finita.

(3.2) Exemplo. Mostraremos que no espaço com medida $(\overline{P_\Omega},\sum,\psi,\mathfrak{T})$, dado no apêndice **A, a** medida ψ não é de Radon.

É claro que $\psi(P_\Omega) = 1$. Provemos que

$$\sup\{\psi(K) : K \subset P_\Omega,\ K \text{ compacto}\} = 0.$$

De fato, seja K um subconjunto de P_Ω, compacto. Como, por (A.2 *ii*), $(\overline{P}_\Omega,\tau)$ é um espaço de Hausdorff então $s = \sup K \in P_\Omega$. Portanto, por (1.63.*ii*), P_s é enumerável. Mas $K \subset P_s \cup \{s\}$, logo K é enumerável e daí $\psi(K) = 0$.

A versão do teorema de Lusin que apresentaremos é semelhante àquela de [R.2].

(3.3) Teorema. Sejam $(X,\mathcal{A},\mu,\mathcal{T})$ um espaço com medida de Radon finita e f uma função de X em $\mathbb{R}$, $\mathcal{A}$-mensurável. Então, dados um elemento A, não-vazio de $\mathcal{A}$, e um número real $\epsilon > 0$, existe K, subconjunto de A, satisfazendo:

(*i*) K é compacto,

(*ii*) $\mu(A \cap K') < \epsilon$,

(iii) a restrição da função f ao conjunto K é contínua.

Demonstração. Se $\mu(A) = 0$, a conclusão é imediata tomando $K = \{z\}$, com $z \in A$.

Suponhamos que $\mu(A) > 0$ e consideremos dois casos.

No primeiro admitamos que $im(f) = \{x_i\}_{i=1}^{n}$, onde $x_i \neq x_j$ para todo $i \neq j$.

Definindo, para cada $1 \leq i \leq n$, $A_i = A \cap f^{-1}(\{x_i\})$, temos que $A_i \in \mathcal{A}$ e que $A_i \cap A_j = \emptyset$, se $i \neq j$.

A hipótese de que μ é medida de Radon acarreta que, para cada $1 \leq i \leq n$, existe um subconjunto K_i de A_i, compacto, tal que

$$\mu(A_i \cap K_i') < \frac{\epsilon}{n}.$$

É claro que $K_i \cap K_j = \emptyset$, se $i \neq j$..

Tomando $K = \bigcup_{i=1}^{n} K_i$ segue-se que K é compacto, verificando (*i*), e que $\mu(A \cap K') = \mu\Big(\bigcup_{i=1}^{n} (A \cap K_i')\Big) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(A \cap K_i') < \epsilon$, provando (*ii*).

Para a prova de (*iii*) notemos que $f^{-1}(\{x_i\}) = K_i$, ocm $1 \leq i \leq n$.

Seja f uma função, $\mathcal{A}$-mensurável, qualquer. Então, utilizando (11.35) e (11.32) de [R.10], existe uma seqüência $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funções simples, $\mathcal{A}$-mensuráveis, que converge para f; e, como f e s_n, para todo número natural n, são finitos, então existe um elemento B de $\mathcal{A}$ tal que

$$\mu(B') < \frac{\epsilon}{2} \tag{1}$$

e

$$\text{a sequência } (s_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge uniformemente para } f \text{ em } B. \tag{2}$$

Agora, se $A \subset B'$ então, tomando $K = \{y\}$ com $y \in A$, as conclusões são imediatas.

Se $A \cap B \neq \emptyset$ então, pelo caso anterior, para cada número natural n, existe um subconjunto K_n de $A \cap B$, compacto, tal que

$$\mu(A \cap B \cap K'_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \tag{3}$$

e

$$\text{a restrição da função } s_n \text{ ao compacto } K_n \text{ é contínua.} \tag{4}$$

Seja $K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$.

É imediato que K é compacto, verificando (*i*), e que $K \subset A \cap B$. Logo, utilizando (1) e (3), temos

$$\begin{aligned}\mu(A \cap K') &= \mu(A \cap B \cap K') + \mu(A \cap B' \cap K') \\ &\le \mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A \cap B \cap K'_n)\Big) + \mu(B') \\ &\le \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A \cap B \cap K'_n)\Big) + \mu(B') < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Isto prova (*ii*).

Finalmente, de (2) e (4) temos que no compacto K cada uma das funções s_n é contínua e que a sequência $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para f. Isto acarreta (*iii*). □

(3.4) Corolário. Sejam $(X,\mathcal{A},\mu,\mathcal{T})$ e f como no teorema anterior. Então, para cada elemento A de $\mathcal{A}$ com $\mu(A) > 0$, existe K, contido em A e compacto, tal que

(*i*) $\mu(K) > 0$,

(*ii*) a restrição da função f ao conjunto K é contínua.

Demonstração. Necessitamos provar apenas o item (*ii*).

Tomando $\varepsilon = \frac{\mu(A)}{2}$, pelo teorema anterior, existe K, subconjunto de A, compacto, satisfazendo (*ii*) e tal que $\mu(A \cap K') < \frac{\varepsilon}{2}$. Logo $\mu(K) > \mu(A) - \mu(A \cap K') > 0$.

□

§4. Uma Propriedade das Famílias não-enumeráveis de Conjuntos de Medida Positiva

Nesta parte obteremos um resultado interessante envolvendo uma coleção não-enumerável de conjuntos, não μ-nulos, num espaço com medida finita. Mostraremos que para cada número natural n, não-nulo, existe uma subcoleção da coleção acima, com cardinalidade n, tal que a sua interseção é não-vazia. Este resultado, a ser enunciado no Teorema (4.5), será aplicado na prova de (5.12).

(4.1) Definição. Diz-se que uma família $(x_\alpha)_{\alpha \in L}$ de números reais não-negativos é somável se e somente se

$$s = \sup\left\{ \sum_{\alpha \in I} x_\alpha : I \subset L,\ I \text{ finito} \right\} < \infty.$$

Nestas condições diz-se que a família $(x_\alpha)_{\alpha \in L}$ tem soma s e escreve-se $\sum_{\alpha \in L} x_\alpha = s$.

(4.2) Teorema. Se a família $(a_\alpha)_{\alpha \in L}$ de números reais não-negativos é somável, então o conjunto $\{\alpha \in L : a_\alpha \neq 0\}$ é enumerável.

Demonstração. Segue-se, da hipótese, que para cada número natural n o conjunto $B(n) = \{\alpha \in L : a_\alpha > \frac{1}{n+1}\}$ é finito. Portanto, por (1.33), $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B(n) = \{\alpha \in L : a_\alpha \neq 0\}$ é enumerável. $\square$

(4.3) Teorema. Sejam $(X,\mathcal{A},\mu)$ um espaço com medida finita e $\mathfrak{F} = (A_i)_{i=1}^{p}$ uma família de elementos de $\mathcal{A}$, não μ-nulos. Se cada ponto de X pertence no máximo a n elementos de $\mathfrak{F}$, então

$$\sum_{i=1}^{p}\mu(A_i) \leq n.\mu(X).$$

Demonstração. Se $n=1$, a família é constituída por conjuntos dois a dois disjuntos e a conclusão é imediata.

Suponhamos $n>1$. Façamos $A_i = A_i^0$, para todo i, com $1\leq i\leq p$.

Definamos

$$A_i^j = A_i^{j-1} \cap \Big(\bigcup_{k=1}^{i-1} A_k^{j-1}\Big) \tag{1}$$

e

$$B_i^j = A_i^{j-1} \cap \Big(\bigcup_{k=1}^{i-1} A_k^{j-1}\Big)' \tag{2}$$

com a convenção de que $\bigcup_{k=1}^{0} A_k^j = \emptyset$, para todo número natural j.

Temos que $A_i^j \in \mathcal{A}$, $B_i^j \in \mathcal{A}$ e $\mu(A_i^{j-1}) = \mu(B_i^j) + \mu(A_i^j)$, quaisquer que sejam os números naturais i e j, com $1\leq i\leq p$ e $j\geq 1$. Desta última relação, vem:

$$\begin{aligned}\mu(A_i) &= \mu(A_i^0) = \mu(B_i^1) + \mu(A_i^1)\\ &= \mu(B_i^1) + \mu(B_i^2) + \mu(A_i^2)\\ &\ \ \vdots\\ &= \sum_{t=1}^{j}\mu(B_i^t) + \mu(A_i^j),\end{aligned} \tag{3}$$

para todo $1\leq i\leq p$ e todo $j\geq 1$.

Dados $j\geq 1$ e $1\leq i_1<i_2\leq p$, resulta de (2) que $B_{i_1}^j \cap B_{i_2}^j \subset A_{i_1}^{j-1} \cap \Big(\bigcup_{k=1}^{i_2-1} A_k^{j-1}\Big)' = \emptyset$.

Logo

$$\sum_{i=1}^{p}\mu(B_i^t) \leq \mu(X). \tag{4}$$

Assim de (3) e (4), para todo número natural $t \geq 1$, vem

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{p}\mu(A_i) &= \sum_{i=1}^{p}\Big(\sum_{t=1}^{j}\mu(B_i^t) + \mu(A_i^j)\Big)\\ &= \sum_{t=1}^{j}\sum_{i=1}^{p}\mu(B_i^t) + \sum_{i=1}^{p}\mu(A_i^j)\end{aligned}$$

$$\leq j\mu(X) + \sum_{i=1}^{p} \mu(A_i^j).$$

A demonstração estará completa se verificarmos que $A_i^n = \emptyset$, para todo $1 \leq i \leq p$.

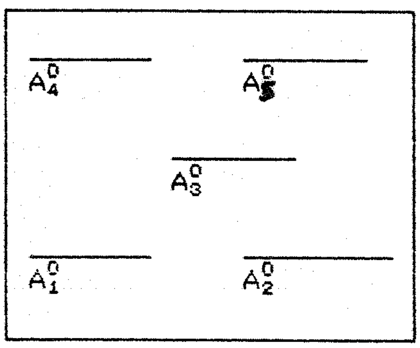
Da convenção $\bigcup_{k=1}^{0} A_k^j = \emptyset$ e (1) decorre que $A_1^n = \emptyset$.

Suponhamos, por absurdo, que existe $1 < i_1 < p$ tal que $A_{i_1}^n \neq \emptyset$.

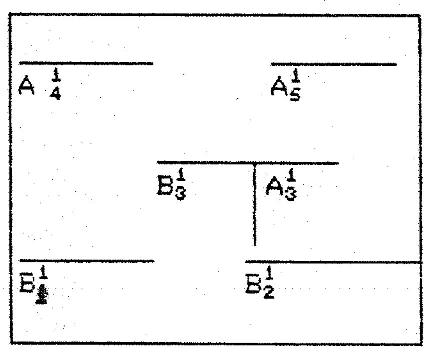
Seja $x \in A_{i_1}^n$. Por (1), $x \in \bigcup_{k=1}^{i-1} A_k^{n-1}$, logo existe $i_2 < i_1$ tal que $x \in A_{i_2}^{n-1}$. Novamente aplicando (1), e repetindo a argumentação, obteremos sucessivamente $A_{i_3}^{n-2}, \ldots, A_{i_{n+1}}^{0}$, todos contendo x.

Por outro lado decorre também de (1) que $A_i^j \subset A_i^0 = A_i$ para todo $j \geq 1$ e todo $1 \leq i \leq p$. Logo $x \in A_{i_r}$, para $r = 1, \ldots, n+1$, e daí $x \in \bigcap_{r+1}^{n+1} A_{i_r}$, contradizendo a hipótese. □

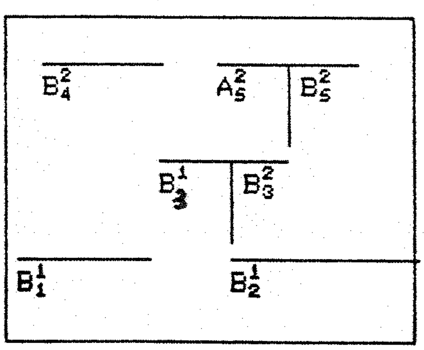
(4.4) Observação. Esta observação serve para ilustrar, geometricamente, os passos do teorema acima. Tomamos, para o exemplo, $n = 3$ e $p = 5$.



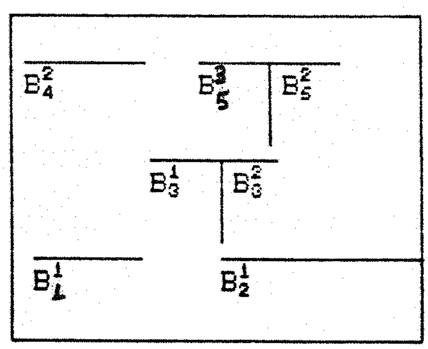
X (1)



X (2)



X (3)



X (4)

No teorema a seguir as notações $S(L)$ e $S_{m+1}(L)$ são aquelas introduzidas em (2.4).

(4.5) Teorema. Sejam $(X,\mathcal{A},\mu)$ um espaço com medida finita e seja $\mathfrak{F} = (A_\alpha)_{\alpha \in L}$ uma família não-enumerável de elementos de $\mathcal{A}$, não μ-nulos. Então, para cada número natural $n \geq 2$ existe uma subfamília finita, $(A_{\alpha_i})_{i=1}^{n}$, de $\mathfrak{F}$ tal que $\bigcap_{i=1}^{n} A_{\alpha_i} \neq \emptyset$.

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que exista um número natural m, $m \geq 1$, tal que $\bigcap_{i=1}^{m+1} A_{\alpha_i} = \emptyset$, qualquer que seja $(\alpha_1,\ldots,\alpha_{m+1}) \in S_{m+1}(L)$. Portanto cada ponto de X pertence, no máximo, a m elementos de $\mathfrak{F}$. Segue, pelo teorema anterior, que para todo $(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)$ em $S(L)$, onde $k \geq 1$ é um número natural, vale $\sum_{j=1}^{k} \mu(A_{\alpha_j}) \leq m.\mu(X)$. Decorre, por (4.1), que a família $(\mu(A_\alpha))_{\alpha \in L}$ é somável. Daí, por (4.2) o conjunto L é enumerável, contradizendo a hipótese. □

§5. O Teorema Fundamental : medida atômica

Neste parágrafo o destaque é para o teorema (5.13). Ele é o Teorema Fundamental para o caso em que medida é atômica. Os demais teoremas, em sua maioria enunciam propriedades de espaços com esse tipo de medida.

Será usual indexarmos uma família de conjuntos por P_α, conjunto dos números ordinais menores que α, como (1.51.c).

(5.1) Teorema. Sejam X, I e J conjuntos não-vazios, $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ uma família de subconjuntos de X, dois a dois disjuntos, e $(I_\lambda)_{\lambda \in J}$ uma família de subconjuntos de I. Então,

(*i*) $\dot{\bigcup}\{A_\alpha : \alpha \in \bigcup_{\lambda \in J} I_\lambda\} = \bigcup_{\lambda \in J} \dot{\bigcup}_{\alpha \in I_\lambda} A_\alpha$;

(*ii*) $\dot{\bigcup}\{A_\alpha : \alpha \in \dot{\bigcup}_{\lambda \in J} I_\lambda\} = \dot{\bigcup}_{\lambda \in J} \dot{\bigcup}_{\alpha \in I_\lambda} A_\alpha$, se os elementos da família $(I_\lambda)_{\lambda \in J}$ são dois a dois disjuntos.

Demonstração. Se $x \in \dot{\bigcup}\{A_\alpha : \alpha \in \bigcup_{\lambda \in J} I_\lambda\}$ então existe um único $\alpha_0 \in \bigcup_{\lambda \in J} I_\lambda$ tal que $x \in A_{\alpha_0}$.

Como $\alpha_0 \in \bigcup_{\lambda \in J} I_\lambda$ então existe λ_0 em J tal que $\alpha_0 \in I_{\lambda_0}$. Segue-se que $x \in \dot{\bigcup}_{\alpha \in I_{\lambda_0}} A_\alpha$, e daí $x \in \bigcup_{\lambda \in J} \dot{\bigcup}_{\alpha \in I_\lambda} A_\alpha$.

Portanto

$$\dot{\bigcup}\{A_\alpha : \alpha \in \bigcup_{\lambda \in J} I_\lambda\} \subset \bigcup_{\lambda \in J} \dot{\bigcup_{\alpha \in I_\lambda}} A_\alpha$$

Para provar a igualdade, na relação acima, seja x $\in \bigcup_{\lambda \in J} \dot{\bigcup_{\lambda \in I_\lambda}} A_\alpha$. **Então, para** algum $\lambda_1 \in J$, temos $x \in \dot{\bigcup_{\alpha \in I_{\lambda_1}}} A_\alpha$. Decorre daqui que para um único α_1 de I_{λ_1} vale $x \in A_{\alpha_1}$. Como $\alpha_1 \in \bigcup_{\lambda \in J} I_\lambda$, então $x \in \dot{\bigcup}\{A_\alpha : \alpha \in \bigcup_{\lambda \in J} I_\lambda\}$. Com isto fica provado o item (*i*).

Para provarmos o item (*ii*) é suficiente verificarmos que

$$\dot{\bigcup_{\alpha \in I_{\lambda_1}}} A_\alpha \cap \dot{\bigcup_{\alpha \in I_{\lambda_2}}} A_\alpha = \emptyset, \text{ para } \lambda_1 \neq \lambda_2.$$

Admitamos, por absurdo, que exista $x \in X$ tal que

$$x \in \dot{\bigcup_{\alpha \in I_{\lambda_1}}} A_\alpha \cap \dot{\bigcup_{\alpha \in I_{\lambda_2}}} A_\alpha, \text{ com } \lambda_1 \neq \lambda_2.$$

Como $I_{\lambda_1} \cap I_{\lambda_2} = \emptyset$ então existem $\alpha_1 \in I_{\lambda_1}$ e $\alpha_2 \in I_{\lambda_2}$, com $\alpha_1 \neq \alpha_2$, tais que $x \in A_{\alpha_1} \cap A_{\alpha_2}$ contradizendo a hipótese sobre a família $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$. □

O exemplo a seguir nos mostra que podemos ter uma igualdade da forma

$$\bigcup\{A_\alpha : \alpha \in \dot{\bigcup_{\lambda \in J}} I_\lambda\} = \bigcup_{\lambda \in J} \bigcup_{\alpha \in I_\lambda} A_\alpha,$$

onde os conjuntos que constituem o segundo membro da igualdade não são disjuntos.

(5.2) Exemplo. Sejam $X = \{a, b, c, d\}$, $I = \{1, 2, 3\}$ e $J = \{\alpha, \beta\}$. Tomemos $A_1 = \{a, b\}$, $A_2 = \{b, c\}$, $A_3 = \{c, d\}$, $I_\alpha = \{1, 2\}$, $I_\beta = \{3\}$.

Então a família $(I_\lambda)_{\lambda \in J}$ é constituída por conjuntos dois a dois disjuntos, enquanto na família $(A_x)_{x \in I}$ temos $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ e $A_2 \cap A_3 \neq \emptyset$.

Note-se que no primeiro membro da igualdade acima temos:

$$\bigcup\{A_x : x \in \dot{\bigcup_{\lambda \in J}} I_\lambda\} = A_1 \cup A_2 \cup A_3$$

e, no segundo membro,

$$\bigcup_{\lambda \in J} \bigcup_{x \in I_\lambda} A_x = (A_1 \cup A_2) \cup A_3$$

onde $(A_1 \bigcup A_2) \bigcap A_3 = \{c\}$.

(5.3) Teorema. Seja $(X,\mathcal{A},\mu)$ um espaço com medida e seja $\mathfrak{F}$ uma coleção de elementos de $\mathcal{A}$, μ-nulos e dois a dois disjuntos. Se $\dot{\bigcup}\mathfrak{F} \in \mathcal{A}$ e $\mu(\dot{\bigcup}\mathfrak{F}) > 0$ então $\#\mathfrak{F} > \aleph_0$.

Demonstração. Se admitirmos, por absurdo, que $\#\mathfrak{F} \leq \aleph_0$, então $\mu(\dot{\bigcup}\mathfrak{F}) = \sum_{A\in\mathfrak{F}} \mu(A) = 0$, contradizendo a hipótese. □

(5.4) Definição. Seja $(X,\mathcal{A},\mu)$ um espaço com medida. Um elemento A de $\mathcal{A}$ é um átomo se e somente se $\mu(A) > 0$ e, para todo $B \in \mathcal{A}$ com $B \subset A$, tem-se $\mu(B) = 0$ ou $\mu(B) = \mu(A)$.

Diz-se que μ é atômica se existe pelo menos um átomo em $\mathcal{A}$; diz-se que μ é não-atômica se não existem átomos em $\mathcal{A}$.

(5.5) Teorema. Seja $(X, \mathcal{P}(X), \mu)$ um espaço com medida finita. Se X é átomo então a coleção de conjuntos $\mathcal{H} = \{A : A \subset X, \mu(A) > 0\}$ é um ultrafiltro sobre X.

Demonstração. Provemos que $\mathcal{H}$ satisfaz a Definição (2.1).

Como X é átomo, então para todo subconjunto A de X tem-se que $\mu(A) = \mu(X)$ ou $\mu(A') = \mu(X)$, verificando (2.1.*i*).

Se $A \in \mathcal{H}$ e $A \subset B$, então $0 < \mu(A) \leq \mu(B)$, verificando (2.1.*ii*). Finalmente (2.1.*iii*) segue-se de $\mu((A \bigcap B)') \leq \mu(A') + \mu(B') = 0$. □

O teorema (5.6) é importante pois, além de sua aplicação em (5.7), é responsável pela generalização do resultado fundamental que obteremos em (7.1).

(5.6) Teorema. Sejam $(X,\mathcal{A},\mu)$ um espaço com medida e $\mathfrak{F} = \{A_\alpha\}_{\alpha\in P_\varphi}$ uma família de elementos de $\mathcal{A}$ tal que $\bigcup\mathcal{E} \in \mathcal{A}$ para toda subfamília $\mathcal{E}$ de $\mathfrak{F}$. Então existe uma família $\mathfrak{D} = \{D_\beta\}_{\beta\in I}$ de elementos de $\mathcal{A}$, não-vazios e dois a dois disjuntos, satisfazendo:

(*i*) para todo $D \in \mathfrak{D}$ existe $A \in \mathfrak{F}$ tal que $D \subset A$;

(*ii*) **para toda subfamília $\mathfrak{C}$ de $\mathfrak{D}$ tem-se $\bigcup \mathfrak{C} \in \mathcal{A}$;**

(*iii*) $\bigcup \mathfrak{D} = \bigcup \mathfrak{F}$;

(*iv*) $\#I \leq \#P_{\varphi}$.

Demonstração. Façamos $D_0 = A_0$, e

$$D_\alpha = A_\alpha \cap \Big(\bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta \Big)', \text{ para todo } 0 < \alpha. \tag{1}$$

Seja $\mathfrak{D}_1 = (D_\alpha)_{\alpha \in P_\varphi}$.

É claro que a família $\mathfrak{D}_1$ é constituída por conjuntos dois a dois disjuntos, pois, dados α_1 e α_2 em P_φ com $\alpha_1 < \alpha_2$ temos $D_{\alpha_1} \subset A_1$ e $D_{\alpha_2} \subset \Big(\bigcup_{\beta<\alpha_2} A_\beta \Big)' \subset A'_{\alpha_1}$.

Verifiquemos que a família $\mathfrak{D}_1$ satisfaz as asserções do teorema.

De $D_0 = A_0$ e (1), lembrando a hipótese, segue-se que $D_\alpha \in \mathcal{A}$ e $D_\alpha \subset A_\alpha$, para todo α em P_φ, verificando (*i*).

Seja R um subconjunto de P_φ, com $0 \neq \delta = \min(\alpha : \alpha \in R)$. Então

$$\begin{aligned}\bigcup_{\alpha \in R} D_\alpha &= \bigcup_{\alpha \in R} (A_\alpha \cap (\bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta)') \\ &= \bigcup_{\alpha \in R} A_\alpha \cap (\bigcap_{\alpha \in R} \bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta)' \\ &= \bigcup_{\alpha \in R} A_\alpha \cap (\bigcup_{\beta<\delta} A_\beta)' \in \mathcal{A}.\end{aligned} \tag{2}$$

Seja S um subconjunto de P_φ com $0 \in S$. Então, utilizando (2),

$$\bigcup_{\alpha \in S} D_\alpha = D_0 \cup \bigcup_{\substack{\alpha \in S \\ \alpha \neq 0}} D_\alpha \in \mathcal{A}. \tag{3}$$

O item (*ii*) segue de (2), se $D_0 \notin \mathfrak{C}$, ou de (3), se $D_0 \in \mathfrak{C}$.

O item (*iii*) segue-se de (3), escolhendo $S = P_\varphi$.

Finalmente, tomando $I = (\alpha \in P_\varphi : D_\alpha \neq \emptyset)$ temos por (1.11.*b*), que $\#I \leq \#P_\varphi$. □

(5.7) Teorema. Seja $(X,\mathcal{A},\mu)$ um espaço com medida tal que $\{x\} \in \mathcal{A}$ e $\mu(\{x\}) = 0$, para todo $x \in X$. Se X **é átomo então existe uma coleção $\mathcal{M}$ de elementos de $\mathcal{A}$, μ-nulos e dois a dois disjuntos, tal que**

(*i*) $\dot{\bigcup}\mathcal{M}$ **é átomo,**

(*ii*) $\#\mathcal{M} > \aleph_0$,

(*iii*) dada uma coleção $\mathcal{M}_1$ de elementos μ-nulos de $\mathcal{A}$ tal que $\#\mathcal{M}_1 < \#\mathcal{M}$ e $\bigcup\mathcal{E} \in \mathcal{A}$ para toda subcoleção $\mathcal{E}$ de $\mathcal{M}_1$, tem-se que $\mu(\bigcup\mathcal{M}_1) = 0$.

Demonstração. Como X é átomo, $\mu(\dot{\bigcup}_{x\in X}\{x\}) = \mu(X) > 0$. Logo o conjunto $\mathfrak{C}$ de todas as coleções $\mathcal{L}$ de elementos de $\mathcal{A}$, μ-nulos e dois a dois disjuntos, tal que $\mu(\dot{\bigcup}\mathcal{L}) > 0$ é não-vazio.

Lembrando (1.15) existe $\mathcal{M} \in \mathfrak{C}$ tal que $\#\mathcal{M} = \min\{\#\mathcal{L} : \mathcal{L} \in \mathfrak{C}\}$.

É imediato que a coleção $\mathcal{M}$ verifica (*i*) e (*ii*), sendo este último consequência de (5.3).

Considerando as hipóteses de (*iii*), seja $\mathcal{M}_2$ uma coleção de elementos de $\mathcal{A}$ verificando (5.6). De (5.6.*ii*) e (5.6.*iii*) segue-se que

$$\mu(\dot{\bigcup}\mathcal{M}_2) = \mu(\bigcup\mathcal{M}_1). \tag{1}$$

De (5.6.*iv*) e $\#\mathcal{M}_1 < \#\mathcal{M}$, temos

$$\#\mathcal{M}_2 < \#\mathcal{M}.$$

Este resultado acarreta, pela escolha de $\mathcal{M}$ e (1), que $\mu(\bigcup\mathcal{M}_1) = 0$. □

(5.8) Exemplo. Considere $(\overline{P_\Omega}, \sum, \psi, \tau)$ o espaço com medida definido no Apêndice A. Verifica-se que este espaço satisfaz as hipóteses de (5.7) e que a família $\mathcal{M} = (\{\alpha\})_{\alpha\in P_\Omega}$ confirma as suas conclusões.

(5.9) Teorema. Sejam $(X,\mathcal{A},\mu)$ um espaço com medida, $\mathcal{F} = (A_\alpha)_{\alpha\in P_\varphi}$ uma família de elementos de $\mathcal{A}$, dois a dois disjuntos, tal que $\dot{\bigcup}\mathcal{E} \in \mathcal{A}$ para toda subfamília $\mathcal{E}$ de $\mathcal{F}$ e ν a função, de $\mathcal{P}(P_\varphi)$ em $[0,\infty]$, definida por

(*i*) $\nu(B) = \mu(\dot{\bigcup}\{A_\alpha : \alpha \in B\})$, para todo $B \in \mathcal{P}(P_\varphi)$.

Então:

(*ii*) ν é uma medida sobre a σ-álgebra $\mathcal{P}(P_\varphi)$;

(*iii*) se $\dot{\bigcup}\mathcal{F}$ é átomo tem-se que P_φ é átomo (relativo a ν);

(*iv*) se $(M_\lambda)_{\lambda\in L}$ é uma família de elementos de $\mathcal{P}(P_\varphi)$ e $N_\lambda = \dot{\bigcup}\{A_\alpha : \alpha \in M_\lambda\}$, para cada $\lambda \in L$, tem-se $\bigcup_{\lambda \in L} N_\lambda \in \mathcal{A}$ e $\mu(\bigcup_{\lambda \in L} N_\lambda) = \nu(\bigcup_{\lambda \in L} M_\lambda)$.

Demonstração. É trivial que $\mathcal{P}(P_\varphi)$ é uma σ-álgebra e que $\nu(\emptyset) = 0$.

Seja $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de subconjuntos de P_φ, dois a dois disjuntos. Por (5.1.*ii*), $\dot{\bigcup}(A_\alpha : \alpha \in \dot{\bigcup}_{n \in \mathbb{N}} B_n) = \dot{\bigcup}_{n \in \mathbb{N}} \dot{\bigcup}_{\alpha \in B_n} A_\alpha$.

e, por (*i*),

$$\nu(\dot{\bigcup}_{n \in \mathbb{N}} B_n) = \mu(\dot{\bigcup}_{n \in \mathbb{N}} \dot{\bigcup}_{\alpha \in B_n} A_\alpha) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(\dot{\bigcup}_{\alpha \in B_n} A_\alpha) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu(B_n),$$

provando (*ii*).

Se $\dot{\bigcup}\mathcal{F}$ é átomo então, por (*i*), para todo $D \subset P_\varphi$ temos $\nu(D) = 0$ ou $\nu(D) = \nu(P_\varphi)$, verificando (*iii*).

Finalmente para o item (*iv*) utilizando (5.1.*i*) temos que é válida a igualdade $\bigcup_{\lambda \in L} N_\lambda = \dot{\bigcup}(A_\alpha : \alpha \in \bigcup_{\lambda \in L} M_\lambda) \in \mathcal{A}$. Desta, aplicando (*i*), temos $\mu(\bigcup_{\lambda \in L} N_\lambda) = \nu(\bigcup_{\lambda \in L} M_\lambda)$. $\square$

(5.10) Teorema. Sejam $(X,\mathcal{A},\mu)$ um espaço com medida finita, $\mathcal{F} = (A_\alpha)_{\alpha \in P_\varphi}$ uma família de elementos de $\mathcal{A}$, μ-nulos e dois a dois disjuntos, tal que $\dot{\bigcup}\mathcal{E} \in \mathcal{A}$ para toda subfamília $\mathcal{E}$ de $\mathcal{F}$. Sejam ν, a função definida em $\mathcal{P}(P_\varphi)$ como em (5.9.*i*.), e T um átomo em P_φ. Então existem uma coleção $\mathcal{M}$ de subconjuntos de T, ν-nulos e dois a dois disjuntos, e uma família $\mathcal{N}$ de elementos de $\mathcal{A}$, possuindo as propriedades:

(*i*) $\dot{\bigcup}\mathcal{M}$ é átomo,

(*ii*) dada uma coleção $\mathcal{M}_1$ de elementos ν-nulos de T tal que $\#\mathcal{M}_1 < \#\mathcal{M}$ tem-se $\nu(\bigcup\mathcal{M}_1) = 0$,

(*iii*) para cada N em $\mathcal{N}$, $\mu(N) = 0$ e existe M em $\mathcal{M}$ tal que $N = \dot{\bigcup}(A_\alpha : \alpha \in M)$,

(*iv*) $\mu(\dot{\bigcup}\mathcal{N}) = \nu(\dot{\bigcup}\mathcal{M})$,

(*v*) dada uma subfamília $\mathcal{N}_1$ de $\mathcal{N}$, tem-se que $\bigcup\mathcal{N}_1 \in \mathcal{A}$ e que $\mu(\bigcup\mathcal{N}_1) = 0$, quando $\#\mathcal{N}_1 < \#\mathcal{N}$.

Demonstração. Seja ϑ a restrição de ν ao conjunto T. No espaço com medida $(T,\mathcal{P}(T),\vartheta)$, T é átomo e $\vartheta(\{\alpha\}) = \nu(\{\alpha\}) = \mu(A_\alpha) = 0$, para todo $\alpha \in T$. Satisfeitas as hipóteses de (5.7) seja $\mathcal{M}$ uma coleção de subconjuntos de T, ϑ-nulos e dois a dois disjuntos, verificando as suas conclusões. Com isto provamos (*i*)-(*ii*).

Seja $\eta = \min\{\gamma : \#P_\gamma = \#\mathcal{M}\}$. Indexemos $\mathcal{M}$ tomando P_η para conjunto de índices, ou seja, $\mathcal{M} = \{M_\lambda\}_{\lambda \in P_\eta}$.

Para cada $\lambda \in P_\eta$ coloquemos, por definição, $N_\lambda = \dot{\bigcup}\{A_\alpha : \alpha \in M_\lambda\}$. Segue, da hipótese, que $N_\lambda \in \mathcal{A}$.

Tomando $\mathcal{N} = \{N_\lambda\}_{\lambda \in P_\eta}$, provemos que (*iii*)-(*v*) se verificam.

Como $N_\lambda \in \mathcal{A}$ para cada $\lambda \in P_\eta$, então, pela definição de ν temos que $\mu(N_\lambda) = \mu(\dot{\bigcup}\{A_\alpha : \alpha \in M_\lambda\}) = \nu(M_\lambda) = \vartheta(M_\lambda) = 0$. Isto prova (*iii*).

O item (*iv*) segue de (5.9.*iv*).

Finalmente, tomando B contido em P_η com $\#B < \#P_\eta$, consideremos $\mathcal{N}_1 = \{N_\lambda\}_{\lambda \in B}$. Então, lembrando (5.1.*i*) temos

$$\bigcup \mathcal{N}_1 = \bigcup_{\lambda \in B} N_\lambda = \bigcup_{\lambda \in B} \dot{\bigcup_{\alpha \in M_\lambda}} A_\alpha = \dot{\bigcup}\{A_\alpha \,;\, \alpha \in \bigcup_{\lambda \in B} M_\lambda\} \in \mathcal{A}.$$

Observando que a família $\{M_\lambda\}_{\lambda \in B}$ satisfaz (*ii*) e aplicando (5.9.*iv*) vem: $\mu(\bigcup \mathcal{N}_1) = \nu(\bigcup_{\lambda \in B} M_\lambda) = 0$. □

(5.11) Teorema. Suponhamos satisfeitas as hipóteses de (5.10) e sejam $\mathcal{M} = \{M_\lambda\}_{\lambda \in P_\eta}$ e $\mathcal{N} = \{N_\lambda\}_{\lambda \in P_\eta}$, onde $\eta = \min\{\gamma : \gamma$ é número ordinal, $\#P_\gamma = \#\mathcal{M}\}$ e

$N_\lambda = \dot{\bigcup}\{A_\alpha : \alpha \in M_\lambda\}$, satisfazendo suas conclusões. Então existe uma família $\{Z_\theta\}_{\theta \in P_\eta}$ de elementos μ-nulos de $\mathcal{A}$ tal que

(*i*) quaisquer que sejam θ_1 e θ_2 em P_η, com $\theta_1 < \theta_2$, tem-se que $Z_{\theta_1} \subset Z_{\theta_2}$,

(*ii*) tem-se $Z = \bigcup_{\theta \in P_\eta} Z_\theta$, onde $Z = \bigcup \mathcal{N}$

(*iii*) para todo θ em P_η tem-se que $\mu(Z \cap Z'_\theta) > 0$.

Demonstração. Para cada θ em P_η temos, por (5.9.*iv*), que $\bigcup_{\beta \in P_\theta} N_\beta \in \mathcal{A}$ e, pela escolha de η e por (5.10.*v*), $\mu\left(\bigcup_{\beta \in P_\theta} N_\beta\right) = 0$. Definindo $Z_\theta = \bigcup_{\beta \in P_\theta} N_\beta \cup N_\theta$ temos que $Z_\theta \in \mathcal{A}$ e

$$\mu(Z_\theta) = 0. \tag{1}$$

O item (i) é imediato.

Para a prova do item (ii) seja x $\in$ Z. Logo x $\in N_{\lambda_0}$, para algum λ_0 em P_η. Daí x $\in Z_{\lambda_0}$ e, então, x $\in \bigcup_{\theta \in P_\eta} Z_\theta$ mostrando que $Z \subset \bigcup_{\theta \in P_\eta} Z_\theta$. Sendo imediata a inclusão oposta, temos que $Z = \bigcup_{\theta \in P_\eta} Z_\theta$.

Na prova de (iii) notemos que (5.10.iv) e (5.10.i) acarretam $\mu(Z) = \mu(\dot{\bigcup}\mathcal{N}) = \nu(\dot{\bigcup}\mathcal{M}) > 0$. Logo, lembrando (1), $\mu(Z \cap Z'_\theta) = \mu(Z \cap Z'_\theta) + \mu(Z_\theta) = \mu(Z) > 0$, para cada $\theta \in P_\eta$. □

(5.12) Teorema. Seja $(X,\mathcal{A},\mu)$ um espaço com medida. Seja $\mathcal{M} = \{M_\lambda\}_{\lambda \in P_\eta}$, onde $\eta = \min\{\gamma : \gamma$ é um número ordinal, $\#P_\gamma = \#\mathcal{M}\}$ uma família de elementos de $\mathcal{A}$, μ-nulos e dois a dois disjuntos tal que $\dot{\bigcup}\mathcal{M}$ é átomo, $\mu(\dot{\bigcup}\mathcal{M})$ é finita, $\dot{\bigcup}\mathcal{M}_1 \in \mathcal{A}$ para toda coleção $\mathcal{M}_1$ de subconjuntos de $\dot{\bigcup}\mathcal{M}$ e $\mu(\dot{\bigcup}\mathcal{M}_1) = 0$ quando $\#\mathcal{M}_1 < \#\mathcal{M}$; e seja σ uma função, de $\mathcal{P}(P_\eta)$ em $[0,\infty[$, definida por

(i) $\sigma(E) = \mu(\dot{\bigcup}\{M_\lambda : \lambda \in E\})$, para todo E em P_η.

Se $\mathcal{H} = \{H : H \subset P_\eta, \sigma(H) > 0\}$ então,

(ii) $\mathcal{H}$ é um ultrafiltro sobre P_η,

(iii) para todo $H \in \mathcal{H}$, tem-se $\#H > \aleph_0$,

(iv) para toda subcoleção não-vazia $\mathcal{L}$ de $\mathcal{H}$, com $\#\mathcal{L} < \#P_\eta$, tem-se $\bigcap\mathcal{L} \in \mathcal{H}$.

Demonstração. Estão satisfeitas as hipóteses de (5.9). Logo σ é uma medida sobre P_η. De $\dot{\bigcup}\mathcal{M}$ é átomo e $\mu(\dot{\bigcup}\mathcal{M}) < \infty$ decorrem, respectivamente, que P_η é átomo e que $\sigma(P_\eta) < \infty$. Desta forma o espaço com medida $(P_\eta, \mathcal{P}(P_\eta),\sigma)$ verifica as hipóteses de (5.5). Segue-se que $\mathcal{H}$ é um ultrafiltro sobre P_η, provando (ii).

Iniciemos a prova de (iii) notando que $\sigma(\{\alpha\}) = \mu(M_\alpha) = 0$, para todo α em P_η e que, se $H \in \mathcal{H}$ então, pela definição de $\mathcal{H}$, $\sigma(\dot{\bigcup}_{\beta \in H}\{\beta\}) = \sigma(H) > 0$. Portanto no espaço com medida $(P_\eta, \mathcal{P}(P_\eta), \sigma)$, a família $\{\beta\}_{\beta \in H}$ satisfaz as hipóteses de (5.3). Logo $\#H > \aleph_0$.

Para a prova de (iv), temos que $\sigma(H) = \sigma(P_\eta)$, para todo $H \in \mathcal{H}$. Daí $\sigma(H)' = 0$ e, por (i), $\mu(\dot{\bigcup}_{\lambda \in H'} M_\lambda) = 0$.

Seja $\mathcal{L}$ é uma coleção de elementos de $\mathcal{H}$, tal que $\#\mathcal{L} < \#P_\eta = \#\mathcal{M}$. Então, aplicando (5.1.i) e a hipótese, temos

$$\sigma((\bigcap \mathcal{L})') = \sigma(\bigcup_{H\in\mathcal{L}} H') = \mu(\dot{\bigcup}\{M_\lambda : \lambda \in \bigcup_{H\in\mathcal{L}} H'\})$$

$$= \mu(\bigcup_{H\in\mathcal{L}} \dot{\bigcup}\{M_\lambda : \lambda \in H'\}) = 0.$$

Agora, lembrando (2.1.i), $\bigcap \mathcal{L} \in \mathcal{H}$. □

(5.13) Teorema. Sejam $(X,\mathcal{A},\mu,\mathcal{F})$ um espaço com medida de Radon finita, $\mathcal{F} = \{A_\alpha\}_{\alpha\in P_\varphi}$ uma família de elementos de $\mathcal{A}$, μ-nulos e dois a dois disjuntos, tal que $\bigcup \mathcal{E} \in \mathcal{A}$ para toda subfamília $\mathcal{E}$ de $\mathcal{F}$ e ν, de $\mathcal{P}(P_\varphi)$ em $[0,\infty[$ definida por $\nu(B) = \mu(\dot{\bigcup}\{A_\alpha : \alpha \in B\})$, para todo $B \in \mathcal{P}(P_\varphi)$. Se ν é atômica então $\mu(\dot{\bigcup}\mathcal{F}) = 0$.

Demonstração. A prova deste teorema será realizada por redução ao absurdo. Assim admitamos que $\mu(\dot{\bigcup}\mathcal{F}) > 0$, e, como ν é atômica, seja $T \subset P_\varphi$ um átomo.

Construiremos uma família não-enumerável de subconjuntos compactos de X, não μ-nulos tal que sua interseção seja simultaneamente vazia e não-vazia.

Como T é átomo, as hipóteses de (5.10) estão satisfeitas. Sejam $\mathcal{M} = \{M_\lambda\}_{\lambda\in P_\eta}$, com $\eta = \min\{\gamma : \gamma$ é número ordinal, $\#P_\gamma = \#\mathcal{M}\}$, e $\mathcal{N} = \{N_\lambda\}_{\lambda\in P_\eta}$, onde $N_\lambda = \dot{\bigcup}\{A_\alpha : \alpha \in M_\lambda\}$, satisfazendo suas conclusões.

Como, por hipótese, μ é finita e $\dot{\bigcup}\mathcal{E} \in \mathcal{A}$ para toda subfamília $\mathcal{E}$ de $\mathcal{A}$ então $(T,\mathcal{P}(T),\mathcal{D})$, onde $\mathcal{D}$ é a restrição de ν ao conjunto T, é um espaço com medida finita. Assim $(T,\mathcal{P}(T),\mathcal{D})$, a família $\mathcal{M}$ e a função σ, de $\mathcal{P}(P_\eta)$ em $[0,\infty[$, definida por $\sigma(E) = \mathcal{D}(\dot{\bigcup}\{M_\lambda : \lambda \in E\})$, para todo E em P_η, satisfazem as hipóteses de (5.12). Seja

$$\mathcal{H} = \{H : H \subset P_\eta,\ \sigma(H) > 0\} \text{ satisfazendo } (5.12.ii\text{-}iv).$$

Por outro lado as hipóteses de (5.11) também se verificam. Consideremos Z e Z_θ como ali definidas.

Por (5.11.iii), para cada $\theta \in P_\eta$, temos $\mu(Z\cap Z'_\theta) > 0$. Da hipótese que μ é medida de Radon segue-se que existe um compacto K_θ tal que, para cada $\theta \in P_\eta$,

$$K_\theta \subset Z \cap Z'_\theta \tag{1}$$

e

$$\mu(K_\theta) > 0. \tag{2}$$

Como $\#P_\eta = \#\mathcal{M}$ e, por (5.7.*ii*), $\aleph_0 < \#\mathcal{M}$ então a família $(K_\theta)_{\theta\in P_\eta}$ é não-enumerável e, por (2), constituída por conjuntos não μ-nulos. Escolhendo um conjuntos de índices conveniente mostraremos que essa família verifica as contradições citadas no início da demonstração.

O conjunto P_η, o ultrafiltro $\mathcal{H}$, a função f, de $S(P_\eta)$ em $\{0,1\}$, definida por

$$f(F) = \begin{cases} 1, \text{ se } \bigcap_{\theta\in F} K_\theta \neq \emptyset \text{ ou } F \text{ é unitário,} \\ 0, \text{ se } \bigcap_{\theta\in F} K_\theta = \emptyset \end{cases}$$

satisfazem as hipóteses de (2.12). Portanto existe Q, subconjunto de P_η tal que

$$\#Q = \#P_\eta \tag{3}$$

e,, a restrição de f á parte $S_n(Q)$ é constante, para todo número natural n, $n \geq 1$.

A igualdade (3) permite-nos reindexar a família $(K_\theta)_{\theta\in P_\eta}$ tomando Q para conjunto de índices. Assim $(K_\theta)_{\theta\in P_\eta} = (K_\rho)_{\rho\in Q}$.

Dos resultados μ é finita, Q não-enumerável e $\mu(K_\rho) > 0$, para todo $\rho \in Q$ segue-se que o espaço com medida $(X,\mathcal{A},\mu)$ e a família $(K_\rho)_{\rho\in Q}$ satisfazem as hipóteses de (4.5). Então, para cada número natural n, $n\geq 2$, existe uma subfamília de $(K_\rho)_{\rho\in Q}$, com n elementos, cuja interseção é não-vazia.

Este resultado e a definição de f acarretam que, para cada número natural n, $n \geq 1$, existe um subconjunto G de $S_n(Q)$ tal que $f(G) = 1$

Mas, como vimos acima, a restrição da função f ao conjunto $S_n(Q)$ é constante para cada número natural não nulo. Logo $f(F) = 1$ para todo $F \in S(Q)$. Segue-se, novamente utilizando a definição de f, que a família $(K_\rho)_{\rho\in Q}$ tem a propriedade da interseção finita no espaço de Hausdorff $(X,\mathcal{T})$. Portanto

$$\bigcap_{\rho\in Q} K_\rho \neq \emptyset. \tag{4}$$

Obtenhamos a contradição de (4) mostrando que para cada $\theta \in P_\eta$ existe $\rho(\theta) \in Q$ tal que $\theta \leq \rho(\theta)$.

De fato, lembrando que $Q \subset P_\eta$, e supondo que exista $\beta \in P_\eta$ tal que $\rho < \beta$, para todo $\rho \in Q$, temos $Q \subset P_\beta$. Segue-se pela escolha de η e por (1.11.*b*) que $\#Q \leq \#P_\beta < \#P_\eta = \#Q$ e isto é absurdo.

Utilizando (5.11.*ii*) e (5.11.*i*), vem

$$Z = \bigcup_{\theta\in P_\eta} Z_\theta \subset \bigcup_{\rho(\theta)\in Q} Z_{\rho(\theta)} \subset \bigcup_{\rho\in Q} Z_\rho \subset \bigcup_{\theta\in P_\eta} Z_\theta = Z,$$

e daí $Z = \bigcup_{\rho \in Q} Z_\rho$.

Mas, de acordo com (1), $K_\rho \subset Z \cap Z'_\rho$, para todo $\rho \in Q$. Então

$$\bigcap_{\rho \in Q} K_\rho \subset \bigcap_{\rho \in Q} (Z \cap Z'_\rho) = Z \cap \bigcap_{\rho \in Q} Z'_\rho = Z \cap (\bigcup_{\rho \in Q} Z_\rho)' = \emptyset,$$

contradizendo (4). $\square$

§6. O Teorema Fundamental : medida não-atômica

Este parágrafo pode ser dividido em duas partes. Na primeira estudaremos cardinalidade de conjuntos, utilizando propriedades topológicas do espaço, na segunda veremos algumas propriedades referentes aos espaços com medida finita e não-atômica.

Os teoremas de destaque são (6.18) e (6.19). O primeiro afirma a existência de uma partição do espaço constituída por conjuntos μ-nulos; o segundo afirma que é nula a medida da reunião de uma família de conjuntos, μ-nulos e dois a dois disjuntos, desde que a medida seja de Radon e a reunião de toda subfamília da família dada seja um elemento da σ-álgebra.

(6.1) Lema. Seja $\mathfrak{F}$ uma coleção de conjuntos e seja $\mathfrak{G}$ a coleção dos conjuntos que são expressos como reuniões de elementos de $\mathfrak{F}$. Então $\#\mathfrak{G} \leq 2^{\#\mathfrak{F}}$.

Demonstração. Imediata.

(6.2) Observações. Denotaremos por $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{F}$, respectivamente, as coleções dos subconjuntos abertos e dos fechados do intervalo $[0,1]$ na topologia usual, por $\mathfrak{B}$ a subcoleção de $\mathfrak{A}$ constituída pelas bolas abertas cujo centro e raio são números racionais, e por $\mathfrak{K}$ a coleção dos subconjuntos compactos e não-enumeráveis de $[0,1]$. Verificamos, sem dificuldade, que (*i*) $\#\mathfrak{B} = \aleph_0$;

(*ii*) $\#\mathfrak{T} = \#\mathfrak{F}$;

(*iii*) $c \leq \#\mathfrak{T}$;

(*iv*) $c \leq \#\mathfrak{R}$.

(6.3) Teorema. Tem-se $\#\mathfrak{T} = c$ e $\#\mathfrak{R} = c$.

Demonstração. Todo elemento de $\mathfrak{T}$ é expresso pela reunião de elementos de $\mathfrak{B}$. Então, por (6.1), (6.2.*i*) e (1.35), temos $\#\mathfrak{T} \leq 2^{\#\mathfrak{B}} = 2^{\aleph_0} = c$. Para a igualdade basta ver (6.2.*iii*).

Agora de $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{F}$ segue-se que $\#\mathfrak{R} \leq \#\mathfrak{F} = \#\mathfrak{T} = c$. Utilizando (6.2.*iv*), temos $\#\mathfrak{R} = c$. $\Box$.

Provaremos em (6.10) que todo subconjunto compacto e não-enumerável de $[0,1]$ tem cardinalidade c. Como tal demonstração será realizada sem a utilização da Hipótese do Contínuo, tornam-se necessários alguns lemas e o conceito de ponto de condensação de um conjunto.

(6.4) Definição. Sejam X um espaço topológico, x um elemento de X e A um subconjunto de X com $\#A > \aleph_0$. Diz-se que x é ponto de condensação de A se e somente se toda vizinhança V de X é tal que $\#(V \cap A) > \aleph_0$.

(6.5) Exemplo. Todo ponto do intervalo $[0,1]$ é ponto de condensação do conjunto $\{x \in [0,1] : x \text{ é irracional}\}$.

(6.6) Lema. Seja A um subconjunto de $[0,1]$. Se $\#A > \aleph_0$ então A tem pelo menos dois pontos de condensação.

Demonstração. Suponhamos que A não tenha pontos de condensação. Então, para cada $x \in [0,1]$ existe um aberto $\mathcal{U}_x$ em $[0,1]$, contendo x, tal que $\#(A \cap \mathcal{U}_x) \leq \aleph_0$.

Seja $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ uma base de abertos em $[0,1]$. Então, para cada $x \in [0,1]$, existe $i(x) \in \mathbb{N}$ tal que $x \in B_{i(x)}$ e $B_{i(x)} \subset \mathcal{U}_x$. Portanto, para todo $x \in [0,1]$ temos

$$\#(A \cap B_{i(x)}) \leq \aleph_0.$$

Mas $A \subset \bigcup_{i(x)\in\mathbb{N}} (B_{i(x)} \cap A)$. Logo, utilizando (1.11.*b*) e (1.33), temos

$$\aleph_0 < \#A \leq \#(\bigcup_{i(x)\in\mathbb{N}} (B_{i(x)} \cap A)) \leq \aleph_0,$$

o que é absurdo.

Portanto existe p em $[0,1]$ ponto de condensação de A.

É claro que p não é o único ponto de condensação de A, pois se tal ocorresse então, para cada número natural n, teríamos que

$$\#\left(A \cap \left( ]\, p - \tfrac{1}{n+1}, p + \tfrac{1}{n+1} \,[\right)' \right) \leq \aleph_0.$$

Segue-se, novamente utilizando (1.33), que

$$\#(A \cap (\{p\})') = \#\left(A \cap \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left( ]\, p - \tfrac{1}{n+1}, p + \tfrac{1}{n+1} \,[\right)' \right) \right) \leq \aleph_0,$$

e daí $\#A \leq \aleph_0$, contradizendo a hipótese. $\square$

Pode-se provar que a cardinalidade do conjunto dos pontos de condensação do conjunto A, no teorema acima, é estritamente maior que $\aleph_0$. Não o fizemos pois necessitamos conhecer apenas dois pontos de condensação.

(6.7). Lema. Seja H um subconjunto fechado em $[0,1]$. Se $\#H > \aleph_0$ então existem H_1 e H_2, subconjuntos disjuntos de H e fechados em $[0,1]$, tais que $\#H_1 > \aleph_0$ e $\#H_2 > \aleph_0$.

Demonstração. De acordo com (6.6) existem p e q em $[0,1]$, com $p \neq q$, pontos de condensação de H.

Escolhendo $\delta = \frac{|p-q|}{3}$, tomamos $H_1 = [p - \delta, p + \delta] \cap H$ e $H_2 = [q - \delta, q + \delta] \cap H$.

É imediato que H_1 e H_2 verificam as conclusões do teorema. □

Este lema poderia ser enunciado: Se H é um subconjunto de [0,1] com $\#H > \aleph_0$ então existem H_1 e H_2 subconjuntos de H, disjuntos, tais que $\#H_1 > \aleph_0$ e $\#H_2 > \aleph_0$. No entanto, a forma acima foi preferida pela sua aplicação imediata em (6.10).

(6.8) Notações. No restante deste parágrafo Γ será o conjunto das funções de $\mathbb{N}$ em {0,1} (como em (1.35)) e, sendo n um número natural não-nulo, denotaremos por $\Gamma(n)$ o conjunto das funções de $\{0,\ldots,n-1\}$ em {0,1}.

Se δ é um elemento arbitrário de Γ e n é um número natural não-nulo, então indicaremos por $(\delta)_n$ a restrição de δ a $\{0,\ldots,n-1\}$. Analogamente, se $r \in \Gamma(n)$ e p é um número natural, $1 \leq p < r$, então indicaremos por $(r)_p$ a restrição de r a $\{0,\ldots,p-1\}$.

(6.9) Observações. (*a*) Quaisquer que sejam δ^1 e δ^2 em Γ, se $(\delta^1)_n = (\delta^2)_n$, para todo número natural n, não-nulo, então $\delta^1 = \delta^2$.

(*b*) Se δ é um elemento de Γ e n é um número natural não-nulo, então $(\delta)_n \in \Gamma(n)$.

(*c*) Se $r \in \Gamma(n_1)$, $s \in \Gamma(n_2)$ e $(r)_p = (s)_p$, para algum p, com $0 < p \leq \min(n_1,n_2)$, tem-se $(r)_q = (s)_q$, para todo q com $0<q\leq p$.

(*d*) A função f de $\Gamma(n) \times \{0,1\}$ em $\Gamma(n+1)$ definida por $f(s,i) = t$, onde $(t)_n = s$, e $t(n) = i$, é bijetora.

(6.10) Teorema. Seja H um subconjunto fechado e não-enumerável de [0,1], Então $\#H = \mathfrak{c}$.

Demonstração. É imediato, veja (1.36), que

$$\#H \leq \mathfrak{c}. \tag{1}$$

Iniciamos a prova da desigualdade contrária mostrando, por indução a propriedade: para cada número natural n, não-nulo, existe um família $\mathcal{F}(n) = \{H_r\}_{r\in\Gamma(n)}$ de subconjuntos de H, fechados em [0,1], dois a dois disjuntos, satisfazendo:

$$\#H_r > \aleph_0, \tag{2}$$

e

$$H_r \subset H_{(r)_n} \; , \tag{3}$$

para todo r em $\Gamma(n+1)$.

Sejam H_0 e H_1 subconjuntos de H como em (6.7) e $\mathfrak{F}(1) = \{H_0, H_1\}$. É imediato que a propriedade está verificada para $n=1$.

Seja $n \geq 1$ e suponhamos que a família $\mathfrak{F}(n) = \{H_r\}_{r \in \Gamma(n)}$ satisfaça a hipótese de indução. Então, para cada $r \in \Gamma(n)$ existem, por (6.7), $H_{r,0}$ e $H_{r,1}$ subconjuntos de H_r fechados em $[0,1]$, disjuntos e com cardinalidade estritamente maior que $\aleph_0$. Segue-se que a família $\mathfrak{F}(n+1) = \{H_{r,i} : r \in \Gamma(n),\ i = 0,1\}$ verifica (2).

É claro que $\mathfrak{F}(n+1)$ é constituída por conjuntos dois a dois disjuntos, pois, $H_{r,0} \cap H_{r,1} = \emptyset$ e dados r e s em $\Gamma(n)$, distintos, temos: $(H_{r,i} \cap H_{s,j}) \subset (H_r \cap H_s) = \emptyset$, quaisquer que sejam i e j $(i,j = 0,1)$.

Finalmente reindexamos $\mathfrak{F}(n+1)$ tomando $\Gamma(n+1)$ para conjunto de índices e utilizando a função f dada em (6.9.d). Verifica-se facilmente que (3) é verdadeira.

Agora, para cada elemento δ em Γ, a família $(H_{(\delta)_n})_{n=1}^{\infty}$ possui a propriedade da interseção finita. Logo $H_\delta = \bigcap_{n=1}^{\infty} H_{(\delta)_n} \neq \emptyset$.

É imediato que $H_\delta \subset H$, para todo δ em Γ, e que, observando (6.9,a), se $\delta_1 \neq \delta_2$ então existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $(\delta_1)_* \neq (\delta_2)_*$. Segue-se, utilizando a propriedade acima, que

$$H_{\delta_1} \cap H_{\delta_2} = \emptyset, \text{ quaisquer que sejam } \delta_1 \text{ e } \delta_2 \text{ em } \Gamma, \text{ distintos.} \tag{4}$$

Seja g uma função escolha para $[0,1]$. Para cada δ em Γ definamos $x_\delta = g(H_\delta)$. Utilizando (4) temos que $x_{\delta_1} \neq x_{\delta_2}$, quaisquer que sejam δ_1 e δ_2 em Γ, distintos. Portanto o subconjunto $\{x_\delta : \delta \in \Gamma\}$ de H tem cardinalidade $\mathfrak{c}$. Daí, segue-se que $\mathfrak{c} \leq \#H$.

Lembrando (1), temos $\mathfrak{c} = \#H$. $\square$

(6.11) Teorema. Existe um subconjunto B de $[0,1]$, com $\#B = \mathfrak{c}$, tal que $K \cap B \neq \emptyset$ e $K \cap B' \neq \emptyset$, para todo $K \in \mathfrak{K}$.

Demonstração. Seja

$$\varsigma = \min\{\gamma : \gamma \text{ é número ordinal, } \#P_\gamma = \mathfrak{c}\}, \tag{1}$$

Como, por (6.3), $\#\mathfrak{K} = \mathfrak{c}$, podemos indexar os elementos de $\mathfrak{K}$ tomando P_ς para conjunto de índices; assim $\mathfrak{K} = (K_\alpha)_{\alpha \in P_\varsigma}$.

Utilizando o Princípio da Indução Transfinita mostraremos que para cada α em P_ς existem r_α e s_α em $[0,1]$, satisfazendo:

$$r_\alpha \in K_\alpha \text{ e } s_\alpha \in K_\alpha, \text{ para todo } \alpha; \tag{2}$$

$$r_\alpha \neq s_\beta, \text{ quaisquer que sejam } \alpha \text{ e } \beta; \tag{3}$$

$$r_\alpha \neq r_\beta \text{ e } s_\alpha \neq s_\beta, \text{ quaisquer que sejam } \alpha \text{ e } \beta \text{ distintos.} \tag{4}$$

Seja g uma função escolha para $[0,1]$.

Como K_0 é não-vazio existe $r_0 = g(K_0)$. A hipótese $\#K_0 > \aleph_0$ acarreta que $K_0 \cap \{r_0\}' \neq \emptyset$. Tomando $s_0 = g(K_0 \cap \{r_0\}')$ temos que (1), (2) e (3) estão verificadas para $\alpha = 0$.

Seja ρ em P_ς, $\rho \geq 1$. Suponhamos determinados r_β e s_β, para cada $\beta \in P_\rho$ satistazendo (1), (2) e (3).

Como $\rho < \varsigma$ segue-se, utilizando (1), (1.11.b) e (1.10), que $\#P_\rho < \mathbf{c}$. Portanto, por (1.30), o conjunto $A = \{r_\beta : \beta \in P_\rho\} \cup \{s_\beta : \beta \in P_\rho\}$ tem cardinalidade estritamente menor que $\mathbf{c}$. Daí $\#(K_\rho \cap A) < \mathbf{c}$.

Agora, utilizando (6.10) e observando (1.30), (1.29) temos

$$\#(K_\rho \cap A') = \mathbf{c} \tag{5}$$

Escolhendo $r_\rho = g(K_\rho \cap A')$ e $s_\rho = g(K_\rho \cap (A \cup \{r_\rho\})')$ facilmente verificamos que r_ρ e s_ρ satisfazem (2) - (4).

Seja $B = \{r_\alpha\}_{\alpha \in P_\varsigma}$.

É claro que $\#B = \mathbf{c}$ e que $K_\alpha \cap B \supset \{r_\alpha\} \neq \emptyset$ e que $K_\alpha \cap B' \supset \{s_\alpha\} \neq \emptyset$, para cada $\alpha \in P_\varsigma$. $\square$

(6.12) Corolário. Seja B um subconjunto de $[0,1]$ como em (6.11) e K um subconjunto compacto de $[0,1]$. Se K está contido em B, então K é enumerável.

A prova de lema a seguir baseia-se no lema 1 de [R.9].

(6.13) Lema. Seja $(X,\mathcal{A},\mu)$ um espaço com medida finita e não-atômica. Então, dados $A \in \mathcal{A}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, com $0<\alpha<\mu(A)$, existe um subconjunto B de A tal que $B \in \mathcal{A}$ e $0<\mu(B)<\alpha$.

Demonstração. Inicialmente provemos, por indução, que para cada número natural n existe A_n contido em A tal que

$$0 < \mu(A_n) \leq \frac{\mu(A)}{2^n} \qquad (1)$$

Como μ é não-atômica então existe um subconjunto A_o de A tal que $0 < \mu(A_o) < \mu(A)$, verificando a asserção para $n = 0$.

Seja $n \geq 1$ tal que existe A_n contido em A satisfazendo (1).

A hipótese, μ não-atômica, acarreta que existe um subconjunto D de A_n tal que $0 < \mu(D) < \mu(A_n)$. Se $\mu(D) \leq \frac{\mu(A_n)}{2^{n+1}}$ escolhemos $A_{n+1} = D$; caso contrário, fazemos $A_{n+1} = A_n \cap D'$.

Verificada (1) para todo número natural n, escolhemos n_o tal que $\frac{\mu(A)}{2^{n_o}} < \alpha$ e tomamos $B = A_{n_o}$. □

O teorema a seguir mostra que num espaço com medida μ, não-atômica, cada elemento A de $\mathcal{A}$ com $\mu(A) < \infty$ possui a propriedade: a imagem da coleção $\{B: B \subset A, B \in \mathcal{A}\}$ pela função μ é o intervalo $[0,\mu(A)]$.

(6.14) Teorema. Seja $(X,\mathcal{A},\mu)$ um espaço com medida finita e não-atômica e seja A um elemento não μ-nulo de $\mathcal{A}$. Se α é um número real tal que $0 < \alpha < \mu(A)$, então existe um subconjunto B de A tal que $B \in \mathcal{A}$ e $\mu(B) = \alpha$.

Demonstração. Seja $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de números reais positivos que converge para zero.

Utilizando o segundo princípio de indução provemos a afirmação: para cada número natural n existe um elemento A_n em $\mathcal{A}$ e existe um número real positivo a_n verificando as condições:

$$a_n - \epsilon_n < \mu(A_n) \leq a_n, \qquad (1)$$

e

$$A_{n-1} \subset A_n \subset A. \qquad (2)$$

Pelo lema existe um subconjunto D de A tal que $D \in \mathcal{A}$ e $0 < \mu(D) < \alpha$. Logo o conjunto $\{\mu(E) : D \subset E \subset A, E \in \mathcal{A}, \mu(E) \leq \alpha\}$ é não-vazio e $\alpha \geq \sup\{\mu(E) : D \subset E \subset A, E \in \mathcal{A}, \mu(E) < \alpha\} = a_o > 0$.

Pela definição de supremo existe A_0 contido em A, com $A_0 \in \mathcal{A}$ e $a_0 - \epsilon_0 < \mu(A_0) \leq a_0 \leq \alpha$, satisfazendo (1). Fazendo $A_{-1} = \emptyset$ temos que $\emptyset \subset A_0 \subset A$ satisfazendo (2) e mostrando que as condições acima são válidas para $n = 0$.

Seja $n \geq 1$ e suponhamos determinados os conjuntos $A_0,\ldots,A_n$ em $\mathcal{A}$ e os números reais $a_0,\ldots,a_n$ satisfazendo as condições (1) e (2).

Pela hipótese de indução o conjunto $\{\mu(E) : A_n \subset E \subset A, E \in \mathcal{A}, \mu(E) \leq \alpha\}$ é não-vazio e como $D \subset A_n$ então $a_{n+1} = \sup\{\mu(E) : A_n \subset E \subset A, E \in \mathcal{A}, \mu(E) \leq \alpha\}$ verifica $\alpha \geq a_{n+1} \geq \mu(A_n) > 0$.

Pela definição de supremo existe A_{n+1} tal que $A_n \subset A_{n+1} \subset A$, $A_{n+1} \in \mathcal{A}$ e $a_{n+1} - \epsilon_{n+1} < \mu(A_{n+1}) \leq a_{n+1} \leq \alpha$, verificando as condições para o número natural $n + 1$ e encerrando a prova da afirmação.

De (2) segue-se que

$$\{\mu(E) : A_n \subset E \subset A, E \in \mathcal{A}, \mu(E) \leq \alpha\} \supset \{\mu(E) : A_{n+1} \subset E \subset A, E \in \mathcal{A}, \mu(E) \leq \alpha\}$$

para cada número natural n. Portanto $a_n \geq a_{n+1}$ e a seqüência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é não-crescente. Seja $a = \lim_{n\to\infty} a_n$.

Lembrando que a seqüência $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para zero, temos:

$$a = \lim_{n\to\infty}(a_n - \epsilon_n) \leq \lim_{n\to\infty}\mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \lim_{n\to\infty} a_n = a,$$

ou seja, $a = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$.

Se mostrarmos que $a = \alpha$, o teorema estará provado.

Seja $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ e suponhamos, por absurdo, que $a < \alpha$. Então $\mu(A \cap B') \geq \alpha - a$ e, por (6.13) existe um subconjunto F de $A \cap B'$ tal que $F \in \mathcal{A}$ e $0 < \mu(F) < \alpha - a$. Portanto $B \dot{\cup} F \in \mathcal{A}$ e

$$a < \mu(B \dot{\cup} F) < \alpha. \tag{3}$$

Mas, por outro lado, $A_n \subset B \subset B \dot{\cup} F \subset A$ para todo número natural n. Segue-se, recordando que $a_n = \sup\{\mu(E) : A_{n-1} \subset E \subset A, E \in \mathcal{A}, \mu(E) \leq \alpha\}$ e que a seqüência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é não-crescente, que $\mu(B \dot{\cup} F) \leq a_n$, para todo número natural n. Daí $\mu(B \dot{\cup} F) \leq \lim_{n\to\infty} a_n = a$, contrariando (3). □

(6.15) Corolário. Seja $(X,\mathcal{A},\mu)$ um espaço com medida finita e não-atômica. Então $\mathrm{im}(\mu) = [0,\mu(X)]$.

(6.16) Teorema. **Seja $(X,\mathcal{A},\mu)$ um espaço com medida finita e não-atômica. Então para cada número natural n, não-nulo, existe uma família $\mathfrak{D}(n) = (D_s)_{s\in\Gamma(n)}$ de elementos de $\mathcal{A}$, dois a dois disjuntos, satisfazendo as seguintes condições:**

(i) $\mu(D) = \dfrac{\mu(X)}{2^n}$, para todo $D \in \mathfrak{D}(n)$,

(ii) $\#\mathfrak{D}(n) = 2^n$,

(iii) $\dot{\bigcup}\mathfrak{D}(n) = X$,

(iv) se $D_s \in \mathfrak{D}(n)$ então, para todo número natural m, com $0 < m < n$, tem-se $D_{(s)_m} \in \mathfrak{D}(m)$ e $D_s \subset D_{(s)_m}$.

Demonstração. A prova será realizada utilizando-se o segundo princípio da indução finita.

Façamos $\mu(X) = a$ e seja, por (6.14), $D_0 \in \mathcal{A}$ com $\mu(D_0) = \frac{a}{2}$. Tomando $D_1 = D_0'$ temos que a família (D_0,D_1) está indexada por $\Gamma(1)$ e as condições (i)-(iv) são verdadeiras, verificando a asserção para $n = 1$.

Admitamos que o n-ésimo passo esteja completado e que a família $\mathfrak{D}(n) = (D_s)_{s\in\Gamma(n)}$, satisfazendo as condições do teorema, esteja determinada.

Façamos o $(n + 1)$-ésimo passo.

Para cada $s \in \Gamma(n)$ escolhemos $D_{s,0}$, subconjunto de D_s, de tal forma que $\mu(D_{s,0}) = \frac{a}{2^{n+1}}$. Fazendo $D_{s,1} = D_s \cap D_{s,0}'$ temos que $\mu(D_{s,1}) = \frac{a}{2^{n+1}}$.

Verifiquemos que a família $\mathfrak{D}(n + 1) = (D_{s,i} \in \mathcal{A} : s \in \Gamma(n),\ i = 0,1)$ satisfaz as condições do teorema. Os itens (i)-(iii) são imediatos. Resta verificarmos (iv) e que os elementos da família são dois a dois disjuntos.

Façamos $\mathfrak{D}(n + 1) = (D_t)_{t\in\Gamma(n+1)}$ onde tomamos $\Gamma(n + 1)$ para conjunto de índices, utilizando a função f dada em (6.9.d).

Se $D_t \in \mathfrak{D}(n + 1)$ e $0 < m < n + 1$ então $t = f(s,i)$ e daí $D_t = D_{s,0}$ ou $D_t = D_{s,1}$. Portanto $D_s \in \mathfrak{D}(n)$, provando (iv) para $m = n$. Para $m < n$, $(t)_m = (s)_m$ de acordo com (6.9.c) e, lembrando a hipótese de indução, tem-se que $D_t \subset D_{(t)_m}$ e $D_{(t)_m} \in \mathfrak{D}(m)$.

Resta provar que os elementos de $\mathfrak{D}(n + 1)$ são dois a dois disjuntos. Se t_1 e t_2 são elementos distintos de $\Gamma(n + 1)$ tais que $(t_1)_n = (t_2)_n$ então $t_1 = f(s,0)$ e $t_2 =$

$f(s,1)$. Logo $D_{t_1} \cap D_{t_2} = D_{s,0} \cap D_{s,1} = \emptyset$. Para $(t_1)_n \neq (t_2)_n$ temos, pela hipótese de indução $D_{t_1} \cap D_{t_2} \subset D_{(t_1)_n} \cap D_{(t_2)_n} = \emptyset$. □

(6.17) Corolário. Sejam $(X,\mathcal{A},\mu)$ um espaço com medida finita e não-atômica, $\mathfrak{D}(n) = (D_s)_{s\in\Gamma(n)}$ e $\mathfrak{D}(m) = (D_t)_{t\in\Gamma(m)}$, com $0 < m < n$, famílias de elementos de $\mathcal{A}$ que verificam as condições de (6.16). Suponhamos que x seja um elemento de X tal que x $\in D_u \cap D_v$, onde $u \in \Gamma(n)$ e $v \in \Gamma(m)$, então $(u)_m = v$.

Demonstração. O fato de $x \in D_u$ acarreta, por (6.16.*iv*), que $x \in D_{(u)_m}$. Logo $x \in D_{(u)_m} \cap D_v$. Mas a família $\mathfrak{D}_{(m)}$ é constituída por conjuntos dois a dois disjuntos, portanto $D_{(u)_m} = D_v$ e daí $(u)_m = v$. □

(6.18) Teorema. Seja $(X,\mathcal{A},\mu)$ um espaço com medida finita e não-atômica. Então existe uma família $\mathfrak{D} = (D_\delta)_{\delta\in\Gamma}$ de elementos de $\mathcal{A}$, μ-nulos e dois a dois disjuntos, tal que $\bigcup\mathfrak{D} = X$.

Demonstração. Fixado $\delta \in \Gamma$, para cada número natural n não-nulo, temos que $(\delta)_n \in \Gamma(n)$ e $(\delta)_{n+1} \in \Gamma(n+1)$. Como as hipóteses de (6.16) estão satisfeitas então, de acordo com (6.16.*iv*), $D_{(\delta)_n} \supset D_{(\delta)_{n+1}}$. Logo a seqüência $(D_{(\delta)_n})_{n=1}^{\infty}$ é não-crescente. Segue-se, definindo

$$D_\delta = \bigcap_{n=1}^{\infty} D_{(\delta)_n} \tag{1}$$

e, lembrando que $\mu(X) < \infty$, que

$$\mu(D_\delta) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} D_{(\delta)_n}\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(D_{(\delta)_n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{\mu(X)}{2^n} = 0.$$

Portanto, a família $\mathfrak{D} = (D_\delta)_{\delta\in\Gamma}$ é constituída por conjuntos μ-nulos.

Dados δ^1 e δ^2 em Γ, distintos, existe um número natural n, não-nulo, tal que $(\delta^1)_n \neq (\delta^2)_n$. Portanto $D_{\delta^1} \cap D_{\delta^2} \subset D_{(\delta^1)_n} \cap D_{(\delta^2)_n} = \emptyset$, mostrando que os elementos de $\mathfrak{D}$ são dois a dois disjuntos.

Dado $x \in X$ existe, para cada número natural n não-nulo, um único $s_n \in \Gamma(n)$ tal que $x \in D_{s_n}$. Portanto, de acordo com (6.17), temos que

$$(s_n)_m = s_m, \text{ quaisquer que sejam } m \text{ e } n \text{ com } 0 < m < n. \tag{2}$$

Seja δ em Γ definida por $\delta(p) = s_{p+1}(p)$, para cada número natural p. Provemos que $x \in D_\delta$.

Fixado um número natural n, não-nulo, para todo $m < n$ temos, observando (2), que $\delta_n(m) = \delta(m) = s_{m+1}(m) = (s_n)_{m+1}(m) = s_n(m)$, ou seja, $\delta_n = s_n$. Logo $x \in D_{\delta_n}$, para todo número natural n não-nulo e daí, por (1), $x \in D_\delta$.

Portanto $X \subset \bigcup\limits_{\delta \in \Gamma} D_\delta$. Deste resultado e da inclusão $\bigcup\limits_{\delta \in \Gamma} D_\delta \subset X$, que é imediata, segue-se a igualdade. □

(6.19) Teorema. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu, \mathfrak{F})$ um espaço com medida de Radon finita, $\mathfrak{F} = (A_\alpha)_{\alpha \in P_\psi}$ uma família de elementos de $\mathcal{A}$, μ-nulos e dois a dois disjuntos, tal que $\bigcup \mathfrak{E} \in \mathcal{A}$, para toda subfamília $\mathfrak{E}$ de $\mathfrak{F}$ e seja ν, de $\mathcal{P}(P_\psi)$ em $[0,\infty[$, definida como em (5.9.*i*), por

$$\nu(D) = \mu\left(\bigcup\{A_\alpha : \alpha \in D\}\right), \text{ para todo } D \text{ em } \mathcal{P}(P_\psi).$$

Se ν é não-atômica então $\mu(\bigcup \mathfrak{F}) = 0$.

Demonstração. Supondo $\mu\left(\bigcup \mathfrak{F}\right) > 0$ determinaremos uma família $\mathcal{N}$ de subconjuntos μ-nulos de X, dois a dois disjuntos, e um conjunto K, compacto em $\bigcup \mathfrak{F}$ que é não μ-nulo e está contido numa reunião enumerável de elementos da família $\mathcal{N}$ chegando assim a uma contradição.

De $\mu\left(\bigcup \mathfrak{F}\right) > 0$ segue-se que $0 < \nu(P_\psi) < \infty$. Logo existe uma família $\mathfrak{D} = (D_\delta)_{\delta \in \Gamma}$ de subconjuntos de P_ψ satisfazendo as conclusões de (6.18), e, para cada $\delta \in \Gamma$, $N_\delta = \bigcup\{A_\alpha : \alpha \in D_\delta\}$ é um elemento de $\mathcal{A}$.

Mostremos que a família $\mathcal{N} = (N_\delta)_{\delta \in \Gamma}$ é constituída por conjuntos μ-nulos, dois a dois disjuntos, cuja reunião é $\bigcup \mathfrak{F}$.

Para todo $\delta \in \Gamma$ tem-se que $\mu(N_\delta) = \nu(D_\delta) = 0$ e, se δ_1 e δ_2 são elementos distintos de Γ então, como D_{δ_1} e D_{δ_2} são disjuntos, $N_{\delta_1} \cap N_{\delta_2} = \bigcup\{A_\alpha : \alpha \in D_{\delta_1} \cap D_{\delta_2}\} = \emptyset$.

O fato de $N_\delta \subset \bigcup \mathfrak{F}$ acarreta que $\bigcup \mathcal{N} \subset \bigcup \mathfrak{F}$. Para a inclusão contrária notemos que para todo $x \in \bigcup \mathfrak{F}$ existe um único $\alpha \in P_\psi$ tal que $x \in A_\alpha$. Como

$\alpha \in D_\delta$, para algum $\delta \in \Gamma$, então $x \in N_\delta$. Daí $\dot{\bigcup}\mathcal{F} \subset \dot{\bigcup}\mathcal{N}$ e $\dot{\bigcup}\mathcal{F} = \dot{\bigcup}\mathcal{N}$.

O próximo passo será a determinação do conjunto K, compacto em X e não μ-nulo.

Iniciemos observando que $\#\mathcal{N} = \#\mathcal{D} = \mathfrak{c}$. Logo podemos indexar estas famílias tomando para conjunto de índices um subconjunto B de [0,1] que satisfaz (6.11).

Sejam $\mathcal{D} = (D_r)_{r\in B}$ e $\mathcal{N} = (N_r)_{r\in B}$.

Mostremos que a função h, de $\dot{\bigcup}\mathcal{F}$ em [0,1], definida por $h(x) = r$ se $x \in N_r$ é $\mathcal{A}$-mensurável.

Dado V, aberto em [0,1], temos, lembrando (5.1.*ii*)

$$h^{-1}(V) = h^{-1}(V \cap B) = \dot{\bigcup_{r\in B\cap V}} h^{-1}(\{r\}) = \dot{\bigcup_{r\in B\cap V}} N_r = \dot{\bigcup_{r\in B\cap V}} \dot{\bigcup}\{A_\alpha : \alpha \in D_r\}$$

$$= \dot{\bigcup}\{A_\alpha : \alpha \in \dot{\bigcup_{r\in B\cap V}} D_r\} \in \mathcal{A}.$$

Então, por (3.4), existe um subconjunto K, compacto em $\dot{\bigcup}\mathcal{F}$, tal que a restrição de h a K é contínua e

$$\mu(K) > 0 \tag{1}$$

Da continuidade de h, restrita a K, segue-se que $h(K)$ é compacto e, da definição de h, temos $h(K) \subset B$. Portanto, por (6.12), $h(K)$ é enumerável. Logo, se I é um subconjunto de $\mathbb{N}$ tal que $h(K) = \dot{\bigcup_{i\in I}}\{r_i\}$, então

$$K \subset h^{-1}\Big(\dot{\bigcup_{i\in I}}\{r_i\}\Big) = \dot{\bigcup_{i\in I}} N_{r_i}.$$

Mas $\mu(N_\delta) = 0$, para cada $\delta \in \Gamma$, portanto $\mu(K) \le \sum_{i\in I}\mu(N_{r_i}) = 0$. Daí vem que $\mu(K) = 0$, contradizendo (1). □

§7. O Teorema Fundamental e aplicações

Este parágrafo é especialmente importante. Nele teremos a prova do Teorema Fundamental sobre a reunião não-enumerável de conjuntos de medida nula num espaço com medida de Radon: síntese de todo o trabalho desenvolvido nos §§5 e 6.

Seguem-se conseqüências não menos importantes e um contra-exemplo que realça a necessidade de a medida ser de Radon no Teorema Fundamental.

(7.1) Teorema. Sejam $(X,\mathcal{A},\mu,\mathfrak{T})$ um espaço com medida de Radon finita e $\mathfrak{F}$ uma coleção de elementos μ-nulos de $\mathcal{A}$ tal que $\bigcup\mathcal{E} \in \mathcal{A}$ para toda subcoleção $\mathcal{E}$ de $\mathfrak{F}$. Então $\mu(\bigcup\mathfrak{F}) = 0$.

Demonstração. Seja $\varphi = \min\{\gamma : \gamma$ é número ordinal, $\#P_\gamma = \#\mathfrak{F}\}$. Indexemos $\mathfrak{F}$ tomando P_φ para conjunto de índices, ou seja, $\mathfrak{F} = (A_\alpha)_{\alpha \in P_\varphi}$.

Suponhamos, primeiramente, que $\mathfrak{F}$ seja constituída por conjuntos dois a dois disjuntos.

Definindo a função ν, de $\mathcal{P}(P_\varphi)$ em $[0,\infty[$, como em (5.9.i), por $\nu(D) = \mu(\dot{\bigcup}\{A_\alpha : \alpha \in D\})$, para todo $D \in \mathcal{P}(P_\varphi)$, temos que ν é uma medida. Se ν é atômica então, por (5.13), $\mu(\dot{\bigcup}\mathfrak{F}) = 0$; e, se ν é não-atômica então, por (6.19), $\mu(\dot{\bigcup}\mathfrak{F}) = 0$, encerrando o primeiro caso.

Se $\mathfrak{F}$ é uma coleção qualquer de elementos μ-nulos de $\mathcal{A}$ então, por (5.6), existe uma coleção $\mathfrak{D}$ de elementos de $\mathcal{A}$, μ-nulos e dois a dois disjuntos, tal que

$\bigcup\mathcal{C} \in \mathcal{A}$ **para toda subcoleção $\mathcal{C}$ de $\mathfrak{D}$ e $\bigcup\mathfrak{D} = \bigcup\mathfrak{F}$. Pelo caso anterior $\mu(\bigcup\mathfrak{D}) = 0$. Segue-se que $\mu(\bigcup\mathfrak{F}) = 0$.** □

Vejamos um contra-exemplo que destaca a necessidade de o espaço ter medida de Radon (finita).

(7.2) Exemplo. Sejam $(\overline{P_\Omega}, \sum, \psi, \tau)$ o espaço de Hausdorff com medida dado no Apêndice A e $\mathcal{G}$ a família de elementos de $\sum$ constituída por $\{0\}$, e pelos intervalos da forma $]\alpha,\beta]$, onde α e β são números ordinais limites pertencentes a P_Ω.

A família $\mathcal{G}$ é constituída por conjuntos enumeráveis logo, por (A.3), $\psi(A) = 0$ para todo $A \in \mathcal{G}$, e, como $\mathcal{G} \subset \tau$ então $\bigcup\mathcal{E} \in \mathcal{A}$, qualquer que seja a subfamília $\mathcal{E}$ de $\mathcal{G}$.

Portanto, das hipóteses de (7.1), não é válida a medida ser de Radon, veja (3.3). Lembrando (1.69.*ii*) facilmente mostramos que $\bigcup\mathcal{G} = P_\Omega$. Segue-se que a conclusão do teorema não se verifica pois $\psi(\bigcup\mathcal{G}) = 1$.

O corolário a seguir é uma generalização, para espaços com medida de Radon (finita), do teorema A de [R.1] cujo enunciado é: Seja $\{A_\alpha : \alpha \in S\}$ uma partição do intervalo $[0,1]$, constituída por conjuntos com medida de Lebesgue nula. Então existe um subconjunto S_o de S tal que $\dot{\bigcup}_{\alpha \in S_o} A_\alpha$ não é Lebesgue mensurável.

(7.3) Corolário. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu, \tau)$ um espaço com medida de Radon finita e $\mathfrak{F}$ uma coleção de elementos μ-nulos de $\mathcal{A}$ tal que $\mu(\bigcup\mathfrak{F}) > 0$. Então existe uma subcoleção $\mathcal{E}$ de $\mathfrak{F}$ tal que $\bigcup\mathcal{E} \notin \mathcal{A}$.

Demonstração. Se admitirmos, por absurdo, que toda subcoleção $\mathcal{E}$ de $\mathfrak{F}$ satisfaz $\bigcup\mathcal{E} \in \mathcal{A}$ então, por (7.1), teremos $\mu(\bigcup\mathfrak{F}) = 0$, contradizendo a hipótese.
□

(7.4) Corolário. Seja $(X, \mathcal{A}, \mu, \tau)$ um espaço com medida de Radon finita. Se existe $\mathfrak{F}$, partição de X constituída por elementos μ-nulos de $\mathcal{A}$, então $\mathcal{A} \neq \mathcal{P}(X)$.

Demonstração. Análoga a (7.3). □

Uma conseqüência imediata deste corolário é que a família dos subconjuntos de $[0,1]$ que são Lebesgue mensuráveis é distinta de $\mathcal{P}([0,1])$, fato este já expresso no enunciado anterior.

(7.5) Teorema. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu, \tau)$ um espaço com medida de Radon finita e $\mathcal{F} = (A_\alpha)_{\alpha \in P_\varphi}$ uma partição de X. Se $\dot{\bigcup}\mathcal{E} \in \mathcal{A}$, para toda subfamília $\mathcal{E}$ de $\mathcal{F}$, então $\mu(X) = \sum_{\alpha \in P_\varphi} \mu(A_\alpha)$.

Demonstração. Qualquer que seja o subconjunto L de P_φ, finito, temos $\sum_{\alpha \in L} \mu(A_\alpha) = \mu(\dot{\bigcup}_{\alpha \in L} A_\alpha) \leq \mu(X)$. Logo

$$\sum_{\alpha \in P_\varphi} \mu(A_\alpha) \leq \mu(X) \tag{1}$$

mostrando que a família $(\mu(A_\alpha))_{\alpha \in P_\varphi}$ é somável.

Então, utilizando (4.2), o conjunto $R = \{\beta \in P_\varphi : \mu(A_\beta) \neq 0\}$ é enumerável. Segue-se que

$$\mu(\dot{\bigcup_{\beta \in R}} A_\beta) = \sum_{\beta \in R} \mu(A_\beta). \tag{2}$$

Por outro lado as hipóteses do teorema (7.1) estão satisfeitas quando consideramos a família $(A_\gamma)_{\gamma \in P_\varphi \cap R'}$. Portanto $\mu(\dot{\bigcup_{\gamma \in P_\varphi \cap R'}} A_\gamma) = 0$.

Logo

$$\mu(X) = \mu(\dot{\bigcup_{\alpha \in P_\varphi}} A_\alpha) = \mu(\dot{\bigcup_{\beta \in R}} A_\beta) + \mu(\dot{\bigcup_{\gamma \in P_\varphi \cap R'}} A_\gamma) = \sum_{\beta \in R} \mu(A_\beta) \leq \sum_{\alpha \in P_\varphi} \mu(A_\alpha) \tag{3}$$

A igualdade segue de (1) e (3). □

(7.6) Teorema. Se $(X, \mathcal{P}(X), \mu, \tau)$ é um espaço com medida de Radon finita, então para todo subconjunto A de X tem-se $\mu(A) = \sum_{x \in A} \mu(\{x\})$. Além disso, se X

for um grupo aditivo, então μ é invariante por translação se e somente se $\mu(\{x\}) = \mu(\{y\})$ quaisquer que sejam x e y em X.

Demonstração. A prova da primeira parte é análoga àquela de (7.5) tomando $\mathcal{F} = (\{x\})_{x \in X}$.

Admitamos que μ é invariante por translação. Então, $\mu(\{x\}) = \mu(x + \{0\}) = \mu(\{0\})$, para todo x em X.

Por outro lado se $B = x + A$, utilizando a primeira parte, temos $\mu(B) = \sum_{y \in A} \mu(\{x + y\}) = \sum_{y \in A} \mu(\{y\}) = \mu(A)$. □

Abaixo temos um exemplo trivial do corolário (7.6).

(7.7) Exemplo. Seja X o conjunto dos possíveis valores que são obtidos no lançamento de um dado honesto. A topologia $\mathcal{T}$ é aquela gerada pelos conjuntos {0} e $]a,b]$, onde a e b são números naturais com $0 \leq a < b \leq 6$. A medida π, definida em $\mathcal{P}(X)$, é a probabilidade de um evento.

O próximo teorema dá uma condição para a mensurabilidade de uma reunião qualquer de conjuntos mensuráveis, num espaço com medida finita.

(7.8) Teorema. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu, \tau)$ um espaço com medida finita e $\mathcal{F} = (A_\alpha)_{\alpha \in P_\varphi}$ uma família de elementos de $\mathcal{A}$, dois a dois disjuntos. Se,

(*i*) a família $(\mu(A_\alpha))_{\alpha \in P_\varphi}$ é somável,

(*ii*) $\mu(\dot{\bigcup}\{A_\gamma \in \mathcal{F} : \mu(A_\gamma) = 0\}) = 0$,

(*iii*) μ é completa,

então $\dot{\bigcup}\mathcal{B} \in \mathcal{A}$, para toda subfamília $\mathcal{B}$ de $\mathcal{F}$.

Demonstração. De (*i*) segue-se, por (4.2), que o conjunto $R = \{\alpha \in P_\varphi : \mu(A_\alpha) \neq 0\}$ é enumerável. Logo

$$\dot{\bigcup_{\beta \in S_1}} A_\beta \in \mathcal{A}, \text{ para todo } S_1 \subset R. \tag{1}$$

Escrevendo $(A_\gamma \in \mathfrak{F} : \mu(A_\gamma) = 0) = (A_\gamma)_{\gamma \in P_\varphi \cap R'}$ e notando (*iii*), temos

$$\dot{\bigcup_{\gamma \in S_2}} A_\gamma \in \mathcal{A}, \text{ para todo } S_2 \subset P_\varphi \cap R'. \tag{2}$$

Como, para todo $S \subset P_\varphi$, $\dot{\bigcup\limits_{\alpha \in S}} A_\alpha = \dot{\bigcup\limits_{\beta \in S \cap R}} A_\beta \ \dot{\cup} \ \dot{\bigcup\limits_{\gamma \in S \cap P_\varphi \cap R'}} A_\gamma,$

então, utilizando (1) e (2), temos $\dot{\bigcup\limits_{\alpha \in S}} A_\alpha \in \mathcal{A}$. $\square$

§8. Um Teorema de Fremlin e aplicações.

O teorema (8.7), devido a Fremlin, é altamente significativo em suas aplicações, além de ser o responsável pelo teorema fundamental em (7.1), veja [R.13], página 93. Neste parágrafo apresentaremos a sua prova e algumas aplicações. Dessas destacamos uma generalização do teorema de Lusin para espaços com medida de Radon finita.

Os exemplos incluídos mostram que a hipótese de o espaço ter medida de Radon é essencial.

(8.1) Definição. Sejam $(X,\mathcal{A})$ um espaço mensurável, Y um espaço métrico e $\mathcal{B}$ a σ-álgebra de Borel em Y. Diz-se que uma função f, de X em Y, é $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-mensurável se e somente se $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$, para todo $B \in \mathcal{B}$.

(8.2) Teorema. Sejam $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável e Y um espaço métrico. Se, para toda função contínua g de Y em $\mathbb{R}$, a função gof é $\mathcal{A}$-mensurável então f é $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-mensurável.

Demonstração. Para cada aberto U em Y definamos a função g_U, de Y em $\mathbb{R}$, por $g_U(y) = d(y,U')$, para $U \neq Y$, ou $g_U(y) = 1$, para $U = Y$.

Em qualquer um dos casos a continuidade de g_U segue do fato de $|g_U(y_1) - g_U(y_2)| \leq d(y_1,y_2)$ quaisquer que sejam y_1 e y_2 em Y.

Por hipótese $\{x \in X : (g_U o f)(x) > 0\} \in \mathcal{A}$ e, pela definição de g_U, temos

$g_U(f(x)) > 0$ se e somente se $f(x) \in U$. Logo $f^{-1}(U) \in \mathcal{A}$. □

(8.3) Corolário. Sejam $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável e Y um espaço métrico. Se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência de funções de X em Y, $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-mensuráveis, e se f é uma função de X em Y, tal que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ para todo x em X, então f é $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-mensurável.

Demonstração. Seja g uma função contínua de Y em $\mathbb{R}$. Então, para todo número natural n, a função gof_n é $\mathcal{A}$-mensurável e daí, como $\lim_{n\to\infty}(gof_n)(x) = (gof)(x)$ para todo x em X, temos que gof é $\mathcal{A}$-mensurável.

A asserção segue por (8.2). □

(8.4) Teorema. Sejam $(X,\mathcal{A},\mu,\mathfrak{T})$ um espaço com medida de Radon finita, Y um espaço métrico e f uma função de X em Y, $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-mensurável. Se $\mathcal{G}$ é uma coleção de abertos de Y tal que $\mu(f^{-1}(V)) = 0$, para cada V de $\mathcal{G}$, então $\mu(f^{-1}(\bigcup\mathcal{G})) = 0$.

Demonstração. Provemos que a família $\mathfrak{F} = (f^{-1}(V))_{V\in\mathcal{G}}$ satisfaz as hipóteses de (7.1).

É imediato que essa família é constituída por conjuntos μ-nulos.

Como toda subfamília $\mathcal{E}$ de $\mathfrak{F}$ é tal que $\mathcal{E} = (f^{-1}(V))_{V\in\mathcal{G}_1}$ para alguma subcoleção $\mathcal{G}_1$ de $\mathcal{G}$ e, além disso, $\bigcup\mathcal{G}_1$ é aberto em Y, então $\bigcup\mathcal{E} = \bigcup_{V\in\mathcal{G}_1} f^{-1}(V) = f^{-1}(\bigcup\mathcal{G}_1) \in \mathcal{A}$.

Agora, por (7.1), $\mu(f^{-1}(\bigcup\mathcal{G})) = \mu(\bigcup\mathfrak{F}) = 0$. □

O lema a seguir é uma conseqüência do teorema : "Toda cobertura aberta de um espaço métrico admite um refinamento aberto σ-discreto", que se encontra, por exemplo, em [R.14].

(8.5) Lema. Sejam X um espaço métrico e p um número natural. Então existe uma cobertura aberta de X, $(V_{(\alpha,n)})_{(\alpha,n)\in P_\varphi\times\mathbb{N}}$, que satisfaz as seguintes condições:

(*i*) quaisquer que sejam α e β em P_φ, com $\alpha\neq\beta$, tem-se $V_{(\alpha,n)} \cap V_{(\beta,n)} = \emptyset$, para cada número natural n;

(*ii*) qualquer que seja $(\alpha,n) \in P_\varphi \times \mathbb{N}$, tem-se $\delta(V_{(\alpha,n)}) < \frac{1}{p+1}$.

(8.6) Definição. Sejam $(X,\mathcal{A},\mu)$ um espaço com medida, Y um conjunto não-vazio, S um subconjunto de Y e f uma função de X em Y. Diz-se que $f(x)$ pertence a S μ-quase sempre, e escreve-se $f(x) \in S$ μ-q.s., se e somente se $\{x \in X : f(x) \notin S\} \in \mathcal{A}$ e $\mu(\{x \in X : f(x) \notin S\}) = 0$.

(8.7) Teorema. Sejam $(X,\mathcal{A},\mu,\mathfrak{T})$ um espaço com medida de Radon finita, Y um espaço métrico e f uma função de X em Y. Se f é $\mathcal{A}$-$\mathfrak{B}$-mensurável então existe S, subespaço separável de Y, tal que $f(x) \in S$ μ-q.s.

Demonstração. A prova deste teorema será realizada em três etapas. Na primeira mostraremos que a cada número natural p estão associados dois conjuntos disjuntos $Y_1(p)$ e $Y_2(p)$, sendo o primeiro enumerável e o segundo tal que $\mu(f^{-1}(Y_2(p))) = 0$, satisfazendo $Y_1(p) \bigcup Y_2(p) = Y$. Na etapa seguinte determinaremos S e verificaremos que $f(x) \in S$ μ-q.s. Encerraremos a prova mostrando que S é separável.

Fixado o número natural p seja $\mathfrak{T}(p) = \{V^p_{(\alpha,n)}\}_{(\alpha,n)\in P_{\varphi(p)}\times\mathbb{N}}$ uma cobertura aberta de X satisfazendo as conclusões de (8.5). Como X tem medida finita e f é $\mathcal{A}$-$\mathfrak{B}$-mensurável então, por (8.5.*i*) temos que, para cada número natural n, a família $(\mu(f^{-1}(V^p_{(\gamma,n)})))_{\gamma\in P_{\varphi(p)}}$ é somável. Portanto, por (4.2), o conjunto

$$L(p,n) = \{\gamma \in P_{\varphi(p)} : \mu(f^{-1}(V^p_{(\gamma,n)})) \neq 0\} \text{ é enumerável.} \qquad (1)$$

Denotando por $R(p,n) = L'(p,n) \bigcap P_{\varphi(p)}$ e, aplicando (8.4), à família $\mathcal{G}(n) = \{V^p_{(\gamma,n)}\}_{\gamma\in R(p,n)}$ temos:

$$\mu(f^{-1}(\bigcup \mathcal{G}(n))) = 0, \text{ para cada número natural } n.$$

Designando por $Y_2(p) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup \mathcal{G}(n)$ segue-se que

$$\mu(f^{-1}(Y_2(p))) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(f^{-1}(\bigcup \mathcal{G}(n))) = 0. \qquad (2)$$

Fazendo $Y_1(p) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{\gamma\in L(p,n)} V^p_{(\gamma,n)}$ temos, por (1.33), que $Y_1(p)$ é enumerável.

Agora é claro que

$$Y = Y_1(p) \bigcup Y_2(p), \tag{3}$$

encerrando a primeira etapa.

Seja $S = \bigcap_{p \in \mathbb{N}} Y_1(p)$. Então, usando (2) e (3), temos

$$\begin{aligned} \mu(f^{-1}(S')) &= \mu(f^{-1}(\bigcap_{p \in \mathbb{N}} Y_1(p))') \\ &= \mu(f^{-1}(\bigcup_{p \in \mathbb{N}} Y_1'(p)) \\ &\leq \sum_{p \in \mathbb{N}} \mu(f^{-1}(Y_2(p))) \\ &= 0, \end{aligned}$$

mostrando que $f(x) \in S$ μ-q.s.

Finalmente determinemos T, enumerável, denso em S.

De (1) e (1.33) segue-se que $L = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \in L(p)} L(p,n)$ é enumerável, e, deste resultado, $L \times \mathbb{N}$ é enumerável.

Para cada par (α,n) em $L \times \mathbb{N}$ tal que $S \bigcap V^p_{(\alpha,n)} \neq \emptyset$ escolhemos $t^p_{(\alpha,n)}$ nessa interseção e tomamos T o conjunto constituído por esses elementos. A enumerabilidade de T é evidente.

Dados x em S e $\epsilon > 0$, escolhamos p_o em $\mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{p_o+1} < \epsilon$ e, em seguida, (α_o,n_o) em $L \times \mathbb{N}$ de modo que $x \in V^{p_o}_{(\alpha_o,n_o)}$.

Lembrando que $\mathcal{F}(p_o)$ satisfaz (8.5.*ii*), temos:

$$d(x,a^{p_o}_{(\alpha_o,n_o)}) \leq \delta(V^{p_o}_{(\alpha_o,n_o)}) < \frac{1}{p_o+1} < \epsilon.$$

mostrando que T é denso em S. □

O exemplo a seguir mostra que as conclusões do teorema (8.7) podem não ser verdadeiras quando a medida não é de Radon.

(8.8) Exemplo. Sejam $(\overline{P_\Omega},\sum,\psi,\tau)$ como no apêndice A e $l_\infty(\mathbb{R})$ com a norma do supremo. Seja f uma função injetora de $\overline{P_\Omega}$ em $l_\infty(\mathbb{R})$ tal que $f(\alpha)$ é uma seqüência de

0 e 1.

É claro que im(f) é não-enumerável e assim se T é um subconjunto enumerável de im(f) então existe um elemento y_o na imagem de f tal que $y_o \notin$ T. Logo $\|y - y_o\|_\infty$ = 1, para todo $y \in$ T, mostrando que a imagem de f não é separável.

No entanto, para todo $y \in$ im(f) e para todo $\varepsilon > 0$, temos

$$f^{-1}(B(y,\varepsilon)) = \begin{cases} \{\alpha\}, \text{se } \varepsilon \leq 1 \text{ e } f(\alpha)=y \\ \overline{P_\Omega}, \text{ se } \varepsilon > 1 \end{cases}.$$

Portanto $f^{-1}(B(y,\varepsilon)) \in \sum$ e este resultado implica que f é $\sum$-$\mathcal{B}$-mensurável.

Passemos ás aplicações do teorema (8.7), Iniciemos mostrando que se $(X,\mathcal{A},\mu)$ não é um espaço com medida de Radon (finita) e Y é um espaço de Banach então não é verdade, em geral, que toda função de X em Y, $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-mensurável, possa ser aproximada por uma seqüência de funções simples $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-mensuráveis.

(8.9) Exemplo. Seja f definida como em (8.8) e seja $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de funções simples,de $\overline{P_\Omega}$ em $l_\infty(\mathbb{R})$, $\sum$-$\mathcal{B}$-mensuráveis.

Como im(s_n) é finita, para cada número natural n, então, por (1.33), $\bigcup_{n \in \mathbb{N}}$ im(s_n) é enumerável e daí $\overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{im}(s_n)}$ é separável. Isto nos mostra que nenhuma seqüência $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funções simples de $\overline{P_\Omega}$ em $l_\infty(\mathbb{R})$, $\sum$-$\mathcal{B}$-mensuráveis, satisfaz a igualdade $\lim_{n \to \infty} s_n(x) = f(x)$.

No entanto se tivermos espaço com medida de Radon (finita) a aproximação é válida conforme o teorema que segue cuja demonstração é análoga á Proposição E.2 de [R.2].

(8.10) Teorema. Sejam $(X,\mathcal{A},\mu,\mathcal{T})$ um espaço com medida de Radon finita, Y um espaço de Banach e f uma função de X em Y, $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-mensurável. Então existe uma seqüência $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funções simples, de X em Y, $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-mensuráveis, tal que

(i) $\lim_{n \to \infty} s_n(x) = f(x)$ μ-q.s.;

(ii) exceto para os elementos de algum subconjunto de um conjunto μ-nulo tem-se que $\|s_n(x)\| \leq \|f(x)\|$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Por (8.7) existe um subconjunto S de Y, separável, tal que $f(x) \in S$, μ-q.s., e seja

$$P \text{ um subconjunto enumerável e denso em } S. \tag{1}$$

Provemos, em primeiro lugar, que para cada y em S e para cada $\varepsilon > 0$ existe um elemento $r \in R$, onde $R = \{z \in Y : z = a.b,\ a \in \mathbb{Q},\ b \in P\}$, satisfazendo

$$\|y - r\| < \varepsilon \qquad \text{e} \qquad \|r\| \leq \|y\| \tag{2}$$

É claro que P está contido em R.

Por (1), dados y em S e $\varepsilon > 0$ existe um elemento p em P tal que

$$\|y - p\| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{3}$$

Se $\|p\| \leq \|y\|$ tomamos $r = p$; se $\|p\| > \|y\|$ façamos $\delta = \|p\| - \|y\|$ e escolhamos n_o em $\mathbb{N}$, satisfazendo

$$\frac{1}{n_o} < \min\{\delta, \frac{\varepsilon}{3.\|p\|}\}. \tag{4}$$

Seja $m_o = \min\{n \in \mathbb{N} : \|y\| < \frac{n}{n_o}\|p\|\}$ Então $1 \leq m_o \leq n_o$ e

$$\frac{m_o - 1}{n_o}\|p\| \leq \|y\| < \frac{m_o}{n_o}\|p\| . \tag{5}$$

Tomando $r = \frac{m_o - 1}{n_o}p$ temos que $r \in R$, $\|r\| \leq \|y\|$ e, utilizando (3), (4) e (5),

$$\begin{aligned}\|y - r\| &= \left\|y - p + p - \frac{m_o}{n_o}p + \frac{1}{n_o}p\ \right\| \\ &\leq \|y - p\| + \left(1 - \frac{m_o}{n_o}\right)\|p\| + \frac{1}{n_o}\|p\| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \|p\| - \|y\| + \frac{\varepsilon}{3} \\ &\leq \frac{2\varepsilon}{3} + \|p - y\| < \varepsilon,\end{aligned}$$

verificando (2).

Por (1.31.) o conjunto R é enumerável. Isto permite-nos escrever $R = \{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, onde assumimos que $r_o = 0$.

Fixados x em $f^{-1}(S)$ e o número natural n, é imediato que o conjunto

$$E_n(x) = \{r_i \in R : i \leq n, \|r_i\| \leq \|f(x)\|\},$$

é não-vazio e finito. Seja r_n^x o elemento r_i de $E_n(x)$, de menor índice, que verifica a igualdade

$$\|f(x) - r_n^x\| = \min\left\{\|f(x) - r_i\| : r_i \in E_n(x)\right\} \tag{6}$$

Para cada número natural n a função s_n, de X em Y, definida por

$$s_n(x) = \begin{cases} r_n^x, \text{ se } x \in f^{-1}(S), \\ q, \text{ se } x \notin f^{-1}(S), \end{cases} \tag{7}$$

onde q é um elemento de P, é simples.

Se s_n for $\mathcal{A}$-mensurável, para cada número natural n, então dados $x \in f^{-1}(S)$ e $\varepsilon > 0$ existe, utilizando (2), um elemento r_* em R, tal que

$$\|f(x) - r_*\| < \varepsilon \text{ e } \|r_*\| \leq \|f(x)\|.$$

Portanto, para todo $n \geq m$, temos que $r_* \in E_n(x)$ e, utilizando (6) e (7), $\| f(x) - s_n(x)\| \leq \|f(x) - r_*\| < \varepsilon$. Logo $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x) = f(x)$, para cada $x \in f^{-1}(S)$, verificando (i).

Por outro lado como $s_n(x) \in E_n(x)$ para todo $x \in f^{-1}(S)$ então $\|s_n(x)\| \leq \|f(x)\|$ para todo x em X exceto, possivelmente para algum subconjunto de $(f^{-1}(S))'$. Isto prova (ii).

Para que a demonstração esteja completa devemos mostrar que s_n é $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-mensurável, para cada número natural n. Para tal é suficiente provarmos que $s_n^{-1}(\{t\}) \in \mathcal{A}$, para cada t em $\operatorname{im}(s_n)$.

Seja $t \in \operatorname{im}(s_n)$, $t \neq q$. Então lembrando (6) e (7), $t = r_k$, para algum $k \leq n$.

A hipótese de que f é $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-mensurável acarreta que $\|f\|$ e $\|f - r_i\|$, para $i \leq n$, são $\mathcal{A}$-mensuráveis, logo os conjuntos

$$A(k) = \{x \in X : \|f(x)\| \geq \|r_k\|\} \cap f^{-1}(S),$$

$B(j < k) = \Big(\{x \in X : \|f(x)\| \geq \|r_j\|\} \cap \{x \in X : \|f(x)-r_k\| < \|f(x)-r_j\|\}\Big) \dot{\bigcup} \{x \in X : \|f(x)\| < \|r_j\|\}$,

$C(j \geq k) = \Big(\{x \in X : \|f(x)\| \geq \|r_j\|\} \cap \{x \in X : \|f(x)-r_k\| \leq \|f(x)-r_j\|\}\Big) \dot{\bigcup} \{x \in X : \|f(x)\| < \|r_j\|\}$,

são elementos de $\mathcal{A}$, para todo $j \leq n$.

Portanto, verificando que

$$s_n^{-1}(\{r_k\}) = A(k) \cap \bigcap_{j=0}^{k-1} B(j<k) \cap \bigcap_{i=k}^{n} C(i \geq k)$$

temos $s_n^{-1}(\{r_k\}) \in \mathcal{A}$.

Seja $z \in s_n^{-1}(\{r_k\})$. Como $r_k \neq q$, então $z \in f^{-1}(S)$ e $\|f(z)\| \geq \|r_k\|$. Logo $z \in A(k)$. É claro que $z \in B(j<k)$ e $z \in C(j>k)$, para todo $j \neq k$ e $j \leq n$ tal que $\|f(z)\| < \|r_j\|$.

Para todo $j \leq n$ tal que $\|f(z)\| \geq \|r_j\|$ temos, por (5) e (6) que $r_j \in E_n(z)$, $\|f(z)-r_k\| < \|f(z)-r_j\|$, para $j<k$, e $\|f(z)-r_k\| < \|f(z)-r_j\|$, para $j \geq k$.

Assim a inclusão do primeiro no segundo membro da igualdade está verificada.

Para a inclusão contrária observemos que se $\|f(z)\| < \|r_j\|$, $j \leq n$ e $j \neq k$, então $r_j \notin E_n(z)$. Logo $s_n(z) \neq r_j$. Se $\|f(z)\| \geq r_i$ então $r_i \in E_n(z)$ e $\|f(z)-r_k\| \leq \|f(z)-r_i\|$, para todo $i \leq n$. Como a desigualdade é estrita para todo $i<k$, então $\|f(z)-r_k\| = \min\{\|f(z)-r_i\| : r_i \in E_n(z)\}$, mostrando que $s_n(z) = r_k$.

Se $q \neq r_k$, para todo $k \leq n$, então $s_n^{-1}(\{q\}) = (f^{-1}(S))' \in \mathcal{A}$; e, se $q = r_k$, para algum $k \leq n$, então $s_n^{-1}(\{q\}) = \left(A(k) \cap \bigcap_{j=0}^{k-1} B(j<k) \cap \bigcap_{i=k}^{n} C(i \geq k)\right) \dot{\bigcup} (f^{-1}(S))' \in \mathcal{A}$. □

Uma questão importante em Teoria da Medida refere-se á mensurabilidade da soma de duas funções mensuráveis, no sentido que estamos estudando. Sabe-se que quando o contra-domínio das funções é um espaço de Banach separável a resposta é afirmativa; mas isto não ocorrer em geral ,conforme cita A.H.Stone [R.22].

O próximo teorema aborda a mensurabilidade da soma de duas funções mensuráveis num espaço de Banach quando a medida é de Radon.

(8.11) Teorema. Sejam $(X,\mathcal{A},\mu,\mathfrak{T})$ um espaço com medida de Radon finita, Y um espaço de Banach, f e g funções de X em Y, $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-mensuráveis. Então existe uma função h, de X em Y, $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-mensurável tal que $h(x) = f(x) + g(x)$, para todo x em X, exceto para os elementos de algum subconjunto de um conjunto μ-nulo.

Demonstração. Da hipótese de que f e g são $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-mensuráveis segue-se, por (8.7), a existência de S e T, subespaços separáveis de Y tais que

$$f(x) \in S \quad \mu\text{-q.s.} \quad , \quad g(x) \in T \quad \mu\text{-q.s.} \tag{1}$$

Sejam $\mathcal{V} = (V_i)_{i\in\mathbb{N}}$ e $\mathcal{W} = (W_j)_{j\in\mathbb{N}}$, bases de abertos, de S e T, respectivamente. Provemos que, para cada $z \in \mathcal{U} \bigcap (S + T)$, onde $\mathcal{U}$ é aberto em Y, existem $V_i \in \mathcal{V}$ e $W_j \in \mathcal{W}$ tais que

$$z \in V_i + W_j \qquad \text{e} \qquad V_i + W_j \subset \mathcal{U}. \tag{2}$$

Sejam $z = z_1 + z_2$ em $\mathcal{U} \bigcap (S + T)$, e $\epsilon > 0$ tais que $B(z,\epsilon) \subset \mathcal{U}$ e sejam $V_{i_o} \in \mathcal{V}$ e $W_{j_o} \in \mathcal{W}$ tais que $z_1 \in V_{i_o}$, $z_2 \in W_{j_o}$, $V_{i_o} \subset B(z_1,\frac{\epsilon}{2}) \bigcap S$, $W_{j_o} \subset B(z_2,\frac{\epsilon}{2}) \bigcap T$. Então $z \in V_{i_o} + W_{j_o}$ e

$$V_{i_o} + W_{j_o} \subset B(z_1,\tfrac{\epsilon}{2}) + B(z_2,\tfrac{\epsilon}{2}). \tag{3}$$

Mas, se $t = t_1 + t_2$ é um elemento de $B(z_1,\frac{\epsilon}{2}) + B(z_2,\frac{\epsilon}{2})$ então $\|t - z\| = \|(t_1 + t_2) - (z_1 + z_2)\| \leq \|t_1 - z_1\| + \|t_2 - z_2\| < \epsilon$, e daí

$$B(z_1,\tfrac{\epsilon}{2}) + B(z_2,\tfrac{\epsilon}{2}) \subset B(z,\epsilon).$$

Isto acarreta, usando (3), que $V_{i_o} + W_{j_o} \subset \mathcal{U}$, completando a prova de (2).

Vem, de (1) que $\mu((f^{-1}(S))') = \mu((g^{-1}(T))') = 0$. Logo $f^{-1}(S) \bigcap g^{-1}(T) \neq \emptyset$. Portanto tomando x_o em X e definindo a função h de X em Y por:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) + g(x), & \text{se } x \in f^{-1}(S) \bigcap g^{-1}(T), \\ f(x_o) + g(x_o), & \text{se } x \in (f^{-1}(S))' \bigcup (g^{-1}(T))' \end{cases}$$

temos que $h(x) = f(x) + g(x)$, para todo x em X, exceto possivelmente para algum subconjunto A de $(f^{-1}(S))' \bigcup (g^{-1}(T))'$.

Mostremos que h é $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-mensurável.

Seja $\mathcal{U}$, aberto em Y. Se $\mathcal{U} \bigcap \mathrm{im}(h) = \emptyset$ então $h^{-1}(\mathcal{U}) = \emptyset \in \mathcal{A}$; se $\mathcal{U} \bigcap \mathrm{im}(h) \neq \emptyset$, dois casos serão considerados.

No primeiro caso suponhamos que $(f(x_o) + g(x_o)) \notin \mathcal{U}$. Então denotando por $R = \{ (i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : V_i + W_j \subset \mathcal{U}\}$ e tomando um ponto $r = r_1 + r_2$ em $\mathcal{U} \bigcap \mathrm{im}(h)$, com $r_1 \in S$ e $r_2 \in T$, temos, de acordo com (2) que existe (i_1, j_1) em R tal que $r_1 \in V_{i_1}$ e $r_2 \in W_{j_1}$. Portanto $h^{-1}(r) \in f^{-1}(V_{i_1}) \bigcap g^{-1}(W_{j_1})$ e daí

$$h^{-1}(\mathcal{U}) = h^{-1}(\mathcal{U} \bigcap \mathrm{im}(h)) \subset \bigcup_{(i,j)\in R} (f^{-1}(V_i) \bigcap g^{-1}(W_j)) \tag{4}$$

Reciprocamente, se $x \in \bigcup_{(i,j)\in R} (f^{-1}(V_i) \bigcap g^{-1}(W_j))$ então existe $(i_2,j_2) \in R$ tal que $f(x) \in V_{i_2}$ e $g(x) \in W_{j_2}$. Segue-se que $h(x) \in \mathcal{U} \bigcap \mathrm{im}(h)$ e daí $x \in h^{-1}(\mathcal{U} \bigcap \mathrm{im}(h)) =$

$h^{-1}(\mathcal{U})$. Logo $\bigcup_{(i,j)\in R} (f^{-1}(V_i) \cap g^{-1}(W_j)) \subset h^{-1}(\mathcal{U})$. **Desta inclusão e (4) vem a igualdade.**

Agora, como os elementos de $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ são, respectivamente, da forma V $\cap$ S e W $\cap$ T, onde V e W são abertos em Y, então $f^{-1}(V_i) \in \mathcal{A}$ e $g^{-1}(W_j) \in \mathcal{A}$. Isto acarreta que $h^{-1}(\mathcal{U}) \in \mathcal{A}$.

No segundo caso, se $(f(x_o) + g(x_o)) \in \mathcal{U}$ então

$$h^{-1}(\mathcal{U}) = \Big(\bigcup_{(i,j)\in R} (f^{-1}(V_i) \cap g^{-1}(W_j))\Big) \cup (f^{-1}(S)' \cup (g^{-1}(T))' \in \mathcal{A}. \quad \square$$

(8.12) Corolário. Sejam $(X,\mathcal{A},\mu,\mathfrak{T})$ um espaço com medida de Radon finita e completa, Y um espaço de Banach e f e g funções de X em Y, $\mathcal{A}$-$\mathfrak{B}$-mensuráveis. Então $f + g$ é $\mathcal{A}$-$\mathfrak{B}$-mensurável.

Outra consequência de (8.7) é o teorema

(8.13) Teorema. Sejam $(X,\mathcal{A},\mu,\mathfrak{T})$ um espaço com medida de Radon finita, Y um espaço de Banach e f uma função de X em Y, $\mathcal{A}$-$\mathfrak{B}$-mensurável. Então

(*i*) existe um subespaço S de Y, separável, tal que $f(x) \in S$ μ-q.s.

(*ii*) f é fracamente mensurável, isto é, para cada $\varphi \in Y^*$ a função $\varphi o f$ é $\mathcal{A}$-mensurável.

Demonstração. O item (*i*) segue-se de (8.7). Para o item (*ii*), lembramos que toda $\varphi \in Y^*$ é contínua, então φ é $\mathfrak{B}$-mensurável e daí $\varphi o f$ é $\mathcal{A}$-mensurável. $\square$

O resultado acima representa uma extensão da condição necessária de um clássico teorema de Pettis: Seja $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável e seja Y um espaço de Banach. Uma função f de X em Y, é fortemente mensurável (f é $\mathcal{A}$-$\mathfrak{B}$-mensurável e $f(X)$ é separável) se e somente se

(*i*) $f(X)$ é separável; e,

(*ii*) para cada $\varphi \in Y^*$ a função $\varphi o f$ é $\mathcal{A}$-mensurável.

A recíproca do teorema (8.13) não é válida como mostra o exemplo a seguir.

(8.14) Exemplo. Sejam $X = [0,1] \bigcup [2,3]$, $\mathfrak{T}$ a restrição da topologia usual da reta, $\mathcal{A}$ a σ-álgebra dos subconjuntos de X mensuráveis segundo Lebesgue, λ a medida de Lebesgue.

Definamos a medida μ em $\mathcal{A}$ por

$$\mu(A) = \lambda\,(\,A \bigcap [2,3]\,),\ \text{para todo } A \in \mathcal{A}.$$

Verifica-se que $(X,\mathcal{A},\mu,\mathfrak{T})$ é espaço com medida de Radon finita.

Seja H um espaço de Hilbert com dimensão ortogonal maior ou igual a $2^{\aleph_0}$, munido com a norma do supremo.

Seja f uma função de X em H, cuja imagem é um subconjunto ortogonal de H, satisfazendo: a restrição de f ao intervalo $[0,1]$ é injetora e $f(x) = y_0$, para todo $x \in [2,3]$, com $y_0 \notin f([0,1])$.

Portanto $S = \mathrm{im}(f)$ é separável μ-q.s. satisfazendo (i) de (8.13).

Verifiquemos que f satisfaz (ii).

Para cada funcional linear φ em $H^* = H$ temos que $(\varphi\circ f)(x) \neq 0$ somente para um quantidade enumerável de coeficientes de Fourier. Portanto, dado $s \in \mathbb{R}$ temos:

$$(\varphi\circ f)^{-1}(]s,+\infty[) = \bigcup_{i\in I}\{x_i \in [0,1] : (\varphi\circ f)(x) > s\},$$ onde I é enumerável e $f(y_0) \leq s$, ou

$$(\varphi\circ f)^{-1}(]s,+\infty[) = [2,3] \bigcup \bigcup_{i\in J}\{x_i \in [0,1] : (\varphi\circ f)(x) > s\},$$ onde J é enumerável e $s < f(y_0)$.

No entanto, f não é $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-mensurável pois tomando A, subconjunto de $[0,1]$ não-mensurável segundo Lebesgue, e $0 < \varepsilon < 1$ temos que $\bigcup_{x\in A} B(f(x),\varepsilon) \in \mathcal{B}$ e $A \notin \mathcal{A}$.

Talvez a maior contribuição do teorema (8.7) seja o fato de que toda função, definida num espaço com medida de Radon finita e completa, e com valores num espaço métrico arbitrário seja $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-mensurável se e somente se for Lusin-mensurável, como veremos no teorema (8.16).

Definiremos uma função Lusin-mensurável como em [R.19], e, em seguida, provaremos uma extensão, também relevante, do teorema de Lusin para espaços métricos arbitrários.

(8.15) Definição. Sejam $(X,\mathcal{A},\mu,\mathfrak{T})$ um espaço com medida de Radon, Y um espaço topológico de Hausdorff e f uma função de X em Y. Diz-se que f é Lusin-mensurável se e somente se para cada subconjunto K de X, compacto, e para cada $\epsilon > 0$ existe um subconjunto K_ϵ de K, compacto, com $\mu(K \cap K'_\epsilon) \leq \epsilon$ tal que a restrição de f, ao subconjunto K_ϵ, é contínua.

(8.16) Teorema. Sejam $(X,\mathcal{A},\mu,\mathcal{T})$ um espaço com medida de Radon finita, Y um espaço métrico e f uma função de X em Y, $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-mensurável. Então, para cada A, não-vazio, em $\mathcal{A}$ e para cada número real $\epsilon > 0$, existe um subconjunto K de A, satisfazendo

(*i*) K é compacto,

(*ii*) $\mu(A \cap K') < \epsilon$,

(*iii*) a restrição de f ao compacto K é contínua.

Demonstração. Se $\mu(A) = 0$, a conclusão é imediata tomando $K = \{z\}$, com $z \in A$.

Como as hipóteses de (8.7) estão satisfeitas, seja S um subespaço separável de Y tal que $\mu(\{x \in X : f(x) \notin S\}) = 0$.

Tomando $E = f^{-1}(S)$ é óbvio que $E \in \mathcal{A}$.

Suponhamos, agora, que $\mu(A) > 0$ e que A esteja contido em E.

Dividamos a prova em três casos.

No primeiro admitamos que $S = \{z_i\}_{i=1}^{n}$, com $z_i \neq z_j$ para $i \neq j$, e que $A_i = \{x \in X : f(x) = z_i\}$. Portanto, para todo $i \neq j$, temos que $A_i \cap A_j = \emptyset$ e $A = \bigcup_{i=1}^{n}(A \cap A_i)$.

A hipótese de que μ é medida de Radon acarreta que, dado $\epsilon > 0$, existe, para cada $1 \leq i \leq n$, um subconjunto K_i de $A \cap A_i$, compacto, tal que

$$\mu(A \cap A_i \cap K_i') < \tfrac{\epsilon}{n}. \tag{1}$$

Fazendo $K = \bigcup_{i=1}^{n} K_i$ temos que K é compacto.

Notemos que, como $K_i \subset A_i$ para todo número natural i, então $\bigcup_{i=1}^{n}(A \cap A_i) \cap (\bigcup_{i=1}^{n} K_i)' = \bigcup_{n=1}^{n}(A \cap A_i \cap K_i')$. Logo , $A \cap K' = \bigcup_{n=1}^{n}(A \cap A_i \cap K_i')$ e utilizando (1),

$$\mu(A \cap K') = \sum_{i=1}^{n} \mu(A \cap A_i \cap K'_i) < \varepsilon.$$

Quanto a *(iii)* temos que $f^{-1}(\{z_i\}) = K_i$, com $1 \leq i \leq n$, quando se considera a restrição da função f ao conjunto K, encerrando a prova neste caso.

No segundo caso admitamos que $S = \{y_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, com $y_i \neq y_j$ para $i \neq j$.

Seja $B_i = \{x \in X \; ; \; f(x) = y_i\}$. Então $B_i \cap B_j = \emptyset$, se $i \neq j$, e $A = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} (A \cap B_j)$.

A sequência $(C_k)_{k\in\mathbb{N}}$ definida por

$$C_0 = A \cap B_0$$

e

$$C_k = \bigcup_{j=0}^{k} (A \cap B_j), \text{ para todo } k \geq 1,$$

satisfaz as condições: $C_k \subset C_{k+1}$, para todo número natural k e $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k = A$. Segue-se que

$$\lim_{k\to\infty} \mu(C_k) = \mu(A).$$

Portanto, dado um número real $\varepsilon > 0$ existe um número natural k_0 tal que

$$\mu(A \cap C'_{k_0}) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2}$$

Por outro lado a restrição da função f ao conjunto C_{k_0} tem imagem finita, ou seja, $\{y_j\}_{j=0}^{k_0}$. Logo, pelo caso anterior, existe um compacto K, contido em C_{k_0}, tal que

$$\mu(C_{k_0} \cap K') < \frac{\varepsilon}{2} \tag{3}$$

e a restrição de f ao conjunto K é contínua, verificando *(iii)*.

Como $C_{k_0} \subset A$ então $K \subset A$, verificando *(i)*.

Para a prova de *(ii)* utilizamos (2) e (3). Temos

$$\begin{aligned} \mu(A \cap K') &= \mu(A \cap K' \cap C_{k_0}) + \mu(A \cap K' \cap C'_{k_0}) \\ &\leq \mu(C_{k_0} \cap K') + \mu(A \cap C'_{k_0}) < \varepsilon, \end{aligned}$$

encerrando o segundo caso.

Admitamos agora que $\#S > \aleph_0$ e, como S é separável, seja $Q = \{q_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tal que $Q \subset S$ e $\overline{Q} = S$.

Para cada número natural n definamos a função f_n de X em Y, por

$$f_n(x) = q_k, \text{ onde } k = \inf\{i \in \mathbb{N} : q_i \in B(f(x), \tfrac{1}{n+1})\}.$$

Para mostrarmos que cada função f_n é $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-mensurável consideremos V um aberto em Y e M um subconjunto de $\mathbb{N}$ tais que $\{a_j : j \in M\} \subset V$.

Então, se $0 \notin M$, lembrando que $E = f^{-1}(S)$,

$$f_n^{-1}(V) = \bigcup_{j\in M} f_n^{-1}(\{a_j\})$$

$$= \bigcup_{j\in M} \{x \in E : f(x) \in B(a_j,\tfrac{1}{n+1}) \cap \bigcap_{k=0}^{j-1}(B(a_k,\tfrac{1}{n+1}))'\}$$

$$= \bigcup_{j\in M} \Big(f^{-1}(B(a_j,\tfrac{1}{n+1})) \cap \bigcap_{k=0}^{j-1}(B(a_k,\tfrac{1}{n+1}))'\Big) \in \mathcal{A};$$

e, se $0 \in M$,

$$f_n^{-1}(V) = \Big(\bigcup_{j\in M \cap \{0\}'} f^{-1}(\{a_j\})\Big) \bigcup f^{-1}(B(a_0,\tfrac{1}{n+1})) \in \mathcal{A}.$$

Como, para cada número natural n, a imagem de f é enumerável então, pelo caso anterior, dado $\epsilon > 0$, existe um subconjunto K_n de A tal que

$$\mu(A \cap K_n') < \frac{\epsilon}{2^n} \tag{5}$$

e

$$\text{a restrição da função } f_n \text{ ao conjunto } K_n \text{ é contínua.} \tag{6}$$

Tomando $K = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ temos que K é compacto, verificando (i). Utilizando (5) $\mu(A \cap K') \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A \cap K_n') < \epsilon$, provando (ii).

Para a prova de (iii), observando (6) basta verificarmos que, restrita ao compacto K, a seqüência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para f. Mas isto é imediato, pois dado $\eta > 0$ escolhemos m_0, número natural, tal que $\frac{1}{m_0+1} < \eta$. Da definição de f_m dada em (4) temos, para cada $x \in X$ e para cada $m \geq m_0$, que $d(f(x),f_m(x)) < \frac{1}{m+1} \leq \frac{1}{m_0+1} < \eta$.

Finalmente suponhamos que $\mu(A) > 0$, $A \cap E \neq \emptyset$ e $A \cap E' \neq \emptyset$.

Como $\mu(A \cap E') = 0$ então $\mu(A \cap E) > 0$. Pelo exposto acima, existem compactos K_1 e K_2 subconjuntos, respectivamente, de $A \cap E'$ e $A \cap E$ tais que $\mu(A \cap E' \cap K_1') < \frac{\epsilon}{2}$, $\mu(A \cap E \cap K_2') < \frac{\epsilon}{2}$ e a restrição da função f a cada um deles é contínua.

Tomando $K = K_1 \bigcup K_2$, as conclusões são imediatas. $\square$

(8.17) Teorema. Sejam $(X,\mathcal{A},\mu,\mathfrak{T})$ um espaço com medida de Radon finita e completa, Y um espaço métrico e f uma função de X em Y. Se, para cada $\epsilon > 0$, existir um subconjunto K de X que satisfaça

(*i*) K é compacto,

(*ii*) $\mu(K') < \epsilon$,

(*iii*) a restrição de f ao conjunto K é contínua,

então f é $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-mensurável.

Demonstração. Seja H_i um subconjunto de X satisfazendo (*i*) e (*iii*) e tal que

$$\mu(H_i') < \tfrac{1}{i+1}, \text{ para cada número natural } i.$$

Definindo $K_0 = H_0$ e $K_n = \bigcup_{i=0}^{n} H_i$, para todo número natural n, temos que K_n é compacto e a restrição de f a K_n é contínua. Além disso, $K_n \subset K_{n+1}$ e

$$\mu(K_n') \leq \mu(H_n') < \tfrac{1}{n+1}, \text{ para todo número natural } n.$$

Seja $y_0 \in Y$. Consideremos a função g e a seqüência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de X em Y, dadas por

$$g(x) = \begin{cases} f(x), \text{ se } x \in K = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n \\ y_0, \text{ se } x \in K' \end{cases}$$

e, para todo número natural n,

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x), \text{ se } x \in K_n \\ y_0\ , \text{ se } x \in K_n' \end{cases}$$

É claro que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = g(x)$ e se, para cada número natural n, a função f_n é $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-mensurável então, por (8.3) g é $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-mensurável.

Por outro lado, como $\mu(K') \leq \mu(K_n') < \frac{1}{n+1}$, para todo número natural n, então $\mu(K') = 0$ e $f = g$ μ-q.s. Mas μ é completa, logo f é $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-mensurável.

Verifiquemos que f_n é $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-mensurável para todo número natural n.

Fixado n, para cada número natural m, seja $\mathcal{V}(m)$ uma cobertura aberta de K_n tal que

$$W_{f_n}(V \cap K_n) < \frac{1}{m+1}, \text{ para cada } V \in \mathcal{V}(m). \tag{1}$$

Como K_n é compacto em X então existe $(V_i^m)_{i=1}^{p(m)}$, subcobertura finita de $\mathcal{V}(m)$.

Para cada número natural m e cada $j \leq p(m)$ seja $W_j^m = \overline{V_j^m} \cap K_n$. Logo $\bigcup_{j=1}^{p(m)} W_j^m =$ K_n e, como o espaço $(X, \mathcal{T})$ é de Hausdorff, K_n, e conseqüentemente W_j^m são fechados e W_j^m é compacto.

De (1),

$$W_{f_n}(W_j^m) \leq \frac{1}{m+1}, \text{ para todo } j \leq p(m). \tag{2}$$

Escolhendo x_j^m em W_j^m e definindo a função g_m, de X em Y, por

$$g_m(x) = \begin{cases} f(x_k^m) \text{ ,se } x \in W_k^m \text{ e } k=\inf\{j: j \leq p(m), x \in W_j^m\} \\ y_0, \text{ se } x \in K_n'. \end{cases}$$

É imediato que g_m é uma função simples.

Para $f(x_k^m) \neq y_0$, $k \leq p(m)$ temos $g_m^{-1}(\{ f(x_k^m)\}) = \{x \in X : x \in W_k^m\} \cap \bigcap_{i=0}^{k-1} \{x \in X : x \in (W_i^m)'\} = W_k^m \cap \bigcap_{i=0}^{k-1} (W_i^m)' \in \mathcal{A}$.

Se $y_0 \neq f(x_k^m)$, para todo $k \leq p(m)$ então $g_m^{-1}(\{ f(y_0)\}) = K_n' \in \mathcal{A}$; e, se $y_0 = f(x_k^m)$, para algum $k \leq p(m)$ então $g_m^{-1}(\{y_0\}) = (W_k^m \cap \bigcap_{i=0}^{k-1} (W_i^m)') \dot{\cup} K_n' \in \mathcal{A}$.

Assim provamos que g_m é $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-mensurável para cada número natural m.

Dado $\epsilon > 0$ seja m_0 tal que $\frac{1}{m_0+1} < \varepsilon$. Então, lembrando (2), temos, para todo $m \geq m_0$, que

$$d(f_n(x), g_m(x)) = d(f_n(x), f(x_j^m)) < \frac{1}{m+1} \leq \frac{1}{m_0+1} < \epsilon, \text{ se } x \in W_j^n,$$

e

$$d(f_n(x), g_m(x)) = 0, \text{ se } x \in K_n'.$$

Portanto a seqüência $(g_m)_{m \in \mathbb{N}}$ converge para f_n e, por (8.3) f_n é $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-mensurável. □

(8.18) Teorema. Sejam $(X,\mathcal{A},\mu,\mathfrak{T})$ um espaço com medida de Radon finita e completa, Y um espaço métrico e f uma função de X em Y. Então, f é $\mathcal{A}$-$\mathfrak{B}$-mensurável se e somente se f é Lusin-mensurável.

Demonstração. Sejam f, uma função $\mathcal{A}$-$\mathfrak{B}$-mensurável, e K um subconjunto de X, compacto. Escolhendo $K_\varepsilon = K$, para cada $\varepsilon > 0$, temos por (8.16) e (8.15) que f é Lusin-mensurável.

Suponhamos que f seja Lusin-mensurável.

Como μ é medida de Radon então, por (3.1.*ii*), dado $\varepsilon > 0$ existe um subconjunto compacto K_1 de X tal que $\mu(K_1) > \mu(X) - \frac{\varepsilon}{2}$. Segue-se que

$$\mu(K_1') < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Da definição de mensurabilidade de Lusin segue-se que existe um subconjunto K de K_1, compacto, tal que

$$\mu(K_1 \cap K') \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

e a restrição de f ao conjunto K é contínua.

Como $\mu(K') = \mu(K_1 \cap K') + \mu(K_1') < \varepsilon$, então as hipóteses de (8.17) estão satisfeitas. Segue-se que f é $\mathcal{A}$-$\mathfrak{B}$-mensurável. □

Encerramos este parágrafo exibindo dois exemplos que não satisfazem as hipóteses de (8.18). No primeiro onde $\mathfrak{T} \not\subset \mathcal{A}$, exibiremos uma função Lusin-mensurável que não é $\mathcal{A}$-$\mathfrak{B}$-mensurável; no segundo, Y é um espaço de Hausdorff não-metrizável e a função g que determinaremos será $\mathcal{A}$-$\mathfrak{B}$-mensurável mas não será Lusin-mensurável.

(8.19) Exemplos. (1) Sejam $X = \{a, b, c, d\}$, $\mathcal{A} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b, c, d\}\}$, $\mathfrak{T} = \mathfrak{P}(X)$ e $\mu(A) = \#A$, para todo $A \in \mathcal{A}$. É fácil verificar que todo subconjunto de X é um boreliano, que a função identidade de X em X é Lusin-mensurável e não é $\mathcal{A}$-$\mathfrak{B}$-mensurável.

(2) Seja $X = [0,1]$ com a topologia usual, com os conjuntos mensuráveis segundo Lebesgue e com a medida de Lebesgue. Seja $Y = [0,1]$ com a topologia gerada por $\{1\}$ e pelos intervalos da forma $[\alpha, \beta[$, onde $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$, e seja g a função identidade de X em Y.

Como todo boreliano de Y é também um boreliano de X, então a função g é $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-mensurável.

Provemos que a função g não é contínua em nenhum subconjunto de X, compacto e não-enumerável.

Seja K um subconjunto compacto de X, não-enumerável, e sejam $a = \inf K$ e $b = \sup K$.

A família $\mathcal{F}$ constituída pelos abertos da forma $[a, b- \frac{b-a}{n+2}[$, para todo número natural n, e pelo intervalo $[b, 1[$, se $b < 1$, ou $\{1\}$, se $b = 1$, é uma cobertura de K, por abertos, em Y. É imediato que nenhuma subfamília finita de $\mathcal{F}$ cobre K. Isto mostra que $K = g(K)$ não é compacto em Y.

Seja $H = [0,1]$ em X. Como $\mu(H) > 0$, então, para todo $0 < \varepsilon < \frac{\mu(H)}{2}$, o conjunto H_ε, compacto que verifica a desigualdade $\mu(H \cap H'_\varepsilon) < \varepsilon$ é tal que $\mu(H'_\varepsilon) > \frac{\mu(H)}{2}$. Segue-se que H'_ε é não-enumerável e portanto g não é contínua em H_ε. Logo g não é Lusin-mensurável.

§9. Um Teorema de Dorothy Maharam

Até o momento abordamos famílias de conjuntos com medida nula. Neste último parágrafo faremos um rápido estudo da mensurabilidade da reunião não-enumerável de conjuntos quaisquer.

O resultado básico é o teorema (9.8). Ele é considerado importante nos tópicos que envolvem topologias induzidas por medidas. Segue-se uma aplicação deste resultado.

Para a prova de (9.8) necessitamos da noção de levantamento (nossa tradução para "lifting"), cuja definição e algumas propriedades serão apresentadas.

Iniciamos esta seção relembrando algumas propriedades da diferença simétrica que nos serão úteis.

(9.1) Definição. A diferença simétrica entre os conjuntos A e B, denotada por $A \triangle B$, é definida por $A \triangle B = (A \bigcup B) \bigcap (A \bigcap B)'$.

(9.2) Observações. (a) Quaisquer que sejam os conjuntos A, B e C tem-se:

(*i*) $A \triangle B = (A \bigcap B') \bigcup (B \bigcap A')$,

(*ii*) $A \triangle A = \emptyset$,

(*iii*) $A \triangle B = B \triangle A$,

(*iv*) $A \triangle C \subset (A \triangle B) \bigcup (B \triangle C)$,

(*v*) $A \triangle \emptyset = A$,

(*vi*) se $A \subset B$ então $A \Delta B = B \cap A'$.

(*b*) Se $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ e $(B_\lambda)_{\lambda \in L}$ são famílias não-vazias de conjunto, então

$$\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda \,\Delta \bigcup_{\lambda \in L} B_\lambda \subset \bigcup_{\lambda \in L} (A_\lambda \,\Delta\, B_\lambda).$$

(9.3) Definição. Seja $(X,\mathcal{A},\mu)$ um espaço com medida e sejam A e B elementos de $\mathcal{A}$. Diz-se que A e B são μ-equivalentes se e somente se $\mu(A \,\Delta\, B) = 0$.

Se A e B são μ-equivalentes escrevemos $A \equiv B$.

(9.4) Observação. Da definição acima e de (9.2.a) decorre que a relação μ-equivalente sobre $\mathcal{A}$ satisfaz as propriedades reflexiva, simétrica e transitiva.

(9.5) Definição. Sejam $(X,\mathcal{A},\mu)$ um espaço com medida e $\mathcal{C}$ uma σ-álgebra de subconjuntos de X que está contida em $\mathcal{A}$ e que contém todos os elementos μ-nulos de $\mathcal{A}$. Diz-se que ρ é um levantamento em $\mathcal{C}$ se e somente se ρ é um função de $\mathcal{C}$ em $\mathcal{C}$ que satisfaz as seguintes condições, quaisquer que sejam A e B em $\mathcal{C}$,

(*i*) $\rho(A) \equiv A$,

(*ii*) se $A \equiv B$, tem-se $\rho(A) = \rho(B)$,

(*iii*) $\rho(\emptyset) = \emptyset$,

(*iv*) $\rho(X) = X$,

(*v*) $\rho(A \cap B) = \rho(A) \cap \rho(B)$,

(*vi*) $\rho(A \cup B) = \rho(A) \cup \rho(B)$.

(9.6) Exemplo. Sejam $\mathcal{M}$ a coleção dos conjuntos Lebesgue-mensuráveis contidos no intervalo $[0,1]$, λ a medida de Lebesgue e $\mathcal{L}$ a σ-álgebra definida por $\mathcal{L} = \{A \in \mathcal{M} : \lambda(A) = 0 \text{ ou } \lambda(A') = 0\}$.

Verifiquemos que a função ρ, de $\mathcal{L}$ em $\mathcal{L}$, definida por

$$\rho(A) = \begin{cases} \emptyset, & \text{se } \lambda(A)=0 \\ [0,1], & \text{se } \lambda(A) \neq 0 \end{cases}$$

é um levantamento em $\mathcal{L}$.

Se $\lambda(A) = 0$, tem-se que $\rho(A) = \emptyset$. Logo $\lambda(\rho(A)\Delta A) = \lambda(\emptyset\Delta A) = \lambda(A) = 0$; daí $\rho(A) \equiv A$. Se $\lambda(A') = 0$ então $\rho(A) = [0,1]$ e $\lambda(\rho(A)\Delta A) = \lambda([0,1] \cap A') = \lambda(A') = 0$ e, portanto, $\rho(A) \equiv A$. Assim verificamos (9.5.*i*).

Se $A \equiv B$ tem-se que $\lambda(A\Delta B) = 0$. Como λ é completa, por (9.2.*a*.*i*), $\lambda(A \cap B') = \lambda(B \cap A') = 0$. Para $\lambda(A) = 0$ tem-se que $\rho(A) = \emptyset$ e $\lambda(B) = \lambda(B \cap A) + \lambda(B \cap A') \leq \lambda(A) = 0$. Portanto $\rho(B) = \emptyset$. Para $\lambda(A') = 0$ tem-se que $\rho(A) = [0,1]$ e $\lambda(B') = \lambda(B' \cap A) + \lambda(B' \cap A') \leq \lambda(A') = 0$. Portanto $\rho(B) = [0,1]$ e (9.5.*ii*) está satisfeita.

Os ítens (9.5.*iii*) e (9.5.*iv*) seguem-se da definição de ρ.

Quanto a (9.5.*v*), suponhamos que $\lambda(A) = 0$ ou $\lambda(B) = 0$. Logo $\lambda(A \cap B) = 0$ e $\rho(A \cap B) = \emptyset$. Se $\lambda(A') = 0$ e $\lambda(B') = 0$ então $\lambda((A \cap B)') = 0$ e $\rho(A \cap B) = [0,1]$.

Para a verificação de (9.5.*vi*) observemos que se $\lambda(A) = 0$ e $\lambda(B) = 0$ então $\lambda(A \cup B) = 0$ e daí $\rho(A \cup B) = \emptyset$; e, se $\lambda(A') = 0$ ou $\lambda(B') = 0$ então $\lambda((A \cup B)') = 0$ e $\rho(A \cup B) = [0,1]$.

(9.7) Teorema. Sejam $(X,\mathcal{A},\mu)$ um espaço com medida e $\mathcal{C}$ uma σ-álgebra de subconjuntos de X que está contida em A que contém os elementos μ-nulos de $\mathcal{A}$. Se ρ é um levantamento em $\mathcal{C}$ então, quaisquer que sejam A e B em $\mathcal{C}$, tem-se

(*i*) $A \cap B = \emptyset$ acarreta $\rho(A) \cap \rho(B) = \emptyset$,

(*ii*) $A \subset B$ acarreta $\rho(A) \subset \rho(B)$,

(*iii*) $\rho(A') = (\rho(A))'$,

(*iv*) $\rho(\rho(A)) = \rho(A)$,

(*v*) $\mu(A) = 0$ acarreta $\rho(A) = \emptyset$,

(*vi*) $\mu(\rho(A) = 0$ acarreta $\mu(A) = 0$.

Demonstração. O item (*i*) segue de (9.5.*v*) e (9.5.iii) e o item (*ii*) segue de (9.5.*vi*) observando que $B = A \dot{\cup} (B \cap A')$.

Para a prova de (*iii*) observemos que de (*i*) segue que $\rho(A) \cap \rho(A') = \emptyset$. Logo

$$\rho(A') \subset (\rho(A))'. \tag{1}$$

Por outro lado $(\rho(A))' \subset \rho(X) = \rho(A) \dot{\cup} \rho(A')$. Logo

$$(\rho(A))' \subset \rho(A'). \tag{2}$$

De (1) e (2) vem a igualdade.

De (9.5.i) temos $\rho(A) \equiv A$, e de (9.5.ii), $\rho(\rho(A)) = \rho(A)$, provando (iv).

Para a prova de (v) notemos que $\mu(A \Delta \emptyset) = \mu(A) = 0$ acarreta que $A \equiv \emptyset$. Logo, por (9.5.ii) e (9.5.iii), $\rho(A) = \emptyset$.

Finalmente se $\mu(\rho(A)) = 0$ então (iv) e (v) nos mostram que $\rho(A) = \emptyset$. Então, por (9.5.i), $A \equiv \emptyset$ e, por (9.2.a.v), $\mu(A) = \mu(A \Delta \emptyset) = 0$, provando ($vi$). □

O teorema a seguir, devido a D. Maharam [R.16], mostra a mensurabilidade da reunião arbitrária de conjuntos utilizando levantamento.

(9.8) Teorema. Sejam $(X,\mathcal{A},\mu)$ um espaço com medida finita e completa, ρ um levantamento em $\mathcal{A}$ e $\mathfrak{F}$ uma coleção de elementos de $\rho(\mathcal{A})$. Então $\bigcup \mathfrak{F} \in \mathcal{A}$.

Demonstração. Façamos $L = \bigcup \mathfrak{F}$. A prova consiste em determinar um subconjunto H de L verificando as condições $H \in \mathcal{A}$ e $L \bigcap H' \in \mathcal{A}$.

Seja $\mathfrak{D} = \left\{\bigcup_{i \in I} F_i : F_i \in \mathfrak{F}, I \text{ finito}\right\}$. É claro que $\mathfrak{D} \subset \mathcal{A}$ e que, denotando por $s = \sup(\mu(F) : F \in \mathfrak{D})$, para cada número natural n existe F_n em $\mathfrak{D}$ satisfazendo $s - \frac{1}{n+1} < \mu(F_n) \leq s$.

A seqüência $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de $\mathfrak{D}$, definida por $A_0 = F_0$ e $A_n = \bigcup_{j=0}^{n} F_j$, é não-decrescente e verifica

$$s - \frac{1}{n+1} < \mu(F_n) \leq \mu(A_n) \leq s, \tag{1}$$

para cada número natural n.

Seja $H = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Então $H \subset L$ e

$$H \in \mathcal{A}. \tag{2}$$

Utilizando (1), temos

$$\mu(H) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n) = s. \tag{3}$$

Mostraremos agora que, para todo $F \in \mathfrak{F}$, temos

$$\mu(F \bigcap H') = 0. \tag{4}$$

Suponhamos, por absurdo, que exista E em $\mathfrak{F}$ tal que $\mu(E \bigcap H') = \delta > 0$ e, utilizando (3), seja A_s um elemento da seqüência $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ verificando $\mu(A_s) > s - \delta$. De $A_s \subset H$ segue-se que $E \cap H' \subset E \cap A'_s$ e daí $\delta \leq \mu(E \cap A'_s)$. Logo $\mu(E \cup A_s) = \mu(A_s) + \mu(E \cap A'_s) > s - \delta + \delta = s$. Isto é absurdo pois $E \cup A_s \in \mathcal{D}$.

De (4) e (9.7.*v*) segue-se que $\rho(F \cap H') = \emptyset$. Aplicando (9.5.*v*) e (9.7.*iii*), temos $\rho(F) \cap (\rho(H))' = \emptyset$ e, portanto,

$$\rho(F) \subset \rho(H), \text{ para todo } F \in \mathfrak{F}.$$

Por hipótese $F \in \rho(\mathcal{A})$ logo, de acordo com (9.7.*iv*), $\rho(F) = F$ e daí $F \subset \rho(H)$. Segue-se que $L \subset \rho(H)$. Deste resultado decorre que $L \cap H' \subset \rho(H) \cap H' \subset \rho(H) \Delta H$. Lembrando (9.5.*i*), $\mu(\rho(H) \Delta H) = 0$ e como μ é completa, segue-se

$$L \cap H' \in \mathcal{A} \tag{5}$$

De (2) e (5) segue-se que $L = H \dot{\cup} (L \cap H') \in \mathcal{A}$. $\square$

(9.9) Corolário. Se $(X,\mathcal{A},\mu)$, ρ e $\mathfrak{F}$ satisfazem as hipóteses de (9.8), então $\bigcap \mathfrak{F} \in \mathcal{A}$.

(9.10) Observação. A prova da existência de um levantamento em $\mathcal{A}$, nas hipóteses de (9.8), pode ser vista em [R.23].

O teorema que segue é uma aplicação de (9.8). Ele é uma adaptação de um resultado apresentado por P. A. Fillmore em [R.6].

(9.11) Teorema. Seja $(X,\mathcal{A},\mu)$ um espaço com medida finita e completa e seja ρ um levantamento em $\mathcal{A}$. Se f é uma função $\mathcal{A}$-mensurável de X em $\overline{\mathbb{R}}$ e se $A_x = \{t \in \mathbb{R} : x \notin (\rho o f^{-1})([-\infty,t[)\}$ então a função g, de X em $\overline{\mathbb{R}}$, definida por

$$g(x) = \begin{cases} \sup A_x, \text{ se } A_x \neq \emptyset \\ \infty, \text{ se } A_x = \emptyset, \end{cases}$$

satisfaz as condições:

(*i*) $g^{-1}([-\infty,r[) = \bigcup_{s<r} (\rho o f^{-1})([-\infty,s[)$, para todo número real r,

(*ii*) g é $\mathcal{A}$-mensurável,

(*iii*) $g = f \quad \mu$ - q.s.

Demonstração. Dado $x \in g^{-1}([-\infty,r[)$ temos que $g(x) = u < r$, para algum $-\infty \leq u < r$. Escolhendo $u < t < r$ segue-se, pela definição de g, que $x \in (\rho o f^{-1})([-\infty,t[)$. Daí $x \in \bigcup_{s<r}(\rho o f^{-1})([-\infty,s[)$ e, então,

$$g^{-1}([-\infty,r[) \subset \bigcup_{s<r}(\rho o f^{-1})([-\infty,s[). \tag{1}$$

Por outro lado se $x \in \bigcup_{s<r}(\rho o f^{-1})([-\infty,s[)$ então $x \in (\rho o f^{-1})([-\infty,t[)$ para algum $t < r$. Segue-se que $-\infty \leq g(x) \leq t < r$. Logo $x \in g^{-1}([-\infty,r[)$ e

$$\bigcup_{s<r}(\rho o f^{-1})([-\infty,s[) \subset g^{-1}([-\infty,r[). \tag{2}$$

De (1) e (2) segue-se a igualdade, provando (*i*).

Quanto a (*ii*) observemos que, para cada número real r, a família $((\rho o f^{-1})([-\infty,s[))_{s<r}$ satisfaz as hipóteses de (9.8). Logo, utilizando (*i*), $g^{-1}([-\infty,r[) \in \mathcal{A}$.

Para a prova de (*iii*) notemos que, para cada número real r temos, lembrando (9.7.*ii*) e (*i*) ,

$$\begin{aligned} g^{-1}([-\infty,r[) &= \bigcup_{\substack{t\in Q\\ t<r}} f^{-1}([-\infty,t[) \\ &= \bigcup_{\substack{t\in Q\\ t<r}} \bigcup_{s<t}(\rho o f^{-1})([-\infty,s[) \\ &\subset \bigcup_{\substack{t\in Q\\ t<r}} (\rho o f^{-1})([-\infty,t[) \\ &\subset \bigcup_{s<r}(\rho o f^{-1})([-\infty,s[) = g^{-1}([-\infty,r[). \end{aligned}$$

Portanto

$$g^{-1}([-\infty,r[) = \bigcup_{\substack{t\in Q\\ t<r}} (\rho o f^{-1})([-\infty,t[).$$

Como $f^{-1}([-\infty,r[) = \bigcup_{\substack{t\in Q\\ t<r}} f^{-1}([-\infty,t[)$ então, para todo número real r temos, utilizando (9.2.*b*),

$$g^{-1}([-\infty,r[)\ \Delta\ f^{-1}([-\infty,r[) \subset \bigcup_{\substack{t\in\mathbb{Q}\\ t<r}}\left[(\rho o f^{-1})([-\infty,t[)\ \Delta\ f^{-1}([-\infty,t[)\right].$$

Mas, por (9.5.*i*) e (9.3), $\mu\left((\rho o f^{-1})([-\infty,t[)\ \Delta\ f^{-1}([-\infty,t[\right) = 0$, para cada $t \in [-\infty,r[\cap \mathbb{Q}$. Portanto $\mu\left(g^{-1}([-\infty,r[)\ \Delta\ f^{-1}([-\infty,r[)\right) = 0$.

Como $\{x \in X : g(x) \neq f(x)\} \subset \bigcup_{q\in\mathbb{Q}}\left(g^{-1}([-\infty,q[)\ \Delta\ f^{-1}([-\infty,q[)\right)$ e μ é completa, o resultado acima acarreta que $\mu(\{x \in X : g(x) \neq f(x)\}) = 0$. □

O teorema (9.8) desde a sua origem tornou-se básico nos trabalhos que abordam topologias induzidas por medidas. Apresentamos uma aplicação destas determinando uma topologia sobre um conjunto X, onde $(X,\mathcal{A},\mu)$ é um espaço com medida finita e completa. A idéia para a definição dessa topologia tem sua origem em J. C. Oxtoby [R.16].

(9.12) Teorema. Seja $(X,\mathcal{A},\mu)$ um espaço com medida finita e completa e seja ρ um levantamento em $\mathcal{A}$. Então,

(*i*) a família $\{\rho(A)\}_{A\in\mathcal{A}}$ é base de uma topologia $\mathfrak{T}$ sobre X,

(*ii*) $\mathfrak{T} \subset \mathcal{A}$.

(*iii*) para todo V não-vazio em $\mathfrak{T}$, tem-se $\mu(V) > 0$.

Demonstração. O item (*i*) decorre de (9.5.*iv*) e (9.5.*v*).

Quanto a (*ii*) observemos que para cada aberto V, não-vazio, em $\mathfrak{T}$ existe uma subfamília $\mathfrak{F}$ de $\{\rho(A)\}_{A\in\mathcal{A}}$ tal que $V = \bigcup\mathfrak{F}$.

Como $\mathfrak{F} \subset \rho(\mathcal{A})$, as hipóteses de (9.8) estão satisfeitas. Daí $V \in \mathcal{A}$.

Para a prova de (*iii*) admitamos, por absurdo, que exista V não-vazio em $\mathfrak{T}$ tal que $\mu(V) = 0$. então, dado um elemento x em V existe, por (*i*), um elemento A em $\mathcal{A}$ tal que $x \in \rho(A)$ e $\rho(A) \subset V$.

Desta última relação segue-se que $\mu(\rho(A)) = 0$. Logo, por (9.7.*vi*) e (9.7.*v*) temos que $\rho(A) = \emptyset$ e isto é um absurdo. □

(9.13) Corolário. Sejam $(X,\mathcal{A},\mu)$, ρ e $\mathfrak{T}$ como no teorema acima. Então toda

função contínua de X em $\overline{\mathbb{R}}$ é $\mathcal{A}$-mensurável.

Demonstração. Segue de (9.12.*ii*). □

O teorema a seguir encontra-se em [R.6]. Ele mostra uma propriedade do espaço topológico com medida dado em (9.12). Outras propriedades podem ser vistas em [R.11].

(9.14) Teorema. Sejam $(X,\mathcal{A},\mu)$ um espaço com medida finita e completa, ρ um levantamento em $\mathcal{A}$ e $\mathfrak{T}$ a topologia dada em (9.12). Se f é um função $\mathcal{A}$-mensurável de X em $\overline{\mathbb{R}}$ e g é a função definida em (9.11), então g é contínua em $(X,\mathfrak{T})$. Se h é uma função contínua de X em $\overline{\mathbb{R}}$, tal que $h = f$ μ-q.s, $h = g$.

Demonstração. Na topologia usual de $\overline{\mathbb{R}}$ os conjuntos abertos possuem uma das seguintes formas : V, $V \bigcup \,]b,\infty]$, $V \bigcup [-\infty,a[$ ou $V \bigcup [-\infty,a[\bigcup \,]b,\infty]$ onde V é um aberto de $\mathbb{R}$ e a e b são números reais. Logo para a prova da continuidade de g é suficiente verificar que $g^{-1}([-\infty,c[)$, $g^{-1}(]d,\infty])$ e $g^{-1}(]a,b[)$ são abertos em X, quaisquer que sejam os números reais a, b, c e d.

Como f é $\mathcal{A}$-mensurável então $f^{-1}([-\infty,t[)$ e $f^{-1}([t,\infty])$ são elementos de $\mathcal{A}$. Lembrando (9.12.*i*), temos

$$(\rho o f^{-1})([-\infty,t[) \in \mathfrak{T} \tag{1}$$

e

$$(\rho o f^{-1})([t,\infty[) \in \mathfrak{T}, \tag{2}$$

para todo número real t.

De (1) segue-se, aplicando (9.11.*i*), que $g^{-1}([-\infty,r[) \in \mathfrak{T}$, para todo número real r.

Provando-se que

$$g^{-1}(]r,+\infty] = \bigcup_{r<s} (\rho o f^{-1})([s,\infty]) , \tag{3}$$

para todo r em $\mathbb{R}$, temos por (2), que $g^{-1}(]r,\infty]) \in \mathfrak{T}$.

Dado $x \in g^{-1}(]r,\infty]$, temos que $r < g(x) = t \leq \infty$. Portanto para todo $u > t$ temos $x \in (\rho o f^{-1})([u,\infty[)$. Logo

$$g^{-1}(]r,\infty]) \subset \bigcup_{r<s} (\rho o f^{-1})([s,\infty[) \ .$$

Por outro lado se $x \in \bigcup_{r<s} (\rho o f^{-1})([s,\infty[)$ então existe $\nu > r$ tal que $x \in (\rho o f^{-1})([\nu,\infty[)$. Segue-se que $x \notin (\rho o f^{-1})([-\infty,\nu[)$. Portanto $g(x) \geq \nu > r$ e daí vem que $x \in g^{-1}(]r,+\infty]$ completando a prova de (3).

Finalmente, dados r e s em $\mathbb{R}$, com $r < s$, temos

$$g^{-1}(]r,s[) = g^{-1}(]-\infty,s[) \bigcap g^{-1}(]r,\infty]) \in \mathfrak{T}.$$

Seja h satisfazendo as hipóteses do teorema, logo $A = \{x \in X : h(x) \neq g(x)\} \subset \{x \in X : f(x) \neq h(x)\} \bigcup \{x \in X : g(x) \neq h(x)\}$ e, como μ é completa, $\mu(A) = 0$.

Suponhamos, por absurdo, que $A \neq \emptyset$ e seja $z \in A$. Decorre do fato de $g - h$ ser contínua em X e de $g(z) \neq h(z)$ que existe um aberto V em X, contendo z, satisfazendo $|g(y) - h(y)| > 0$, para todo y em V. Segue-se que $V \subset A$ e que $\mu(V) = 0$, contrariando (9.12.*iii*). □

Apêndice A. O espaço com medida $(\overline{P_\Omega}, \sum, \psi, \tau)$

A finalidade deste apêndice será estabelecer uma topologia τ, uma σ-álgebra $\sum$ de subconjuntos de $\overline{P_\Omega} = P_\Omega \bigcup \{\Omega\}$, com $\tau \subset \sum$, e uma medida ψ, definida em $\sum$, de modo que $(\overline{P_\Omega}, \sum, \psi, \tau)$ seja espaço topólogico de Hausdorff. Este espaço será utilizado para fornecer contra-exemplos.

Este apêndice teve sua origem quando estudamos o exemplo da página 45 de [R.19]. Também encontramos referências a ele em exercícios de [R.2] e [R.4].

(A.1) Notações. Seja Ω o menor número ordinal tal que P_Ω é não-enumerável, conforme (1.64). Denota-se o conjunto $P_\Omega \bigcup \{\Omega\}$ por $\overline{P_\Omega}$. Se α e β são elementos de $\overline{P_\Omega}$, onde $\alpha < \beta$, denota-se o conjunto $\{\gamma \in \overline{P_\Omega} : \alpha < \gamma \leq \beta\}$ por $]\alpha,\beta]$.

(A.2) Teorema. Tem-se:

(i) a família $\mathcal{C} = \{]\alpha,\beta] : \alpha,\beta \in \overline{P_\Omega},\ \alpha < \beta\} \bigcup \{0\}$ é base de uma topologia τ sobre o conjunto $\overline{P_\Omega}$;

(ii) $(\overline{P_\Omega},\tau)$ é um espaço topológico de Hausdorff compacto.

Demonstração. Para estabelecermos (i), conforme a Proposição 10, página 70 de [R.15], observemos que todo x em $\overline{P_\Omega}$ pertence a algum elemento de $\mathcal{C}$ e, que se x $\in\ ]\alpha_1,\beta_1] \bigcap\ ]\alpha_2,\beta_2]$ então x $\in\ ]\gamma_1,\gamma_2]$, onde $\gamma_1 = \max(\alpha_1,\alpha_2)$ e $\gamma_2 = \min(\beta_1,\beta_2)$.

Para mostrar que o espaço é de Hausdorff consideremos y_1 e y_2 em $\overline{P_\Omega}$ com

$y_1 < y_2$. Se $y_1 = 0$ então $\{0\} \cap]0,y_2] = \emptyset$; e, se $y_1 \neq 0$ então $]0,y_1] \cap]y_1, y_2] = \emptyset$.

Completemos a prova do item (*ii*) mostrando que o espaço $\overline{P_\Omega}$ é compacto. Para tal seja $\mathbb{G} = \{G_\lambda\}_{\lambda \in I}$ uma cobertura de $\overline{P_\Omega}$ por abertos.

Como $\mathbb{C}$ é base da topologia τ então, para cada x em $\overline{P_\Omega}$, existem $G_\lambda \in \mathbb{G}$ e $]\alpha, \beta]$ em $\mathbb{C}$ tais que $x \in]\alpha, \beta]$ e $]\alpha, \beta] \subset G_\lambda$. Seguem-se daí que $]\alpha, x] \subset G_\lambda$ e que o conjunto $\{\gamma \in \overline{P_\Omega} :]\gamma, x] \subset G_\lambda$, para algum $\lambda \in I\}$ é não-vazio.

Tomando, para cada x não-nulo em $\overline{P_\Omega}$, $\delta_x = \min\{\gamma \in \overline{P_\Omega} ;]\gamma, x] \subset G_\lambda$, para algum $\lambda \in I\}$ e definindo a função f, de $\overline{P_\Omega}$ em $\overline{P_\Omega}$, por

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } x = 0, \\ \delta_x, \text{ se } x \neq 0, \end{cases}$$

temos que, para todo x não-nulo em $\overline{P_\Omega}$,

$$f(x) < x \tag{1}$$

e

$$]f(x),x] \subset G_\lambda, \text{ para algum } \lambda \text{ em } I. \tag{2}$$

A sequência $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, definida em $\overline{P_\Omega}$, por

$$y_0 = \Omega,$$

$$y_n = f(y_{n+1}), \text{ se } n \neq 0,$$

é, de acordo com (1), estritamente decrescente, logo tem mínimo.

Se n_0 o menor número natural tal que $y_n = y_{n_0}$, para todo $n \geq n_0$. É imediato que $y_{n_0} = 0$ pois, caso contrário, teríamos, pela definição da função f, que $y_{n_0+1} = f(y_{n_0}) < y_{n_0}$, contradizendo a escolha de n_0.

Agora, utilizando (2), para cada $m < n_0$ seja $\lambda(m) \in I$ tal que $]y_{m+1},y_m] \subset G_{\lambda(m)}$ e seja $G_{\lambda(n_0)}$ um elemento de $\mathbb{G}$ que contém 0.

Portanto $\overline{P_\Omega} = \{0\} \cup \bigcup_{m=0}^{n_0-1}]y_{m+1},y_m] \subset \bigcup_{m=0}^{n_0} G_{\lambda(m)}$. □

(A.3) Teorema. Sejam $(\overline{P_\Omega},\tau)$ o espaço topológico dado em (A.2) e $\mathfrak{F}$ a coleção dos subconjuntos não-enumeráveis e fechados em P_Ω com a topologia induzida. Se $\mathcal{E}$ é uma coleção de elementos de $\mathfrak{F}$ tal que $\#\mathcal{E} \leq \aleph_0$, então $\bigcap \mathcal{E} \in \mathfrak{F}$.

Demonstração. O fato de $]0,\Omega[$ estar contido em P_Ω acarreta que a coleção $\mathfrak{F}$ é não-vazia. Como $E = \bigcap \mathcal{E}$ é fechado em P_Ω, provemos que E é não-enumerável. Por

(1.63.*iii*) sabemos que, se E for enumerável, existe ρ em P_Ω tal que $\alpha < \rho$, para todo $\alpha \in E$. Assim para verificar que E é não-enumerável basta provar que se $\beta \in P_\Omega$, existe δ em E tal que $\delta > \beta$.

Suponhamos que $\mathcal{E} = (E_i)_{i \in M}$, onde $M = \mathbb{N}$ ou $M = P_m$, para algum número natural não-nulo m.

A definição de Ω e o fato de E_i ser não-enumerável para cada $i \in M$, acarretam que para cada α em P_Ω existe α_i em E_i tal que $\alpha < \alpha_i$. Logo podemos definir em P_Ω uma seqüência $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$, estritamente crescente, com $\beta_0 > \beta$ e tal que $\beta_n \in E_i$, onde i é determinado do seguinte modo: se $M = P_m$ então i é o resto da divisão de n por m; e, se $M = \mathbb{N}$ então $i = n - \frac{j(j+1)}{2}$, se $\frac{j(j+1)}{2} \leq n < \frac{(j+1)(j+2)}{2}$, com $j \in \mathbb{N}$.

Como $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é enumerável, decorre de (1.63.*iii*) que existe γ em P_Ω tal que $\beta_n < \gamma$, para todo n em $\mathbb{N}$. Logo o conjunto $D = \{\alpha \in P_\Omega : \beta_n \leq \alpha, n \in \mathbb{N}\}$ é não-vazio. Seja δ o seu mínimo. É imediato que $\delta > \beta$. Provemos que $\delta \in E$.

Da definição de δ segue-se que dado δ' em P_Ω com $\delta' < \delta$, existe n_0 em $\mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$, tem-se $\delta' < \beta_n \leq \delta$. Como o espaço é de Hausdorff, temos que $\lim_{n \to \infty} \beta_n = \delta$ e toda subseqüência $(\beta^i_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\beta^i_{n_k} \in E_i$, para todo i em M e todo k em $\mathbb{N}$, satisfaz $\lim_{k \to \infty} \beta^i_{n_k} = \delta$.

Como E_i é fechado então $\delta \in E_i$, para todo $i \in M$, e isto acarreta que $\delta \in E$.□

(A.4) Observação. É conseqüência de (A.3): qualquer que seja o subconjunto A de P_Ω, não existem F_1 e F_2 em $\mathcal{F}$ tais que $F_1 \subset A$ e $F_2 \subset A'$.

(A.5) Teorema. Sejam $(\overline{P_\Omega}, \tau)$ e $\mathcal{F}$ como em (A.3). Sejam $\sum$ a coleção dos subconjuntos A, de $\overline{P_\Omega}$, para os quais existe F em $\mathcal{F}$ tal que $F \subset A$ ou $F \subset A'$ e ψ a função, de $\sum$ em $\{0,1\}$, definida por

$$\psi(A) = \begin{cases} 1, \text{ se existe } F \in \mathcal{F} \text{ tal que } F \subset A, \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Então,

(*i*) $\sum$ é uma σ-álgebra,

(*ii*) ψ é uma medida em $\sum$.

Demonstração. Para a prova de (i) é claro que $\emptyset \in \Sigma$.

Seja $(D_i)_{i\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de elementos de Σ. Se existem $i_0 \in \mathbb{N}$ e $F \in \mathfrak{F}$ tal que $F \subset D_{i_0}$ então $F \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} D_i$ e $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} D_i \in \Sigma$. Se, para cada $i \in \mathbb{N}$, existe $F_i \in \mathfrak{F}$ tal que $F_i \subset D_i'$, então $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} F_i \subset \left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} D_i\right)'$ e, novamente, $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} D_i \in \Sigma$.

Na prova de (ii) é claro que $\psi(\emptyset) = 0$.

Dada uma seqüência $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de Σ, dois a dois disjuntos, temos, observando (A.4), que ou existe um único n_0 em $\mathbb{N}$ e existe E_0 em $\mathfrak{F}$ tais que $E_0 \subset A_{n_0}$ ou, para cada $i \in \mathbb{N}$, existe E_i em $\mathfrak{F}$ tal que $E_i \subset (A_i)'$.

No primeiro caso $\psi(A_{n_0}) = 1$, $\psi(A_n) = 0$ para todo $n \neq n_0$, e como $E_0 \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ então $\psi\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = 1 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \psi(A_n)$. No segundo caso $\psi(A_n) = 0$, para todo n em $\mathbb{N}$, e $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} E_i \subset \left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right)'$. Como, por (A.3), $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} E_i \in \mathfrak{F}$ então $\psi\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = 0$ e, novamente, $\psi\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \psi(A_i)$. $\square$

Referências

[R.1] L. Bukovsky, "Any partition into Lebesgue measure zero produces a non-measurable set", Bulletin de L'Académie Polonaise Des Sciences - série de sciences mathématiques, 27 (1979).

[R.2] D. L. Cohn, Measure Theory, Birkhäuser, Boston, 1980.

[R.3] N. Dinculeanu, Vector Measures, VebDeutscher Verlag Der Wissenschaften, Berlin, 1967.

[R.4] J. Dugundji, Topology, Allyn and Bacon Inc, Boston, 1975.

[R.5] E. Farah, Teoria dos Conjuntos, Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo, São Paulo, 1958.

[R.6] P. A. Fillmore, "On topology induced by measure", Proc. Amer. Math Society, 17 (1966), 854-857.

[R.7] D. H. Fremlin, "Measurable functions and almost continuous funtions", Manuscripta Mathematica, 33 (1981), 387-405.

[R.8] P. R. Halmos, Teoria Ingênua dos Conjuntos, Editora Polígono, São Paulo, 1970.

[R.9] P. R. Halmos, "On the set of values of a finite measure", Bull. Amer. Math. Society, 53 (1947), 138-141.

[R.10] E. Hewitt e K. R. Stromberg, Real and Abstract Analysis, Springer-Verlag, New York, 1965.

[R.11] A. e C. Ionescu Tulcea, Topics in the Theory of Liftings Ergebnisse der Mathematik, vol. 48, Berlin and New York, 1969.

[R.12] T. Jech, Set Theoty, Academic Press, New York, 1968.

[R.13] J. Kupka e K. Prikry, "The measurability of uncountable unions", American Mathematical Monthly, (1984), 85-97.

[R.14] K. Kuratowski, Topology, vol. I, Academic Press, New York, 1966.

[R.15] E. L. Lima, Elementos de Topologia Geral, Ao Livro Técnico S. A., Rio de Janeiro, 1970.

[R.16] D. Maharam, "On a theorem of Von Neumann", Proc. Amer. Math. Monthly, 9, n° 6 (1958), 995-999.

[R.17] C. Metelli e L. Salce, "A note on the well ordering of cardinals", Amer. Math Monthly, 81 (1974), 501-502.

[R.18] J. C. Oxtoby, Measure and Category, 2nd ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 2, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1971.

[R.19] L. Schwartz, Radon Measures on Arbitrary Topological Spaces and Cilindrical Measures, Oxford University Press, London, 1975.

[R.20] W. Sierpinski, General Topology, University of Toronto Press, Toronto, 1956.

[R.21] R. M. Solovay, "Real-valued measurable cardinals", Proc. Sympos. Pure Mathem., vol. XIII, n° 1, American Mathematical Society, Providence, 1971.

[R.22] A. H. Stone, "Topology and measure theory ", Measure Theory Oberwolfach 1975, Lecture Notes in Mathematics, vol. 541, Springer-Verlag, Berlin and New York, (1976), 43-48.

[R.23] T. Traynor, "An elementary proof of the lifting theorem", Pacific Journal of Mathematics, 53 n° 1, (1974), 267-272.