SOBRE SOLUÇÕES NA FORMA DE ONDA DE CHOQUE DE CERTOS SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS DA HIDRODINÂMICA

Francisco Villarreal Alvarado

TESE APRESENTADA AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM MATEMÁTICA

ORIENTADOR : **Prof. Dr. Alfredo Jorge Aragona Vallejo**

SÃO PAULO, Outubro de 1990

Durante o programa de doutoramento, o autor teve apoio financeiro do CNPq - PROC. 145518-85/MA

À minha mãe Melania,
aos meus filhos Roque e Francisco
e à minha esposa Dalva
que souberam compreender
a minha ausência.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos a todas as pessoas e entidades que, de uma forma ou de outra, colaboraram para a execução do presente traballho. Em especial :

Ao meu orientador e amigo, Prof. Dr. Alfredo Jorge Aragona Vallejo, por ter-nos aceito como seu aluno de doutorado de modo incondicional, por haver-nos sugerido o tema objeto desta tese, pelos ensinamentos, pelo estímulo, paciência, atenção e apoio constante, enfim, pelo seu dedicado trabalho de orientação em todos os momentos desde nossa chegada no IME - USP;

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, CNPq, pela ajuda financeira na forma de Bolsa de Doutorado;

À minha esposa Dalva, pelo sua compreensão, ajuda e apoio constante que tornaram mais fácil esta tarefa.

São Paulo, outubro de 1990.
Francisco Villarreal Alvarado

ABSTRACT

Let $\alpha_* = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ and $\beta_* = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ in $\overline{\mathrm{IR}}^3$ such that $0 \leq \alpha_* < \beta_*$ and let $\nu_* = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ be a function such that $\nu_* \in C^\infty(\mathrm{IR}_+^*;]\alpha_*, \beta_*[)$, each coordinate function of ν_* being increasing and at least one coordinate function being a strictly increasing function. Let us consider the function $\nu \in C^\infty((\mathrm{IR}_+^*)^3;]\alpha, \beta[)$ defined by $\nu(y_1, y_2, y_3) := \nu_1(y_1) + \nu_2(y_2) + \nu_3(y_3)$(resp. $\nu(y_1, y_2, y_3) := \nu_1(y_1)\nu_2(y_2)\nu_3(y_3)$), where $\alpha := \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$(*resp.* $\alpha := \alpha_1\alpha_2\alpha_3$) and $\beta := \beta_1 + \beta_2 + \beta_3$(resp. $\beta := \beta_1\beta_2\beta_3$). For the function ν_* satisfying some other conditions oportunely stated (in Chapter 4), we consider the following systems (S) and $(\widetilde{S})$ of equations from hydrodynamics with viscosity ν. The system (S) consistis of the equations

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho u)_x = 0 \\ (\rho u)_t + (p + \rho u^2)_x = \{[\nu \circ (\rho, p, E) - \alpha]u_x\}_x \\ E_t + [(E + p)u]_x \approx \{[\nu \circ (\rho, p, E) - \alpha]uu_x\}_x \\ E \approx \lambda p + \frac{1}{2}\rho u^2, \qquad \lambda \in \mathrm{IR}^*, \end{cases}$$

and the system $(\widetilde{S})$ consistis of the two last equations above and

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho u)_x \approx 0 \\ (\rho u)_t + (p + \rho u^2)_x \approx \{[\nu \circ (\rho, p, E) - \alpha]u_x\}_x \end{cases}$$

where the symbol $\approx$ denote the association relation in $\mathcal{G}_s(\mathrm{IR}^2; \mathrm{IR})$.

The purpose of this thesis is to study the existence of shock wave solutions for the systems (S) and $(\widetilde{S})$.

The main results of this work can be, in a not completely formal way, summarized as follows:

Theorem : There is a large class of functions ν such that:

(I) The system $(\widetilde{S})$ has shock wave solution if and only if the jump conditions of the classical case without viscosity (that is $\nu = 0$) hold;

(II) The system (S) has no shock wave solutions.

In Chapter 1 we state some basic definitions and results about the simple algebra $\mathcal{G}_s(\Omega; F)$.

In Chapter 2 we define the Dirac, Heaviside, proper Heaviside and restricted Heaviside, simple generalized functions, and we state some properties of these functions.

In Chapter 3 we study some properties of the function $g \circ f \in \mathcal{G}_s(\Omega; G)$, for a class of simple generalized functions $f \in \mathcal{G}_s(\Omega; F)$ and $g \in \mathcal{G}_s(\Omega; G)$, adequate to the requeriments of this work.

In Chapter 4 we prove the theorem formulated above.

INTRODUÇÃO

Na Teoria das Funções Generalizadas, introduzida pela Prof. J. F. Colombeau, dado um subconjunto aberto não vazio Ω de $\mathbb{R}^n$, existe uma álgebra $\mathcal{G}(\Omega)$ de *funções generalizadas em* Ω a qual contém o espaço $\mathcal{D}'(\Omega)$ das distribuições em Ω como um subespaço vetorial (Ver [A], [A–B], [C1], [C2] e [C3]). Existe também uma versão mais simples da álgebra que é suficiente para muitas aplicações à Física, Engenharia, etc., na qual as funções generalizadas são classes de equivalência de C^∞ funções dependendo de um parâmetro $\varepsilon > 0$ (tão pequeno quanto desejarmos) (Ver [A], [A–B] e [C3]). Esta álgebra simplificada $\mathcal{G}_s(\Omega)$, que é uma subálgebra de $\mathcal{G}(\Omega)$, apesar de conter a álgebra $C^\infty(\Omega)$ e ser suficiente para muitas aplicações , não contém o espaço $\mathcal{D}'(\Omega)$. Os dados de nosso problema objeto de estudo envolve apenas funções em $\mathcal{G}_s(\Omega)$; tendo em vista isso, para o desenvolvimento do presente trabalho, usaremos sómente a álgebra simplificada de funções generalizadas.

Dados $\alpha_* = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ e $\beta_* = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ em $\overline{\mathbb{R}}^3, 0 \leq \alpha_* < \beta_*$, e uma função $\nu_* = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ em $C^\infty(\mathbb{R}_+^*;]\alpha_*, \beta_*[)$ tal que cada componente de ν_* é uma função crescente e pelo menos uma delas é uma função estritamente crescente, consideremos a função $\nu \in C^\infty((\mathbb{R}_+^*)^3;]\alpha, \beta[)$ definida por $\nu(y_1, y_2, y_3) := \nu_1(y_1) + \nu_2(y_2) + \nu_3(y_3)($ resp. $\nu(y_1, y_2, y_3) := \nu_1(y_1)\nu_2(y_2)\nu_3(y_3))$, onde $\alpha := \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3($ resp. $\alpha := \alpha_1\alpha_2\alpha_3)$ e $\beta := \beta_1 + \beta_2 + \beta_3($ resp. $\beta := \beta_1\beta_2\beta_3)$. Para a função ν_* sujeita ainda a outras condições adicionais a serem introduzidas oportunamente (no Capítulo 4), consideremos os sistemas (S) e $(\widetilde{S})$ de equações da hidrodinâmica com viscosidade ν dados a seguir. O sistema (S) é formado pelas equações

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho u)_x = 0 \\ (\rho u)_t + (p + \rho u^2)_x = \{[\nu \circ (\rho, p, E) - \alpha]u_x\}_x \\ E_t + [(E + p)u]_x \approx \{[\nu \circ (\rho, p, E) - \alpha]uu_x\}_x \\ E \approx \lambda p + \frac{1}{2}\rho u^2, \qquad \lambda \in \mathbb{R}^*, \end{cases}$$

e o sistema $(\widetilde{S})$ é formado pelas duas últimas destas equações e

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho u)_x \approx 0 \\ (\rho u)_t + (p + \rho u^2)_x \approx \{[\nu \circ (\rho, p, E) - \alpha] u_x\}_x \end{cases}$$

onde o símbolo $\approx$ denota a relação de associação em $\mathcal{G}_s(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$ (Ver Definição 1.3.10).

A finalidade do presente trabalho é o estudo da existência de soluções na forma de onda de choque (Ver Definição 4.1.1) dos sistemas (S) e $(\widetilde{S})$.

Os principais resultados da tese são , os teoremas 4.2.6, 4.2.7 e 4.3.5. O trabalho consiste de quatro capítulos os quais passamos a descrever de forma suscinta. De um modo geral podemos afirmar que nos três primeiros capítulos coletamos os resultados a serem usados no último.

No Capítulo 1 fixamos as notações e apresentamos os resultados que serão usados no desenvolvimento do trabalho. Em particular, introduzimos os espaços $\mathcal{G}_s(\Omega; F)$ e $\overline{F}_s$ (onde Ω é um subconjunto aberto não vazio de um espaço de Banach e F é um espaço de Banach, ou uma álgebra de Banach), e as noções de derivada intrinseca e de função localmente limitada para elementos de $\mathcal{G}_s(\Omega; F)$; e, quando Ω é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, introduzimos a relação de associação em $\mathcal{G}_s(\Omega; \mathbb{K})$. Um resultado, a Proposição 1.3.14, como uma de suas aplicações , é usado no Capítulo 4 para demonstrar que o sistema (S) não possui soluções na forma de onda de choque (Ver Proposição 4.3.4).

No Capítulo 2 são dadas as noções de função generalizada simples de: Dirac, Heaviside, Heaviside própria e Heaviside restrita; e são consideradas as propriedades dessas funções a serem usadas posteriormente. Um resultado, o Lema 2.2.5, é usado para a construção de funções de Heaviside próprias e um outro, a Proposição 2.2.9, fornece exemplos concretos dessas funções . De fato, esses dois resultados exibem a função u, solução na forma de onda de choque do sistema $(\widetilde{S})$ (Ver prova do Teorema 4.2.7).

No Capítulo 3, de um modo geral, estudamos algumas propriedades da função composta $g \circ f$ em $\mathcal{G}_s(\Omega; G)$, para uma certa classe de fuções generalizadas f em $\mathcal{G}_s(\Omega; F)$ e g em $\mathcal{G}_s(\Omega'; G)$, adequada aos requerimentos deste trabalho, onde Ω e Ω' são subconjuntos abertos não vazios de E e F, respectivamente, e, E, F e G são espaços de Banach, sendo F de dimensão finita . Para as funções f em $\mathcal{G}_s(\Omega; F)$ em condições apropriadas, numa primeira parte do § 3.1 introduzimos a fução composta $g \circ f$ e calculamos, no Teorema 3.1.11, a derivada intrinseca de ordem superior desta função ; além disso, estudamos a inversibilidade de uma classe de funções em $\mathcal{G}_s(\Omega; \mathbb{R})$ e damos, no Teorema 3.1.21, condições necessárias e suficientes para a inversibilidade das mesmas. Numa segunda parte do § 3.1, dados α e β em $\overline{\mathbb{R}}^m$, $0 \leq \alpha < \beta$, damos condições suficientes para a validade da relação $\varphi \circ f \in \mathcal{G}_s(\Omega; G)$, quando $\varphi \in C^\infty(]\alpha, \beta[; G)$ e $f \in \mathcal{G}_s(\Omega; \mathbb{R}^m)$ (Ver Teorema 3.1.26). No § 3.2 são estudadas propriedades de funções da forma $\varphi \circ (a_1 H_1 + b_1, \ldots, a_m H_m + b_m)$, onde $H_1, \ldots, H_m$ são funções de Heaviside próprias sob certas condições . Três resultados, as proposições 3.2.4, 3.2.6 e 3.2.7, são fundamentias no estudo da existência de soluções na forma de onda de choque dos sistemas (S) e $(\widetilde{S})$. A Proposição 3.2.7 é usada para demonstrar que a primeira equação do sistema (S) não pode ter solução (ρ, u) na forma de onda de choque satisfazendo a condição $(\nu_1 \circ \rho - \alpha_1)u_x \approx 0$ em $\mathcal{G}_s(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$ (Proposição 4.3.1)

No Capítulo 4 é que estudamos, propriamente, o problema inicialmente proposto. Mostramos que uma condição necessária e suficiente para que o sistema $(\widetilde{S})$ tenha soluções na forma de onda de choque é que sejam válidas as condições de salto do caso clássico $\nu = 0$ (Teorema 4.2.6). Usando a Proposição 3.2.6 e o Teorema 4.2.6, com o auxilio do Lema 2.2.5 e da Proposição 2.2.9(b), mostramos que o sistema $(\widetilde{S})$ tem sempre soluções na forma de onda de choque (Teorema 4.2.7). Dispondo das proposições 4.3.1, 3.2.4$(II)_3$ e 1.3.14 mostramos que as duas primeiras equações do sistema (S) não podem ter soluções na forma de onda de choque (Proposição 4.3.4). Uma afirmação mais precisa quanto às condições impostas às componentes da função ν_* (e quanto aos "principais resultados") é dada no Capítulo 4.

Para concluir esta parte introdutória, observamos que as reproduções geométricas dos representantes das funções generalizadas simples de Heaviside (e de Dirac), construidas ao longo deste trabalho, a maioria delas usadas no Capítulo 4, foram omitidas na redação final, sendo substituidas por uma apresentação formal, para não alongar excessivamente o trabalho.

ÍNDICE

NOTAÇÕES E CONVENÇÕES

$A := B$ siginifica que A esta sendo definido como sendo igual a B

$\mathbb{N}$ (resp. $\mathbb{N}^*$) é o conjunto dos números inteiros não negativos (resp. positivos)

$\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^*, \mathbb{R}^*_-, \mathbb{R}^*_+$) é o corpo (resp. conjunto) dos números reais (resp. reais não negativos, reais não nulos, reais negativos, reais positivos)

$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

$\mathbb{K}$ denota indistintamente $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, onde $\mathbb{C}$ é o corpo dos números complexos

$B_r(x)$ (resp. $\overline{B_r(x)}$) é a bola aberta (resp. bola fechada) de centro x e raio $r > 0$

$K \subset\subset \Omega$ significa que K é uma parte compacta de Ω

F^E indica o conjunto de todas as aplicações de E em F

$C^m(\Omega; F), m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, denota o conjunto de funções em F^Ω m vezes continuamente diferenciável e $C^m(\Omega) := C^m(\Omega; \mathbb{K})$

$\mathcal{D}(\Omega)$ é a álgebra de funções em $C^\infty(\Omega)$ com suporte compacto, $\mathcal{D}'(\Omega)$ é o espaço vetorial das distribuições em Ω e $< T, \varphi >$ denota o valor de $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ em $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$X \backslash A$ indica o complementar de A em X, se $A \subset X$

f_x denota a derivada parcial de f em relação a x

$f_n \rightrightarrows f$ em A, significa que a sequencia f_n converge uniformemente para f em A

Para $a, b \in \mathbb{R}$, $\quad a \vee b := \max\{a, b\}$

Para $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $\quad |\alpha| := \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, $\quad \alpha! := \alpha_1! \ldots \alpha_n!$ e $\partial^\alpha := \partial^{|\alpha|} / \partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}$

Para $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$ em $\overline{\mathbb{R}}^n$ escrevemos $x \leq y$(resp. $x < y$) se $x_i \leq y_i$(resp. $x_i < y_i$) para $1 \leq i \leq n$

$\mathcal{O}_p$, onde $p \in \mathbb{N}^*$, indica o grupo das $p!$ permutações de $\{1, \ldots, p\}$

A expressão "espaço de Banach" (resp. "álgebra de Banach") significa "$\mathbb{K}$–espaço de Banach" (resp. "$\mathbb{K}$–álgebra de Banach")

Fórmulas que precisam ser destacadas que aparecem em algum enunciado (definição , proposição , etc.) ou na prova de um resultado , têm a numeração derivada de maneira óbvia a partir da numeração do enunciado em questão . Por exemplo, as fórmulas (1.1.4.1) e (1.1.4.2) na prova da Proposição 1.1.4. Fórmulas que precisam ser destacadas não incluidas nos casos anteriores, têm numeração derivada a partir da numeração do capítulo e do § onde aparecem e são indicadas entre colchetes. Por exemplo, [1.2.1] é a primeira fórmula destacada de 1.2.

$\mathcal{G}_{\ell b}(\Omega; F)$: ver Definição 1.2.7 .

$\mathcal{G}_*(\Omega; \Omega')$: ver Definição 3.1.1 .

$\mathcal{H}(\mathbb{R}) = \mathcal{H}(\mathbb{R}; \mathbb{K})$: ver Definição 2.2.1.

$\mathcal{H}_p(\mathbb{R}) = \mathcal{H}_p(\mathbb{R}; \mathbb{K})$: ver Definição 2.2.3.

$\mathcal{H}_r(\mathbb{R}) = \mathcal{H}_r(\mathbb{R}; \mathbb{K})$: ver Definição 2.2.8.

$\mathcal{H}_\Xi(\mathbb{R}) = \mathcal{H}_\Xi(\mathbb{R}; \mathbb{K})$: ver [2.2.2].

$\Im[\Omega; \mathbb{R}^*]$: ver Definição 3.1.20.

$M[\,]\alpha, \beta[; G]$: ver Definição 3.1.23(II).

$V_*[\Omega; \Omega']$: ver Definição 3.1.1.

$V[\Omega; \Omega']$: ver Definição 3.1.1.

$V[\Omega]_\alpha^\beta$: ver Definição 3.1.23(I).

$\Xi = \Xi(\mathbb{R}^n) = \Xi(\mathbb{R}^n; \mathbb{K})$: ver [2.1.1].

CAPÍTULO 1

A ÁLGEBRA DAS FUNÇÕES GENERALIZADAS DE COLOMBEAU

Neste capítulo, a menos de mensão explícita em contrário, E e G denotam espaços de Banach, F indica tanto um espaço de Banach bem como uma álgebra de Banach e Ω denota um subconjunto aberto não vazio de E. Indicamos as três normas, de E, F e G, pelo mesmo simbolo $|\cdot|$. Nestas condições nos §§ 1.2 e 1.3 introduzimos, respectivamente, os espacos vetoriais (as álgebras quando F for uma álgebra de Banach) das *funções generalizadas simples* $\mathcal{G}_s(\Omega; F)$ e dos *vetores generalizados simples* $\overline{F}_s$.

Quando E e F são espacos vetoriais de dimensão finita, cada um deles munido de um produto interno, em [A] e [A-B] (e em [C1] - [C3], nos casos $E = \mathbb{R}^n$ e $F = \mathbb{C}$) são introduzidos o espaço vetorial das funções generalizadas $\mathcal{G}(\Omega; F)$ (o que é uma álgebra quando $F = \mathbb{K}$) e a álgebra dos números generalizados $\overline{\mathbb{K}}$. Nos casos $E = \mathbb{R}^n$ e $F = \mathbb{K}$, em [A], [A-B] e [C3] são introduzidos também as subálgebras $\mathcal{G}_s(\Omega; \mathbb{K})$ e $\overline{\mathbb{K}}_s$. Essas subálgebras são as consideradas no presente trabalho. A extensão da definição da álgebra simples ao caso de espaços de Banach se fez necessária, entre outros, para dar a noção da derivada intrínseca e para calcular a derivada intrínseca de ordem superior da função composta, no contexto de funções generalizadas simples, onde aparecem necessariamente os espaços de Banach das aplicações multilineares contínuas. A exigencia de F ser uma álgebra de Banach permite, pelo menos, a obtenção da fórmula de Leibnitz para a derivada intrínseca da função produto, de funções generalizadas simples. A técnica das demonstrações de alguns resultados apresentados neste capítulo são as mesmas das demonstrações dos resultados correspondentes que aparecem em [A] ou em [A-B], e quando for o caso citamos pelo menos uma dessas referências.

Neste trabalho, a menos de advertência em contrário (Ver introdução de 1.3), escrevemos por comodidade $\mathcal{G}(\Omega; F)$ em vez de $\mathcal{G}_s(\Omega; F)$ e $\overline{F}$ em vez de $\overline{F}_s$ (uma notação similar é aplicada aos conjuntos que dão origem a $\mathcal{G}_s(\Omega; F)$ e $\overline{F}_s$, respectivamente). Para uma comodidade maior ainda, no caso $F = \mathbb{K}$, escrevemos $\mathcal{G}(\Omega)$ em vez de $\mathcal{G}(\Omega; \mathbb{K})$

e uma notação similar é usada para os conjuntos que geram (bem como para os subconjuntos de) $\mathcal{G}(\Omega; \mathbb{K})$. Chamaremos simplesmente de funções generalizadas as funções generalizadas simples e de vetores generalizados aos vetores generalizados simples.

1.1 – Complementos de Cálculo Diferencial

Dados $F_1, \ldots, F_m$ espaços de Banach, indicando pelo mesmo símbolo $| \cdot |$ a norma de cada um deles, consideramos o produto $F_1 \times \ldots \times F_m$ munido da estrutura de espaço vetorial produto e da norma

$$(y_1, \ldots, y_m) \in F_1 \times \ldots \times F_m \mapsto \Big(\sum_{i=1}^{m} |y_i|^2 \Big)^{1/2} \in \mathbb{R}_+,$$

que, no restante deste trabalho, chamaremos de *norma euclidiana*, norma que define a topologia produto tornando $F_1 \times \ldots \times F_m$ num espaço de Banach (Em vez desta norma pode-se considerar uma outra norma qualquer equivalente, por exemplo $\sup|y_i|$ ou $\sum |y_i|$). O símbolo $\mathcal{L}(F_1, \ldots, F_m; G)$ denota o $\mathbb{K}-$ espaço vetorial das aplicações m-lineares contínuas de $F_1 \times \ldots \times F_m$ em G. Este espaço é de Banach em relação à norma

$$| \cdot |_m : A \in \mathcal{L}(F_1, \ldots, F_m; G) \mapsto \sup_{\substack{|y_i|=1, \\ 1 \leq i \leq m}} |A(y_1, \ldots, y_m)| \in \mathbb{R}_+$$

No caso particular $F_1 = \cdots = F_m = F$ o espaço $\mathcal{L}(F_1, \ldots, F_m; G)$ é denotado com $\mathcal{L}(^m F; G)$, se $m \geq 1$ e $\mathcal{L}(^0 F; G) =: G$.

Fixado $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{N}^{*m}$, se $p := |\alpha|$,

$$\alpha(1) := 0 \quad \text{e} \quad \alpha(j) := \alpha_1 + \ldots + \alpha_{j-1} \quad , \quad (2 \leq j \leq m+1),$$

todo $x = (x_1, \ldots, x_p)$ em $E^p = E^{\alpha_1} \times \ldots \times E^{\alpha_m}$ se escreve na forma

$$x = (x\alpha_1, x\alpha_2, \ldots, x\alpha_m) \in E^{\alpha_1} \times E^{\alpha_2} \times \ldots \times E^{\alpha_m},$$

onde $x\alpha_j := (x_{\alpha(j)+1}, x_{\alpha(j)+2}, \ldots, x_{\alpha(j+1)})$, $(1 \leq j \leq m)$. Dadas

$$B \in \mathcal{L}(F_1, \ldots, F_m; G) \quad \text{e} \quad A_j \in \mathcal{L}(^{\alpha_j} E; F_j), \quad (1 \leq j \leq m),$$

considerando a aplicação p-linear contínua

[1.1.1] $$BA_1 \ldots A_m : (x_1, \ldots, x_p) \in E^p \mapsto B(A_1(x\alpha_1), \ldots, A_m(x\alpha_m)) \in G,$$

define-se uma aplicação $(m+1)$-linear contínua

[1.1.2] $$T : \quad (B, A_1, \ldots, A_m) \mapsto BA_1 \ldots A_m$$

de $\mathcal{L}(F_1, \ldots, F_m; G) \times \mathcal{L}(^{\alpha_1}E; F_1) \times \ldots \times \mathcal{L}(^{\alpha_m}E; F_m)$ em $\mathcal{L}(^pE; G)$.

Dados $n \in \mathbb{N}^*$ e $\sigma \in \mathcal{O}_n$ consideremos o isomorfismo linear

[1.1.3] $$\mathcal{J}_\sigma^n : (x_1, \ldots, x_n) \in E^n \mapsto (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) \in E^n.$$

Observar que a função inversa de $\mathcal{J}_\sigma^n$ verifica : $(\mathcal{J}_\sigma^n)^{-1} = \mathcal{J}_{\sigma^{-1}}^n$.

Dada $\sigma \in \mathcal{O}_p$, seja $BA_1 \ldots A_m \mathcal{J}_\sigma^p \in \mathcal{L}(^pE; G)$ definida por

[1.1.4] $$BA_1 \ldots A_m \mathcal{J}_\sigma^p := (BA_1 \ldots A_m) \circ \mathcal{J}_\sigma^p;$$

isto é, por [1.1.1] e [1.1.3], é a aplicação p-linear contínua

$$(x_1, \ldots, x_p) \in E^p \mapsto B(A_1(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(\alpha_1)}), \ldots, A_m(x_{\sigma(\alpha(m)+1)}, \ldots, x_{\sigma(p)})) \in G.$$

Usando as notações precedentes temos os dois lemas seguintes.

Lema 1.1.1: Dadas $B, B' \in \mathcal{L}(F_1, \ldots, F_m; G)$ e $A_j, A'_j \in \mathcal{L}(^{\alpha_j}E; F_j), 1 \leq j \leq m$, a aplicação

$$D := BA_1 \ldots A_m - B'A'_1 \ldots A'_m,$$

pode ser escrita na forma

$$D = (B - B')A_1 \ldots A_m + \sum_{i=1}^{m} B'A_1 \ldots A_{i-1}(A_i - A'_i)A'_{i+1} \ldots A'_m.$$

Prova : Fixado $x = (x_1, \ldots, x_p) \in E^p$, pela definição [1.1.1], introduzindo as notações $a_i := A_i(x\alpha_i)$ e $b_i := A'_i(x\alpha_i), 1 \leq i \leq m$, tem-se

$$D(x) = (B - B')(a_1, \ldots, a_m) + B'(a_1, \ldots, a_m) - B'(b_1, \ldots, b_m).$$

A diferença $d := B'(a_1, \dots, a_m) - B'(b_1, \dots, b_m)$ pode ser escrita na forma

$$d = \sum_{i=1}^{m} B'(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, b_{i+1}, \dots, b_m) - B'(a_1, \dots, a_{i-1}, b_i, b_{i+1}, \dots, b_m).$$

Usando o fato de B' ser m-linear e levando a expressão resultante de d em $D(x)$ obtém-se

$$D(x) = (B - B')(a_1, \dots, a_m) + \sum_{i=1}^{m} B'(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i - b_i, b_{i+1}, \dots, b_m);$$

donde, substituindo os valores de a_i e b_i, segue

$$\begin{aligned} D(x) = {} & (B - B')(A_1(x\alpha_1), \dots, A_m(x\alpha_m)) + \\ & + \sum_{i=1}^{m} B'(A_1(x\alpha_1), \dots, (A_i - A_i')(x\alpha_i), \dots, A_m'(x\alpha_m)), \end{aligned}$$

o que, por [1.1.1], prova a afirmação .

■

Lema 1.1.2 : Sejam $k, n \in \mathbb{N}^*, \sigma \in \mathcal{O}_n$ e $\varphi \in C^k(\Omega; \mathcal{L}(^n E; G))$. Então, a função

$$\varphi \mathcal{J}_\sigma^n : x \in \Omega \mapsto \varphi(x) \circ \mathcal{J}_\sigma^n \in \mathcal{L}(^n E; G)$$

é de classe C^k e, para cada $p = 1, \dots, k$, existe $\tau \in \mathcal{O}_{n+p}$ satisfazendo

$$(\varphi \mathcal{J}_\sigma^n)^{(p)}(x) = \varphi^{(p)}(x) \circ \mathcal{J}_\tau^{n+p} \quad \text{em} \quad E^{n+p}, \ (x \in \Omega),$$

onde $(\varphi \mathcal{J}_\sigma^n)^{(p)}(x), \varphi^{(p)}(x) \in \mathcal{L}(^{n+p}E; G)(= \mathcal{L}(^p E; \mathcal{L}(^n E; G)))$.

Prova : Procedemos por indução sobre p e é claro que basta verificar o caso $p = 1$. Fixado $x_0 \in \Omega$, denotando com $u := \varphi'(x_0) \in \mathcal{L}(E; \mathcal{L}(^n E; G))$, por hipótese, temos

(1.1.2.1) $$|\varphi(x) - \varphi(x_0) - u(x - x_0)|_n = o(|x - x_0|).$$

Considerando a função $v \in \mathcal{L}(E; \mathcal{L}(^n E; G))$ definida por $v(h) := u(h) \circ \mathcal{J}_\sigma^n, (h \in E)$, afirmamos

(1.1.2.2) $$|\psi(x) - \psi(x_0) - v(x - x_0)|_n = o(|x - x_0|),$$

(e portanto $v = \psi'(x_0)$), onde $\psi := \varphi \mathcal{J}^n_\sigma$. Ora, como

$$\psi(x) - \psi(x_0) - v(x - x_0) = [\varphi(x) - \varphi(x_0) - u(x - x_0)] \circ \mathcal{J}^n_\sigma$$

e E^n está munido da norma euclidiana é claro que

$$|\psi(x) - \psi(x_0) - v(x - x_0)|_n \leq \sqrt{n}|\varphi(x) - \varphi(x_0) - u(x - x_0)|_n$$

e então a condição (1.1.2.1) implica (1.1.2.2). Por outro lado, identificando $w = u, v$ com a aplicação $(n+1)$-linear

$$(h_1, \ldots, h_n, h_{n+1}) \in E^{n+1} \mapsto w(h_{n+1}).(h_1, \ldots, h_n) \in G$$

pelas definições de v e $\mathcal{J}^n_\sigma$ temos

$$v(h_1, \ldots, h_{n+1}) = (u(h_{n+1}) \circ \mathcal{J}^n_\sigma)(h_1, \ldots, h_n) = u(h_{\sigma(1)}, \ldots, h_{\sigma(n)}, h_{n+1})$$

donde, escolhendo $\tau \in \mathcal{O}_{n+1}$ como sendo a função definida por

$$\tau(i) := \sigma(i), \quad \text{para} \quad 1 \leq i \leq n, \quad \text{e} \quad \tau(n+1) := n+1,$$

segue $\psi'(x_0) = \varphi'(x_0) \circ \mathcal{J}^{n+1}_\tau$ em E^{n+1}.

■

A Fórmula de Leibnitz

Consideremos o caso $m = 2$ em [1.1.1] e seja $B : (y_1, y_2) \in F_1 \times F_2 \mapsto y_1 y_2 \in G$ uma aplicação bilinear contínua (i.é , $B \in \mathcal{L}(F_1, F_2; G)$. Dadas $A_1 \in ({}^pE; F_1)$ e $A_2 \in ({}^qE; F_2)$, com $p, q \in \mathbb{N}$, a aplicação $A_1 A_2 := B A_1 A_2 \in \mathcal{L}({}^{p+q}E; G)$ é definida por

[1.1.5] $$A_1 A_2 : (x_1, x_2) \in E^p \times E^q \mapsto A_1(x_1) A_2(x_2) \in G.$$

Dois casos particulares desta aplicação são considerados a seguir. Dados $A_1 \in \mathcal{L}(E; F_1)$ e $y_2 \in F_2 (= \mathcal{L}({}^0E; F_2))$, a aplicação $A_1 y_2 \in \mathcal{L}(E; G)$ é definida por

[1.1.6] $$A_1 y_2 : x \in E \mapsto (A_1(x)) y_2 \in G.$$

De modo análogo, para $y_1 \in F_1$ e $A_2 \in \mathcal{L}(E; F_2)$, a aplicação $y_1 A_2 \in \mathcal{L}(E; G)$ é dada por

[1.1.7] $$y_1 A_1 : x \in E \mapsto y_1(A_2(x)) \in G.$$

Com as notações precedentes a fórmula generalizada para a derivada do "produto" B é dada pelo resultado seguinte.

Proposição 1.1.3 : Sejam $B : (y_1, y_2) \in F_1 \times F_2 \mapsto y_1 y_2 \in G$ uma aplicação bilinear contínua, $f \in C^k(\Omega; F_1), g \in C^k(\Omega; F_2)$ e $(f, g) : x \in \Omega \mapsto (f(x), g(x)) \in F_1 \times F_2$.Então , a função

$$fg := B \circ (f, g) : x \in \Omega \mapsto f(x)g(x) \in G,$$

é de classe C^k e, para cada $p = 1, \ldots, k$, temos

$$(fg)^{(p)}(x) = \sum_{q=0}^{p} \binom{p}{q} f^{(q)}(x) g^{(p-q)}(x), \quad (x \in \Omega),$$

onde o produto em cada parcela é no sentido de [1.1.5].

Prova : No caso p = 1 temos

(1.1.3.1) $$(fg)'(x) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x), \quad (x \in \Omega).$$

De fato, pela regra da cadeia temos $(fg)'(x) = B'(f(x), g(x)) \circ (f, g)'(x)$; donde, como $(f, g)'(x) = (f'(x), g'(x))$ e $B'(y_1, y_2).(k_1, k_2) = B(y_1, k_2) + B(k_1, y_2)$, $(y_i, k_i \in F_i$, i = 1, 2), pela definição de B segue $(fg)'(x).h = (f'(x).h)g(x) + f(x)(g'(x).h), (h \in E)$. Logo, por [1.1.6] e [1.1.7] temos $(fg)'(x).h = (f'(x)g(x)).h + (f(x)g'(x)).h, (h \in E)$, o que prova (1.1.3.1). No caso $p > 1$ o resultado segue por indução .

∎

Com as notações dadas anteriormente vale o resultado seguinte.

Proposição 1.1.4 (Cfr. [F]): Sejam $k \in \mathbb{N}^*, \Omega'$ um aberto de $F, f \in C^k(\Omega; F)$, com $f(\Omega) \subset \Omega'$, e $g \in C^k(\Omega'; G)$. Então , $g \circ f \in C^k(\Omega; G)$ e, para cada $x \in \Omega$ e cada

$p = 1, , ..., k$, temos

$$(1.1.4.1) \qquad (g \circ f)^{(p)}(x) = \sum_{\substack{1 \le m \le p \\ \alpha \in [p;m]}} \frac{1}{\alpha! m!} \sum_{\sigma \in \mathcal{O}_p} g^{(m)}(f(x)) f^{(\alpha_1)}(x) \cdots f^{(\alpha_m)}(x) \mathcal{J}_\sigma^p,$$

onde o produto em cada parcela é no sentido de [1.1.4] e

$$[p; m] := \{\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{N}^{*m} \quad | \quad |\alpha| = p\}.$$

No caso $E = F = \mathbb{R}$, usando a identificação $\mathcal{L}(^n\mathbb{R}; G) = G, (n \in \mathbb{N})$, temos a fórmula correspondente

$$(1.1.4.2) \qquad (g \circ f)^{(p)}(x) = \sum_{\substack{1 \le m \le p \\ \alpha \in [p;m]}} \frac{p!}{\alpha! m!} f^{(\alpha_1)}(x) \cdots f^{(\alpha_m)}(x) g^{(m)}(f(x)) \in G.$$

■

1.2 – A Álgebra das Funções Generalizadas

Dado $k \in \mathbb{N}$, denotamos com $\mathcal{E}[\Omega; \mathcal{L}(^k E; F)]$ o $\mathbb{K}$–espaco vetorial de todas as funções u de $]0,1] \times \Omega$ em $\mathcal{L}(^k E; F)$ tais que a função parcial $u(\varepsilon, \cdot) : x \in \Omega \mapsto u(\varepsilon, x) \in \mathcal{L}(^k E; F)$ é de classe C^∞, para cada $\varepsilon \in]0,1]$. Se F for uma álgebra de Banach, com o produto usual de funções , $\mathcal{E}[\Omega; F] = \mathcal{E}[\Omega; \mathcal{L}(^\circ E; F)]$ é uma $\mathbb{K}$-álgebra. Se $p \in \mathbb{N}$ e $u \in \mathcal{E}[\Omega; \mathcal{L}(^k E; F)]$, a função $u^{(p)} \in \mathcal{E}[\Omega; \mathcal{L}(^p E; \mathcal{L}(^k E; F))]$ é definida por

$$u^{(p)}(\varepsilon, x) := [u(\varepsilon, .)]^{(p)}(x), \quad ((\varepsilon, x) \in]0,1] \times \Omega),$$

o que define uma aplicação $\mathbb{K}$–linear

$$[1.2.1] \qquad d^p : u \in \mathcal{E}[\Omega; \mathcal{L}(^k E; F)] \mapsto d^p u := u^{(p)} \in \mathcal{E}[\Omega; \mathcal{L}(^p E; \mathcal{L}(^k E; F))]$$

ou, pela identificação $\mathcal{L}(^p E; \mathcal{L}(^k E; F)) = \mathcal{L}(^{k+p} E; F)$,

$$d^p : u \in \mathcal{E}[\Omega; \mathcal{L}(^k E; F)] \mapsto u^{(p)} \in \mathcal{E}[\Omega; \mathcal{L}(^{k+p} E; F)].$$

Observar que, para $q \in \mathbb{N}$, $\quad d^q \circ d^p = d^{p+q}$; isto é

$$d^q \circ d^p : u \in \mathcal{E}[\Omega; \mathcal{L}(^k E; F)] \mapsto [u^{(p)}]^{(q)} = u^{(p+q)} \in \mathcal{E}[\Omega; \mathcal{L}(^{k+p+q} E; F)],$$

o que decorre da relação $[u^{(p)}(\varepsilon, \cdot)]^{(q)} = u^{(p+q)}(\varepsilon, \cdot), (\varepsilon \in]0,1])$.

Supondo que F é uma álgebra de Banach, dados $p, q \in \mathbb{N}, u :]0,1] \times \Omega \to \mathcal{L}(^p E; F)$ e $v :]0,1] \times \Omega \to \mathcal{L}(^q E; F)$, consideremos a função

[1.2.2] $$uv : (\varepsilon, x) \in]0,1] \times \Omega \mapsto u(\varepsilon, x) v(\varepsilon, x) \in \mathcal{L}(^{p+q} E; F),$$

onde o produto $u(\varepsilon, x) v(\varepsilon, x)$ é no sentido de [1.1.5], sendo

$$B : (y_1, y_2) \in F \times F \mapsto y_1 y_2 \in F$$

o produto defindo em F.

Proposição 1.2.1 : Sejam $p, q \in \mathbb{N}, u \in \mathcal{E}[\Omega; \mathcal{L}(^p E; F)]$ e $v \in \mathcal{E}[\Omega; \mathcal{L}(^q E; F)]$. Então , se F for uma álgebra de Banach, $uv \in \mathcal{E}[\Omega; \mathcal{L}(^{p+q} E; F)]$ e, para cada $k \in \mathbb{N}^*$, temos

$$(uv)^{(k)} = \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} u^{(l)} v^{(k-l)} \quad \text{em }]0,1] \times \Omega,$$

onde o produto em cada parcela é no sentido de [1.2.2].

Prova : Sendo F uma álgebra de Banach, o produto em F é bilinear e contínua; em consequência a aplicação definida em [1.1.1] (Ver [1.1.5]):

$$T : (A_1, A_2) \in \mathcal{L}(^p E; F) \times \mathcal{L}(^q E; F) \mapsto A_1 A_2 \in \mathcal{L}(^{p+q} E; F)$$

é também bilinear e contínua. O resultado segue então da Proposição 1.1.3, com $F_1 = \mathcal{L}(^p E; F), F_2 = \mathcal{L}(^q E; F), G = \mathcal{L}(^{p+q} E; F), B = T, f = u(\varepsilon, \cdot)$ e $g = v(\varepsilon, \cdot), (\varepsilon \in]0,1])$. ∎

Lembremos que, dados $p, k \in \mathbb{N}$ e $w \in \mathcal{L}(^pE; \mathcal{L}(^kE; F))$, pela identificação $\mathcal{L}(^pE; \mathcal{L}(^kE; F) = \mathcal{L}(^{k+p}E; F)$, que preserva normas, temos

$$[1.2.3] \qquad |w|_p = \sup_{\substack{|x_i| \leq 1 \\ 1 \leq i \leq p}} |w(x)|_k = \sup_{\substack{|x_i| \leq 1 \; |y_j| \leq 1, \\ 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq k}} |w(x, y)| = |w|_{k+p} \; ,$$

com $x = (x_1, \ldots, x_p) \in E^p$ e $y = (y_1, \ldots, y_k) \in E^k$, onde $| \cdot |_\ell$ indica a norma natural de $\mathcal{L}(^\ell E; F), \ell = p, k + p$.

Dado $k \in \mathbb{N}$, indicamos com $\mathcal{E}_M[\Omega; \mathcal{L}(^kE; F)]$ o conjunto de todos os elementos $u \in \mathcal{E}[\Omega; \mathcal{L}(^kE; F)]$ tais que, para cada $K \subset\subset \Omega$ e para cada $p \in \mathbb{N}$, existem $N \in \mathbb{N}, C > 0$ e $\eta \in]0, 1]$ (dependendo de K e p) satisfazendo a condição seguinte

$$\sup_{x \in K} |u^{(p)}(\varepsilon, x)|_{k+p} \leq C\varepsilon^{-N}, \quad (0 < \varepsilon < \eta).$$

Os elementos de $\mathcal{E}_M[\Omega; \mathcal{L}(^kE; F)]$ são chamados *aplicações moderadas em Ω a valores em $\mathcal{L}(^kE; F)$*.

Denotamos com $\mathcal{N}[\Omega; \mathcal{L}(^kE; F)]$ o conjunto de todos os elementos $u \in \mathcal{E}[\Omega; \mathcal{L}(^kE; F)]$ tais que, para cada $K \subset\subset \Omega$ e cada $p, q \in \mathbb{N}$, existem $C > 0$ e $\eta \in]0, 1]$ (dependendo de K, p e q) satisfazendo a condição seguinte

$$\sup_{x \in K} |u^{(p)}(\varepsilon, x)|_{k+p} \leq C\varepsilon^q, \qquad (0 < \varepsilon < \eta).$$

Os elementos de $\mathcal{N}[\Omega; \mathcal{L}(^kE; F)]$ são chamados *aplicações nulas em Ω a valores em $\mathcal{L}(^kE; F)$*.

Existe uma definição equivalente de $\mathcal{N}[\Omega; F] = \mathcal{N}[\Omega; \mathcal{L}(^\circ E; F)]$ considerado, por exemplo, em [A] e [A−B] (o que não será usado no presente trabalho). Mais precisamente, se Γ denota o conjunto de todas as funções $\gamma : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+^*$ que são estritamente crescentes tais que $\gamma(q) \to +\infty, q \to +\infty$, é válida a asserção seguinte.

Observação : Dada $u \in \mathcal{E}[\Omega; F]$, uma condição necessária e suficiente para que $u \in \mathcal{N}[\Omega; F]$ é que, para cada $K \subset\subset \Omega$ e cada $p \in \mathbb{N}$, existam $\gamma \in \Gamma$ e $N \in \mathbb{N}$ de modo que, para cada $q \geq N$, existam $C > 0$ e $\eta \in]0, 1]$ verificando

$$\sup_{x \in K} |u^{(p)}(\varepsilon, x)|_p \leq C\varepsilon^{\gamma(q) - N}, \qquad (0 < \varepsilon < \eta).$$

De fato, fixados $K \subset\subset \Omega$ e $p, m \in \mathbb{N}$, sejam $\gamma \in \Gamma, N \in \mathbb{N}, C > 0$ e $\eta \in]0,1]$ verificando a desigualdade anterior. Como $\gamma(q) \to +\infty, q \to +\infty$, existe $q_m \geq N$ tal que $\gamma(q_m) - N \geq m$ e portanto

$$\sup_{x\in K}|u^{(p)}(\varepsilon, x)|_p \leq C_m \varepsilon^{\gamma(q_m)-N} \leq C_m \varepsilon^m, \qquad (0 < \varepsilon < \eta_m),$$

onde C_m e η_m são as constantes associadas a $q = q_m$. A reciproca é evidente.

É claro que $\mathcal{E}_M[\Omega; \mathcal{L}(^kE; F)]$ (resp. $\mathcal{N}[\Omega; \mathcal{L}(^kE; F)]$) é um $\mathbb{K}$–subespaço vetorial de $\mathcal{E}[\Omega; \mathcal{L}(^kE; F)]$ (resp. $\mathcal{E}_M[\Omega; \mathcal{L}(^kE; F)]$) e, se F for uma álgebra de Banach, é imediato verificar, usando a Proposição 1.2.1 (com $p = q = 0$), que $\mathcal{E}_M[\Omega; F] = \mathcal{E}_M[\Omega; \mathcal{L}(^\circ E; F)]$ (resp. $\mathcal{N}[\Omega; F]$) é uma $\mathbb{K}$–subálgebra (resp. um ideal) de $\mathcal{E}[\Omega; F]$ (resp. $\mathcal{E}_M[\Omega; F]$). Desta forma fica justificada a definição seguinte.

Definição 1.2.2 : Dado $k \in \mathbb{N}$, o espaço vetorial das *funções generalizadas em Ω a valores em $\mathcal{L}(^kE; F)$* é o $\mathbb{K}$– espaço vetorial quociente

$$\mathcal{G}(\Omega; \mathcal{L}(^kE; F)) := \frac{\mathcal{E}_M[\Omega; \mathcal{L}(^kE; F)]}{\mathcal{N}[\Omega; \mathcal{L}(^kE; F)]}$$

Se F for uma álgebra de Banach, $\mathcal{G}(\Omega; F) = \mathcal{G}(\Omega; \mathcal{L}(^\circ E; F))$ é uma $\mathbb{K}$ – *álgebra*. Uma *função generalizada em Ω a valores em $\mathcal{L}(^kE; F)$* é qualquer elemento de $\mathcal{G}(\Omega; \mathcal{L}(^kE; F))$.

No que se segue indicamos com $\Theta^k_{\Omega,F}$ a aplicação quociente de $\mathcal{E}_M[\Omega; \mathcal{L}(^kE; F)]$ sobre $\mathcal{G}[\Omega; \mathcal{L}(^kE; F)]$:

$$\Theta^k_{\Omega,F} : u \in \mathcal{E}_M[\Omega; \mathcal{L}(^kE; F)] \mapsto u + \mathcal{N}[\Omega; \mathcal{L}(^kE; F)] \in \mathcal{G}[\Omega; \mathcal{L}(^kE; F)].$$

No caso $k = 0$ escrevemos $\Theta_{\Omega,F} := \Theta^\circ_{\Omega,F}$.

A definição de $\mathcal{G}(\Omega; F)$ é intrinseca pois só depende das estruturas dos espacos E e F.

Proposição 1.2.3 : Para cada $p, q \in \mathbb{N}$ são válidas as afirmações seguintes.

(I) Se $u \in \mathcal{E}_M[\Omega; F]$ (resp. $u \in \mathcal{N}[\Omega; F]$), então $u^{(p)} \in \mathcal{E}_M[\Omega; \mathcal{L}(^pE; F)]$ (resp. $u^{(p)} \in \mathcal{N}[\Omega; \mathcal{L}(^pE; F)]$);

(II) Se F for uma álgebra de Banach, $u \in \mathcal{E}_M[\Omega; \mathcal{L}(^pE; F)]$ e $v \in \mathcal{E}_M[\Omega; \mathcal{L}(^qE; F)]$ (resp. $v \in \mathcal{N}[\Omega; \mathcal{L}(^qE; F)]$), então $uv \in \mathcal{E}_M[\Omega; \mathcal{L}(^{p+q}E; F)]$ (resp. $uv \in \mathcal{N}[\Omega; \mathcal{L}(^{p+q}E; F)]$).

Prova : O item (II) segue diretamente usando a Proposição 1.2.1. Para ver a afirmação (I), sejam $k \in \mathbb{N}$ e $(\varepsilon, x) \in]0,1] \times \Omega$. Como $[u^{(p)}]^{(k)} = u^{(p+k)}$ e $[u^{(p)}]^{(k)}(\varepsilon, x) \in \mathcal{L}(^kE; \mathcal{L}(^pE; F))$ da relação [1.2.3] segue

$$|[u^{(p)}]^{(k)}(\varepsilon, x)|_k = |u^{(p+k)}(\varepsilon, x)|_{p+k} \quad ,$$

o que junto com a moderação (resp. a nulidade) de u implica a moderação (resp. a nulidade) de $u^{(p)}$.

∎

A condição (II) da proposição anterior justifica a definição seguinte.

Definição 1.2.4 : Suponhamos que F seja uma álgebra de Banach. Dados $p, q \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{G}(\Omega; \mathcal{L}(^pE; F))$ e $g \in \mathcal{G}(\Omega; \mathcal{L}(^qE; F))$ definimos a função $fg \in \mathcal{G}(\Omega; \mathcal{L}(^{p+q}E; F))$ como sendo a classe da função $\widehat{f}\widehat{g} \in \mathcal{E}_M[\Omega; \mathcal{L}(^{p+q}E; F)]$ (dada por [1.2.2]), onde $\widehat{f}$ e $\widehat{g}$ são representantes quaisquer de f e g, respectivamente.

No lema seguinte damos condições necessárias e uma condição suficiente para a nulidade de elementos de $\mathcal{E}[\Omega; F]$.

Lema 1.2.5 : (I) Seja $u \in \mathcal{E}[\Omega; F]$ tal que, para cada $K \subset\subset \Omega$, existem $\eta \in]0,1]$ e um aberto V, com $K \subset V \subset \Omega$ e $u = 0$ em $]0, \eta[\times V$. Então , $u \in \mathcal{N}[\Omega; F]$. Se dim $E < +\infty$, para ter $u \in \mathcal{N}[\Omega; F]$ é suficiente que , para cada aberto não vazio V, com $\overline{V} \subset\subset \Omega$, exista $\eta \in]0,1]$ de modo que $u = 0$ em $]0, \eta[\times V$;

(II) Toda $u \in \mathcal{N}[\Omega; F]$ satisfaz as seguintes propriedades.

(a) Se $p \in \mathbb{N}$ e $K \subset\subset \Omega$, então $u^{(p)}(\varepsilon, \cdot) \rightrightarrows 0, \varepsilon \to 0^+$, em K;

(b) Para cada $K \subset\subset \Omega$, existem $C > 0$ e $\eta \in]0,1]$ satisfazendo

$$\sup_{x \in K} |u(\varepsilon, x)| \leq C, \qquad (0 < \varepsilon < \eta),$$

(c) No caso $E = \mathbb{R}^n$ e $F = \mathbb{K}$, temos $u(\varepsilon, \cdot) \to 0$, quando $\varepsilon \to 0^+$, em $\mathcal{D}'(\Omega)$; isto é ,

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} < u(\varepsilon, \cdot), \varphi >= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\Omega u(\varepsilon, x)\varphi(x)dx = 0, \qquad (\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)).$$

Prova : A afirmação (I) é clara. Para a verificação da afirmação (II) basta observar que, pela definição de $\mathcal{N}[\Omega; F]$, dados $K \subset\subset \Omega$ e $p \in \mathbb{N}$, existem $C > 0$ e $\eta \in \ ]0, 1]$ verificando

$$\sup_{x \in K} |u^{(p)}(\varepsilon, x)|_p \leq C\varepsilon, \qquad (0 < \varepsilon < \eta).$$

■

A proposição seguinte nos permite identificar $C^\infty(\Omega; F)$ com um subespaco de $\mathcal{G}(\Omega; F)$ e podemos escrever $C^\infty(\Omega; F) \subset \mathcal{G}(\Omega; F)$.

Proposição 1.2.6 : Para cada $p \in \mathbb{N}$, a aplicação linear injetora

$$f \in C^\infty(\Omega; \mathcal{L}(^pE; F)) \mapsto \tilde{f} \in \mathcal{E}_M[\Omega; \mathcal{L}(^pE; F)],$$

onde $\tilde{f} : (\varepsilon, x) \in \ ]0, 1] \times \Omega \mapsto f(x) \in \mathcal{L}(^pE; F)$, define um $\mathbb{K}-$homomorfismo injetivo natural de espaços vetoriais

$$\jmath^p_{\Omega,F} : f \in C^\infty(\Omega; \mathcal{L}(^pE; F)) \mapsto \tilde{f} + \mathcal{N}[\Omega; \mathcal{L}(^pE; F)] \in \mathcal{G}(\Omega; \mathcal{L}(^pE; F)).$$

Se F for uma álgebra de Banach, a aplicação $\jmath_{\Omega,F} := \jmath^{\circ}_{\Omega,F} : C^\infty(\Omega; F) \to \mathcal{G}(\Omega; F)$ é um homomorfismo de álgebras .

Prova : Ver [A] (Proposição 2.3.4).

■

Neste trabalho, em virtude do resultado anterior, não faremos nenhuma distinção entre $f, \tilde{f}$ *e* $\jmath_{\Omega,F}(f), (f \in C^\infty(\Omega; F))$.

Funções Generalizadas Localmente Limitadas

Definição 1.2.7 : (a) Uma função de $\mathcal{E}[\Omega; F]$ é chamada *localmente limitada* em Ω se ela satisfaz a condição (b) do Lema 1.2.5(II);

(b) Uma função generalizada é chamada *localmente limitada* se ela possui um representante localmente limitado;

(c) Denotamos com $\mathcal{E}_{\ell b}[\Omega; F]$ (resp. $\mathcal{E}_{M,\ell b}[\Omega; F], \mathcal{N}_{\ell b}[\Omega; F]$) o conjunto de todos os elementos de $\mathcal{E}[\Omega; F]$ (resp. $\mathcal{E}_M[\Omega; F], \mathcal{N}[\Omega; F]$) localmente limitados em Ω.

É claro que $\mathcal{E}_{\ell b}[\Omega; F]$ é um subespaço vetorial (resp. uma subálgebra, se F for uma álgebra de Banach) de $\mathcal{E}[\Omega; F]$ e que $\mathcal{N}_{\ell b}[\Omega; F] = \mathcal{N}[\Omega; F]$.

Indicamos com $\mathcal{G}_{\ell b}(\Omega; F)$ o quociente do espaço vetorial $\mathcal{E}_{M,\ell b}[\Omega; F]$ por $\mathcal{N}[\Omega; F]$; isto é

$$\mathcal{G}_{\ell b}(\Omega; F) := \frac{\mathcal{E}_{M,\ell b}[\Omega; F]}{\mathcal{N}[\Omega; F]}$$

Se F for uma álgebra de Banach, $\mathcal{G}_{\ell b}(\Omega; F)$ é uma álgebra.

Lema 1.2.8 : (I) Se $f \in \mathcal{G}_{\ell b}(\Omega; F)$, todo representante de f é localmente limitado em Ω;

(II) Existe um $\mathbb{K}$-homomorfismo injetivo de :

(a) $C^\infty(\Omega; F)$ em $\mathcal{G}_{\ell b}(\Omega; F)$ (b) $\mathcal{G}_{\ell b}(\Omega; F)$ em $\mathcal{G}(\Omega; F)$.

Prova : As afirmações (I) e (II)(a) são claras. Por outro lado, a inclusão de $\mathcal{E}_{M,\ell b}[\Omega; F]$ em $\mathcal{E}_M[\Omega; F]$ determina um único homomorfismo injetivo de $\mathcal{G}_{\ell b}(\Omega; F)$ em $\mathcal{G}(\Omega; F)$ tornando comutativo o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}_{M,\ell b}[\Omega; F] & \longrightarrow & \mathcal{E}_M[\Omega; F] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{G}_{\ell b}(\Omega; F) & \dashrightarrow & \mathcal{G}(\Omega; F) \end{array}$$

■

Em virtude da condição (II) do lema anterior podemos escrever

$$C^\infty(\Omega; F) \subset \mathcal{G}_{\ell b}(\Omega; F) \subset \mathcal{G}(\Omega; F),$$

em consequência $\mathcal{G}_{\ell b}(\Omega; F)$ é o conjunto das funções generalizadas localmente limitadas em Ω.

Derivada Intrínseca de Funções Generalizadas.

Dado $p \in \mathbb{N}$, a Proposoção 1.2.3 mostra que a aplicação [1.2.1] induz uma única aplicação $\mathbb{K}$-linear de $\mathcal{G}(\Omega; F)$ em $\mathcal{G}(\Omega; \mathcal{L}(^pE; F))$, que ainda denotamos com d^p, tornando comutativo o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}_M[\Omega; F] & \xrightarrow{d^p} & \mathcal{E}_M[\Omega; \mathcal{L}(^pE; F)] \\ \downarrow \Theta_{\Omega,F} & & \downarrow \Theta^p_{\Omega,F} \\ \mathcal{G}(\Omega; F) & \overset{d^p}{\dashrightarrow} & \mathcal{G}(\Omega; \mathcal{L}(^pE; F)) \end{array} \tag{1.2.4}$$

o que justifica a definição seguinte.

Definição 1.2.9: Dado $p \in \mathbb{N}$, para cada $f \in \mathcal{G}(\Omega; F)$, o elemento $d^p f \in \mathcal{G}(\Omega; \mathcal{L}(^pE; F))$, denotado também por $f^{(p)}$, é chamado *derivada de ordem p de f*.

A definição anterior significa que se $\widehat{f}$ é um representante de $f \in \mathcal{G}(\Omega; F)$ então , pelo diagrama [1.2.4], $f^{(p)} = d^p(\Theta_{\Omega,F}(\widehat{f})) = \Theta^p_{\Omega,F}(\widehat{f}^{(p)})$; isto é ,

$$f^{(p)} = \widehat{f}^{(p)} + \mathcal{N}[\Omega; \mathcal{L}(^pE; F)].$$

A derivada $f^{(p)}$ de uma função generalizada $f \in \mathcal{G}(\Omega; F)$ coincide com o conceito clássico quando $f \in C^\infty(\Omega; F)$; isto é , a derivação de funções generalizadas é compatível com a inclusão $C^\infty(\Omega; F) \subset \mathcal{G}(\Omega; F)$. Mais precisamente vale o resultado seguinte.

Proposição 1.2.10 : Dado $p \in \mathbb{N}$, o diagrama seguinte é comutativo.

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(\Omega; F) & \xrightarrow{d^p} & C^\infty(\Omega; \mathcal{L}(^pE; F)) \\ \downarrow \jmath_{\Omega,F} & & \downarrow \jmath^p_{\Omega,F} \\ \mathcal{G}(\Omega; F) & \xrightarrow{d^p} & \mathcal{G}(\Omega; \mathcal{L}(^pE; F)) \end{array}$$

Prova : Ver [A] (Proposição 2.3.4)

■

É válida a fórmula de Leibnitz para funções generalizadas.

Proposição 1.2.11 : Suponhamos que F seja uma álgebra de Banach. Para cada $p \in \mathbb{N}^*$ é válida

$$(fg)^{(p)} = \sum_{q=0}^{p} \binom{p}{q} g^{(p)} f^{(p-q)}, \qquad (f, g \in \mathcal{G}(\Omega; F)),$$

onde o produto em cada parcela é no sentido da Definição 1.2.4.

Prova : Segue usando a Proposição 1.2.1 e o diagrama [1.2.4].

■

Restrição de Funções Generalizadas a Abertos Menores

Dados U e V dois abertos de E tais que $\phi \neq U \subset V$, para cada $p \in \mathbb{N}$, temos uma aplicação de restrição (um $\mathbb{K}$–homomorfismo)

$$j_U^{V,p} : u \in \mathcal{E}[V; \mathcal{L}(^pE; F)] \mapsto u\mid_{]0,1]\times U} \in \mathcal{E}[U; \mathcal{L}(^pE; F)]$$

verificando a condição $j_U^{V,p}(X[V; \mathcal{L}(^pE; F)]) \subset X[U; \mathcal{L}(^pE; F)]$, para $X = \mathcal{E}_M, \mathcal{N}$. Em consequência, existe um único $\mathbb{K}$–homomorfismo $J_U^{V,p}$ de $\mathcal{G}(V; \mathcal{L}(^pE; F))$ em $\mathcal{G}(U; \mathcal{L}(^pE; F))$ tornando comutativo o diagrama

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{E}_M[V; \mathcal{L}(^pE; F)] & \xrightarrow{j_U^{V,p}} & \mathcal{E}_M[U; \mathcal{L}(^pE; F)] \\
\downarrow \Theta^p_{V,F} & & \downarrow \Theta^p_{U,F} \\
\mathcal{G}(V; \mathcal{L}(^pE; F)) & \overset{J_U^{V,p}}{\dashrightarrow} & \mathcal{G}(U; \mathcal{L}(^pE; F))
\end{array}$$

Se F for uma álgebra de Banach, as aplicações $j_U^V := j_U^{V,0} : \mathcal{E}[V; F] \to \mathcal{E}[U; F]$ e $J_U^V := J_U^{V,0} : \mathcal{G}(V; F) \to \mathcal{G}(U; F)$ são homomorfismos de álgebras.

Definição 1.2.12 : Sejam U e V dois abertos de E tais que $\phi \neq U \subset V$. Para cada $p \in \mathbb{N}$ e cada $f \in \mathcal{G}(V; \mathcal{L}(^pE; F))$, o elemento $J_U^{V,p}(f) \in \mathcal{G}(U; \mathcal{L}(^pE; F))$ é chamado *restrição* de f a U e é denotado por $f\mid_U$.

Em todo o que se segue, para $f, g \in \mathcal{G}(V; F)$, a expressão $f = g$ em $\mathcal{G}(U; F)$ significa $f\mid_U = g\mid_U$.

Proposição 1.2.13 : Sejam U e V abertos de E tais que $\phi \neq U \subset V$. Então , para cada $p \in \mathbb{N}$, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}(V;F) & \stackrel{d^p}{\longrightarrow} & \mathcal{G}(V;\mathcal{L}(^pE;F)) \\ \downarrow J_U^V & & \downarrow J_U^{V,p} \\ \mathcal{G}(U;F) & \stackrel{d^p}{\longrightarrow} & \mathcal{G}(U;\mathcal{L}(^pE;F)) \end{array}$$

é comutativo; isto é, $f^{(p)} |_U = (f |_U)^{(p)}$, para cada $f \in \mathcal{G}(V;F)$.

Prova : Ver [A] (Proposição 2.4.2).

■

Proposição 1.2.14: Sejam $(\Omega_i)_{i \in I}$ uma familia de abertos não vazios de E cuja reunião é Ω e seja $f \in \mathcal{G}(\Omega;F)$ tal que $f = 0$ em $\mathcal{G}(\Omega_i;F), (i \in I)$. Então , $f = 0$ em $\mathcal{G}(\Omega;F)$.

Prova : Ver [A] (Teorema 2.4.3) ou [A-B] (2.3.2).

■

Seja $f \in \mathcal{G}(\Omega;F)$. Se $(\Omega_i)_{i \in I}$ é a familia de todos os abertos não vazios de Ω tais que $f = 0$ em $\mathcal{G}(\Omega_i;F)$, pela Propssição 1.2.14, resulta que $f = 0$ em $\mathcal{G}(V;F)$, onde $V := \bigcup_{i \in I} \Omega_i$ é o maior aberto de Ω onde f se anula. O conjunto $\Omega \setminus V$ é chamado *suporte* de f e é indicado pela notação supp(f).

Funções Generalizadas com Valores Num Espaço Produto

Sejam $F_1, \ldots, F_m$ espaços de Banach e consideremos o produto $F_1 \times \ldots \times F_m$ munido da norma euclidiana, como em 1.1.

Proposição 1.2.15 : Dadas $u, v \in \mathcal{E}[\Omega; F_1 \times \ldots \times F_m]$, com $w = (w_1, \ldots, w_m), w = u, v$, são válidas as afirmações seguintes

(I) $u \in X[\Omega; F_1 \times \ldots \times F_m]$ se e só se $u_i \in X[\Omega; F_i], 1 \leq i \leq m; X = \mathcal{E}, \mathcal{E}_M, \mathcal{N}$;

(II) $u - v \in \mathcal{N}[\Omega; F_1 \times \ldots \times F_m]$ se e só se $u_i - v_i \in \mathcal{N}[\Omega; F_i], 1 \leq i \leq m$.

Prova : Sejam $p \in \mathbb{N}$ e $(\varepsilon, x) \in]0,1] \times \Omega$. Como

$$u^{(p)}(\varepsilon, x) = (u_1^{(p)}(\varepsilon, x), \ldots, u_m^{(p)}(\varepsilon, x))$$

(onde $\mathcal{L}(^pE; F_1 \times \ldots \times F_m)$ é identificado com o produto dos espaços $\mathcal{L}(^pE; F_i), 1 \leq i \leq m$)

são válidas as seguintes condições

$$|u^{(p)}(\varepsilon, x)|_p^2 \leq \sum_{i=1}^{m} |u_i^{(p)}(\varepsilon, x)|_p^2 \text{ e } |u_i^{(p)}(\varepsilon, x)|_p \leq |u^{(p)}(\varepsilon, x)|_p, (1 \leq i \leq m).$$

Usando essas desigualdades segue a afirmação (I), para $X = \mathcal{E}_M, \mathcal{N}$. A asserção (II) segue de (I).

■

A proposição anterior nos permite dar a definição seguinte.

Definição 1.2.16 : Dadas $f_i \in \mathcal{G}(\Omega; F_i), 1 \leq i \leq m$, definimos a função $(f_1, \ldots, f_m) \in \mathcal{G}(\Omega; F_1 \times \ldots \times F_m)$ como sendo

$$(f_1, \ldots, f_m) := (\widehat{f}_1, \ldots, \widehat{f}_m) + \mathcal{N}[\Omega; F_1 \times \ldots \times F_m],$$

onde $(\widehat{f}_1, \ldots, \widehat{f}_m) : (\varepsilon, x) \in]0,1] \times \Omega \mapsto (\widehat{f}_1(\varepsilon, x), \ldots, \widehat{f}_m(\varepsilon, x)) \in F_1 \times \ldots \times F_m$ e $\widehat{f}_i$ é um representante qualquer de f_i.

Caracterização de Funções Generalizadas em Termos de Derivadas Parciais no Caso $E = \mathbb{R}^n$.

A definição de $\mathcal{G}(\Omega; F)$ (Ver Definição 1.2.2) é intrínseca e, na prática, não é muito manejável. Daremos uma caracterização das funções moderadas e nulas em termos das derivadas parciais. Para tanto o resultado seguinte é útil.

Proposição 1.2.17 (Cfr. [D], (8.12.7)): Sejam U um aberto de $\mathbb{K}^n$ e $f \in C^k(U; F)$. Então , para $p = 1, ..., k$, temos

(1.2.17.1) $$f^{(p)}(x) \cdot (h_1, \ldots, h_p) = \sum_{j_1, \ldots, j_p = 1}^{n} h_{1j_1} h_{2j_2} \ldots h_{pj_p} D_{j_1} D_{j_2} \ldots D_{j_p} f(x) \in F,$$

para cada $x \in U$ e $h_i = (h_{i1}, \ldots, h_{in}) \in \mathbb{K}^n$, $(1 \leq i \leq p)$, onde $D_k := \partial / \partial x_k, (1 \leq k \leq n)$.

■

Proposição 1.2.13 : Sejam U e V abertos de E tais que $\phi \neq U \subset V$. Então , para cada $p \in \mathbb{N}$, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}(V;F) & \xrightarrow{d^p} & \mathcal{G}(V;\mathcal{L}(^pE;F)) \\ \downarrow J_U^V & & \downarrow J_U^{V,p} \\ \mathcal{G}(U;F) & \xrightarrow{d^p} & \mathcal{G}(U;\mathcal{L}(^pE;F)) \end{array}$$

é comutativo; isto é, $f^{(p)} |_U = (f |_U)^{(p)}$, para cada $f \in \mathcal{G}(V;F)$.

Prova : Ver [A] (Proposição 2.4.2).

∎

Proposição 1.2.14: Sejam $(\Omega_i)_{i\in I}$ uma familia de abertos não vazios de E cuja reunião é Ω e seja $f \in \mathcal{G}(\Omega;F)$ tal que $f = 0$ em $\mathcal{G}(\Omega_i;F), (i \in I)$. Então , $f = 0$ em $\mathcal{G}(\Omega;F)$.

Prova : Ver [A] (Teorema 2.4.3) ou [A-B] (2.3.2).

∎

Seja $f \in \mathcal{G}(\Omega;F)$. Se $(\Omega_i)_{i\in I}$ é a familia de todos os abertos não vazios de Ω tais que $f = 0$ em $\mathcal{G}(\Omega_i;F)$, pela Propssição 1.2.14, resulta que $f = 0$ em $\mathcal{G}(V;F)$, onde $V := \bigcup_{i\in I}\Omega_i$ é o maior aberto de Ω onde f se anula. O conjunto $\Omega \setminus V$ é chamado *suporte* de f e é indicado pela notação supp(f).

Funções Generalizadas com Valores Num Espaço Produto

Sejam $F_1, \ldots, F_m$ espaços de Banach e consideremos o produto $F_1 \times \ldots \times F_m$ munido da norma euclidiana, como em 1.1.

Proposição 1.2.15 : Dadas $u, v \in \mathcal{E}[\Omega; F_1 \times \ldots \times F_m]$, com $w = (w_1, \ldots, w_m), w = u, v$, são válidas as afirmações seguintes

(I) $u \in X[\Omega; F_1 \times \ldots \times F_m]$ se e só se $u_i \in X[\Omega; F_i], 1 \leq i \leq m; X = \mathcal{E}, \mathcal{E}_M, \mathcal{N}$;

(II) $u - v \in \mathcal{N}[\Omega; F_1 \times \ldots \times F_m]$ se e só se $u_i - v_i \in \mathcal{N}[\Omega; F_i], 1 \leq i \leq m$.

Prova : Sejam $p \in \mathbb{N}$ e $(\varepsilon, x) \in]0,1] \times \Omega$. Como

$$u^{(p)}(\varepsilon, x) = (u_1^{(p)}(\varepsilon, x), \ldots, u_m^{(p)}(\varepsilon, x))$$

(onde $\mathcal{L}(^pE; F_1 \times \ldots \times F_m)$ é identificado com o produto dos espacos $\mathcal{L}(^pE; F_i), 1 \leq i \leq m$)

são válidas as seguintes condições

$$|u^{(p)}(\varepsilon, x)|_p^2 \leq \sum_{i=1}^{m} |u_i^{(p)}(\varepsilon, x)|_p^2 \text{ e } |u_i^{(p)}(\varepsilon, x)|_p \leq |u^{(p)}(\varepsilon, x)|_p, (1 \leq i \leq m).$$

Usando essas desigualdades segue a afirmação (I), para $X = \mathcal{E}_M, \mathcal{N}$. A asserção (II) segue de (I).

■

A proposição anterior nos permite dar a definição seguinte.

Definição 1.2.16 : Dadas $f_i \in \mathcal{G}(\Omega; F_i), 1 \leq i \leq m$, definimos a função $(f_1, \ldots, f_m) \in \mathcal{G}(\Omega; F_1 \times \ldots \times F_m)$ como sendo

$$(f_1, \ldots, f_m) := (\widehat{f}_1, \ldots, \widehat{f}_m) + \mathcal{N}[\Omega; F_1 \times \ldots \times F_m],$$

onde $(\widehat{f}_1, \ldots, \widehat{f}_m) : (\varepsilon, x) \in]0, 1] \times \Omega \mapsto (\widehat{f}_1(\varepsilon, x), \ldots, \widehat{f}_m(\varepsilon, x)) \in F_1 \times \ldots \times F_m$ e $\widehat{f}_i$ é um representante qualquer de f_i.

Caracterização de Funções Generalizadas em Termos de Derivadas Parciais no Caso $E = \mathbb{R}^n$.

A definição de $\mathcal{G}(\Omega; F)$ (Ver Definição 1.2.2) é intrínseca e, na prática, não é muito manejável. Daremos uma caracterização das funções moderadas e nulas em termos das derivadas parciais. Para tanto o resultado seguinte é útil.

Proposição 1.2.17 (Cfr. [D], (8.12.7)): Sejam U um aberto de $\mathbb{K}^n$ e $f \in C^k(U; F)$. Então , para $p = 1, ..., k$, temos

$$(1.2.17.1) \qquad f^{(p)}(x) \cdot (h_1, \ldots, h_p) = \sum_{j_1, \ldots, j_p = 1}^{n} h_{1j_1} h_{2j_2} \ldots h_{pj_p} D_{j_1} D_{j_2} \ldots D_{j_p} f(x) \in F,$$

para cada $x \in U$ e $h_i = (h_{i1}, \ldots, h_{in}) \in \mathbb{K}^n$, $(1 \leq i \leq p)$, onde $D_k := \partial / \partial x_k, (1 \leq k \leq n)$.

■

Sejam $(e_j)_{1\leq j\leq n}$ a base canônica de $\mathbb{R}^n, \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ e $p := |\alpha|$. Para facilitar os cálculos consideremos $(e(\alpha_1), \dots, e(\alpha_n)) \in (\mathbb{R}^n)^p$, onde

$$e(\alpha_j) := (e_j, \dots, e_j) \in (\mathbb{R}^n)^{\alpha_j}, (1 \leq j \leq n).$$

Como consequência da proposição precedente obtemos uma fórmula importante.

Corolário 1.2.18 : Se $f \in C^k(\Omega; F)$, para cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$, com $p := |\alpha| \leq k$, temos

(1.2.18.1)
$$f^{(p)}(x) \cdot (e(\alpha_1), \dots, e(\alpha_n)) = \partial^\alpha f(x) \in F, \ \ (x \in \Omega).$$

■

Dado $\alpha \in \mathbb{N}^n$ consideremos a aplicação $\mathbb{K}$–linear

$$\partial^\alpha : u \in \mathcal{E}[\Omega; F] \mapsto \partial^\alpha u \in \mathcal{E}[\Omega; F],$$

onde $\partial^\alpha u : (\varepsilon, x) \in]0,1] \times \Omega \mapsto \partial^\alpha u(\varepsilon, x) := [\partial^\alpha u(\varepsilon, \cdot)](x) \in F$.

Para comodidade do leitor demonstraremos a proposição seguinte. A prova, essencialmente é a mesma apresentada em [A] (Proposição 2.2.1 e Proposição 7.1.4) e [A-B] ((2.1.5)).

Proposição 1.2.19 : Para cada $u \in \mathcal{E}[\Omega; F]$ são válidas as asserções seguintes.

(I) $u \in \mathcal{E}_M[\Omega; F]$ se e só se, para cada $K \subset\subset \Omega$ e cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$, existem $N \in \mathbb{N}, C > 0$ e $\eta \in]0,1]$ satisfazendo

$$\sup_{x\in K}|\partial^\alpha u(\varepsilon, x)| \leq C\varepsilon^{-N}, \qquad (0 < \varepsilon < \eta).$$

(II) $u \in \mathcal{N}[\Omega; F]$ se e só se, para cada $K \subset\subset \Omega$ e cada $p, q \in \mathbb{N}$, existem $C > 0$ e $\eta \in]0,1]$ satisfazendo

$$\sup_{x\in K}|\partial^\alpha u(\varepsilon, x)| \leq C\varepsilon^{q}, \qquad (0 < \varepsilon < \eta).$$

Prova : No caso (II) o argumento é o mesmo usado para demonstrar (I). Supondo que $u \in \mathcal{E}_M[\Omega; F]$, sejam $K \subset\subset \Omega, \alpha \in \mathbb{N}^n$ e $p := |\alpha|$. Existem então $N \in \mathbb{N}, C > 0$ e $\eta \in]0,1]$ satisfazendo a condição

$$\sup_{x\in K}|u^{(p)}(\varepsilon, x)|_p \leq C\varepsilon^{-N}, \qquad (0 < \varepsilon < \eta).$$

Da fórmula (1.2.18.1) segue $|\partial^\alpha u| \le |u^{(p)}|_p$ em $]0,1] \times \Omega$, o que junto com a condição anterior implica a desigualdade em (I). Para verificar a recíproca sejam $K \subset\subset \Omega$ e $p \in \mathbb{N}$. Da fórmula (1.2.18.2) segue

$$|u^{(p)}|_p \le \sum_{j_1,\dots,j_p=1}^{n} |D_{j_1},\dots,D_{j_p}u|, \quad \text{em} \quad]0,1] \times \Omega.$$

Usando a condição necessária podemos achar $N \in \mathbb{N}, C > 0$ e $\eta \in]0,1]$ de modo que

$$\sup_{x\in K} |\partial^\alpha u(\varepsilon, x)| \le C\varepsilon^{-N}, \qquad (0 < \varepsilon < \eta, |\alpha| = p).$$

Como as familias $(\partial^\alpha)_{|\alpha|=p}$ e $(D_{j_1},\dots,D_{j_p})_{1\le j_1,\dots,j_p\le n}$ são coincidentes, das desigualdades acima segue

$$\sup_{x\in K} |u^{(p)}(\varepsilon, x)|_p \le n^p \varepsilon^{-N}, \qquad (0 < \varepsilon < \eta).$$

■

É claro que $\partial^\alpha(X[\Omega; F]) \subset X[\Omega; F]$, para $X = \mathcal{E}_M, \mathcal{N}$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$, o que por passagem ao quociente determina uma aplicação $\mathbb{K}$–linear de $\mathcal{G}(\Omega; F)$ em $\mathcal{G}(\Omega; F)$, ainda denotado por ∂^α, o que justifica a definição seguinte.

Definição 1.2.20 : Dados $\alpha \in \mathbb{N}^n$ e $f \in \mathcal{G}(\Omega; F)$, chama-se *derivada parcial de ordem* α de f o elemento $\partial^\alpha f$ em $\mathcal{G}(\Omega; F)$.

A definição anterior significa que

$$\partial^\alpha f = \partial^\alpha \widehat{f} + \mathcal{N}[\Omega; F],$$

onde $\widehat{f}$ é um representante qualquer de f.

A proposição seguinte fornece exemplos de funções generalizadas em $\mathbb{R}^n$ a valores em $F = \mathbb{K}$.

Proposição 1.2.21 : Dada $\xi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, a função moderada

(1.2.21.1) $$\widehat{\delta}_\xi : (\varepsilon, x) \in]0,1] \times \mathbb{R}^n \mapsto \widehat{\delta}_\xi(\varepsilon, x) := \varepsilon^{-n}\xi(\varepsilon^{-1}x) \in \mathbb{K}$$

verifica as seguintes propriedades.

(1) Se $\xi(0) \neq 0$, então $|\widehat{\delta}_\xi(\varepsilon, 0)| \to +\infty$, para $\varepsilon \to 0^+$, e $\widehat{\delta}_\xi \notin \mathcal{N}[\mathbb{R}^n]$;

(2) Se $\text{supp}(\xi) \subset \overline{B_1(0)}$, temos $\widehat{\delta}_\xi \in \mathcal{N}[\mathbb{R}^n \backslash \{0\}]$ e $\widehat{\delta}_\xi(\varepsilon, \cdot) \to 0$, para $\varepsilon \to 0^+$, em $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$.

Em consequência, a classe δ_ξ de $\widehat{\delta}_\xi$ em $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n)$ satisfaz:

(3) Se $\xi(0) \neq 0$, então $\delta_\xi \neq 0$ e $\delta_\xi \notin \mathcal{G}_{\ell b}(\mathbb{R}^n)$;

(4) Se $\text{supp}(\xi) \subset \overline{B_1(0)}$, então $\delta_\xi = 0$ em $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$;

(5) Se $\xi(0) \neq 0$ e $\text{supp}(\xi) \subset \overline{B_1(0)}$, temos $\text{supp}(\delta_\xi) = \{0\}$.

Prova : A afirmação (1) é clara (Ver Lema 1.2.5 (II)(a)). Seja V um aberto não vazio tal que $\overline{V} \subset\subset \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$. Se $d := \text{dis}(0, \overline{V})$, escolhendo $\eta \in]0, 1] \cap]0, d[$, temos $\overline{B_\varepsilon(0)} \cap \overline{V} = \emptyset, (0 < \varepsilon < \eta)$, e portanto $\widehat{\delta}_\xi = 0$ em $]0, \eta[\times V$. Do Lema 1.2.5 segue a afirmação (2). ∎

1.3 – O Processo de Associação

Consideremos, nesta parte preliminar, os casos $E = \mathbb{R}$ ou $E = \mathbb{R}^2$ ou $E = \mathbb{R}^n$ e $F = \mathbb{K}$; a álgebra de funções generalizadas $\mathcal{G}(\Omega)$; e a subálgebra $\mathcal{G}_s(\Omega)$ (álgebras conforme citadas na introdução deste capítulo). A relação de associação em $\mathcal{G}(\Omega)$ e os resultados que a envolvem, pela sua importancia nas aplicações a problemas não lineares, pode ser considerada o coração da teoria de Colombeau. Por esta razão e para comodidade do leitor , antes de apresentar o formalismo correspondente no caso $\mathcal{G}_s(\Omega)$, vamos mostrar os problemas que motivaram sua origem . Nesta parte introdutória seguimos bem de perto a seção 6.0 de [A] e as seções 1-3 de [C4].

. Produto de Distribuições em Física. Em muitas teorias físicas, aparecem naturalmente produtos de distribuições (Teoria quântica de campos, Plasmas ,Termodinâmica, Acústica , Elasticidade e Elastoplasticidade , Dinâmica dos meios viscosos, etc. Para referencias sobre estes assuntos ver [A] ou [C4]). Em teoria das distribuições , a função clássica de Heaviside Y é a função de uma variável real igual a 0 (resp. 1) se $x < 0$ (resp.

$x > 0$), seu valor em 0 não é especificado. A função de Dirac δ representa uma massa $+1$ concentrada na origem. Ao menos em mecânica dos meios contínuos, parece claro que estes dois objetos matemáticos representam uma idealização de fenômenos mais finos, em parte ignorados. Assim, uma onda de choque é matematicamente representada por uma função descontínua (construida a partir de Y), mas é sabido que o choque tem, na realidade, uma certa espessura (muito pequena mas rigorosamente não nula, da ordem 10^{-8} m para os bangs supersônicos no ar, nas condições usuais).É desprezando esta espessura que se representa uma onda de choque por uma função descontínua como a função de Heaviside. Em muitos casos, esta representação de variações muito bruscas de grandezas físicas por funções descontínuas é adequada, no sentido de que conduzem a fórmulas não ambíguas (por exemplo, as fórmulas de Rankine–Hugoniot). Isto é corroborado matemáticamente pelo fato de que os cálculos correspondentes tem sentido na teoria das distribuições . Mas esta representação matemática pode fazer aparecer produtos de distribuições , por exemplo o produto $Y\delta$, que não tem sentido na teoria das distribuições . Os físicos se limitam então a *cálculos formais* (feitos por analogia como os cálculos usuais), não definidos matemáticamente; para físicos e engenheiros, o grande inconveniente destes "cálculos" é que levam frequentemente a resultados absurdos ou ambíguos.

· Perigos dos Cálculos Formais Envolvendo Multiplicação de Distribuições .

Indiquemos com $C_f(\mathbb{R})$ o conjunto das funções ϕ de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ tais que exista uma parte finita A de $\mathbb{R}$ tal que ϕ seja contínua em $\mathbb{R} \setminus A$ e ϕ tenha uma descontinuidade de primeira espécie em cada ponto de A.

[I] Pela definição de Y (considerada como elemento da álgebra $C_f(\mathbb{R})$), temos $Y^2 = Y$ e $Y^3 = Y$. Derivando estas igualdades resulta $Y' = 2YY'$ e $Y' = 3Y^2Y'$. Da primeira identidade vem $YY' = \frac{1}{2}Y'$ e, portanto, multiplicando–a por Y, temos $Y^2Y' = \frac{1}{2}YY'$; donde, usando a segunda identidade anterior, segue $Y' = \frac{3}{2}YY' = \frac{3}{4}Y'$, o que é absurdo pois $Y' = \delta \neq 0$ (Ver também Corolário 3.1.12).

[II] A equação diferencial parcial não linear

[1.3.1] $$u_t + uu_x = 0$$

não admite em $\mathcal{G}_s(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$ solução na forma de onda de choque do tipo (Ver Definição 3.2.8)

[1.3.2] $$u(x,t) = \Delta H(x - ct) + b, \qquad \Delta := a - b, \qquad 0 < a < b, c \in \mathbb{R}.$$

A prova dessa afirmação depende das propriedades da associação , que será introduzida na Definição 1.3.10; nos limitaremos então a mostrar a ideia da mesma (Ver Proposição 3.2.10). Levando [1.3.2] em [1.3.1] obtemos (Ver Proposição 3.2.10 $(I)_1$)

[J_1] $$c = \tfrac{1}{2}(a + b).$$

Multiplicando [1.3.1] por u resulta

[1.3.3.] $$(\frac{1}{2}u^2)_t + (\frac{1}{3}u^3)_x = uu_t + u^2 u_x = 0,$$

e é claro que, se [1.3.2] é uma solução de [1.3.1], então o é também de [1.3.3]. Levando [1.3.2] em [1.3.3] obtemos (Ver Proposição 3.2.10$(I)_2$)

[J_2] $$c = \frac{2}{3}\frac{a^2 + ab + b^2}{a + b}.$$

Vemos então que, se [1.3.2] é solução de [1.3.1], valem $[J_i], i = 1, 2$, o que é absurdo. É importante entender bem que estes resultados absurdos não são casos isolados, exibidos a título de curiosidade ou para defender o ponto de vista de que os físicos devem respeitar o *rigor matemático*, mas na realidade é o fenômeno geral ao qual nos expomos calculando formalmente com multiplicação de distribuições .

. **Os Cálculos Precedentes do Ponto de Vista da Associação .** Os cálculos em [I] e [II] mostram que na teoria de Colombeau é inevitável e fundamental a cisão da igualdade clássica em dois conceitos: um deles é a igualdade (absoluta) de funções generalizadas, o outro é um conceito mais fraco indicado por $\approx$ chamado associação . Esta relação de associação é uma relação de equivalência sobre $\mathcal{G}(\Omega)$ compatível com sua estrutura de $\mathbb{K}$-*espaco vetorial,* que induz sobre $\mathcal{D}'(\Omega)$ a igualdade, é coerente com a derivação (i.é., se $f \in \mathcal{G}(\Omega), \alpha \in \mathbb{N}^n$ e $f \approx 0$, então $\partial^\alpha f \approx 0$). O fato fundamental é que a associação não é coerente com a multiplicação :

[1.3.4] Se $f, g, h \in \mathcal{G}(\Omega)$ e $f \approx g$ não implica $fh \approx gh$.

Retomemos agora os cálculos de [I] e [II]. Se fosse $Y^2 = Y$ e $Y^3 = Y$ em $\mathcal{G}(\mathbb{R})$, como os cálculos de [I] são corretos (pois a igualdade em $\mathcal{G}(\mathbb{R})$ é coerente com a multiplicação) chegariamos a um absurdo. Na realidade, em $\mathcal{G}(\mathbb{R})$ *não temos* $Y^2 = Y$ *nem* $Y^3 = Y$ mas apenas $Y^2 \approx Y$ e $Y^3 \approx Y$. Portanto, por derivação vem $2YY' \approx Y'$ e $3Y^2Y' \approx Y'$ mas, por [1.3.4], não é lícito multiplicar nenhuma destas relações por Y conservando a associação : de fato $2Y^2Y'$ não é associado a YY' . O mesmo tipo de problema acontece com [II]. A equação [1.3.1] (igualdade em $\mathcal{G}_s(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$) não pode ter solução da forma [1.3.2] pois os cálculos são corretos e levam a uma contradição . É a "equação de associação "

[1.3.5] $$u_t + uu_x \approx 0$$

que tem solução do tipo [1.3.2] se valer $[J_1]$ (Ver Proposição 3.1.10 (II)). É importante ainda notar que não podemos chegar a uma contradição do tipo da existente entre $[J_1]$ e $[J_2]$ pois, por [1.3.4], a relação [1.3.5] não implica $uu_t + u^2u_x \approx 0$.

· **Importancia do Conceito de Associação nas Aplicações e no Desenvolvimento da Teoria de Colombeau.** Para completar as informações que mostram a importancia da associação vamos acrescentar às observações precedentes, alguns fatos fundamentais da Física-Matemática clássica e da teoria de Colombeau. Comecemos lembrando que clássicamente se diz que [1.3.2] é uma *solução fraca* de [1.3.1], e o expressamos com a notação $u_t + uu_x \overset{(w)}{=} 0$, se e só se $< u_t + (\frac{1}{2}u^2)_x, \varphi >= 0$, para cada $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, onde u^2 é o quadrado de [1.3.2] em $C_f(\mathbb{R})$. Vamos resumir então estes fatos fundamentais (gerais mas ilustrados com [1.3.1]) no que se segue.

Fato da Física–Matemática Classica : (F) é um fenômeno físico cujo comportamento é governado pela equação [1.3.1] e, por argumentos físicos, intuição ou experiência em laboratório, os físicos sabem que [1.3.1] admite uma solução na forma de onda de choque do tipo [1.3.2] se e só se se verifica $[J_1]$.

Fatos da Teoria de Colombeau: (i) A equação [1.3.1] não admite soluções do tipo [1.3.2] (Ver [II]); (ii) a equação correspondente com associação (portanto em $\mathcal{G}_s(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$), [1.3.5], admite uma solução do tipo [1.3.2] se e só se verifica $[J_1]$, e está de acordo com:
(α) a Física–Matemática clássica, segundo a qual $u_t + uu_x \overset{(w)}{=} 0$ admite uma solução do tipo [1.3.2] se e só se vale $[J_1]$ (Condição de Rankine – Hugoniot);
(β) a intuição , argumentos (ou resultados experimentais) dos físicos.

Conclusão : Em $\mathcal{G}$, a tradução matemática correta do fenômeno (F) é [1.3.5] e não [1.3.1]. A condição de Rankine – Hugoniot (i.é ., $[J_1]$) mostra que a Física-Matemática clássica também chega à resposta correta o que leva naturalmente à seguinte questão :*não é possível resolver problemas não lineares de existência de ondas de choque usando apenas a matemática clássica sem necessidade de $\mathcal{G}$?* A resposta é não , não se podem resolver estes problemas fora dos sistemas de lei de conservação do tipo $u_t = [f(u)]_x$. Um exemplo simples é o sistema $u_t + uu_x = \sigma_x, u_t + u\sigma_x = u_x$, em que o termo $u\sigma_x$ torna impossível a solução do problema com os métodos clássicos. A teoria de Colombeau propõe de fato, quando confrontadas a problemas envolvendo multiplicação de distribuições (e somente neste tipo de problemas, pois onde a teoria das distribuições convém não é necessário usar a igualdade em $\mathcal{G}$; é de fato a associaão que usamos com a notação clássica $=$, pois sobre $\mathcal{D}'$ a igualdade coincide com a associação), uma reformulação da igualdade clássica ($\overset{(w)}{=}$) que não é suficientemente precisa para expressar os fenômenos considerados.

Para concluir esta parte introdutória lembremos que o conceito de associação em $\mathcal{G}(\Omega)$ é normalmente dado usando a integração de funções generalizadas de suporte compacto e a associaão em $\overline{\mathbb{K}}$. Não sera feito isso aqui. Para introduzir a noção de associação em $\mathcal{G}_s(\Omega)$ usaremos uma propriedade equivalente à definição que usualmente é dada.

Os Vetores Generalizados

Indicamos com $\mathcal{E}_M(F)$ o conjunto de todas as funções μ de $]0,1]$ em F tais que existem $N \in \mathbb{N}, C > 0$ e $\eta \in]0,1]$ verificando a condição

$$|\mu(\varepsilon)| \leq C\varepsilon^{-N}, \quad (0 < \varepsilon < \eta).$$

Denotamos com $\mathcal{N}(F)$ o conjunto de todas as funções μ de $]0,1]$ em F tais que, para cada $q \in \mathbb{N}$, existem $C > 0$ e $\eta \in]0,1]$ (dependendo de q) satisfazendo

$$|\mu(\varepsilon)| \leq C\varepsilon^{q}, \quad (0 < \varepsilon < \eta).$$

Os elementos de $\mathcal{E}_M(F)$ (resp. $\mathcal{N}(F)$) são chamados *elementos moderados* (resp. *elementos nulos*) em F.

$\mathcal{E}_M(F)$ (resp. $\mathcal{N}(F)$) é um $\mathbb{K}$- subespaco vetorial de $F^{]0,1]}$ (resp. $\mathcal{E}_M(F)$). Se F for uma álgebra de Banach, $\mathcal{E}_M(F)$ (resp. $\mathcal{N}(F)$) é uma $\mathbb{K}$- subálgebra (resp. um ideal) de $F^{]0,1]}$ (resp. $\mathcal{E}_M(F)$).

Definição 1.3.1 : O espaço vetorial dos *vetores generalizados* é definido como sendo o $\mathbb{K}$- espaço vetorial quociente

$$\overline{F} := \frac{\mathcal{E}_M(F)}{\mathcal{N}(F)}.$$

Se F for uma álgebra de Banach, $\overline{F}$ é uma $\overline{\mathbb{K}}$-álgebra. Se $F = \mathbb{K}$, a álgebra $\overline{\mathbb{K}}$ é chamada a $\mathbb{K}$-álgebra dos *números generalizados* .

No que se segue indicamos com σ_F a aplicação quociente de $\mathcal{E}_M(F)$ sobre $\overline{F}$:

$$\sigma_F : \mu \in \mathcal{E}_M(F) \mapsto \mu + \mathcal{N}(F) \in \overline{F}.$$

A aplicação linear injetora

$$y \in F \mapsto \widehat{y} \in \mathcal{E}_M(F)$$

onde $\widehat{y} : \varepsilon \in]0,1] \mapsto y \in F$, define um $\mathbb{K}$–homomorfismo injetivo de espacos vetoriais

$$i_F : y \in F \mapsto \widehat{y} + \mathcal{N}(F) \in \overline{F}.$$

Se F for uma álgebra de Banach, a aplicação i_F é um homomorfismo de álgebras. Em virtude dessa observação podemos identificar F com um subespaco de $\overline{F}$.

Lema 1.3.2 : Para cada $x \in \Omega$ são válidas as afirmações seguintes.

(I) Se $u \in \mathcal{E}_M[\Omega; F]$ (resp. $u \in \mathcal{N}[\Omega; F]$), então $u(\cdot, x) \in \mathcal{E}_M(F)$ (resp. $u(\cdot, x) \in \mathcal{N}(F)$);

(II) Se $u, v \in \mathcal{E}_M[\Omega; F]$ e $u - v \in \mathcal{N}[\Omega; F]$, então $u(\cdot, x) - v(\cdot, x) \in \mathcal{N}(F)$.

Prova : É clara.

■

Em virtude do lema anterior podemos dar a definição seguinte.

Definição 1.3.3 : Dados $x \in \Omega$ e $f \in \mathcal{G}(\Omega; F)$, *o valor de f no ponto x*, denotado com $f(x)$, é

$$f(x) := \widehat{f}(\cdot, x) + \mathcal{N}(F) \in \overline{F},$$

onde $\widehat{f}$ é um representante qualquer de f.

A proposição seguinte mostra que o valor $f(x) \in \overline{F}$ de $f \in C^\infty(\Omega; F)$, considerado como elemento de $\mathcal{G}(\Omega; F)$, "coincide" com o valor clássico $f(x) \in F$. Consideremos os seguintes homomorfismos

$$\nu_x : f \in C^\infty(\Omega; F) \mapsto f(x) \in F \ \text{ e } \ \overline{\nu}_x : f \in \mathcal{G}(\Omega; F) \mapsto f(x) \in \overline{F}, \ \ (x \in \Omega).$$

Proposição 1.3.4 : Para cada $x \in \Omega$, o diagrama seguinte é comutativo

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(\Omega; F) & \xrightarrow{\jmath_{\Omega,F}} & \mathcal{G}(\Omega; F) \\ \downarrow \nu_x & & \downarrow \overline{\nu}_x \\ F & \xrightarrow{i_F} & \overline{F} \end{array}$$

Prova : Ver [A] (Proposição 3.2.2).

∎

Para o estudo de equações diferenciais precisamos do conceito de "constante generalizada" cuja definição se apoia no lema seguinte.

Lema 1.3.5 : Considerando a aplicação

$$R : \mu \in F^{]0,1]} \mapsto R_\mu \in \mathcal{E}[\Omega; F],$$

onde $R_\mu : (\varepsilon, x) \in]0,1] \times \Omega \mapsto \mu(\varepsilon) \in F$, são válidas as afirmações seguintes.

(I) Se $\mu \in \mathcal{E}_M(F)$ (resp. $\mu \in \mathcal{N}(F)$), então $R_\mu \in \mathcal{E}_M[\Omega; F]$ (resp. $R_\mu \in \mathcal{N}[\Omega; F]$);

(II) Existe um único homomorfismo injetivo $\overline{R}$ de $\overline{F}$ em $\mathcal{G}(\Omega; F)$ tornando comutativo o diagrama seguinte

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}_M(F) & \xrightarrow{R} & \mathcal{E}_M[\Omega; F] \\ \downarrow \sigma_F & & \downarrow \Theta_{\Omega,F} \\ \overline{F} & \overset{\overline{R}}{\dashrightarrow} & \mathcal{G}(\Omega; F). \end{array}$$

Prova : Ver [A] (Lema 3.2.8).

∎

O Lema 1.3.5 mostra que $\overline{F}$ se identifica naturalmente ao subespaço vetorial $\mathrm{Im}(\overline{R})$ de $\mathcal{G}(\Omega; F)$.

Definição 1.3.6 : Chama-se *constante generalizada* em $\mathcal{G}(\Omega; F)$ a qualquer elemento de $\mathrm{Im}(\overline{R})$.

No que se segue, usando as identificações $F = i_F(F)$ e $\overline{F} = \overline{R}(\overline{F})$, escrevemos

$$F \subset \overline{F} \subset \mathcal{G}(\Omega; F).$$

Sendo assim, um elemento $z \in \mathcal{G}(\Omega; F)$ é uma constante generalizada se e só se existe uma função $\mu \in \mathcal{E}_M(F)$ tal que

$$z = R_\mu + \mathcal{N}[\Omega; F] = \mu + \mathcal{N}(F).$$

Proposição 1.3.7 : Se $z \in \mathcal{G}(\Omega; F)$ é uma constante generalizada e $p \in \mathbb{N}^*$, então $z^{(p)} = 0$.

Prova : Ver [A] (Proposição 3.2.11).

■

Primitivas de Funções Generalizadas no caso $E = \mathbb{R}$ e $F = \mathbb{K}$.

Até o Teorema 1.3.9 I denota um intervalo aberto não vazio qualquer de $\mathbb{R}$.

Definição 1.3.8 : Diz-se que $F \in \mathcal{G}(I)$ é uma primitiva de $f \in \mathcal{G}(I)$ se $F' = f$

Se F é uma primitiva de f, pela Proposição 1.3.7, $F + z$ é também uma primitiva de f, para cada constante generalizada z.

Teorema 1.3.9 (cfr., [A]:Teorema 4.3.3, ou [A–B]: (4.3.2)): Para cada $f \in \mathcal{G}(I)$ são válidas as afirmações seguintes.

(I) f admite infinitas primitivas em $\mathcal{G}(I)$;

(II) Duas primitivas quaisquer de f diferem em uma constante generalizada;

(III) Se $f' = 0$, então f é uma constante generalizada.

■

A Relação de Associação

Até o fim do presente capítulo consideraremos o caso $E = \mathbb{R}^n$ e $F = \mathbb{K}$.

Definição 1.3.10 : Diz-se que uma função $f \in \mathcal{G}(\Omega)$ é *associada a zero*, o que se indica pela notação $f \approx 0$ em $\mathcal{G}(\Omega)$, se existe um representante $\widehat{f}$ de f tal que $\widehat{f}(\varepsilon, \cdot) \to 0$, para $\varepsilon \to 0^+$, em $\mathcal{D}'(\Omega)$; isto é,

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} < \widehat{f}(\varepsilon, \cdot), \varphi >= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\Omega \widehat{f}(\varepsilon, x)\varphi(x)dx = 0 \ , \ (\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)).$$

Diz-se que duas funções $f, g \in \mathcal{G}(\Omega)$ *são associadas*, e se indica pela notação $f \approx g$ em $\mathcal{G}(\Omega)$, se $f - g \approx 0$ em $\mathcal{G}(\Omega)$.

Proposição 1.3.11 : Dados $f, z \in \mathcal{G}(\Omega)$, z uma constante generalizada, e $\lambda \in \mathbb{K}$, são válidas as afirmações seguintes.

(I) $f \approx 0$ se e só se $\widehat{f}(\varepsilon, \cdot) \to 0$, para $\varepsilon \to 0^+$, em $\mathcal{D}'(\Omega)$, para cada representante $\widehat{f}$ de f;

(II) $z \approx 0$ se e só se $\widehat{z}(\varepsilon) \to 0$, quando $\varepsilon \to 0^+$, para algum (ou equivalentemente, para cada) representante $\widehat{z}$ de z;

(III) $z \approx \lambda$ se e só se $\widehat{z}(\varepsilon) \to \lambda$, para $\varepsilon \to 0^+$, para cada (ou equivalentemente, para algum) representante $\widehat{z}$ de z.

Prova : Usando o Lema 1.2.5 (II)(c) segue (I). Para ver (II) basta observar que , com as notações do Lema 1.3.5, temos:

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} < R_\mu(\varepsilon,\cdot),\varphi >= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\mu(\varepsilon)\int_\Omega \varphi(x)dx,$$

para cada $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ e para cada representante μ de z (Ver Definição 1.3.6).

■

O resultado seguinte reune as propriedades primárias do cálculo com associação que são fundamentais nas aplicações .

Teorema 1.3.12 (cfr., [A]:Teorema 6.3.2, ou [A-B]: (6.3.1)): Valem as afirmações seguintes.

(a) Se $f, g \in \mathcal{G}(\Omega), f \approx 0$ e $g \approx 0$, então $f + g \approx 0$;

(b) Se $\varphi \in C^\infty(\Omega), f \in \mathcal{G}(\Omega)$ e $f \approx 0$, então $\varphi f \approx 0$;

(c) Se $f \in \mathcal{G}(\Omega), f \approx 0$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$, então $\partial^\alpha f \approx 0$;

(d) Se $f \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^n)$ e $\frac{\partial f}{\partial x_1} \approx 0$ em $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n)$ então , existe $\Phi \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = 0$ e $f \approx \Phi$ em $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n)$. Em particular, se $n = 1$, Φ é uma constante generalizada.

■

Lema 1.3.13 : Sejam f, z em $\mathcal{G}(\Omega)$, z uma constante generalizada, e $\lambda \in \mathbb{K}$ tais que $f \approx 0$ e $z \approx \lambda$. Então , $zf \approx 0$ em $\mathcal{G}(\Omega)$.

Prova : Quaisquer que sejam os representantes $\widehat{f}$ e $\widehat{z}$ de f e z, respectivamente, pela hipótese temos

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} < \widehat{z}(\varepsilon)\widehat{f}(\varepsilon,\cdot),\varphi >= \lambda\lim_{\varepsilon\to 0^+} < \widehat{f}(\varepsilon,\cdot),\varphi >= 0, \quad (\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)).$$

■

O resultado seguinte será útil, entre outros, para o estudo das equações diferenciais da hidrodinâmica no Capítulo 4.

Proposição 1.3.14 : Seja ϕ uma função de Ω em $\mathbb{K}$ e $f \in \mathcal{G}_{\ell b}(\Omega)$ (Ver Definição 1.2.7) tais que $\widehat{f}(\varepsilon, \cdot) \to \phi$, para $\varepsilon \to 0^+$, q.s. em Ω , para algum representante $\widehat{f}$ de f. Então , $\widehat{f}(\varepsilon, \cdot) \to \phi$, para $\varepsilon \to 0^+$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Em particular, se $\phi \in C^\infty(\Omega)$, então $f \approx \phi$ em $\mathcal{G}(\Omega)$.

Prova : A hipótese implica $\widehat{f}(\varepsilon, \cdot) \mid_K \to \phi \mid_K$, para $\varepsilon \to 0^+$, em $L^1(K)$, para cada $K \subset\subset \Omega$. Ora, sendo $f \in \mathcal{G}_{\ell b}(\Omega)$, pelo Lema 1.2.8(I), fixado $K \subset\subset \Omega$, existem $C > 0$ e $\eta \in]0,1]$ satisfazendo

$$\sup_{x \in K} |\widehat{f}(\varepsilon, x)| \leq C, \ \ (0 < \varepsilon < \eta).$$

Escolhendo $\Psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tal que $\Psi \equiv C$ em K, temos então $|\widehat{f}(\varepsilon, x)| \leq \Psi(x), ((\varepsilon, x) \in]0, \eta[\times K)$. Sendo $\Psi \in L^1(\Omega)$, pela hipótese e pelo teorema da convergência donominada, segue a afirmação acima. Finalmente, dado $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, para $K := \mathrm{supp}(\varphi)$, a observação inicial implica

$$| < \widehat{f}(\varepsilon, \cdot) - \phi, \varphi > | \leq \sup_\Omega |\varphi| |\widehat{f}(\varepsilon, \cdot) - \phi|_{L^1(K)} \to 0, \text{ para } \varepsilon \to 0^+,$$

o que mostra o resultado.

■

Observar que a condição $u(\varepsilon, \cdot) \to \phi \in C^\infty(\Omega)$, para $\varepsilon \to 0^+$, q.s. em Ω , onde $u \in \mathcal{E}[\Omega]$, não é suficiente para que $u(\varepsilon, \cdot) \to \phi$, para $\varepsilon \to 0^+$, em Ω. Por exemplo, considerando a função $\widehat{\delta}_\xi$ dada por (1.2.21.1) (onde $\xi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, com $\xi(0) \neq 0$ e $\mathrm{supp}(\xi) \subset \overline{B_1(0)}$), pela Proposição 1.2.21, $\widehat{\delta}_\xi(\varepsilon, \cdot) \to 0$, quando $\varepsilon \to 0^+$, em $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, no entanto $\lim_{\varepsilon \to 0^+} \widehat{\delta}_\xi(\varepsilon, 0) \neq 0$.

CAPÍTULO 2

ALGUMAS FUNÇÕES GENERALIZADAS DE HEAVISIDE

Em continuação damos as definições e consideramos algumas propriedades das funções generalizadas de Dirac e de Heaviside, que serão necessárias posteriormente.

2.1 – Funções Generalizadas de Dirac

No que se segue indicamos com δ_0 a medida de Dirac em $\mathbb{R}^n$, no ponto $x = 0$; isto é , $\delta_0 : \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \mapsto \varphi(0) \in \mathbb{K}$.

Proposição 2.1.1 : Dada $\xi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, com $\xi \geq 0$ e $\int \xi = 1$, seja $\widehat{\delta}_\xi$ a função dada por (1.2.21.1). Então , $\widehat{\delta}_\xi(\varepsilon, \cdot) \to \delta_0$, para $\varepsilon \to 0^+$, em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$; isto é,

$$(2.1.1.1) \qquad \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\delta}_\xi(\varepsilon, x)\varphi(x)dx = \varphi(0), \quad (\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)).$$

Prova : Fixada $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, da definição de $\widehat{\delta}_\xi$ e da hipótese, segue

$$(2.1.1.2) \qquad |\varphi(0) - \int \widehat{\delta}_\xi(\varepsilon, x)\varphi(x)dx| \leq \int_{\overline{Br(0)}} \xi(x)|\varphi(\varepsilon x) - \varphi(0)|dx, \quad (\varepsilon \in]0,1]),$$

onde $r > 0$ é tal que $\mathrm{supp}(\xi) \subset \overline{Br(0)}$. Sendo φ uniformemente contínua, dado $\sigma > 0$, existe $\eta_0 > 0$ tal que $|\varphi(y) - \varphi(x)| < \sigma$, sempre que $|y - x| < \eta_0$. Em particular, se $\eta \in]0,1]$ é tal que $0 < r\eta \leq \eta_0$ temos $|\varphi(\varepsilon x) - \varphi(0)| < \sigma$, para $0 < \varepsilon < \eta$ e $|x| \leq r$, o que junto com a condição (2.1.1.2) implica

$$|\varphi(0) - \int \widehat{\delta}_\xi(\varepsilon, x)\varphi(x)dx| \leq \sigma, \quad \text{se } 0 < \varepsilon < \eta.$$

■

A proposição anterior motiva a definição seguinte.

Definição 2.1.2 : Uma função $\delta \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^n)$ é chamada *função generalizada de Dirac em* $\mathbb{R}^n$ se ela possui um representante $\widehat{\delta}$ tal que $\widehat{\delta}(\varepsilon, \cdot) \to \delta_0$, para $\varepsilon \to 0^+$, em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$; isto é , $\widehat{\delta}$ verifica a condição (2.1.1.1).

O resultado seguinte segue das proposições 1.2.21 e 2.1.1.

Corolário 2.1.3: Dada $\xi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ verificando as condições

$$\xi \geq 0,\ \xi(0) > 0,\ \mathrm{supp}(\xi) \subset \overline{B_1(0)} \text{ e } \int \xi = 1, \tag{2.1.3.1}$$

seja $\widehat{\delta}_\xi \in \mathcal{E}_M[\mathbb{R}^n]$ definida por (1.2.21.1). Então , a classe δ_ξ de $\widehat{\delta}_\xi$ em $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n)$ é uma função generalizada de Dirac satisfazendo as condições seguintes: $\delta_\xi \neq 0, \delta_\xi = 0$ em $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ e $\mathrm{supp}(\delta_\xi) = \{0\}$.

■

Notação : Indicamos com

$$\Xi = \Xi(\mathbb{R}^n) = \Xi(\mathbb{R}^n; \mathbb{K}), \quad (n \geq 1), \tag{[2.1.1]}$$

o conjunto de todos os elementos de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ satisfazendo as condições (2.1.3.1).

Com essa notação é claro que $\widehat{\delta}_\xi(\varepsilon, \cdot) \in \Xi$, $\quad ((\varepsilon, \xi) \in]0,1] \times \Xi)$, e que $\delta_{\xi_1} \neq \delta_{\xi_2}$, para cada $\xi_1, \xi_2 \in \Xi$, com $\xi_1(0) \neq \xi_2(0)$. Em consequência, $\{\delta_\xi \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^n) \mid \xi \in \Xi\}$ é um conjunto infinito, onde $\widehat{\delta}_\xi$ e δ_ξ são definidos como no Corolário 2.1.3 .

A proposição seguinte reune algumas propriedades elementares das funções generalizadas de Dirac.

Proposição 2.1.4 : (a) Se $\widehat{\delta}$ é um representante de uma função generalizada de Dirac, então $\widehat{\delta}(\varepsilon, \cdot) \to \delta_0$, para $\varepsilon \to 0^+$, em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$;
(b) Se δ_1 e δ_2 são duas funções generalizadas de Dirac em $\mathbb{R}^n$, então $\delta_1 \approx \delta_2$ em $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n)$;
(c) Se δ é uma função generalizada de Dirac em $\mathbb{R}^n$, então $\delta \approx 0$ em $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ e δ não é associada a zero (e portanto $\delta \neq 0$);
(d) Sejam $\delta, z \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^n)$, δ uma função de Dirac e z uma constante generalizada. Então , $z\delta \approx 0$ se e só se $z \approx 0$; e em consequência, $\lambda\delta \approx 0$ se e só se $\lambda = 0$, para $\lambda \in \mathbb{K}$.

Prova : O item (a) segue usando o Lema 1.2.5 (II)(c) e a afirmação (b) é clara.
(c): Dada $\xi \in \Xi$, seja δ_ξ a função de Dirac construída a partir de ξ no Corolário 2.1.3. Como $\delta \approx \delta_\xi$ e $\delta_\xi = 0$ em $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ segue que $\delta \approx 0$ em $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$. Por outro lado,

como δ_0 é não nula, não podemos ter $\delta \approx 0$ em $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n)$.

(d): Sejam $\hat{z}$ e $\hat{\delta}$ representantes quaisquer de z e δ, respectivamente. Se $\hat{z}(\varepsilon)\hat{\delta}(\varepsilon,\cdot) \to 0$, quando $\varepsilon \to 0^+$, em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, como $\hat{\delta}(\varepsilon,\cdot) \to \delta_0$, para $\varepsilon \to 0^+$, em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, para cada $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, se tem

$$0 = \lim_{\varepsilon\to 0^+} < \hat{z}(\varepsilon)\hat{\delta}(\varepsilon,\cdot),\varphi > = < \delta_0,\varphi > \lim_{\varepsilon\to 0^+}\hat{z}(\varepsilon);$$

donde $\hat{z}(\varepsilon) \to 0$, quando $\varepsilon \to 0^+$. Reciprocamente, se $\hat{z}(\varepsilon) \to 0$, para $\varepsilon \to 0^+$, usando a igualdade anterior, temos $< \hat{z}(\varepsilon)\hat{\delta}(\varepsilon,\cdot),\varphi > \to 0$, quando $\varepsilon \to 0^+, (\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n))$.

■

Pela proposição anterior toda função generalizada de Dirac é associado a zero em $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$; mas, nem toda função de Dirac se anula em $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$ (Ver Exemplo 2.2.11).

2.2 – Funções Generalizadas de Heaviside.

No presente § bem como em 3.2 e no Capítulo 4 indicaremos com $Y \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ a função clássica de Heaviside; isto é , $Y(x) = 0$ (resp. $Y(x) = 1$) para $x < 0$ (resp. $x > 0$).

Definição 2.2.1 : Uma função $H \in \mathcal{G}(\mathbb{R})$ é chamada *função generalizada de Heaviside* se ela possui um representante $\hat{H}$ tal que $\hat{H}(\varepsilon,\cdot) \to Y$, para $\varepsilon \to 0^+$, em $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$; isto é

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{H}(\varepsilon,x)\psi(x)dx = \int_0^{+\infty} \psi(x)dx, \quad (\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})).$$

Indicamos com $\mathcal{H}(\mathbb{R}) = \mathcal{H}(\mathbb{R};\mathbb{K})$ o conjunto de todas as funções generalizadas de Heaviside.

Proposição 2.2.2 : (I) Para cada $H \in \mathcal{H}(\mathbb{R})$ são válidas as afirmações seguintes.

(a) Se $\hat{H}$ é um representante qualquer de H, então $\hat{H}(\varepsilon,\cdot) \to Y$, para $\varepsilon \to 0^+$, em $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$;

(b) H' é uma função de Dirac e portanto $H' \approx 0$ em $\mathcal{G}(\mathbb{R}^*)$;

(c) $H \approx 0$ em $\mathcal{G}(\mathbb{R}^*_-)$ e $H \approx 1$ em $\mathcal{G}(\mathbb{R}^*_+)$;

(d) Se $z \in \mathcal{G}(\mathbb{R})$ é uma constante generalizada , $zH \approx 0$ se e só se $z \approx 0$; e em consequencia, $\lambda H \approx 0$ se e só se $\lambda = 0$, para $\lambda \in \mathbb{K}$;

(II) Se $H, K \in \mathcal{H}(\mathbb{R})$, então $H \approx K$ e $H' \approx K'$, em $\mathcal{G}(\mathbb{R})$.

Prova : (I): Seja $\widehat{H}$ um representante qualquer de H. A afirmação (a) é clara.

(b): Usando (a) temos $\widehat{H}'(\varepsilon,\cdot) \to Y' = \delta_0$, quando $\varepsilon \to 0^+$, em $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Sendo $\widehat{H}'$ um representante de H', H' é uma função de Dirac.

(c): Dada $\varphi \in \mathcal{D}(R_+^*)$, seja $\widetilde{\varphi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ a extensão de φ a $\mathbb{R}$, nula fora de $\mathbb{R}_+^*$. Por (a) temos

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_0^{+\infty}\widehat{H}(\varepsilon,x)\varphi(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{H}(\varepsilon,x)\widetilde{\varphi}(x)dx = \int_0^{+\infty}\varphi(x)dx;$$

donde $< \widehat{H}(\varepsilon,\cdot) - 1, \varphi > \to 0$, quando $\varepsilon \to 0^+$, o que mostra que $H \approx 1$ em $\mathcal{G}(\mathbb{R}_+^*)$. Que $H \approx 0$ em $\mathcal{G}(\mathbb{R}_-^*)$ segue de modo análogo.

(d): Se $zH \approx 0$, pelo Teorema 1.3.12(c), $zH' \approx 0$, e, pela Proposição 2.1.4(d), $z \approx 0$. Reciprocamente, se $z \approx 0$, então $zH' \approx 0$ e portanto, pelo Teorema 1.3.12(d), existe uma constante generalizada $z_0 \in \mathcal{G}(\mathbb{R})$ tal que $zH \approx z_0$ em $\mathcal{G}(\mathbb{R})$ e então $zH \approx z_0$ em $\mathcal{G}(\mathbb{R}_-^*)$. Por outro lado, como $H \approx 0$ em $\mathcal{G}(\mathbb{R}_-^*)$, pelo Lema 1.3.13, $zH \approx 0$ em $\mathcal{G}(\mathbb{R}_-^*)$. Logo, $z_0 \approx 0$ e em consequencia $zH \approx 0$ em $\mathcal{G}(\mathbb{R})$.

(II): Como $H' \approx K'$ em $\mathcal{G}(\mathbb{R})$, pelo Teorema 1.3.12 (d), $H \approx K + z$ em $\mathcal{G}(\mathbb{R})$, para uma constante generalizada $z \in \mathcal{G}(\mathbb{R})$, e portanto $H \approx K + z$ em $\mathcal{G}(\mathbb{R}_-^*)$. Donde, usando (c), segue $z \approx 0$ e então $H \approx K$ em $\mathcal{G}(\mathbb{R})$.

■

Observar que, pela afirmação (b) do resultado anterior, as funções generalizadas de Heaviside são primitivas de funções generalizadas de Dirac; no entanto, primitivas de funções de Dirac nem sempre são de Heaviside (Ver Exemplo 2.2.10).

Dados Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$ e $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, dizemos que uma função $f \in \mathcal{G}(\Omega)$ *tem a distribuição T como aspecto macroscopico* se para algum (ou equivalentemente, para cada) representante $\widehat{f}$ de f se tem $\widehat{f}(\varepsilon,\cdot) \to T$, para $\varepsilon \to 0^+$, em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Então , de acordo com essa definição , as funções de Dirac são as funções generalizadas que tem como aspecto macroscópico a medida de Dirac δ_0 e as funções de Heaviside são as funções generalizadas que tem como aspecto macroscópico a função clássica de Heaviside Y.

Definição 2.2.3 : Uma função $H \in \mathcal{G}_{\ell b}(\mathbb{R})$ é chamada uma *função generalizada de Heaviside própria* se H possui um representante $\widehat{H}$ tal que $\widehat{H}(\varepsilon, \cdot) \to Y$, para $\varepsilon \to 0^+$, em $\mathbb{R}^*$; isto é ,

$$(\mathcal{H}_p) \qquad \lim_{\varepsilon \to 0^+} \widehat{H}(\varepsilon, x) = \begin{cases} 0, & \text{para } x < 0 \\ 1, & \text{para } x > 0 \,. \end{cases}$$

Denotamos com $\mathcal{H}_p(\mathbb{R}) = \mathcal{H}_p(\mathbb{R}; \mathbb{K})$ o conjunto de todas as funções generalizadas de Heaviside próprias.

Proposição 2.2.4 : (I) Se $H \in \mathcal{H}_p(\mathbb{R})$, então $\widehat{H}(\varepsilon, \cdot) \to Y$, quando $\varepsilon \to 0^+$, em $\mathbb{R}^*$, para cada representante $\widehat{H}$ de H;

(II) Se $m \in \mathbb{N}^*, \alpha_j \in \mathbb{N}^*$ e $H_j \in \mathcal{H}_p(\mathbb{R}), 1 \leq j \leq m$, então $H_1^{\alpha_1} H_2^{\alpha_2} \dots H_m^{\alpha_m} \in \mathcal{H}_p(\mathbb{R})$;

(III)$\mathcal{H}_p(\mathbb{R}) \subset \mathcal{H}(\mathbb{R})$;

(IV) Nas hipóteses do item (II) vale

$$H_1^{\alpha_1} \dots H_m^{\alpha_m} \approx H \text{ e } (H_1^{\alpha_1} \dots H_m^{\alpha_m})' \approx H' \text{ em } \mathcal{G}(\mathbb{R}) \quad \text{para cada } H \in \mathcal{H}(\mathbb{R}),$$

e em consequencia vale também

$$H^m \approx H \text{ em } \mathcal{G}(\mathbb{R}), \quad (m \in \mathbb{N}^*, H \in \mathcal{H}_p(\mathbb{R})).$$

Prova : O item (I) segue usando o Lema 1.2.5 (II)(a); a afirmação (II) é clara; (III) segue usando a Proposição 1.3.14; e (IV) segue da Proposição 2.2.2 (II) e dos itens (II) e (III) acima.

∎

Os dois lemas dados a seguir são úteis para a construção de exemplos.

Lema 2.2.5 : Seja $H \in \mathcal{G}(\mathbb{R})$ tendo um representante $\widehat{H}$ satisfazendo a seguinte propriedade:

$$(\mathcal{H}_r) \left| \begin{array}{l} \text{Existe uma função } \mu \text{ de }]0,1] \text{ em } \mathbb{R}_+^* \text{ tal que} \\ (\mathcal{H}_r)_1 \ \lim_{\varepsilon \to 0^+} \mu(\varepsilon) = 0 \ \text{ e } \ (\mathcal{H}_r)_2 \ \widehat{H}(\varepsilon, x) = \begin{cases} 0, \text{ para } x < -\mu(\varepsilon) \\ 1, \text{ para } x > \mu(\varepsilon) \end{cases}, (\varepsilon \in]0,1]). \end{array} \right.$$

Então , $\widehat{H}(\varepsilon,\cdot)\to Y$, quando $\varepsilon\to 0^+$, em $\mathbb{R}^*$,

$$(2.2.5.1)\qquad (\forall K\subset\subset\mathbb{R}^*)(\exists\eta\in]0,1]):0\leq\widehat{H}\leq 1 \text{ em }]0,\eta[\times K,$$

e H tem as seguintes propriedades

$$(2.2.5.2)\qquad H=0 \text{ em } \mathcal{G}(\mathbb{R}^*_-) \text{ e } H=1 \text{ em } \mathcal{G}(\mathbb{R}^*_-);$$

$$(2.2.5.3)\qquad H'=0 \text{ em } \mathcal{G}(\mathbb{R}^*).$$

Prova : É claro que a condição $(\mathcal{H}_r)$ implica $\widehat{H}(\varepsilon,\cdot)\to Y$, para $\varepsilon\to 0^+$, em $\mathbb{R}^*$. Da condição $(\mathcal{H}_r)_1$ segue a propriedade :

$$(2.2.5.4)\qquad (\forall K\subset\subset\mathbb{R}^*)(\exists\eta\in]0,1]):K\subset\{x\in\mathbb{R}\mid |x|>\mu(\varepsilon)\},\ (0<\varepsilon<\eta),$$

o que junto com $(\mathcal{H}_r)_2$ implica (2.2.5.1). Para verificar (2.2.5.3), seja V um aberto não vazio tal que $\overline{V}\subset\subset\mathbb{R}^*$. Por $(\mathcal{H}_r)_2$, $\widehat{H}'(\varepsilon,x)=0$ para $(\varepsilon,x)\in]0,1]\times\mathbb{R}$, com $|x|>\mu(\varepsilon)$; o que junto com a condição (2.2.5.4) acarreta $\widehat{H}'=0$ em $]0,\eta[\times V$. Pelo Lema 1.2.5(I), $\widehat{H}'\in\mathcal{N}[\mathbb{R}^*]$.

■

Lema 2.2.6 : Existe uma função $u\in\mathcal{E}_M[\mathbb{R};\mathbb{R}]$ tal que $0\leq u(\varepsilon,\cdot)\leq 1$ em $\mathbb{R}$, $u(\varepsilon,\cdot)\equiv 1$ em $]-\frac{\varepsilon}{4},\frac{\varepsilon}{4}[$ e $\text{supp}(u(\varepsilon,\cdot))\subset[-\frac{3\varepsilon}{4},\frac{3\varepsilon}{4}]$, $(\varepsilon\in]0,1])$. Em consequencia as funções moderadas

$$v:=\begin{cases}1 & \text{em }]0,1]\times\mathbb{R}_-\\ u & \text{em }]0,1]\times\mathbb{R}_+\end{cases},\qquad w:=\begin{cases}u & \text{em }]0,1]\times\mathbb{R}_-\\ 1 & \text{em }]0,1]\times\mathbb{R}_+\end{cases}$$

verificam, respectivamente, as seguintes condições :

$$\begin{aligned}&0\leq v(\varepsilon,\cdot)\leq 1 \text{ em } \mathbb{R},\text{supp}(v(\varepsilon,\cdot))\subset]-\infty,\varepsilon[,v(\varepsilon,\cdot)\equiv 1 \text{ em }]-\infty,\frac{\varepsilon}{4}[\\ &0\leq w(\varepsilon,\cdot)\leq 1 \text{ em } \mathbb{R},\text{supp}(w(\varepsilon,\cdot))\subset]-\varepsilon,+\infty[,w(\varepsilon,\cdot)\equiv 1 \text{ em }]-\frac{\varepsilon}{4},+\infty[\end{aligned},$$

para cada $\varepsilon\in]0,1]$.

Prova : Dada $\xi \in \Xi(\mathbb{R};\mathbb{R})$ (Ver [2.1.1]), considerando a função

$$u : (\varepsilon, x) \in]0,1] \times \mathbb{R} \mapsto (\chi(\varepsilon,\cdot) * \xi_{\varepsilon_1})(x) \in \mathbb{R},$$

onde $\varepsilon_1 := \frac{\varepsilon}{4}$ e $\chi(\varepsilon,\cdot)$ é a função característica do intervalo $[-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}]$. Seja $\varepsilon \in]0,1]$ fixado. Por um resultado conhecido, $u(\varepsilon,\cdot) \in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$ e $\text{supp}(u(\varepsilon,\cdot)) \subset \text{supp}(\chi(\varepsilon,\cdot)) + \text{supp}(\xi_{\varepsilon_1}) = [-\frac{3\varepsilon}{4}, \frac{3\varepsilon}{4}]$. Como $0 \le \chi(\varepsilon,\cdot) \le 1, \xi \ge 0$ e $\int \xi = 1$ é claro que $0 \le u(\varepsilon,\cdot) \le 1$. Da condição $]-\frac{\varepsilon}{4}, \frac{\varepsilon}{4}[-\text{supp}(\xi_{\varepsilon_1}) \subset]-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}[$, para cada $x \in]-\frac{\varepsilon}{4}, \frac{\varepsilon}{4}[$ e cada $y \in \text{supp}(\xi_{\varepsilon_1})$, tem-se $\chi(\varepsilon, x-y) = 1$. Logo,

$$u(\varepsilon,x) = \int_{\text{supp}(\xi_{\varepsilon_1})} \xi_{\varepsilon_1}(y)\chi(\varepsilon, x-y)dy = \int \xi_{\varepsilon_1}(y)dy = 1, \quad (x \in]-\frac{\varepsilon}{4}, \frac{\varepsilon}{4}[).$$

Para concluir, como $u^{(k)}(\varepsilon,x) = [\chi(\varepsilon,\cdot) * (\xi_{\varepsilon_1})^{(k)}](x), (\xi_{\varepsilon_1})^{(k)}(z) = \varepsilon_1^{-k}(\xi^{(k)})_{\varepsilon_1}(z)$ e $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{4}$, temos

$$|u^{(k)}(\varepsilon,x)| \le \varepsilon_1^{-k} \int_{-\infty}^{+\infty} |(\xi^{(k)})_{\varepsilon_1}| = (4^k \int_{-\infty}^{+\infty} |\xi^{(k)}|)\varepsilon^{-k}, \quad ((\varepsilon,x) \in]0,1] \times \mathbb{R}),$$

para cada $k \in \mathbb{N}$, o que mostra que $u \in \mathcal{E}_M[\mathbb{R};\mathbb{R}]$.

■

Observação 2.2.7 : A condição $(\mathcal{H}_p)$ da Definição 2.2.3 não é suficiente para que a função moderada $\widehat{H}$ seja localmente limitada (Ver Definição 1.2.7(a)).
De fato, dada $\xi \in \mathcal{D}(\mathbb{R};\mathbb{R})$, com $\text{supp}(\xi) \subset [-1,1]$ e $\xi(0) > 0$, consideremos a função moderada

$$\widehat{H} : (\varepsilon,x) \in]0,1] \times \mathbb{R} \mapsto 1 + u(\varepsilon,x)(\widehat{\delta}_\xi(\varepsilon,x) - 1) \in \mathbb{R},$$

onde $\widehat{\delta}_\xi$ é a função dada por (1.2.21.1) e u é uma função moderada tal que $0 \le u(\varepsilon,\cdot) \le 1$ em $\mathbb{R}, \text{supp}(u(\varepsilon,\cdot)) \subset]-\infty,\varepsilon[$ e $u(\varepsilon,\cdot) \equiv 1$ em $]-\infty, \frac{\varepsilon}{4}[, (\varepsilon \in]0,1])$ (ver Lema 2.2.6). Como $\widehat{H}(\varepsilon,x) = 0$ (resp. $\widehat{H}(\varepsilon,x) = 1$), para $x < -\varepsilon$ (resp. $x > \varepsilon$), pelo Lema 2.2.2, $\widehat{H}$ satisfaz a condição $(\mathcal{H}_p)$. Por outro lado, $\widehat{H}(\varepsilon,x) = \widehat{\delta}_\xi(\varepsilon,x)$, para $x < \frac{\varepsilon}{4}$; portanto, como $\xi(0) > 0$, pela Proposição 1.2.21 (1), $\widehat{H}(\varepsilon,\cdot) \to +\infty$, para $\varepsilon \to 0^+$. Em consequencia, $\widehat{H}$ não satisfaz a condição (b) do Lema 1.2.5(II), como se vê tomando $K = \{0\}$.

A observação anterior e o Lema 2.2.5 mostram também que, o fato de uma função moderada u em $\mathbb{R}$ satisfazer a condição $(\mathcal{H}_r)$ (com u no lugar de $\widehat{H}$) não é suficiente para ela ser localmente limitada em $\mathbb{R}$ e muito menos para ela ser *uniformemente limitada em* $\mathbb{R}$; isto é , $\sup_{]0,1]\times\mathbb{R}}|u| < +\infty$.

Definição 2.2.8 : (a) Dizemos que uma função $\widehat{H} \in \mathcal{E}_M[\mathbb{R}]$ *verifica a propriedade* $(\mathcal{H}_r)$ se existir uma função μ de $]0,1]$ em $\mathbb{R}_+^*$ tal que o par $(\widehat{H}, \mu)$ satisfaz as condições $(\mathcal{H}_r)_1$ e $(\mathcal{H}_r)_2$ do Lema 2.2.5.

(b) Dizemos que um elemento $H \in \mathcal{G}_{\ell b}(\mathbb{R})$ é uma *função generalizada de Heaviside restrita* se ela possui um representante verificando a propriedade $(\mathcal{H}_r)$.

Indicamos com $\mathcal{H}_r(\mathbb{R}) = \mathcal{H}_r(\mathbb{R};\mathbb{K})$ o conjunto de todas as funções generalizadas de Heaviside restritas.

Observação : É válida a condição seguinte

[2.2.1] $$HK' \approx 0 \text{ em } \mathcal{G}(\mathbb{R}^*), \quad (H \in \mathcal{H}_r(\mathbb{R}), K \in \mathcal{H}_p(\mathbb{R})).$$

De fato, isso decorre das condições (2.2.5.3), $(HK)' \approx 0$ em $\mathcal{G}(\mathbb{R}^*)$ (Proposição 2.2.2 (b)) e $HK' = (HK)' - KH'$.

Proposição 2.2.9 : Dada $\xi \in \Xi(\mathbb{R})$ (Ver [2.1.1]), consideremos as funções $\widehat{\delta}_\xi$ e δ_ξ do Corolário 2.1.3. A função moderada

$$\widehat{H}_\xi : (\varepsilon, x) \in]0,1] \times \mathbb{R} \mapsto \int_{-\infty}^{x} \widehat{\delta}_\xi(\varepsilon, t)dt = \int_{-\varepsilon}^{x} \widehat{\delta}_\xi(\varepsilon, t)dt \in \mathbb{K},$$

verifica as propriedades seguintes

(a) $\widehat{H}_\xi(\varepsilon, x) = 0$ (resp. $\widehat{H}_\xi(\varepsilon, x) = 1$), para $x \leq -\varepsilon$ (resp. $x \geq \varepsilon$);

(b) $0 \leq \widehat{H}_\xi \leq 1$ em $]0,1] \times \mathbb{R}$;

(c) Se $x_1 \leq x_2$, então $\widehat{H}_\xi(\varepsilon, x_1) \leq \widehat{H}_\xi(\varepsilon, x_2), (\varepsilon \in]0,1])$;

e a classe H_ξ de $\widehat{H}_\xi$ em $\mathcal{G}(\mathbb{R})$ é uma função em $\mathcal{H}_r(\mathbb{R})$ satisfazendo as condições $H'_\xi = \delta_\xi$ em $\mathcal{G}(\mathbb{R})$ e

(2.2.9.1) $$H_\xi H' \approx 0 \text{ em } \mathcal{G}(\mathbb{R}^*) \quad \text{para cada } H \in \mathcal{H}_p(\mathbb{R}).$$

Prova : Como $\widehat{H}'_\xi = \widehat{\delta}_\xi$ temos $H'_\xi = \delta_\xi$. Da afirmação (b) resulta que $H_\xi \in \mathcal{G}_{\ell b}(\mathbb{R})$. Pela condição (a) e pelo Lema 2.2.5 temos $H_\xi \in \mathcal{H}_r(\mathbb{R})$ e, por [2.2.1], H_ξ satisfaz a condição (2.2.9.1).

(a) Dado $\varepsilon \in]0,1]$, seja $x \geq \varepsilon$. Como $\widehat{\delta}_\xi(\varepsilon, t) = 0$, para $t \in [\varepsilon, x]$, segue

$$\widehat{H}_\xi(\varepsilon, x) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \widehat{\delta}_\xi(\varepsilon, t)dt = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \varepsilon^{-1}\xi(\varepsilon^{-1}x)dx = 1.$$

Que $\widehat{H}_\xi(\varepsilon, x) = 0$, para $x \leq -\varepsilon$, segue de modo análogo.

(b) Como $\widehat{\delta}_\xi \geq 0$, para cada $(\varepsilon, x) \in]0,1] \times \mathbb{R}$, tem-se

$$0 \leq \widehat{H}_\xi(\varepsilon, x) = \int_{-\infty}^{x} \widehat{\delta}_\xi(\varepsilon, t)dt \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\delta}_\xi(\varepsilon, t)dt = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \widehat{\delta}_\xi(\varepsilon, t)dt = 1$$

■

Indicamos com $\mathcal{H}_\Xi(\mathbb{R}) = \mathcal{H}_\Xi(\mathbb{R}; \mathbb{K})$ o conjunto de todas as funções de Heaviside determinado pelo conjunto $\Xi = \Xi(\mathbb{R})$ (ver [2.1.1]); isto é ,

[2.2.2] $$\mathcal{H}_\Xi(\mathbb{R}) := \{H_\xi \in \mathcal{G}(\mathbb{R}) \mid \xi \in \Xi\},$$

onde H_ξ é definida como na proposição anterior. Da Proposição 2.2.4 (III), do Lema 2.2.5 e da Proposição 2.2.9 segue

[2.2.3]. $$\mathcal{H}_\Xi(\mathbb{R}) \subset \mathcal{H}_r(\mathbb{R}) \subset \mathcal{H}_p(\mathbb{R}) \subset \mathcal{H}(\mathbb{R})$$

Observar que, se $\xi_1, \xi_2 \in \Xi(\mathbb{R})$, com $\xi_1(0) \neq \xi_2(0)$, é claro que $H_{\xi_1} \neq H_{\xi_2}$. Em consequencia, $\mathcal{H}_\Xi(\mathbb{R})$ é um conjunto com infinitos elementos.

Exemplo 2.2.10 : Dada $\xi \in \Xi(\mathbb{R})$, sejam $\widehat{\delta}_\xi, \widehat{H}_\xi, \delta_\xi$ e H_ξ as funções consideradas na Proposição 2.2.9 e seja f a função generalizada representada por

$$\widehat{f} : (\varepsilon, x) \in]0,1] \times \mathbb{R} \mapsto \widehat{H}_\xi(\varepsilon, x) + \lambda \in \mathbb{K},$$

onde $\lambda \neq 0$. Como $\widehat{f}' = \widehat{H}'_\xi = \widehat{\delta}_\xi$, temos $f' = \delta_\xi$; por outro lado, sendo $H_\xi \in \mathcal{H}(\mathbb{R})$, pela Proposição 2.2.2(a), $\widehat{H}_\xi(\varepsilon, \cdot) \to Y$, quando $\varepsilon \to 0^+$, em $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ e, portanto, pelo mesmo argumento, $f \notin \mathcal{H}(\mathbb{R})$.

Em virtude do Lema 2.2.5 as funções de Heaviside restritas satisfazem a condição (2.2.5.3). No entanto, em geral, as funções de Heaviside próprias não satisfazem essa condição , como ilustra o exemplo seguinte. Em consequencia, $\mathcal{H}_r(\mathbb{R}) \neq \mathcal{H}_p(\mathbb{R})$ e, em geral, as funções de Heaviside próprias não satisfazem também as condições dadas em (2.2.5.2).

Exemplo 2.2.11 : Seja $H \in \mathcal{G}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ representada pela função

$$\widehat{H} : (\varepsilon, x) \in]0,1] \times \mathbb{R} \mapsto u(\varepsilon, x)cos(\varepsilon x) \in \mathbb{R},$$

onde u é uma função moderada tal que $0 \leq u(\varepsilon,\cdot) \leq 1$ em $\mathbb{R}, \text{supp}(u(\varepsilon,\cdot)) \subset]-\varepsilon, +\infty[$ e $u(\varepsilon,\cdot) \equiv 1$ em $]-\frac{\varepsilon}{4}, +\infty[, (\varepsilon \in]0,1])$. Então , $H' \neq 0$ em $\mathcal{G}(\mathbb{R}^*;\mathbb{R})$,

$$\text{sup}_{(\varepsilon,x)\in]0,1]\times\mathbb{R}}|\widehat{H}(\varepsilon,x)| \leq 1 \text{ e } \widehat{H}(\varepsilon,\cdot) \to Y, \text{ para } \varepsilon \to 0^+, \text{ em } \mathbb{R}^*.$$

De fato, as condições $\widehat{H}(\varepsilon,x) = 0$, para $x \leq -\varepsilon$, e $\widehat{H}(\varepsilon,x) = cos(\varepsilon x)$, para $x \geq -\varepsilon/4$, implicam $\widehat{H}(\varepsilon,\cdot) \to Y$, para $\varepsilon \to 0^+$, em $\mathbb{R}^*$. Por outro lado, se fosse $H' = 0$ em $\mathcal{G}(\mathbb{R}^*;\mathbb{R})$ existiriam $C > 0$ e $\eta \in]0,1]$ tais que $|\widehat{H}''(\varepsilon, 1) \leq C\varepsilon^3$; isto é , $|cos\varepsilon| \leq C\varepsilon$, para $0 < \varepsilon < \eta$, o que é falso. Logo, $H' \neq 0$ em $\mathcal{G}(\mathbb{R}^*;\mathbb{R})$.

Para o estudo das soluções na forma de onda de choque das equações da hidrodinâmica é importante estudar a validade da condição

$$HK' \approx 0 \text{ em } \mathcal{G}(\mathbb{R}^*), \quad (H, K \in \mathcal{H}_p(\mathbb{R})),$$

ou da condição equivalente

$$HK' \approx 0 \text{ em } \mathcal{G}(\mathbb{R}^*_-) \quad \text{e} \quad HK' \approx 0 \text{ em } \mathcal{G}(\mathbb{R}^*_+), \quad (H, K \in \mathcal{H}_p(\mathbb{R})).$$

O exemplo dado em continuação mostra que nenhuma dessas condições são verdadeiras em geral (Ver (2.2.5.2), (2.2.5.3) e [2.2.1]).

Exemplo 2.2.12 : Sejam H e K em $\mathcal{G}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ representadas, respectivamente, pelas funções

$$\widehat{H} : (\varepsilon, x) \in]0,1] \times \mathbb{R} \mapsto 1 + u(\varepsilon, x)[\varepsilon^{\frac{1}{4}} cos(\frac{x}{\varepsilon}) - 1] \in \mathbb{R},$$

$$\widehat{K} : (\varepsilon, x) \in]0,1] \times \mathbb{R} \mapsto 1 + u(\varepsilon, x)[\sqrt{\varepsilon} sen(\frac{x}{\varepsilon}) - 1] \in \mathbb{R},$$

onde u é uma função moderada tal que

$$0 \leq u(\varepsilon, \cdot) \leq 1 \text{ em } \mathbb{R}, \mathrm{supp}(u(\varepsilon,\cdot)) \subset]-\infty, \varepsilon[\text{ e } u(\varepsilon, \cdot) \equiv 1 \text{ em }]-\infty, \frac{\varepsilon}{4}[, \qquad (\varepsilon \in]0,1]).$$

Então , $H, K \in \mathcal{H}_p(\mathbb{R};\mathbb{R})$ e HK' não é associado a zero em $\mathcal{G}(\mathbb{R}^*_-;\mathbb{R})$.

De fato, é claro que $H, K \in \mathcal{G}_{\ell b}(\mathbb{R};\mathbb{R})$. As condições $\widehat{H}(\varepsilon, x) = \widehat{K}(\varepsilon, x) = 1$, para $x \geq \varepsilon$; $\widehat{H}(\varepsilon, x) = \varepsilon^{\frac{1}{4}} cos(\frac{x}{\varepsilon})$ e $\widehat{K}(\varepsilon, x) = \sqrt{\varepsilon} sen(\frac{x}{\varepsilon})$, para $x < \frac{\varepsilon}{4}$, implicam $\widehat{L}(\varepsilon, \cdot) \to Y$, para $\varepsilon \to 0^+$, em $\mathbb{R}^*$, para $L = H, K$. Por outro lado, como $\widehat{K}'(\varepsilon, x) = \varepsilon^{-\frac{1}{2}} cos(\frac{x}{\varepsilon})$, para $x < \frac{\varepsilon}{4}$, vem

(1) $$\widehat{H}(\varepsilon, x)\widehat{K}'(\varepsilon, x) = \mu(\varepsilon) cos^2(\frac{x}{\varepsilon}), \quad (x < \frac{\varepsilon}{4}, \varepsilon \in]0,1]),$$

onde $\mu(\varepsilon) := \varepsilon^{-\frac{1}{4}}$. Supondo, por absurdo, que $HK' \approx 0$ em $\mathcal{G}(\mathbb{R}^*_-;\mathbb{R})$ tem-se

(2) $$\lim_{\varepsilon \to 0^+} I_\varphi(\varepsilon) = 0, \quad (\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^*_-;\mathbb{R})),$$

onde $I_\varphi : \varepsilon \in]0,1] \mapsto < \widehat{H}(\varepsilon, \cdot)\widehat{K}'(\varepsilon, \cdot), \varphi > \in \mathbb{R}$. Usando a condição (1), para cada $a, b \in \mathbb{R}^*_-$, com $a \leq b$, tem-se

$$I_\varphi(\varepsilon) \geq \mu(\varepsilon) \int_a^b cos^2(\frac{x}{\varepsilon})\varphi(x)dx, \quad (\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^*_-;\mathbb{R}_+), \varepsilon \in]0,1]).$$

Escolhendo $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^*_-;\mathbb{R}_+)$ tal que $\varphi \equiv 1$ em $[a, b] = [-2\pi, -\pi]$ segue

$$I_\varphi(\varepsilon) \geq \mu(\varepsilon) \int_a^b cos^2(\frac{x}{\varepsilon})dx = \frac{1}{2}\mu(\varepsilon)[\pi + \varepsilon sen(\frac{\pi}{\varepsilon})cos(\frac{3\pi}{\varepsilon})], \quad (\varepsilon \in]0,1]),$$

o que, em virtude da condição (2), não pode ocorrer, dado que $\mu(\varepsilon) \to +\infty$ e $\varepsilon sen(\frac{\pi}{\varepsilon})cos(\frac{3\pi}{\varepsilon}) \to 0$, para $\varepsilon \to 0^+$. Logo, não podemos ter $HK' \approx 0$ em $\mathcal{G}(\mathbb{R}^*_-;\mathbb{R})$.

CAPÍTULO 3

COMPOSIÇÃO DE FUNÇÕES GENERALIZADAS E ALGUMAS APLICAÇÕES

Neste capítulo são estudadas a composição e propriedades de algumas funções generalizadas, é dada uma caracterização para a inversibilidade de uma classe de funções generalizadas e, como uma aplicação , são consideradas algumas propriedades da composição de funções de classe C^∞ com funções generalizadas na forma de onda de choque.

Em todo o presente capítulo, a menos de mensão explícita em contrário, E, F e G denotam espaços de Banach e Ω (resp. Ω') indica um aberto não vazio de E (resp. F). Os resultados básicos de 3.1 valem quando E e F têm dimensão finita. Os resultados principais do trabalho (Capítulo 4) valem quando E, F e G têm dimensão finita. Entretanto, muitos resultados preparatórios de 3.1 valem em geral para E, F e G espaços de Banach quaisquer e as provas não são mais difíceis. Por esta razão optamos, em 3.1, por uma apresentação no contexto mais geral, introduzindo a hipótese dim $E < +\infty$ ou dim $F < +\infty$ apenas quando ela é imprescindível.

3.1 – Composição e Inversibilidade de Funções Generalizadas

Se F tem dimensão finita e g é uma função generalizada em $\mathcal{G}(\Omega'; G)$, para as funções generalizadas f em $\mathcal{G}(\Omega; F)$ que têm representantes satisfazendo, além de outra, a condição $V[\Omega; \Omega']$ da Definição 3.1.1, numa primeira parte deste § introduzimos, na Definição 3.1.10, a função composta $g \circ f$ e calculamos, no Teorema 3.1.11, a derivada intrínseca de ordem qualquer desta função . A ideia do cálculo da referida derivada foi sugerida por um resultado de [F] (Fórmula A) quando estudamos a moderação da função composta de duas funções moderadas; o cálculo, a menos de convenções adequadas, decorre, naturalmente, da fórmula correspondente para as funções clássicas. Convém observar aqui que em [A] e [A-B] foi introduzida a função $g \circ f$ (Ver Definição 7.5.3 em [A] e 7.4.3 em [A-B]), quando $E = \mathbb{R}^n, F = \mathbb{R}^m, G = \mathbb{R}^p, f \in \mathcal{G}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ satisfaz uma condição similar à $V[\Omega; \Omega']$ e $g \in \mathcal{G}(\Omega'; \mathbb{R}^p)$. Neste trabalho utilizaremos a composta $g \circ f$

num caso particularmente simples, o que nos permite usar uma definição menos geral.

Numa segunda parte deste §, considerando $F = \mathbb{R}^m$, dados α e β em $\overline{\mathbb{R}}^m, 0 \leq \alpha < \beta$, uma função φ em $C^\infty(]\alpha, \beta[; G)$ satisfazendo uma certa condição e uma função f em $\mathcal{G}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ tendo representantes satisfazendo, além de outra, a condição $V[\Omega]_\alpha^\beta$ da Definição 3.1.23(I), introduzimos, na Definição 3.1.27, a função $\varphi \circ f$ em $\mathcal{G}(\Omega; G)$. A noção de composição dada na Definição 3.1.27 não é um caso particular da noção dada na Definição 3.1.10; pois, se uma função satisfaz a condição $V[\Omega]_\alpha^\beta$ não implica que ela satisfaça também a condição $V[\Omega;]\alpha, \beta[]$ (Ver Observação da Definição 3.1.23). Por outro lado, o conceito de composição introduzido na Definição 3.1.10 não é um caso particular da noção dada na Definição 3.1.27, no sentido de que, pelo menos quando $F = \mathbb{R}^m$, o subconjunto aberto Ω' é qualquer.

Definição 3.1.1: Denotamos com $\mathcal{E}_*[\Omega; \Omega']$ (resp. $\mathcal{E}_{M,*}[\Omega; \Omega'], \mathcal{N}_*[\Omega; \Omega']$) o conjunto de todos elementos $u \in \mathcal{E}[\Omega; F]$ (resp. $u \in \mathcal{E}_M[\Omega; F], u \in \mathcal{N}[\Omega; F]$) que satisfazem as condições seguintes

$V_*[\Omega; \Omega']$ $$u(]0,1] \times \Omega) \subset \Omega';$$

$V[\Omega; \Omega']$ | Para cada $K \subset\subset \Omega$, existem $K' \subset\subset \Omega'$ e $\eta \in]0,1]$ tais que $u(]0, \eta[\times K) \subset K'$.

Indicamos com $\mathcal{G}_*(\Omega; \Omega')$ o conjunto de todos os elementos de $\mathcal{G}(\Omega; F)$ que tem pelo menos um representante em $\mathcal{E}_{M,*}[\Omega; \Omega']$.

Observar que, se F for de dimensão finita, $\mathcal{G}_*(\Omega; F) = \mathcal{G}_{\ell b}(\Omega; F)$, e que, em geral, $\mathcal{G}_*(\Omega; F) \neq \mathcal{G}(\Omega; F)$. Por exemplo, para $\xi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, com $\xi(0) \neq 0$, temos $\delta_\xi \notin \mathcal{G}_{\ell b}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{G}_*(\mathbb{R}^n)$ (Ver Proposição 1.2.21).

Lema 3.1.2: Dados $p \in \mathbb{N}^*, \sigma \in \mathcal{O}_p$ e uma aplicação u de $]0,1] \times \Omega$ em $\mathcal{L}(^pE; G)$, consideremos a função

$$u\mathcal{J}_\sigma^p : (\varepsilon, x) \in]0,1] \times \Omega \mapsto u(\varepsilon, x) \circ \mathcal{J}_\sigma^p \in \mathcal{L}(^pE; G),$$

onde $\mathcal{J}_\sigma^p$ é definida em [1.1.3]. Nestas condições são válidas as afirmações seguintes.

(I) Se $u \in X[\Omega; \mathcal{L}(^pE; G)]$, então $u\mathcal{J}_\sigma^p \in X[\Omega; \mathcal{L}(^pE; G)]$, para $X = \mathcal{E}, \mathcal{E}_M, \mathcal{N}$;

(II) Se $u, v \in \mathcal{E}_M[\Omega; \mathcal{L}(^pE; G)]$ e $u - v \in \mathcal{N}[\Omega; \mathcal{L}(^pE; G)]$, então $u\mathcal{J}_\sigma^p - v\mathcal{J}_\sigma^p$ é um elemento de $\mathcal{N}[\Omega; \mathcal{L}(^pE; G)]$.

Prova : (I): Pelo Lema 1.1.2, $u\mathcal{J}_\sigma^p \in \mathcal{E}[\Omega; \mathcal{L}(^pE; G)]$ e, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $\tau \in \mathcal{O}_{p+k}$ tal que $(u\mathcal{J}_\sigma^p)^{(k)}(\varepsilon, x) = u^{(k)}(\varepsilon, x) \circ \mathcal{J}_\tau^{p+k}$ e portanto

$$|(u\mathcal{J}_\sigma^p)^{(k)}(\varepsilon, x)|_{p+k} = |u^{(k)}(\varepsilon, x)|_{p+k}, \quad ((\varepsilon, x) \in]0, 1] \times \Omega).$$

Logo, da moderação (resp. nulidade) de u segue a moderação (resp. nulidade) de $u\mathcal{J}_\sigma^p$.
(II): Por (I) basta observar que $(u - v)\mathcal{J}_\sigma^p = u\mathcal{J}_\sigma^p - v\mathcal{J}_\sigma^p$.

∎

Em virtude do lema anterior podemos dar a definição seguinte.

Definição 3.1.3: Dados $p \in \mathbb{N}^*, \sigma \in \mathcal{O}_p$ e $f \in \mathcal{G}(\Omega; \mathcal{L}(^pE; G))$, definimos a função

$$f\mathcal{J}_\sigma^p := \widehat{f}\mathcal{J}_\sigma^p + \mathcal{N}[\Omega; \mathcal{L}(^pE; G)],$$

onde $\widehat{f}\mathcal{J}_\sigma^p : (\varepsilon, x) \in]0, 1] \times \Omega \mapsto \widehat{f}(\varepsilon, x) \circ \mathcal{J}_\sigma^p \in \mathcal{L}(^pE; G)$ e $\widehat{f}$ é um representante qualquer de f.

Definição 3.1.4: Para cada $(u, w) \in \mathcal{E}[\Omega; F] \times \mathcal{E}[\Omega'; G]$, com u satisfazendo a condição $V_*[\Omega; \Omega']$, e para cada $p \in \mathbb{N}$, seja $w^{(p)} \circ u \in \mathcal{E}[\Omega; \mathcal{L}(^pF; G)]$ a função definida pela fórmula

$$(w^{(p)} \circ u)(\varepsilon, x) := w^{(p)}(\varepsilon, u(\varepsilon, x)), \quad ((\varepsilon, x) \in]0, 1] \times \Omega).$$

Nas condições da definição anterior, usando a fórmula (1.1.4.1), para cada $p \in \mathbb{N}^*$ e cada $(\varepsilon, x) \in]0, 1] \times \Omega$, temos

[3.1.1] $$(w \circ u)^{(p)}(\varepsilon, x) = \sum_{\substack{1 \leq m \leq p \\ \alpha \in [p; m]}} C_\alpha^m \sum_{\sigma \in \mathcal{O}_p} (w^{(m)} \circ u)(\varepsilon, x) u^{(\alpha_1)}(\varepsilon, x) \ldots u^{(\alpha_m)}(\varepsilon, x) \mathcal{J}_\sigma^p,$$

onde $C_\alpha^m := (\alpha!m!)^{-1}$. Sejam $1 \leq m \leq p$ e $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in [p; m]$ fixados. Consideremos a aplicação $(m+1)$-linear contínua definida em [1.1.2]:

$$T : (B, A_1, \dots, A_m) \in \mathcal{L}(^m F; G) \times \mathcal{L}(^{\alpha_1} E; F) \times \dots \times \mathcal{L}(^{\alpha_m} E; F) \mapsto BA_1 \dots A_m \in \mathcal{L}(^p E; G)$$

Como $w^{(m)} \circ u \in \mathcal{E}[\Omega; \mathcal{L}(^m F; G)]$ e $u^{(\alpha_i)} \in \mathcal{E}_M[\Omega; \mathcal{L}(^{\alpha_i} E; F))], (1 \leq i \leq m)$, pela Proposição 1.2.15(I), resulta

$$(w^{(m)} \circ u, u^{(\alpha_1)}, \dots, u^{(\alpha_m)}) \in \mathcal{E}[\Omega; \mathcal{L}(^m F; G) \times \mathcal{L}(^{\alpha_1} E; F) \times \dots \times \mathcal{L}(^{\alpha_m} E; F)].$$

Sendo T de classe C^∞, pela Proposição 1.2.6 e pela Definição 3.1.4, temos

$$T \circ (w^{(m)} \circ u, u^{(\alpha_1)}, \dots, u^{(\alpha_m)}) \in \mathcal{E}[\Omega; \mathcal{L}(^p E; G)]$$

e , para cada $(\varepsilon, x) \in]0,1] \times \Omega$, da definição de T, vem

[3.1.2] $$[T \circ (w^{(m)} \circ u, u^{(\alpha_1)}, \dots, u^{(\alpha_m)})](\varepsilon, x) = (w^{(m)} \circ u)(\varepsilon, x) u^{(\alpha_1)}(\varepsilon, x) \dots u^{(\alpha_m)}(\varepsilon, x).$$

Para não sobrecarregar as notações , por analogia com a definição de T, usamos a convenção seguinte

[3.1.3] $$(w^{(m)} \circ u) u^{(\alpha_1)} \dots u^{(\alpha_m)} := T \circ (w^{(m)} \circ u, u^{(\alpha_1)}, \dots, u^{(\alpha_m)}) \in \mathcal{E}[\Omega; \mathcal{L}(^p E; G)];$$

isto é, por [3.1.2], para cada $(\varepsilon, x) \in]0,1] \times \Omega$,

$$[(w^{(m)} \circ u) u^{(\alpha_1)} \dots u^{(\alpha_m)}](\varepsilon, x) := (w^{(m)} \circ u)(\varepsilon, x) u^{(\alpha_1)}(\varepsilon, x) \dots u^{(\alpha_m)}(\varepsilon, x).$$

Com essa convenção , pela definição dada no Lema 3.1.2, a fórmula [3.1.1] pode ser escrita na forma

[3.1.4] $$(w \circ u)^{(p)} = \sum_{\substack{1 \leq m \leq p \\ \alpha \in [p;m]}} C_\alpha^m \sum_{\sigma \in \mathcal{O}_p} (w^{(m)} \circ u) u^{(\alpha_1)} \dots u^{(\alpha_m)} \mathcal{J}_\sigma^p \text{ em }]0,1] \times \Omega.$$

Proposição 3.1.5: Sejam $u, v \in \mathcal{E}_M[\Omega; F]$ e $w \in \mathcal{E}_M[\Omega'; G]$ tais que $u - v \in \mathcal{N}[\Omega; F]$ e

(I) u e v satisfazem a condição $V_*[\Omega; \Omega']$;

(II) o par (u, w) (ou (v, w)) satisfaz a propriedade : para cada $K \subset\subset \Omega$ e cada $p \in \mathbb{N}^*$, existem $C > 0, N \in \mathbb{N}$ e $\eta \in]0, 1]$ verificando

$$\sup_{x \in K} |(w^{(p)} \circ u)(\varepsilon, x)|_p \leq C\varepsilon^{-N}, \qquad (0 < \varepsilon < \eta);$$

(III) para cada $K \subset\subset \Omega$ e cada $p, q \in \mathbb{N}$, existem $C > 0$ e $\eta \in]0, 1]$ tais que

$$\sup_{x \in K} |(w^{(p)} \circ u - w^{(p)} \circ v)(\varepsilon, x)|_p \leq C\varepsilon^q, \quad (0 < \varepsilon < \eta).$$

Então , $w \circ u - w \circ v \in \mathcal{N}[\Omega; G]$.

Prova : Fixados $K \subset\subset \Omega$ e $p, q \in \mathbb{N}$ devemos achar $C > 0$ e $\eta \in]0, 1]$ verificando

(3.1.5.1) $$\sup_{x \in K} |(w \circ u - w \circ v)^{(p)}(\varepsilon, x)|_p \leq C\varepsilon^q, \quad (0 < \varepsilon < \eta).$$

Suponhamos que $p \geq 1$ e que o par (v, w) satisfaz a propriedade (II). Pela condição (I), usando [3.1.1], para cada $(\varepsilon, x) \in]0, 1] \times \Omega$, temos

$$(w \circ u - w \circ v)^{(p)}(\varepsilon, x) = \sum_{m,\alpha} C_\alpha^m \sum_\sigma [(w^{(m)} \circ u)(\varepsilon, x) \Pi_{j=1}^m u^{(\alpha_j)}(\varepsilon, x) -$$
$$- (w^{(m)} \circ v)(\varepsilon, x) \Pi_{j=1}^m v^{(\alpha_j)}(\varepsilon, x)] \mathcal{J}_\sigma^p.$$

(Quando supomos que o par (u, w) satisfaz a propriedade (II), consideramos a expressão $(w \circ v - w \circ u)^{(p)}(\varepsilon, x)$). Pelo Lema 1.1.1, com

$$\begin{aligned} B &= (w^{(m)} \circ u)(\varepsilon, x) & A_i &= u^{(\alpha_i)}(\varepsilon, x) \\ B' &= (w^{(m)} \circ v)(\varepsilon, x) & A'_i &= v^{(\alpha_i)}(\varepsilon, x), \end{aligned} \quad (1 \leq i \leq m),$$

a igualdade anterior pode ser escrita na forma

(3.1.5.2) $$(w \circ u - w \circ v)^{(p)}(\varepsilon, x) = w_1(\varepsilon, x) + w_2(\varepsilon, x), \ \ ((\varepsilon, x) \in]0, 1] \times \Omega),$$

onde $w_1, w_2 \in \mathcal{E}[\Omega; \mathcal{L}(^pE; G)]$ são dadas por

$$w_1(\varepsilon, x) := \sum_{m,\alpha} C_\alpha^m \sum_\sigma (w^{(m)} \circ u - w^{(m)} \circ v)(\varepsilon, x) u^{(\alpha_1)}(\varepsilon, x) \ldots u^{(\alpha_m)}(\varepsilon, x) \mathcal{J}_\sigma^p;$$

$$w_2(\varepsilon, x) := \sum_{m,\alpha} C^m_\alpha \sum_\sigma \sum_{i=1}^{m} (w^{(m)} \circ v)(\varepsilon, x)\Pi_{j=1}^{i-1} u^{(\alpha_j)}(\varepsilon, x) R^{(\alpha_i)}(\varepsilon, x)\Pi_{j=i+1}^{m} v^{(\alpha_j)}(\varepsilon, x)\mathcal{J}^p_\sigma;$$

onde $R := u - v$. Após uma estimativa, usando [1.1.3], segue

$$(3.1.5.3) \quad |w_1(\varepsilon, x)|_p \le \sum_{m=1}^{p} |(w^{(m)} \circ u - w^{(m)} \circ v)(\varepsilon, x)|_m \sum_\alpha C^m_\alpha(p)\Pi_{j=1}^{m} |u^{(\alpha_j)}(\varepsilon, x)|_{\alpha_j},$$

$$(3.1.5.4) \qquad |w_2(\varepsilon, x)|_p \le \sum_{m=1}^{p} |(w^{(m)} \circ v)(\varepsilon, x)|_m \sum_\alpha C^m_\alpha(p) P^m_\alpha(\varepsilon, x),$$

para cada $(\varepsilon, x) \in]0, 1] \times \Omega$, onde $C^m_\alpha(p) := p! C^m_\alpha$ e

$$P^m_\alpha(\varepsilon, x) := \sum_{i=1}^{m} \Pi_{j=1}^{i-1} |u^{(\alpha_j)}(\varepsilon, x)|_{\alpha_j} |R^{(\alpha_i)}(\varepsilon, x)|_{\alpha_i} \Pi_{j=i+1}^{m} |v^{(\alpha_j)}(\varepsilon, x)|_{\alpha_j}.$$

Como $u \in \mathcal{E}_M[\Omega; F]$, existem $C_0 > 0, N \in \mathbb{N}$ e $\eta_0 \in]0, 1]$ tais que

$$(3.1.5.5) \quad \sup_{x\in K} \sum_\alpha C^m_\alpha(p)\Pi_{j=1}^{m} |u^{(\alpha_j)}(\varepsilon, x)|_{\alpha_j} \le C_0 \varepsilon^{-N}, \quad (0 < \varepsilon < \eta_0, 1 \le m \le p),$$

e pela condição (III), existem $C_1 > 0$ e $\eta_1 \in]0, \eta_0]$ verificando

$$\sup_{x\in K} \sum_{m=1}^{p} |(w^{(m)} \circ u - w^{(m)} \circ v)(\varepsilon, x)|_m \le C_1 \varepsilon^{q+N}, \quad (0 < \varepsilon < \eta_1),$$

e portanto as desigualdades (3.1.5.3) e (3.1.5.5) acarretam

$$(3.1.5.6) \qquad \sup_{x\in K} |w_1(\varepsilon, x)|_p \le C_0 C_1 \varepsilon^q, \quad (0 < \varepsilon < \eta_1).$$

De modo análogo, como $u, v \in \mathcal{E}_M[\Omega; F], R \in \mathcal{N}[\Omega; F]$ e o par (v, w) satisfaz a propriedade (II), usando a condição (3.1.5.4) podemos achar $C_2 > 0$ e $\eta \in]0, \eta_1]$ tais que

$$\sup_{x\in K} |w_2(\varepsilon, x)|_p \le C_2 \varepsilon^q, \qquad (0 < \varepsilon < \eta),$$

o que junto com as condições $(3.1.5.k), k = 2, 6$ implica (3.1.5.1), com $C := C_0 C_1 + C_2$.

■

Observar que, se u e w satisfazem as hipóteses da Proposição 3.1.5, em virtude da fórmula [3.1.1] , a propriedade (II), aplicada ao par (u, w), é equivalente à condição : $w^{(p)} \circ u \in \mathcal{E}_M[\Omega; \mathcal{L}(^pF; G)], \quad (p \in \mathbb{N}^*)$.

Proposição 3.1.6: Se $F_1, \ldots, F_n$ e G são espaços de Banach e $B \in \mathcal{L}(F_1, \ldots, F_n; G)$, são válidas as afirmações seguintes.

(I) Se $u \in \mathcal{E}_M[\Omega; F_1 \times \ldots \times F_n]$, então $B \circ u \in \mathcal{E}_M[\Omega; G]$;

(II) Se $u, v \in \mathcal{E}_M[\Omega; F_1 \times \ldots \times F_n]$ e $u - v \in \mathcal{N}[\Omega; F_1 \times \ldots \times F_n]$, então $B \circ u - B \circ v \in \mathcal{N}[\Omega; G]$.

(A norma no espaço produto é a norma euclidiana considerada em 1.1).

Prova : Denotamos com $\mathbb{F}_n := F_1 \times \ldots \times F_n$ e suponhamos $w = (w_1, \ldots, w_n), w = u, v$. Vamos aplicar a Proposição 3.1.5 no caso particular $\Omega' = \mathbb{F}_n$ e $w = B$. Inicialmente provaremos que o par (u, B) (resp. a terna (u, v, B)) verifica a condição (II)(resp. (III)) desse resultado (A condição (I) está trivialmente satisfeita). A verificação dessas condições será por indução sobre n .

a) No caso $n = 1$: Temos $\mathbb{F}_1 = F_1, u = u_1, v = v_1 \in \mathcal{E}_M[\Omega; \mathbb{F}_1]; u - v \in \mathcal{N}[\Omega; \mathbb{F}_1]$; e $B \in \mathcal{L}(\mathbb{F}_1; G)$; donde,

$$|B(h)| \leq |B|_1 |h|, \quad B'(h) = B, \quad (h \in F), \quad \text{e} \quad B^{(\kappa)} = 0, \ \text{para } \kappa \geq 2.$$

Neste caso , é clara a validade das condições (II) e (III) acima referidas.

b) Suponhamos agora que a condição (II) é satisfeita para cada par (u_0, B_0), onde $u_0 \in \mathcal{E}_M[\Omega; \widetilde{\mathbb{F}}_{n-1}]$ e B_0 é uma aplicação $(n-1)$–linear contínua de $\widetilde{\mathbb{F}}_{n-1}$ em $\widetilde{G}$, e que a condição (III) é satisfeita para cada terna (u_0, v_0, B_0), onde $u_0, v_0 \in \mathcal{E}_M[\Omega; \widetilde{\mathbb{F}}_{n-1}]$, $u_0 - v_0 \in \mathcal{N}[\Omega; \widetilde{\mathbb{F}}_{n-1}]$, e B_0 é como acima, sendo $\widetilde{F}_1, \ldots, \widetilde{F}_{n-1}$ e $\widetilde{G}$ espaços de Banach quaisquer e $\widetilde{\mathbb{F}}_{n-1} := \widetilde{F}_1 \times \ldots \times \widetilde{F}_{n-1}$. Para cada $\imath = 1, \ldots, n$, consideremos o espaço produto $\widehat{F}_\imath := F_1 \times \ldots \times F_{\imath-1} \times F_{\imath+1} \times \ldots \times F_n$; a projeção $p_\imath : \mathbb{F}_n \to \widehat{F}_\imath$; a aplicação $(n-1)$– linear contínua $B_\imath$ de $\widehat{F}_\imath$ em $\mathcal{L}(\mathbb{F}_n; G)$ definida por

$$B_\imath(h_1, \ldots, h_{\imath-1}, h_{\imath+1}, \ldots, h_n) \cdot k = B(h_1, \ldots, h_{\imath-1}, k_\imath, h_{\imath+1}, \ldots, h_n),$$

para cada $(h_1, \ldots, h_{\imath-1}, h_{\imath+1}, \ldots, h_n) \in \widehat{F}_\imath$ e cada $k = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{F}_n$; e as funções

$$\widehat{w}_\imath = (w_1, \ldots, w_{\imath-1}, w_{\imath+1}, \ldots, w_n) \in \mathcal{E}_M[\Omega; \widehat{F}_\imath], \quad w = u, v.$$

Para cada $h, k \in \mathbb{F}_n$, com $y = (y_1, \ldots, y_n), y = h, k$, é válida

$$B'(h) \cdot k = \sum_{i=1}^{n} B(h_1, \ldots, h_{i-1}, k_i, h_{i+1}, \ldots, h_n).$$

Desta fòrmula , com as notações dadas acima , temos $B' = B_1 \circ p_1 + \ldots + B_n \circ p_n$; donde

$$B^{(\kappa)} = \sum_{i=1}^{n} (B_i \circ p_i)^{(\kappa-1)} \text{ em } \mathbb{F}_n, \quad (\kappa \geq 1).$$

Pela fórmula (1.1.4.1) , para cada $i = 1, \ldots, n$ e cada $h \in \mathbb{F}_n$, temos

$$(B_i \circ p_i)^{(\kappa-1)}(h) = \sum_{\substack{1 \leq m \leq \kappa-1 \\ \alpha \in [\kappa-1; m]}} C_\alpha^m \sum_{\sigma \in \mathcal{O}_{\kappa-1}} B_i^{(m)}(p_i(h)) p_i^{(\alpha_1)}(h) \ldots p_i^{(\alpha_m)}(h) \mathcal{J}_\sigma^{\kappa-1},$$

onde $C_\alpha^m := (m!\alpha!)^{-1}$. Dessas duas fórmulas , para cada $(\varepsilon, x) \in]0, 1] \times \Omega$, vem

(3.1.6.1)
$$(B^{(\kappa)} \circ u)(\varepsilon, x) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{1 \leq m \leq \kappa-1 \\ \alpha \in [\kappa-1; m]}} C_\alpha^m \sum_{\sigma \in \mathcal{O}_{\kappa-1}} (B_i^{(m)} \circ \widehat{u}_i)(\varepsilon, x)(p_i^{(\alpha_1)} \circ u)(\varepsilon, x) \ldots (p_i^{(\alpha_m)} \circ u)(\varepsilon, x) \mathcal{J}_\sigma^{\kappa-1}, (\kappa \geq 1).$$

Sendo cada B_i uma aplicação $(n-1)$ – linear contínua , cada $\widehat{u}_i \in \mathcal{E}_M[\Omega; \widehat{F}_i]$ e cada $p_i \in \mathcal{L}(\mathbb{F}_n; \widehat{F}_i)$, usando a igualdade (3.1.6.1) junto com o caso a) (aplicado ao par (u, p_i)) e a hipótese indutiva(aplicada ao par $(\widehat{u}_i, B_i)$), segue que o par (u, B) satisfaz a condição (II). Por outro lado , como B é uma aplicação $n-$ linear podemos escrever

$$B(h) - B(k) = \sum_{i=1}^{n} B(h_1, \ldots, h_{i-1}, h_i - k_i, k_{i+1}, \ldots, k_n), (y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{F}_n, y = h, k);$$

donde, para cada $(\varepsilon, x) \in]0, 1] \times \Omega$, temos

$$|(B \circ u - B \circ v)(\varepsilon, x)| \leq |B||(u - v)(\varepsilon, x)| \sum_{i=1}^{n} |u(\varepsilon, x)|^{i-1} |v(\varepsilon, x)|^{n-i}.$$

e portanto (levando em conta a moderação das funções u e v, e a nulidade de $u - v$), a terna (u, v, B) satisfaz a condição (III), no caso $\kappa = 0$. Para cada $\kappa \geq 1$ e cada $(\varepsilon, x) \in]0, 1] \times \Omega$, usando a igualdade (3.1.6.1) , temos

$$(B^{(\kappa)} \circ u - B^{(\kappa)} \circ v)(\varepsilon, x) = \sum_{\imath=1}^{n} \sum_{m,\alpha,\sigma} C_\alpha^m [(B_\imath^{(m)} \circ \widehat{u}_\imath)(\varepsilon, x) \prod_{\jmath=1}^{m} (p_\imath^{(\alpha_\jmath)} \circ u)(\varepsilon, x) -$$

$$- (B_\imath^m \circ \widehat{v}_\imath)(\varepsilon, x) \prod_{\jmath=1}^{m} (p_\imath^{(\alpha_\jmath)} \circ u)(\varepsilon, x)] \mathcal{J}_\sigma^{\kappa-1}.$$

Para cada $\imath = 1, \ldots, n$ aplicando o Lema 1.1.1, com $B, B', A_\jmath$ e $A'_\jmath, (1 \leq \jmath \leq m)$, substituido respectivamente pelas funções

$$(B_\imath^{(m)} \circ \widehat{u}_\imath)(\varepsilon, x), \ (B_\imath^{(m)} \circ \widehat{v}_\imath)(\varepsilon, x), \ (p_\imath^{(\alpha_\jmath)} \circ u)(\varepsilon, x) \text{ e } (p_\imath^{(\alpha_\jmath)} \circ v)(\varepsilon, x),$$

$(1 \leq \jmath \leq m)$, a igualdade anterior pode ser escrita na forma

(3.1.6.2) $$(B^{(\kappa)} \circ u - B^{(\kappa)} \circ v)(\varepsilon, x) = w_1(\varepsilon, x) + w_2(\varepsilon, x), ((\varepsilon, x) \in]0, 1] \times \Omega),$$

onde $w_1, w_2 \in \mathcal{E}[\Omega; \mathcal{L}({}^\kappa\mathbb{F}_n; G)]$ são dadas por

$$w_1(\varepsilon, x) := \sum_{\imath=1}^{n} \sum_{m,\alpha,\sigma} C_\alpha^m (B_\imath^{(m)} \circ \widehat{u}_\imath - B_\imath^{(m)} \circ \widehat{v}_\imath)(\varepsilon, x)(p_\imath^{(\alpha_1)} \circ u)(\varepsilon, x) \ldots$$

$$\ldots (p_\imath^{(\alpha_m)} \circ u)(\varepsilon, x) \mathcal{J}_\sigma^{\kappa-1},$$

$$w_2(\varepsilon, x) := \sum_{\imath=1}^{n} \sum_{m,\alpha,\sigma} C_\alpha^m \sum_{\tau=1}^{m} (B_\imath^{(m)} \circ \widehat{v}_\imath)(\varepsilon, x) \prod_{\jmath=1}^{\tau-1} (p_\imath^{(\alpha_\jmath)} \circ u)(\varepsilon, x) \cdot$$

$$\cdot (p_\imath^{(\alpha_\tau)} \circ u - p_\imath^{(\alpha_\tau)} \circ v)(\varepsilon, x) \prod_{\jmath=\tau+1}^{m} (p_\imath^{(\alpha_\jmath)} \circ v)(\varepsilon, x) \mathcal{J}_\sigma^{\kappa-1}.$$

Pela condição (3.1.6.2) junto com a propriedade (II) da Proposição 3.1.5 (aplicada aos pares $(u, p_\imath), (v, p_\imath)$ e $(\widehat{v}_\imath, B_\imath)$), o caso a) (aplicado à terna $(u, v, p_\imath)$) e a hipótese indutiva (aplicada à terna $(\widehat{u}_\imath, \widehat{v}_\imath, B_\imath)$), segue que a terna (u, v, B) satisfaz a condição (III), no caso $\kappa \geq 1$.

(I) : Para cada $p \geq 1$ e cada $(\varepsilon, x) \in]0, 1] \times \Omega$, pela formula [3.1.1], temos

$$(B \circ u)^{(p)}(\varepsilon, x) = \sum_{\substack{1 \leq m \leq p \\ \alpha \in [p;m]}} C_\alpha^m \sum_{\sigma \in \mathcal{O}_p} (B^{(m)} \circ u)(\varepsilon, x) u^{(\alpha_1)}(\varepsilon, x) \ldots u^{(\alpha_m)}(\varepsilon, x) \mathcal{J}_\sigma^p,$$

o que junto com a moderação de u, a propriedade (II) da Proposição 3.1.5 (aplicada ao par (u, B)) e a condição

$$|(B \circ u)(\varepsilon, x)| \leq |B|_n |u(\varepsilon, x)|^n, \quad ((\varepsilon, x) \in]0,1] \times \Omega),$$

implica a moderação da aplicação $B \circ u$.

(II) : Temos provado que os pares (u, B) e (v, B) satisfazem a condição (II) e a terna (u, v, B) verifica a condição (III), da Proposição 3.1.5 . Em consequência, pela mesma proposição , $B \circ u - B \circ v \in \mathcal{N}[\Omega; G]$.

■

Em virtude da proposição anterior podemos dar a definição seguinte.

Definição 3.1.7 : Se $F_1, \ldots, F_n$ e G são espaços de Banach, $f \in \mathcal{G}(\Omega; F_1 \times \ldots \times F_n)$ e $B \in \mathcal{L}(F_1, \ldots, F_n; G)$, chama-se *função composta de* B *com* f à função

$$B \circ f := B \circ \widehat{f} + \mathcal{N}[\Omega; G],$$

onde $B \circ \widehat{f} : (\varepsilon, x) \in]0,1] \times \Omega \mapsto B(\widehat{f}(\varepsilon, x)) \in G$ e $\widehat{f}$ é um representante qualquer de f.

Proposição 3.1.8 : Suponhamos que F tem dimensão finita. Então , para cada $u \in \mathcal{E}_{M,*}[\Omega; \Omega']$ e cada $v \in \mathcal{E}_M[\Omega; F]$ satisfazendo a condição $V_*[\Omega; \Omega']$, com $u - v \in \mathcal{N}[\Omega; F]$, são válidas as afirmações seguintes:

(I) v satisfaz a condição $V[\Omega; \Omega']$;

(II) se $w \in \mathcal{E}_M[\Omega'; G]$, então a terna (u, v, w) satisfaz a condição (III) da Proposição 3.1.5.

Prova : Fixado $K \subset\subset \Omega$, por hipótese, existem $K' \subset\subset \Omega'$ e $\eta' \in]0,1]$ tais que $u(]0, \eta'[\times K) \subset K'$. Como $R := v - u \in \mathcal{N}[\Omega; F]$, existe $\eta'' \in]0, \eta']$ tal que $R(]0, \eta''[\times K) \subset B_r(0)$, onde $r > 0$ é tal que $L := K' + \overline{B_r(0)} \subset \Omega'$. Dado $(\varepsilon, x) \in]0, \eta''[\times K$, para $y := u(\varepsilon, x) \in K'$, temos $\theta(t) \in B_r(y) \subset \overset{\circ}{L}, (0 \leq t \leq 1)$, onde $\theta(t) := u(\varepsilon, x) + tR(\varepsilon, x)$, e portanto $v(\varepsilon, x) = \theta(1) \in L$. Em consequencia, é válida a afirmação (I) e o segmento fechado, $[u(\varepsilon, x), v(\varepsilon, x)]$, que une $u(\varepsilon, x)$ com $v(\varepsilon, x)$ esta contido em L. Sendo F de dimensão finita, a bola fechada $\overline{B_r(0)}$ é compacta e portanto $L \subset\subset \Omega'$. Então , fixado $p \in \mathbb{N}$, como $w \in \mathcal{E}_M[\Omega'; G]$, existem $N \in \mathbb{N}, C_1 > 0$ e $\eta_1 \in]0, \eta'']$ tais que

$$\sup_{y \in L} |w^{(p+1)}(\varepsilon, y)|_{p+1} \leq C_1 \varepsilon^{-N}, \quad (0 < \varepsilon < \eta_1).$$

Dado $q \in \mathbb{N}$, sejam $C_2 > 0$ e $\eta \in]0, \eta_1]$ satisfazendo

$$\sup_{x \in K} |R(\varepsilon, x)| \leq C_2 \varepsilon^{q+N}, \quad (0 < \varepsilon < \eta).$$

Por outro lado, para cada $(\varepsilon, x) \in]0, \eta[\times K$ dado, usando o teorema do valor médio, temos

$$|(w^{(p)} \circ u - w^{(p)} \circ v)(\varepsilon, x)|_p \leq |R(\varepsilon, x)| \sup_{y \in [u(\varepsilon,x), v(\varepsilon,x)]} |w^{(p+1)}(\varepsilon, y)|_{p+1},$$

o que junto com as duas desigualdades anteriores implica a condição (III) da Proposição 3.1.5.

∎

Proposição 3.1.9 : Para cada $u \in \mathcal{E}_{M,*}[\Omega; \Omega']$ e cada $v \in \mathcal{E}_M[\Omega; F]$ satisfazendo a condição $V_*[\Omega; \Omega']$, são válidas as afirmações seguintes.

(a) Se $w \in \mathcal{E}_M[\Omega'; G]$ (resp. $w \in \mathcal{N}[\Omega'; G]$), então $w \circ u \in \mathcal{E}_M[\Omega; G]$, (resp. $w \circ u \in \mathcal{N}[\Omega'; G]$);

(b) Se $w_1, w_2 \in \mathcal{E}_M[\Omega'; G]$ e $w_1 - w_2 \in \mathcal{N}[\Omega'; G]$, então $w_1 \circ u - w_2 \circ u \in \mathcal{N}[\Omega; G]$;

Além disso, se F for de dimensão finita valem ainda as asserções seguintes.

(c) Se $u - v \in \mathcal{N}[\Omega; F]$ e $w \in \mathcal{E}_M[\Omega'; G]$, então $w \circ u - w \circ v \in \mathcal{N}[\Omega; G]$;

(d) Se $u - v \in \mathcal{N}[\Omega; F]$ e se $w_1, w_2 \in \mathcal{E}_M[\Omega'; G]$ são tais que $w_1 - w_2 \in \mathcal{N}[\Omega'; G]$, então $w_1 \circ u - w_2 \circ v \in \mathcal{N}[\Omega; G]$.

Prova : O item (b) segue de (a). A afirmação (d) segue de (b) e (c).

Prova de (a) : Verifiquemos que $w \circ u \in \mathcal{N}[\Omega; G]$ (A verificação da moderação é similar). Fixados $K \subset\subset \Omega$ e $p, q \in \mathbb{N}$, devem existir $C > 0$ e $\eta \in]0, 1]$ de modo que

(3.1.9.1) $$\sup_{x \in K} |(w \circ u)^{(p)}(\varepsilon, x)|_p \leq C \varepsilon^q, \quad (0 < \varepsilon < \eta).$$

Suponhamos $p \geq 1$ (O caso $p = 0$ é imediato). Como u satisfaz a condição $V_*[\Omega; \Omega']$, as funções u e w satisfazem a fórmula [3.1.1]. Sejam $N \in \mathbb{N}, C_1 > 0$ e $\eta_1 \in]0,1]$ verificando

$$(3.1.9.2) \qquad \sup_{x \in K} \sum_{\alpha} C_\alpha^m(p) \Pi_{i=1}^m |u^{(\alpha_i)}(\varepsilon, x)|_{\alpha_i} \leq C_1 \varepsilon^{-N}, \quad (0 < \varepsilon < \eta_1, 1 \leq m \leq p),$$

onde $C_\alpha^m(p) := p! C_\alpha^m$, e sejam $K' \subset\subset \Omega'$ e $\eta' \in]0, \eta_1]$ tais que

$$(3.1.9.3) \qquad u(]0, \eta'[\times K) \subset K'.$$

Sejam $C_2 > 0$ e $\eta \in]0, \eta']$ satisfazendo

$$\sup_{y \in K'} \sum_{m=1}^{p} |w^{(m)}(\varepsilon, y)|_m \leq C_2 \varepsilon^{q+N}, \quad (0 < \varepsilon < \eta),$$

o que junto com as condições [3.1.1] , (3.1.9.2) e (3.1.9.3) implica (3.9.1.1), com $C := C_1 C_2$.

Prova de (c) : Sendo F de dimensão finita, pela Proposição 3.1.8, $v \in \mathcal{E}_{M,*}[\Omega; F]$ e a terna (u, v, w) satisfaz a condição (II) da Proposição 3.1.5. Por outro lado, para $R = u, v$, como consequencia da Proposição 1.2.3(I) e de (a), temos $w^{(p)} \circ R \in \mathcal{E}_M[\Omega; \mathcal{L}(^pF; G)], (p \in \mathbb{N}^*)$. Portanto, a afirmação (c) segue da Proposição 3.1.5.

∎

Observação : Se $u \in \mathcal{N}_*[\Omega; \Omega']$ e $w \in \mathcal{E}_M[\Omega'; G]$, não temos necessariamente $w \circ u \in \mathcal{N}[\Omega; G]$ (Basta tomar $w =$ cte.$\neq 0$).

A proposição anterior nos permite dar a definição seguinte.

Definição 3.1.10 : Dados E, F e G espaços de Banach, sendo F de dimensão finita, sejam Ω e Ω' subconjuntos abertos não vazios de E e F, respectivamente. Para cada $(f, g) \in \mathcal{G}_*(\Omega; \Omega') \times \mathcal{G}(\Omega'; G)$ definimos a *função composta*

$$g \circ f := \widehat{g} \circ \widehat{f} + \mathcal{N}[\Omega; G],$$

onde $\widehat{g} \circ \widehat{f} : (\varepsilon, x) \in]0,1] \times \Omega \mapsto \widehat{g}(\varepsilon, \widehat{f}(\varepsilon, x)) \in G$; $\widehat{f}$, satisfazendo a condição $V_*[\Omega; \Omega']$, e $\widehat{g}$ são representantes quaisquer de f e g, respectivamente.

A seguir obteremos uma fórmula análoga a (1.1.4.1) para a função composta $g \circ f$, quando $f \in \mathcal{G}_*(\Omega; \Omega')$ e $g \in \mathcal{G}(\Omega'; G)$. Para tanto, algumas notações adequadas são úteis. Sejam u, verificando a condição $V_*[\Omega; \Omega']$, e w representantes de f e g, respectivamente. Dado $p \in \mathbb{N}^*$, a função composta $w \circ u$ verifica a fórmula [3.1.4]. Sejam $m = 1, \ldots, p$ e $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in [p; m]$ fixados. Pelas definições 1.2.9 e 3.1.10, $g^{(m)} \circ f$ é a classe de $w^{(m)} \circ u$. Por outro lado, pela Definição 1.2.16, $(g^{(m)} \circ f, g^{(\alpha_1)}, \ldots, g^{(\alpha_m)})$ é a classe de $(w^{(m)} \circ u, u^{(\alpha_1)}, \ldots, u^{(\alpha_m)})$; em consequência, pela Definição 3.1.7, $T \circ (g^{(m)} \circ f, f^{(\alpha_1)}, \ldots, f^{(\alpha_m)})$ é a classe de $T \circ (w^{(m)} \circ u, u^{(\alpha_1)}, \ldots, u^{(\alpha_m)})$, onde T é a aplicação $(m+1)$–linear contínua definida em [1.1.2]. Então , pela notação dada em [3.1.3], $T \circ (g^{(m)} \circ f, f^{(\alpha_1)}, \ldots, f^{(\alpha_m)})$ é a classe de $(w^{(m)} \circ u) u^{(\alpha_1)} \ldots u^{(\alpha_m)}$. Por analogia com a notação [3.1.3] definimos

[3.1.5] $$(g^{(m)} \circ f) f^{(\alpha_1)} \ldots f^{(\alpha_m)} := T \circ (g^{(m)} \circ f, f^{(\alpha_1)}, \ldots, f^{(\alpha_m)}).$$

Sendo assim, pela Definição 3.1.3, $(g^{(m)} \circ f) f^{(\alpha_1)} \ldots f^{(\alpha_m)} \mathcal{J}^p_\sigma$ é a classe de $(w^{(m)} \circ u) u^{(\alpha_1)} \ldots u^{(\alpha_m)} \mathcal{J}^p_\sigma, (\sigma \in \mathcal{O}_p)$.

Com as notações dadas anteriormente, pela Definição 3.1.10 e pela fórmula [3.1.4], temos o resultado seguinte.

Teorema 3.1.11 : Sejam E, F, G, Ω e Ω' como na Definição 3.1.10. Então , para cada $(f, g) \in \mathcal{G}_*(\Omega; \Omega') \times \mathcal{G}(\Omega'; G)$, a função composta $g \circ f$ verifica a fórmula seguinte

(3.1.11.1) $$(g \circ f)^{(p)} = \sum_{\substack{1 \leq m \leq p \\ \alpha \in [p;m]}} \frac{1}{\alpha! m!} \sum_{\sigma \in \mathcal{O}_p} (g^{(m)} \circ f) f^{(\alpha_1)} \ldots f^{(\alpha_m)} \mathcal{J}^p_\sigma, \quad (p \in \mathbb{N}^*),$$

sendo $(g^{(m)} \circ f) f^{(\alpha_1)} \ldots f^{(\alpha_m)} \mathcal{J}^p_\sigma$ a classe da função

$$(\varepsilon, x) \in]0,1] \times \Omega \mapsto (\widehat{g}^{(m)} \circ \widehat{f})(\varepsilon, x) \widehat{f}^{(\alpha_1)}(\varepsilon, x) \ldots \widehat{f}^{(\alpha_m)}(\varepsilon, x) \mathcal{J}^p_\sigma \in \mathcal{L}({}^p E; G),$$

(Ver [1.1.4], [3.1.2], [3.1.3], Definição 3.1.3 e [3.1.5]), onde $\widehat{f}$, satisfazendo a condição $V_*[\Omega;\Omega']$, e $\widehat{g}$ são representantes quaisquer de f e g, respectivamente. No caso $E = F = \mathbb{R}$ temos a fórmula correspondente

$$(3.1.11.2) \qquad (g \circ f)^{(p)} = \sum_{\substack{1 \leq m \leq p \\ \alpha \in [p;m]}} \frac{p!}{\alpha! m!} f^{(\alpha_1)} \ldots f^{(\alpha_m)} (g^{(m)} \circ f) \in \mathcal{G}(\Omega; G), \quad (p \in \mathbb{N}^*),$$

sendo $f^{(\alpha_1)} \ldots f^{(\alpha_m)}(g^{(m)} \circ f)$ a classe da função

$$(\varepsilon, x) \in]0,1] \times \Omega \mapsto \widehat{f}^{(\alpha_1)}(\varepsilon, x) \ldots \widehat{f}^{(\alpha_m)}(\varepsilon, x)(\widehat{g}^{(m)} \circ \widehat{f})(\varepsilon, x) \in G,$$

onde $\widehat{f}$ e $\widehat{g}$ são como acima.

Prova : Sejam u, satisfazendo a condição $V_*[\Omega;\Omega']$, e w representantes de f e g, respectivamente. Dado $p \in \mathbb{N}^*$, a função $w \circ u$ verifica a fórmula [3.1.4]. Pelas definições 3.1.10 e 1.2.9, a função $(g \circ f)^{(p)}$ é a classe de $(w \circ u)^{(p)}$. Por outro lado, pela observação após [3.1.5], para cada $m = 1, \ldots, p$, cada $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ em $[p;m]$ e cada $\sigma \in \mathcal{O}_p$, a função $(g^{(m)} \circ f) f^{(\alpha_1)} \ldots f^{(\alpha_m)} \mathcal{J}^p_\sigma$ é a classe de $(w^{(m)} \circ u) u^{(\alpha_1)} \ldots u^{(\alpha_m)} \mathcal{J}^p_\sigma$. Sendo assim, da fórmula [3.1.4] segue (3.1.11.1). A verificação da fórmula (3.1.11.2) segue por um raciocinio análogo, usando agora (1.4.1.2) e observando que a aplicação

$$(z, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in G \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R} \mapsto \lambda_1 \ldots \lambda_m z \in G$$

é $(m+1)$–linear contínua.

■

Corolário 3.1.12 : Para cada $H \in \mathcal{H}_p(\mathbb{R};\mathbb{R})$ e cada $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, temos $(H^n)' = nH^{n-1}H'$, $\; nH^{n-1}H' \approx H'$ em $\mathcal{G}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ e $H^n \neq H$.

Prova : Como $\mathcal{H}_p(\mathbb{R};\mathbb{R}) \subset \mathcal{G}_{\ell b}(\mathbb{R};\mathbb{R}) = \mathcal{G}_*(\mathbb{R};\mathbb{R})$, pela fórmula (3.1.11.2), temos $(f \circ H)' = (f' \circ H)H'$, onde $f : \lambda \in \mathbb{R} \mapsto \lambda^n \in \mathbb{R}$; donde segue a primeira afirmação . A segunda afirmação segue usando a primeira, a Proposição 2.2.4(IV) e o Teorema 1.3.12(c). Por outro lado, se $H^n = H$, temos $H' = nH^{n-1}H'$; donde $HH' = nH^nH' = nHH'$.

Como $2HH' \approx H'$ segue $nH' \approx H'$ em $\mathcal{G}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ e portanto, pela Proposição 2.1.4(d), $n = 1$. Logo, $H^n \neq H$.

∎

Observação 3.1.13 : Nas hipoteses da Definição 3.1.10, se $f \in \mathcal{G}_*(\Omega;\Omega')$ e $z \in \mathcal{G}(\Omega';G)$ é uma constante generalizada, então $z \circ f \in \mathcal{G}(\Omega;G)$ é uma constante generalizada e $z \circ f = z$.

De fato, pela Definição 1.3.6, existe uma função $\mu \in \mathcal{E}_M(G)$ tal que $z = R'_\mu + \mathcal{N}[\Omega';G] = \overline{R}'(\mu + \mathcal{N}(G))$, onde R' e $\overline{R}'$ são as funções associadas ao par (Ω', G) de acordo com o Lema 1.3.5. Considerando um representante qualquer $\widehat{f}$ de f satisfazendo a condição $V_*[\Omega;\Omega']$ e as funções R e $\overline{R}$ associadas ao par (Ω, G) conforme o Lema 1.3.5 , como $R'_\mu \circ \widehat{f} = R_\mu$, pela Definição 3.1.10 e pelo Lema 1.3.5(II), resulta

$$z \circ f = R'_\mu \circ \widehat{f} + \mathcal{N}[\Omega;G] = R_\mu + \mathcal{N}[\Omega;G] = \overline{R}(\mu + \mathcal{N}(G)).$$

Usando as identificações $\overline{R}(\overline{G}) = \overline{G} = \overline{R}'(\overline{G})$ segue $z \circ f = \mu + \mathcal{N}(G) = z$.

No resultado seguinte supomos $E = \mathbb{R}^n$ e $F = \mathbb{K}^m$.

Proposição 3.1.14 : Para cada $(f,g) \in \mathcal{G}_*(\Omega;\Omega') \times \mathcal{G}(\Omega';G)$ é válida a fórmula seguinte

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(g \circ f) = \sum_{i=1}^{m} (\frac{\partial g}{\partial y_i} \circ f) \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \in \mathcal{G}(\Omega;G), \quad (1 \leq j \leq n),$$

onde $f = (f_1, \ldots, f_m)$ (Ver Definição 1.2.16).

Prova : Dadas $u = (u_1, \ldots, u_m)$, satisfazendo a condição $V_*[\Omega;\Omega']$, e w representantes de f e g, respectivamente, da fórmula [3.1.1] e da Definição 3.1.4 segue

$$(w \circ u)'(\varepsilon, x) = w'(\varepsilon, u(\varepsilon, x)) \circ u'(\varepsilon, x), \quad ((\varepsilon, x) \in]0,1] \times \Omega),$$

e portanto usando a fórmula (1.2.17.1) temos

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(w \circ u)(\varepsilon, x) = (w \circ u)'(\varepsilon, x) \cdot e_j = w'(\varepsilon, u(\varepsilon, x)) \cdot (u'(\varepsilon, x) \cdot e_j),$$

onde $(e_j)_{1\leq j\leq n}$ denota a base canônica de $\mathbb{R}^n$. Como

$$u'(\varepsilon,x)\cdot e_j = (\frac{\partial u_1}{\partial x_j}(\varepsilon,x),\ldots,\frac{\partial u_m}{\partial x_j}(\varepsilon,x)),$$

usando novamente a fórmula (1.2.17.1) e a Definição 3.1.4, segue

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(w\circ u)(\varepsilon,x) = \sum_{i=1}^{m}(\frac{\partial w}{\partial y_i}\circ u)(\varepsilon,x)\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(\varepsilon,x), \quad ((\varepsilon,x)\in]0,1]\times\Omega, \quad 1\leq j\leq m),$$

o que, pelas definições 1.2.20 e 3.1.10, mostra a fórmula acima.

∎

Algumas Propriedades da Composição de Funções Generalizadas

Até a Proposição 3.1.19 trabalharemos nos casos particulares $E=\mathbb{R}^2, F=\mathbb{R}^2$ ou $F=\mathbb{R}$ e $G=\mathbb{K}$, e serão usados sem advertência prévia as notações introduzidas a seguir. Dada $y\in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$ consideremos a função associada

[3.1.6] $$y^*:(x,t)\in\mathbb{R}^2\mapsto y^*(x,t):=x-y(t)\in\mathbb{R}.$$

A transformação de coordenadas associada

$$S:(x,t)\in\mathbb{R}^2\mapsto(y^*(x,t),t)\in\mathbb{R}^2$$

é um C^∞-difeomorfismo, com inversa $L:=S^{-1}:(\lambda,t)\in\mathbb{R}^2\mapsto(\lambda+y(t),t)\in\mathbb{R}^2$. Os respectivos jacobianos satisfazem $J_S(x,t)=J_L(\lambda,t)=1$. Se $\pi:(\lambda,t)\in\mathbb{R}^2\mapsto\lambda\in\mathbb{R}$ é a projeção na primeira variável, temos

[3.1.7] $$y^*=\pi\circ S \text{ em } \mathbb{R}^2 \quad (\ \therefore\ y^*(\mathbb{R}^2)=\mathbb{R}\ ).$$

Considerando os seguintes subconjuntos abertos de $\mathbb{R}^2$,

[3.1.8] $$\Omega_-:=\{(x,t)\mid y^*(x,t)<0\},\Omega_+:=\{(x,t)\mid y^*(x,t)>0\} \text{ e } \Omega^*:=\Omega_-\cup\Omega_+,$$

temos $S(\Omega_-)=\mathbb{R}^*_-\times\mathbb{R}, S(\Omega_+)=\mathbb{R}^*_+\times\mathbb{R}$ e $S(\Omega^*)=\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$, e em consequencia valem as seguintes relações

[3.1.9] $$\mathbb{R}^*_-=y^*(\Omega_-),\ \mathbb{R}^*_+=y^*(\Omega_+) \text{ e } \mathbb{R}^*=y^*(\Omega^*).$$

Pelo que precede resulta

[3.1.10] $$S(\Omega) = y^*(\Omega) \times \mathrm{I\!R}, \qquad \text{para } \Omega = \Omega_-, \Omega_+, \Omega^*, \mathrm{I\!R}^2.$$

O resultado seguinte é útil para a resolução de sistemas de equações da hidrodinâmica.

Proposição 3.1.15 : (I) Para cada $g \in \mathcal{G}(\mathrm{I\!R}^2)$ e para cada aberto não vazio Ω de $\mathrm{I\!R}^2$ são válidas as seguintes equivalencias

(3.1.15.1) $$g \circ S \approx 0 \text{ em } \mathcal{G}(\Omega) \quad \text{se e só se} \quad g \approx 0 \text{ em } \mathcal{G}(S(\Omega));$$

(3.1.15.2) $$g \circ S = 0 \text{ em } \mathcal{G}(\Omega) \quad \text{se e só se} \quad g = 0 \text{ em } \mathcal{G}(S(\Omega)).$$

(II) Para cada $f \in \mathcal{G}(\mathrm{I\!R})$ e para cada aberto não vazio W de $\mathrm{I\!R}$ valem as seguintes equivalencias (onde π denota a primeira projeção de $\mathrm{I\!R}^2$)

(3.1.15.3) $$f \circ \pi \approx 0 \text{ em } \mathcal{G}(W \times \mathrm{I\!R}) \quad \text{se e só se} \quad f \approx 0 \text{ em } \mathcal{G}(W);$$

(3.1.15.4) $$f \circ \pi = 0 \text{ em } \mathcal{G}(W \times \mathrm{I\!R}) \quad \text{se e só se} \quad f = 0 \text{ em } \mathcal{G}(W).$$

Prova : (I): Dado um representante qualquer $\widehat{g}$ de g, pela Definição 3.1.10, $g \circ S$ é a classe em $\mathcal{G}(\mathrm{I\!R}^2)$ da função

$$\widehat{g} \circ S : (\varepsilon, x, t) \in]0,1] \times \mathrm{I\!R}^2 \mapsto \widehat{g}(\varepsilon, S(x,t)) = \widehat{g}(\varepsilon, x - y(t), t) \in \mathrm{I\!K}.$$

Prova de (3.1.15.1) : Supondo $g \circ S \approx 0$ em $\mathcal{G}(\Omega)$ temos

(3.1.15.5) $$\lim_{\varepsilon \to 0+} < (\widehat{g} \circ S)(\varepsilon, \cdot), \psi >= 0, \quad (\psi \in \mathcal{D}(\Omega)).$$

Para termos $g \approx 0$ em $\mathcal{G}(S(\Omega))$ devemos verificar a condição

(3.1.15.6) $$\lim_{\varepsilon \to 0+} < \widehat{g}(\varepsilon, \cdot), \varphi >= 0, \quad (\varphi \in \mathcal{D}(S(\Omega))).$$

Fixada $\varphi \in \mathcal{D}(S(\Omega))$, o teorema de mudança de variáveis implica

$$\int_{\text{supp }(\varphi)} \widehat{g}(\varepsilon,\lambda,t)\varphi(\lambda,t)d\lambda dt = \int_{L(\text{supp }(\varphi))} (\widehat{g}\circ S)(\varepsilon,x,t)(\varphi\circ S)(x,t)dxdt, \quad (\varepsilon\in]0,1]).$$

Se $\psi := \varphi\circ S \in \mathcal{D}(\Omega)$, então

$$\text{supp }(\psi) = L(\text{supp }(\varphi)) \quad \text{e} \quad <\widehat{g}(\varepsilon,\cdot),\varphi> = <(\widehat{g}\circ S)(\varepsilon,\cdot),\psi>, \qquad (\varepsilon\in]0,1]),$$

o que junto com (3.1.15.5) implica (3.1.15.6). Reciprocamente, se $g \approx 0$ em $\mathcal{G}(S(\Omega))$, denotando com $U := S(\Omega)$, como $g = (g\circ S)\circ L$, temos $(g\circ S)\circ L \approx 0$ em $\mathcal{G}(U)$ e, portanto, pelo que foi provado acima, $g\circ S \approx 0$ em $\mathcal{G}(L(U)) = \mathcal{G}(\Omega)$.

Prova de (3.1.15.2) : Se $\widehat{g}\circ S \in \mathcal{N}[\Omega]$ então , $\widehat{g} = (\widehat{g}\circ S)\circ L \in \mathcal{N}[S(\Omega)]$ (Ver Proposição 3.1.9(a)) e, reciprocamente, se $\widehat{g}\in\mathcal{N}[S(\Omega)]$, pela mesma razão , $\widehat{g}\circ S \in \mathcal{N}[\Omega]$.

(II): Dado um representante qualquer $\widehat{f}$ de f, $f\circ\pi$ é a classe em $\mathcal{G}(\mathbb{R}^2)$ da função

(3.1.15.7) $$\widehat{f}\circ\pi : (\varepsilon,\lambda,t)\in]0,1]\times\mathbb{R}^2 \mapsto \widehat{f}(\varepsilon,\pi(\lambda,t)) = \widehat{f}(\varepsilon,\lambda)\in\mathbb{K}.$$

Prova de (3.1.15.3) : Se $f\circ\pi \approx 0$ em $\mathcal{G}(W\times\mathbb{R})$,

(3.1.15.8) $$\lim_{\varepsilon\to 0^+} <(\widehat{f}\circ\pi)(\varepsilon,\cdot),\psi> = 0, \quad (\psi\in\mathcal{D}(W\times\mathbb{R})).$$

Para mostrar que $f\approx 0$ em $\mathcal{G}(W)$ verificaremos a condição

(3.1.15.9) $$\lim_{\varepsilon\to 0^+} <\widehat{f}(\varepsilon,\cdot),\varphi> = 0, \quad (\varphi\in\mathcal{D}(W)).$$

Fixada $\varphi\in\mathcal{D}(W)$, considerando uma função $\varphi_\circ\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$, com integral igual a 1, temos

$$<\widehat{f}(\varepsilon,\cdot),\varphi> = \int_{\text{supp }(\varphi)\times\text{supp }(\varphi_\circ)} (\widehat{f}\circ\pi)(\varepsilon,\lambda,t)\varphi(\lambda)\varphi_\circ(t)d\lambda dt, \quad (\varepsilon\in]0,1]).$$

Se $\psi : (\lambda,t)\in W\times\mathbb{R}\mapsto\varphi(\lambda)\varphi_\circ(t)\in\mathbb{K}$, então $\psi\in\mathcal{D}(W\times\mathbb{R})$,

$$\text{supp }(\psi) = \text{supp }(\varphi)\times\text{supp }(\varphi_\circ) \text{ e } <\widehat{f}(\varepsilon,\cdot),\varphi> = <(\widehat{f}\circ\pi)(\varepsilon,\cdot),\psi>, \qquad (\varepsilon\in]0,1]),$$

e portanto de (3.1.15.8) segue (3.1.15.9). Reciprocamente, dada $\psi\in\mathcal{D}(W\times\mathbb{R})$ considerando a função $(\varphi : \lambda\in W\mapsto <1,\psi(\lambda,\cdot)>\in\mathbb{K})\in\mathcal{D}(W)$ temos

$$<(\widehat{f}\circ\pi)(\varepsilon,\cdot),\psi> = <\widehat{f}(\varepsilon,\cdot),\varphi>, \qquad (\varepsilon\in]0,1]).$$

Da condição (3.1.15.9) segue (3.1.15.8).

Pova de (3.1.15.4) : Como para cada $K' \subset\subset W$ existe $K \subset\subset W \times \mathbb{R}$ tal que $\pi(K) = K'$ e para cada $p \in \mathbb{N}$, por (3.1.15.7), temos

$$\partial^\alpha(\widehat{f} \circ \pi)(\varepsilon, \lambda, t) = \widehat{f}^{(p)}(\varepsilon, \lambda), \qquad ((\varepsilon, \lambda, t) \in]0,1] \times \mathbb{R}^2),$$

onde $\alpha := (p, 0)$, é claro que a condição $f \circ \pi = 0$ em $\mathcal{G}(W \times \mathbb{R})$ acarreta $f = 0$ em $\mathcal{G}(W)$. Reciprocamente, se $\widehat{f} \in \mathcal{N}[W]$, pela Proposição 3.1.9(a), $\widehat{f} \circ \pi \in \mathcal{N}[W \times \mathbb{R}]$.

■

Corolário 3.1.16 : Para cada $f \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^2)$ e para cada aberto não vazio Ω de $\mathbb{R}^2$ são válidas as seguintes equivalencias

(3.1.16.1) $\qquad f \circ L \approx 0$ em $\mathcal{G}(S(\Omega))$ se e só se $f \approx 0$ em $\mathcal{G}(\Omega)$;

(3.1.16.2) $\qquad f \circ L = 0$ em $\mathcal{G}(S(\Omega))$ se e só se $f = 0$ em $\mathcal{G}(\Omega)$;

Prova : Segue da Proposição 3.1.15(I), considerando $g := f \circ L$.

■

O resultado seguinte é importante para o estudo das equações diferenciais da hidrodinâmica no próximo capítulo.

Corolário 3.1.17 : Para cada $f \in \mathcal{G}(\mathbb{R})$ e para cada aberto não vazio Ω de $\mathbb{R}^2$ tal que $S(\Omega) = y^*(\Omega) \times \mathbb{R}$ são válidas as seguintes equivalencias (Ver [3.1.6])

(3.1.17.1) $\qquad f \circ y^* \approx 0$ em $\mathcal{G}(\Omega)$ se e só se $f \approx 0$ em $\mathcal{G}(y^*(\Omega))$;

(3.1.17.2) $\qquad f \circ y^* = 0$ em $\mathcal{G}(\Omega)$ se e só se $f = 0$ em $\mathcal{G}(y^*(\Omega))$.

Prova : Se $g := f \circ \pi$, por [3.1.7], temos $g \circ S = f \circ y^*$ e, portanto, pela Proposição 3.1.15(I), valem

$$f \circ y^* \approx 0 \text{ em } \mathcal{G}(\Omega) \quad \text{se e só se} \quad f \circ \pi \approx 0 \text{ em } \mathcal{G}(S(\Omega))$$

$$f \circ y^* = 0 \text{ em } \mathcal{G}(\Omega) \quad \text{se e só se} \quad f \circ \pi = 0 \text{ em } \mathcal{G}(S(\Omega)).$$

Por outro lado, como $S(\Omega) = y^*(\Omega) \times \mathbb{R}$, pela Proposição 3.1.15(II), valem também

$$f \circ \pi \approx 0 \text{ em } \mathcal{G}(S(\Omega)) \quad \text{se e só se} \quad f \approx 0 \text{ em } \mathcal{G}(y^*(\Omega))$$

$$f \circ \pi = 0 \text{ em } \mathcal{G}(S(\Omega)) \quad \text{se e só se} \quad f = 0 \text{ em } \mathcal{G}(y^*(\Omega)).$$

∎

Corolário 3.1.18 : (I) Para cada $H \in \mathcal{H}(\mathbb{R})$ e cada $\lambda \in \mathbb{K}$ são válidas as seguintes equivalencias

(3.1.18.1) $$\lambda(H \circ y^*)_x \approx 0 \text{ em } \mathcal{G}(\mathbb{R}^2) \quad \text{se e só se} \quad \lambda = 0;$$

(3.1.18.2) $$\lambda(H \circ y^*) \approx 0 \text{ em } \mathcal{G}(\mathbb{R}^2) \quad \text{se e só se} \quad \lambda = 0;$$

(II) Se $H \in \mathcal{H}(\mathbb{R})$, então $(H \circ y^*)_x \approx 0$ em $\mathcal{G}(\Omega^*)$, $H \circ y^* \approx 0$ em $\mathcal{G}(\Omega_-)$ e $H \circ y^* \approx 1$ em $\mathcal{G}(\Omega_+)$.

(III) Se $m \in \mathbb{N}^*, \alpha_j \in \mathbb{N}^*$ e $H_j \in \mathcal{H}_p(\mathbb{R}), 1 \leq j \leq m$, temos

(3.1.18.3) $$(H_1^{\alpha_1} \ldots H_m^{\alpha_m}) \circ y^* \approx H \circ y^* \text{ em } \mathcal{G}(\mathbb{R}^2), \quad (H \in \mathcal{H}(\mathbb{R})).$$

Prova : Por [3.1.10], como $y^*(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}$ e $(H \circ y^*)_x = H' \circ y^*$ (pela Proposição 3.1.14), a Proposição 2.1.4(d) e (3.1.17.1) implicam (3.1.18.1). E (3.1.18.2) segue usando a Proposição 2.2.2(II) (d). Por [3.1.10], a afirmação (II) (resp. (III)) segue da Proposição 2.2.2((b) e (c)) (resp. Proposição 2.2.4(IV)), da condição [3.1.9] (resp. $y^*(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}$) e da equivalencia (3.1.17.1).

∎

Proposição 3.1.19 : Seja $\Phi \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^2)$ tal que $\Phi_x = 0$ ou $\Phi_t = 0$ em $\mathcal{G}(\mathbb{R}^2)$ e suponhamos que para um aberto não vazio Ω de $\mathbb{R}^2$ tal que $S(\Omega) = y^*(\Omega) \times \mathbb{R}$ se tem $\Phi \approx 0$ em $\mathcal{G}(\Omega)$. Então , $\Phi \approx 0$ em $\mathcal{G}(\mathbb{R}^2)$.

Prova : Suponhamos $\Omega \neq \mathbb{R}^2$ e $\Phi_x = 0$ (No caso $\Phi_t = 0$ a prova é análoga), e seja $\widehat{\Phi}$ um representante qualquer de Φ. Como $S(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$, para termos $\Phi \approx 0$ em $\mathcal{G}(\mathbb{R}^2)$, em virtude de (3.1.16.1), basta verificar que $\Phi \circ L \approx 0$ em $\mathcal{G}(\mathbb{R}^2)$; isto é ,

$$(3.1.19.1) \qquad \lim_{\varepsilon \to 0^+} < (\widehat{\Phi} \circ L)(\varepsilon, \cdot), \psi >= 0, \quad (\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)).$$

Fixada $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, considerando uma função $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, com supp $(\varphi) \subset y^*(\Omega)$ e com integral igual a 1, por um resultado conhecido (Ver [H], Prop. 7, pg. 333), existe um par $(\varphi_0, \psi_0) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ tal que

$$\psi(\lambda, t) = \varphi(\lambda)\varphi_0(t) + \frac{\partial \psi_0}{\partial \lambda}(\lambda, t), \quad ((\lambda, t) \in \mathbb{R}^2).$$

Temos $\mu(\varepsilon) :=< (\widehat{\Phi} \circ L)(\varepsilon, \cdot), \psi >= \mu_1(\varepsilon) + \mu_2(\varepsilon), (\varepsilon \in]0, 1])$, onde

$$\mu_1(\varepsilon) :=< (\widehat{\Phi} \circ L)(\varepsilon, \cdot), \psi_1 >, \quad \mu_2(\varepsilon) :=< (\widehat{\Phi} \circ L)(\varepsilon, \cdot), (\psi_0)_\lambda >$$

e $\psi_1 : (\lambda, t) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \varphi(\lambda)\varphi_0(t) \in \mathbb{K}$. Para termos (3.1.19.1) basta que $\mu_i(\varepsilon) \to 0$, para $\varepsilon \to 0^+, i = 1, 2$. Ora, por hipótese e (3.1.16.1), temos $\Phi \circ L \approx 0$ em $\mathcal{G}(S(\Omega))$; donde, como supp (ψ_1) = supp $(\varphi) \times$ supp $(\varphi_0) \subset y^*(\Omega) \times \mathbb{R} = S(\Omega)$, segue $\mu_1(\varepsilon) \to 0$, para $\varepsilon \to 0^+$. Por outro lado, como $(\Phi \circ L)_\lambda = \Phi_x \circ L$ (Ver Proposição 3.1.14), $S(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$ e $\Phi_x = 0$ em $\mathcal{G}(\mathbb{R}^2)$, por (3.1.16.2), resulta $(\Phi \circ L)_\lambda = \Phi_x \circ L = 0$ em $\mathcal{G}(\mathbb{R}^2)$; donde, como $\mu_2(\varepsilon) = - < (\widehat{\Phi} \circ L)_\lambda(\varepsilon, \cdot), \psi_0 >$, pelo Lema 1.2.5 (II)(c), segue $\mu_2(\varepsilon) \to 0$, para $\varepsilon \to 0^+$.

∎

Uma Classe de Funções Generalizadas Inversíveis

Até o exemplo que segue ao Teorema 3.1.22 consideremos o caso $F = G = \mathbb{R}$ e $\Omega' = \mathbb{R}^*$. Dada $u \in \mathcal{E}[\Omega; \mathbb{R}]$ satisfazendo a condição $V_*[\Omega; \mathbb{R}^*]$ (Ver Definição 3.1.1) consideremos a função

$$(u^{-1} : (\varepsilon, x) \in]0, 1] \times \Omega \mapsto [u(\varepsilon, x)]^{-1} \in \mathbb{R}) \in \mathcal{E}[\Omega; \mathbb{R}];$$

isto é , $u^{-1} = \varphi \circ u$, onde $\varphi : \lambda \in \mathbb{R}^* \mapsto \lambda^{-1} \in \mathbb{R}$. Dado $p \in \mathbb{N}^*$, como

$$\varphi^{(p)}(\lambda) = (-1)^p p! \lambda^{-(p+1)}, \ (\lambda \neq 0),$$

usando a fórmula [3.1.1], para cada $(\varepsilon, x) \in]0,1] \times \Omega$, temos

$$[3.1.11] \qquad (u^{-1})^{(p)}(\varepsilon, x) = \sum_{\substack{1 \leq m \leq p \\ \alpha \in [p;m]}} M_\alpha^m \sum_{\sigma \in \mathcal{O}_p} \frac{u^{(\alpha_1)}(\varepsilon, x) \ldots u^{(\alpha_m)}(\varepsilon, x) \mathcal{J}_\sigma^p}{u^{m+1}(\varepsilon, x)},$$

onde $M_\alpha^m := (-1)^m m! C_\alpha^m$ (Em [3.1.11], $(\varphi^{(m)} \circ u)(\varepsilon, x) = (-1)^m m! u^{-m-1}(\varepsilon, x) \in \mathbb{R}$ pela identificação $\mathcal{L}({}^m\mathbb{R}; \mathbb{R}) = \mathbb{R}$).

Definição 3.1.20 : Dizemos que uma função u de $]0,1] \times \Omega$ em $\mathbb{R}$ satisfaz a *condição* $\Im[\Omega; \mathbb{R}^*]$ se, para cada $K \subset\subset \Omega$, existem $\eta \in]0,1]$ e uma função μ de $]0,1]$ em $\mathbb{R}_+^*$ tal que $(\varepsilon \mapsto \mu(\varepsilon)^{-1}) \in \mathcal{E}_M(\mathbb{R})$ e

$$(3.1.20.1) \qquad \mu(\varepsilon) \leq |u(\varepsilon, x)|, \quad \text{para cada } (\varepsilon, x) \in]0, \eta[\times K.$$

Aplicações concretas de funções satisfazendo a condição $\Im[\Omega; \mathbb{R}^*]$ serão dados no próximo parágrafo e no último capítulo. Entretanto, damos um exemplo simples em continuação .

Exemplo : A função $u : (\varepsilon, x) \in]0,1] \times \Omega \mapsto \varepsilon^k \varphi(x) \in \mathbb{R}$, onde $k \in \mathbb{N}^*$ e $\varphi \in C^\infty(\Omega; \mathbb{R}^*)$, satisfaz a condição $\Im[\Omega; \mathbb{R}^*]$.

De fato, dado $K \subset\subset \Omega$, existe uma constante $C > 0$ tal que $|\varphi(x)| \geq C, (x \in K)$. Então , $\eta = 1$ e a função $\mu : \varepsilon \in]0,1] \mapsto C\varepsilon^k \in \mathbb{R}_+^*$ satisfazem as condições da Definição 3.1.20.

Observação : Dada $f \in \mathcal{G}(\Omega; \mathbb{R})$ são válidas as afirmações seguintes.

(I) Se $f \neq 0$, f não é necessariamente inversível em $\mathcal{G}(\Omega; \mathbb{R})$;

(II) Se f tem um representante satisfazendo a condição $\Im[\Omega; \mathbb{R}^*]$, então $f \neq 0$.

De fato, no caso $\Omega = \mathbb{R}^n$, para um $\xi \in \Xi(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ (Ver [2.1.1]), consideremos a função $\delta_\xi \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ definida no Corolário 2.1.3. Se δ_ξ fosse inversível em $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ o seria também em $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n \backslash \{0\}; \mathbb{R})$ e portanto teria-se $\delta_\xi \neq 0$ em $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n \backslash \{0\}; \mathbb{R})$, o que contraria a Proposição 1.2.21(4). Para verificar a afirmação (II), seja $\widehat{f}$ um representante de f satisfazendo a condição $\Im[\Omega; \mathbb{R}^*]$ e suponhamos que $\widehat{f} \in \mathcal{N}[\Omega; \mathbb{R}]$. Então , para um $a \in \Omega$, existem $\eta_1 \in]0,1]$ e uma função μ de $]0,1]$ em $\mathbb{R}_+^*$ tais que $(\varepsilon \mapsto \mu(\varepsilon)^{-1}) \in \mathcal{E}_M(\mathbb{R})$ e

$\mu(\varepsilon) \leq |\widehat{f}(\varepsilon, a)|, (0 < \varepsilon < \eta_1)$. Como $((\varepsilon, x) \mapsto \mu(\varepsilon)^{-1}\widehat{f}(\varepsilon, x)) \in \mathcal{N}[\Omega; \mathbb{R}]$, dado $C \in]0, 1[$, pelo Lema 1.2.5(II)(a), existe $\eta \in]0, \eta_1]$ tal que $|\widehat{f}(\varepsilon, a)| \leq C\mu(\varepsilon)$, $(0 < \varepsilon < \eta)$, o que junto com a desigualdade anterior implica $C \geq 1$. Logo, $f \neq 0$.

O resultado seguinte será útil para dar uma caracterização de uma classe importante de elementos inversíveis de $\mathcal{G}(\Omega; \mathbb{R})$.

Proposição 3.1.21 : Para cada $u \in \mathcal{E}[\Omega; \mathbb{R}]$ satisfazendo a condição $\Im[\Omega; \mathbb{R}^*]$, são válidas as afirmações seguintes.

(I) Se $u \in \mathcal{E}_M[\Omega; \mathbb{R}]$ e satisfaz a condição $V_*[\Omega; \mathbb{R}^*]$, então $u^{-1} \in \mathcal{E}_M[\Omega; \mathbb{R}]$;

(II) Se $v \in \mathcal{E}[\Omega; \mathbb{R}]$ e $u - v \in \mathcal{N}[\Omega; \mathbb{R}]$, então v satisfaz a condição $\Im[\Omega; \mathbb{R}^*]$.

Prova : (I): Fixados $K \subset\subset \Omega$ e $p \in \mathbb{N}$ devem existir $N \in \mathbb{N}, C > 0$ e $\eta \in]0, 1]$ verificando

(3.1.21.1) $$\sup_{x \in K} |(u^{-1})^{(p)}(\varepsilon, x)|_p \leq C\varepsilon^{-N}, \quad (0 < \varepsilon < \eta).$$

Como u satisfaz a condição $\Im[\Omega; \mathbb{R}^*]$, existe uma função μ de $]0, 1]$ em $\mathbb{R}_+^*$, $N \in \mathbb{N}, C > 0$ e $\eta \in]0, 1]$ tais que

$$\sup_{x \in K} |u^{-1}(\varepsilon, x)| \leq \mu(\varepsilon)^{-1} \leq C\varepsilon^{-N}, \quad (0 < \varepsilon < \eta),$$

o que mostra (3.1.21.1) no caso $p = 0$. Suponhamos $p \geq 1$. Usando [1.1.3], de [3.1.11] e da desigualdade anterior, segue

$$|(u^{-1})^{(p)}(\varepsilon, x)|_p \leq \sum_{\substack{1 \leq m \leq p \\ \alpha \in [p;m]}} p! C^{m+1} |M_\alpha^m| \varepsilon^{-(m+1)N} \Pi_{i=1}^m |u^{(\alpha_i)}(\varepsilon, x)|_{\alpha_i}, \; ((\varepsilon, x) \in]0, \eta[\times K),$$

o que junto com a moderação de u implica a condição (3.1.21.1).

(II): Fixado $K \subset\subset \Omega$, sejam $\eta_0 \in]0, 1]$ e μ uma função de $]0, 1]$ em $\mathbb{R}_+^*$ tais que (u, K, μ, η_0) verifica (3.1.20.1). Como $(\varepsilon \mapsto \mu(\varepsilon)^{-1}) \in \mathcal{E}_M(\mathbb{R})$ e $w := u - v \in \mathcal{N}[\Omega; \mathbb{R}]$, dado $d \in]0, 1[$, pelo Lema 1.2.5(II)(a), existe $\eta \in]0, \eta_0]$ tal que $|w| \leq d\mu$ em $]0, \eta[\times K$, o que junto com a condição (3.1.20.1) implica

$$\mu(\varepsilon) \leq |v(\varepsilon, x)| + d\mu(\varepsilon), \quad ((\varepsilon, x) \in]0, \eta[\times K).$$

Considerando a função $\chi : \varepsilon \in]0,1] \mapsto (1-d)\mu(\varepsilon) \in \mathbb{R}_+^*$ vemos que v satisfaz também a condição $\Im[\Omega; \mathbb{R}^*]$.

■

Teorema 3.1.22 : Supondo que $\dim E < +\infty$, são válidas as afirmacões seguintes.

(I) Dada $f \in \mathcal{G}(\Omega; \mathbb{R})$ tendo pelo menos um representante satisfazendo a condição $V_*[\Omega; \mathbb{R}^*]$, as condições seguintes são equivalentes

(a) f é um elemento inversível de $\mathcal{G}(\Omega; \mathbb{R})$;

(b) Para todo representante $\widehat{f}$ de f satisfazendo a condição $V_*[\Omega; \mathbb{R}^*]$ se tem $\widehat{f}^{-1} \in \mathcal{E}_M[\Omega; \mathbb{R}]$;

(c) Existe um representante $\widehat{f}$ de f satisfazendo a condição $V_*[\Omega; \mathbb{R}^*]$ tal que $\widehat{f}^{-1} \in \mathcal{E}_M[\Omega; \mathbb{R}]$;

(d) Existe um representante de f satisfazendo a condição $\Im[\Omega; \mathbb{R}^*]$;

(e) Todo representante de f satisfaz a condição $\Im[\Omega; \mathbb{R}^*]$.

(II) Se $f \in \mathcal{G}(\Omega; \mathbb{R})$ tem pelo menos um representante satisfazendo as condições $V_*[\Omega; \mathbb{R}^*]$ e $\Im[\Omega; \mathbb{R}^*]$, então f é um elemento inversível de $\mathcal{G}(\Omega; \mathbb{R})$ e $\widehat{f}^{-1}$ é um representante de f^{-1}, para qualquer representante $\widehat{f}$ de f, satisfazendo a condição $V_*[\Omega; \mathbb{R}^*]$.

Prova : (I): Que (b) implica (c) é clara e que (d) implica (e) segue usando a Proposição 3.1.21(II).

(a) $\Rightarrow$ (b) : Fixados $K \subset\subset \Omega$ e $p \in \mathbb{N}$ devemos achar $N \in \mathbb{N}$, $C > 0$ e $\eta \in]0,1]$ verificando

$$\sup_{x \in K} |(\widehat{f}^{-1})^{(p)}(\varepsilon, x)|_p \leq C\varepsilon^{-N}, \quad (0 < \varepsilon < \eta). \tag{3.1.22.1}$$

Seja $g \in \mathcal{G}(\Omega; \mathbb{R})$ tal que $fg = 1$ e seja $\widehat{g}$ um representante qualquer de g. Como $1 - \widehat{f}\widehat{g} \in \mathcal{N}[\Omega; \mathbb{R}]$, pela Proposição 3.1.21(II), a função $\widehat{f}\widehat{g}$ satisfaz a condição $\Im[\Omega; \mathbb{R}^*]$. Sendo E de dimensão finita, existe um aberto U tal que $K \subset U$ e $\overline{U} \subset\subset \Omega$. Sejam $\eta_0 \in]0,1]$ e μ uma função de $]0,1]$ em $\mathbb{R}_+^*$ tais que $(\varepsilon \mapsto \mu(\varepsilon)^{-1}) \in \mathcal{E}_M(\mathbb{R})$ e $\mu \leq |\widehat{f}\widehat{g}|$ em $]0, \eta_0[\times U$. Em consequencia, a função $u \in \mathcal{E}_M[U; \mathbb{R}]$ definida por $u := \widehat{f}\widehat{g}$ (resp. $u := \mu$) em $]0, \eta_0[\times U$ (resp. $[\eta_0, 1] \times U$) satisfaz as condições $V_*[U; \mathbb{R}^*]$ e $\Im[U; \mathbb{R}^*]$. Pela

Proposição 3.1.21(I), $u^{-1} \in \mathcal{E}_M[U;\mathbb{R}]$ e, portanto, existem $N \in \mathbb{N}, C > 0$ e $\eta \in]0, \eta_0]$ satisfazendo

$$\sup_{x\in K}|(\widehat{g}u^{-1})^{(p)}(\varepsilon, x)|_p \leq C\varepsilon^{-N}, \qquad (0 < \varepsilon < \eta),$$

o que junto com a condição $u = \widehat{f}\widehat{g}$ em $]0, \eta[\times U$ implica (3.1.22.1).

(c) $\Rightarrow$ (d) : Nas condições de (c), fixado $K \subset\subset \Omega$, existem $N \in \mathbb{N}, C > 0$ e $\eta \in]0, 1]$ tais que $|\widehat{f}^{-1}(\varepsilon, x)| \leq C\varepsilon^{-N}, ((\varepsilon, x) \in]0, \eta[\times K)$. Considerando a função $\mu : \varepsilon \in]0, 1] \mapsto C^{-1}\varepsilon^N \in \mathbb{R}^*_+$, vemos que $\widehat{f}$ satisfaz a condição $\Im[\Omega; \mathbb{R}^*]$.

(e) $\Rightarrow$ (a) : Por hipótese f tem um representante $\widehat{f}$ satisfazendo a condição $V_*[\Omega; \mathbb{R}^*]$ e, por (e), essa função satisfaz também a condição $\Im[\Omega; \mathbb{R}^*]$. Pela Proposição 3.1.21(I), $\widehat{f}^{-1} \in \mathcal{E}_M[\Omega; \mathbb{R}]$. Se $g := \widehat{f}^{-1} + \mathcal{N}[\Omega; \mathbb{R}]$, temos $fg = \widehat{f}\widehat{f}^{-1} + \mathcal{N}[\Omega; \mathbb{R}] = 1$, o que mostra que f é um elemento inversível de $\mathcal{G}(\Omega; \mathbb{R})$ e que $\widehat{f}^{-1}$ é um representante de $f^{-1} = g$.

(II): Por hipótese e pelo item (d) de (I), f é inversível em $\mathcal{G}(\Omega; \mathbb{R})$ e, portanto, por (e) e por um argumento similar à prova de (e) implica (a), é válida a segunda afirmação em (II).

∎

Exemplo : Nas hipóteses do Teorema 3.1.22, seja f representada pela função

$$\widehat{f} : (\varepsilon, x) \in]0, 1] \times \Omega \mapsto \mu(\varepsilon)\varphi(x) \in \mathbb{R},$$

onde $\mu : \varepsilon \in]0, 1] \mapsto \exp(-\frac{1}{\varepsilon}) \in \mathbb{R}$ e $\varphi \in C^\infty(\Omega; \mathbb{R})$ é tal que $\varphi(x) \neq 0, (x \in \Omega)$. Então , f não é inversível em $\mathcal{G}(\Omega; \mathbb{R})$.

De fato, como $\mu \in \mathcal{N}(\mathbb{R})$, temos $\widehat{f} \in \mathcal{N}[\Omega; \mathbb{R}]$. Ou, pelo Teorema 3.1.22(b), segue a afirmação , dado que $\widehat{f}^{-1} \notin \mathcal{E}_M[\Omega; \mathbb{R}]$.

Um Caso Especial de Composição de Funções Generalizadas

Até o fim de 3.1 vamos supor $F = \mathbb{R}^m$. Dados a e b em $\overline{\mathbb{R}}^m$, com $a = (a_1, \ldots, a_m), b = (b_1, \ldots, b_m)$ e $a \leq b$, definimos

[3.1.12] $\quad]a, b[:=\Pi_{i=1}^m]a_i, b_i[,\ [a, b]:=\Pi_{i=1}^m[a_i, b_i],\ [a, b[:=\Pi_{i=1}^m[a_i, b_i[$ e $]a, b]:=\Pi_{i=1}^m]a_i, b_i]$.

Observar que

[3.1.13] $\qquad]\mathbf{0},\infty[=(\mathbb{R}_+^*)^m$, onde $\mathbf{0}=(0,\dots,0), \infty:=(+\infty,\dots,+\infty)\in\overline{\mathbb{R}}^m$.

No que se segue, até o fim de 3.1, são fixados $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_m)$ e $\beta=(\beta_1,\dots,\beta_m)$ em $\overline{\mathbb{R}}^m$, com $0\le\alpha<\beta$ e será considerado o caso $\Omega'=]\alpha,\beta[\subset(\mathbb{R}_+^*)^m$.

A seguir introduzimos duas condições de caráter técnico que serão necessárias no restante do trabalho.

Definição 3.1.23 : (I) Dizemos que uma função u de $]0,1]\times\Omega$ em $\mathbb{R}^m$ satisfaz a **condição** $V[\Omega]_\alpha^\beta$ se, para cada $K\subset\subset\Omega$, existem $\eta\in]0,1]; a,b\in]\alpha,\beta[, a<b$; e uma função $\mu=(\mu_1,\dots,\mu_m)$ de $]0,1]$ em $]\alpha,a]$ tal que $[\varepsilon\mapsto(\mu_i(\varepsilon)-\alpha_i)^{-1}]\in\mathcal{E}_M(\mathbb{R})$, $(1\le i\le m)$, e

(3.1.23.1) $\qquad u(\varepsilon,x)\in[\mu(\varepsilon),b]$, $\quad$ para cada $(\varepsilon,x)\in]0,\eta[\times K$.

(II) Dizemos que uma função $w\in\mathcal{E}[\,]\alpha,\beta[;G]$ satisfaz a **condição** $M[\,]\alpha,\beta[;G]$ se, para cada $p\in\mathbb{N}$; cada $a,b\in]\alpha,\beta[, a<b$; e cada função $\mu=(\mu_1,\dots,\mu_m)$ de $]0,1]$ em $]\alpha,a]$ tal que $[\varepsilon\mapsto(\mu_i(\varepsilon)-\alpha_i)^{-1}]\in\mathcal{E}_M(\mathbb{R}),(1\le i\le m)$, existem $N\in\mathbb{N}, C>0$ e $\eta\in]0,1]$ verificando

(3.1.23.2) $\qquad \sup_{y\in[\mu(\varepsilon),b]}|w^{(p)}(\varepsilon,y)|_p\le C\varepsilon^{-N}, \qquad (0<\varepsilon<\eta)$.

Observação : (I) Se uma função u de $]0,1]\times\Omega$ em $\mathbb{R}^m$, satisfaz a condição $V[\Omega;]\alpha,\beta[\,]$, então u satisfaz a condição $V[\Omega]_\alpha^\beta$; a recíproca não é verdadeira;

(II) Se $w\in\mathcal{E}[\,]\alpha,\beta[;G]$ satisfaz a condição $M[\,]\alpha,\beta[;G]$ então , $w\in\mathcal{E}_M[\,]\alpha,\beta[;G]$.

De fato, dado $K\subset\subset\Omega$, a condição $V[\Omega;]\alpha,\beta[]$, associa $K'\subset\subset]\alpha,\beta[$ e $\eta\in]0,1]$ e então , se $a,b\in]\alpha,\beta[$ satisfaz $K'\subset]a,b[$, basta tomar $\mu(\varepsilon):=\alpha+(a-\alpha)\varepsilon\in]\alpha,a]$, para obter $]a,b[\subset[\mu(\varepsilon),b]$, o que prova a primeira afirmação de (I). Para provar (II) partimos de $K'\subset\subset]\alpha,\beta[$ e $p\in\mathbb{N}$ e então (II) resulta tomando a,b e μ como na prova de (I). Se $c\in]\alpha,\beta[$, a função

$$\mathrm{u}:(\varepsilon,x)\in]0,1]\times\Omega\mapsto\alpha+(c-\alpha)\varepsilon\in]\alpha,c]$$

satisfaz $V[\Omega]_\alpha^\beta$ (tomar $\mu(\varepsilon) := u(\varepsilon, x)$) e não satisfaz $V[\Omega;]\alpha, \beta[]$ pois se, associado a $K \subset\subset \Omega$, existissem η e $K' = [a, b] \subset\subset]\alpha, \beta[$, resultaria $a \leq u(\varepsilon, x) \leq b$ para $(\varepsilon, x) \in]0, \eta[\times K$; donde $a - \alpha \leq (c - \alpha)\varepsilon$ sempre que $0 < \varepsilon < \eta$.

Proposição 3.1.24 : Uma função $w \in \mathcal{E}[\,]\alpha, \beta[; G]$ satisfaz a condição $M[\,]\alpha, \beta[; G]$ se, e só se, para cada $\gamma \in \mathbb{N}^m$; cada $a, b \in]\alpha, \beta[, a < b$; e cada função $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_m)$ de $]0, 1]$ em $]\alpha, a]$ tal que $[\varepsilon \mapsto (\mu_i(\varepsilon) - \alpha_i)^{-1}] \in \mathcal{E}_M(\mathbb{R}), (1 \leq i \leq m)$, existem $N \in \mathbb{N}, C > 0$ e $\eta \in]0, 1]$ verificando

$$\sup_{y \in [\mu(\varepsilon), b]} |\partial^\gamma w(\varepsilon, y)| \leq C\varepsilon^{-N}, \qquad (0 < \varepsilon < \eta).$$

Prova : É análoga à prova da Proposição 1.2.19.

∎

Proposição 3.1.25 : Dadas $u \in \mathcal{E}_M[\Omega, \mathbb{R}^m]$ satisfazendo as condições $V_*[\Omega;]\alpha, \beta[]$ e $V[\Omega]_\alpha^\beta$, e $v \in \mathcal{E}_M[\Omega; \mathbb{R}^m]$ satisfazendo a condição $V_*[\Omega;]\alpha, \beta[]$, suponhamos que $u - v \in \mathcal{N}[\Omega; \mathbb{R}^m]$. Então , valem as asserções seguintes.

(I) v satisfaz a condição $V[\Omega]_\alpha^\beta$;

(II) Se $w \in \mathcal{E}[\,]\alpha, \beta[; G]$ satisfaz a condição $M[]\alpha, \beta[; G]$, então a terna (u, v, w) satisfaz a condição (III) da Proposição 3.1.5.

Prova : Suponhamos $\beta < \infty$ (Se $\beta \leq \infty$, a prova é análoga). Fixado $K \subset\subset \Omega$, sejam $\eta, a = (a_1, \ldots, a_m), b = (b_1, \ldots, b_m)$ e $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_m)$ como na Definição 3.1.23(I). Pondo $R_i := u_i - v_i (1 \leq i \leq m)$, como

$$[(\varepsilon, x) \in]0, 1] \times \Omega \mapsto (\mu_i(\varepsilon) - \alpha_i)^{-1} R_i(\varepsilon, x) \in \mathbb{R}] \in \mathcal{N}[\Omega; \mathbb{R}], \text{ para cada } i = 1, \ldots, m,$$

pelo Lema 1.2.5(II)(a), existe $\eta' \in]0, \eta]$ tal que

(3.1.25.1) $$R(\varepsilon, x) \in [-r(\mu(\varepsilon) - \alpha), r(\mu(\varepsilon) - \alpha)], \quad ((\varepsilon, x) \in]0, \eta'[\times K),$$

onde $0 < r < \min\{1, d_i(a_i - \alpha_i)^{-1} \mid 1 \leq i \leq m\}$ e $d_i > 0$ é tal que $b_i + d_i < \beta_i$. Consideremos $a' := a - r(a - \alpha), b' := b + (d_1, \ldots, d_m)$ e

$$\chi = (\chi_1, \ldots, \chi_m) : \varepsilon \in]0, 1] \mapsto r\alpha + (1 - r)\mu(\varepsilon) \in]\alpha, a'].$$

Como $\chi(\varepsilon)-\alpha=(1-r)(\mu(\varepsilon)-\alpha)$, segue que $[\varepsilon\mapsto(\chi_i(\varepsilon)-\alpha_i)^{-1}]\in\mathcal{E}_M(\mathbb{R}),(1\leq i\leq m)$. Fixado $(\varepsilon,x)\in]0,\eta'[\times K$, considerando a função $\theta: t\in[0,1]\mapsto u(\varepsilon,x)+tR(\varepsilon,x)\in[0,\infty[$, das condições (3.1.23.1) e (3.1.25.1) seguem as desigualdades

$$\mu(\varepsilon)\leq u(\varepsilon,x)\leq\theta(t)+rt(\mu(\varepsilon)-\alpha)$$

$$\theta(t)\leq u(\varepsilon,x)+rt(a-\alpha)\leq b+(d_1,\ldots,d_m);$$

donde , $\theta(t)\in[\chi(\varepsilon),b'],(0\leq t\leq 1)$; o que mostra que vale a afirmação (I) (pois $v(\varepsilon,x)=\theta(1)$) e o segmento fechado que liga $u(\varepsilon,x)$ com $v(\varepsilon,x)$ está contido em $[\chi(\varepsilon),b']$. A partir das hipóteses, por um raciocínio análogo ao que foi feito na parte final da prova da Proposição 3.1.8, segue que as funções u, v e w satisfazem a condição (III) da Proposição 3.1.5.

∎

Teorema 3.1.26 : Dadas $u\in\mathcal{E}_M[\Omega;\mathbb{R}^m]$, satisfazendo as condições $V_*[\Omega;]\alpha,\beta[]$ e $V[\Omega]_\alpha^\beta$, e $\varphi\in C^\infty(]\alpha,\beta[;G)$ satisfazendo a condição $M[]\alpha,\beta[;G]$, são válidas as afirmações seguintes.

(I) $\varphi\circ u\in\mathcal{E}_M[\Omega;G]$;

(II) Se $v\in\mathcal{E}_M[\Omega;\mathbb{R}^m]$ satisfaz a condição $V_*[\Omega;]\alpha,\beta[]$ e $u-v\in\mathcal{N}[\Omega;\mathbb{R}^m]$, então $\varphi\circ u-\varphi\circ v\in\mathcal{N}[\Omega;G]$.

Prova : A afirmação (I) segue, usando [3.1.1], de modo análogo à prova da Proposição 3.1.9(a). Por outro lado, como cada $\varphi^{(p)}\in C^\infty(]\alpha,\beta[;\mathcal{L}(^p(\mathbb{R}^m);G))$ satisfaz a condição $M[]\alpha,\beta[;\mathcal{L}(^p(\mathbb{R}^m);G)]$, para $R=u,v$, por (I), temos $\varphi^{(p)}\circ R\in\mathcal{E}_M[\Omega;\mathcal{L}(^p(\mathbb{R}^m);G)],(p\in\mathbb{N}^*)$, e, portanto, o item (II) segue das proposições 3.1.25(II) e 3.1.5.

∎

O resultado anterior nos permite dar a definição seguinte.

Definição 3.1.27 : Sejam E e G espaços de Banach e Ω um subconjunto aberto não vazio de E. Dadas $f\in\mathcal{G}(\Omega;\mathbb{R}^m)$, tendo pelo menos um representante satisfazendo as condições $V_*[\Omega;]\alpha, \beta[\,]$ e $V[\Omega]^{\beta}_{\alpha}$, e $\varphi \in C^{\infty}(]\alpha, \beta[; G)$ satisfazendo a condição $M[\,]\alpha, \beta[; G]$, a *função composta de* φ *com* f é definida como sendo

$$\varphi \circ f := \varphi \circ \widehat{f} + \mathcal{N}[\Omega; G],$$

onde $\varphi \circ \widehat{f} : (\varepsilon, x) \in]0,1] \times \Omega \mapsto \varphi(\widehat{f}(\varepsilon, x)) \in G$ e $\widehat{f}$ é um representante qualquer de f, satisfazendo a condição $V_*[\Omega;]\alpha, \beta[\,]$.

Teorema 3.1.28 : Nas condições da Definição 3.1.27, a composta $\varphi \circ f$ satisfaz (com g substituido por φ):

(I) a fórmula (3.1.11.1);

(II) a fórmula (3.1.11.2), no caso $E = \mathbb{R}$ e $m = 1$;

(III) a fórmula dada na Proposição 3.1.14, no caso $E = \mathbb{R}^n$.

Prova : As afirmações (I) e (II) seguem de modo análogo à prova do Teorema 3.1.11, e a prova de (III) é similar à da Proposição 3.1.14.

■

No resultado seguinte será considerado o caso $m = 1$; isto é ,$F = \mathbb{R}$.

Proposição 3.1.29 : Supondo que dim $E < +\infty$, seja $f \in \mathcal{G}(\Omega; \mathbb{R})$ uma função tendo pelo menos um representante satisfazendo as condições $V_*[\Omega;]\alpha, \beta[\,]$ e $V[\Omega]^{\beta}_{\alpha}$, e seja $\widehat{f}$ um representante qualquer de f satisfazendo a condição $V_*[\Omega;]\alpha, \beta[\,]$. Então , as funções f e $f - \alpha$ são elementos inversíveis de $\mathcal{G}(\Omega; \mathbb{R})$ e as funções $\widehat{f}^{-1}$ e $(\widehat{f} - \alpha)^{-1}$ são representantes de f^{-1} e $(f - \alpha)^{-1}$, respectivamente.

Prova : Para ver a afirmação relativa a f , em virtude do Teorema 3.1.22(II), basta observar que se uma função satisfaz a condição $V[\Omega]^{\beta}_{\alpha}$, então ela satisfaz também a condição $\Im[\Omega; \mathbb{R}^*]$ (Ver Definição 3.1.20), o que decorre da propriedade : se μ é uma função de $]0,1]$ em $]\alpha, a]$, $\alpha < a$, tal que $[\varepsilon \mapsto (\mu(\varepsilon) - \alpha)^{-1}] \in \mathcal{E}_M(\mathbb{R})$, então a função $(\varepsilon \mapsto \mu(\varepsilon)^{-1})$ é também um elemento moderado. E, para ver a afirmação correspondente a $f - \alpha$, observar que essa função tem pelo menos um representante satisfazendo as condições $V_*[\Omega;]0,\nu[]$ e $V[\Omega]_0^\nu$, onde $\nu := \beta - \alpha \in \overline{\mathbb{R}}$.

■

3.2 – Funções Generalizadas na Forma de Onda de Choque

Neste § são considerados os casos $\Omega = E = G = \mathbb{R}$ e $F = \mathbb{R}$ ou $F = \mathbb{R}^m$. Escrevemos por comodidade $\mathcal{G}(\mathbb{R}^k)$ (resp. $X[\mathbb{R}]$) em vez de $\mathcal{G}(\mathbb{R}^k;\mathbb{R})$ (resp. $X[\mathbb{R};\mathbb{R}]$) para $k = 1, m$ (resp. $X = \mathcal{E}_M, \mathcal{N}$). Usamos uma notação similar para os conjuntos $C^\infty(\mathbb{R}_+^*;\mathbb{R}), \mathcal{D}(\mathbb{R};\mathbb{R}), \mathcal{H}(\mathbb{R};\mathbb{R}), \Xi(\mathbb{R};\mathbb{R})$ e $\mathcal{H}_q(\mathbb{R};\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{G}_{\ell b}(V;\mathbb{R})$) para $q = p, r$ (resp. $V = \mathbb{R}, \mathbb{R}^*, \mathbb{R}_-^*, \mathbb{R}_+^*$).

Dizemos que $f = (f_1, \ldots, f_m) \in \mathcal{G}(\mathbb{R};\mathbb{R}^m)$ é uma *função generalizada na forma de onda de choque* se cada $f_i, 1 \leq i \leq m$, for da forma $f_i = \Delta_i H_i + b_i$, onde $H_i \in \mathcal{H}_p(\mathbb{R})$ e $\Delta_i := a_i - b_i$, com $0 < a_i < b_i$.

Proposição 3.2.1 : Dada $\mu \in \mathcal{E}_M(\mathbb{R})$ tal que $\mu \geq 1$ em $]0,1]$, existe uma função $\widehat{V} \in \mathcal{E}_M[\mathbb{R}]$ verificando a propriedade $(\mathcal{H}_r)$ (Ver Definição 2.2.8) e as condições seguintes:

(3.2.1.1) $$(\forall K \subset\subset \mathbb{R}^*)(\exists \eta \in]0,1]) : 0 \leq \widehat{V} \leq 1 \quad \text{em} \quad]0,\eta[\times K$$

(3.2.1.2) $$0 \leq \widehat{V}(\varepsilon,\cdot) \leq \mu(\varepsilon) \ \text{ em } \ \mathbb{R}$$

(3.2.1.3) $$\widehat{V}(\varepsilon,.) \equiv \mu(\varepsilon) \ \text{ em } \ [-\varepsilon,\varepsilon]$$

para cada $\varepsilon \in]0,1]$.

Prova : Dada $\xi \in \Xi(\mathbb{R})$, considerando a função moderada

$$u : (\varepsilon,x) \in]0,1] \times \mathbb{R} \mapsto (\chi(\varepsilon,.) * \xi_{\varepsilon_1})(x) \in \mathbb{R},$$

onde $\varepsilon_1 := \frac{\varepsilon}{4}$ e $\chi(\varepsilon,\cdot)$ é a função característica do intervalo $[\frac{-3\varepsilon}{2}, \frac{3\varepsilon}{2}]$, temos $0 \leq u(\varepsilon,\cdot) \leq 1$ em $\mathbb{R}, u(\varepsilon,\cdot) \equiv 1$ em $]\frac{-5\varepsilon}{4}, \frac{5\varepsilon}{4}[$ e $\operatorname{supp}(u(\varepsilon,\cdot)) \subset [\frac{-7\varepsilon}{4}, \frac{7\varepsilon}{4}], (\varepsilon \in]0,1])$. Em consequência, para a função moderada v definida no Lema 2.2.6 temos $0 \leq v(\varepsilon,\cdot) \leq 1$ em $\mathbb{R}, v(\varepsilon,\cdot) \equiv 1$ em $]-\infty, \frac{5\varepsilon}{4}[$ e $\mathrm{supp}(v(\varepsilon,\cdot)) \subset]-\infty, \frac{7\varepsilon}{4}[, (\varepsilon \in]0,1])$, e para a função moderada

$$w : (\varepsilon, x) \in]0,1] \times \mathbb{R} \mapsto \mu(\varepsilon)u(\varepsilon, x) \in \mathbb{R}$$

temos $0 \leq w(\varepsilon,\cdot) \leq \mu(\varepsilon)$ em $\mathbb{R}, w(\varepsilon,\cdot) \equiv \mu(\varepsilon)$ em $]\frac{-5\varepsilon}{4}, \frac{5\varepsilon}{4}[$ e $\mathrm{supp}(w(\varepsilon,\cdot)) \subset [\frac{-7\varepsilon}{4}, \frac{7\varepsilon}{4}], (\varepsilon \in]0,1])$. Logo, a função moderada

$$\widehat{V} : (\varepsilon, x) \in]0,1] \times \mathbb{R} \mapsto 1 + v(\varepsilon, x)[w(\varepsilon, x) - 1] \in \mathbb{R},$$

satisfaz as condições (3.2.1.2)(pois $\mu \geq 1$ em $]0,1]$), (3.2.1.3) e $\widehat{V}(\varepsilon, x) = 0$ (resp. $\widehat{V}(\varepsilon, x) = 1$) para $x < \frac{-7\varepsilon}{4}$(resp. $x > \frac{7\varepsilon}{4}$). Considerando a função $\mu_* : \varepsilon \in]0,1] \mapsto \frac{7\varepsilon}{4} \in \mathbb{R}_+^*$, vemos que o par $(\widehat{V}, \mu_*)$ satisfaz a propriedade $(\mathcal{H}_r)$ do Lema 2.2.5 e, em consequencia, a função $\widehat{V}$ verifica também a condição (3.2.1.1).

∎

Em virtude da condição (3.2.1.3) a função $\widehat{V}$ da proposição anterior verifica uma propriedade importante.

Observação : A função $\widehat{V}$ construida na Proposição 3.2.1 verifica a condição seguinte

$$\widehat{H}_\xi - \widehat{V} \notin \mathcal{N}[\mathbb{R}], \quad \text{para cada} \quad \xi \in \Xi,$$

e, em consequência, $H_\xi \neq V$ em $\mathcal{G}(\mathbb{R})$, onde V é a classe de $\widehat{V}$ em $\mathcal{G}(\mathbb{R})$ e, as funções $\widehat{H}_\xi$ e H_ξ são definidas como na Proposição 2.2.9.

Com efeito, se $\widehat{H}_\xi - \widehat{V}$ fôsse uma função nula, pelo Lema 1.2.5 (II)(a), se teria

$$\widehat{H}'_\xi(\varepsilon, 0) - \widehat{V}'(\varepsilon, 0) \to 0, \quad \text{para } \varepsilon \to 0^+;$$

donde, usando as condições (3.2.1.3) e $\widehat{H}'_\xi(\varepsilon,\cdot) = \widehat{\delta}_\xi(\varepsilon,\cdot)$, teriamos $\widehat{\delta}_\xi(\varepsilon, 0) \to 0$, para $\varepsilon \to 0^+$, fato que contraria a Proposição 1.2.21(1).

Em virtude da observação que antecede ao Exemplo 2.2.11, da observação anterior e de [2.2.3] temos as inclusões

[3.2.1] $$\mathcal{H}_\Xi(\mathbb{R}) \not\subseteq \mathcal{H}_r(\mathbb{R}) \not\subseteq \mathcal{H}_p(\mathbb{R}) \subset \mathcal{H}(\mathbb{R}).$$

Com a finalidade de simplificar o enunciado das proposições 3.2.2 e 3.2.7, resultados que correspondem ao caso $F = \mathbb{R}$, introduzimos a hipótese (e notações) descrita(s) a seguir.

Hipótese (I) : São considerados α e β em $\overline{\mathbb{R}}$, com $0 \leq \alpha < \beta$; uma função $\nu \in C^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ tal que $\operatorname{Im}(\nu) =]\alpha, \beta[$; a e b em $\mathbb{R}_+^*$, com $a < b$; e $\Delta := a - b$. No caso da função ν ser estritamente crescente serão usadas, se necessário, as seguintes notações , $\nu_r := \nu(a), \nu_\ell := \nu(b), \Delta\nu := \nu_r - \nu_\ell (< 0)$ e $\theta := (\Delta\nu)^{-1}(\alpha - \nu_\ell)(> 1)$.

Proposição 3.2.2 : Se a função ν é estritamente crescente e a função inversa ν^{-1} satisfaz a condição $M[\,]\alpha, \beta[; \mathbb{R}]$, então para cada função μ de $]0,1]$ em $[1, \theta[$ verificando as condições

$$(3.2.2.1) \qquad [\varepsilon \mapsto (\Delta\nu\mu(\varepsilon) + \nu_\ell - \alpha)^{-1}] \in \mathcal{E}_M(\mathbb{R});$$

$$(3.2.2.2) \qquad \nu(a\varepsilon) \leq \Delta\nu\mu(\varepsilon) + \nu_\ell, \qquad (\varepsilon \in]0,1]),$$

existe uma função $\widehat{H} \in \mathcal{E}_M[\mathbb{R}]$, verificando a propriedade $(\mathcal{H}_r)$ (Ver Definição 2.2.8) e as condições seguintes

$$(3.2.2.3) \qquad \sup_{x \in \mathbb{R}} |\widehat{H}(\varepsilon, x)| \leq \Delta^{-1}(a\varepsilon - b), \qquad (\varepsilon \in]0,1]);$$

$$(3.2.2.4) \qquad (\forall K \subset\subset \mathbb{R}^*)(\exists \eta \in]0,1]) : \sup_{]0,\eta[\times K} |\widehat{H}| < -\frac{b}{\Delta};$$

$$(3.2.2.5) \qquad \widehat{H}(\varepsilon, \cdot) \equiv \widehat{\mu}(\varepsilon) \quad \text{em} \quad [-\varepsilon, \varepsilon], \qquad (\varepsilon \in]0,1]),$$

onde $\widehat{\mu} : \varepsilon \in]0,1] \mapsto \Delta^{-1}[\nu^{-1}(\Delta\nu\mu(\varepsilon) + \nu_\ell) - b] \in [1, -b\Delta^{-1}[$, e a classe H de $\widehat{H}$ em $\mathcal{G}(\mathbb{R})$ é uma função em $\mathcal{H}_r(\mathbb{R})$ tal que $H \notin \mathcal{H}_\Xi(\mathbb{R})$.

Prova : Como $\mu \in \mathcal{E}_M(\mathbb{R})$ (por ser limitada) existe uma função $\widehat{V} \in \mathcal{E}_M[\mathbb{R}]$ satisfazendo as propriedades descritas na Proposição 3.2.1. Consideremos as funções

$$\widehat{H} := \Delta^{-1}[\nu^{-1} \circ (\Delta\nu\widehat{V} + \nu_\ell) - b]$$

e $\chi : \varepsilon \in]0,1] \mapsto \Delta\nu\mu(\varepsilon) + \nu_\ell \in]\alpha, \nu_r]$. Da condição (3.2.1.2) segue

$$(3.2.2.6) \qquad \chi(\varepsilon) \leq \Delta\nu\widehat{V}(\varepsilon, x) + \nu_\ell \leq \nu_\ell, \quad ((\varepsilon, x) \in]0,1] \times \mathbb{R})$$

e, por (3.2.2.1), temos $[\varepsilon \mapsto (\chi(\varepsilon) - \alpha)^{-1}] \in \mathcal{E}_M(\mathbb{R})$. Então , a função $\Delta\nu\widehat{V} + \nu_\ell$ satisfaz a condição $V[\mathbb{R}]_\alpha^\beta$ e, por (3.2.2.6), satisfaz também a condição $V_*[\mathbb{R};]\alpha, \beta[]$. Em cosequência, se V é a classe de $\widehat{V}$ em $\mathcal{G}(\mathbb{R})$, a hipótese sobre ν^{-1} (Ver Definição 3.1.27) mostra que $\nu^{-1} \circ (\Delta\nu\widehat{V} + \nu_\ell)$ é um representante de $\nu^{-1} \circ (\Delta\nu V + \nu_\ell)$ e, portanto, a função $\widehat{H}$ é um representante de

$$H := \Delta^{-1}[\nu^{-1} \circ (\Delta\nu V + \nu_\ell) - b].$$

Das condições (3.2.2.2) e (3.2.2.6) segue (3.2.2.3); da definição de $\widehat{H}$ e das condições (3.2.1.1) e $-b\Delta^{-1} > 1$ resulta (3.2.2.4); e de (3.2.1.3) segue (3.2.2.5). Por outro lado, seja μ_* uma função tal que o par $(\widehat{V}, \mu_*)$ satisfaz a propriedade $(\mathcal{H}_r)$ do Lema 2.2.5. Dado $\varepsilon \in]0,1]$, é claro que a condição $(\mathcal{H}_r)_2$ acarreta

$$\nu^{-1}(\Delta\nu\widehat{V}(\varepsilon, x) + \nu_\ell) = b(\text{ resp. } a) \text{ para } x < -\mu_*(\varepsilon)(\text{ resp. } x > \mu_*(\varepsilon));$$

donde segue que o par $(\widehat{H}, \mu_*)$ satisfaz a propriedade $(\mathcal{H}_r)_2$. Como o par $(\widehat{H}, \mu_*)$ satisfaz a propriedade $(\mathcal{H}_r)$, a condição (3.2.2.3) mostra que $H \in \mathcal{H}_r(\mathbb{R})$. Finalmente, da condição (3.2.2.5), por um raciocínio análogo ao que foi feito na verificação da observação que segue a Proposição 3.2.1, resulta que $H \notin \mathcal{H}_\Xi(\mathbb{R})$.

∎

Observar que as funções $\widehat{H}_\xi, (\xi \in \Xi(\mathbb{R}))$, definidas como na Proposição 2.2.9, verificam as condições (3.2.2.3) e (3.2.2.4).

Para as proposições 3.2.4 , 3.2.5 e 3.2.6, resultados que correspondem ao caso $F = \mathbb{R}^m$, damos a hipótese seguinte, onde são usados as notações dadas em [3.1.12] e [3.1.13].

Hipótese (II) : São considerados os seguintes dados.

(1$^{\underline{o}}$) Dois elementos $a = (a_1, \ldots, a_m)$ e $b = (b_1, \ldots, b_m)$ em $\mathbb{R}^m$ tais que $0 < a < b$. Definimos $\Delta_i := a_i - b_i$, para cada $i = 1, \ldots, m$.

(2$^{\underline{o}}$) Dois elementos $\alpha_* = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ e $\beta_* = (\beta_1, \ldots, \beta_m)$ em $\overline{\mathbb{R}}^m$ com $0 \leq \alpha_* < \beta_*$ e uma função $\nu_* = (\nu_1, \ldots, \nu_m) \in C^\infty(\mathbb{R}_+^*; \mathbb{R}^m)$ tal que cada componente de ν_* é uma função crescente. Vamos supor que estes dados satisfazem a condição seguinte : o conjunto $\{1, \ldots, m\}$ é reunião de duas partes disjuntas $\mathbf{I}$ e $\mathbf{J}$, com $1 \in \mathbf{I}$, tal que ν_i (resp. ν_j) é estritamente crescente, com imagem $]\alpha_i, \beta_i[$ (resp. não estritamente crescente, com imagem contida em $[\alpha_j, \beta_j[$) para cada $i \in \mathbf{I}$ (resp. $j \in \mathbf{J}$).

Definição 3.2.3 : Suponhamos verificada a Hipótese (II).

(1$^{\underline{o}}$) Se $\alpha_{(s)} := \alpha_1 + \ldots + \alpha_m \geq 0$ e $\beta_{(s)} := \beta_1 + \ldots + \beta_m \leq +\infty$, indicamos com $\nu_{(s)}$ a função

$$(y_1, \ldots, y_m) \in]\mathbf{0}, \infty[\mapsto \sum_{i=1}^m \nu_i(y_i) \in]\alpha_{(s)}, \beta_{(s)}[,$$

(2$^{\underline{o}}$) Suponhamos que $\alpha_j > 0$ para cada $j \in \mathbf{J}$, se $\alpha_{(\pi)} := \alpha_1 \ldots \alpha_m \geq 0$ e $\beta_{(\pi)} := \beta_1 \ldots \beta_m \leq +\infty$, denotamos com $\nu_{(\pi)}$ a função

$$(y_1, \ldots, y_m) \in]\mathbf{0}, \infty[\mapsto \prod_{i=1}^m \nu_i(y_i) \in]\alpha_{(\pi)}, \beta_{(\pi)}[.$$

Com essas notações , para cada $\nu = \nu_{(s)}, \nu_{(\pi)}$, consideremos $\nu_r := \nu(a), \nu_\ell := \nu(b)$ e $\Delta\nu := \nu_r - \nu_\ell$. É fácil ver que $\Delta\nu < 0$.

Nos resultados apresentados neste trabalho teremos $\mathbf{J} = \emptyset$ ou $\nu_j \equiv \alpha_j$ para cada $j \in \mathbf{J}$ no caso $\mathbf{J} \neq \emptyset$. No entanto, pensando em outras possíveis direções de pesquisa em torno dos sistemas estudados no Capítulo 4 , preferimos deixar o enunciado mais geral da Hipótese (II) acima. Além disso, na condição (1$^{\underline{o}}$) da Hipótese (II) basta exigir $0 < a_i < b_i$ para cada $i \in \mathbf{I}$ (Ver provas das proposições 3.2.5 e 3.2.6) mas por razões de simplicidade, o enunciamos na forma $0 < a < b$.

Lembremos que Y denota a função clássica de Heaviside (Ver 2.2).

Proposição 3.2.4 : Suponhamos verificada a Hipótese (II) e indiquemos com (ν, α, β) qualquer uma das ternas $(\nu_{(s)}, \alpha_{(s)}, \beta_{(s)})$ ou $(\nu_{(\pi)}, \alpha_{(\pi)}, \beta_{(\pi)})$. Dada $(H_1, \ldots, H_m)$ em $\mathcal{G}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^m)$, seja $f = (f_1, \ldots, f_m) := (\Delta_1 H_1 + b_1, \ldots, \Delta_m H_m + b_m)$ em $\mathcal{G}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^m)$. Supondo que cada $H_\imath, 1 \leq \imath \leq m$, tem um representante $\widehat{H}_\imath$ tal que $(\widehat{H}_\imath, a_\imath, b_\imath, \Delta_\imath)$ verifica a condição (3.2.2.3) (com $\widehat{H}, a, b$ e Δ substituidos por $\widehat{H}_\imath, a_\imath, b_\imath$ e $\Delta_\imath$ respectivamente), são válidas as asserções seguintes.

(I) A função $\widehat{f} = (\widehat{f}_1, \ldots, \widehat{f}_m) := (\Delta_1 \widehat{H}_1 + b_1, \ldots, \Delta_m \widehat{H}_m + b_m)$ satisfaz as condições $V_*[\mathbb{R};]\mathbf{0}, \infty[]$ e $V[\mathbb{R}]_{\mathbf{0}}^{\infty}$;

(II) Supondo que cada componente da função ν_* satisfaz a condição $M[\mathbb{R}_+^*; \mathbb{R}]$ valem as afirmações seguintes,

$(II)_1$ a função ν satisfaz a condição $M[]\mathbf{0}, \infty[; \mathbb{R}]$ (e portanto, pela Definção 3.1.27, $\nu \circ \widehat{f}$ é um representante de $\nu \circ f \in \mathcal{G}(\mathbb{R})$);

$(II)_2$ se $\widehat{H}_\imath(\varepsilon, \cdot) \to Y$, para $\varepsilon \to 0^+$, em $\mathbb{R}^*, (1 \leq \imath \leq m)$, então

$$(3.2.4.1) \qquad (\nu \circ \widehat{f})(\varepsilon, .) \to \nu_\ell (\text{resp. } \nu_r) \text{ em } \mathbb{R}_-^* (\text{resp. } \mathbb{R}_+^*), \quad \text{para } \varepsilon \to 0^+,$$

e $V := (\Delta \nu)^{-1}(\nu \circ f - \nu_\ell) \in \mathcal{H}_p(\mathbb{R})$;

$(II)_3$ se $[\varepsilon \mapsto (\nu_1(r\varepsilon) - \alpha_1)^{-1}] \in \mathcal{E}_M(\mathbb{R})$, para cada $r > 0$, então a função $\nu \circ \widehat{f}$ verifica as condições $V_*[\mathbb{R};]\alpha, \beta[]$ e $V[\mathbb{R}]_\alpha^\beta$ (e portanto, pela Proposição 3.1.29, $\nu \circ f - \alpha$ é inversível em $\mathcal{G}(\mathbb{R})$); $(\nu_1 \circ f_1 - \alpha_1)(\nu \circ f - \alpha)^{-1} \in \mathcal{G}_{\ell b}(\mathbb{R})$; e é válida a condição

$$(3.2.4.2) \qquad \left(\frac{\nu_1 \circ \widehat{f}_1 - \alpha_1}{\nu \circ \widehat{f} - \alpha}\right)(\varepsilon, \cdot) \to \lambda_\ell (\text{resp. } \lambda_r) \text{ em } \mathbb{R}_-^* (\text{resp. } \mathbb{R}_+^*), \text{ para } \varepsilon \to 0^+,$$

onde $\lambda_\tau := (\nu_1(b_1) - \alpha_1)(\nu_\tau - \alpha)^{-1}, \tau = \ell, r$. No caso $(\nu, \alpha, \beta) = (\nu_{(\pi)}, \alpha_{(\pi)}, \beta_{(\pi)})$ fazemos a hipótese adicional $\alpha_\imath > 0$ sempre que $2 \leq \imath \leq m$.

Prova : Pela Definição 1.2.16, a função $\widehat{f} = (\widehat{f}_1, \ldots, \widehat{f}_m)$ é um representante de $f = (f_1, \ldots, f_m)$. De (3.2.2.3) e da definição de $\widehat{f}$ resulta

$$(3.2.4.3) \qquad \widehat{f}(\varepsilon, x) \in [\varepsilon a, 2b], \qquad ((\varepsilon, x) \in]0, 1] \times \mathbb{R}),$$

donde segue a validade da asserção (I).

$(II)_1$: Em virtude da Proposição 3.1.24, dados $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$ em $\mathbb{N}^m, \widehat{a}, \widehat{b}$ em $]\mathbf{0}, \infty[, \widehat{a} < \widehat{b}$, e uma função $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_m)$ de $]0,1]$ em $]0, \widehat{a}]$ tal que $(\varepsilon \mapsto \mu_\imath(\varepsilon)^{-1}) \in \mathcal{E}_M(\mathbb{R}), (1 \leq \imath \leq m)$, devem existir $N \in \mathbb{N}, C > 0$ e $\eta \in]0,1]$ verificando

$$(3.2.4.4) \qquad \sup_{y \in [\mu(\varepsilon), \widehat{b}]} |\partial^\gamma \nu(y)| \leq C\varepsilon^{-N}, \qquad (0 < \varepsilon < \eta).$$

Ora, para cada $y = (y_1, \ldots, y_m) \in]\mathbf{0}, \infty[$, são válidas

$$\partial^\gamma \nu_{(s)}(y) = \sum_{\imath=1}^{m} \nu_\imath^{(\gamma_\imath)}(y_\imath) \text{ e } \partial^\gamma \nu_{(\pi)}(y) = \prod_{\imath=1}^{m} \nu_\imath^{(\gamma_\imath)}(y_\imath),$$

e por outro lado, por hipótese, existem $N_\imath \in \mathbb{N}, C_\imath > 0$ e $\eta \in]0,1]$ tais que

$$\sup_{t \in [\mu_\imath(\varepsilon), \widehat{b}_\imath]} |\nu_\imath^{(\gamma_\imath)}(t)| \leq C_\imath \varepsilon^{-N_\imath}, \qquad (0 < \varepsilon < \eta, 1 \leq \imath \leq m),$$

onde $\widehat{b} = (\widehat{b}_1, \ldots, \widehat{b}_m)$. Estas condições acarretam (3.2.4.4).

$(II)_2$: Como cada componente de ν_* é uma função crescente, da condição (3.2.4.3) segue

$$(3.2.4.5) \qquad (\nu \circ \widehat{f})(\varepsilon, x) \in [\nu(\varepsilon a), \nu(2b)], \qquad ((\varepsilon, x) \in]0,1] \times \mathbb{R}).$$

Da hipótese e da definição de $\widehat{f}_\imath$ segue $\widehat{f}_\imath(\varepsilon, \cdot) \to \Delta_\imath Y + b_\imath$ em $\mathbb{R}^*$, quando $\varepsilon \to 0^+$, e portanto

$$(3.2.4.6) \qquad \lim_{\varepsilon \to 0^+} (\nu_\imath \circ \widehat{f}_\imath)(\varepsilon, x) = \begin{cases} \nu_\imath(b_\imath), \text{ para } x < 0 \\ \nu_\imath(a_\imath), \text{ para } x > 0 \end{cases}, \ (1 \leq \imath \leq m);$$

donde segue (3.2.4.1). Por outro lado, sendo a função

$$\widehat{V} : (\varepsilon, x) \in]0,1] \times \mathbb{R} \mapsto (\Delta\nu)^{-1}[(\nu \circ \widehat{f})(\varepsilon, x) - \nu_\ell] \in \mathbb{R}$$

um representante de V e $|\widehat{V}| \leq -(\Delta\nu)^{-1}(\nu(2b) + \nu_\ell)$ em $]0,1] \times \mathbb{R}$, o que decorre de (3.2.4.5), temos $V \in \mathcal{G}_{\ell b}(\mathbb{R})$. E usando a condição (3.2.4.1) segue $\widehat{V}(\varepsilon, \cdot) \to Y$ em $\mathbb{R}^*$, para $\varepsilon \to 0^+$, e, por tanto, $V \in \mathcal{H}_p(\mathbb{R})$.

$(II)_3$: Considerando a função $\mu : \varepsilon \in]0,1] \mapsto \nu(\varepsilon a) \in]\alpha, \nu(a)]$, afirmamos que $[\varepsilon \mapsto (\mu(\varepsilon) - \alpha)^{-1}] \in \mathcal{E}_M(\mathbb{R})$, o que, em virtude da condição (3.2.4.5), implicará a validade da primeira asserção relativa à função $\nu \circ \widehat{f}$. Ora, no caso $\nu = \nu_{(s)}$, por hipótese, a asserção segue da condição $\nu_1(a_1\varepsilon) - \alpha_1 \leq \mu(\varepsilon) - \alpha, (\varepsilon \in]0,1])$. No caso $\nu = \nu_{(\pi)}$, usando a igualdade

$$\mu(\varepsilon) - \alpha = \sum_{\imath=1}^{m} \nu_1(a_1\varepsilon) \ldots \nu_{\imath-1}(a_{\imath-1}\varepsilon)(\nu_\imath(a_\imath\varepsilon) - \alpha_\imath)\alpha_{\imath+1} \ldots \alpha_m,$$

temos $(\nu_1(a_1\varepsilon) - \alpha_1)\alpha_2 \ldots \alpha_m \leq \mu(\varepsilon) - \alpha, (\varepsilon \in]0,1])$; donde, como $\alpha_\imath > 0,(2 \leq \imath \leq m)$, segue a afirmação . Por outro lado, no caso $\nu = \nu_{(s)}$, da condição

$$(\nu_1 \circ \widehat{f}_1 - \alpha_1) \leq \nu \circ \widehat{f} - \alpha \qquad \text{em} \quad]0,1] \times \mathbb{R}$$

segue que $(\nu_1 \circ f_1 - \alpha)(\nu \circ f - \alpha_1)^{-1} \in \mathcal{G}_{\ell b}(\mathbb{R})$; e no caso $\nu = \nu_{(\pi)}$ a asserção segue da condição

$$(\nu_1 \circ \widehat{f}_1 - \alpha_1)(\nu \circ \widehat{f} - \alpha)^{-1} \leq (\alpha_2 \ldots \alpha_m)^{-1} \qquad \text{em }]0,1] \times \mathbb{R}.$$

Finalmente, usando as condições (3.2.4.1) e (3.2.4.6) segue (3.2.4.2).

∎

Proposição 3.2.5 : Suponhamos verificada a Hipótese (II) com $\mathbf{J} = \emptyset$ e indiquemos com (ν, α, β) qualquer uma das ternas $(\nu_{(s)}, \alpha_{(s)}, \beta_{(s)})$ ou $(\nu_{(\pi)}, \alpha_{(\pi)}, \beta_{(\pi)})$. Se, para cada $\imath = 1, \ldots, m$, as funções $\nu_\imath$ e $\nu_\imath^{-1}$ satisfazem as condições $M[\mathbb{R}_+^*; \mathbb{R}]$ e $M[]\alpha_\imath, \beta_\imath[; \mathbb{R}]$, respectivamente, então existem $H_1, \ldots, H_m$ em $\mathcal{H}_r(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{H}_\Xi(\mathbb{R})$ verificando as seguintes propriedades.

(I) Cada $H_\imath, 1 \leq \imath \leq m$, possui um representante $\widehat{H}_\imath$ tal que $(\widehat{H}_\imath, a_\imath, b_\imath, \Delta_\imath)$ satisfaz a condição (3.2.2.3) e $(\widehat{H}_\imath, b_\imath, \Delta_\imath)$ satisfaz a condição (3.2.2.4);

(II) Para cada $\xi \in \Xi(\mathbb{R})$, são válidas as relações (em $\mathcal{G}(\mathbb{R})$):

(3.2.5.1) $$[\nu \circ (\Delta_1 H_1 + b_1, \ldots, \Delta_m H_m + b_m) - \alpha] H'_\xi \approx 0$$

(3.2.5.2) $$[\nu\circ(\Delta_1 H_1+b_1,\ldots,\Delta_m H_m+b_m)-\alpha]H_\xi H'_\xi\approx 0$$

onde $H_\xi\in\mathcal{H}_r(\mathbb{R})$ é definida na Proposição 2.2.9.

Prova : Dado que cada componente de ν_* é uma função estritamente crescente e que a imagem de ν_* é o conjunto $]\alpha_*,\beta_*[$ podemos escolher um $\eta\in]0,1]$ tal que

(3.2.5.3) $$\nu_{\imath,r}\varepsilon+\nu_\imath(a_\imath\varepsilon)\le\nu_{\imath,r},\qquad(0<\varepsilon<\eta,1\le\imath\le m),$$

onde $\nu_{\imath,r}:=\nu_\imath(a_\imath)$. Fixado $\imath=1,\ldots,m$, considerando $\nu_{\imath,\ell}:=\nu_\imath(b_\imath)$, $\Delta\nu_\imath:==\nu_{\imath,r}-\nu_{\imath,\ell}$, $\theta_\imath:=(\Delta\nu_\imath)^{-1}(\alpha_\imath-\nu_{\imath,\ell})$ e a função $\mu_\imath$ de $]0,1]$ em $[1,\theta_\imath[$ definida por $\mu_\imath(\varepsilon):=(\Delta\nu_\imath)^{-1}[\nu_{\imath,r}\varepsilon+\nu_\imath(a_\imath\varepsilon)-\nu_{\imath,\ell}]$(resp. $\mu_\imath(\varepsilon):=1$) para $0<\varepsilon<\eta$ (resp. $\eta\le\varepsilon\le1$), temos: $\mu_\imath(\varepsilon)\to\theta_\imath$, para $\varepsilon\to0^+$; $(\nu_\imath,\mu_\imath,a_\imath,b_\imath)$ verifica a condição (3.2.2.2); e, como

$$\Delta\nu_\imath\mu_\imath(\varepsilon)+\nu_{\imath,\ell}-\alpha_\imath=\nu_{\imath,r}\varepsilon+\nu_\imath(a_\imath\varepsilon)-\alpha_\imath\ge\nu_{\imath,r}\varepsilon,\qquad(0<\varepsilon<\eta),$$

$(\nu_\imath,\mu_\imath,a_\imath,b_\imath,\alpha_\imath)$ verifica a condição (3.2.2.1). E portanto, como $\nu_\imath^{-1}$ satisfaz a condição $M[]\alpha_\imath,\beta_\imath[;\mathbb{R}]$, pela Proposição 3.2.2, existe uma função $\widehat{H}_\imath\in\mathcal{E}_M[\mathbb{R}]$ tal que

(3.2.5.4) $$\widehat{H}_\imath(\varepsilon,\cdot)\equiv\widehat{\mu}_\imath(\varepsilon)\text{ em }[-\varepsilon,\varepsilon],\qquad(\varepsilon\in]0,1]),$$

onde $\widehat{\mu}_\imath:\varepsilon\in]0,1]\mapsto\Delta_\imath^{-1}[\nu_\imath^{-1}(\Delta\nu_\imath\mu_\imath(\varepsilon)+\nu_{\imath,\ell})-b_\imath]\in[1,-b_\imath(\Delta_\imath)^{-1}[$, e as funções $\widehat{H}_\imath$ e $H_\imath=\widehat{H}_\imath+\mathcal{N}[\mathbb{R}]\in\mathcal{H}_r(\mathbb{R})\setminus\mathcal{H}_\Xi(\mathbb{R})$ satisfazem as condições da afirmação (I).

(II) : Como cada $(\widehat{H}_\imath,a_\imath,b_\imath,\Delta_\imath)$ satisfaz a condição (3.2.2.3) e cada $\nu_\imath$ satisfaz a condição $M[\mathbb{R}^*_+;\mathbb{R}]$, pela Proposição 3.2.4$(II)_1$, a função $\nu\circ(\Delta_1\widehat{H}_1+b_1,\ldots,\Delta_m\widehat{H}_m+b_m)$ é um representante de $\nu\circ(\Delta_1 H_1+b_1,\ldots,\Delta_m H_m+b_m)$. Afirmamos que existe uma função μ de $]0,1]$ em $[\alpha,\nu_r[$ tal que $\mu(\varepsilon)\to\alpha$, para $\varepsilon\to0^+$, e

(3.2.5.5) $$(\nu\circ\widehat{f})(\varepsilon,.)\equiv\mu(\varepsilon)\text{ em }[-\varepsilon,\varepsilon],\qquad(\varepsilon\in]0,1]),$$

onde $\widehat{f}:=(\Delta_1\widehat{H}_1+b_1,\ldots,\Delta_m\widehat{H}_m+b_m)$. Com efeito, no caso $\nu=\nu_{(s)}$, de (3.2.5.4) vem $(\nu\circ\widehat{f})(\varepsilon,\cdot)\equiv(\Delta\nu_1\mu_1(\varepsilon)+\nu_{1,\ell})+\ldots+(\Delta\nu_m\mu_m(\varepsilon)+\nu_{m,\ell})$ em $[-\varepsilon,\varepsilon]$; donde considerando a função

$$\mu:\varepsilon\in]0,1]\mapsto\mu(\varepsilon):=\nu_\ell+\sum_{\imath=1}^m\mu_\imath(\varepsilon)\Delta\nu_\imath\in[\alpha,\nu_r[,$$

segue (3.2.5.5); e como $\mu_\imath(\varepsilon) \to \theta_\imath$, para $\varepsilon \to 0^+, (1 \leq \imath \leq m)$, temos $\mu(\varepsilon) \to \alpha$, para $\varepsilon \to 0^+$. De modo análogo, considerando a função

$$\mu : \varepsilon \in]0,1] \mapsto \mu(\varepsilon) := \prod_{\imath=1}^{m} [\mu_\imath(\varepsilon)\Delta\nu_\imath + \nu_{\imath,\ell}] \in [\alpha, \nu_r[,$$

e a identidade $(\nu \circ \widehat{f})(\varepsilon,\cdot) \equiv (\Delta\nu_1\mu_1(\varepsilon) + \nu_{1,\ell}) \ldots (\Delta\nu_m\mu_m(\varepsilon) + \nu_{m,\ell})$ em $[-\varepsilon,\varepsilon]$, segue a afirmação no caso $\nu = \nu_{(\pi)}$.

Fixada $\xi \in \Xi(\mathbb{R})$, para verificar as relações (3.2.5.1) e (3.2.5.2) serão usadas, a condição (3.2.5.5) e as notações dadas na Proposição 2.2.9. De fato, para termos (3.2.5.1), fixada $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, basta ver que $I(\varepsilon) \to 0$, para $\varepsilon \to 0^+$, onde

$$I(\varepsilon) :=< [(\nu \circ \widehat{f})(\varepsilon,.) - \alpha]\widehat{\delta}_\xi(\varepsilon,.), \varphi >, \quad (\varepsilon \in]0,1]).$$

Ora, como $\mathrm{supp}(\widehat{\delta}_\xi(\varepsilon,\cdot)) \subset [-\varepsilon,\varepsilon]$, de (3.2.5.5) vem $I(\varepsilon) = (\mu(\varepsilon) - \alpha) < \widehat{\delta}_\xi(\varepsilon,.), \varphi >$; donde, como $\mu(\varepsilon) \to \alpha$ e $< \widehat{\delta}_\xi(\varepsilon,.), \varphi > \to \varphi(0)$, segue $I(\varepsilon) \to 0$. De modo análogo, para termos (3.2.5.2), fixada $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, basta que $J(\varepsilon) \to 0$, para $\varepsilon \to 0^+$, onde

$$J(\varepsilon) :=< [(\nu \circ \widehat{f})(\varepsilon,.) - \alpha](\widehat{H}_\xi\widehat{H}'_\xi)(\varepsilon,.), \varphi >, \quad (\varepsilon \in]0,1]).$$

Ora, de (3.2.5.5) segue $J(\varepsilon) = \frac{1}{2}(\mu(\varepsilon) - \alpha) < (\widehat{H}^2_\xi)'(\varepsilon,.), \varphi >$. Como $H_\xi \in \mathcal{H}_r(\mathbb{R}) \subset \mathcal{H}_p(\mathbb{R})$ temos $H^2_\xi \in \mathcal{H}_p(\mathbb{R})$ e, portanto, $(H^2_\xi)'$ é uma função de Dirac; donde $< (\widehat{H}^2_\xi)'(\varepsilon,\cdot), \varphi > \to \varphi(0)$, o que junto com a igualdade anterior implica $J(\varepsilon) \to 0$.

■

Proposição 3.2.6 : Suponhamos verificada a Hipótese (II) e indiquemos com (ν,α,β) qualquer uma das ternas $(\nu_{(s)}, \alpha_{(s)}, \beta_{(s)})$ ou $(\nu_{(\pi)}, \alpha_{(\pi)}, \beta_{(\pi)})$. Suponhamos ainda satisfeita as condições seguintes :

(A) para cada $\imath \in \mathbf{I}$, as funções $\nu_\imath$ e $\nu_\imath^{-1}$ satisfazem as condições $M[\mathbb{R}^*_+; \mathbb{R}]$ e $M[\,]\alpha_\imath, \beta_\imath[; \mathbb{R}]$, respectivamente;

(B) para cada $\jmath \in \mathbf{J}$, se tem $\nu_\jmath \equiv \alpha_\jmath$ em $\mathbb{R}^*_+$.

Então , existem $H_1, \ldots, H_m$ em $\mathcal{H}_r(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{H}_\Xi(\mathbb{R})$ satisfazendo as condições (I) e (II) descritas na Proposição 3.2.5.

Prova : Pela hipótese (A), existem funções $H_\imath \in \mathcal{H}_r(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{H}_\Xi(\mathbb{R}), \imath \in \mathbf{I}$, satisfazendo a condição (I) da Proposição 3.2.5; isto é ,para cada $\imath \in \mathbf{I}, H_\imath$ tem um representante $\widehat{H}_\imath$ tal que $(\widehat{H}_\imath, a_\imath, b_\imath, \Delta_\imath)$(resp. $(\widehat{H}_\imath, b_\imath, \Delta_\imath)$) verifica a condição (3.2.2.3) (resp. (3.2.2.4)); e pela condição (II) da Proposição 3.2.5, valem as relações (em $\mathcal{G}(\mathbb{R})$):

$$(3.2.6.1) \qquad \sum_{\imath \in \mathbf{I}} [\nu_\imath \circ (\Delta_\imath H_\imath + b_\imath) - \alpha_\imath] H'_\xi \approx 0, \quad \sum_{\imath \in \mathbf{I}} [\nu_\imath \circ (\Delta_\imath H_\imath + b_\imath) - \alpha_\imath] H_\xi H'_\xi \approx 0$$

$$(3.2.6.2) \quad [\prod_{\imath \in \mathbf{I}} \nu_\imath \circ (\Delta_\imath H_\imath + b_\imath) - \prod_{\imath \in \mathbf{I}} \alpha_\imath] H'_\xi \approx 0, \quad [\prod_{\imath \in \mathbf{I}} \nu_\imath \circ (\Delta_\imath H_\imath + b_\imath) - \prod_{\imath \in \mathbf{I}} \alpha_\imath] H_\xi H'_\xi \approx 0$$

para cada $\xi \in \Xi(\mathbb{R})$. Pela Proposição 3.2.5 basta considerar o caso $\mathbf{J} \neq \emptyset$; para cada $\jmath \in \mathbf{J}$ definimos, por exemplo, $H_\jmath := H_1$ (Lembrar que $1 \in \mathbf{I}$). Da hipótese (B) ,no caso $(\nu, \alpha) = (\nu_{(s)}, \alpha_{(s)})$, segue

$$\nu_{(s)} \circ (\Delta_1 H_1 + b_1, \ldots, \Delta_m H_m + b_m) - \alpha_{(s)} = \sum_{\imath \in \mathbf{I}} [\nu_\imath \circ (\Delta_\imath H_\imath + b_\imath) - \alpha_\imath],$$

o que junto com as condições (3.2.6.1) acarreta as relações (3.2.5.1) e (3.2.5.2). No caso $(\nu, \alpha) = (\nu_{(\pi)}, \alpha_{(\pi)})$, usando a igualdade

$$\nu_{(\pi)} \circ (\Delta_1 H_1 + b_1, \ldots, \Delta_m H_m + b_m) - \alpha_{(\pi)} = \prod_{\jmath \in \mathbf{J}} \alpha_\jmath [\prod_{\imath \in \mathbf{I}} \nu_\imath \circ (\Delta_\imath H_\imath + b_\imath) - \prod_{\imath \in \mathbf{I}} \alpha_\imath],$$

e as condições $\alpha_\jmath > 0$ para cada $\jmath \in \mathbf{J}$ (pela definição de $\nu_{(\pi)}$) e (3.2.6.2) seguem as relações (3.2.5.1) e (3.2.5.2).

∎

O resultado seguinte será de grande utilidade no estudo da não resolubilidade de sistemas de equações diferenciais parciais não lineares da hidrodinâmica.

Proposição 3.2.7 : Nas condições da Hipótese (I), seja $\widehat{H} \in \mathcal{E}_M[\mathbb{R}]$ tal que $(\widehat{H}, a, b, \Delta)$ verifica a condição (3.2.2.3) e seja f a classe de $\widehat{f} := \Delta \widehat{H} + b$ em $\mathcal{G}(\mathbb{R})$. Se a função ν é estritamente crescente e satisfaz a condição $M[\mathbb{R}_+^*; \mathbb{R}]$, para cada $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, existe uma função estritamente crescente $\varphi = \varphi_n \in C^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ satisfazendo as condições $M[\mathbb{R}_+^*; \mathbb{R}]$ e

$$(3.2.7.1) \qquad (\varphi \circ f)' = (\nu \circ f - \alpha) f^{-n} f' \text{ em } \mathcal{G}(\mathbb{R}).$$

Além disso, se $\widehat{H}(\varepsilon, .) \to Y$, quando $\varepsilon \to 0^+$, em $\mathbb{R}^*$ e se $(\widehat{H}, b, \Delta)$ verifica a condição (3.2.2.4) então , a função φ satisfaz também as relações

$$(3.2.7.2) \qquad \varphi \circ f \approx \varphi(b) \text{ em } \mathcal{G}(\mathbb{R}_-^*) \quad \text{e} \quad \varphi \circ f \approx \varphi(a) \text{ em } \mathcal{G}(\mathbb{R}_+^*).$$

Prova : Pela condição (3.2.2.3) e pela Proposição 3.2.4(I), a função $\widehat{f}$ satisfaz as condições $V_*[\mathbb{R}; \mathbb{R}_+^*]$ e $V[\mathbb{R}]_0^{+\infty}$, e portanto, pela Proposição 3.1.29, f é um elemento inversível de $\mathcal{G}(\mathbb{R})$ e $\widehat{f}^{-1}$ é um representante de f^{-1}. Para um $\theta > 0$ qualquer, é claro que a função

$$\varphi : y \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \varphi(y) := \int_\theta^y (\nu(t) - \alpha) t^{-n} dt \in \mathbb{R},$$

satisfaz a condição seguinte

$$(3.2.7.3) \qquad \varphi'(y) = (\nu(y) - \alpha) y^{-n}, \quad (y > 0);$$

donde, como $\nu(y) > \alpha, (y > 0)$, segue que φ é estritamente crescente e, portanto, φ verifica a propriedade

$$(3.2.7.4) \qquad \left| \begin{array}{l} \text{Para cada } A, B \in \mathbb{R}_+^*, A < B, \text{ e cada } y \in [A, B], \text{temos} \\ |\varphi(y)| \leq |\varphi(A)| \text{ ou } |\varphi(y)| \leq |\varphi(B)| \end{array} \right.$$

(De fato, se $y \geq \theta$ temos $|\varphi(y)| = \varphi(y) \leq \varphi(B)$. E se $y < \theta$ temos $\varphi(A) \leq \varphi(y) < 0$; donde $|\varphi(y)| \leq |\varphi(A)|$). Para verificar que a função φ satisfaz a condição $M[\mathbb{R}_+^*; \mathbb{R}]$, fixados $p \in \mathbb{N}, \widehat{a}, \widehat{b} \in \mathbb{R}_+^*, \widehat{a} < \widehat{b}$, e uma função μ de $]0, 1]$ em $]0, \widehat{a}]$ tal que $(\varepsilon \mapsto \mu(\varepsilon)^{-1}) \in \mathcal{E}_M(\mathbb{R})$, devemos achar $N \in \mathbb{N}, C > 0$ e $\eta \in]0, 1]$ verificando

$$(3.2.7.5) \qquad \sup_{y \in [\mu(\varepsilon), \widehat{b}]} |\varphi^{(p)}(y)| \leq C \varepsilon^{-N}, \quad (0 < \varepsilon < \eta).$$

Ora, como ν satisfaz a condição $M[\mathbb{R}_+^*;\mathbb{R}]$ e

$$\varphi^{(p)}(y)=\sum_{q=0}^{p-1} C_q^p(\nu-\alpha)^{(q)}(y)y^{q-p-n+1}, \qquad (y>0, p\geq 1),$$

onde $C_q^p:=(-1)^{p-q-1}n(n+1)\ldots(n+p-q-2)\binom{p-1}{q}$, basta verificar (3.2.7.5) no caso $p=0$. Para $b':=\theta\vee\widehat{b}$, sejam $N\in\mathbb{N}, C>0$ e $\eta\in]0,1]$ verificando

$$\text{(3.2.7.6)} \qquad \sup\nolimits_{t\in[\mu(\varepsilon),b']}|\nu(t)-\alpha|\leq C\varepsilon^{-N}, \quad (0<\varepsilon<\eta).$$

Fixados $0<\varepsilon<\eta$ e $\mu(\varepsilon)\leq y\leq\widehat{b}$, por (3.2.7.4), temos $|\varphi(y)|\leq|\varphi(\widehat{b})|$ ou $|\varphi(y)|\leq|\varphi(\mu(\varepsilon))|$. No último caso, usando a condição (3.2.7.6) segue

$$|\varphi(y)|\leq\frac{C}{n-1}|\theta^{1-n}-\mu(\varepsilon)^{1-n}|\varepsilon^{-N},$$

o que junto com a condição $(\varepsilon\mapsto\mu(\varepsilon)^{-1})\in\mathcal{E}_M(\mathbb{R})$ implica (3.2.7.5). Pela Definição 3.1.27, as funções $\nu\circ\widehat{f},\varphi\circ\widehat{f}$ e $\varphi'\circ\widehat{f}$ são representantes de $\nu\circ f,\varphi\circ f$ e $\varphi'\circ f$, respectivamente; e, pelo Teorema 3.1.28(II), temos $(\varphi\circ f)'=(\varphi'\circ f)f'$. De (3.2.7.3) segue $\varphi'\circ\widehat{f}=(\nu\circ\widehat{f}-\alpha)\widehat{f}^{-n}$ e, portanto, $\varphi'\circ f=(\nu\circ f-\alpha)f^{-n}$ o que junto com a igualdade anterior implica (3.2.7.1). Com a finalidade de verificarmos as relações descritas em (3.2.7.3) afirmamos que $\varphi\circ f\in\mathcal{G}_{\ell b}(\Omega)$, para $\Omega=\mathbb{R}_-^*,\mathbb{R}_+^*$, e para isso basta provar que $\varphi\circ f\in\mathcal{G}_{\ell b}(\mathbb{R}^*)$. De fato, fixado $K\subset\subset\mathbb{R}^*$, seja $\eta\in]0,1]$ verificando a desigualdade dada em (3.2.2.4). Considerando os números

$$\widehat{C}:=\sup\nolimits_{]0,\eta[\times K}|\widehat{H}|,\ C_0:=1\vee\widehat{C},\ C_1:=b+\Delta C_0 \text{ e } C_2:=b-\Delta C_0,$$

temos ($0<C_1<C_2$ e) $\Delta C_0\leq\Delta\widehat{H}\leq-\Delta C_0$ em $]0,\eta[\times K$; donde $C_1\leq\widehat{f}\leq C_2$ em $]0,\eta[\times K$, o que junto com (3.2.7.4) implica

$$\sup\nolimits_{x\in K}|(\varphi\circ\widehat{f})(\varepsilon,x)|\leq C, \quad (0<\varepsilon<\eta),$$

onde $C:=|\varphi(C_1)|\vee|\varphi(C_2)|$. Finalmente, da hipótese vem $\widehat{f}(\varepsilon,.)\to\Delta Y+b$ em $\mathbb{R}^*$; donde $(\varphi\circ\widehat{f})(\varepsilon,\cdot)\to\varphi(b)$ em $\mathbb{R}_-^*$ e $(\varphi\circ\widehat{f})(\varepsilon,\cdot)\to\varphi(a)$ em $\mathbb{R}_+^*$. Em consequência, pela Proposição 1.3.14, são válidas as relações dadas em (3.2.7.3). ∎

Definição 3.2.8 : Consideremos as equações

$$(E_1) \quad u_t + uu_x = 0 \qquad\qquad (\widetilde{E}_1) \quad u_t + uu_x \approx 0$$

$$(E_2) \quad (\frac{1}{2}u^2)_t + (\frac{1}{3}u^3)_x = 0 \qquad (\widetilde{E}_2) \quad (\frac{1}{2}u^2)_t + (\frac{1}{3}u^3)_x \approx 0,$$

onde as relações de igualdade e de associação são dadas em $\mathcal{G}(\mathbb{R}^2)$. Uma ***solução na forma de onda de choque*** da equação $(E) = (E_i), (\widetilde{E}_i), i = 1, 2$, é qualquer função u em $\mathcal{G}(\mathbb{R}^2)$ dada na forma

$$(S) \qquad\qquad u = \Delta H \circ y^* + b,$$

a qual é solução da equação (E); onde $\Delta := a - b$, para algum (a, b) em $\mathbb{R}^2$ tal que $0 < a < b$; H é uma função em $\mathcal{H}_p(\mathbb{R})$ tendo um representante $\widehat{H}$ tal que $(\widehat{H}, a, b, \Delta)$ satisfaz a condição (3.2.2.3); e $y^* : (x, t) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x - ct \in \mathbb{R}$ (Ver [3.1.6]), para algum $c \in \mathbb{R}$.

Observação 3.2.9 : Toda solução na forma de onda de choque de qualquer equação (E) dada na Definição 4.2.8 é um elemento inversível de $\mathcal{G}(\mathbb{R}^2)$.

De fato, seja u uma solução na forma de onda de choque da equação (E) nas condições da Definição 3.2.8. Pela Proposição 3.2.4(I), a função $\widehat{u}_* := \Delta\widehat{H} + b$, repesentante de $\Delta H + b$, satisfaz as condições $V_*[\mathbb{R}; \mathbb{R}^*_+]$ e $V[\mathbb{R}]_0^{+\infty}$; em consequencia, a função $\widehat{u}_* \circ y^*$, representante de u , satisfaz as condições $V_*[\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^*_+]$ e $V[\mathbb{R}^2]_0^{+\infty}$. A afirmação segue então da Proposição 3.1.29.

Em virtude da Proposição 2.2.9(b), o resultado seguinte mostra que as equações $(\widetilde{E}_i), i = 1, 2$, sempre têm soluções na forma de onda de choque.

Proposição 3.2.10 : Dado (a, b, c) em $\mathbb{R}^3$, consideremos o par (Δ, y^*) nas condições da Definição 3.2.8 e as fórmulas

$[J_1] \quad c = \frac{1}{2}(a + b) \qquad\qquad [J_2] \quad c = \frac{2}{3}\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}.$

(I) Dada uma função H em $\mathcal{H}_p(\mathbb{R})$, considerando a função u em $\mathcal{G}(\mathbb{R}^2)$ dada pela fórmula (S), para $i = 1, 2$, é válida a asserção seguinte.

$(I)_i$ A função u é uma solução da equação $(\widetilde{E}_i)$ se, e sómente se, é válida a fórmula $[J_i]$.

(II) Considerando uma função H em $\mathcal{H}_\Xi(\mathbb{R})$, para a função generalizada u em $\mathcal{G}(\mathbb{R}^2)$ dada pela fórmula (S), e para $i = 1, 2$, as condições seguintes são equivalentes.

$(II)_1$ A função u é uma solução da equação $(\widetilde{E}_i)$;

$(II)_2$ É válida a fórmula $[J_i]$.

Prova : Como $\mathcal{H}_\Xi(\mathbb{R}) \subset \mathcal{H}_p(\mathbb{R})$ a afirmação (II) segue de (I). Considerando a função $u_* := \Delta H + b$ em $\mathcal{G}(\mathbb{R})$ temos $u = u_* \circ y^* (= \Delta H \circ y^* + b)$.

$(I)_1$: A identidade $u_t = (-cu)_x$ acarreta

$$u_t + uu_x = (u - c)u_x \tag{3.2.10.1}$$

Como $2HH' \approx H'$ em $\mathcal{G}(\mathbb{R})$ (Ver Corolário 3.1.12), em virtude da condição (3.1.17.1) temos $(2H \circ y^*)u_x \approx u_x$; donde

$$(u - c)u_x \approx (\frac{\Delta}{2} + b - c)u_x \quad \text{em} \quad \mathcal{G}(\mathbb{R}^2),$$

o que junto com as condições (3.2.10.1) e (3.1.18.1) implicam a afirmação $(I)_1$.

$(I)_2$: De $(\frac{u^2}{2})_t = (-\frac{cu^2}{2})_x$ resulta

$$(\frac{1}{2}u^2)_t + (\frac{1}{3}u^3)_x = [u^2(\frac{u}{3} - \frac{c}{2})]_x. \tag{3.2.10.2}$$

Como $u^2(\frac{u}{3} - \frac{c}{2}) = b^2(\frac{b}{3} - \frac{c}{2}) + [b\Delta(b-c)H + \Delta^2(b - \frac{c}{2})H^2 + \frac{1}{3}\Delta^3 H^3] \circ y^*$ e $H^2 \approx H \approx H^3$, pelo Teorema 1.3.12, temos

$$[u^2(\frac{u}{3} - \frac{c}{2})]_x \approx \Delta[\frac{1}{3}(a^2 + ab + b^2) - c(b + \frac{\Delta}{2})](H \circ y^*)_x \quad \text{em} \quad \mathcal{G}(\mathbb{R}^2),$$

o que junto com as condições (3.2.10.2) e (3.1.18.1) implica a afirmação $(I)_2$.

∎

A proposição seguinte mostra que as equações $(E_i), i = 1, 2$, não possuem soluções na forma de onda de choque.

Proposição 3.2.11 : (I) Toda solução da equação (E_1) é também uma solução da equação (E_2). Reciprocamente, toda solução na forma de onda de choque da equação (E_2) é também uma solução da equação (E_1);

(II) A equação (E_1) não tem nenhuma solução na forma de onda de choque; em consequencia, a equação (E_2) também não tem nenhuma solução na forma de onda de choque.

Prova : O item (I) segue usando a identidade

$$(\frac{1}{2}u^2)_t + (\frac{1}{3}u^3)_x = u(u_t + uu_x),$$

sendo que no caso da segunda afirmação usamos também a Observação 3.2.9.

(II) Por absurdo, suponhamos que a equação (E_1) tem uma solução na forma de onda de choque $u = \Delta H \circ y^* + b$. Pela Proposição 3.2.10$(I)_1$ é válida a condição $[J_1]$. Por outro lado, pelo item (I) acima, u é também uma solução da equação (E_2) e, portanto, pela condição $(I)_2$ da Proposição 3.2.10, é válida a fórmula $[J_2]$, o que é absurdo. Logo, a equação (E_1) não pode ter soluções na forma de onda de choque.

■

CAPÍTULO 4

ALGUNS SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS NÃO LINEARES

No presente capítulo, para um subconjunto aberto não vazio Ω qualquer de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$ e para $X = \mathcal{G}, C^\infty$, a notação $X(\Omega)$ indicará o conjunto $X(\Omega; \mathbb{R})$. Uma notação similar vale para os conjuntos $X(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, para $X = \Xi, \mathcal{H}, \mathcal{H}_p, \mathcal{H}_r$.

4.1 – Os sistemas $(S)_\nu^\alpha$ e $(\widetilde{S})_\nu^\alpha$

Em todo o presente capítulo, a menos de mensão explícita em contrário, vamos supor fixados os dados da Hipótese (II) (2º) (Os dados da Hipótese (II) (1º) serão introduzidos no inicio de 4.2), *com* $m = 3$ (Ver 3.2). *Além disso, vamos supor que cada componente de* $\nu_* = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ *satisfaz a condição* $M[\mathbb{R}_+^*; \mathbb{R}]$ (Ver Definição 3.1.23(II)). *Salvo advertência em contrário, indicamos com* (ν, α, β) *qualquer uma das ternas* $(\nu_{(s)}, \alpha_{(s)}, \beta_{(s)})$ *ou* $(\nu_{(\pi)}, \alpha_{(\pi)}, \beta_{(\pi)})$ (Ver Definição 3.2.3).

Nessas condições , consideremos as equações do fluído viscoso em dimensão 1 descritos a seguir. Fixado $\lambda \in \mathbb{R}^*$, o sistema associado $(S)_\nu^\alpha$ é formado pelas equações em $\mathcal{G}(\mathbb{R}^2)$

$$\begin{cases} (E_1) & \rho_t + (\rho u)_x = 0 \\ (E_2)_\nu^\alpha & (\rho u)_t + (p + \rho u^2)_x = \{[\nu \circ (\rho, p, E) - \alpha] u_x\}_x \\ (E_3)_\nu^\alpha & E_t + [(E + p)u]_x \approx \{[\nu \circ (\rho, p, E) - \alpha] u u_x\}_x \\ (E_4) & E \approx \lambda p + \frac{1}{2}\rho u^2, \end{cases}$$

e o sistema $(\widetilde{S})_\nu^\alpha$ é formado pelas equações $(\widetilde{E}_1), (\widetilde{E}_2)_\nu^\alpha, (E_3)_\nu^\alpha$ e (E_4), onde

$$\begin{cases} (\widetilde{E}_1) & \rho_t + (\rho u)_x \approx 0 \\ (\widetilde{E}_2)_\nu^\alpha & (\rho u)_t + (p + \rho u^2)_x \approx \{[\nu \circ (\rho, p, E) - \alpha] u_x\}_x . \end{cases}$$

Definição 4.1.1 : Uma *solução na forma de onda de choque* (constante antes e após o choque, se propagando à velocidade constante e forma macroscópica do choque invariável com o tempo) do sistema S, onde $\mathcal{S} = (S)_\nu^\alpha$ ou $\mathcal{S} = (\widetilde{S})_\nu^\alpha$, é qualquer elemento

(ρ, u, p, E) de $\mathcal{G}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^4)$ tal que as funções componentes são dadas na forma

$$(S_1) \qquad \rho = \Delta\rho H_\rho \circ y^* + \rho_\ell \qquad (S_2) \qquad u = \Delta u H_u \circ y^* + u_\ell$$

$$(S_3) \qquad p = \Delta p H_p \circ y^* + p_\ell \qquad (S_4) \qquad E = \Delta E H_E \circ y^* + E_\ell,$$

as quais são soluções do sistema $\mathcal{S}$ e satisfazem as hipóteses seguintes:

(A_1) $y^* \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ é a função , definida em [3.1.6], associada à $y : t \in \mathbb{R} \mapsto ct \in \mathbb{R}$, onde $c \in \mathbb{R}$; isto é , $y^* : (x,t) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x - ct \in \mathbb{R}$;

(A_2) Denotamos com τ qualquer um dos símbolos ρ, u, p ou E. Existem $\tau_r, \tau_\ell \in \mathbb{R}$ tais que $0 < \tau_r < \tau_\ell$ e definimos $\Delta\tau := \tau_r - \tau_\ell$;

(A_3) $H_\tau \in \mathcal{H}_p(\mathbb{R})(\tau = \rho, u, p, E)$;

(A_4) cada $H_\tau(\tau = \rho, u, p, E)$ tem um representante $\widehat{H}_\tau$ tal que :

$(A_4)_1$ $(\widehat{H}_\tau, \tau_r, \tau_\ell, \Delta\tau)$ satisfaz a condição (3.2.2.3);

$(A_4)_2$ $(\widehat{H}_\tau, \tau_\ell, \Delta\tau)$ satisfaz a condição (3.2.2.4);

(A_5) $HH'_u \approx 0$ em $\mathcal{G}(\mathbb{R}^*)$, para cada $H \in \mathcal{H}_p(\mathbb{R})$.

Observar que, como $u_x = \Delta u H'_u \circ y^*$, $\Delta u \neq 0$ e $y^*(\Omega^*) = \mathbb{R}^*$ (Ver [3.1.8] e [3.1.9]), pela propriedade (3.1.17.1), a hipótese (A_5) é equivalente à condição

$(A_5)'$ $(H \circ y^*)u_x \approx 0$ em $\mathcal{G}(\Omega^*)$, para cada $H \in \mathcal{H}_p(\mathbb{R})$.

É pertinente observar também que, a rigor, na Definição 4.1.1 bastaria exigir $(A_4)_1$ (resp. $(A_4)_2$) para cada $\tau = \rho, p, E$ (resp. $\tau = \rho$). Entretanto, da prova do Teorema 4.2.7 resultará que (A_4) vale na forma enunciada ; isto é , a generalização acima é ilusória. Por outro lado, na definição habitual de solução na forma de onda de choque, exige-se apenas a validade das hipóteses $(A_1), (A_2)$ e (A_3). Neste trabalho, por razões técnicas resultantes da forma de atacar o problema, tivemos que particularizar bastante a definição habitual exigindo também a validade das condições (A_4) e (A_5) na Definição 4.1.1.

Nas condições da definição anterior, introduzindo a função generalizada (a qual será considerada em tudo o que se segue) (ρ_*, u_*, p_*, E_*) em $\mathcal{G}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^4)$, onde

[4.1.1] $\qquad \tau_* := \Delta\tau H_\tau + \tau_\ell \quad (\therefore\ \tau = \tau_* \circ y^*) \qquad$ para $\tau = \rho, u, p, E$, a solução na forma de onda de choque pode ser escrita na forma

$$(\rho, u, p, E) = (\rho_*, u_*, p_*, E_*) \circ y^* = (\rho_* \circ y^*, u_* \circ y^*, p_* \circ y^*, E_* \circ y^*).$$

O conceito de solução na forma de onda de choque de cada equação componente do sistema $(S)_\nu^\alpha$ (ou $(\widetilde{S})_\nu^\alpha$) é introduzido de modo análogo à Definição 4.1.1.

Sejam ρ, p e E em $\mathcal{G}(\mathbb{R}^2)$ dadas, respectivamente, pelas fórmulas $(S_1), (S_3)$ e (S_4) da Definição 4.1.1, satisfazendo as hipoteses $(A_1) - (A_4)_1$. Como cada componente da função ν_* satisfaz a condição $M[\mathbb{R}_+^*; \mathbb{R}]$, pela hipótese $(A_4)_1$ e pela Proposição 3.2.4$(II)_1$, $\nu \circ (\rho_*, p_*, E_*) \in \mathcal{G}(\mathbb{R})$ tem como representante à função $\nu \circ (\widehat{\rho}_*, \widehat{p}_*, \widehat{E}_*)$, onde $\widehat{\tau}_* := \Delta\tau \widehat{H}_\tau + \tau_\ell(\ \tau = \rho, p, E)$. Em consequência, pela Definição 3.1.10, $\nu \circ (\widehat{\rho}_* \circ y^*, \widehat{p}_* \circ y^*, \widehat{E}_* \circ y^*)$ é um representante da função $\nu \circ (\rho, p, E) \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^2)$. Por outro lado, como $H_\tau \in \mathcal{H}_p(\mathbb{R})(\tau = \rho, p, E)$ pela Proposição 3.2.4$(II)_2$, temos

$$V := (\Delta\nu)^{-1}[\nu \circ (\rho_*, p_*, E_*) - \nu_\ell] \in \mathcal{H}_p(\mathbb{R}),$$

onde $\Delta\nu := \nu_r - \nu_\ell$, $\nu_r := \nu(\rho_r, p_r, E_r)$ e $\nu_\ell := \nu(\rho_\ell, p_\ell, E_\ell)$; e como $y^*(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}$ e $\nu \circ (\rho_*, p_*, E_*) = \Delta\nu V + \nu_\ell$, pela propriedade (3.1.17.2) vale

$$\nu \circ (\rho, p, E) = \Delta\nu V \circ y^* + \nu_\ell \text{ em } \mathcal{G}(\mathbb{R}^2).$$

Seja agora u em $\mathcal{G}(\mathbb{R}^2)$ dada pela fórmula (S_2) satisfazendo as hipóteses $(A_1) - (A_3)$ e (A_5) da Definição 4.1.1. Pelo Corolário 3.1.18(II) e por $(A_5)'$ temos, respectivamente, $u_x \approx 0$ e $(V \circ y^*)u_x \approx 0$ em $\mathcal{G}(\Omega^*)$ (Ver [3.1.8]); donde, da igualdade anterior, segue

$$[4.1.2] \qquad [\nu \circ (\rho, p, E) - \alpha]u_x \approx 0 \quad \text{em } \mathcal{G}(\Omega^*).$$

De modo análogo, como $u_x \approx 0$ em $\mathcal{G}(\Omega^*)$ e

$$[\nu \circ (\rho, p, E) - \alpha]uu_x = \Delta u\Delta\nu[(VH_u) \circ y^*]u_x + \\ + u_\ell\Delta\nu(V \circ y^*)u_x + (\nu_\ell - \alpha)\Delta u(H_u \circ y^*)u_x + u_\ell(\nu_\ell - \alpha)u_x,$$

usando a condição $(A_5)'$, pela qual $(H \circ y^*)u_x \approx 0$ em $\mathcal{G}(\Omega^*)$, para $H = H_u, V, VH_u$, temos a relação

$$[4.1.3] \qquad [\nu \circ (\rho, p, E) - \alpha]uu_x \approx 0 \quad \text{em} \quad \mathcal{G}(\Omega^*).$$

No decorrer da exposição mostraremos que o sistema $(\widetilde{S})^\alpha_\nu$, sob certas hipóteses sobre a função ν_*, possui soluções na forma de onda de choque, as quais satisfazem as condições de salto do caso clássico $\nu = 0$. O resultado correspondente é dado no Teorema 4.2.7, o que resulta como uma consequência do Teorema 4.2.6 (que da a condição necessária e suficiente para que o sistema $(\widetilde{S})^\alpha_\nu$ tenha soluções na forma de onda de choque) e da Proposição 3.2.6 (que garante a existência das referidas soluções). No entanto, o mesmo não ocorre com o sistema $(S)^\alpha_\nu$ como será visto no Teorema 4.3.5.

4.2 – A Resolubilidade do Sistema $(\widetilde{S})^\alpha_\nu$

Em todo este §, a menos de mensão explícita em contrário, são fixados c, τ_r e τ_ℓ em $\mathbb{R}$ e $H_\tau \in \mathcal{H}_p(\mathbb{R})$, para $\tau = \rho, u, p, E$; e são considerados os elementos $y^*, \Delta\rho, \Delta u, \Delta p$ e ΔE, satisfazendo as hipóteses (A_1) e (A_2) da Definição 4.1.1, e as funções ρ, u, p e E em $\mathcal{G}(\mathbb{R}^2)$ dadas, respectivamente, pelas fórmulas $(S_1), (S_2), (S_3)$ e (S_4). *Salvo aviso expresso em contrário vamos trabalhar supondo os dados* $a, b \in \mathbb{R}^3$ *da* Hipótese (II) ($1^{\underline{o}}$) (Ver 3.2) *definidos por* $a := (\rho_r, p_r, E_r)$ *e* $b := (\rho_\ell, p_\ell, E_\ell)$.

Serão importantes também as fórmulas seguintes, chamadas *fórmulas ou condições de salto* das equações da hidrodinâmica, as quais são relações entre os números c, τ_r e τ_ℓ dados acima,

$$[s_1] \quad c = \Delta u\left(1 + \frac{\rho_\ell}{\Delta\rho}\right) + u_\ell \qquad\qquad [s_2] \quad \frac{\Delta p}{\Delta u^2} = \rho_\ell\left(1 + \frac{\rho_\ell}{\Delta\rho}\right)$$

$$[s_3] \quad \Delta p\left(1 + \frac{u_\ell}{\Delta u}\right) = \rho_\ell \frac{\Delta E}{\Delta\rho} - E_\ell - p_\ell \qquad [s_4] \quad E_k = \lambda p_k + \tfrac{1}{2}\rho_k u_k^2, \quad k = r, l.$$

Proposição 4.2.1 : São válidas as asserções seguintes.

(I) A função (ρ, u) é uma solução da equação $(\widetilde{E}_1)$ se, e somente se, é válida a fórmula de salto $[s_1]$;

(II) A função (ρ, u) é uma solução da equação (E_1) se, e somente se, existe uma constante generalizada $z \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^2)$ tal que

$$(4.2.1.1) \qquad \rho(u-c) = z \text{ em } \mathcal{G}(\mathbb{R}^2);$$

e, nesse caso, a constante z satisfaz a condição

$$(4.2.1.2) \qquad z \approx \rho_\ell(u_\ell - c).$$

Prova : De [4.1.1] segue $\rho_t = -c\rho_*{}' \circ y^* = (-c\rho)_x$, que acarreta

$$(4.2.1.3) \qquad \rho_t + (\rho u)_x = [\rho(u-c)]_x = [\rho_*(u_* - c)]' \circ y^*.$$

Das fórmulas (S_1) e (S_2) resulta

$$\rho(u-c) = [(u_\ell - c)\Delta\rho H_\rho + \rho_\ell \Delta u H_u + \Delta\rho\Delta u H_\rho H_u] \circ y^* + \rho_\ell(u_\ell - c).$$

Sendo $H \circ y^* \approx H_\rho \circ y^*$ em $\mathcal{G}(\mathbb{R}^2)$, para $H = H_u, H_\rho H_u$ (Corolário 3.1.18 (III)), temos

$$(4.2.1.4) \qquad \rho(u-c) \approx \Delta\rho[u_\ell - c + (1 + \frac{\rho_\ell}{\Delta\rho})\Delta u]H_\rho \circ y^* + \rho_\ell(u_\ell - c) \text{ em } \mathcal{G}(\mathbb{R}^2),$$

o que junto com o Teorema 1.3.12 e (4.2.1.3) implica

$$\rho_t + (\rho u)_x \approx \Delta\rho[u_\ell - c + (1 + \frac{\rho_\ell}{\Delta\rho})\Delta u](H_\rho \circ y^*)_x \text{ em } \mathcal{G}(\mathbb{R}^2).$$

Como $\Delta\rho \neq 0$, usando a condição (3.1.18.1), segue a afirmação (I).

Como, pelo Teorema 1.3.9(III) e pela Proposição 1.3.7, $[\rho_*(u_* - c)]' = 0$ se e só se existe uma constante generalizada z em $\mathcal{G}(\mathbb{R})$ tal que $\rho_*(u_* - c) = z$; usando as propriedades [3.1.10] e (3.1.17.2) temos $[\rho_*(u_* - c)]' \circ y^* = 0$ se e só se $\rho(u-c) = z$ (Ver Observação 3.1.13) ; donde por (4.2.1.3), segue a primeira afirmação de (II). Por outro lado, sendo (ρ, u) também solução da equação $(\widetilde{E}_1)$, pelo item (I), é válida a fórmula $[s_1]$. Em consequência, as condições (4.2.1.1) e (4.2.1.4) implicam (4.2.1.2). ■

Proposição 4.2.2 : A função (ρ, u, p, E) é uma solução da equação (E_4) se, e somente se, é válida a fórmula de salto $[s_4]$.

Prova : Após um cálculo, das fórmulas $(S_1), (S_2), (S_3)$ e [4.1.1] temos

$$\lambda p + \tfrac{1}{2}\rho u^2 = a_0 + (a_1 H_\rho + a_2 H_u + a_3 H_p + a_4 H_\rho H_u + a_5 H_u^2 + a_6 H_\rho H_u^2) \circ y^*,$$

onde $a_0 := \lambda p_\ell + \frac{1}{2}\rho_\ell u_\ell^2, a_1 := \frac{1}{2}u_\ell^2 \Delta\rho, a_2 := \rho_\ell u_\ell \Delta u, a_3 := \lambda \Delta p, a_4 := u_\ell \Delta\rho \Delta u, \quad a_5 :=$ $= \frac{1}{2}\rho_\ell \Delta u^2$ e $a_6 := \frac{1}{2}\Delta\rho\Delta u^2$. Como

$$H \circ y^* \approx H_E \circ y^* \quad \text{em} \quad \mathcal{G}(\mathbb{R}^2), \text{ para } H = H_\rho, H_u, H_p, H_\rho H_u, H_u^2, H_\rho H_u^2,$$

resulta que $\lambda p + \frac{1}{2}\rho u^2 \approx a_0 + aH_E \circ y^*$ em $\mathcal{G}(\mathbb{R}^2)$, onde $a := a_1 + \ldots + a_6$, e portanto

(4.2.2.1) $$E \approx \lambda p + \tfrac{1}{2}\rho u^2 \text{ se e só se } E \approx a_0 + aH_E \circ y^*, \text{ em } \mathcal{G}(\mathbb{R}^2).$$

Por outro lado, substituindo os valores de $a_j, 1 \leq j \leq 6$, na expresão de a, temos

$$a = \lambda\Delta p + \tfrac{1}{2}\rho_r u_r^2 - \tfrac{1}{2}\rho_\ell u_\ell^2 = (\lambda\rho_r + \tfrac{1}{2}\rho_r u_r^2) - (\lambda p_\ell + \tfrac{1}{2}\rho_\ell u_\ell^2);$$

donde, como $\Delta E = E_r - E_\ell$, segue a equivalência

(4.2.2.2) $$\Delta E = a \text{ e } E_\ell = \lambda p_\ell + \tfrac{1}{2}\rho_\ell u_\ell^2 \text{ se e só se vale } [s_4].$$

Se $E \approx \lambda p + \frac{1}{2}\rho u^2$, de (S_4) e da condição (4.2.2.1), resulta

(4.2.2.3) $$(a - \Delta E)H_E \circ y^* \approx E_\ell - a_0 \text{ em } \mathcal{G}(\mathbb{R}^2),$$

donde, por restrição ao conjunto, Ω_-, como $H_E \circ y^* \approx 0$ em $\mathcal{G}(\Omega_-)$ (Corolário 3.1.18(II)), por (4.2.2.3) vem $E_\ell - a_0 = 0$; isto é

(4.2.2.4) $$E_\ell = \lambda p_\ell + \tfrac{1}{2}\rho_\ell u_\ell^2.$$

Portanto (4.2.2.3) implica $(a - \Delta E)H_E \circ y^* \approx 0$ em $\mathcal{G}(\mathbb{R}^2)$; donde agora por restrição ao conjunto Ω_+, como $H_E \circ y^* \approx 1$ em $\mathcal{G}(\Omega_+)$, segue

(4.2.2.5) $$\Delta E = a,$$

o que junto com as condições (4.2.2.2) e (4.2.2.4) implica a validade da fórmula $[s_4]$. Reciprocamente, se for válida a fórmula $[s_4]$, por (4.2.2.2), são válidas as condições (4.2.2.4) e (4.2.2.5); donde $E = \Delta E H_E \circ y^* + E_\ell = a_0 + aH_E \circ y^*$ e, portanto, por (4.2.2.1), $E \approx \lambda p + \frac{1}{2}\rho u^2$.

∎

Proposição 4.2.3: Se as funções $H_\tau, \tau = \rho, p, E$, e H_u satisfazem, respectivamente, as hipóteses $(A_4)_1$ e (A_5) da Definição 4.1.1, são válidas as asserções seguintes.

(I) A função (ρ, u, p, E) é uma solução das equações $(\widetilde{E}_1)$ e $(\widetilde{E}_2)_\nu^\alpha$ se, e somente se, são válidas fórmulas de salto $[s_i], i = 1, 2$; e os elementos ρ, u, p, E, ν e α satisfazem a relação

$$(4.2.3.1) \qquad [\nu \circ (\rho, p, E) - \alpha]u_x \approx 0 \text{ em } \mathcal{G}(\mathbb{R}^2);$$

(II) A função (ρ, u, p, E) é uma solução da equação $(E_2)_\nu^\alpha$ se, e somente se, existe uma constante generalizada $z \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^2)$ tal que

$$(4.2.3.2) \qquad [\nu \circ (\rho, p, E) - \alpha]u_x = p + \rho u(u - c) - z =: g \quad \text{em} \quad \mathcal{G}(\mathbb{R}^2);$$

e nesse caso, para algum (ou equivalentemente, para qualquer) representante $\widehat{g}$ da função $g \in \mathcal{G}_{\ell b}(\mathbb{R}^2)$ temos (Ver [3.1.8])

$$(4.2.3.3) \qquad \widehat{g}(\varepsilon, \cdot) \to 0, \text{ para } \varepsilon \to 0^+, \quad \text{em} \quad \Omega^*.$$

Prova : Antes de proceder à verificação das afirmações (I) e (II) vamos fazer alguns cálculos preparatórios. De $\rho u = (\rho_* u_*) \circ y^*$ segue $(\rho u)_t = (-c\rho u)_x$; donde

$$(4.2.3.4) \qquad (\rho u)_t + (p + \rho u^2)_x = [p + \rho u(u - c)]_x = [p_* + \rho_* u_*(u_* - c)]' \circ y^*.$$

Das fórmulas $(S_1), (S_2), (S_3)$ e [4.1.1], após um cálculo, vem

$$(4.2.3.5) \qquad p + \rho u(u - c) = b_0 + f,$$

onde $b_0 := p_\ell + \rho_\ell u_\ell(u_\ell - c)$ e $f \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^2)$ é a função definida por

$$(4.2.3.6) \qquad f := (b_1 H_\rho + b_2 H_u + b_3 H_p + b_4 H_\rho H_u + b_5 H_u^2 + b_6 H_\rho H_u^2) \circ y^*,$$

onde $b_1 := u_\ell(u_\ell - c)\Delta\rho$, $b_2 := \rho_\ell(2u_\ell - c)\Delta u$, $b_3 := \Delta p$, $b_4 := (2u_\ell - c)\Delta\rho\Delta u$, $b_5 := \rho_\ell \Delta u^2$ e $b_6 := \Delta\rho\Delta u^2$. Das condições (4.2.3.4) e (4.2.3.5) resulta $(\rho u)_t + (p + \rho u^2)_x = f_x$; donde, usando as propriedades (c) e (d) do Teorema 1.3.12, segue

$$(4.2.3.7) \qquad \left| \begin{array}{l} (\rho u)_t + (p + \rho u^2)_x \approx \{[\nu \circ (\rho, p, E) - \alpha] u_x\}_x \text{ se e sò se existe uma função} \\ \Phi \text{ em } \mathcal{G}(\mathbb{R}^2) \text{ tal que } \Phi_x = 0 \text{ e } [\nu \circ (\rho, p, E) - \alpha] u_x \approx f + \Phi, \end{array} \right.$$

sendo que as relações de igualdade e de associação são válidas em $\mathcal{G}(\mathbb{R}^2)$. Como $H_\tau \in \mathcal{H}_p(\mathbb{R})(\tau = \rho, u, p)$ temos $f \in \mathcal{G}_{\ell b}(\mathbb{R}^2)$, e considerando o seguinte representante de f ,

$$(4.2.3.8) \qquad \widehat{f} := (b_1 \widehat{H}_\rho + b_2 \widehat{H}_u + b_3 \widehat{H}_p + b_4 \widehat{H}_\rho \widehat{H}_u + b_5 \widehat{H}_u^2 + b_6 \widehat{H}_\rho \widehat{H}_u^2) \circ y^*,$$

onde $\widehat{H}_\tau$ é um representante qualquer de H_τ , temos também

$$(4.2.3.9) \qquad \widehat{f}(\varepsilon, \cdot) \to 0 \text{ (resp. } b) \text{ em } \Omega_- \text{ (resp. } \Omega_+), \text{ quando } \varepsilon \to 0^+,$$

onde $b := b_1 + \ldots + b_6$. Em consequência, pela Proposição 1.3.14, valem

$$(4.2.3.10) \qquad f \approx 0 \text{ em } \mathcal{G}(\Omega_-)$$

$$(4.2.3.11) \qquad f \approx b \text{ em } \mathcal{G}(\Omega_+).$$

Por outro lado, levando os valores de $b_j, 1 \leq j \leq 6$, na expressão de b temos

$$b = \Delta p + u_\ell(u_\ell - c)\Delta\rho + \rho_r(2u_\ell - c)\Delta u + \rho_r \Delta u^2 =$$

$$= \Delta p + u_\ell(u_\ell - c)\Delta\rho + \rho_r u_\ell \Delta u + \rho_r(u_\ell - c)\Delta u + \rho_r \Delta u^2.$$

Se for válida a fórmula $[s_1]$, substituindo o valor $u_\ell - c = -\rho_r \Delta u (\Delta\rho)^{-1}$ na igualdade anterior obtemos $b = \Delta p + \rho_r \Delta u^2 (1 - \rho_r (\Delta\rho)^{-1}) = \Delta p - \rho_r \rho_\ell \Delta u^2 (\Delta\rho)^{-1}$; donde segue a propriedade

$$(4.2.3.12) \qquad \text{Se vale } [s_1] \text{ então , vale } [s_2] \text{ se e só se } b = 0.$$

(I): Suponhamos que (ρ,u,p,E) é uma solução das equações $(\widetilde{E}_1)$ e $(\widetilde{E}_2)^\alpha_\nu$. Pela Proposição 4.2.1(I) é válida a fórmula $[s_1]$. Sendo (ρ,u,p,E) solução da equação $(\widetilde{E}_2)^\alpha_\nu$, da propriedade (4.2.3.7) segue

(4.2.3.13) $$[\nu\circ(\rho,p,E)-\alpha]u_x \approx f+\Phi \quad \text{em} \quad \mathcal{G}(\mathbb{R}^2).$$

Por restrição ao conjunto Ω_- resulta, $[\nu\circ(\rho,p,E)-\alpha]u_x \approx f+\Phi$ em $\mathcal{G}(\Omega_-)$ e, portanto, pelas condições [4.1.2] e (4.2.3.10) temos $\Phi\approx 0$ em $\mathcal{G}(\Omega_-)$. Sendo $\Phi_x = 0$ em $\mathcal{G}(\mathbb{R}^2)$, por [3.1.10] e pela Proposição 3.1.19, $\Phi\approx 0$ em $\mathcal{G}(\mathbb{R}^2)$ e então (4.2.3.13) acarreta

(4.2.3.14) $$[\nu\circ(\rho,p,E)-\alpha]u_x \approx f \quad \text{em} \quad \mathcal{G}(\mathbb{R}^2).$$

Por restrição ao conjunto Ω_+ , usando [4.1.2] e (4.2.3.11), segue $b=0$. Por (4.2.3.9) temos $\widehat{f}(\varepsilon,\cdot)\to 0$ em Ω^*, quando $\varepsilon\to 0^+$, o que, pela Proposição 1.3.14, implica $f\approx 0$ em $\mathcal{G}(\mathbb{R}^2)$ e, portanto, por (4.2.3.14), é válida a relação (4.2.3.1). Além disso, sendo $b=0$ e sendo válida a fórmula $[s_1]$, por (4.2.3.12) segue a validade da fórmula $[s_2]$. Reciprocamente, suponhamos que são válidas as fórmulas $[s_i], i=1,2$, e a relação (4.2.3.1). Pela Proposição 4.2.1(I) a função (ρ,u) é uma solução da equação $(\widetilde{E}_1)$. Pela propriedade (4.2.3.12) temos também $b=0$; donde, usando (4.2.3.9) e a Proposição 1.3.14, segue $f\approx 0$ em $\mathcal{G}(\mathbb{R}^2)$ e, em consequência, usando (4.2.3.1), temos

$$[\nu\circ(\rho,p,E)-\alpha]u_x \approx 0 \approx f \quad \text{em} \quad \mathcal{G}(\mathbb{R}^2).$$

Pela equivalência descrita em (4.2.3.7), a função (ρ,u,p,E) é uma solução da equação $(\widetilde{E}_2)^\alpha_\nu$.

(II): A igualdade $\{[\nu\circ(\rho,p,E)-\alpha]u_x\}_x = \{[\nu\circ(\rho_*,p_*,E_*)-\alpha]u'_*\}'\circ y^*$ e as condições (4.2.3.4) e (3.1.17.2), mostram que a função (ρ,u,p,E) é uma solução de $(E_2)^\alpha_\nu$ se, e somente se, $[p_*+\rho_*u_*(u_*-c)]' = \{[\nu\circ(\rho_*,p_*,E_*)-\alpha]u'_*\}'$ o que equivale (Ver Teorema 1.3.9(II) e Proposição 1.3.7) à existencia de uma constante generalizada z em $\mathcal{G}(\mathbb{R})$ tal que

$$p_* + \rho_* u_*(u_* - c) = [\nu \circ (\rho_*, p_*, E_*) - \alpha] u'_* + z;$$

donde, usando a propriedade (3.1.17.2) e a Observação 3.1.13, segue a primeira afirmação de (II). Por outro lado, as condições (4.2.3.2)e (4.2.3.5) acarretam

$$(4.2.3.15) \qquad [\nu \circ (\rho, p, E) - \alpha] u_x = f + b_0 - z \ (= g);$$

donde, por restrição a Ω_-, usando [4.1.2] e (4.2.3.10), segue $z \approx b_0$ e, portanto, como $f \in \mathcal{G}_{\ell b}(\mathbb{R}^2), g = f + b_0 - z \in \mathcal{G}_{\ell b}(\mathbb{R}^2)$. Considerando um representante qualquer $\widehat{z}$ de z, seja $\widehat{g}$ o representante de g dado por $\widehat{g} := \widehat{f} + b_0 - \widehat{z}$, onde $\widehat{f}$ é definido em (4.2.3.8). Como $\widehat{z}(\varepsilon) \to b_0$, para $\varepsilon \to 0^+$, a condição (4.2.3.9) acarreta

$$(4.2.3.16) \qquad \widehat{g}(\varepsilon, \cdot) \to 0 \ \text{(resp. } b) \text{ em } \Omega_- \ \text{(resp. } \Omega_+), \text{ quando } \varepsilon \to 0^+.$$

Sendo $z \approx b_0$, de (4.2.3.15), temos $[\nu \circ (\rho, p, E) - \alpha] u_x \approx f$ em $\mathcal{G}(\mathbb{R}^2)$; donde, usando [4.1.2] e (4.2.3.11), segue $b = 0$, o que junto com (4.2.3.16) implica (4.2.3.3).

∎

No próximo resultado será usado o fato de que os elementos de $\mathcal{H}_\Xi(\mathbb{R})$ (Ver [2.2.2]) satisfazem a condição $(A_4)_1$ da Definição 4.1.1 (No comentário que segue a prova da Proposição 3.2.2 é mostrado que os elementos de $\mathcal{H}_\Xi(\mathbb{R})$ satisfazem as condições $(A_4)_1$ e $(A_4)_2$).

Corolário 4.2.4 : Se as funções generalizadas $H_\tau(\tau = \rho, p)$ e H_u satisfazem, respectivamente, as hipóteses $(A_4)_1$ e (A_5) da Definição 4.1.1, então a função (ρ, u, p) é uma solução das equações $(\widetilde{E}_1)$ e

$$(\widetilde{E}_2)^{\alpha_1}_{\nu_1} \qquad (\rho u)_t + (p + \rho u^2)_x \approx [(\nu_1 \circ \rho - \alpha_1) u_x]_x \quad \text{em} \quad \mathcal{G}(\mathbb{R}^2)$$

se, e somente se, são válidas as fórmulas de salto $[s_i], i = 1, 2$; e os elementos ρ, u, ν_1 e α_1 satisfazem a relação

$$(4.2.4.1) \qquad (\nu_1 \circ \rho - \alpha_1) u_x \approx 0 \quad \text{em} \quad \mathcal{G}(\mathbb{R}^2).$$

Prova : Sejam $H_E \in \mathcal{H}_{\equiv}(\mathbb{R})$ e $E := \Delta E H_E \circ y^* + E_\ell$. Considerando o par $(\nu, \alpha) = (\nu_{(s)}, \alpha_{(s)})$, com $\alpha_2 \equiv \nu_2 = \nu_3 \equiv \alpha_3 = 0$ (ou então o par $(\nu, \alpha) = (\nu_{(\pi)}, \alpha_{(\pi)})$ com $\alpha_2 \equiv \nu_2 = \nu_3 \equiv \alpha_3 = 1$) , temos $\nu \circ (\rho, p, E) - \alpha = \nu_1 \circ \rho - \alpha_1$ e então o resultado segue da Proposição 4.2.3 (I).

∎

Proposição 4.2.5 : Nas hipóteses da Proposição 4.2.3, a função (ρ, u, p, E) é uma solução das equações $(\widetilde{E}_1), (\widetilde{E}_2)_\nu^\alpha$ e $(E_3)_\nu^\alpha$ se, e somente se, são válidas as fórmulas de salto $[s_1] - [s_3]$ e os elementos ρ, u, p, E, ν e α satisfazem as relações (4.2.3.1) e

$$(4.2.5.1) \qquad [\nu \circ (\rho, p, E) - \alpha] u u_x \approx 0 \quad \text{em} \quad \mathcal{G}(\mathbb{R}^2).$$

Prova : Da condição $E_t = (-cE)_x$ segue a igualdade

$$(4.2.5.2) \qquad E_t + [(E + p)u]_x = [(E + p)u - cE]_x.$$

Das fórmulas $(S_1) - (S_4)$ vem

$$(E + p)u - cE = d_0 + (d_1 H_u + d_2 H_p + d_3 H_E + d_4 H_u H_p + d_5 H_u H_E) \circ y^*,$$

onde $d_0 := (E_\ell + p_\ell)u_\ell - cE$, $d_1 := (E_\ell + p_\ell)\Delta u$, $d_2 := u_\ell \Delta p$, $d_3 := (u_\ell - c)\Delta E$, $d_4 := \Delta u \Delta p$ e $d_5 := \Delta u \Delta E$. Como $H \circ y^* \approx H_u \circ y^*$ em $\mathcal{G}(\mathbb{R}^2)$, para $H = H_p, H_E, H_u H_p, H_u H_E$ (Corolário 3.1.18(III)), a igualdade anterior acarreta

$$(E + p)u - cE \approx d_0 + dH_u \circ y^* \quad \text{em} \quad \mathcal{G}(\mathbb{R}^2),$$

onde $d := d_1 + \ldots + d_5$. Portanto, usando (4.2.5.2) e o Teorema 1.3.12, resulta

$$(4.2.5.3) \qquad \left| \begin{array}{l} E_t + [(E + p)u]_x \approx \{[\nu \circ (\rho, p, E) - \alpha] u u_x\}_x \text{ se e só se existe uma função} \\ \Phi \text{ em } \mathcal{G}(\mathbb{R}^2) \text{ tal que } \Phi_x = 0 \text{ e } [\nu \circ (\rho, p, E) - \alpha] u u_x \approx dH_u \circ y^* + \Phi, \end{array} \right.$$

sendo que as relações de igualdade e de associação são dadas em $\mathcal{G}(\mathbb{R}^2)$. Verifiquemos a validade da propriedade seguinte

$$(4.2.5.4) \qquad \text{Se vale } [s_1] \text{ então , vale } [s_3] \text{ se e só se } d = 0.$$

Ora, levando o valor de cada $d_j, 1 \leq j \leq 5$, em d temos

$$d = u_r \Delta p + (u_r - c)\Delta E + (E_\ell + p_\ell)\Delta u;$$

donde, como $c = \Delta u[1 + \rho_\ell(\Delta \rho)^{-1}] + u_\ell$ se e só se $u_r - c = -\rho_\ell \Delta u(\Delta\rho)^{-1}$, se for válida a fórmula $[s_1]$, vem $d = u_r\Delta p - \Delta u[\rho_\ell \Delta E(\Delta\rho)^{-1} - E_\ell - p_\ell]$ e, portanto, é válida a propriedade (4.2.5.4).

Suponhamos que a função (ρ, u, p, E) é uma solução das equações $(\widetilde{E}_1)$, $(\widetilde{E}_2)^\alpha_\nu$ e $(E_3)^\alpha_\nu$. Pela Proposição 4.2.3(I) valem as fórmulas de salto $[s_i], i = 1, 2$; e a relação (4.2.3.1). Sendo (ρ, u, p, E) uma solução da equação $(E_3)^\alpha_\nu$, de (4.2.5.3), temos

$$\text{(4.2.5.5)} \qquad [\nu \circ (\rho, p, E) - \alpha]uu_x \approx dH_u \circ y^* + \Phi \text{ em } \mathcal{G}(\mathbb{R}^2).$$

Donde, por restrição ao conjunto Ω_-, usando as condições [4.1.3] e $H_u \circ y^* \approx 0$ em $\mathcal{G}(\Omega_-)$, resulta $\Phi \approx 0$ em $\mathcal{G}(\Omega_-)$ e, portanto, pela Proposição 3.1.19, $\Phi \approx 0$ em $\mathcal{G}(\mathbb{R}^2)$, o que junto com (4.2.5.5) acarreta

$$\text{(4.2.5.6)} \qquad [\nu \circ (\rho, p, E) - \alpha]uu_x \approx dH_u \circ y^* \quad \text{em} \quad \mathcal{G}(\mathbb{R}^2).$$

Por restrição a Ω_+, usando as condições [4.1.3] e $H_u \circ y^* \approx 1$ em $\mathcal{G}(\Omega_+)$, essa relação implica $d = 0$. Portanto, de (4.2.5.6) segue (4.2.5.1) e, sendo válida $[s_1]$, de (4.2.5.4) segue a validade da fórmula $[s_3]$. Reciprocamente, supondo que são válidas as fórmulas de salto $[s_1] - [s_3]$ e as condições (4.2.3.1) e (4.2.5.1), pela Proposição 4.2.3(I), a função (ρ, u, p, E) é uma solução das equações $(\widetilde{E}_1)$ e $(\widetilde{E}_2)^\alpha_\nu$; e por (4.2.5.4) temos $d = 0$. Desta última condição , usando (4.2.5.1), resulta $[\nu\circ(\rho, p, E) - \alpha]uu_x \approx 0 = dH_u \circ y^*$ em $\mathcal{G}(\mathbb{R}^2)$ e, portanto, pela propriedade (4.2.5.3), (ρ, u, p, E) é uma solução da equação $(E_3)^\alpha_\nu$. ∎

Em resumo, das proposições 4.2.2 e 4.2.5 temos o resultado seguinte.

Teorema 4.2.6 : Se as funções $H_\tau, \tau = \rho, p, E$, e H_u safisfazem, respectivamente, as hipóteses $(A_4)_1$ e (A_5) da Definição 4.1.1, a função (ρ, u, p, E) é uma solução do sistema $(\widetilde{S})_\nu^\alpha$ se, e somente se, são válidas as fórmulas de salto $[s_1] - [s_4]$ e os elementos ρ, u, p, E, ν e α satisfazem as relações (4.2.3.1) e (4.2.5.1).

■

O resultado seguinte, decorrente da Proposição 3.2.6 e do Teorema 4.2.6, mostra que, sob condições bastante gerais sobre $\nu_* = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$, o sistema $(\widetilde{S})_\nu^\alpha$ tem soluções na forma de onda de choque, conforme a Definição 4.1.1, se e só se valem as fórmulas de salto. Em outras palavras, o Teorema 4.2.7 generaliza fortemente, via associação , o resultado do caso clássico ($\nu = 0$).

Lembremos que $\{1, 2, 3\} = \mathbf{I} \cup \mathbf{J}$, $1 \in \mathbf{I}$ e que cada componente de $\nu_* = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ satisfaz a condição $M[\mathbb{R}_+^*; \mathbb{R}]$ (Ver inicio de 4.1).

Teorema 4.2.7 : Suponhamos verificadas as condições seguintes :

(A) ν_i^{-1} satisfaz a condição $M[\,]\alpha_i, \beta_i[; \mathbb{R}]$, para cada $i \in \mathbf{I}$;

(B) para cada $j \in \mathbf{J}$, se tem $\nu_j \equiv \alpha_j$ em $\mathbb{R}_+^*$.

Então , existem H_τ em $\mathcal{G}(\mathbb{R}), \tau = \rho, u, p, E$, satisfazendo as hipóteses $(A_3), (A_4)$ e (A_5) da Definição 4.1.1, tais que para as funções generalizadas ρ, u, p e E em $\mathcal{G}(\mathbb{R}^2)$ dadas, respectivamente, pelas fórmulas $(S_1), (S_2), (S_3)$ e (S_4), as condições seguintes são equivalentes.

(I) A função (ρ, u, p, E) é uma solução do sistema $(\widetilde{S})_\nu^\alpha$;

(II) São válidas as condições de salto $[s_i], 1 \leq i \leq 4$.

Prova : Pela hipótese, como cada componente de ν_* satisfaz a condição $M[\mathbb{R}_+^*; \mathbb{R}]$, em virtude da Proposição 3.2.6, existem H_τ em $\mathcal{H}_r(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{H}_\Xi(\mathbb{R}), \tau = \rho, p, E$, satisfazendo a hipótese (A_4) da Definição 4.1.1 e as relações

$$[\nu \circ (\rho_*, p_*, E_*) - \alpha]H' \approx 0 \text{ e } [\nu \circ (\rho_*, p_*, E_*) - \alpha]HH' \approx 0 \text{ em } \mathcal{G}(\mathbb{R}), \tag{4.2.7.1}$$

para cada $H \in \mathcal{H}_\Xi(\mathbb{R})$. Fixemos $H_u \in \mathcal{H}_\Xi(\mathbb{R})$ arbitrário. Usando a Proposição

2.2.9(b), o Lema 2.2.5 e a inclusão $\mathcal{H}_{\Xi}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{H}_r(\mathbb{R})$ (Ver [2.2.3]), concluímos que H_u satisfaz as condições $(A_3), (A_4)$ e (A_5). Por outro lado, como $u_x = u'_* \circ y^* = \Delta u H' \circ y^*, y^*(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}$ e $S(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$ (Ver [3.1.10]), pela propriedade (3.1.17.1), das condições descritas em (4.2.7.1) seguem, respectivamente, as relações (4.2.3.1) e $[\nu \circ (\rho, p, E) - \alpha](H_u \circ y^*)u_x \approx 0$ em $\mathcal{G}(\mathbb{R}^2)$. Estas relações junto com a igualdade $uu_x = \Delta u(H_u \circ y^*)u_x + u_\ell u_x$ implicam a condição (4.2.5.1). Portanto, sendo válidas as relações (4.2.3.1) e (4.2.5.1), a equivalência das afirmações (I) e (II) segue do Teorema 4.2.6.

∎

No caso em que a função (ρ, u, p, E) é uma solução do sistema $(\widetilde{S})^\alpha_\nu$, é interessante observar que os elementos $V := (\Delta\nu)^{-1}[\nu \circ (\rho_*, p_*, E_*) - \nu_\ell], H_u, \nu$ e α verificam certas relações de associação em $\mathcal{G}(\mathbb{R})$.

Corolário 4.2.8: Nas hipóteses do Teorema 4.2.6, a função (ρ, u, p, E) é uma solução do sistema $(S)^\alpha_\nu$ se, e somente se, são válidas as fórmulas de salto $[s_1] - [s_4]$ e as relações

(4.2.8.1) $$VK' \approx \frac{\alpha - \nu_\ell}{\Delta\nu}\delta \quad \text{em} \quad \mathcal{G}(\mathbb{R}),$$

(4.2.8.2) $$VKK' \approx \frac{1}{2}\frac{\alpha - \nu_\ell}{\Delta\nu}\delta \quad \text{em} \quad \mathcal{G}(\mathbb{R}),$$

onde $K := H_u, \delta := K'$ e $V := (\Delta\nu)^{-1}[\nu \circ (\rho_*, p_*, E) - \nu_\ell]$. E, nesse caso, temos $VKK' \approx \frac{1}{2}VK'$ em $\mathcal{G}(\mathbb{R})$.

Prova : Em virtude do Teorema 4.2.6 basta verificar que as condições (4.2.3.1) e (4.2.5.1) são equivalentes às condições (4.2.8.1) e (4.2.8.2). De fato, pela propriedade (3.1.17.1), a condição (4.2.3.1) é equivalente a $[\nu \circ (\rho_*, p_*, E_*) - \alpha]u_*' \approx 0$, condição que é equivalente a $\Delta\nu V u_*' + (\nu_\ell - \alpha)u_*' \approx 0$. É claro que esta última condição é equivalente a (4.2.8.1). Por outro lado, pela propriedade (3.1.17.1), a condição (4.2.5.1) é equivalente a $(\Delta\nu V + \nu_\ell - \alpha)u_* u_*' \approx 0$, condição que é equivalente a $(\Delta\nu V + \nu_\ell - \alpha)KK' \approx 0$, dado que as condições (4.2.3.1) e (4.2.8.1) sao equivalentes. Como $2KK' \approx K'$ (Corolário 3.1.12), a última condição é equivalente a (4.2.8.2).

∎

Resolubilidade dos Sistemas em Alguns Casos Especiais

Em [A–V] foi estudado a resolubilidade de sistemas de equações contendo, nos segundos membros, funções da forma $\nu \circ \rho = \nu(\rho)$. O problema inicialmente proposto, objeto do presente trabalho, consistiu no estudo de resolubilidade de sistemas contendo funções $\nu \circ (\rho, p) = \nu(\rho, p)$. À medida em que foi evoluindo o desenvolvimento do trabalho vimos que era possível estudar sistemas mais gerais contendo funções do tipo $\nu \circ (\rho, p, E) = \nu(\rho, p, E)$. Entretanto, com as técnicas que usamos para resolver o problema não é possível dar soluções aos sistemas contendo funções $\nu \circ (\rho, u, p, E) = \nu(\rho, u, p, E)$. De fato, um resultado que resolveria tal problema seria aquele correspondente ao Teorema 4.2.7. Na prova deste possível resultado, para a construção da função $\nu \circ (\rho, u, p, E)$, usando a Proposição 3.2.6, se construiria por sua vez funções H_τ em $\mathcal{H}_r(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{H}_\Xi(\mathbb{R})$, $\tau = \rho, u, p, E$. Por outro lado, para construir as funções u_x, uu_x (que aparecem em (4.2.3.1) e (4.2.5.1) respectivamente) usariamos os elementos de $\mathcal{H}_\Xi(\mathbb{R})$. Vemos então que as funções u que apareceriam em $\nu \circ (\rho, u, p, E)$ e em (u_x, uu_x) não seriam as mesmas[Lembremos que, para a demonstração das condições (4.2.3.1) e (4.2.5.1)(Ver a prova de (3.2.5.1) e (3.2.5.2)) foram essenciais a identidade $\widehat{H}(\varepsilon, \cdot) \equiv \mu(\varepsilon)$ em $[-\varepsilon, \varepsilon]$(Verificada por representantes das funções construidas em $\mathcal{H}_r(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{H}_\Xi(\mathbb{R})$) e a condição supp$(\widehat{H}'_\xi) \subset [-\varepsilon, \varepsilon]$,$(\xi \in \Xi)$].

Nesta seção , vamos mostrar como casos especiais acima mencionados se encaixam no nosso estudo. De forma mais precisa, vamos considerar três casos particulares em que ν "depende de duas variáveis", a saber os casos $\nu \circ (\rho, p, E) = \nu \circ (\rho, p)$, $\nu \circ (\rho, p, E) = \nu \circ (\rho, E)$ e $\nu \circ (\rho, p, E) = (p, E)$ (Supondo, respectivamente, que $3 \in \mathbf{J}, 2 \in \mathbf{J}$ e $1 \in \mathbf{J}$), e três casos em que ν "depende de uma variável", $\nu \circ (\rho, p, E) = \nu \circ \rho, \nu \circ (\rho, p, E) = \nu \circ p$ e $\nu \circ (\rho, p, E) = \nu \circ E$(Supondo, respectivamente, que $\mathbf{I} = \{1\}, \{2\}, \{3\}$). Contudo, a apresentação dos resultados de resolubilidade serão feitos apenas para os casos

$\nu\circ(\rho,p,E)=\nu\circ(\rho,p)$ e $\nu\circ(\rho,p,E)=\nu\circ\rho$. A razão , para tanto, é uma observação trivial, a saber, como a soma e a multiplicação em $\mathcal{G}(\mathrm{I\!R}^2)$ são comutativas, e nos sistemas $(S)^\alpha_\nu$ e $(\widetilde{S})^\alpha_\nu$ considerados, sempre é suposto $\nu=\nu_{(s)}$ ou $\nu=\nu_{(\pi)}$ é claro que podemos escrever $\nu\circ(\rho,p,E)$ ou $\nu\circ(\rho,E,p)$ ou $\nu\circ(p,E,\rho)$ (ou, a rigor usar qualquer permutação da terna (ρ,p,E)), nos segundos membros das equações $(E_2)^\alpha_\nu$, $(\widetilde{E}_2)^\alpha_\nu$ e $(E_3)^\alpha_\nu$, sem alterar os sistemas.

Até o fim desta seção vamos considerar $\nu_3\equiv\alpha_3=0$(resp. $\nu_3\equiv\alpha_3=1$), no caso $(\nu,\alpha)=(\nu_{(s)},\alpha_{(s)})$ (resp. $(\nu,\alpha)=(\nu_{(\pi)},\alpha_{(\pi)})$(Estamos supondo então que $3\in\mathbf{J}$). Com essas hipóteses temos $\alpha=\alpha_1+\alpha_2$ e $\nu\circ(\rho,p,E)=\nu_1\circ\rho+\nu_2\circ p$(resp. $\alpha=\alpha_1\alpha_2$ e $\nu\circ(\rho,p,E)=(\nu_1\circ\rho)(\nu_2\circ p)$). Sendo assim, por abuso de notação , podemos escrever

[4.2.1] $$\nu\circ(\rho,p,E)=\nu\circ(\rho,p),$$

sempre que as funções H_τ, $\tau=\rho,p,E$, satisfaçam a hipótese $(A_4)_1$ da Definição 4.1.1.

Lembrando que $\{1,2,3\}=\mathbf{I}\cup\mathbf{J}, 1\in\mathbf{I}$ e $3\in\mathbf{J}$, temos o resultado seguinte.

Corolário 4.2.9: Suponhamos que ν_1^{-1} satisfaz a propriedade $M[\,]\alpha_1,\beta_1[;\mathrm{I\!R}]$ e que ν_2 satisfaz uma das condições seguintes.

$(1^{\underline{o}})$ ν_2 é estritamente crescente e ν_2^{-1} satisfaz a propriedade $M[\,]\alpha_2,\beta_2[;\mathrm{I\!R}]$;

$(2^{\underline{o}})$ $\nu_2\equiv\alpha_2$ em $\mathrm{I\!R}^*_+$.

Então , existem H_τ em $\mathcal{G}(\mathrm{I\!R})(\tau=\rho,u,p,E)$ satisfazendo as hipóteses $(A_3),(A_4)$ e (A_5) da Definição 4.1.1, tais que para as funções generalizadas ρ,u,p e E em $\mathcal{G}(\mathrm{I\!R}^2)$ dadas , respectivamente, pelas fórmulas $(S_1),(S_2),(S_3)$ e (S_4), as condições seguintes são equivalentes.

(I) A função (ρ,u,p,E) é uma solução do sistema formado pelas equações $(\widetilde{E}_1),(E_4)$, (4.2.9.1) e (4.2.9.2), onde

(4.2.9.1) $$(\rho u)_t+(p+\rho u^2)_x\approx\{[\nu\circ(\rho,p)-\alpha]u_x\}_x$$

(4.2.9.2) $$E_t+[(E+p)u]_x\approx\{[\nu\circ(\rho,p)-\alpha]uu_x\}_x;$$

(II) São válidas as condições de salto $[s_i], 1\leq i\leq 4$.

Prova : Observando que $\mathbf{I} = \{1,2\}$ (resp. $\mathbf{I} = \{1\}$) no caso da hipótese ($1^{\underline{o}}$) (resp. ($2^{\underline{o}}$)), o resultado segue do Teorema 4.2.7 usando a igualdade [4.2.1].

∎

Agora vamos supor também que $\nu_2 \equiv \alpha_2 = 0$ (resp. $\nu_2 \equiv \alpha_2 = 1$), quando for considerado o caso $(\nu, \alpha) = (\nu_{(s)}, \alpha_{(s)})$ (resp. $(\nu, \alpha) = (\nu_{(\pi)}, \alpha_{(\pi)})$) (Estamos supondo então que $\mathbf{I} = \{1\}$ e $\mathbf{J} = \{2,3\}$). Com estas hipóteses temos $\alpha = \alpha_1$ e $\nu \circ (\rho, p, E) = \nu \circ (\rho, p) = \nu_1 \circ \rho$. Portanto , se as funções H_τ ($\tau = \rho, p, E$) satisfazem a hipótese $(A_4)_1$ da Definição 4.1.1, também por abuso de notação ,podemos escrever

$$[4.2.2] \qquad \nu \circ (\rho, p, E) = \nu \circ (\rho, p) = \nu \circ \rho.$$

Nessas condições vale o resultado seguinte.

Corolário 4.2.10: Se ν_1^{-1} satisfaz a propriedade $M[]\alpha_1, \beta_1[; \mathbb{R}]$, existem funções H_τ em $\mathcal{G}(\mathbb{R})(\tau = \rho, p, u, E)$ satisfazendo as hipóteses $(A_3), (A_4)$ e (A_5) da Definição 4.1.1, tais que para as funções generalizadas ρ, u, p e E em $\mathcal{G}(\mathbb{R}^2)$ dadas, respectivamente, pelas fórmulas $(S_1), (S_2), (S_3)$ e (S_4), as condições seguintes são equivalentes.

(I) A função (ρ, u, p, E) é uma solução do sistema formado pelas equações $(\widetilde{E}_1), (\widetilde{E}_2)_{\nu_1}^{\alpha_1}$ (Ver Corolário 4.2.4), (E_4) e

$$(E_3)_{\nu_1}^{\alpha_1} \qquad E_t + [(E+p)u]_x \approx [(\nu \circ \rho - \alpha) u u_x]_x;$$

(II) São válidas as condições de salto $[s_i], 1 \leq i \leq 4$.

Prova : Segue do Teorema 4.2.7 (ou do corolário anterior) usando a igualdade [4.2.2].

∎

4.3 – A Não Resolubilidade do Sistema $(S)_\nu^\alpha$

Inicialmente provaremos, usando fortemente a Proposição 3.2.7, que a equação (E_1) não pode ter soluções na forma de onda de choque satisfazendo a relação (4.2.4.1) e, em consequência, veremos que os sistemas $(\overline{S})_{\nu_1}^{\alpha_1}$ (formados pelas equações $(E_1), (\widetilde{E}_2)_{\nu_1}^{\alpha_1}, (E_3)_{\nu_1}^{\alpha_1}$ e (E_4) (Ver Corolário 4.2.10)) e $(S)_\nu^\alpha$ não possuem soluções na forma de onda de choque, conforme a Definição 4.1.1.

Proposição 4.3.1: A equação (E_1) não possui nenhuma solução (ρ, u) na forma de onda de choque tal que ρ, u, ν_1 e α_1 satisfazem a relação (4.2.4.1).

Prova : Por absurdo, suponhamos que existem funções ρ e u em $\mathcal{G}(\mathbb{R}^2)$ satisfazendo a equação (E_1) e a relação (4.2.4.1), as quais são dadas, respectivamente, pelas fórmulas (S_1) e (S_2), verificando as hipóteses $(A_1)-(A_5)$ de acôrdo com a Definição 4.1.1. Nas condições da hipótese $(A_4)_1$, pela Proposição 3.2.4(I), a função $\widehat{\rho}_* := \Delta\rho\widehat{H}_p + \rho_\ell$, representante de ρ_*, satisfaz as condições $V_*[\mathbb{R}; \mathbb{R}^*_+]$ e $V[\mathbb{R}]_0^{+\infty}$; e, portanto, a função $\widehat{\rho_*} \circ y^*$, representante de ρ, satisfaz as condições $V_*[\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^*_+]$ e $V[\mathbb{R}^2]_0^{+\infty}$. Pela Proposição 3.1.29, as funções ρ_* e ρ são inversíveis em $\mathcal{G}(\mathbb{R})$ e $\mathcal{G}(\mathbb{R}^2)$, respectivamente. Sendo (ρ, u) uma solução da equação (E_1), pela Proposição 4.2.1(II), existe uma constante generalizada $z \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^2)$ verificando as relações (4.2.1.1) e (4.2.1.2). De (4.2.1.1) vem $u = c + z\rho^{-1}$; donde, $(\nu_1 \circ \rho - \alpha_1)u_x = -z(\nu_1 \circ \rho - \alpha_1)\rho^{-2}\rho_x$, o que junto com a relação (4.2.4.1) implica

(4.3.1.1) $$z(\nu_1 \circ \rho - \alpha_1)\rho^{-2}\rho_x \approx 0 \quad \text{em} \quad \mathcal{G}(\mathbb{R}^2).$$

Como a função $H_\rho \in \mathcal{H}_p(\mathbb{R})$ satisfaz a hipótese (A_4), em virtude da Proposição 3.2.7, existe uma função estritamente crescente $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^*_+)$, satisfazendo a condição $M[\mathbb{R}^*_+; \mathbb{R}]$, tal que $(\varphi \circ \rho_*)' = (\nu_1 \circ \rho_* - \alpha_1)\rho_*^{-2}\rho_*{}'$ em $\mathcal{G}(\mathbb{R}), \varphi \circ \rho_* \approx \varphi(\rho_\ell)$ em $\mathcal{G}(\mathbb{R}^*_-)$ e $\varphi \circ \rho_* \approx \varphi(\rho_r)$ em $\mathcal{G}(\mathbb{R}^*_+)$; e, portanto, pelo Corolário 3.1.17, temos respectivamente

(4.3.1.2) $$(\varphi \circ \rho)_x = (\nu_1 \circ \rho - \alpha_1)\rho^{-2}\rho_x \quad \text{em} \quad \mathcal{G}(\mathbb{R}^2);$$

(4.3.1.3) $$\varphi \circ \rho \approx \varphi(\rho_\ell) \quad \text{em} \quad \mathcal{G}(\Omega_-);$$

(4.3.1.4) $$\varphi \circ \rho \approx \varphi(\rho_r) \quad \text{em} \quad \mathcal{G}(\Omega_+).$$

Das condições (4.3.1.1) e (4.3.1.2) resulta $z(\varphi \circ \rho)_x \approx 0$ em $\mathcal{G}(\mathbb{R}^2)$; donde, pelo Teorema 1.3.12(d), existe uma função generalizada $\Phi \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^2)$ tal que $\Phi_x = 0$ em $\mathcal{G}(\mathbb{R}^2)$ e

(4.3.1.5) $$z\varphi \circ \rho \approx \Phi \text{ em } \mathcal{G}(\mathbb{R}^2).$$

Por restrição ao conjunto Ω_-, usando as condições (4.3.1.3), (4.2.1.2) e o Lema 1.3.13, obtemos $\Phi \approx a\varphi(\rho_\ell)$ em $\mathcal{G}(\Omega_-)$, onde

$$a := \rho_\ell(u_\ell - c).$$

Como $\Phi_x = 0$, pela Proposição 3.1.19, resulta $\Phi \approx a\varphi(\rho_\ell)$ em $\mathcal{G}(\mathbb{R}^2)$, o que junto com a relação (4.3.1.5) implica

$$z\varphi \circ \rho \approx a\varphi(\rho_\ell) \text{ em } \mathcal{G}(\mathbb{R}^2).$$

Por restrição a Ω_+, pelas condições (4.3.1.4), (4.2.1.2) e o Lema 1.3.13, a relação anterior acarreta

$$a\varphi(\rho_r) = a\varphi(\rho_\ell).$$

Pela hipótese inicial, a função (ρ, u) é também uma solução na forma de onda de choque da equação $(\widetilde{E}_1)$; donde, pela Proposição 4.2.1(I), é válida a fórmula $[s_1]$ e, portanto, como $1 + \theta < 0$, temos $a = -\rho_\ell \Delta u(1 + \theta) < 0$, onde $\theta := \rho_\ell(\Delta\rho)^{-1}$. Em consequência, a igualdade anterior implica $\varphi(\rho_r) = \varphi(\rho_\ell)$; donde, sendo φ uma função estritamente crescente em $\mathbb{R}_+^*$, segue $\rho_r = \rho_\ell$, condição que contraria a hipótese (A_2) da Definição 4.1.1. Logo a equação (E_1) não pode ter soluções na forma de onda de choque satisfazendo a relação (4.2.4.1).

■

Corolário 4.3.2: As equações (E_1) e $(\widetilde{E}_2)_{\nu_1}^{\alpha_1}$ (Ver Corolário 4.2.4) não possuem nenhuma solução na forma de onda de choque.

Prova : Suponhamos, por absurdo, que existem funções ρ, u e p em $\mathcal{G}(\mathbb{R}^2)$ satisfazendo as equações (E_1) e $(\widetilde{E}_2)_{\nu_1}^{\alpha_1}$, as quais são dadas, respectivamente, pelas fórmulas $(S_1), (S_2)$ e (S_3), safisfazendo as hipóteses $(A_1) - (A_5)$ de acôrdo com a Definição 4.1.1. Sendo a função (ρ, u, p) uma solução na forma de onda de choque, também, das equações $(\widetilde{E}_1)$ e $(\widetilde{E}_2)_{\nu_1}^{\alpha_1}$, pelo Corolário 4.2.4, os elementos ρ, u, ν_1 e α_1 satisfazem a relação

(4.2.4.1), o que pela Proposição 4.3.1 não pode ocorrer, dado que (ρ, u) é uma solução da equação (E_1). Logo, as equações dadas não podem ter soluções na forma de onda de choque.

■

Como consequência do corolário anterior temos o resultado seguinte.

Teorema 4.3.3 : O sistema $(\overline{S})^{\alpha_1}_{\nu_1}$ (Ver inicio de 4.3), e portanto o sistema $(S)^{\alpha_1}_{\nu_1}$, não possui nenhuma solução na forma de onda de choque, onde $(S)^{\alpha_1}_{\nu_1}$ é formado pelas equações $(E_1), (E_3)^{\alpha_1}_{\nu_1}, (E_4)$ e

$$(E_2)^{\alpha_1}_{\nu_1} \qquad (\rho u)_t + (p + \rho u^2) = [(\nu_1 \circ \rho - \alpha_1) u_x]_x \quad \text{em} \quad \mathcal{G}(\mathbb{R}^2).$$

■

Em tudo o que se segue suporemos que, para cada $r > 0$, temos $[\epsilon \mapsto (\nu_1(r\epsilon) - \alpha_1)^{-1}] \in \mathcal{E}_M(\mathbb{R})$ e, até o Teorema 4.3.5 e quando fôr considerado o caso $(\nu, \alpha, \beta) = (\nu_{(\pi)}, \alpha_{(\pi)}, \beta_{(\pi)})$, que $\alpha_k > 0, (k = 2, 3)$.

Nestas condições temos os resultados dados em continuação .

Proposição 4.3.4 : As equações (E_1) e $(E_2)^{\alpha}_{\nu}$ não possuem nenhuma solução na forma de onda de choque.

Prova : Suponhamos, por absurdo, que existem funções ρ, u, p e E em $\mathcal{G}(\mathbb{R}^2)$ satisfazendo as equações (E_1) e $(E_2)^{\alpha}_{\nu}$, as quais são dadas, respectivamente, pelas fórmulas $(S_1), (S_2), (S_3)$ e (S_4), verificando as hipóteses $(A_1) - (A_5)$ de acordo com a Definição 4.1.1. Denotando com $f_* := (\rho_*, p_*, E_*) \in \mathcal{G}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^3)$, nas condições da hipótese $(A_4)_1$, seja $\widehat{f}_*$, representante de f_*, definido por $\widehat{f}_* := (\widehat{\rho}_*, \widehat{p}_*, \widehat{E}_*)$, onde $\widehat{\tau}_* := \Delta\tau \widehat{H}_\tau + \tau_\ell$, $\tau = \rho, p, E$. Pela Proposição 3.2.4$(II)_3$, a função $\nu \circ \widehat{f}_*$ verifica as condições $V_*[\mathbb{R};]\alpha, \beta[]$ e $V[\mathbb{R}]^{\beta}_{\alpha}$; a funcão $(\nu_1 \circ \rho_* - \alpha_1)(\nu \circ f_* - \alpha)^{-1} \in \mathcal{G}_{\ell b}(\mathbb{R})$ e é válida a condição

$$[(\nu_1 \circ \widehat{\rho}_* - \alpha_1)(\nu \circ \widehat{f}_* - \alpha)^{-1}](\varepsilon, \cdot) \to \lambda_\ell (\text{resp. } \lambda_r) \text{ em } \mathbb{R}^*_-(\text{resp. } \mathbb{R}^*_+), \text{ para } \varepsilon \to 0^+,$$

onde $\lambda_k := (\nu_1(\rho_\ell) - \alpha_1)(\nu_k - \alpha)^{-1}$, $k = r, \ell$. Considerando as funções $\widehat{\tau} := \widehat{\tau}_* \circ y^*$, $\tau = \rho, p, E$ e $\widehat{f} := \widehat{f}_* \circ y^* = (\widehat{\rho}, \widehat{p}, \widehat{E})$, representantes de τ e $f := f_* \circ y^* = (\rho, p, E)$ em $\mathcal{G}(\mathrm{I\!R}^2; \mathrm{I\!R}^3)$, respectivamente, vemos que a função $\nu \circ \widehat{f}$, representante de $\nu \circ f = \nu \circ (\rho, p, E)$, satisfaz as condições $V_*[\mathrm{I\!R}^2;]\alpha, \beta[]$ e $V[\mathrm{I\!R}^2]^\beta_\alpha$. Pela Proposição 3.1.29, $\nu \circ f - \alpha$ é inversível em $\mathcal{G}(\mathrm{I\!R}^2)$ e a função $(\nu \circ \widehat{f} - \alpha)^{-1}$ é um representante de $(\nu \circ f - \alpha)^{-1}$. Das condições acima seguem também $(\nu_1 \circ \rho - \alpha_1)(\nu \circ f - \alpha)^{-1} \in \mathcal{G}_{\ell b}(\mathrm{I\!R}^2)$ e

(4.3.4.1) $$\left(\frac{\nu_1 \circ \widehat{\rho} - \alpha_1}{\nu \circ \widehat{f} - \alpha}\right)(\varepsilon, \cdot) \to \lambda_\ell (\text{resp. } \lambda_r) \text{ em } \Omega_- (\text{resp. } \Omega_+), \text{ quando } \varepsilon \to 0^+.$$

Por outro lado, sendo a função (ρ, u, p, E) uma solução da equação $(E_2)^\alpha_\nu$, pela Proposição 4.2.3(II), existe uma constante generalizada $z \in \mathcal{G}(\mathrm{I\!R}^2)$ verificando a condição (4.2.3.2) tal que a função $g \in \mathcal{G}_{\ell b}(\mathrm{I\!R}^2)$ tem um representante $\widehat{g}$ satisfazendo a condição (4.2.3.3). Usando as notações dadas acima, da condição (4.2.3.2) resulta

(4.3.4.2) $$(\nu_1 \circ \rho - \alpha_1) u_x = (\nu_1 \circ \rho - \alpha_1)(\nu \circ f - \alpha)^{-1} g =: h \text{ em } \mathcal{G}(\mathrm{I\!R}^2),$$

e das condições (4.2.3.3) e (4.3.4.1), temos

$$[(\nu_1 \circ \widehat{\rho} - \alpha_1)(\nu \circ \widehat{f} - \alpha)^{-1} \widehat{g}](\varepsilon, \cdot) \to 0, \text{ para } \varepsilon \to 0^+, \text{ em } \Omega^*.$$

Desta última condição , sendo $h \in \mathcal{G}_{\ell b}(\mathrm{I\!R}^2)$, pela Proposição 1.3.14, segue $h \approx 0$ em $\mathcal{G}(\mathrm{I\!R}^2)$. Portanto, por (4.3.4.2), os elementos ρ, u, ν_1 e α_1 satisfazem a relação (4.2.4.1), o que, pela Proposição 4.3.1, não pode ocorrer dado que a função (ρ, u) é uma solução na forma de onda de choque da equação (E_1) (Ver inicio da prova). Logo as equações (E_1) e $(E_2)^\alpha_\nu$ não podem ter soluções na forma de onda de choque.

■

Como consequência da proposição anterior temos o resultado seguinte.

Teorema 4.3.5: O sistema $(S)^\alpha_\nu$ não possui nenhuma solução na forma de onda de choque.

■

Em continuação serão cosiderados dois casos especiais de não resolubilidade dos sistemas em que ν "depende de duas variáveis", sendo estes os casos $\nu \circ (\rho, p, E) = \nu \circ (\rho, p)$ e $\nu \circ (\rho, p, E) = \nu \circ (\rho, E)$. No Teorema 4.3.3 foi apresentado um caso em que ν "depende de uma variável", a saber o caso $\nu \circ (\rho, p, E) = \nu \circ \rho = \nu_1 \circ \rho$. São considerados apenas os casos acima citados, dado que para mostrarmos a não resolubilidade dos sistemas $(\overline{S})_{\nu_1}^{\alpha_1}$ e $(S)_{\nu}^{\alpha}$ usamos fortemente a não resolubilidade simultânea das equações (E_1) e (4.2.4.1) (Ver Proposição 4.3.1), sendo que esta última contém a função $\nu_1 \circ \rho$ e é imprescindível o fato da função ν_1 ser estritamente crescente.

Pelos mesmos argumentos usados quando estudamos a resolubilidade de sistemas especiais em 4.2, nesta seção apresentamos sómente o resultado de não resolubilidade para o caso $\nu \circ (\rho, p, E) = \nu \circ (\rho, p)$. Para tal fim, vamos considerar $\nu_3 \equiv \alpha_3 = 0$ (resp. $\nu_3 \equiv \alpha_3 = 1$), no caso $(\nu, \alpha) = (\nu_{(s)}, \alpha_{(s)})$ (resp. $(\nu, \alpha) = (\nu_{(\pi)}, \alpha_{(\pi)})$.

Nestas condições vale o resultado seguinte.

Corolário 4.3.6: O sistema formado pelas equações (E_1), (4.2.9.2) , (E_4) e

$$(\rho u)_t + (p + \rho u^2)_x = \{[\nu \circ (\rho, p) - \alpha] u_x\}_x$$

não possui nenhuma solução na forma da onda de choque. No caso $(\nu, \alpha) = (\nu_{(\pi)}, \alpha_{(\pi)})$ fazemos a hipótese adicional $\alpha_2 > 0$.

Prova : Segue do Teorema 4.3.5 usando a igualdade [4.2.1].

∎

4.4 – Alguns Sistemas Particulares

Nesta seção serão considerados alguns casos particulares concretos de sistemas $(\widetilde{S})_{\nu}^{\alpha}$ (resp. $(S)_{\nu}^{\alpha}$), cuja resolubilidade (resp. não resolubilidade) será assegurada pelos resultados obtidos em 4.2 (resp. 4.3). Inicialmente, dados os pares $(\alpha_1, \beta_1), \ldots, (\alpha_6, \beta_6)$ em $\overline{\mathbb{R}}^2$ de modo que $0 \leq \alpha_i < \beta_i, (1 \leq i \leq 6), \beta_1 := 1 + \alpha_1, \beta_2 \in \overline{\mathbb{R}}$ e $\beta_3 = \ldots = \beta_6 = +\infty$, cosideremos as funções $\varphi_i \in C^\infty(\mathbb{R}_+^*;]\alpha_i, \beta_i[)$ estritamente crescentes definidas por

$$\varphi_1(y) := \alpha_1 + a^{-\frac{1}{y^A}}, \quad (a \in \mathbb{R}, a > 1; A \in \mathbb{R}_+^*) \qquad \varphi_4(y) := \alpha_4 + d^y - 1, \ (d \in \mathbb{R}, d > 1)$$

$$\varphi_2(y) := \alpha_2 + \beta_2 y^2 (y^2 + a_0^2)^{-1}, \quad (a_0 \in \mathbb{R}^*) \qquad \varphi_5(y) := \alpha_5 + shy$$

$$\varphi_3(y) := \alpha_3 + by^B, \quad (b, B \in \mathbb{R}_+^*) \qquad \varphi_6(y) := \alpha_6 + chy - 1.$$

São exemplos simples de funções φ_i satisfazendo a condição $M[\mathbb{R}_+^*; \mathbb{R}]$ tais que φ_i^{-1} satisfaz a condição $M[]\alpha_i, \beta_i[; \mathbb{R}]$. Para cada $i = 2, \ldots, 6$ e para cada $r > 0$, a função $\varepsilon \in]0,1] \mapsto (\varphi_i(r\varepsilon) - \alpha_i)^{-1} \in \mathbb{R}$ é um elemento moderado, enquanto que a função $\varepsilon \in]0,1] \mapsto (\varphi_1(\varepsilon) - \alpha_1)^{-1} = a^{\frac{1}{\varepsilon^A}} \in \mathbb{R}$ não é um elememto moderado. Podemos então considerar os sistemas $(\widetilde{S})_\nu^\alpha$ e $(S)_\nu^\alpha$ fazendo variar ν_1 em $\{\varphi_2, \ldots, \varphi_6\}$ e , ν_2 e ν_3 em $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_6\}$ (No que se segue serão considerados dois pares de tais sistemas, cada um dos quais associados aos pares $(\nu, \alpha) = (\nu_{(s)}, \alpha_{(s)}), (\nu_{(\pi)}, \alpha_{(\pi)})$).

Consideremos λ em $\mathbb{R}^*, (c, \tau_r, \tau_\ell)$ em $\mathbb{R}^3, \tau = \rho, u, p, E$, e os elementos $y^*, \Delta\rho, \Delta u, \Delta p$ e ΔE, satisfazendo as hipóteses (A_1) e (A_2) da Definição 4.1.1 e as condições de salto $[s_1] - [s_4]$. Considerando a terna de funções (ν_1, ν_2, ν_3), como fizemos no inicio deste capítulo, onde $\nu_1 = \varphi_3, \nu_2 = \varphi_1$ e $\nu_3 = \varphi_5$, pelo Teorema 4.2.7, o sistema formado pelas equações $(\widetilde{E}_1), (E_4)$ e

$$[4.4.1] \qquad (\rho u)_t + (p + \rho u^2)_x \approx [(b\rho^B + a^{-\frac{1}{\rho^A}} + shE)u_x]_x$$

$$[4.4.2] \qquad E_t + [(E + p)u]_x \approx [(b\rho^B + a^{-\frac{1}{\rho^A}} + shE)uu_x]_x,$$

tem solução na forma de onda de choque:

$$\rho = \Delta\rho H_\rho \circ y^* + \rho_\ell \qquad p = \Delta p H_p \circ y^* + p_\ell$$

$$u = \Delta u H_u \circ y^* + u_\ell \qquad E = \Delta E H_E \circ y^* + E_\ell,$$

sendo que as componentes da função (H_ρ, H_u, H_p, H_E) são construídas (de acordo com a técnica elaborada em 3.2) da maneira seguinte: H_u é a classe em $\mathcal{G}(\mathbb{R})$ de uma função $\widehat{H}_\xi, \xi \in \Xi$ (Ver Proposição 2.2.9), e as funções H_ρ, H_p e H_E são as classes, respectivamente

(Ver provas das proposições 3.2.2 e 3.2.5), de

$$\widehat{H}_\rho := (\Delta\rho)^{-1}\{[(\rho_r^B - \rho_\ell^B)\widehat{V}_\rho + \rho_\ell^B]^{\frac{1}{B}} - \rho_\ell\}$$

$$\widehat{H}_p := (\Delta p)^{-1}\{log_a[(a^{-\frac{1}{p_r^A}} - a^{-\frac{1}{p_\ell^A}})\widehat{V}_p + a^{-\frac{1}{p_\ell^A}}]^{-1}\}^{-\frac{1}{A}} - p_\ell(\Delta p)^{-1}$$

$$\widehat{H}_E := (\Delta E)^{-1}\{sh^{-1}[(shE_r - shE_\ell)\widehat{V}_E + shE_\ell] - E_\ell\}$$

onde $\widehat{V}_\tau, \tau = \rho, p, E$, são funções moderadas satisfazendo as propriedades descritas na Proposição 3.2.1, determinadas respectivamente pelas funções

$$\mu_\rho(\varepsilon) := (\rho_r^B - \rho_\ell^B)^{-1}[(\alpha_3 b^{-1} + \rho_r^B)\varepsilon + \rho_r^B\varepsilon^B - \rho_\ell^B]$$

$$\mu_p(\varepsilon) := (a^{-\frac{1}{p_r^A}} - a^{-\frac{1}{p_\ell^A}})[(\alpha_1 + a^{-\frac{1}{p_r^A}})\varepsilon + a^{-\frac{1}{(p_r\varepsilon)^A}} - a^{-\frac{1}{p_\ell^A}}]$$

$$\mu_E(\varepsilon) := (shE_r - shE_\ell)^{-1}[(\alpha_5 + shE_r)\varepsilon + sh(E_r\varepsilon) - shE_\ell],$$

definidas para $0 < \varepsilon < \eta$, onde $\eta \in]0,1]$ é suficientemente pequeno. Também, pelo Teorema 4.2.7, o sistema formado pelas equações $(\widetilde{E}_1), (E_4)$ e

$$[4.4.3] \quad (\rho u)_t + (p + \rho u^2)_x \approx \{[(\alpha_3 + b\rho^B)(\alpha_1 + a^{-\frac{1}{p^A}})(\alpha_5 + shE) - \alpha_1\alpha_3\alpha_5]u_x\}_x$$

$$[4.4.4] \quad E_t + [(E + p)u]_x \approx \{[(\alpha_3 + b\rho^B)(\alpha_1 + a^{-\frac{1}{p^A}})(\alpha_5 + shE) - \alpha_1\alpha_3\alpha_5]uu_x\}_x$$

sempre tem soluções na forma de onda de choque, sendo que neste caso supomos $\alpha_1\alpha_5 > 0$. Entretanto, pelo Teorema 4.3.5, o sistema formado pelas equações $(E_1), (E_4)$, [4.4.2] (resp. [4.4.4]) e pela equação obtida de [4.4.1] (resp. [4.4.3]) substituindo a asociação pela igualdade, não possui nenhuma solução na forma de onda de choque.

Do mesmo modo se conclui também que o sistema formado pelas equações : $(\widetilde{E}_1), (E_4)$, [4.4.5] e [4.4.6], onde

$$[4.4.5] \qquad (\rho u)_t + (p + \rho u^2)_x \approx [(b_1\rho^{B_1} + b_2 p^{B_2} + b_3 E^{B_3})u_x]_x$$

$$[4.4.6] \qquad E_t + [(E + p)u]_x \approx [(b_1\rho^{B_1} + b_2 p^{B_2} + b_3 E^{B_3})uu_x]_x,$$

e que o sistema constituido pelas equações : $(\widetilde{E}_1), (E_4)$, [4.4.7] e [4.4.8], onde

[4.4.7] $$(\rho u)_t + (p + \rho u^2)_x \approx \{[(\alpha_{3,1} + b_1\rho^{B_1})(\alpha_{3,2} + b_2 p^{B_2})(\alpha_{3,3} + b_3 E^{B_3}) - \alpha_{3,1}\alpha_{3,2}\alpha_{3,3}]u_x\}_x$$

[4.4.8] $$E_t + [(E + p)u]_x \approx \{[(\alpha_{3,1} + b_1\rho^{B_1})(\alpha_{3,2} + b_2 p^{B_2})(\alpha_{3,3} + b_3 E^{B_3}) - \alpha_{3,1}\alpha_{3,2}\alpha_{3,3}]uu_x\}_x,$$

admitem sempre soluções na forma de onda de choque, onde as ternas $(\alpha_{3,i}, b_i, B_i), i = 1, 2, 3$, são elementos de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, com $0 \leq \alpha_{3,i} < +\infty$, sendo que no caso das equações [4.4.7] e [4.4.8] supomos $\alpha_{3,2}\alpha_{3,3} > 0$. E o sistema formado pelas equações $(E_1), (E_4)$, [4.4.6] (resp. [4.4.8) e pela equação obtida de [4.4.5] (resp. [4.4.7]) substituindo a associação pela igualdade, não possui soluções na forma de onda de choque.

Usando as funções dadas no inicio desta seção podemos também considerar sistemas contendo funções em que ν "depende de duas variáveis" e "uma variável", respectivamente, e descrever as suas soloções , no sentido que fizemos anteriormente.

BIBLIOGRAFIA

[A] ARAGONA,J., Introdução à Teoria das Funções Generalizadas de Colombeau, Notas de aula de MAT 829, 1987 e 1989, Biblioteca do IME–USP.

[A–B] ARAGONA, J.,BIAGIONI, H., "An Intrinsic Definition of Colombeau Algebra of Generalized Functions", a aparecer em Analysis Mathematica.

[A–V] ARAGONA, J., VILLARREAL, F., "Colombeau's Theory and Shock Waves in a Problem of Hidrodinamics",submetido.

[C1] COLOMBEAU, J. F.,"New Generalized Functions. Multiplication of Distributions. Physical Applications", Portugaliae Math., 41 (1982), 57–69.

[C2] COLOMBEAU, J. F., Elementary Introduction to New Generalized Functions, North–Holand Math. Studies, 113 (1985).

[C3] COLOMBEAU, J. F., A Mathematical Analysis Adapted to the Multiplication of Distributions, preprint.

[C4] COLOMBEAU, J. F., "Multiplication de Distributions et Acoustique", J. Acoustique 1,2 (1988), 9–14.

[D] DIEUDONNÉ, J., Foundations of Modern Analysis, Academic Press, New York, (1960).

[F] FRAENKEL, L. E., "Formulae for High Derivatives of Composite Functions", Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. (2) 83 (1978), 159–165.

[H] HORVÁTH, J., Topological Vector spaces and Distributions, Addison–Wesley Publishing–Company, (1966).