O TEOREMA DE KULKARNI

Quando a curvatura determina a métrica

Eduardo Almeida Prado

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM
MATEMÁTICA

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO : GEOMETRIA

ORIENTADOR :
Prof. Dr. ALEXANDRE A. M. RODRIGUES

SÃO PAULO, JUNHO DE 1990.

Aos

meus irmãos

AGRADECIMENTOS:

Gostaria de deixar aqui registrado os meus mais sinceros agracecimentos às seguintes pessoas:

- aos meus pais e avós pelo amor e dedicação com os quais me formaram;

- aos meus irmãos pelo companheirismo de toda uma vida;

- ao meu orientador Prof. Alexandre A.M. Rodrigues, que o tenho como um exemplo de dignidade e competência, pela forma como conduziu a minha passagem pelo mestrado;

- ao Prof. José A. Verderesi, que o considereo também como um orientador, pelas longas e valiosas discussões sobre matemática;

- aos Professores Antonio C. Asperti, Daciberg L. Gonçalves, Lucília D. Borsari e Paulo D. Cordaro, por todo tipo de apoio e auxílio dados durante o meu mestrado;

- aos amigos dos tempos de graduação e mestrado do IME - USP. Em especial: Artur Tomita, Cássio Shimuta, Lúcia Junqueira e Yamim Muyal;

- à Renata Grunberg pelo convívio, compreensão, apoio e por tudo que com ela aprendi. Espero um dia poder lhe retribuir.

INTRODUÇÃO

O objetivo deste trabalho é fornecer um estudo sistemático do TEOREMA DE KULKARNI.

Tal Teorema, demonstrado originalmente em [2], nos responde quando um tensor de curvatura de Riemann de uma variedade riemanniana determina univocamente a sua métrica. Mais geralmente, dadas duas variedades riemannianas (M_1, g_1) e (M_2, g_2) e um difeomorfismo $f : M_1 \longrightarrow M_2$ que preserva a curvatura seccional de Riemann de (M_1, g_1) e (M_2, g_2), o TEOREMA DE KULKARNI nos fornece condições sobre (M_1, g_1) para que f seja uma isometria.

Seja (M, g) uma variedade riemanniana de curvatura constante. É claro que todo difeomorfismo $f : M \longrightarrow M$ preserva a curvatura seccional de Riemann, no entanto não é verdade que f seja necessariamente uma isometria.

A resposta afirmativa dada por Kulkarni, quando $\dim M_1 = \dim M_2 \geq 4$, essencialmente exclui apenas o caso dos espaços de curvatura constante. Quanto à restrição feita sobre a dimensão de M_1, S. T. YAU construiu em [5] um contra-exemplo para o caso $\dim M = 3$ e o caso $\dim M = 2$ é quase obviamente falso.

No primeiro parágrafo temos como objetivo pricipal mostrar que um difeomorfismo que preserva a curvatura seccional entre duas estruturas de curvatura de dimensão maior ou igual a 3 é uma transformação conforme no fecho do conjunto dos pontos não - isotrópicos (TEOREMA 1 (bis)). Tal fato é conseqüência imediata do TEOREMA 1 (originalmente exposto em [2]), Teorema este de natureza puramente algébrica.

Tendo em vista o TEOREMA 1 (bis) passamos no parágrafo 2 a fazer um estudo das transformações conformes sob a luz da método do referencial móvel.

No parágrafo 3 apresentamos efetivamente a demonstração do TEOREMA DE KULKARNI. A demonstração aqui exposta é de autoria de S. T. YAU e foi publicada em [5]. Observamos que a presente demonstração difere de [5] pelo fato de não usarmos a hipótese de analiticidade das variedades riemannianas envolvidas, trabalhamos apenas em classe C^r, $r \geq 4$.

Sendo válido o TEOREMA DE KULKARNI quando a dimensão das variedades é maior ou igual a 4, no quarto parágrafo apresentamos a construção de um contra-exemplo em dimensão 3 dado por S. T. YAU em [5], tendo por base a sua demonstração do Teorema. Ainda em dimensão 3, acrescentando hipóteses globais, é possível obtermos resultados positivos. Um exemplo deste fato é o TEOREMA 3 apresentado no fim deste parágrafo. (ver [5]).

No parágrafo 5 tratamos o caso em que a dimensão é 2. Aqui o Teorema falha por completo.

No sexto e último parágrafo fazemos uma rápida exposição baseada nas idéias que o próprio R. S. Kulkarni utilizou em [2] para demonstrar o teorema que leva o seu nome. Devemos observar que esta demonstração difere completamente da feita por S. T. YAU. A demonstração original utiliza de forma essencial o TEOREMA de WEYL que garante a equivalência entre os fatos de uma variedade riemanniana ser conformemente raza e o seu tensor de curvatura conforme ser identicamente nulo.

Todos os pré-requisitos para a leitura deste trabalho podem ser encontrados em [1] e [4].

Caso não haja nenhuma menção contrária, todas as variedades serão consideradas conexas de classe C^r, $r \geq 4$ bem como todas as funções, campos vetoriais e campos tensoriais.

1. ESTRUTURA DE CURVATURA

DEFINIÇÃO : Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita com um produto interno $< \, , \, >$. Um tensor de curvatura em V relativo a $< \, , \, >$ é uma aplicação bilinear

$$T : V \times V \longrightarrow \text{End}\ (V)$$

que satisfaz

i) $T(x, y) = -T(y, x)$, $\forall\, x, y \in V$

ii) $T(x, y)z + T(y, z)x + T(z, x)y = 0$, $\forall\, x, y, z \in V$ (primeira identidade de Bianchi)

iii) $< T(x, y)z, w >=< T(z, w)x, y >$, $\forall\, x, y, z, w \in V$.

Devemos observar que T é um tensor de tipo $(1, 3)$, i.e., 1-covariante 3-contravariante.

DEFINIÇÃO : Dizemos que o terno $(V, <, >, T)$ é uma estrutura de curvatura quando V é um espaço vetorial real de dimensão finita, $<, >$ um produto interno em V e T um tensor de curvatura em V relativo a $<, >$.

DEFINIÇÃO : Sejam $(V, <, >, T)$ uma estrutura de curvatura e $\sigma \subset V$ um subespaço vetorial de V de dimensão 2. Se $\{x, y\}$ é uma base de σ, definimos

$$K_T(x, y) = \frac{< T(x, y)y, x >}{< x, x >< y, y > - < x, y >^2}.$$

PROPOSIÇÃO 1.1 : Seja $(V, <, >, T)$ uma estrutura de curvatura. Se $\sigma \subset V$ é um subespaço vetorial bidimensional de V e se $\{x, y\}$ e $\{\overline{x}, \overline{y}\}$ são duas bases de σ, então

$$K_T(x, y) = K_T(\overline{x}, \overline{y}).$$

Demonstração :

Basta mostrarmos que para qualquer base $\{x, y\}$ de σ vale a igualdade

$$K_T(x, y) = K_T(\overline{x}, \overline{y}) \tag{1.1}$$

onde $\{\overline{x}, \overline{y}\}$ é uma base ortonormal fixada de σ.

Existem $a_{ij} \in \Re$, $1 \leq i, j \leq 2$, tal que $\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \neq 0$ e que valem as igualdades

$$\begin{cases} x = a_{11}\overline{x} + a_{12}\overline{y} \\ y = a_{21}\overline{x} + a_{22}\overline{y} \end{cases} \tag{1.2}$$

É fácil verificarmos a igualdade (1.1) desenvolvendo $K_T(x,y)$ a partir de (1.2) e das propriedades de tensor de curvatura. □

A proposição acima nos permite formular a seguinte definição.

DEFINIÇÃO : Sejam $(V,<,>,T)$ uma estrutura de curvatura e $\sigma \subset V$ um subespaço vetorial bidimensional de V. Definimos a <u>curvatura seccional na direção σ</u> relativa à estrutura de curvatura dada, e denotamo-la por $K_T(\sigma)$, como sendo

$$K_T(\sigma) = K_T(x,y),$$

onde $\{x,y\}$ é alguma base de σ.

A próxima proposição nos mostra que a curvatura seccional determina por completo o tensor de curvatura. Mais precisamente:

PROPOSIÇÃO 1.2 : Sejam $(V,<,>,T)$ e $(V,<,>,\overline{T})$ duas estruturas de curvatura. Suponhamos que para todo $\sigma \subset V$, σ subespaço vetorial bidimensional de V, vale a igualdade

$$K_T(\sigma) = K_{\overline{T}}(\sigma)$$

Então $T \equiv \overline{T}$.

Demonstração :

Consideremos as aplicações

$\tau : V \times V \times V \times V \to \Re$

$(x,y,z,w) \longrightarrow < T(x,y)z, w >$ e

$\overline{\tau} : V \times V \times V \times V \to \Re$

$(x,y,z,w) \longrightarrow < \overline{T}(x,y)z, w >.$

τ satisfaz as seguintes propriedades:

i) τ é tetra-linear

ii) $\tau(x,y,z,w) = -\tau(y,x,z,w)$

iii) $\tau(x,y,z,w) = -\tau(x,y,w,z)$

iv) $\tau(x,y,z,w) + \tau(y,z,x,w) + \tau(z,x,y,w) = 0$

v) $\tau(x,y,z,w) = \tau(z,w,x,y), \qquad \forall\, x,y,z,w \in V.$

É claro que $\overline{\tau}$ também satisfaz as propriedades acima.

$K_T(\sigma) = K_{\overline{T}}(\sigma)$, $\forall\, \sigma \subset V$, $\dim \sigma = 2 \Rightarrow$

$\tau(x,y,x,y) = \overline{\tau}(x,y,x,y)$, $\forall\, x,y \in V$, $\{x,y\}$ L.I.

Se $\{x,y\}$ L.D., então $\tau(x,y,x,y) = 0 = \overline{\tau}(x,y,x,y)$

$$\therefore \qquad \tau(x,y,x,y) = \overline{\tau}(x,y,x,y), \ \forall x,y \in V.$$

Daí, $\forall x,y,z \in V$,

$\tau(x+z,y,x+z,y) = \overline{\tau}(x+z,y,x+z,y) \Rightarrow$

$\Rightarrow \tau(x,y,z,y) = \overline{\tau}(x,y,z,y)$

$\therefore \qquad \tau(x,y,z,y) = \overline{\tau}(x,y,z,y), \ \forall x,y,z \in V.$

Então, $\forall x,y,z,w \in V$,

$\tau(x,y+w,z,y+w) = \overline{\tau}(x,y+w,z,y+w) \Rightarrow$

$\tau(x,y,z,w) + \tau(x,w,z,y) = \overline{\tau}(x,y,z,w) + \overline{\tau}(x,w,z,y)$

ou

$\tau(x,y,z,w) - \overline{\tau}(x,y,z,w) = \tau(y,z,x,w) - \overline{\tau}(y,z,x,w) \ \ \forall x,y,z,w \in V$

Logo a expressão $\tau(x,y,z,w) - \overline{\tau}(x,y,z,w)$ é invariante por permitaçào cíclica de $\{x,y,z\}$.

$\therefore \qquad 3(\tau(x,y,z,w) - \overline{\tau}(x,y,z,w)) =$

$= \tau(y,z,x,w) - \overline{\tau}(y,z,x,w) + \tau(z,x,y,w) - \overline{\tau}(z,x,y,w) + \tau(x,y,z,w) - \overline{\tau}(x,y,z,w) =$

$= (\tau(y,z,x,w) + \tau(z,x,y,w) + \tau(x,y,z,w)) - (\overline{\tau}(y,z,x,w) + \overline{\tau}(z,x,y,w) + \overline{\tau}(x,y,z,w)) =$

$= 0 - 0 = 0$

$\therefore \qquad \tau(x,y,z,w) = \overline{\tau}(x,y,z,w), \ \ \forall x,y,z,w \in V,$

i.e., $< T(x,y)z, w > = < \overline{T}(x,y)z, w >, \forall x,y,z,w \in V \Rightarrow$

$\Rightarrow T(x,y)z = \overline{T}(x,y)z, \ \ \forall x,y,z \in V \Rightarrow T \equiv \overline{T}$. $\square$

DEFINIÇÃO : Seja $(V,<,>,T)$ uma estrutura de curvatura. Dizemos que $(V,<,>,T)$ é uma <u>estrutura de curvatura seccional constante</u>, ou simplesmente um espaço de curvatura seccional constante, se para todos $\sigma_1, \sigma_2 \subset V$, σ_1, σ_2 subespaços vetoriais bidimensionais de V, temos

$$K_T(\sigma_1) = K_T(\sigma_2).$$

PROPOSIÇÃO 1.3 : Seja $(V,<,>,T)$ uma estrutura de curvatura. $(V,<,>,T)$ é um espaço de curvatura seccional constante igual a K_0, i.e, $\forall\sigma \subset V$, dim $\sigma = 2$, então $K_T(\sigma) = K_0$, se e somente se

$$T(x,y)z = K_0(<y,z>x - <x,z>y)$$

Demonstração :

Consideremos a aplicação

$\overline{T} : V \times V \longrightarrow \mathrm{End}(V)$

$(x,y) \longmapsto \overline{T}(x,y) : V \longrightarrow V$

$$z \longmapsto K_0(<y,z>x - <x,z>y)$$

É fácil verificarmos que $(V,<,>,\overline{T})$ é um espaço de curvatura seccional constante igual a K_0. Por outro lado, se $(V,<,>,T)$ também é um espaço de curvatura seccional constante igual a K_0, segue da PROPOSIÇÃO 1.2 que $T \equiv \overline{T}$. $\square$

COROLÁRIO : Seja $(V,<,>,T)$ uma estrutura de curvatura. $(V,<,>,T)$ é um espaço de curvatura seccional constante se e somente se dada uma base ortonormal $\{e_1,\ldots,e_n\}$ de V, $T^i_{jkl} = \delta_{lj}\delta_{ki} - \delta_{kj}\delta_{li}$, onde $T^i_{jkl} = <T(e_k,e_l)e_j, e_i>$.

DEFINIÇÃO : Sejam $(V,<,>,T)$ e $(\overline{V},\overline{<,>},\overline{T})$ duas estruturas de curvatura. Seja $f : V \longrightarrow \overline{V}$ um isomorfismo linear. Dizemos que f preserva a curvatura seccional se para todo $\sigma \subset V$, σ subespaço vetorial bidimensional de V, temos

$$K_T(\sigma) = K_{\overline{T}}(f(\sigma)).$$

TEOREMA 1 : Sejam $(V,<,>,T)$ e $(\overline{V},\overline{<,>},\overline{T})$ duas estruturas de curvatura, sendo que dim V = dim $\overline{V} = n \geq 3$. Suponhamos que $(V,<,>,T)$ não seja um espaço de curvatura seccional constante. Então todo isomorfismo $f : V \longrightarrow \overline{V}$ que preserva a curvatura seccional é uma semelhança, i.e., existe $\lambda \in \Re$, $\lambda > 0$, tal que

$$\overline{<f(x),f(y)>} = \lambda <x,y>, \ \forall x,y \in V.$$

Para demonstrarmos o TEOREMA 1 usaremos o seguinte LEMA:

LEMA : Sob as hipóteses do TEOREMA 1, V admite uma base ortonormal $\{e_1,\ldots,e_n\}$ na qual $K_T(e_i,e_j)$, $K_T(e_j,e_k)$ e $K_T(e_k,e_i)$ são dois a dois distintos, sempre que os índices i,j,k forem dois a dois distintos. E mais, o conjunto das bases ortonormais que satisfazem a propriedade descrita acima é denso no conjunto de todas as bases ortonormais.

Demonstração do LEMA

1.o caso : $\dim V = 3$

Seja $\{e_1, e_2, e_3\}$ uma base ortonormal qualquer de V. Usaremos a seguinte notação

$$T^i_{jkl} = < T(e_k, e_l)e_j, e_i > .$$

Com esta notação obtemos as seguintes relações a partir das igualdades i), ii) e iii) da definição de tensor de curvatura:

i')$T^i_{jkl} = -T^i_{jlk}$

ii')$T^i_{jkl} + T^i_{klj} + T^i_{ljk} = 0$

iii')$T^i_{jkl} = T^l_{kji}$

Combinando iii') e i') obtemos

iv')$T^i_{jkl} = -T^j_{ikl}$

Devemos observar que *ii'*), neste caso, não é nada mais que *i'*) e *iii'*) pois como $\{i, j, k, l\} \subset \{1, 2, 3\}$, obrigatoriamente i, j, k, l não são dois a dois distintos.

Utilizando as relações *i'*), *ii'*), *iii'*) e *iv'*) obtemos que a dimensão do espaço vetorial de todos os tensores de curvatura em $(V, <, >)$ é 6, ou equivalentemente, a aplicação tetra-linear

$\tau : V \times V \times V \times V \longrightarrow \Re$

$(x, y, x, w) \longmapsto < T(x, y)z, w >$

fica completamente determinada quando, e somente quando conhecemos

(1.3) $$\{T^1_{212}, T^1_{213}, T^1_{223}, T^1_{313}, T^1_{323}, T^2_{323}\}$$

Seja $i \in \{1, 2, 3\}$ e $V_i \subset V$, $V_i = \{e_i\}^\perp$. Definamos então a seguinte forma bilinear simétrica

$B_i : V_i \times V_i \longrightarrow \Re$ tal que

$B_i(x, y) = \tau(x, e_i, e_i, y) = < T(x, e_i)e_i, y >,$

Se $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$, então $\{e_j, e_k\}$ é uma base de V_i, e nesta base a matriz de B_i é

$$\begin{pmatrix} T^j_{iji} & T^k_{iji} \\ T^j_{iki} & T^k_{iki} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T^j_{iji} & T^k_{iji} \\ T^k_{iji} & T^k_{iki} \end{pmatrix}.$$

Logo, quando tomamos $i = 1, 2, 3$ obtemos todos os coeficientes de (1.3).

A partir do corolário da PROPOSIÇÃO 1.3 concluímos que se $(V, <,>, T)$ é um espaço de curvatura seccional constante K_0, então valem as igualdades:

$$(1.4) \begin{cases} T^1_{212} = T^1_{313} = T^2_{323} = K_0 \\ T^1_{213} = T^1_{223} = T^1_{323} = 0 \end{cases}$$

Reciprocamente, como (1.3) determina τ, se vale (1.4) então $(V, <,>, T)$ é um espaço de curvatura seccional constante.

Definamos agora $Q_i : V_i \longrightarrow \Re$ como sendo a forma quadrática associada à forma bilinear B_i, i.e.,

$$Q_i(x) = B_i(x, x), \qquad \text{se } x = \alpha e_j + \beta e_k,$$

$$Q_i(x) = \alpha^2 T^j_{iji} + 2\alpha\beta\, T^k_{iji} + \beta^2\, T^k_{iki}.$$

Vamos nos ater a $Q_i|_{S'}$, i.e., vamos considerar a restrição de Q_i a $S' = \{x \in V_i/ x = \cos\theta e_j + \sin\theta e_k,\ \theta \in [0, 2\pi]\}$ (observemos que se $x \in S'$, $Q_i(x) = K_T(\{e_i, x\})$). Suponhamos que $Q_i|_{S'} \equiv K_i$. Então

$$Q_i(e_j) = T^j_{iji} = K_i = T^k_{iki} = Q_i(e_k)$$

$$\therefore \quad \begin{aligned} K_i &= Q_i(x) = \alpha^2 T^j_{iji} + 2\alpha\beta\, T^k_{iji} + \beta^2\, T^k_{iki} = \\ &= (\alpha^2 + \beta^2) K_i + 2\alpha\beta\, T^k_{iji} \end{aligned}.$$

Logo, para todo $x \in S' \subset V_i$, temos

$$Q_i(x) = K_i = K_i + 2\alpha\beta T^k_{iji} \Rightarrow T^k_{iji} = 0 \qquad \therefore$$

$$(1.5) \qquad T^j_{iji} = T^k_{iki} \text{ e } T^k_{iji} = 0.$$

Suporemos agora que $Q_1|_{S'} = K_1$, $Q_2|_{S'} = K_2$ e $Q_3|_{S'} = K_3$ simultaneamente. Temos então

$$K_1 = Q_1(e_2) = Q_2(e_1) = K_2 = Q_2(e_3) = Q_3(e_2) = K_3$$

Logo, existe K_0 tal que $Q_1/S' \equiv Q_2/S' \equiv Q_3/S' \equiv K_0$. Daí concluímos, a partir de (1.5) que vale (1.4), e portanto que $(V, <,>, T)$ é um espaço de curvatura seccional constante.

Como por hipótese $(V, <,>, T)$ não é um espaço de curvatura seccional constante, concluímos que existe $i \in \{1,2,3\}$ tal que Q_i/S' não é constante.

Vamos agora encontrar a base que o LEMA afirma existir. Se $\{e_i, e_j, e_k\}$ satisfaz o LEMA, nada temos a demonstrar. Suponhamos então que o LEMA não esteja satisfeito. Podem ocorrer dois casos

a) $K_T(e_i, e_j) = K_T(e_i, e_k) \Leftrightarrow T^k_{iki} = T^j_{iji}$

Como Q_i/S' não é constante, $T^k_{iji} \neq 0$.

(1.6) $Q_i(\cos\theta e_j - \sin\theta e_k) = (\cos\theta)^2 T^j_{iji} + 2\sin\theta\cos\theta T^k_{iji} + (\sin\theta)^2 T^k_{iki}$

$\therefore \quad Q_i(\cos\theta e_j + \sin\theta e_k) = T^j_{iji} + \sin 2\theta T^k_{iji}$

Sejam

$\overline{e_j} = \cos\theta e_j + \sin\theta e_k$

$\overline{e_k} = -\sin\theta e_j + \cos\theta e_k = \cos(\pi/2+\theta)e_j + \sin(\pi/2+\theta)$

Se $K_T(e_j, e_k) = K_T(e_i, e_k) = K_T(e_i, e_j)$, então

$K_T(\overline{e_j}, \overline{e_k}) = K_T(e_j, e_k) = T^J_{iji}$, pois $\{e_j, e_k\}$ e $\{\overline{e_j}, e_k\}$ geram o mesmo plano

$K_T(e_i, \overline{e_j}) = Q_i(\overline{e_j}) = T^j_{iji} + \sin 2\theta T^k_{iji}$

$K_T(e_i, \overline{e_k}) = Q_i(\overline{e_k}) = T^j_{iji} + \sin(2(\pi/2+\theta))T^k_{iji} = T^j_{iji} - \sin 2\theta T^k_{iji}$

Logo, como $T^k_{iji} \neq 0$, para θ suficientemente pequeno, porém não nulo, a base $\{e_i, \overline{e_j}, \overline{e_k}\}$ satisfaz o LEMA.

Observação : Se $K_T(e_j, e_k) \neq K_T(e_i, e_k)$, devemos tomar cuidado para escolher θ suficientemente pequeno de modo a preservar a desigualdade já existente.

b) $K_T(e_i, e_j) \neq K_T(e_i, e_k)$

Neste caso $K_T(e_j, e_k)$ é igual a $K_T(e_i, e_j)$ ou a $K_T(e_i, e_k)$. Suponhamos por exemplo que $K_T(e_j, e_k) = K_T(e_i, e_j)$ (o outro caso é análogo).

De (1.6) temos:

$$\begin{aligned} Q_i(\cos\theta e_j + \sin\theta e_k) &= T^k_{iki} + (\cos\theta)^2(T^j_{iji} - T^k_{iki}) + \sin(2\theta) + T^k_{iji} = \\ &= T^j_{iji} - (\sin\theta)^2(T^k_{iki} - T^j_{iji}) + \sin(2\theta)T^k_{iji} \end{aligned}$$

Seja $\{e_i, \overline{e_j}, \overline{e_k}\}$ como definida anteriomente.

$K_T(\overline{e_j}, \overline{e_k}) = K_T(e_j, e_k) = T^J_{iji}$

$$K_T(e_i,\overline{e_j}) = T^j_{iji} - (\sin\theta)^2(T^k_{iki} - T^j_{iji}) + \sin(2\theta)T^k_{iji}$$

$$K_T(e_i,\overline{e_k}) = T^k_{iki} + (\cos(\theta+\pi/2))^2(T^k_{iki} - T^j_{iji}) + \sin(\pi+2\theta)T^k_{iji} =$$

$$= T^k_{iki} + (\sin\theta)^2(T^k_{iki} - T^j_{iji}) + \sin(2\theta)T^k_{iji}$$

$\therefore$ Se $\alpha(\theta) = (\sin\theta)^2(T^k_{iki} - T^j_{iji}) - \sin(2\theta)T^k_{iji}$ temos

$$K_T(\overline{e_j},\overline{e_k}) = T^j_{iji}$$

$$K_T(e_i,\overline{e_j}) = T^j_{iji} - \alpha(\theta)$$

$$K_T(e_i,\overline{e_k}) = T^k_{iki} + \alpha(\theta)$$

Podemos escolher θ suficientemente pequeno de modo a obter $0 < |\alpha| < |T^j_{iji} - T^k_{iki}|/2$. Neste caso $\{e_i,\overline{e_j},\overline{e_k}\}$ será uma base que satisfaz o LEMA.

Devemos observar que tanto no caso a) como no caso b) o ângulo θ pode ser escolhido arbitrariamente pequeno, garantindo assim a condição de densidade exigida no enunciado do LEMA.

2.o caso : $\dim V = n > 3$

A cada base orotnormal de V $b = \{e_1,\ldots,e_n\}$ associamos o inteiro $r(b)$ = número de ternos $\{e_i,e_j,e_k\}$, $1 \le i,j,k \le n$ tal que $K_T(e_i,e_j), K_T(e_i,e_k)$ e $T_K(e_j,e_k)$ são dois a dois distintos. Por continuidade, dada uma base ortonormal b de V qualquer, existe uma vizinhança aberta U_b de Id $\in O(n)$ tal que para todo $g \in U_b$, sempre que $K_T(e_i,e_j)$ e $K_T(e_p,e_q)$, $1 \le i,j,p,q \le n$ forem distintas, então $K_T(g(e_i),g(e_j))$ e $K_T(g(e_p),g(e_q))$ também serão.

Seja agora $b = \{w_1,\ldots,e_n\}$ uma base ortonormal fixada tal que $r(b)$ é o máximo. Se b satisfaz a condiçào exigida pelo LEMA, nada temos a demonstrar. Caso contrário, a menos de uma reordenação da base b, podemos supor que $K_T(e_1,e_2)$, $K_T(e_1,e_3)$ e $K_T(e_2,e_3)$ não são duas a duas distintas. Seja W o subespaço vetorial gerado por $\{e_1,e_2,e_3\}$. Admitamos por hora que existe $g \in U_b$ tal que $(g(W),<,>,T)$ é um espaço de curvatura seccional não constante. Então pelo 1.o caso desta demonstração, existe $h : g(W) \longmapsto g(W)$ ortogonal arbitrariamente próxima de $\mathrm{Id}_g(W)$ tal que a base $\{h(g(e_1)),h(g(e_2)),h(g(e_3))\}$ satisfaz a condiçào exigida pelo LEMA no espaço $g(W)$.

Considere agora a base

$$b' = \{h(g(e_1)),h(g(e_2)),h(g(e_3)),g(e_4),\ldots,g(e_n)\}.$$

Seja $H : V \longmapsto V$ um isomorfismo linear definido por

$$H(e_i) = \begin{cases} h(g(e_i)), & 1 \le i \le 3 \\ g(e_i), & 4 \le i \le n \end{cases}$$

É claro que $H \in O(n)$, e como podemos tomar h arbitrariamente próxima de $\mathrm{Id}_{g(W)}$, e podemos supor que $H \in U_b$. Temos então $b' = H(b)$ e $r(b') > r(b)$ já que $K_T(h(g(e_1)), h(g(e_2))), K_T(h(g(e_1)), h(g(e_3)))$ e $K_T(h(g(e_2)), h(g(e_3)))$ são duas a duas distintas.

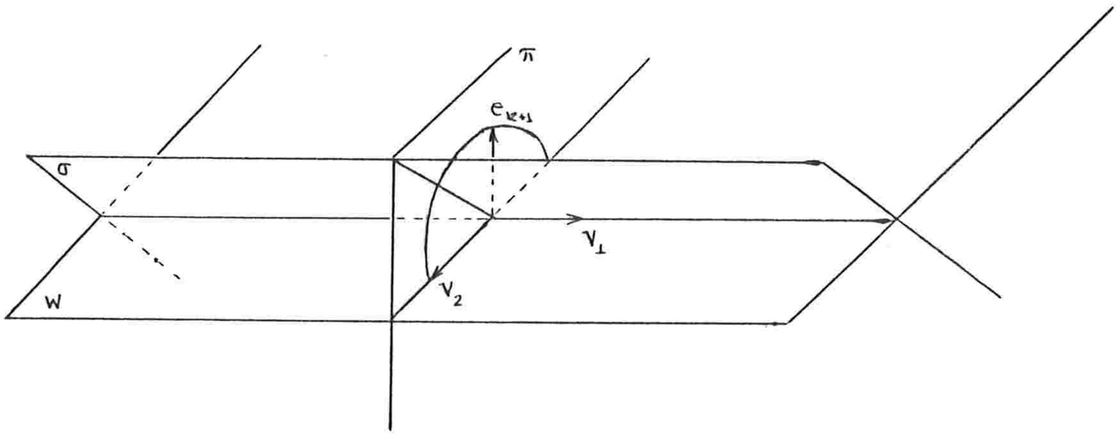
Para concluirmos a demonstração deste LEMA mostraremos que se $W \subset V$ é um espaço vetorial e dim $V = k$, $3 \leq k < n$, então em qualquer vizinhança de Id $\in O(n)$ existe g tal que $(g(W), <,>, T)$ é um espaço de curvatura não constante. È claro que consideraremos apenas o caso em que $(W, <,>, T)$ é um espaço de curvatura seccional constante K_0.

Mostraremos o fato mencionado acima negando-o e obtendo como conclusão desta negação que $(V, <,>, T)$ é um espaço de curvatura constante.

Suponhamos então que exista um subespaço $W \subset V$, dim $W = k$, $3 \leq k < n$ e $U \subset O(n)$ uma vizinhança aberta de Id $\in O(n)$ tal que para todo $g \in U$, $(g(W), <,>, T)$ é um espaço de curvatura constante.

Seja $\{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base ortonormal de V tal que $\{e_1, \ldots e_k\}$ é uma base de W. Seja W' o subespaço vetorial de V gerado por $\{e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}\}$. Mostraremos que $(W', <,>, T)$ é um espaço de curvatura constante K_0.

Seja σ um subespaço bidimensional qualquer de W'. Então dim $(\sigma \cap W') = 1$ ou dim $(\sigma \cap W) = 2$. No segundo caso $\sigma \subset W$ logo $K_T(\sigma) = K_0$. Suponhamos então que dim $(\sigma \cap W) = 1$.



Tomemos então v_1 como sendo um gerador de $\sigma \cap W$, $\|v_1\| = 1$. Seja $v_2 \in W$ tal que $\|v_2\| = 1$, $< v_2, e_{k+1} >= 0$, $< v_2, v_1 >= 0$ e seja π o subespaço vetorial de W' gerado por $\{v_2, e_{k+1}\}$. Em π definimos a seguinte forma quadrática:

$Q : \pi \longrightarrow \Re$

$v \longmapsto < T(v, v_1)v_1, v >$

Se $\|v\| = 1$, $Q(v) = K_T(v, v_1)$.

Podemos completar o conjunto $\{v_1, v_2\}$ para obter uma base ortonormal de W $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$. Logo $\{v_1, \ldots, v_k, e_{k+1}, \ldots, e_n\}$ é uma base ortonormal de V, e $\{v_1, \ldots, v_k, e_{k+1}\}$ é uma base ortonormal de W'.

Seja $\theta \in [0, 2\pi]$. Definamos o seguinte isomorfismo linear:

$L_\theta : V \longrightarrow V$ tal que

$$L_\theta(v_i) = \begin{cases} \cos\theta v_2 + \sin\theta e_{k+1} & \text{se } i = 2 \\ v_i & \text{se } i \neq 2 \end{cases}$$

$$L_\theta(e_i) = \begin{cases} -\sin\theta v_2 + \cos\theta e_{k+1} & \text{se } i = k+1 \\ e_i & \text{se } k+2 \leq i \leq n \end{cases}$$

Devemos observar que L_θ é uma rotação de ângulo θ no plano π e é a identidades nos elementos da base $\{v_1, \ldots, v_k, e_{k+1}, \ldots, e_n\}$ que não estão em tal plano. Logo $L_\theta \in O(n)$ e $L_\theta \in U \subset O(n)$ quando θ é suficientemente pequeno, portanto, neste caso, $(L_\theta(W), <,>, T)$ é um espaço de curvatura constante. Podemos dizer mais: $(L_\theta(W), <,>, T)$ é um espaço de curvatura constante igual a K_0 pois $L_\theta(W') = W'$ logo $L_\theta(W) \subset W'$.

$$\left.\begin{array}{c} \dim W' = k+1 \\ \dim W = k \\ \dim L_\theta(W) = k \\ W \subset W' \\ L_\theta(W) \subset W' \end{array}\right\} \Rightarrow \dim\left(W \cap L_\theta(W)\right) \geq 2$$

logo existe um plano $\alpha \subset W \cap L_\theta(W)$. Como $(W, <,>, T)$ é um espaço de curvatura constante K_0 e $\alpha \subset W$, $K_T(\alpha) = K_0$. Por outro lado, $\alpha \subset L_\theta(W)$, daí $(L_\theta(W), <,>, T)$ é um espaço de curvatura K_0.

Do que foi dito acima podemos concluir que existe $\epsilon > 0$ tal que se $0 \leq \theta < \epsilon$, $Q(\cos\theta v_2 + \sin\theta e_{k+1}) = K_0$ pois

$$Q(\cos\theta v_2 + \sin e_{k+1}) =< T(\cos\theta v_2 + \sin\theta e_{k+1}, v_1)v_1, \cos\theta v_2 + \sin\theta e_{k+1} >$$

$$=< T(L_\theta(v_2), L_\theta(v_1)))L_\theta(v_1), L_\theta(v_2) >= K_T(L_\theta(\{v_1, v_2\})).$$

Logo, como Q é uma forma quadrática e como $Q/_{S'}$ é constante em um aberto de S', concluímos que $Q/_{S'} \equiv K_0$. Em particular, como existe $\theta \in [0, 2\pi]$ tal que $\{v_1, \cos\theta v_2 + \sin\theta e_{k+1}\}$ seja uma base de σ, concluímos que $K_T(\sigma) = K_0$.

Acabamos de demonstrar que $(W', <,>, T)$ é um espaço de curvatura seccional constante. Mostremos agora que para qualquer $g \in U$, $(g(W'), <,>, T)$ é um espaço de curvatura seccional constante.

Por hipótese $(g(W), <,>, T)$ é um espaço de curvatura seccional constante, e observemos que pelo fato de $U \subset O(n)$ ser um aberto, existe U_g, vizinhança aberta de Id$\in O(n)$ tal que $(U_g) \cdot g \subset U$. Logo, para toda $h \in U_g$, $(h(g(W)), <,>, T)$ é um espaço de curvatura seccional constante.

Portanto temos a seguinte situação:

$g(W')$ é um subespaço vetorial de V, dim $(g(W')) = k+1$

$g(W)$ é um subespaço vetorial de V, dim $(g(W)) = k$

$(g(W), <,>, T)$ é um espaço de curvatura seccional constante e existe U_g vizinhança de Id $\in O(n)$ tal que para toda $h \in U_g$, $(h(g(W)), <,>, T)$ é um espaço de curvatura seccional constante. Nestas condições, repetindo o raciocínio anterior, podemos concluir que $(g(W), <,>, T)$ é um espaq de curvatura seccional constante.

Logo, a existência de um subespaço vetorial W de dimensão k para o qual existe uma vizinhança de U de Id $\in O(n)$ tal que se $g \in U$, então $(g(W), <,>, T)$ é um espaço de curvatura constante implica na existência de um subespaço vetorial W' de dimensão $k+1$ tal que se $g \in U$, então $(g(W'), <,>, T)$ é um espaço de curvatura seccional constante. Como dim $V = n < \infty$, por indução acabaremos concluindo que $(V, <,>, T)$ é um espaço de curvatura seccional constante.

A demonstração do 2.o caso do LEMA continua a nos garantir que dada uma base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de V, em qualquer vizinhança de Id $\in O(n)$ existe g tal que $\{g(e_1), \ldots, g(e_n)\}$ satisfaz o LEMA. $\square$

Observação : O resultado deste LEMA não pode, em geral, ser melhorado, i.e., é possível construir estruturas de curvatura $(V, <,>, T)$, dim $V \geq 4$, de curvatura seccional não constante em que para qualquer base ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de V e qualquer conjunto de índices $\{i,j,k,l\} \subset \{1, \ldots, n\}$, $K_T(e_i,e_j)$, $K_T(e_i,e_k)$, $K_T(e_i,e_l)$, $K_T(e_j,e_k)$, $K_T(e_j,e_l)$ e $K_T(e_k,e_l)$ não são duas a duas distintas.

Demonstração do TEOREMA 1

Seja $\{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base ortonormal de V que satisfaz a condição do LEMA e $f(e_i) = \overline{e}_i$. Logo $\{\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_n\}$ é uma base de $\overline{V}$.

Seja $a_{ij} = <\overline{e_i}, \overline{e_j}>$, $\quad 1 \leq i,j \leq n$.

Como f preserva a curvatura seccional temos

$$K_T(e_i,e_j) = K_{\overline{T}}(\overline{e}_i, \overline{e}_j) \Rightarrow \frac{<T(e_i,e_j)e_j, e_i>}{<e_i,e_i><e_j,e_j> - <e_i,e_j>^2} =$$

$$\frac{<\overline{T}(\overline{e}_i,\overline{e}_j)\overline{e}_j, \overline{e}_i>}{<\overline{e_i},\overline{e_i}><\overline{e_j},\overline{e_j}> - <\overline{e_i},\overline{e_j}>^2} \Rightarrow$$

(1.7) $$T^i_{jij}(a_{ii}a_{jj}-a_{ij}^2)=\overline{T}^i_{jij}$$

Sejam $x,y\in\Re$, não ambos nulos, e sejam $i,j,k\in\{1,\ldots,n\}$ dois a dois distintos

$$K_T(xe_i+ye_j,e_k)=\frac{x^2\,T^i_{kik}+2xy\,T^j_{kik}+y^2\,T^j_{kjk}}{x^2+y^2}$$

$$K_{\overline{T}}((x\overline{e}_i+y\overline{e}_j,\overline{e}_k)=\frac{x^2\,\overline{T}^i_{kik}+2xy\,\overline{T}^j_{kik}+y^2\,\overline{T}^j_{kjk}}{(x^2a_{ii}+2xya_{ij}+y^2a_{jj})a_{kk}-(xa_{ik}+ya_{jk})^2}$$

Como f preserva a curvatura seccional temos:

$$\frac{x^2\,T^i_{kik}+2xy\,T^j_{kik}+y^2\,T^j_{kjk}}{x^2+y^2}=$$

$$\frac{x^2\,\overline{T}^i_{kik}+2xy\,\overline{T}^j_{kik}+y^2\,\overline{T}^j_{kjk}}{(x^2a_{ii}+2xya_{ij}+y^2a_{jj})a_{kk}-(xa_{ik}+ya_{jk})^2}$$

Fazendo a multiplicação em cruz obtemos uma identidade entre polinômios. Comparando os coeficientes de tal identidade obtemos:

coeficientes de x^3y

(1.8) $$\overline{T}^j_{kik}=T^j_{kik}(a_{ii}a_{kk}-a_{ik}^2)+T^i_{kik}(a_{ij}a_{kk}-a_{ik}a_{jk})$$

coeficientes de xy^3

(1.9) $$\overline{T}^j_{kik}=T^j_{kik}(a_{jj}a_{kk}-a_{jk}^2)+T^j_{kjk}(a_{ij}a_{kk}-a_{ik}a_{jk})$$

coeficienes de x^2y^2

(1.10) $$\overline{T}^i_{kik}+\overline{T}^j_{kjk}=T^i_{kik}(a_{jj}a_{kk}-a_{jk}^2)+T^i_{kjk}(a_{ii}a_{kk}-a_{ik}^2)+4\,T^i_{kjk}(a_{ij}a_{kk}-a_{ik}a_{jk})$$

Escrevamos

$P=(a_{ii}a_{kk}-a_{ik}^2)-(a_{jj}a_{kk}-a_{jk}^2)$

$Q=a_{ij}a_{kk}-a_{ik}a_{jk}$

$u=T^i_{kik}-T^i_{kjk}$

$v=T^j_{kik}$

Subtraindo (1.9) de (1.8) obtemos

$$0 = T^j_{kik}(a_{ii}a_{kk} - a^2_{ik}) + T^i_{kik}(a_{ij}a_{kk} - a_{ik}a_{jk}) - T^j_{kik}(a_{jj}a_{kk} - a^2_{jk}) - T^j_{kjk}(a_{ij}a_{kk} - a_{ik}a_{jk}) =$$

$$= v.P + u.Q$$

$\therefore$

$$vP + uQ = 0 \tag{1.11}$$

Por outro lado, substituindo (1.7) em (1.10) obtemos

$$\overline{T}^i_{kik} + \overline{T}^j_{kjk} = T^i_{kik}(a_{ii}a_{kk} - a^2_{ik}) + T^j_{kjk}(a_{jj}a_{kk} - a^2_{jk}) = T^i_{kik}(a_{jj}a_{kk} - a^2_{jk}) +$$

$$+ T^j_{kjk}(a_{ii}a_{kk} - a^2_{ik}) + 4\, T^i_{kjk}(a_{ij}a_{kk} - a_{ik}a_{jk}) \Rightarrow$$

$$uP - 4vQ = 0 \tag{1.12}$$

Como a base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ satisfaz a condição do LEMA, temos que $u \neq 0$, logo o sistema dado por (1.11) e (1.12)

$$\begin{cases} vP + uQ = 0 \\ uP - 4vQ = 0 \end{cases}$$

admite uma única solução, a saber $P = Q = 0$.

Sejam

$$x = \frac{a_{ij}}{\sqrt{a_{ii}a_{jj}}} = \frac{< \overline{\overline{e}_i, \overline{e}_j} >}{\|\overline{e}_i\|\ \|\overline{e}_j\|}$$

$$y = \frac{a_{jk}}{\sqrt{a_{jj}a_{kk}}} = \frac{< \overline{\overline{e}_j, \overline{e}_k} >}{\|\overline{e}_j\|\ \|\overline{e}_k\|}$$

$$z = \frac{a_{ik}}{\sqrt{a_{ii}a_{kk}}} = \frac{< \overline{\overline{e}_i, \overline{e}_k} >}{\|\overline{e}_i\|\ \|\overline{e}_k\|}$$

$Q = 0 \Rightarrow \quad x - y.z = 0 \qquad$ pois

$$x - y.z = \frac{a_{ij}}{\sqrt{a_{ii}a_{jj}}} - \frac{a_{jk}}{\sqrt{a_{jj}a_{kk}}}\frac{a_{ik}}{\sqrt{a_{ii}a_{kk}}} = \frac{1}{a_{kk}\sqrt{a_{ii}a_{jj}}}.Q$$

Por permutação dos índices i, j, k obtemos,

$$y - xz = 0 \qquad \text{e} \qquad z - xy = 0$$

Logo, temos o sistema

$$\begin{cases} x - yz = 0 \\ y - xy = 0 \\ z - xy = 0 \end{cases} \tag{1.13}$$

Devemos observar que pela desigualdade de Cauchy-Schwartz $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$ e $|z| \leq 1$. Como $\{e_i, e_j, e_k\}$ L.I. temos ainda $|x| \neq 1$, $|y| \neq 1$ e $|z| \neq 1$. Logo $|x| < 1$, $|y| < 1$ e $|z| < 1$. Diante destas condições o sistema (1.13) admite uma única solução $x = y = z = 0$. Portanto $\{\overline{e}_i, \overline{e}_j, \overline{e}_k\}$ é um conjunto ortogonal de vetores.

$$P = 0 \Rightarrow (a_{ii}a_{kk} - (a_{ik})^2) - (a_{jj}a_{kk} - (a_{jk})^2) = 0$$

Permutando os índices i, j, k obtemos o seguinte sistema:

$$(1.14) \qquad \begin{cases} (a_{ii}a_{kk} - (a_{ik})^2) - (a_{jj}a_{kk} - (a_{jk})^2) = 0 \\ (a_{jj}a_{ii} - (a_{ji})^2) - (a_{kk}a_{ii} - (a_{ki})^2) = 0 \\ (a_{kk}a_{jj} - (a_{kj})^2) - (a_{ii}a_{jj} - (a_{ij})^2) = 0 \end{cases}$$

Somando as duas primeira igualdades de (1.14) obtemos:

$$(a_{ii}a_{kk} - (a_{ik})^2) - (a_{jj}a_{kk} - (a_{jk})^2) + (a_{jj}a_{ii} - (a_{ji})^2) - (a_{kk}a_{ii} - (a_{ki})^2) = 0$$

Como $a_{ik} = a_{ki}$ temos

$$a_{jj}(a_{ii} - a_{kk}) - (a_{ji})^2 + (a_{jk})^2 = 0$$

Como $a_{ji} = a_{jk} = 0$, pois $\{e_i, e_j, e_k\}$ é um conjunto ortogonal, e como $a_{jj} =< \overline{e}_j, \overline{e}_j > \neq 0$, concluímos que $a_{ii} = a_{kk}$.

Analogamente, $a_{ii} = a_{jj}$.

Portanto $\{\overline{e}_i, \overline{e}_j, \overline{e}_k\}$ é um conjunto ortogonal de vetores que têm o mesmo comprimento. Como este fato é verdadeiro para todo conjunto de três índices distintos, concluímos que a base $\{\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_n\}$ é ortogonal e seus elementos têm o mesmo comprimento, o que acaba por demonstrar o TEOREMA. $\square$

DEFINIÇÃO : Seja (M, g) uma variedade Riemanniana. Um <u>tensor de curvatura</u> em (M, g) é um campo tensorial em M de tipo (1, 3), i.e., 1-covariante 3-conravariante,tal que

i) $T(x, y) = -T(y, x), \quad \forall\, x, y \in \mathfrak{X}(M)$

ii) $T(x, y)z + T(y, z)x + T(z, x)y = 0, \quad \forall x, y, z \in \mathfrak{X}(M)$ (1.a identidade de Bianchi)

iii) $g(T(x, y)z, w) = g(T(z, w)x, y), \quad \forall x, y, z, w \in \mathfrak{X}(M)$

DEFINIÇÃO : Dizemos que o terno (M, g, T) é uma <u>estrutura de curvatura</u> quando (M, g) é uma variedade Riemanniana e T é um tensor de curvatura como a definida em (M, g).

Devemos observar que se (M, g, T) é uma estrutura de curvatura como definida acima, então para todo $p \in M$, (T_pM, g_p, T_p) é uma estrutura de curvatura como a definida anteriormente.

Seja $p \in M$ e $\sigma \subset T_pM$ um subespaço vetorial bidimensional. Definimos a curvatura seccional de σ em (M, g, T) e donotamo-la por $K_T(\sigma)$ como sendo a curvatura seccional de σ em (T_pM, g_p, T_p), i.e.,

$$K_T(\sigma) = K_{T_p}(\sigma)$$

Seja $G_2(M)$ a Grasmanniana dos 2-planos de M. Temos então

$$K_T : G_2(M) \longrightarrow \Re$$

$$\sigma \longmapsto K_{T_{\pi(\sigma)}}(\sigma),$$

onde $\pi : G_2(M) \longrightarrow M$ é a projeção canônica.

Observação : Se M é uma variedade de classe C^r, então $G_2(M)$ é uma variedade classe C^{r-1} e $K_T : G_2(M) \longrightarrow \Re$ é uma função de classe C^{r-1}.

Exemplos :

Sejam (M, g) uma variedade Riemanniana e ∇ a sua conexão de Levi-Civita. Temos em (M, g) os seguintes tensores de curvatura:

a) Tensor de curvatura trivial:

$$I(x, y)z = \{g(y, z)x - g(x, z)y\}$$

b) Tensor de curvatura de Riemann

$$R(x, y)z = \nabla_x \nabla_y z - \nabla_y \nabla_x z - \nabla_{[x,y]} z$$

Lembrando que

Ric (x, y) =traço $\{z \longrightarrow R(x, z)y\}$

$g(\text{ Ric}_0 x, y) = \text{Ric } (x, y)$

$\text{Sc} = \text{traço Ric}_0$

definimos

c) Tensor de curvatura de Ricci

$$\mathcal{R}ic\ (x, y)z = \{\text{Ric}(x, z)y - \text{Ric}(y, z)x + g(x, z)\text{Ric}_0 y - g(y, z)\text{Ric}_0 x\}$$

d) Tensor de curvatura conforme

(aqui supomos que dim $M \geq 3$)

$$C(x,y)z = R(x,y)z - \frac{1}{n-2}\mathrm{Ric}(x,y)z - \frac{\mathrm{Sc}}{(n-1)(n-2)}I(x,y)z$$

Mais geralmente, um tensor de curvatura T em (M,g) dá origem ao seu próprio tensor de curvatura conforme C_T.

DEFINIÇÃO : Seja (M,g,T) uma estrutura de curvatura. Dizemos que (M,g,T) é uma estrutura de curvatura seccional constante, ou simplesmente um espaço de curvatura seccional constante se existe $k \in \Re$ tal que para todo $p \in M$ e para todo $\sigma \subset T_pM$, σ subespaço vetorial bidimensional de T_pM, temos

$$K_T(\sigma) = k$$

Quando não houver perigo de confusão em relação a qual estrutura estamos nos referindo, diremos apenas que M é um espaço de curvatura seccional constante.

DEFINIÇÃO : Seja (M,g,T) uma estrutura de curvatura. Dizemos que um ponto $p \in M$ é T-isotrópico se $K_T|_{\pi^{-1}(p)}$ é constante e que é T-não isotrópico caso contrário.

Observação : O conjunto dos pontos T- não isotrópicos é um aberto de M.

É imediata a partir da PROPOSIÇÃO 1.3 o seguinte fato:

PROPOSIÇÃO 1.4 : Seja (M,g,T) uma estrutura de curvatura. Então todos os pontos de M são T- isotrópicos se e somente se existe $f : M \longrightarrow \Re$ tal que

$T_p(x,y)z = f(p)(g_p(y,z)x - g_p(x,z)y), \ \forall p \in M, \forall x,y,z \in T_p(M)$

DEFINIÇÃO : Sejam (M,g,T) e $(\overline{M},\overline{g},\overline{T})$ duas estruturas de curvatura. Seja $f : M \longrightarrow \overline{M}$ um difeomorfismo. Dizemos que f preserva a curvatura seccional se para todo $p \in M$ e para todo $\sigma \subset T_pM$, σ um subespaço vetorial bidimensional de T_pM, temos

$$K_T(\sigma) = K_{\overline{T}}(f_*(\sigma))$$

DEFINIÇÃO : Sejam (M,g) e $(\overline{M},\overline{g})$ duas variedades Riemannianas. Dizemos que um difeomorfismo é conforme se existe $\lambda : M \longrightarrow \Re^*_+$ tal que

$$f^*(\overline{g}) = \lambda g$$

TEOREMA 1 (bis) : Sejam (M,g,T) e $(\overline{M},\overline{g},\overline{T})$ duas estruturas de curvatura, sendo dim $M =$ dim $\overline{M} = n \geq 3$. Seja $f : M \longrightarrow \overline{M}$ um difeomorfismo que preserva a curvatura seccional. Então f é conforme no fecho do conjunto dos pontos T- não isotrópicos de M.

Demonstração :

Seja $N = \{x \in M/x$ é T - não isotrópico $\}$. É claro a partir do TEOREMA 1 que f é conforme em N, i.e., existe $\lambda : N \longrightarrow \Re$ tal que

$$f^*\overline{g} = \lambda g \tag{1.15}$$

Devemos observar pela própria relação (1.15) deduzimos que λ é diferenciável.

Se $N = M$, nada temos a fazer. Suponhamos então que $N \subseteq M$. Para encerrarmos a demonstração basta que nós estendamos a função λ continuamente para (fecho N), de modo a valer (1.15).

Sejam $p \in$ (fecho $N) - N$, V uma vizinhança aberta de p suficientemente pequena e X um campo de vetores em V que não se anula. Temos então que para todo $x \in N \cap V$

$$\lambda(x) = \frac{f^*\overline{g}(X_x, X_x)}{g(X_x, X_x)};$$

logo definimos $\lambda(p) = \dfrac{f^*\overline{g}(X_p, X_p)}{g(X_p, X_p)}$.

É claro que desta forma, para cada $p \in$ (fecho$N) - N, \lambda$ é contínua em p e valo a relação (1.15). Observemos também que a escolha do campo X não é essencial uma vez que a extensão de uma função contínua definida em N para (fecho N) quando existe é única. □

Acabaremos este parágrafo enunciando e demonstrando alguns resultados que nos serão úteis posteriormente.

PROPOSIÇÃO 1.5 : Sejam $(V, <,>, T)$ e $(V, \overline{<,>}, \overline{T})$ duas estruturas de curvatura. Suponha que

a) $\overline{<,>} = \lambda <,>, \quad \lambda \in \Re, \lambda > 0$

b) $K_T \equiv K_{\overline{T}}$

Então $\overline{T} = \lambda T$.

Demonstração :

Seja $\{x, y\}$ L.I.

b) $\Rightarrow \dfrac{< T(x,y)y, x >}{< x,x >< y,y > - < x,y >^2} = \dfrac{\overline{< \overline{T}(x,y)y, x >}}{< \overline{x,x} >< \overline{y,y} > - < \overline{x,y} >^2} \Rightarrow$ a)

$$\frac{< T(x,y)y, x >}{< x,x >< y,y > - < x,y >^2} = \frac{1}{\lambda} \frac{< \overline{T}(x,y)y, x >}{< x,x >< y,y > - < x,y >^2} \Longrightarrow$$

$\Rightarrow \lambda < T(x,y)y, x >=< \overline{T}(x,y)y, x >$

Observando que se $\{x,y\}$ L.D., então a igualdade acima continuaria valendo, concluímos

(1.16) $$\lambda < T(x,y)y, x >=< \overline{T}(x,y)y, x >, \ \forall x,y \in V$$

Logo, dados $x, y, z \in V$ vale

$\lambda < T(x,y+z)y+z, x >=< \overline{T}(x,y+z)y+z, x > \Rightarrow$

$\lambda < T(x,y+z)x, y+z >=< \overline{T}(x,y+z)x, y+z >$

Desenvolvendo a última igualdade obtemos

(1.17) $$\lambda < T(x,y)x, z >=< \overline{T}(x,y)x, z), \ \forall x,y,z \in V$$

Ou

(1.18) $$\lambda T(x,y)x = \overline{T}(x,y)x, \ \forall x,y \in V$$

Logo, dados $x, y, z \in V$ vale

$\lambda T(x+z,y)(x+z) = \overline{T}(x+z,y)(x+z)$

Desenvolvendo a igualdade acima obtemos:

(1.19) $$\overline{T}(x,y)z - \overline{T}(y,z)x = \lambda\{T(x,y)z - T(y,z)x\}, \ \forall x,y,z \in V$$

Permutando x, y, z em (1.19) obtemos:

(1.20) $$\overline{T}(y,z)x - \overline{T}(z,x)y = \lambda\{T(y,z)x - T(z,x)y\}$$

(1.21) $$\overline{T}(z,x)y - \overline{T}(x,y)z = \lambda\{T(z,x)y - T(x,y)z\}$$

Temos ainda da 1.a identidade de Bianchi:

(1.22) $$T(z,x)y = -T(x,y)z - T(y,z)x$$

(1.23) $$\overline{T}(z,x)y = -\overline{T}(x,y)z - \overline{T}(y,z)x$$

Substituindo (1.22) e (1.23) em (1.21) somando (1.19) obtemos o resultado desejado. □

COROLÁRIO: Sejam (M, g, T) e $(\overline{M}, \overline{g}, \overline{T})$ duas estruturas de curvatura. Seja $f : M \longrightarrow \overline{M}$ um difeomorfismo conforme com $f^*\overline{g} = \lambda g$ e suponhamos que f preserva a curvatura seccional. Então $f^*\overline{T} = \lambda T$.

Demonstração :

Basta notar que (T_pM, g_p, T_p) e $(T_pM, f^*(\overline{g}_{f(p)}), f^*(\overline{T}_{f(p)}))$ são estruturas de curvatura que satisfazem as hipóteses da PROPOSIÇÃO 1.5. □

TEOREMA (Schur) : Sejam (M, g, T) uma estrutura de curvatura, dim $M \geq 3$, e ∇ a conexão de Levi-Civita de $M, g)$. Suponha que:

a) $(\nabla_x T)(y,z) + (\nabla_y T)(z,x) + (\nabla_z T)(x,y) = 0$, $\forall x, y, z \in \mathfrak{X}$ (2.a identidade de Bianchi)

b) todo ponto de M é T-isotrópico.

Então (M, g, T) é um espaço de curvatura seccional constante.

Demonstração:

A condição b) e a PROPOSIÇÃO 1.4 nos garantem a existência de uma função $f : M \longrightarrow \Re$ tal que

(1.24) $$T(x,y)z = f \cdot (g(y,z)x - g(x,z)y) = f \cdot (x,y)z$$

Para $w \in \mathfrak{X}(M)$,

$$(\nabla_w T)(x,y)z = \nabla_w f \cdot I(x,y)z + f \cdot (\nabla_w I)(x,y)z$$

Usando a definição de I e o fato de que ∇ é a conexão de Levi - Civita de (M, g), é fácil ver que $(\nabla_W I) = 0$.

$\therefore \quad (\nabla_w T)(x,y)z = \nabla_w f \cdot I(x,y)z, \quad \forall w, x, y, z \in \mathfrak{X}(M)$, i.e.,

(1.25) $$(\nabla_w T)(x,y)z = (wf) \cdot \{g(y,z)x - g(x,z)y\}$$

Considerando permutações de w, x, y obtemos

(1.26) $$(\nabla_y T)(w,x)z = (yf) \cdot \{g(x,z)w - g(w,z)x\}$$

(1.27) $$(\nabla_x T)(y,w)z = (xf) \cdot \{g(w,z)y - g(y,z)w\}$$

Somando (1.25), (1.26) e (1.27), de a) obtemos

$$0 = (wf)\{g(y,z)x - g(x,z)y\} + (yf)\{g(x,y)w - g(w,z)x\} + \\ +(xf)\{g(w,z)y - g(y,z)w\} \tag{1.28}$$

Seja agora $p \in M$. Em uma vizinhança de p podemos escolher campos da seguinte forma: x arbitrário, $\{x, y, z\}$ ortogonais, $g(z,z) = 1$ e $w = z$. Isto é sempre possível pois dim $M \geq 3$. Daí, de (1.28) obtemos

$$(xf)y = (yf)x = 0 \tag{1.29}$$

Como $\{x, y\}$ L.I. em cada ponto de uma vizinhança de p, temos $(xf)(p) = (yf)(p) = 0$. Como p é arbitrário concluímos que f é constante, provando assim o TEOREMA. □

Devemos lembrar que em uma variedade Riemanniana (M, g) o tensor de curvatura Riemann satisfaz a 2.a identidade de Bianchi. Mostraremos no parágrafo 6 que um resultado mais forte que o TEOREMA DE SCHUR vale para o tensor de curvatura conforme.

2. CONSIDERAÇÕES SOBRE TRANSFORMAÇÕES CONFORMES

Sejam (M, g, R) e $(\overline{M}, \overline{g}, R)$ duas estruturas de curvatura onde (M, g) e$(\overline{M}, \overline{g})$ são variedades Riemannianas, $\dim M = \dim \overline{M} = n$, e R e $\overline{R}$ os seus respectivos tensores de curvatura de Riemann. Sejam ∇ e $\overline{\nabla}$ as conexões de Levi-Civita de (M, g) e $(\overline{M}, \overline{g})$, respectivamente.

Tomemos $f : M \longrightarrow \overline{M}$ um difeomorfismo conforme. Então existe $\lambda : M \longrightarrow \Re$ tal que $f^*(\overline{g}) = \lambda g$. Como $\lambda(x) > 0$ para todo $x \in M$, existe $\rho : M \longrightarrow \Re$ tal que $\lambda = e^{2\rho}$.

No que segue, para facilitar a notação, identificaremos M e $\overline{M}$ pelos difeomorfismo f. Notemos que $f^*\overline{\nabla}$ é a conexão de Levi-Civita da variedade Riemanniana $(M, f^*\overline{g})$, portanto $f^*\overline{R}$ é o seu tensor de curvatura de Riemann. Continuaremos a denotar, por abuso de notação, $f^*\overline{g}$ e $f^*\overline{R}$ por $\overline{g}$ e $\overline{R}$. Neste caso $\overline{g} = e^{2\rho}g$. Mais geralmente, sempre que Φ denotar um objeto em (M, g), $\overline{\Phi}$ denotará o objeto correspondente em $(M, \overline{g})$.

Seja $x_1, \ldots, x_n$ um referencial móvel g-ortonormal em um aberto $U \subset M$ e $w_1, \ldots, w_n$ as formas duais deste referencial. Temos então as equações de estrutura:

$$(2.1) dw_i = -\sum_j w^i_j \wedge w_j, \quad w^i_j = -w^j_i$$

$$(2.2) dw^i_j = -\sum_k w^i_k \wedge w^k_j + \Omega^i_j$$

onde

$$w^i_j = \sum_k \Gamma^i_{kj} w_k \text{ com } \Gamma^i_{kj} = g(\nabla_{x_k}(x_j), x_i)$$

$$\Omega^i_j = \tfrac{1}{2} \sum_{k,l} R^i_{jkl} w_k \wedge w_l \text{ com } R^i_{jkl} = g(R(x_k, x_l)x_j, x_i)$$

$$= \sum_{k<l} R^i_{jkl} w_k \wedge w_l$$

Observação : Dadas as formas $w_1, \ldots, w_n$, as formas w^i_j, $1 \leq i, j \leq n$ ficam determinadas por (2.1), i.e., existem e são únicas as formas w^i_j que satisfazem (2.1) (ver [4]).

Consideremos agora os campos $\overline{x}_i = e^{-\rho} x_i$, $1 \leq i \leq n$. $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n$ é um referencial móvel $\overline{g}$-ortonormal em U. Sejam $\overline{w_i}, \ldots, \overline{w}_n$ as formas duais deste referencial móvel. Temos também as formas $\overline{w}^i_j$ e $\overline{\Omega}^i_j$, que satisfazem as equações de estrutura. Nosso objetivo agora é expressar $\overline{w}_i, \overline{w}^i_j$ e $\overline{\Omega}^i_j$ em função de w_i, w^i_j e Ω^i_j.

É imediato que

(2.3) $$\overline{w}_i = e^{\rho} w_i, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Portanto

$$d\overline{w}_i = d(e^{\rho} \cdot w_i) =^{(2.1)} (e^{\rho} \cdot \sum_j \rho_j w_j) \wedge w_i + e^{\rho} \wedge (-\sum_j w_j^i \wedge w_j) =$$

$$= -w_i \wedge \sum_j \rho_j \overline{w}_j - \sum_j w_j^i \wedge \overline{w}_J =$$

$$-\sum_j (\rho_j w_i + w_j^i) \wedge \overline{w}_j =$$

$$-\sum_j (\rho_j w_i - \rho_i w_j + w_j^i) \wedge \overline{w}_j, \quad \text{já que } w_j \wedge \overline{w}_j = 0$$

$$\therefore \quad d\overline{w}_i = -\sum (\rho_j w_i - \rho_i w_j + w_j^i) \wedge \overline{w}_j$$

Notemos que

$$(\rho_j w_i - \rho_i w_j + w_j^i) = -(\rho_i w_j - \rho_j w_i + w_i^j)$$

Logo, pela observação feita acima concluímos

(2.4) $$\overline{w}_j^i = \rho_j w_i - \rho_i w_j + w_j^i$$

De acordo com as equações de estrutura temos:

$$\overline{\Omega}_j^i = d\overline{w}_j^i + \sum_k \overline{w}_k^i \wedge \overline{w}_j^k =$$

$$= \Omega_j^i + (d\rho_j - \sum_k \rho_k w_j^k) \wedge w_i - (d\rho_i + \sum_k \rho_k w_k^i) \wedge w_j +$$

$$= \sum_k \rho_k \rho_j w_i \wedge w_k + \sum_k \rho_i \rho_k w_k \wedge w_j - \sum_k (\rho_k)^2 w_i \wedge w_j =$$

$$= \Omega_j^i + (d\rho_j - \sum_k \rho_k w_j^k - \sum_k \rho_k \rho_j w_k) \wedge w_i -$$

$$-(d\rho_i + \sum_k \rho_k w_k^i - \sum_k \rho_i \rho_k w_k) \wedge w_j - \sum_k (\rho_k)^2 w_i \wedge w_j =$$

$$= \Omega_j^i + (\sum_k \rho_{jk} w_k - \sum_k \rho_k \rho_j w_k) \wedge w_i -$$

$$-(\sum_k \rho_{ik} w_k - \sum_k \rho_k \rho_i w_k) \wedge w_j - \sum_k (\rho_k)^2 w_i \wedge w_j$$

onde ρ_{jk}, $1 \leq j, k \leq n$ são os coeficientes do hessiano da função ρ que satisfazem a igualdade

$$\sum_k \rho_{jk} w_k = d\rho_j - \sum_k \rho_k w_j^k$$

(ver o apêndice)

Logo, temos

(2.5)
$$\overline{\Omega}_j^i = \Omega_j^i - \sum_k (\rho_{jk} - \rho_k \rho_j) w_i \wedge w_k -$$
$$- \sum_k (\rho_{ik} - \rho_k \rho_i) w_k \wedge w_j - \sum_k (\rho_k)^2 w_i \wedge w_j$$

Seja $u = e^{-\rho}$, então

$u_i = -e^{-\rho} \rho_i$, onde $u_i = x_i(u)$

$u_{ij} = -e^{-\rho}(\rho_{ij} - \rho_i \rho_j)$, onde (u_{ij}) é o hessiano de u.

Então (2.5) vai assumir a seguinte forma:

(2.6) $u^2(\overline{\Omega}_j^i - \Omega_j^i) = u \sum_k u_{jk} w_i \wedge w_k + u \sum_k u_{ik} w_k \wedge w_j - \sum_k (u_k)^2 w_i \wedge w_j.$

3. O TEOREMA

Daqui para frente, dada uma variedade Riemanniana (M, g), um ponto R- isotrópico e um ponto R- não-isotrópico, i.e., isotrópico ou não com respeito ao tensor de curvatura de Riemann de (M, g) serão denominados simplesmente ponto isotrópico e ponto não isotrópico, respectivamente.

TEOREMA (KULKARNI) : Sejam (M, g, R) e $(\overline{M}, \overline{g}, \overline{R})$ duas estruturas de curvatura, R e $\overline{R}$ sendo os tensores de curvatura de Riemann de (M, g) e $(\overline{M}, \overline{g})$, respectivamente, e suponhamos que $\dim M = \dim \overline{M} = n \geq 4$. Seja $f : M \longrightarrow \overline{M}$ um difeomorfismo que preserva a curvatura seccional. Então f é uma isometria no fecho do conjunto dos pontos não isotrópicos de M.

Demonstração :

Identificaremos M e $\overline{M}$ pelo difeomorfismo f e utilizaremos a notação do parágrafo 2.

Seja N o conjunto dos pontos não isotrópicos de M. Concluímos do TEOREMA 1 (bis) que f é conforme em (fecho N), i.e., existe λ :(fecho N) $\longrightarrow \Re$ tal que $\overline{g} = e^{2\rho} g$ em (fecho N), $\lambda = e^{2\rho}$. Para demonstrar o TEOREMA basta mostrar que $\lambda \equiv 1$ em (fecho N) ou, equivalentemente, mostrar que $u \equiv 1$ em (fecho N), onde $u = e^{-\rho}$. Por continuidade é suficiente mostrar que $u \equiv 1$ em N.

Seja $p \in N$ e $U \subset N$, U aberto com $p \in U$ (lembremo-mos que N é aberto) e $x_1, \ldots, x_n$ um referencial móvel g - ortogonal em U.

Concluímos do COROLÁRIO da PROPOSIÇÃO 1.5 que

$$\overline{R} = e^{e\rho} R$$

Se definirmos, como de costume, $R^i_{jkl} = g(R(x_k, x_l)x_j, x_i)$ e $\overline{R}^i_{jkl} = \overline{g}(\overline{R}(\overline{x}_k, \overline{x}_l)\overline{x}_j, \overline{x}_i)$ então, da igualdade acima temos:

$$\overline{R}^i_{jkl} = \overline{g}(\overline{R}(\overline{x}_k, \overline{x}_l)\overline{x}_j, \overline{x}_i) = e^{2\rho} g(e^{2\rho} R(e^{-\rho} x_k, e^{-\rho} x_l) e^{-\rho} x_j, e^{-\rho} \overline{x}_i) = R^i_{jkl}$$

Daí

$$\Omega^i_j = \frac{1}{2} \sum_{k,l} R^i_{jkl} w_k \wedge w_l = \frac{1}{2} \sum_{k,l} \overline{R}^i_{jkl} \frac{\overline{w}_k}{e^\rho} \wedge \frac{\overline{w}_l}{e^\rho} =$$

$$= \frac{1}{2} e^{-2\rho} \sum_{k,l} \overline{R}^i_{jkl} \overline{w}_k \wedge \overline{w}_l = u^2 \cdot \overline{\Omega}^i_j \qquad \therefore$$

$$u^2 \overline{\Omega}^i_j = \Omega^i_j \tag{3.1}$$

Observação : Vimos acima que se um difeomorfismo conforme preserva a curvatura seccional, então vale a igualdade (3.1). A recíproca deste fato também é verdadeira, i.e., se um difeomorfismo conforme é tal que em um aberto vale (3.1), então este difeomorfismo preserva a curvatura seccional em tal aberto pois :

$$(3.1) \Rightarrow \frac{1}{2}\sum_{k,l} R^i_{jkl} w_k \wedge w_l = e^{-\rho}\frac{1}{2}\sum_{k,l} \overline{R}^i_{jkl}\overline{w}_k \wedge \overline{w}_l =$$

$$\frac{1}{2}\sum_{k,l} \overline{R}^i_{jkl} w_k \wedge w_l \Rightarrow R^i_{jkl} = \overline{R}^i_{jkl} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(R(x_k, x_l)x_j, x_i) = \overline{g}(\overline{R}(x_k, x_l)x_j, x_i) \Rightarrow$$

$$\overline{R} = e^{2\rho} R \Rightarrow K_{\overline{R}}(x,y) = \frac{\overline{g}(\overline{R}(x,y)y,x)}{\overline{g}(x,x)\overline{g}(y,y) - (\overline{g}(x,y))^2} =$$

$$\frac{e^{2\rho} g(e^{2\rho} R(x,y)y,x)}{(e^{2\rho})^2[g(x,x)g(y,y) - (g(x,y))^2]} = \frac{g(R(x,y)y,x)}{g(x,x)g(y,y) - (g(x,y))^2} = K_R(x,y)$$

$\therefore \quad K_R \equiv K_{\overline{R}}$, concluíndo desta forma o raciocínio.

Substituindo (3.1) em (2.6) obtemos

$$(3.2) \ (1-u^2)\Omega^i_j = u\sum_k u_{jk} w_i \wedge w_k + u\sum_k u_{ik} w_k \wedge w_j - (\sum_k u_k^2) w_i \wedge w_j$$

Observação : Como a partir de (2.6) e (3.2) é possível recuperar (3.1), tendo em vista a observação anterior concluímos que se um difeomorfismo conforme é tal que vale (3.2), então este difeomorfismo preserva a curvatura seccional.

Diferenciando (3.2) obtemos:

$$(3.3) \ -2\sum_k u u_k w_k \wedge \Omega^i_j = -(1-u^2) \wedge d\Omega^i_j +$$

$$\sum_{m,k} u_m u_{jk} w_m \wedge w_i \wedge w_k + u \wedge \sum_k [d(u_{jk}) \wedge w_i \wedge w_k + u_{jk} dw_i \wedge w_k - u_{jk} \wedge w_i \wedge dw_k]$$

$$+\sum_{m,k} u_m u_{ik} w_m \wedge w_k \wedge w_j + u \wedge \sum_k [d(u_{ik}) \wedge w_k \wedge w_j + u_{ik} dw_k \wedge w_j - u_{ik} w_k \wedge dw_j]$$

$$-\sum_k 2u_k du_k \wedge w_i \wedge w_j - (\sum_k u_k^2)(dw_i \wedge w_j - w_i \wedge dw_j)$$

Podemos criar um referencial móvel g-ortogonal que em p satisfaça $w^i_j = 0$, $1 \leq i,j \leq n$ (basta tomarmos o transporte paralelo de uma base ortonormal de $T_p(M)$ ao longo das geodésicas). Então em p teremos:

i) $dw_i = 0$ pois $dw_i = -\sum_j w_j^i \wedge w_j$

ii) $d\Omega_j^i = 0$ pois $d\Omega_j^i = \sum_k \Omega_k^i \wedge w_j^k - \sum_k w_k^i \wedge \Omega_j^k$ (1.a identidade de Bianchi)

iii) $\sum_k \rho_{jk} w_k = d\rho_j$ (ver apêndice, (A.2))

iv) $\sum_k v_{ijk} w_k = dv_{ij}$ (ver apêndice, (A.3))

Podemos supor que o referencial móvel $x_1, \ldots, x_n$ original satisfaz a condição acima, i.e., $w_j^i = 0$, $1 \leq i, j \leq n$. Então (3.3), apenas no ponto p, se reduzirá a:

(3.4) $-2\sum_k u \cdot u_k w_k \wedge \Omega_j^i =$

$$= \sum_{m,k} u_m u_{jk} w_m \wedge w_i \wedge w_k + u \wedge \sum_{m,k} u_{jkm} w_m \wedge w_i \wedge w_k +$$

$$+ \sum_{m,k} u_m u_{ik} w_m \wedge w_k \wedge w_j + u \wedge \sum_{m,k} u_{ikm} w_m \wedge w_k \wedge w_j - 2\sum_{m,k} u_k u_{km} w_m \wedge w_i \wedge w_j$$

Substituindo (A.4) em (3.4) obtemos no ponto p a igualdade

(3.5) $-2\sum_k u \cdot u_k w_k \wedge \Omega_j^i =$

$$\sum_{m,k} u_m u_{jk} w_m \wedge w_i \wedge w_k + u \wedge \sum_m u_m \Omega_j^m \wedge w_i + \sum_{m,k} u_m u_{ik} w_m \wedge w_k \wedge w_j -$$

$$-u \wedge \sum_m u_m \Omega_i^m \wedge w_j - 2\sum_{m,k} u_k u_{km} w_m \wedge w_i \wedge w_j$$

Multiplicando (3.5) por $(1 - u^2)$ e utilizando a igualdade (3.2) obtemos

(3.6) $(1 - u^2)[\sum_{m,k} u_m u_{jk} w_m \wedge w_i \wedge w_k + \sum_{m,k} u_m u_{ik} w_m \wedge w_k \wedge w_j -$

$$-2\sum_{m,k} u_k u_{km} w_m \wedge w_i \wedge w_j] = -u^2[\sum_{m,k} u_k u_{jm} w_k \wedge w_i \wedge w_m +$$

$$+ \sum_{k,m} u_k u_{im} w_k \wedge w_m \wedge w_j - 2\sum_{m,k} u_m u_{mk} w_k \wedge w_i \wedge w_j]$$

Simplificando (3.6) obtemos

$$(3.7) \qquad \sum_{m,k} u_m u_{jk} w_m \wedge w_i \wedge w_k + \sum_{m,k} u_m u_{ik} w_m \wedge w_k \wedge w_j$$

$$-2\sum_{m,k} u_k u_{km} w_m \wedge w_i \wedge w_j = 0$$

Sejam m, i, j três inteiros dois a dois distindos, $1 \leq m, i, j \leq n$. Considerando o coeficiente de $w_m \wedge w_i \wedge w_j$ em (3.7) temos:

$$u_m u_{jj} - u_j u_{jm} + u_m u_{ii} - u_i u_{im} - 2\sum_k u_k u_{km} = 0$$

$\therefore$ para i, j, m dois a dois distintos, temos em p

$$(3.8) \quad -u_i u_{im} - u_j u_{jm} + u_m u_{jj} + u_m u_{ii} - 2\sum_k u_k u_{km} = 0$$

O ponto central desta demonstração é o seguinte resultado:

LEMA : Sejam (N, g, R) e $(\overline{N}, \overline{g}, \overline{R})$ duas estruturas de curvatura onde (N, g) e $(\overline{N}, \overline{g})$ são variedades Riemannianas, dim $N =$ dim $\overline{N} \geq 4$, e R e $\overline{R}$ os seus respectivos tensores de curvatura Riemanniana. Seja $f : N \longrightarrow \overline{N}$ um difeomorfismo conforme que preserva a curvatura seccional, valendo a igualdade $f^*\overline{g} = e^{2\rho} g$, $\rho : N \longrightarrow \Re$. Se $u = e^{-\rho}$, $u(p) \neq 1$ e $(\text{grad } u)_p \neq 0$, então p é um ponto isotrópico.

Demonstração

Podemos tomar um referencial móvel $x_1, \ldots, x_n$ g-ortonormal em um aberto U de N que contém p tal que neste ponto valha a igualdade (3.8) e mais:

$$x_1(p) = \frac{(\text{grad} u)_p}{\|(\text{grad} u)_p\|}$$

Logo,

$$(3.9) \qquad (x_i u)(p) = u_i(p) = 0 \text{ para } 1 < i \leq n$$

Se em (3.8) considerarmos $m = 1$, e nos lembrarmos que m, i, j são dois a dois distintos teremos, a partir de (3.5), a igualdade:

$$(3.10) \qquad u_{jj}(p) + u_{ii}(p) = 2u_{11}(p)$$

Como dim $N \geq 4$, podemos tomar $1, i, j, k$ dois a dois distintos: De (3.10) obtemos

$$\left.\begin{array}{l} u_{ii}(p) + u_{jj}(p) = 2u_{11}(p) \\ u_{ii}(p) + u_{kk}(p) = 2u_{11}(p) \end{array}\right\} \Rightarrow u_{jj}(p) = u_{kk}(p) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_{jj}(p) = u_{kk}(p), \quad \forall 1 < j, k \leq n.$$

Por outro lado temos :

$$u_{jj}(p) + u_{kk}(p) = 2u_{11}(p) \Rightarrow 2u_{11}(p) = 2u_{jj}(p)$$

$\therefore$

(3.11) $u_{ii}(p) = u_{jj}(p), \quad \forall 1 \leq i, j \leq n$

Mostraremos agora que p é um ponto isotrópico. Por um lado

$$\Omega_j^i = \tfrac{1}{2} \sum_{k,l} R_{jkl}^i w_k \wedge w_l,$$

por outro lado, a equação (3.2) nos fornece a igualdade

$$(1 - u^2)\Omega_j^i = u \sum_k u_{jk} w_i \wedge w_k + u \sum_k u_{ik} w_k \wedge w_j - (\sum_k (u_k)^2) w_i \wedge w_j$$

Logo temos

(3.12) $\frac{(1-u^2)}{2} \sum_{k,l} R_{jkl}^i w_k \wedge w_l = u \sum_k u_{jk} w_i \wedge w_k +$

$$+ u \sum_k u_{ik} w_k \wedge w_j - (\sum_k u_k^2) w_i \wedge w_j$$

A igualdade (3.12) nos permite calcular R_{jkl}^i para todo $1 \leq i, j, k, l \leq n$.

1.o) É claro que se $i = j = k = l$, então $R_{jkl}^i(p) = 0$

2.o) É claro que se três dos índices i, j, k, l são iguais, então $R_{jkl}^i(p) = 0$

3.o) Se os índices i, j, k, l são dois a dois distintos então $R_{jkl}^i(p) = 0$ pois basta tomar na equação (3.12) os coeficientes de $w_k \wedge w_l$.

Resta-nos analisar somente o caso em que existe apenas pares entre os índices i, j, k, l que são iguais. É claro que se $i = j$ ou $k = l$, então $R_{jkl}^i(p) = 0$. Logo assumiremos que $i \neq j$ e $k \neq l$.

i) $i = k, j = l$. Vamos calcular $R_{jij}^i(p)$. De (3.12) temos

$$\frac{1 - u^2}{2}(R_{jij}^i - R_{jji}^i) = uu_{jj} + uu_{ii} - \sum_k (u_k)^2$$

De (3.11) concluímos

$$R^i_{jij}(p) = \frac{2u(p)u_{11}(p) - \|\mathrm{grad}u(p)\|^2}{1-(u(p))^2}$$

$$\therefore \quad \forall i,j,k,l, \qquad R^i_{jij}(p) = R^k_{lkl}(p).$$

ii) $i \neq k, j = l$. Vamos clacular $R^i_{jkj}(p)$

De (3.12) temos

$$\frac{(1-u^2)}{2}(R^i_{jkj} - R^i_{jjk}) = uu_{ik}$$

$$\therefore \qquad R^i_{jkj}(p) = \frac{u(p)u_{ik}(p)}{1-(u(p))^2}$$

Se em (3.8) tomarmos $i = 1$ concluiremos que $u_{1m}(p) = 0$. Daí segue que $x_1(p)$ é um autovetor de $\mathrm{hess}_u(p)$. Como $\mathrm{hess}_u(p)$ é uma forma bilinear simétrica podemos supor que $x_2(p), \ldots, x_n(p)$ também são autovetores de $\mathrm{hess}_u(p)$. Logo, $u_{ik}(p) = 0$ sempre que $i \neq k$. Daí

$$R^i_{jkj}(p) = 0.$$

Essencialmente os casos i) e ii) são os únicos casos em que existe apenas pares entre os índices i, j, k, l que são iguais ou diferem de i) ou ii) por um sinal ou são automaticamente nulos.

Logo, do COROLÁRIO da PROPOSIÇÃO 1.3 segue que p é um ponto isotrópico.□

Voltando à demonstração do TEOREMA definamos o seguinte conjunto

$$A = \{x \in N / u(x) \neq 1\} \subset N.$$

É claro que A é um aberto de N. E como N é um aberto de M, A também o é.

Para encerrarmos esta demonstração basta que nós verifiquemos que $A = \emptyset$. Para tanto suponhamos que $A \neq \emptyset$. Neste caso podemos supor que A é conexo pois se não o fosse trabalharíamos em cada uma de suas componentes conexas.

Segue do LEMA que grad $u \equiv 0$ em A portanto existe $K_0 \in \Re$ tal que $u \equiv K_0 > 0$ em A.

De (3.1) concluímos:

$$(3.13) \quad (K_0)^2 \overline{\Omega}^i_j = \Omega^i_j$$

De (2.6) e do fato de $u_i \equiv 0$ e $u_{ij} \equiv 0$, $1 \leq i, j \leq n$, em A concluímos

(3.14) $(K_0)^2(\overline{\Omega}^i_j - \Omega^i_j) = 0$

Como $K_0 > 0$, (3.14) implica

(3.15) $\overline{\Omega}^i_j = \Omega^i_j$

Concluímos das igualdades (3.13), (3.15), do fato de $K_0 > 0$ e do fato das 2-formas Ω^i_j e $\overline{\Omega}^i_j$ não serem nulas (pois os pontos de A são não isotrópicos) que $K_0 = 1$. Logo em A $u \equiv 1$, absurdo! Portanto $A = \emptyset$. □

Sobre a demonstração acima são pertinentes dois comentários : o primeiro é sobre a hipótese que restringe a dimensão da variedade. Esta nos garante a existência de um número suficiente de equações que o difeomorfismo $f : M \longrightarrow \overline{M}$ deve satisfazer nos pontos não-isotrópicos, possibilitando-nos concluir (3.11). O outro comentário é sobre o LEMA. Ele nos informa quão rígido é um difeomorfismo que preserva a curvatura seccional no conjuntos dos pontos não isotrópicos. Tal fato é expressado plea seguinte conclusão : grad $u \equiv 0$ no conjunto dos pontos não isotrópicos.

Uma conseqüência imediata do TEOREMA é o seguinte corolário:

COROLÁRIO : Sejam (M, g, R) e $(\overline{M}, \overline{g}, \overline{R})$ duas estruturas de curvatura, R e $\overline{R}$ sendo os tensores de curvatura de Riemann de (M, g) e $(\overline{M}, \overline{g})$, respectivamente, e suponhamos que $\dim M = \dim \overline{M} = n \geq 4$. Suponhamos ainda que o conjunto dos pontos não isotrópicos de M é denso. Então um difeomorfismo $f : M \longrightarrow \overline{M}$ que preserva a curvatura seccional é uma isometria.

Passemos agora ao caso analítico.

TEOREMA : Sejam (M, g, R) e $(\overline{M}, \overline{g}, \overline{R})$ duas estruturas de curvatura, R e $\overline{R}$ sendo os tensores de curvatura de Riemann de (M, g) e $(\overline{M}, \overline{g})$ respectivamente e suponhamos que $\dim M = \dim \overline{M} = n \geq 4$. Suponhamos ainda que a métrica g é analítica. Seja $f : M \longrightarrow \overline{M}$ um difeomorfismo que preserva a curvatura seccional. Então ou f é uma isometria ou M é um espaço de curvatura seccional contante.

Demonstração :

A demonstração deste TEOREMA é imediata a partir da seguinte proposição:

PROPOSIÇÃO : Seja (M, g, R) uma estrutura de curvatura, onde R é o tensor de curvatura de Riemann de (M, g). Se a métrica g é analítica, são equivalentes :

a) O conjunto dos pontos não isotrópicos é denso.

b) Existe um ponto não isotrópico.

Demonstração :

É claro a implicação a) $\Rightarrow$ b). Mostremos a recíproca.

Suponhamos que o conjunto dos pontos não isotrópicos não é denso, i.e., existe um aberto conexo U não vazio formado apenas por pontos isotrópicos. Pelo TEOREMA DE SCHUR, em todos os pontos de U as curvaturas seccionais são iguais. Portanto em $\pi^{-1}(U)$, $\pi : G_2(M) \longrightarrow M$ a projeção, a função K_R é constante. $\pi^{-1}(U)$ é aberto de G_2M, G_2M é conexo e $K_R : G_2M \longrightarrow \Re$ é analítica pois a métrica g é analítica. Logo K_R é constante em G_2M. Logo todos os pontos de M são isotrópicos. Absurdo! Portanto o conjunto dos pontos não isotrópicos é denso. $\square$

4. DIMENSÃO 3

Neste parágrafo estudaremos o caso em que a dimensão das variedades envolvidas é três. Garantiremos a existência de um contra-exemplo para o TEOREMA e depois, acrescentando hipótese global, demonstraremos um resultado.

Para construirmos o contra-exemplo vamos procurar em um aberto $U \neq \emptyset$ de $\Re^3$ uma métrica Riemanniana g e uma função $\rho : U \longrightarrow \Re$, $\lambda = e^{2\rho}$, $u = e^{-\rho}$ que satisfaçam as seguintes condições:

i) Se consideramos a métrica $\overline{g} = e^{2\rho} g$, temos então duas estruturas de curvatura, a saber (U, g, R) e $(U, \overline{g}, \overline{R})$, onde R e $\overline{R}$ são os tensores de curvatura de (U, g) e $(U, \overline{g})$, respectivamente. Então Id : $U \longrightarrow U$ preserva a curvatura seccional das estruturas de curvatura citadas acima.

ii) Id : $U \longrightarrow U$ não é uma isometria de (U, g) em $(U, \overline{g})$.

iii) Todos os pontos de (U, g, R) são não isotrópicos.

Suponha que para tal métrica g e tal função λ exista um referencial móvel g-ortogonal x_1, x_2, x_3 que satisfaça

$$u_1 = u_2 = 0, \; u_3 \neq 0 \;\; (\text{i.e., } x_3 = \frac{\text{grad } u}{\|\text{grad } u\|}) \tag{4.1}$$

e que em todos os pontos de U valha (3.8), o que no caso de dimensão 3, e utilizando (4.1), se reduz a

$$2u_{33} = u_{11} + u_{22}, \;\; u_{32} = 0, \;\; u_{31} = 0 \tag{4.2}$$

As igualdades (4.1) e (4.2) implicam

(4.3) $dw_3 = 0$ pois

$$dw_3 = -\sum_j w_j^3 \wedge w_j = -\sum_j (\sum_k \Gamma_{kj}^3 w_k) \wedge w_j = \sum_{j<k} (\Gamma_{jk}^3 - \Gamma_{kj}^3) w_j \wedge w_k$$

$\therefore \quad dw_3 = 0 \Leftrightarrow \Gamma_{jk}^3 - \Gamma_{kj}^3 = 0, \; 1 \leq j, k \leq 3.$

$\Gamma_{12}^3 = \Gamma_{21}^3 = 0$ pois

$$u_{12} = x_2 x_1(u) - \sum_i \Gamma_{21}^i x_i u = -\Gamma_{21}^3 (x_3 u)$$

$$u_{21} = x_1 x_2(u) - \sum_i \Gamma_{12}^i x_i u = -\Gamma_{12}^3 (x_3 u)$$

$u_{12} = u_{21}$ e $(x_3 u) \neq 0 \Rightarrow \Gamma_{12}^3 = \Gamma_{21}^3$

$\Gamma_{31}^3 - \Gamma_{31}^3 = 0$ pois

$$0 = u_{31} = u_{13} = x_3x_1(u) - \sum_i \Gamma_{31}^i(x_iu) = (x_3u)\Gamma_{31}^3 \Rightarrow \Gamma_{31}^3 = 0$$

$$0 = u_{31} = x_1x_3(u) - \sum_i \Gamma_{31}^i(x_iu) = x_1x_3u - \Gamma_{13}^3(x_3u)$$

mas $x_1x_3(u) = x_1(u_3) = x_1\sqrt{g(\text{grad } u, \text{grad } u)} =$

$$= \frac{1}{\sqrt{g(\text{grad } u, \text{grad } u)}}.g(\text{grad } u, \nabla_{x_1}(\text{grad } u)) = \frac{1}{\|\text{grad } u\|}u_3 g(x_3, \nabla_{x_1}\text{grad } u) =$$

$= \frac{u_3}{\|\text{grad}u\|}u_{13} = 0 \qquad \therefore \qquad x_1x_3(u) = 0 \Rightarrow \Gamma_{13}^3 = 0$

$\therefore \qquad \Gamma_{13}^3 - \Gamma_{31}^3 = 0$

$\Gamma_{23}^3 - \Gamma_{32}^3 = 0$ (análogo ao caso anterior).

A igualdade (4.3) nos sugere considerar a métrica g como sendo dada por

(4.4)
$$g = \begin{pmatrix} e^{2h} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2k} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

nos campos usuais de $\Re^3$: $\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \partial/\partial x_3$,onde $h, k : \Re^3 \longrightarrow \Re$. Para facilitar vamos assumir que h e k só dependam de x_3, i.e.,

$$\frac{\partial h}{\partial x_1} = \frac{\partial h}{\partial x_2} = \frac{\partial k}{\partial x_1} = \frac{\partial k}{\partial x_2} = 0.$$

Assumiremos também que este último fato vale para a função ρ.

Sejam

$$x_1 = e^{-h}\frac{\partial}{\partial x_1}, x_2 = e^{-k}\frac{\partial}{\partial x_2}, x_3 = \frac{\partial}{\partial x_3}$$

Então $\{x_1, x_2, x_3\}$ é um referencial móvel g-ortonormal e

$w_1 = e^h dx_1, w_2 = e^k dx_2$ e $w_3 = dx_3$

são as formas duais deste referencial, onde $\{dx_1, dx_2, dx_3\}$ são as formas duais do referencial $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\}$.

Como de costume, $R(x_i, x_j)x_k = \sum_l R^l_{kij} x_l$. Então:

$$
(4.5) \qquad \begin{cases}
R^1_{212} = -\dfrac{\partial k}{\partial x_3}.\dfrac{\partial h}{\partial x_3} \\
R^1_{313} = -\dfrac{\partial^2 h}{\partial x_3^2} - (\dfrac{\partial h}{\partial x_3})^2 \\
R^2_{323} = -\dfrac{\partial^2 k}{\partial x_3^2} - (\dfrac{\partial k}{\partial x_3})^2 \\
R^1_{213} = R^1_{223} = 0 \\
R^1_{312} = R^1_{323} = 0 \\
R^2_{312} = R^2_{313} = 0
\end{cases}
$$

As igualdades (4.5) são obtidas da seguinte forma : os campos $\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \partial/\partial x_3$ são provenientes da parametrização Id: $\Re^3 \longrightarrow \Re^3$. Podemos então calcular os símbolos de Christoffel $\Gamma^{k\prime}_{ij}$ definidos por:

$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}(\dfrac{\partial}{\partial x_j}) = \sum \Gamma^{k\prime}_{ij} \dfrac{\partial}{\partial x_k}$, onde ∇ é a conexão de Levi-Civita de (U, g), pela fórmula

$$\Gamma^{k\prime}_{ij} = \tfrac{1}{2} \sum_m [\frac{\partial}{\partial x_i}(g'_{jm}) + \frac{\partial}{\partial x_j}(g'_{mj}) - \frac{\partial}{\partial x_m}(g'_{ij})] g^{mk\prime}$$

onde $g'_{ij} = g(\dfrac{\partial}{\partial x_i}, \dfrac{\partial}{\partial x_j})$ e $(g^{ij\prime})_{i,j} = (g'_{ij})^{-1}_{i,j}$

Se $R(\dfrac{\partial}{\partial x_i}, \dfrac{\partial}{\partial x_j})\dfrac{\partial}{\partial x_k} = \sum_l R^l_{kij}{}' \dfrac{\partial}{\partial x_l}$,

então

$$R^i_{klj}{}' = \tfrac{\partial}{\partial x_l}(\Gamma^{i\prime}_{jk}) - \tfrac{\partial}{\partial x_k}(\Gamma^{i\prime}_{lj}) + \sum_m (\Gamma^{m\prime}_{kj}\Gamma^{i\prime}_{lm} - \Gamma^{m\prime}_{lj}\Gamma^{i\prime}_{km})$$

Agora é imediato o cálculo dos coeficientes R^i_{jlk}.

Lembrando que $\Omega^i_j = R^i_{j12} w_1 \wedge w_2 + R^i_{j13} w_1 \wedge w_3 + R^i_{j23} w_2 \wedge w_3$

e utilizando (4.5) temos

$$
(4.6) \qquad \begin{cases}
\Omega_2^1 = -\dfrac{\partial k}{\partial x_3}\dfrac{\partial h}{\partial x_3} w_1 \wedge w_2 \\
\Omega_3^1 = [-\dfrac{\partial^2 h}{\partial x_3^2} - (\dfrac{\partial h}{\partial x_3})^2] w_1 \wedge w_3 \\
\Omega_3^2 = [-\dfrac{\partial^2 k}{\partial x_3^2} - (\dfrac{\partial k}{\partial x_3})^2] w_2 \wedge w_3 \\
\Omega_i^i = 0 \\
\Omega_j^i = -\Omega_i^j
\end{cases}
$$

Vamos agora considerar a métrica $\overline{g} = \lambda g$, $\lambda = e^{2\rho}$. Como $u = e^{-\rho}$ temos, utilizando a expressão do hessiano de u em coordenadas, as seguintes igualdades:

$$
(4.7) \qquad \begin{cases}
u_{11} = \dfrac{\partial h}{\partial x_3}\dfrac{\partial u}{\partial x_3} \\
u_{22} = \dfrac{\partial u}{\partial x_3}\dfrac{\partial k}{\partial x_3} \\
u_{33} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} \\
u_{ij} = 0 & \text{se } i \neq j
\end{cases}
$$

Vamos agora examinar as condições i), ii) e iii) enunciadas no começo deste parágrafo:

i) Id: $U \longrightarrow U$ preserva a curvatura seccional das estruturas de curvatura (U, g, R) e $(U, \overline{g}, \overline{R})$, o que é equivalente, segundo a observação feita após a igualdade (3.2), a

$$(1 - u^2)\Omega_j^i = u \sum_k u_{jk} w_i \wedge w_k + u \sum_k u_{ik} w_k \wedge w_j - (\sum_k u_k^2) w_i \wedge w_j$$

Utilizando (4.6) e (4.7) concluímos que a condição i) é equivalente a

$$
(4.8) \qquad \begin{cases}
\text{a)} \quad -h'k'(u^2 - 1) + uu'(h' + k') - u'^2 = 0 \\
\text{b)} \quad -(h'^2 + h'')(u^2 - 1) + uu'h' + uu'' - u'^2 = 0 \\
\text{c)} \quad -(k'^2 + k'')(u^2 - 1) + uu'k' + uu'' - u'^2 = 0
\end{cases}
$$

onde a derivada parcial de uma função f na direção de $\partial/\partial x_3$ está sendo indicada por f'.

ii) Id: $U \longrightarrow U$ não é uma isometria de (U, g) em $(U, \overline{g})$. Esta condição é garantida se exirgimos

(4.9) a) $0 < u \neq 1$

Para garantirmos facilidades mais à frente, exigiremos também:

(4.9) b) $u' \neq 0$

iii) Todos os pontos de (U, g, R) são não isotrópicos. Para garantir esta condição basta exigir

(4.10) $h' \neq k'$

pois se a curvatura seccional é constante em algum ponto $p \in U$, então neste ponto temos

$R^1_{212} = R^1_{313} = R^2_{323} = c$, i.e., utilizando (4.5) obtemos:

$h'' + h'^2 = k'' + k'^2 = h'k' = -c$

Subtraindo (4.8) b) de (4.8) c) obtemos

$-(k'^2 + k'' - h'^2 - h'')(u^2 - 1) + uu'(k' - h') = 0 \Rightarrow$

$-(-c + c)(u^2 - 1) + uu'(k' - h') = 0 \Rightarrow$

$uu'(k' - h') = 0$. Logo, de (4.9) temos $k' = h'$.

Para criar um contra-exemplo basta encontrarmos funções $u, h, k : U \longrightarrow \Re$ que satisfaçam as equações (4.8), (4.9) e (4.10). Na realidade vamos pensar nas funções u, h e k como sendo funções definidas em um aberto de $\Re$, já que anteriormente assumimos que tais funções dependem apenas de x_3.

Vamos impor ao nosso sistema uma outra condição que provém da igualdade (4.2)

(4.11) $2u'' = u'(h' + k')$

De (4.8) a) e (4.11) obtemos:

$$h' + k' = \frac{2u''}{u'}$$

$$h'.k' = \frac{2uu''}{u^2 - 1} - \frac{u'^2}{u^2 - 1}$$

que por sua vez implicam

$h'' + k'' = \dfrac{2(u'.u''' - u''^2)}{(u')^2}$, simplesmente derivando a primeira igualdade e

$h'^2 + k'^2 = \dfrac{4u''^2}{u'^2} - \dfrac{4u.u''}{u^2 - 1} + \dfrac{2u'^2}{u^2 - 1}$, calculando $(h' + k')^2$.

Somando (4.8) b) e (4.8) c) obtemos, com auxílio das últimas quatro igualdades, a equação

(4.12) $u'.u''' + (u'')^2 - \dfrac{4u.(u')^2.u''}{u^2-1} + \dfrac{2(u')^4}{u^2-1} = 0$

A condição $h' \neq k'$ é equivalente a

$\dfrac{u''^2}{u'^2} + \dfrac{2u''u - u'^2}{1-u^2} \neq 0$ pois

$(\dfrac{u''}{u'})^2 + \dfrac{2u''u - u'^2}{1-u^2} = \dfrac{1}{4}(h'+k')^2 - h'k' = (\dfrac{h'}{2} - \dfrac{k'}{2})^2$

Seja $\underline{u}$ uma solução da equação (4.12) satisfazendo

$$(4.13) \qquad \begin{cases} 1 > u > 0, & u' \neq 0 \\ (\dfrac{u''^2}{u'^2}) + \dfrac{2u''u - u'^2}{1-u^2} > 0 \end{cases}$$

em um ponto p fixado.

Tendo escolhido $\underline{u}$, seja h' a solução da equação

$$(4.14) \qquad (\frac{dX}{dx_3} + X^2)(1-u^2) + u.u'X + u.u'' - u'^2 = 0$$

satisfazendo a condição inicial

$$(4.15) \qquad -X(\frac{2u''}{u'} - X) = \frac{2u''u - u'^2}{1-u^2} \text{ em } p.$$

Observemos que (4.14) nada mais é do que (4.8) b).

Definamos agora

(4.16) $k' = \frac{2u''}{u'} - h'$

Mostremos que h', k' e u definidas acima satisfazem as equações (4.8). É claro, pela própria definição de h', que (4.8) b) está satisfeita. Definamos

$P = -h'k'(u^2-1) + u.u'(h'+k') - u'^2$

$Q = -(k'^2 + k'')(u^2-1) + uu'k' + uu'' - u'^2$

Para mostrar que (4.8) a) e (4.8) c) estão satisfeitas, basta mostrar que $P \equiv 0$ e $Q \equiv 0$.

Utilizando as definições de h', k' e u temos:

(4.17) $Q = -2P$

(4.18) $\dfrac{dP}{dx_3} = -(h' + k')P + h'Q + \dfrac{u.u'}{1-u^2}Q - \dfrac{2uu'P}{1-u^2}$

logo

(4.19) $\dfrac{dP}{dx_3} = (-3h' - k' - \dfrac{4u.u'}{1-u^2}).P$

No ponto p a condição (4.15) nos garante que $P(p) = 0$ pois

$$(4.15) \Rightarrow -h'.(\frac{2u''}{u'} - h') = \frac{2u''u - u'^2}{1-u^2} \text{ em } p$$

$$\therefore \quad (4.16) \Rightarrow -h'k' = \frac{2u''u - u'^2}{1-u^2} \text{ em } p \Rightarrow$$

$$-h'k'(1-u^2) = 2u''u - u'^2 \text{ em } p$$

$$\therefore \quad (4.16) \Rightarrow -h'k'(1-u^2) = u.u'(h' + k') - u'^2 \text{ em } p \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -h'k'(u^2 - 1) + u.u'(h' + k') - u'^2 = 0 \text{ em } p$$

$$\therefore \quad P(p) = 0.$$

Por outro lado, P satisfaz a equação diferencial (4.19). Logo, pelo teorema de existência e unicidade de soluções de equações diferenciáveis, e por $P(p) = 0$, segue que $P \equiv 0$. Portanto de (4.17) segue que $Q \equiv 0$.

Acabamos de demonstrar que as equações (4.8) estão satisfeitas. As condições (4.9) e (4.10) também estão satisfeitas graças às condições iniciais (4.13). Desta forma fica garantida a existência de um contra-exemplo para o TEOREMA DE KULKARNI quando a dimensão das variedades é 3.

Vamos agora enunciar e demonstrar um TEOREMA que resgata o resultado de Kulkarni para dimensão 3.

TEOREMA : Sejam (M, g, R) e $(\overline{M}, \overline{g}, \overline{R})$ duas estruturas de curvatura com (M, g) e $(\overline{M}, \overline{g})$ sendo duas variedade Riemannianas compactas de dimensão 3 e R e $\overline{R}$ seus respectivos tensores de curvatura Riemanniano. Suponhamos que todos os pontos de M são não isotrópicos, então todo difeomorfismo $f : M \longrightarrow \overline{M}$ que preserva a curvatura seccional é uma isometria.

Demonstração :

Como todos os pontos de M são não isotrópicos e f preserva a curvatura seccional, segue do TEOREMA 1 (bis) que f é conforme. De acordo com a notação utilizada anteriomente temos $\overline{g} = e^{e\rho}g$ e $u = e^{-\rho}$.

É claro que u é uma função contínua em M, uma variedade compacta. Então u atinge seu máximo e seu mínimo. Vamos supor que f não é uma isometria, isto é equivalente a dizer que u não é constante igual a 1 em M, logo ou o seu máximo ou o seu mínimo é diferente de 1. Portanto existe $p \in M$ tal que

$$\begin{cases} u(p) \neq 1 \\ (\text{grad } u)(p) = 0 \end{cases} \tag{4.20}$$

Consideremos agora $\text{hess}_u(p)$. Esta é uma aplicação bilinear, simétrica, $\text{hess}_u(p) : T_pM \times T_pM \longrightarrow \Re$, portanto todos os seus autovalores são reais.

Suponhamos que todos os autovalores de $\text{hess}U(p)$ são iguais. Seja $\{x_1(p), x_2(p), x_3(p)\}$ uma base ortonormal de T_pM formada por autovalores de $\text{hess}_u(p)$. Seja x_1, x_2, x_3 um referencial móvel g-ortonormal que coincide com a base dada de T_pM no ponto p. Temos:

$$\begin{cases} u_{11}(p) = u_{22}(p) = u_{33}(p) & \\ u_{ij}(p) = 0 & \text{para } i \neq j \end{cases} \tag{4.21}$$

Logo, as igualdades (3.2), (4.20) e (4.21) nos fornecerão

$\Omega^i_j(p) = \dfrac{2.u(p).u_{11}(p)}{1 - (u(p))^2} w_i \wedge w_j$, logo, segundo o COROLÁRIO da PROPOSIÇÃO 1.3, p é um ponto isotrópico. Absurdo! Portanto os autovalores de $\text{hess}_u(p)$ nào podem ser todos iguais.

Suponhamos agora que os autovalores de $\text{hess}_u(p)$ são dois a dois distinto. Existe então uma vizinhança U de p tal que os autovalores de $\text{hess}_u(q)$ são dois a dois distinto, sempre que q está em U. Seja então x_1, x_2, x_3 um referencial móvel g-ortonormal em U que diagonaliza o tensor hess_u em U. Temos então

$$u_{ij}(q) = 0, \quad i \neq j, \quad \forall q \in U \tag{4.22}$$

Seja agora $q \in U$ um ponto fixado. Então $\{x_1(q), x_2(q), x_3(q)\}$ é uma base ortonormal de $T_q(M)$ formada por autovalores de $\text{hess}_u(q)$. Fazendo o transporte paralelo ao longo de geodésicas de $\{x_1(q), x_2(q), x_3(q)\}$ obtemos o referencial móvel g-ortonormal ${}^qe_1, {}^qe_2, {}^qe_3$ definido em um vizinhança de q. Todos os entes relativos ao referencial ${}^qe_1, {}^qe_2, {}^qe_3$ serão indexados por q. Por exemplo: as formas duais serão ${}^qw_i$, as formas de conexão serão ${}^qw^i_j$, e etc. Então vale:

(4.23) ${}^qw^i_j(q) = 0$

(4.24) ${}^qu_{ij}(q) = 0$ se $i \neq j$

A igualdade (4.23) nos garante que a igualdade (3.8) vale no ponto q e no referencial $\{{}^qe_1, {}^qe_2, {}^qe_3\}$, i.e.,

$$-{}^qu_i(q){}^qu_{im}(q) - {}^qu_j(q){}^qu_{jm}(q) + {}^qu_m(q){}^qu_{jj}(q) + {}^qu_m(q){}^qu_{ii}(q) - 2\sum_k {}^qu_k(q){}^qu_{km}(q) = 0$$

para i, j, m dois a dois distintos. De (4.24) concluímos:

(4.25) $${}^qu_m(q)({}^qu_{jj}(q) + {}^qu_{ii}(q)) = 2{}^qu_m(q){}^qu_{mm}(q),$$

para i, j, m distintos.

Observemos que ${}^qu_i(q) = u_i(q)$ e ${}^qu_{ij}(q) = u_{ij}(q)$ pois os referenciais ${}^qu_1, {}^qu_2, {}^qu_3$ e x_1, x_2, x_3 coincidem no ponto q.

Suponhamos que u_m seja não identicamente nula em qualquer vizinhança de p. Então existe em U uma seqüência $p_k \longrightarrow p$ tal que $u_m(p_k) \neq 0$. Se para cada $k \in N$ substituirmos q por p_k no que foi feito anteriormente, obtemos de (4.25):

$${}^{p_k}u_m(p_k)({}^{p_k}u_{jj}(p_k) + {}^{p_k}u_{ii}(p_k)) = 2\,{}^{p_k}u_m(p_k).{}^{p_k}u_{mm}(p_k),$$

para i, j, m dois a dois distintos. Logo, como ${}^{p_k}u_m(p_k) \neq 0$ e como ${}^{p_k}u_m(p_k) = u_m(p_k)$ e ${}^{p_k}u_{ij}(p_k) = u_{ij}(p_k)$ temos:

(4.26) $u_{jj}(p_k) + u_{ii}(p_k) = 2u_{mm}(p_k)$, $\forall k \in N$, i, j, m dois a dois distintos.

Como $p_k \longrightarrow p$, por continuidade $u_{jj}(p) + u_{ii}(p) = 2u_{mm}(p)$, i, j, m dois a dois distintos.

Logo, se u_m é não identicamente nulo em qualquer vizinhança de p, vale a igualdade

(4.27) $u_{jj}(p) + u_{ii}(p) = 2u_{mm}(p)$, i, j, m dois a dois distintos.

Suponhamos agora que u_1 e u_2 sejam não identicamente nulas em qualquer vizinhança de p, logo

$$\left.\begin{array}{l} u_{33}(p) + u_{22}(p) = 2u_{11}(p) \\ u_{33}(p) + u_{11}(p) = 2u_{22}(p) \end{array}\right\} \Rightarrow u_{11}(p) = u_{22}(p) = u_{33}(p)$$

o que contradiz o fato dos autovalores de $\text{hess}_u(p)$ serem distintos.

Da discussão anterior concluímos que podemos assumir, a menos de uma troca de índices, que $u_1 \equiv u_2 \equiv 0$ em uma vizinhança de p. É claro que $u_3 \not\equiv 0$ nesta vizinhança pois caso contrário $u_{11}(p) = u_{22}(p) = u_{33}(p) = 0$. Logo vale a seguinte igualdade

(4.28) $u_{11}(p) + u_{22}(p) = 2u_{22}(p)$

Por outro lado, de (A.1) e (4.22) obtemos

(4.29) $u_{11}w_1 = -u_3 w_1^3$

(4.30) $u_{22}w_2 = -u_3 w_2^3$

Como $u_3(p) = 0$, já que grad $u(p) = 0$, segue de (4.29) e (4.30) que $u_{11}(p) = u_{22}(p) = 0$. Logo, de (4.28) concluímos que $u_{11}(p) = u_{22}(p) = u_{33}(p) = 0$. Absurdo! Portanto $\text{hess}_u(p)$ não pode ter os seus autovalores dois a dois distintos.

Finalmente vamos supor que $\text{hess}_u(p)$ tem apenas dois autovalores distintos, i.e., existe um autovalor de $\text{hess}_u(p)$ que tem multiplicidade 2. Se em uma vizinhança de p este fato se repete, então podemos encontrar um referencial móvel ortonormal que diagonaliza hess_u nesta vizinhança e repetir o argumento utilizado no caso em que os autovalores eram dois a dois distintos, obtendo novamente uma contradição. Logo, como em qualquer ponto q de M os autovalores de $\text{hess}_u(q)$ não podem ser todos iguais, e pelo que foi dito imediatamente acima, existe uma seqüência $p_k \longrightarrow p$ tal que $\text{hess}_u(p_k)$ tem três autovalores distintos. Como fizemos no caso em que $\text{hess}_u(p)$ tinha três autovalores distintos, para cada $k \in N$ contruímos uma seqüência $p_m^k \longrightarrow p_k$ tal que uma relação da forma (4.27) vale entre os autovalores de $\text{hess}_u(p_n^k)$, e portanto entre os autovalores de $\text{hess}_u(p_k)$. Se em uma vizinhança de p tomarmos um referencial móvel ortonormal, podemos considerar as funções $\lambda_1(q), \lambda_2(q), \lambda_3(q)$, definidas nesta vizinhança, que a cada ponto q associa os três autovalores de $\text{hess}_u(p)$. Temos então que $\Lambda(q) = (2\lambda_1(q) - \lambda_2(q) - \lambda_3(q))(2\lambda_2(q) - \lambda_1(q) - \lambda_3(q))(2\lambda_3(q) - \lambda_1(q) - \lambda_2(q))$, pelo que foi dito acima, se anula em p_k, logo, por continuidade, $\Lambda(p) = 0$. Portanto em p vale uma relação da da forma (4.26) entre os autovalores de $\text{hees}_u(p)$. Mas dois destes autovalores já coincidem, então é imediato verificar que os três autovalores de $\text{hess}_u(p)$ são iguais. Absurdo!

Concluímos portanto que supor que $f : M \longrightarrow \overline{M}$ não é uma isometria nos conduz a uma contradição. Logo f é uma isometria.

5. DIMENSÃO 2

Quando as variedades estudadas são de dimensão 2, a teoria feita anteriormente não se aplica, pois os conceitos de ponto isotrópico e ponto não isotrópico perdem o sentido. No entanto, ainda podemos nos perguntar se um difeomorfismo que preserva a curvatura seccional (que coincide com a curvatura Gaussiana) entre duas variedades Riemannianas de dimensão 2 é ou não é uma isometria. Como no caso de dimensão 3, a responta é negativa. Construamos um contra-exemplo.

Sejam $U \subset \Re^2$ um aberto e $\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2$ os campos canônicos de $\Re^2$. Considere a métrica Riemanniana g em U que em um ponto $p \in U$, e na base $\{\partial/\partial x_1(p), \partial/\partial x_2(p)\}$ é dada pela matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & G(p) \end{pmatrix}$$

onde $G : U \longrightarrow \Re$ é uma função que para todo $p \in U$, $G(p) > 0$. Seja R o tensor de curvatura de Riemann de (U, g). Como a dimensão de T_pU é 2, existe apenas uma curvatura seccional em cada ponto, que chamaremos de K

$$\frac{g(R(\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2)\partial/\partial x_2, \partial/\partial x_1)}{g(\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_1)g(\partial/\partial x_2, \partial/\partial x_2) - g(\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2)^2} = \frac{R^1_{212}}{G} = K$$

Podemos ver que

$$K(p) = -\frac{1}{\sqrt{G(p)}}.\frac{\partial^2\sqrt{G(p)}}{\partial x_1^2} \tag{5.1}$$

para tanto basta que utilizemos as fómulas

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}\sum_m [\frac{\partial}{\partial x_i}(g_{jm}) + \frac{\partial}{\partial x_j}(g_{mi}) - \frac{\partial}{\partial x_m}(g_{ij})]g^{mk} \quad \text{e}$$

$$R^i_{jlk} = \frac{\partial}{\partial x_l}(\Gamma^i_{jk}) - \frac{\partial}{\partial x_k}(\Gamma^i_{lj}) + \sum_m(\Gamma^m_{kj}\Gamma^i_{lm} - \Gamma^m_{lj}\Gamma^i_{km})$$

onde $\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/G \end{pmatrix}$

Seja agora $\overline{g}$ uma nova métrica Riemanniana em U dada, na base $\{\partial/\partial x_1(p), \partial/\partial x_2(p)\}$, por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda G(p) \end{pmatrix}$$

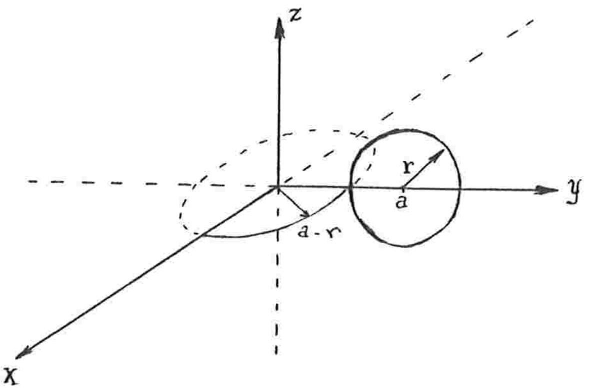
para todo $p \in U$, onde $\lambda \in \Re$, $\lambda > 1$. Se $\overline{R}$ é o tensor de curvatura de Riemann de $(U, \overline{g})$ então, como observamos anteriormente, existe uma única curvatura seccional em cada ponto que denotaremos por $\overline{K}$.

$$\overline{K}(p) = \frac{\overline{R}^1_{212}(p)}{\lambda G(p)} = -\frac{1}{\sqrt{\lambda G(p)}}.\frac{\partial^2\sqrt{\lambda G(p)}}{\partial x_1^2} = K(p)$$

Logo, Id : $U \longrightarrow U$ é um difeomorfismo que preserva a curvatura seccional das estruturas de curvatura (U, g, R) e $(U, \overline{g}, \overline{R})$, no entanto é claro que Id não é uma isometria.

No caso de dimensão 3, quando acrescentamos a hipótese de compacidade, foi possível conseguir um resultado positivo. Já quando a dimensão é 2 este fato não se repete. Vejamos um exemplo:

Seja T^2 o toro, $T^2 \simeq S^1 \times S^1$, mergulhado canonicamente em $\Re^3$, i.e., T^2 é obtido se girarmos em torno do eixo z a cópia de S^1 contida no plano yz que tem centro no ponto $(0, a, 0), a > 0$, e raio $r, 0 < r, a$.



Identificaremos T^2 com o produto $S^1 \times S^1$ onde a primeira cópia de S^1 está contida no plano xy, tem centro na origem e raio $a - r$, a segunda é a citada anteriormente. Sabemos que com a métrica induzida de $\Re^3$ a curvatura seccional de T^2, i.e., a única curvatura seccional de T^2, em cada um de seus pontos, é constante ao longo dos paralelos, ou seja, dos conjuntos da forma $S^1 \times \{q\}$. Vamos construir então um difeomorfismo $F : T^2 \longrightarrow T^2$ que preserva os paralelos, portanto a curvatura seccional, porém que não seja uma isometria.

Seja $f : S^1 \longrightarrow S^1$ um difeomorfismo que não é uma isometria, onde a estrutura Riemanniana de S^1, neste caso, está sendo considerada a induzina do plano xy. Definamos então

$$F : T^2 = S^1 \times S^1 \longrightarrow T^2 = S^1 \times S^1$$

$$(x, y) \longmapsto (f(x), y)$$

F é o difeomorfismo procurado.

6. UMA OUTRA DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE KULKARNI

Neste último parágrafo apresentaremos o esboço de uma outra demonstração do TEOREMA DE KULKARNI. Tal demonstração é essencialmente a mesma apresentada pelo próprio Kulkarni em [2].

DEFINIÇÃO : Dizemos que uma variedade Riemanniana (M, g) é conformemente raza se para todo ponto $p \in M$ existe uma vizinhança U de p e $\Phi : U \longrightarrow \Re$ tal que $g|_U = \Phi g_0$, onde g_0 é a métrica raza.

Seja (M, g, C) uma estrutura de curvatura onde (M, g) é uma variedade Riemanniana e C o seu tensor de curvatura conforme. Definimos então

$\mathrm{Ric}_C(x, y) =$ traço $\{z \longmapsto C(x, z)y\}$ e

$\mathrm{Sc}_C =$ traço Ric_{C_0}, onde Ric_{C_0} é definida pela igualdade $g(\mathrm{Ric}_{C_0}(x), y) = \mathrm{Ric}_C(x, y)$

PROPOSIÇÃO 6.1: Seja (M, g, C) uma estrutura de curvatura onde (M, g) é uma variedade Riemanniana e C o seu tensor de curvatura conforme. Então $\mathrm{Ric}_C \equiv 0$

Demonstração :

$$\mathrm{Ric}_C(x, y) = \text{traço } (z \longmapsto C(x, z)y) =$$

$$= \text{traço } (z \longrightarrow (R(x, z)y - \tfrac{1}{n-2}Ric(x, z)y - \tfrac{\mathrm{Sc}}{(n-1)(n-2)}I(x, z)y))$$

Seja $x_1, \ldots, x_n$ um referencial móvel g-ortonormal definido em um aberto U.

$$\mathrm{Ric}_C(x_i, x_j) = \mathrm{Ric}\ (x_i, x_j) - \tfrac{1}{n-2}(n.\mathrm{Ric}(x_i, x_j) - \mathrm{Ric}(x_i, x_j) + g(x_i, x_j) \text{ traço Ric} z -$$

$$- \mathrm{Ric}\ (x_i, x_j)) - \tfrac{1}{(n-1)} \cdot \tfrac{1}{(n-2)} . \mathrm{Sc}.(g(x_i, x_j) - ng(x_i, x_j)) =$$

$$= \mathrm{Ric}\ (x_i, x_j) - \tfrac{1}{n-2}((n-2)\mathrm{Ric}(x_i, x_j)) - \tfrac{1}{n-2}.g(x_i, x_j).\mathrm{Sc} + \tfrac{1}{n-2}\mathrm{Sc}.g(x_i, x_j) = 0$$

Logo $\mathrm{Ric}_C(x_i, x_j) = 0$, para todo i, j. Portanto $\mathrm{Ric}_C(x, y) = 0$, para todos os campos x, y em M. □

COROLÁRIO : Nas condições da proposição anterior temos que $\mathrm{Sc}_C \equiv 0$.

Demonstração :

$\mathrm{Sc}_C =$ traço Ric_{C_0} e Ric_{C_0} é definido pela igualdade

$g(\mathrm{Ric}_{C_0}(x), y) = \mathrm{Ric}_C(x, y)$.

Logo, pela proposição 6.1 $\mathrm{Ric}_{C_0}(x, y) \equiv 0$, portanto Sc_C também o é. □

TEOREMA 2 : Seja (M, g, C) uma estrutura de curvatura onde (M, g) é uma variedade Riemanniana de dimensão n maior ou igual a 4 e C o seu tensor de curvatura conforme. São equivalentes:

1) (M, g) é conformemente raza

2) $C \equiv 0$

3) $K_C \equiv 0$

4) para todo $p \in M$, $K_C|_{\pi^{-1}(p)} \equiv$ constante,

onde $\pi : G_2(M) \longrightarrow M$ é a projeção canônica.

Demonstração :

(1) $\Leftrightarrow$ (2)

Esta equivalência é um famoso Teorema devido a H. Weyl que não demonstraremos aqui.

(2) $\Rightarrow$ (3)

Esta implicação é imediata.

(3) $\Rightarrow$ (2)

Esta implicação segue da PROPOSIÇÃO 1.2.

(3) $\Rightarrow$ (4)

Esta implicação é imediata.

(4) $\Rightarrow$ (3)

Suponhamos que $K_C|_{\pi^{-1}(p)} \equiv \alpha$. Então pela PROPOSIÇÃO 1.3 temos que no ponto p o tensor de curvatura conforme será da forma

$C(x, y)z = \alpha.(g(y, z)x - g(x, z)y)$

Então $\mathrm{Ric}_C(x, y) =$traço $(z \longmapsto C(x, z)y)$

será $\mathrm{Ric}_C(x, y) = \alpha(g(x, y) - ng(x, y)) = -\alpha(n-1)g(x, y)$ e $\mathrm{Sc}_C =$ traço Ric_{C_0} será

$\mathrm{Sc}_C = -\alpha n(n-1)$

Pelo COROLÁRIO da PROPOSIÇÃO 6.1 $\mathrm{Sc}_C = 0$. Logo, como $n \geq 4$, concluímos que $\alpha = 0$. $\square$

Vamos agora enunciar e demonstrar um teorema semelhante ao TEOREMA DE KULKARNI, porém válido para tensor de curvatura conforme.

TEOREMA (KULKARNI no caso conforme) : Sejam (M, g, C) e $(\overline{M}, \overline{g}, \overline{C})$ duas estruturas de curvatura, C e $\overline{C}$ sendo os tensores de curvatura conforme de (M, g) e $(\overline{M}, \overline{g})$, respectivamente, e suponhamos que dim M = dim $\overline{M} \geq 3$. Seja $f : M \longrightarrow \overline{M}$ um difeomorfismo que preserva a curvatura seccional das estruturas de curvatura acima. Então f é uma isometria no fecho do conjunto dos pontos C- não isotrópicos de M.

Demonstração :

Como fizemos anteriormente vamos identificar M e $\overline{M}$ pelo difeomorfismo f. Tudo funciona bem pois $f^*(\overline{C})$ é o tensor de curvatura conforme de $(M, f^*(\overline{g}))$. Por abuso de notação continuaremos a denotar $f^*(\overline{g})$ e $f^*(\overline{C})$ em M por $\overline{g}$ e $\overline{C}$, respectivamente.

Seja N_C o conjunto dos pontos C- não isotrópicos de M. Segundo o TEOREMA 1 (bis) f é conforme em (fecho N_C), logo $\overline{g} = \lambda g$ em N_C, λ :(fecho N_C) $\longrightarrow \Re$, $\lambda(x) > 0$ para todo $x \in N_C$.

$C \equiv \overline{C}$ em (fecho N_C) pois C é um invariante conforme e $f|_{(\text{fecho} N_C)}$ é conforme.

Seja agora $p \in N_C$, $\sigma \subset T_pM$, σ um subespaço vetorial bidimensional de T_pM e $\{x, y\}$ uma base de σ.

$$K_{\overline{C}}(\sigma) = \frac{\overline{g}(\overline{C}(x,y)y, x)}{\overline{g}(x,x)\overline{g}(y,y) - \overline{g}(x,y)^2} = \frac{1}{\lambda}\frac{g(C(x,y)y,x)}{g(x,x)g(y,y) - g(x,y)^2} = \frac{1}{\lambda}K_C(\sigma)$$

(6.1) $K_{\overline{C}}(\sigma) = \frac{1}{\lambda}K_C(\sigma)$

Por outro lado, como f é um difeomorfismo que preserva a curvatura seccional das estruturas de curvatura (M, g, C) e $(\overline{M}, \overline{g}, \overline{C})$, temos

(6.2) $K_{\overline{C}}(\sigma) = K_C(\sigma)$

Como p é um ponto C-não isotrópico podemos supor que $K_C(\sigma) \neq 0$ logo, de (6.1) e (6.2) concluímos que $\lambda(p) = 1$.

Portanto $\lambda \equiv 1$ em N_C, consequentemente $\lambda \equiv 1$ em (fecho N_C). Portanto f é isometria em (fecho N_C). □

Passemos agora ao TEOREMA DE KULKARNI

TEOREMA (KULKARNI) : Sejam (M, g, R) e $(\overline{M}, \overline{g}, \overline{R})$ duas estruturas de curvatura, R e $\overline{R}$ sendo os tensores de curvatura de Riemann de (M, g) e $(\overline{M}, \overline{g})$, respectivamente, e suponhamos que dim M = dim $\overline{M} = n \geq 4$. Seja $f : M \longrightarrow \overline{M}$ um difeomorfismo que preserva a curvatura seccional. Então f é uma isometria no fecho do conjunto dos pontos não isotrópicos de M.

Demonstração :

Novamente identificaremos M e $\overline{M}$ pelo difeomorfismo f e chamaremos $f^*(\overline{g}), f^*(\overline{R})$ e $f^*(\overline{C})$ por abuso de notação, de $\overline{g}, \overline{R}$ e $\overline{C}$, respectivamente.

Definamos N_R como sendo o conjunto dos pontos R- não isotrópicos de M e N_C o conjunto dos pontos C- não isotrópicos de M.

Segue do TEOREMA 1 (bis) que f é conforme em (fecho N_R), i.e., existe ρ :(fecho N_R) $\rightarrow$ tal que $\overline{g} = e^{e\rho}g$.

Considere os subconjuntos de N_R :

$A = N_R \cap N_C$

$B = \text{int } (N_R - A)$

Temos então que (fecho N_R) = (fecho A) $\cup$ (fecho B), logo, por continuidade, para mostrarmos que f é isometria em (fecho N_R) basta mostrarmos que f é isometria em A e em B.

Como C é invariante confome e como f em A é conforme, neste conjunto a curvatura seccional das estruturas (A, g, C) e $(A, \overline{g}, \overline{C})$ são iguais. Como todos os pontos de A são C-não isotrópicos, pelo teorema anterior concluímos que f é isometria em A.

Em B todos os pontos são C- isotrópicos o que, segundo o TEOREMA 2, é equivalente à métrica g ser conformemente raza. Tratando o problema localmente temos em um aberto $U \subset B$ suficientemente pequeno as seguintes igualdades:

$\overline{g} = e^{2\rho}g$

$g = e^{2\phi}g_0$, onde $\phi : U \longrightarrow \Re$ e g_0 é a métrica raza.

Com auxílio do LEMA abaixo acabaremos esta demonstração.

LEMA : Suponhamos que em um ponto $p \in B \subset M$ grad $\rho(p) \neq 0$. Então p é um ponto R- isotrópico.

Devemos observar que este LEMA é muito semelhante ao LEMA que apareceu na primeira demonstração do TEOREMA DE KULKARNI. Em [2] Kulkarni demonstra este LEMA utilizando fortemente o fato da métrica g ser conformemente raza. Não apresentamos aqui tal demonstração.

Como em B todos os pontos são R- não isotrópicos concluímos pelo LEMA que grad $\rho \equiv 0$ em B. A conclusão desta demonstração é idêntica à da primeira demonstração do TEOREMA DE KULKARNI: podemos supor que $e^{-\rho} \equiv K_0 > 0$. É fácil verificarmos que $\Omega^i_j = \overline{\Omega}^i_j$ onde estas são respectivamente as formas de curvatura de um dado referencial móvel g-ortonormal $x_1, \ldots, x_n$ e do referencial $\overline{g}$-ortonormal $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n, \overline{x}_i = e^{-\rho} x_i$. Também é fácil verificarmos que $K_0 \overline{\Omega}^i_j = \Omega^i_j$. Logo, como B só contém pontos R- não isotrópicos segue que Ω^i_j não é identicamente nula, e portanto $K_0 = 1$. Logo f é isometria em B. $\square$

APÊNDICE

Sejam (M,g) uma variedade Riemanniana, ∇ a sua conexão de Levi-Civita e $\rho : M \longrightarrow \Re$ uma função. Definimos o hessiano de ρ, e denotamo-lo por hess_ρ, da seguinte maneira:

$\text{hess}_\rho : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow C^r(M)$ tal que

$\text{hess}_\rho(x,y) = yx\rho - (\nabla_y x)\rho = yg(x, \text{grad } \rho) - (\nabla_y x)\rho = g(x, \nabla_y(\text{grad } \rho))$

i) hess_ρ é um campo tensorial de tipo (0, 2)

ii) hess_ρ é simétrico pois

$\text{hess}_\rho(y,x) = xy\rho - (\nabla_x y)\rho = xy\rho - [x,y]\rho - \nabla_y x\rho = yx\rho - (\nabla_y x)\rho = \text{hess}_\rho(x,y)$

Seja agora $x_1, \ldots, x_n$ um referencial móvel ortonormal em um aberto $U \subset M$. Sejam w_i, w^i_j e Ω^i_j as formas duais, de conexão e de curvatura, respectivamente. Como de costume, definimos os símbolos de Christoffel através da igualdade

$$\nabla_{x_i} x_j = \sum_k \Gamma^k_{ij} x_k$$

Então

$\text{hess}_\rho(x_i, x_j) = x_j x_i \rho - (\nabla_{x_j} x_i)\rho = x_j x_i \rho - \sum_k \Gamma^k_{ji} x_k \rho$

Definamos $\rho_{ij} = \text{hess}_\rho(x_i, x_j)$ e $\rho_i = x_i \rho$. Temos:

$\sum_k \rho_{jk} w_k = \sum_k (x_k x_j \rho - \sum_p \Gamma^p_{kj} x_p \rho) w_k =$

$= \sum_k x_k \rho_j w_k - \sum_p (\rho_p \sum_k \Gamma^p_{kj} w_k) = d\rho_j - \sum_p \rho_p w^p_j \quad \therefore$

$$(A.1) \qquad \sum_k \rho_{jk} w_k = d\rho_j \sum_k \rho_k w^k_j$$

Vejamos agora dois outros campos tensoriais que nos serão úteis.

I) Seja $v \in \mathfrak{X}(M)$ fixado. Definimos

$B_v : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow C^r(M)$ como sendo

$B_v(x,y) = g(\nabla_y v, x)$

Se tomarmos novamente o referencial móvel ortonormal $x_1, \ldots, x_n$ em U e definirmos $v_{ij} = B(x_i, x_j)$ e $v = \sum v_i x_i$ então é fácil ver que

$$(A.2) \qquad \sum_k v_{ik} w_k = dv_i - \sum_k v_k w_i^k$$

Devemos observar que se $v = \text{grad}\ \rho$, então $B_v = \text{hess}_\rho$.

II) Novamente, seja $v \in \mathfrak{X}(M)$ fixado. Definamos

$T_v : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow C^r(M)$ como sendo

$T_v(x, y, z) = g(\nabla_z \nabla_y(v) - \nabla_{\nabla_z y}(v), x)$

Definamos $v_{ijk} = T(x_i, x_j, x_k)$. Temos as igualdades:

$$(A.3) \qquad \sum_k v_{ijk} w_k = dv_{ij} - \sum_k v_{jk} w_i^k - \sum_k v_{ik} w_j^k$$

Para verificarmos esta igualdade basta fazer as contas em coordenadas

(A.4) $\sum_{j,k} v_{ikj} w_j \wedge w_k = -\sum_k v_k \Omega_i^k$

(A.5) $-\sum_m v_m R_{ijk}^m = v_{ikj} - v_{ijk}$

Vamos demonstrar (A.5)

$v_{ikj} - v_{ijk} = T(x_i, x_k, x_j) - T(x_i, x_j, x_k) =$

$= g(\nabla_{x_j} \nabla_{x_k}(v) - \nabla_{\nabla_{x_j} x_k}(v), x_i) - g(\nabla_{x_k} \nabla_{x_j}(v) - \nabla_{\nabla_{x_k} x_j}(v), x_i) =$

$= g(\nabla_{x_j} \nabla_{x_k}(v) - \nabla_{x_k} \nabla_{x_j}(v) + \nabla_{\nabla_{x_k} x_j}(v) - \nabla_{\nabla_{x_j} x_k}(v), x_i) =$

$g(R(x_j, x_k)v, x_i) = \sum_m v_m g(R(x_j, x_k)x_m, x_i) = \sum_m v_m R_{mjk}^i = -\sum v_m R_{ijk}^m$

Vamos demonstrar (A.4) com auxílio de (A.5).

$\sum_{j,k} v_{ikj}\, w_j \wedge w_k = \sum_{j,k} (v_{ijk} - \sum_m v_m R_{ijk}^m) w_j \wedge w_k =$

$= \sum_{j,k} v_{ijk}\, w_j \quad \wedge w_k - \sum_{j,k,m} v_m R_{ijk}^m)\, w_j \wedge w_k =$

$$\sum_{j,k} v_{ijk}\, w_j \quad \wedge w_k - 2\sum_{m} v_m \Omega_i^m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{j,k} v_{ikj}\, w_j \wedge w_k - \sum_{j,k} v_{ijk}\, w_j \wedge w_k = -2\sum_{m} v_m \Omega_i^m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{j,k} v_{ikj}\, w_j \wedge w_k + \sum_{j,k} v_{ijk}\, w_j \wedge w_k = -2\sum_{m} v_m \Omega_i^m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{j,k} v_{ikj}\, w_j \wedge w_k = \sum_{m} v_m \Omega_i^m$$

BIBLIOGRAFIA

[1] CARMO, M. P. do, **Geometria Riemanniana**, IMPA, Rio de Janeiro, 1979.

[2] KULKARNI, R. S., **Curvature and Metric**, Ann. of Math., 91 (1970).

[3] KULKARNI, R. S., **Curvature Structures and Conformal Transformations**, J. Diff. Geom., 4 (1970).

[4] SPIVAK, M., **Comprehensive Introduction do Differential Geometry**, Vol. 1, 2, Publish or Perish, Boston, 1970.

[5] YAU, S. T., **Curvature Preserving Diffeomorphisms**, Ann. of Math., 100 (1974).