

~~FOLHEAÇÕES RIEMANNIANAS~~

SINGULARES

Roberto Correa da Silva

Tese Apresentada ao
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
da
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
para a obtenção do grau de doutor em matemática

Orientador: Prof. Dr. Francisco Rui Tavares de Almeida

São Paulo, junho de 1993.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Prof. Francisco Rui T. Almeida pela orientação, cujas discussões proveitosas tornaram possível este trabalho; ao Prof. P. Molino por ter sugerido o estudo de folheações riemannianas singulares; ao Prof. J.L. Arraut pelas críticas e sugestões.

Também agradeço a atenção e apoio que recebi de professores e funcionários do IME-USP.

RESUMO

Estudamos as folheações riemannianas singulares sobre as variedades compactas e conexas. Um modelo para tais folheações é o dado pelas órbitas de uma ação diferenciável $H \times M \longrightarrow M$, onde $H \subset Isom(M)$ é um subgrupo de Lie conexo e M uma variedade conexa.

Mais especificamente, conseguimos resultados locais e globais sobre folheações riemannianas singulares cujas únicas folhas singulares são de dimensão zero. Este tipo de folheação é interessante, pois inclui o caso de fluxos riemannianos singulares. Além disso, classificamos os fluxos riemannianos singulares sobre as variedades de dimensão 3 e descrevemos os fluxos riemannianos singulares sobre as variedades de dimensão 4.

ABSTRACT

We study the singular riemannian foliations over compact connected manifolds. A model for these foliations is given by the orbits of a differentiable action $H \times M \longrightarrow M$, where H is a connected Lie subgroup of the group of isometries of the connected manifold M .

More specifically, we obtain local and global results about singular riemannian foliations which have only dimension zero singular leaves. This type of foliations is interesting, because it includes the case of singular riemannian flows. Moreover, we classify the singular riemannian flows over 3-manifolds and describe the singular riemannian flows over 4-manifolds.

INDICE

	pag
Introdução	1
Capítulo I . Folheações Singulares	6
Capítulo II . Folheações Riemannianas Singulares	12
Capítulo III . Folheações Riemannianas Singulares cujas únicas folhas singulares são de dimensão zero	31
Capítulo IV . Fluxos Riemannianos Singulares sobre as 3 e 4-variedades	50
Bibliografia	76

INTRODUÇÃO

Uma folheação singular \mathcal{F} em uma variedade M é uma partição de M por subvariedades imersas e conexas (folhas) tal que o módulo dos campos de vetores C^∞ , tangentes as folhas é transitivo quando restrito as folhas (ver [Mol]₂). Uma folheação riemanniana singular é uma folheação singular \mathcal{F} em M tal que existe uma métrica riemanniana g em M , cujas geodésicas que são perpendiculares a uma folha em um ponto desta folha, permanecem perpendiculares a cada folha por elas interceptadas, tal métrica riemanniana é chamada de métrica adaptada a \mathcal{F} . Este tipo de folheação é uma generalização de folheações riemannianas, e aparecem em várias situações, como por exemplo sendo dada pelas órbitas de uma ação diferenciável de um Grupo de Lie compacto.

Neste trabalho estudamos as folheações riemannianas singulares.

No capítulo I enunciamos os resultados de Sussmann ([Sus]) e Stefan ([Ste]) sobre o teorema generalizado de Frobenius. Tal teorema considera uma distribuição diferenciável sobre M , que pode apresentar singularidades, e as condições equivalentes para que esta distribuição possua a propriedade

de variedades integrais maximais. Neste contexto as subvariedades integrais maximais podem ter diferentes dimensões. Uma folheação singular (no sentido de Sussmann-Stefan) é uma partição \mathcal{F} de M por subvariedades integrais maximais de uma distribuição que verifica uma das condições equivalentes do teorema generalizado de Sussmann-Stefan. Ainda no capítulo I mostramos a equivalência entre as definições de Molino e Sussmann-Stefan.

No capítulo II apresentamos os resultados de Molino sobre folheações riemannianas singulares que serão necessárias no desenvolvimento deste trabalho. Neste capítulo não pretendemos dar uma exposição exaustiva sobre tais assuntos, para tanto recomendamos a referência bibliográfica [Mol]₂.

Nossa contribuição a esta teoria está nos capítulos III e IV.

No capítulo III tratamos das folheações riemannianas singulares cujas únicas folhas singulares são de dimensão zero, isto é, folheações riemannianas singulares com dois tipos de folhas: as folhas regulares (=as folhas de dimensão máxima) e pontos. Este tipo de folheações generaliza consideravelmente o caso de fluxos riemannianos singulares.

Seguem abaixo os principais resultados deste capítulo.

Molino (capítulo II) mostra que o estudo local das folhas singulares pode ser reduzido ao estudo de uma folheação riemanniana singular em \mathbb{R}^n cuja origem é uma folha singular e a métrica canônica em \mathbb{R}^n é adaptada a esta folheação. Isto justifica a importância do seguinte teorema:

Teorema 3.1. Se $(\mathbb{R}^n, \mathcal{F}^m)$ é uma m -folheação riemanniana singular cujas únicas folhas singulares são de dimensão zero, $m \leq 3$, a métrica canônica do \mathbb{R}^n sendo uma métrica adaptada a \mathcal{F}^m e a origem do \mathbb{R}^n sendo uma folha singular, então existem um subgrupo de Lie conexo $H \subset SO(n)$ e uma ação linear $\psi : H \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que as folhas de \mathcal{F}^m são as órbitas de ψ .

Nas condições do teorema acima com $m > 3$, o problema permanece em aberto.

Obtemos um resultado em esferas euclidianas a exemplo de um resultado do artigo de [Grom-Grov], que é o seguinte:

Teorema 3.10. Seja (S^n, \mathcal{F}^m) uma m -folheação riemanniana singular, $m \leq 3$, sobre a esfera euclidiana S^n , cujas únicas folhas singulares são de dimensão zero, $\Sigma_0 \neq \emptyset$. Então existem um subgrupo de Lie conexo $H \subset SO(n+1)$ e uma ação linear $\varphi : H \times S^n \rightarrow S^n$ tal que as órbitas de φ são as folhas de \mathcal{F}^m .

Quando a dimensão da folha regular é maior do que um, obtemos o resultado que descreve as folhas regulares numa vizinhança de uma folha singular. Além disso, mostramos que neste caso ($m > 1$), todas as folhas regulares em M são fechadas.

Nas folheações estudadas no capítulo III, analisamos as possíveis dimensões do estrato singular (neste caso, também chamado de estrato mini-

mal), isto é, as possíveis dimensões da subvariedade cujos pontos são folhas singulares de \mathcal{F} . Mostramos que tais dimensões dependem da dimensão das folhas regulares e da dimensão de M .

No capítulo IV, estudamos os fluxos riemannianos singulares sobre as variedades de dimensão três e quatro. Este estudo é proposto em [Mol]₁. O objetivo é classificar tais fluxos a exemplo dos trabalhos de Y. Carriere ([Car]) e R. Almeida-P. Molino ([Alm- Mol]), sobre fluxos riemannianos (regulares).

Os fluxos riemannianos singulares sobre as 3-variedades são classificados através do resultado onde mostramos que se (M^3, \mathcal{F}) é um fluxo riemanniano singular, $\sum_0 \neq \emptyset$, sobre M^3 compacta, conexa e orientável então \mathcal{F} é dada pelas órbitas de uma ação efetiva diferenciável $\varphi : S^1 \times M^3 \rightarrow M^3$. Agora, usando o trabalho de Raymond ([Ray]) sobre ações do S^1 em 3-variedades, obtemos uma classificação de tais 3-variedades e folheações \mathcal{F} , isto é, se (M^3, \mathcal{F}) é um fluxo riemanniano singular com $\sum_0 \neq \emptyset$, então M^3 é difeomorfa a soma conexa

$$S^3 \# (S^2 \times S^1) \# \dots \# (S^2 \times S^1)_{2g+h-1} \# L_{(\alpha_1, \beta_1)} \# \dots \# L_{(\alpha_k, \beta_k)},$$

onde g é o gênero da 2-variedade topológica M/\mathcal{F} , h o número de componentes conexas do estrato minimal, $L_{(\alpha_i, \beta_i)}$ um espaço lenticular, k o número de folhas com holonomia. \mathcal{F} é dada pelas órbitas de uma ação efetiva diferenciável do S^1 , representada pela $(2k+2)$ -upla de números inteiros

$$(g, h, (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_k, \beta_k)).$$

Sobre as 4-variedades obtemos o seguinte resultado:

Teorema 4.26. Seja (M^4, \mathcal{F}) um fluxo riemanniano singular sobre M^4 compacta e conexa, $\Sigma_0 \neq \emptyset$, então teremos os seguintes dois casos:

a) se todas as folhas forem fechadas, então \mathcal{F} é dado pelas órbitas de uma ação topológica $\varphi : S^1 \times M^4 \longrightarrow M^4$, onde φ restrita ao estrato regular é diferenciável.

b) se houver folha não fechada, então $\Sigma_0 = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ e $(M - \cup_{i=1}^k V_{r_i}^{x_i}, \mathcal{F})$ é a restrição de um fluxo riemanniano regular descrito em [Alm-Mol] com folhas regulares de $\overline{\mathcal{F}}$ de dimensão 2 e para cada $i = 1, \dots, k$, $(V_{r_i}^{x_i}, \mathcal{F})$ é dado por uma ação linear

$$H \times B^4 \longrightarrow B^4,$$

onde $H \subset T^2$ é um subgrupo de Lie conexo de dimensão 1 tal que $\overline{H} = T^2$ e B^4 é a bola aberta em \mathbb{R}^4 .

CAPITULO I

FOLHEAÇÕES SINGULARES

Apresentaremos neste capítulo o teorema generalizado de Frobenius (ver [Sus], [Ste]) e as definições equivalentes de folheações singulares.

Neste trabalho sempre consideraremos as variedades como sendo de classe C^∞ , sem bordo. Sempre que houver variedade com bordo será explicitado no texto. A diferenciabilidade será no sentido C^∞ . Assumiremos conhecida a teoria de folheações ([Cam-Lins], [Law]).

Uma *distribuição* Δ numa variedade M , é uma aplicação que a cada $m \in M$ associa um subespaço $\Delta(m)$ do espaço tangente $T_m M$. Um campo de vetores X em M pertence a Δ se para todo $m \in M$, $X(m) \in \Delta(m)$. Δ é C^∞ se para todo $m \in M$, obtemos um número finito de campos de vetores C^∞ de Δ , $(X_i)_{1 \leq i \leq k}$, k dependendo de m , tal que $\Delta(m)$ é gerado pelos $X_i(m)$.

Uma *variedade integral* S de Δ é uma subvariedade imersa e conexa de M tal que para todo $x \in S$, $T_x S = \Delta(x)$. Uma variedade integral S é

dita *maximal* se ela contém toda variedade integral que intercepta. Δ tem a *propriedade de variedade integral* (maximal) se para cada $m \in M$ existe uma variedade integral (maximal) de Δ S tal que $m \in S$.

Se X é um campo de vetores C^∞ denotaremos X^t o grupo a 1-parâmetro associado a X .

Teorema Generalizado de Frobenius 1.1 ([Sus], [Ste]). Seja M uma variedade e Δ uma distribuição diferenciável em M . Então as seguintes condições são equivalentes:

- a) Δ tem a propriedade de variedade integral.
- b) Δ tem a propriedade de variedade integral maximal.
- c) Δ é invariante, isto é para todo $X \in \Delta$, $t \in \mathbb{R}$, $m \in M$, tal que $X^t(m)$ está definida, então dX^t aplica $\Delta(m)$ sobre $\Delta(X^t(m))$.
- d) Para cada $m \in M$, existem elementos diferenciáveis X_1, \dots, X_k de Δ tais que:

1) $\Delta(m)$ é gerado por $X_1(m), \dots, X_k(m)$, e

2) Para todo $X \in \Delta$, existe $\varepsilon > 0$ e funções diferenciáveis f_j^i , $1 \leq i, j \leq k$, definidas no intervalo aberto $(-\varepsilon, \varepsilon)$, satisfazendo:

$$[X, X_i](X^t(m)) = \sum_{j=1}^k f_j^i(t) \cdot X_j(X^t(m))$$

para $-\varepsilon < t < \varepsilon$, $i = 1, \dots, k$.

O corolário a seguir mostra que o teorema 1.1 realmente generaliza o teorema de Frobenius Clássico.

Corolário 1.2. ([Sus],[Ste]). Seja Δ uma distribuição diferenciável em M tal que a dimensão k de $\Delta(m)$ é independente de m . Então, Δ tem a propriedade de variedade integral maximal, se e sómente se Δ é involutiva.

Definição 1.3. (ver [Daz]) Uma *folheação singular* \mathcal{F} de M , é uma partição \mathcal{F} de M por variedades integrais maximais de uma distribuição Δ que verifica uma das condições equivalentes do teorema 1.1. Diremos que esta definição de folheação singular é no sentido de Sussmann-Stefan.

Definição 1.4. ([Mol]₁,[Mol]₂) Uma partição \mathcal{F} de M por subvariedades imersas e conexas (folhas) é uma *folheação singular* se o módulo $\mathcal{X}(\mathcal{F})$ dos campos de vetores diferenciáveis tangentes as folhas é transitivo quando restrito a cada folha, isto é, para cada $m \in M$ e $v \in T_m\mathcal{F}$ existe $X \in \mathcal{X}(\mathcal{F})$ com $X(m) = v$.

Observação 1.5. Chamaremos de folheação regular ou simplesmente folheação à folheação singular cujas folhas são todas de mesma dimensão.

Proposição 1.6. As definições 1.3 e 1.4 são equivalentes.

Demonstração. Seja \mathcal{F} uma folheação singular no sentido de Sussmann- Stefan (definição 1.3). É suficiente verificar que $\mathcal{X}(\mathcal{F})$ é transitivo quando restrito as variedades integrais maximais da distribuição que

define \mathcal{F} . Dado $p \in M$ e $v_p \in T_p\mathcal{F}$, pela condição d) do teorema 1.1 existem X_1, \dots, X_k campos de vetores diferenciáveis tangentes as variedades integrais maximais tais que $v_p = \lambda_1 X_1(p) + \dots + \lambda_k X_k(p)$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, k$. Seja $Y = \lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_k X_k$. Então Y é tangente a \mathcal{F} e $Y(p) = v_p$, logo o módulo $\mathcal{X}(\mathcal{F})$ é transitivo quando restrito a cada variedade integral maximal de \mathcal{F} .

Seja \mathcal{F} uma folheação singular no sentido de Molino (definição 1.4). Definimos a distribuição Δ da seguinte maneira: para cada $p \in M$ seja $\Delta(p) = T_p\mathcal{F}$. A distribuição Δ é diferenciável, pois para cada $p \in M$ podemos usar a transitividade de $\mathcal{X}(\mathcal{F})$ quando restrito a cada folha, para conseguir campos de vetores diferenciáveis X_1, \dots, X_k pertencentes a $\mathcal{X}(\mathcal{F})$ tais que $\Delta(p)$ é gerado pelos vetores $X_1(p), \dots, X_k(p)$. A distribuição diferenciável Δ tem a propriedade de variedade integral, pois \mathcal{F} é uma partição de M por subvariedades imersas e conexas. Portanto satisfaz a definição 1.3. \square

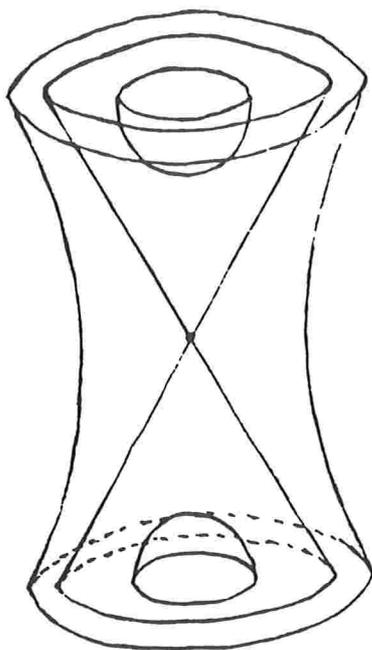
Exemplos

1) Consideremos a partição \mathcal{F} do \mathbb{R}^2 dada pelas subvariedades: a origem e as semi-retas radiais.

As folhas de \mathcal{F} são as órbitas do campo $X(x_1, x_2) = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$, \mathcal{F} verifica as condições da definição 1.4.

2) Seja M uma variedade conexa e w uma 1-forma fechada definida em M , com singularidades e $\text{sing } w = \{x \in M / w(x) = 0\}$. Então (ver por

exemplo [Cam-Lins]) as folhas de w em M -sing w , definem uma folheação regular de codim 1. Logo as folhas de w definem uma folheação singular em M , pois nas singularidades (folhas de dimensão zero) o módulo dos campos de vetores diferenciáveis tangentes as órbitas de w é trivialmente transitivo quando restrito a estas órbitas. Como caso particular consideremos em \mathbb{R}^3 a 1-forma fechada dada por $w(x_1, x_2, x_3) = x_1 dx_1 + x_2 dx_2 - x_3 dx_3$, as folhas de w são as componentes conexas das superfícies de nível de $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 - x_3^2)$. As folhas de w são ilustradas a seguir.



3) Consideremos o toro sólido $S^1 \times D^2$ e \mathcal{F}_1 uma partição de $S^1 \times D^2$ dadas pelas subvariedades $S^1 \times S^1_\alpha$ e $S^1 \times \{0\}$, onde

$S^1_\alpha = \{(\alpha, \theta) \in D^2 / \alpha \text{ fixo}\}$, esta partição forma uma folheação singular \mathcal{F}_1 . Colando dois toros sólidos, ambos com a mesma folheação \mathcal{F}_1 , teremos

$$M = (S^1 \times D^2) \cup_f (S^1 \times D^2),$$

onde $f : T^2 \rightarrow T^2$ é um difeomorfismo. Obtemos assim uma folheação singular em uma 3-variedade compacta e conexa. Em particular, folheações singulares em 3-variedades compactas e conexas de gênero 1.

CAPITULO II

FOLHEAÇÕES RIEMANNIANAS SINGULARES

O objetivo deste capítulo é apresentar os principais resultados obtidos por Pierre Molino sobre folheações riemannianas singulares. Em [Mol]₂ há uma abordagem completa sobre este assunto, o que faremos aqui é destacar alguns resultados que serão utilizados nos capítulos III e IV.

Seja M uma variedade diferenciável riemanniana.

Definição 2.1. ([Mol]₁, [Mol]₂). Uma *folheação riemanniana singular* em M é uma partição \mathcal{F} de M tal que:

- 1) \mathcal{F} é uma folheação singular em M ; e
- 2) existe uma métrica riemanniana g em M , tal que toda geodésica que é perpendicular a uma folha em um ponto desta folha, permanece perpendicular a toda folha por ela interceptada.

Observação 2.2. A métrica riemanniana no item 2) da definição 2.1 é dita *métrica adaptada* a \mathcal{F} . No caso de \mathcal{F} ser uma folheação riemanniana

singular cujas folhas tenham mesma dimensão, diremos que \mathcal{F} é uma *folheação riemanniana regular* ou simplesmente *folheação riemanniana*. Neste caso a métrica adaptada a \mathcal{F} é uma métrica quase-fibrada (ver [Mol]₂). Historicamente, primeiro foi definido e estudado as folheações riemannianas (1959,[Rei]), e posteriormente generalizadas para folheações riemannianas singulares (1986-88, [Mol]₁ e [Mol]₂, ver também [Bol]).

Denotaremos uma folheação riemanniana singular \mathcal{F} em M pelo par (M, \mathcal{F}) , outras vezes para deixar claro que a métrica riemanniana g é adaptada a \mathcal{F} escreveremos (M, \mathcal{F}, g) .

Vizinhança Tubular

Sejam $x_0 \in M$, S uma subvariedade imersa de M e P uma subvariedade aberta relativamente compacta e conexa de S . Consideremos a aplicação exponencial de P

$$\exp_P : B_r^P \longrightarrow M,$$

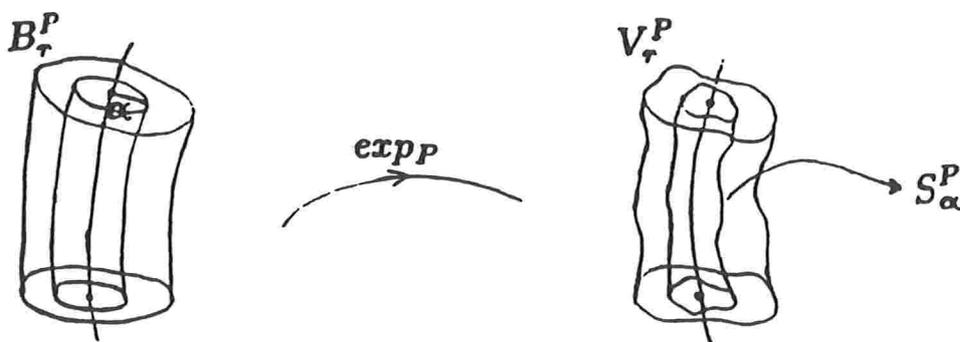
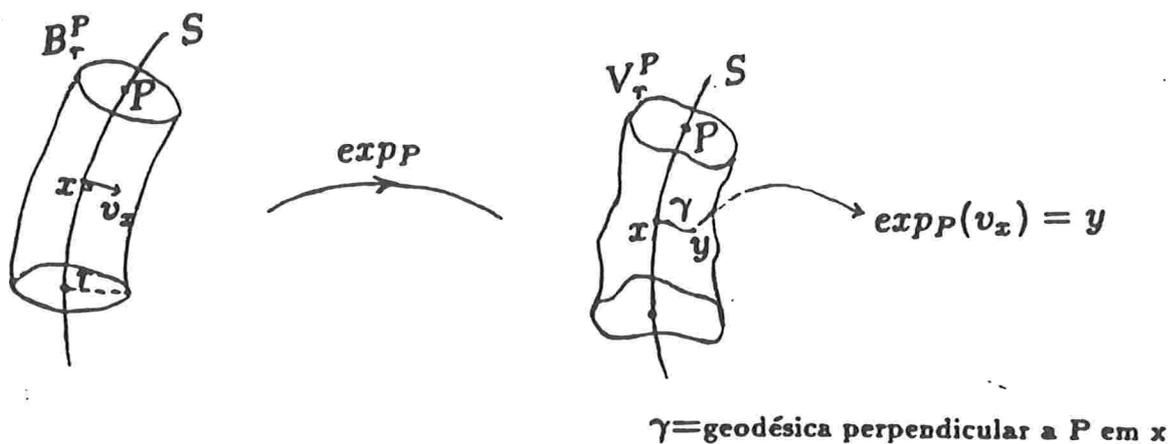
onde B_r^P é o fibrado de bolas abertas sobre P de raio r contido no fibrado normal de P (com respeito a g).

Para um r suficientemente pequeno, \exp_P define um difeomorfismo sobre sua imagem $\exp_P(B_r^P)$ (ver [Spiv], vol.I). Denotaremos $V_r^P = \exp_P(B_r^P)$ a vizinhança tubular de P com raio r . A vizinhança tubular possui as seguintes propriedades:

a) se $v_x \in B_r^P$ e $y = \exp_P(v_x)$, então $d(y, P) = \text{módulo de } v_x$. Isto quer dizer que a distância de y a P é realizada pela geodésica que é perpendicular a P em x .

b) a projeção ortogonal $\pi : V_r^P \rightarrow P$, é um fibrado localmente trivial cuja fibra é uma bola aberta $D^{n-k}(0, r) \subset \mathbb{R}^{n-k}$, onde $n = \dim M$ e $k = \dim P$.

c) a subvariedade de M de codim 1 $S_\alpha^P = \{x \in V_r^P / d(x, P) = \alpha\}$ é chamada de tubo de raio α . A distância entre $x \in P$ e o tubo é realizada por cada geodésica que é perpendicular a P em x .



Exemplos:

2.3 Folheações Riemannianas Singulares Modelo. ([Mol]₂) Sejam (M, g) uma variedade diferenciável riemanniana, $H \subset Isom(M, g)$ um subgrupo de Lie conexo e \mathcal{F} a partição de M pelas órbitas da ação

$$\varphi : H \times M \longrightarrow M$$

definida por $\varphi(h, x) = h(x)$. Então (M, \mathcal{F}) é uma folheação riemanniana singular, chamada de *folheação riemanniana singular modelo*. De fato, vemos que \mathcal{F} em M satisfaz a definição 2.1. Da teoria de ações de grupos de Lie, segue que as órbitas de φ são subvariedades imersas e conexas de M . Seja $\mathcal{X}(\mathcal{F})$ o módulo dos campos de vetores diferenciáveis tangentes em cada ponto as órbitas correspondentes. Vamos mostrar que \mathcal{F} é uma folheação singular.

Sejam λ um elemento da álgebra de Lie \mathcal{H} de H e X_λ o correspondente campo de vetores fundamental de M , nestas condições temos que $X_\lambda \in \mathcal{X}(\mathcal{F})$. Como os campos de vetores fundamentais formam uma álgebra de Lie transitiva quando restrita a cada órbita, segue que $\mathcal{X}(\mathcal{F})$ é transitivo quando restrito a cada órbita, logo pela definição 1.4 \mathcal{F} é uma folheação singular.

Vamos mostrar que a métrica riemanniana g em M é adaptada a \mathcal{F} . Seja $\gamma :]0, 1[\longrightarrow M$ uma geodésica maximal com respeito a g . Suponhamos que γ é ortogonal a órbita L_{x_0} no ponto $x_0 = \gamma(t_0)$, $t_0 \in]0, 1[$.

Seja

$\Omega = \{ t \in]0, 1[\mid \gamma \text{ é perpendicular a } L_{\gamma(t)} \text{ no ponto } \gamma(t) \}$.

Ω é fechado em $]0, 1[$, pois para uma sequência $t_n \rightarrow t_0$, com $t_n \in \Omega$, $\forall n$, temos que:

$$0 = \lim_{t_n \rightarrow t_0} g(X_{\lambda_i}(t_n), \gamma'(t_n)) = g(X_{\lambda_i}(t_0), \gamma'(t_0)), \quad i = 1, \dots, k,$$

onde $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ é uma base para álgebra de Lie \mathcal{H} , portanto $t_0 \in \Omega$.

Para ver que Ω é aberto em $]0, 1[$, tome $x = \gamma(t)$, $t \in \Omega$, uma vizinhança aberta relativamente compacta P_x de x contida na órbita L_x passando por este ponto e uma vizinhança tubular $V_{r_0}^{P_x}$. Seja $y \in V_{r_0}^{P_x}$ com $d(y, P_x) = r$, e P_y a componente conexa de y contida em $L_y \cap V_{r_0}^{P_x}$. Como a ação de φ respeita distância, os pontos vizinhos de y em P_y estão também a uma distância r de P_x . Isto quer dizer que a distância de P_x a P_y é constante. O que implica $P_y \subset S_r^{P_x}$, onde $S_r^{P_x} =$ conjunto dos pontos de $V_{r_0}^{P_x}$ que estão a uma distância r de P_x . Disto segue que se a geodésica γ corta y , então P_y é ortogonal a esta geodésica. Logo conseguimos uma vizinhança U de t em $]0, 1[$ tal que $\gamma(t')$ é ortogonal as folhas $P_{\gamma(t')}$, para todo $t' \in U$.

Como Ω é fechado e aberto em $]0, 1[$ temos que $\Omega =]0, 1[$. Portanto g é uma métrica adaptada a \mathcal{F} .

Como caso particular de 2.3, obtemos folheações riemannianas singulares em \mathbb{R}^n dadas pelas órbitas de ações $\varphi : H \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, com $H \subset SO(n)$ sendo um subgrupo de Lie conexo.

2.4. Fecho de uma folheação riemanniana regular. Se (M, \mathcal{F}) é uma folheação riemanniana regular e M uma variedade compacta e conexa, então o fecho das folhas de \mathcal{F} em M forma uma folheação riemanniana singular (ver [Mol]₂, pg 191).

2.5. Folheação riemanniana singular dada pelas órbitas de uma ação diferenciável de um grupo de Lie compacto e conexo. Seja $\varphi : G \times M \rightarrow M$ uma ação diferenciável com grupo de Lie G compacto e conexo e M uma variedade conexa, segue (por exemplo [Bre]) que existe métrica riemanniana g em M tal que G se comporta como subgrupo de Lie de $Isom(M, g)$. Pelo exemplo 2.3, as órbitas de φ formarão uma folheação riemanniana singular \mathcal{F} , onde g é a métrica adaptada a \mathcal{F} . Como casos particulares, teremos inúmeros exemplos dados nos trabalhos de [Orl-Ray]₁ e [Orl-Ray]₂ de ações do S^1 em 3-variedades e ações do toro T^2 em 4-variedades, respectivamente.

2.6. Nappes de uma folheação totalmente geodésica. Seja \mathcal{F} uma folheação totalmente geodésica (ver [Cai]) em uma variedade riemanniana completa M . Para $x \in M$, seja $P(x)$ o conjunto dos pontos de M que podem ser unidos a x por uma curva horizontal a \mathcal{F} (chamada também de "nappe" de \mathcal{F} em x). Blumenthal e Hebda ([Blu-Heb]) mostram que os nappes de \mathcal{F} definem um sistema transnormal (ver [Bol]) em M , decorre deste trabalho que os nappes de \mathcal{F} definem uma folheação riemanniana singular em M . Ademais, se M é compacta então os fechos dos nappes de \mathcal{F} definem também uma folheação riemanniana singular em M .

Vizinhança tubular distinguida e transformação homotética

No restante deste capítulo consideraremos M uma n -variedade compacta e conexa. Seja (M, \mathcal{F}, g) uma folheação riemanniana singular.

Seja $x_o \in M$ e P uma vizinhança aberta relativamente compacta e conexa de x_o contida na folha L_{x_o} .

Diminuindo r , se necessário, podemos assumir que em cada ponto y de V_r^P , a folha L_y passando por este ponto é transversa a fibra $J_x = \pi^{-1}(x)$, onde $\pi(y) = x$. Como a métrica riemanniana g é adaptada a \mathcal{F} temos que as geodésicas perpendiculares a P permanecem perpendiculares as folhas, segue que se $d(y, P) = \alpha$ então o espaço tangente a folha L_y esta contido no espaço tangente ao tubo S_α^P , onde $S_\alpha^P = \{x \in V_r^P / d(x, P) = \alpha\}$, logo a componente conexa P_y de y contida em $L_y \cap V_r^P$ esta inteiramente contida no tubo S_α^P de raio α . Diremos que P_y é a *placa* de \mathcal{F} passando por y . Em particular, P é a placa de x_o . Diremos também que V_r^P é uma *vizinhança tubular distinguida* de x_o .

Observações:

1) A projeção $\bar{\pi} : P_y \longrightarrow P$ é uma submersão sobrejetiva e as transversais $J_x = \bar{\pi}^{-1}(x)$ cortam todas as placas, $x \in V_r^P$. (ver [Mol]₂ lema 6.1).

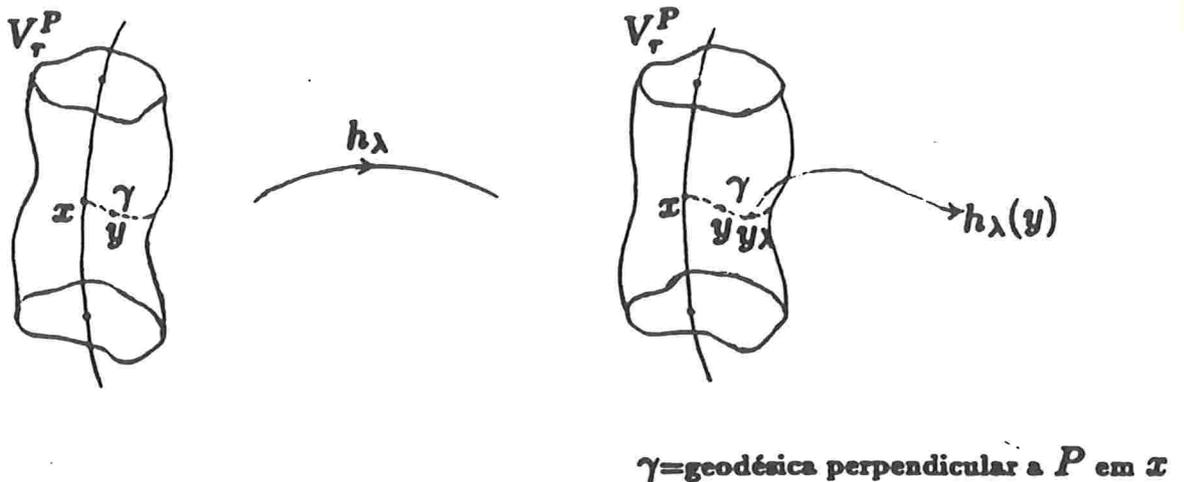
2) Para todo $y \in V_r^P$, a distância de y a P permanece constante com y se movendo ao longo de sua placa, pois $P_y \subset S_r^P$ com $d(y, P) = r$. Logo a

distância entre as folhas vizinhas é localmente constante. Esta propriedade caracteriza as métricas adaptadas.

Seja $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda > 0$, definimos a aplicação

$$h_\lambda : \bigcup_{\alpha, \lambda\alpha < r} S_\alpha^P \longrightarrow \bigcup_{\lambda\alpha} S_{\lambda\alpha}^P$$

por $h_\lambda(y) = \exp_P(\lambda \cdot \exp_P^{-1}(y))$. A aplicação h_λ é chamada de transformação homotética.

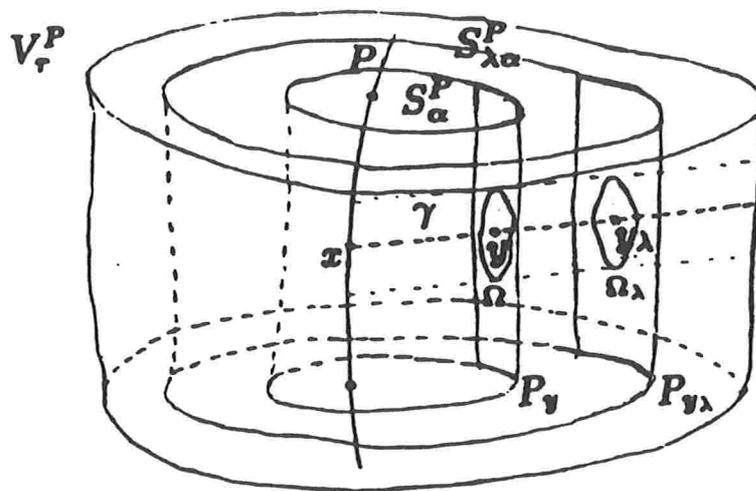


Lema 2.7. ([Mol]₂). A transformação homotética h_λ leva placas em placas e portanto respeita a folheação singular \mathcal{F} no subconjunto V_r^P .

Demonstração. ([Mol]₂) É suficiente provar que a imagem $h_\lambda(P_y)$ de uma placa é a placa $P_{h_\lambda(y)}$, se λ é suficientemente próximo de 1, pois $h_{\lambda\mu} = h_\lambda \circ h_\mu$.

Fixado y , tomemos uma vizinhança tubular distinguida de y . Para λ suficientemente próximo de 1, $y_\lambda = h_\lambda(y)$ pertence a esta vizinhança tubular distinguida. E pela observação 2, existe uma vizinhança aberta Ω de y em P_y e uma vizinhança aberta Ω_λ de y_λ em P_{y_λ} tal que a distância de um ponto $y'_\lambda \in \Omega_\lambda$ a Ω é independente de y'_λ e é realizada pelas geodésicas unindo y'_λ a sua projeção y' em Ω .

Mas se $d(y, P) = \alpha$, então Ω e Ω_λ estão contidos em S_α^P e $S_{\lambda\alpha}^P$ respectivamente, assim $d(y, y_\lambda) = \alpha |1 - \lambda|$ é a distância de um ponto arbitrário de Ω_λ a Ω . Contudo, uma tal distância entre um ponto y'_λ de $S_{\lambda\alpha}^P$ e um ponto y' de S_α^P pode ser realizada somente se $y'_\lambda = h_\lambda(y')$. Logo $\Omega_\lambda = h_\lambda(\Omega)$, portanto o resultado. \square



$\gamma =$ geodésica perpendicular a P em x

Estratificação de M

Seja $\sum_r =$ conjunto de todas as folhas de \mathcal{F} em M de dimensão r .

Proposição 2.8. ([Mol]₂) Seja $\dim P_x = r$. Então $\sum_r \cap V_\alpha^{P_x}$ é uma subvariedade mergulhada de $V_\alpha^{P_x}$.

Demonstração.([Mol]₂)

Da proposição acima segue que cada estrato \sum_r é uma subvariedade mergulhada de M . Como a função $\dim: M \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\dim(x) = \text{dimensão } L_x$ é semi-contínua inferiormente (ver observação 1), temos que $\bigcup_{r' \leq r} \sum_{r'}$ é compacto.

Se r_0 é a menor dimensão de uma folha de \mathcal{F} e r_1 a maior dimensão, então diremos que \sum_{r_0} é o *estrato minimal* e \sum_{r_1} é o *estrato regular*.

Segue do visto acima que \sum_{r_0} é sempre compacto.

Lema 2.9. ([Mol]₂) (\sum_r, \mathcal{F}) é uma folheação riemanniana regular sendo a métrica induzida por g em \sum_r uma métrica adaptada a \mathcal{F} .

Demonstração. ([Mol]₂). \sum_r é uma subvariedade mergulhada de M . Claramente $\mathcal{X}(\mathcal{F})/\sum_r$ é transitivo quando restrito a cada folha de \sum_r .

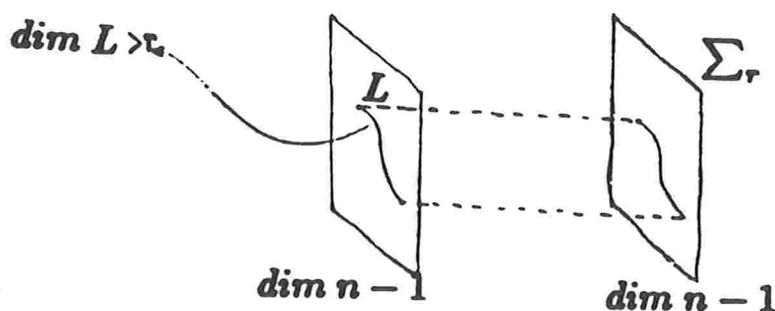
Do lema 2.7 temos que $\sum_r \cap V_\alpha^{P_x}$, $x \in \sum_r$, é a união de geodésicas (em $V_\alpha^{P_x}$) que intercepta P_x perpendicularmente. Logo, localmente a distância entre as folhas de (\sum_r, \mathcal{F}) é constante. Portanto, g induz uma métrica riemanniana em \sum_r que é adaptada a \mathcal{F} . \square

Consideremos uma vizinhança tubular de um subconjunto aberto conexo e relativamente compacto contido em \sum_r , podemos concluir que as folhas

de \mathcal{F} são traçadas nos tubos com centro no estrato, pois toda geodésica que é perpendicular ao estrato Σ_r é em particular perpendicular as folhas de Σ_r , logo perpendicular a toda folha de \mathcal{F} . Podemos definir uma transformação homotética nesta vizinhança tubular, e de modo análogo ao Lema 2.7 teremos que esta transformação homotética respeita as folhas de \mathcal{F} .

Lema 2.10. ([Mol]₂) O estrato regular Σ_{r_1} é um subconjunto aberto, denso e conexo de M .

Demonstração. ([Mol]₂) Primeiro vamos mostrar que a dimensão de todo estrato singular é $\leq n - 2$. Suponhamos por absurdo que $\dim \Sigma_r > n - 2$, para $r < r_1$. Pelo fato de Σ_r ser formada por folhas singulares temos que $\dim \Sigma_r \neq n$. Se $\dim \Sigma_r$ é $n-1$, tomemos uma vizinhança tubular de um subconjunto aberto, conexo e relativamente compacto contido em Σ_r , os tubos centrados no estrato teriam a mesma dimensão de Σ_r , ou seja $\dim \Sigma_r = n - 1$, logo a projeção ortogonal irá projetar uma folha de dimensão $r' > r$ numa folha de \mathcal{F} em Σ_r de mesma dimensão r' , contradição.



Σ_{r_1} é denso em M , pois $\dim(\cup_{r' < r_1} \Sigma_{r'}) \leq n - 2$.

Σ_{r_1} é aberto, pois para cada $x \in \Sigma_{r_1}$ podemos tomar uma vizinhança tubular distinguida de x , $V_\alpha^{P_x}$, contendo apenas folhas de dimensão r_1 (observação 1).

Como $\dim(\cup_{r' < r_1} \Sigma_{r'}) \leq n - 2$ temos que $\Sigma_{r_1} = C(\cup_{r' < r_1} \Sigma_{r'})$ é conexo. \square

Diremos que r_1 é a *dimensão* (genérica) de uma (M, \mathcal{F}) folheação riemanniana singular, eventualmente também escreveremos (M, \mathcal{F}^{r_1}) ou r_1 -folheação riemanniana singular, para salientar a dimensão (genérica) de \mathcal{F} . E conseqüentemente, diremos que $n - r_1$ é a *codimensão* de (M, \mathcal{F}) .

Teorema da decomposição local

Seja L uma folha de \mathcal{F} , denotaremos seu fibrado normal por Q^L .

O módulo $\mathcal{X}(\mathcal{F})$ dos campos de vetores tangentes as folhas, opera de maneira natural em Q^L , da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(\mathcal{F}) \times Q^L &\longrightarrow Q^L \\ (X, v_x) &\longmapsto (dX^t)_x(v_x) \end{aligned}$$

onde X^t é o grupo a 1-parâmetro associado a X .

Chamaremos uma estrutura euclidiana \tilde{g}_T^L em Q^L de *métrica transversa* na folha L , se ela for invariante pela ação de $\mathcal{X}(\mathcal{F})$ dado acima. Esta propriedade pode ser formulada da seguinte maneira:

$$X\tilde{g}_T^L(Y, Z) - \tilde{g}_T^L([X, Y], Z) - \tilde{g}_T^L(Y, [X, Z]) = 0,$$

$\forall X \in \mathcal{X}(\mathcal{F})$ e $Y, Z \in \mathcal{X}(M)$, onde os diferentes termos estão definidos somente quando restritos a folha L e $\mathcal{X}(M)$ é o conjunto de todos os campos de vetores C^∞ tangentes a M .

Toda métrica riemanniana g' em M define uma estrutura euclidiana g_T^L em Q^L , identificado com o fibrado ortogonal a L em M .

Proposição 2.11. ([Mol]₂) Seja (M, \mathcal{F}, g) uma folheação riemanniana singular. Seja g' uma outra métrica riemanniana em M . Então as seguintes propriedades são equivalentes:

1. g' é adaptada a \mathcal{F} .
2. $\forall L$ folha de \mathcal{F} , a estrutura euclidiana g_T^L definida por g' em Q^L é uma métrica transversa em L .

Demonstração. ([Mol]₂).

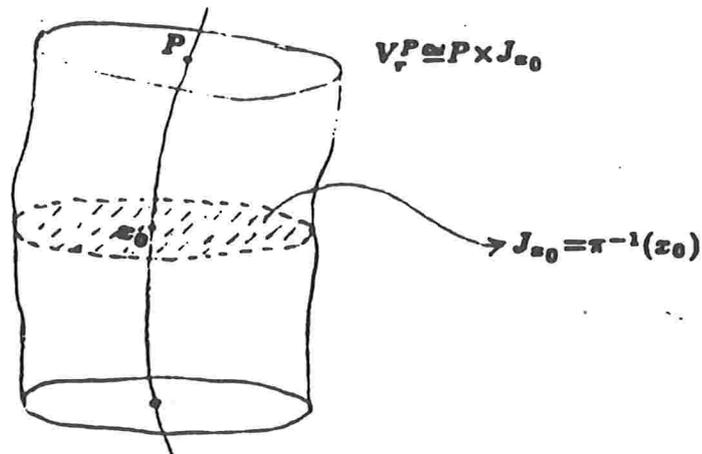
Pela proposição acima a métrica adaptada g define uma métrica transversa para toda folha L de \mathcal{F} . Chamaremos a família g_T de tais métricas transversas obtidas nas diferentes folhas de *métrica transversa associada a g* . Observamos que g_T determina a distância local entre as folhas, pois ela define o comprimento das geodésicas perpendiculares. Diremos que (M, \mathcal{F}, g_T) é uma folheação riemanniana singular, onde g_T é a métrica transversa associada a métrica adaptada g :

Teorema 2.12. ([Mol]₂) Seja (M, \mathcal{F}, g_T) uma folheação riemanniana singular e $x_0 \in M$. Então existe uma vizinhança tubular distinguida $V_{\alpha_0}^P$ de x_0 e uma métrica adaptada g' definida nesta vizinhança tubular admitindo g_T como sua métrica transversa associada tal que :

1) $(V_{\alpha_0}^P, g')$ é o produto riemanniano $(P, g'_P) \times (J_{x_0}, g'_{J_{x_0}})$, onde $J_{x_0} = \pi^{-1}(x_0)$.

2) Os traços das placas em J_{x_0} formam uma folheação riemanniana singular admitindo $g'_{J_{x_0}}$ como métrica adaptada.

Demonstração: ([Mol]₂).



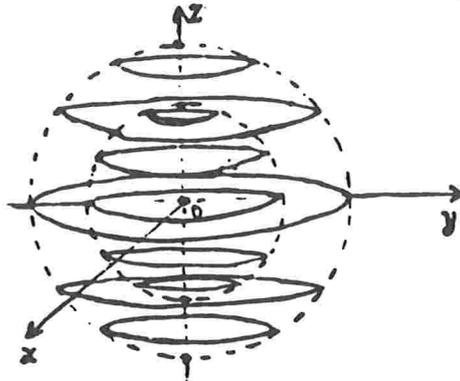
Proposição 2.13. ([Mol]₂) Sejam (M, \mathcal{F}) uma folheação riemanniana singular sobre M compacta e conexa e $x_0 \in \Sigma_0$. Se g é uma métrica riemanniana adaptada a \mathcal{F} , então a métrica rasa definida em alguma vizinhança de x_0 pelo transporte da estrutura euclidiana de $T_{x_0}M$ pela \exp_{x_0} é adaptada a \mathcal{F} .

Demonstração. ([Mol]₂).

Observação 2.14. Segue do teorema 2.12 e da proposição 2.13 que o estudo local de uma folheação riemanniana singular qualquer, fica reduzido ao estudo de uma folheação riemanniana singular $(\mathbb{R}^p, \mathcal{F}_0)$ no espaço euclidiano \mathbb{R}^p com a origem sendo uma folha e admitindo a métrica canônica de \mathbb{R}^p como uma métrica adaptada a \mathcal{F}_0 .

Exemplo 2.15. Seja $(\mathbb{R}^3, \mathcal{F})$ a folheação definida pelas órbitas da ação $\phi : S^1 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$\phi(\theta, (x, y, z)) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta, z).$$



Claramente, $(\mathbb{R}^3, \mathcal{F})$ é uma folheação riemanniana singular modelo com a métrica canônica do \mathbb{R}^3 sendo a métrica adaptada a \mathcal{F} . Neste caso temos os seguintes estratos:

$$\Sigma_0 = \{(0, 0, z) \in \mathbb{R}^3 / z \in \mathbb{R}\} = \text{eixo } z$$

$$\Sigma_1 = \mathbb{R}^3 - \Sigma_0 = \mathbb{R}^3 - (\text{eixo } z)$$

Os tubos com centro na origem são as subvariedades:

$$S_\alpha^0 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / d((x, y, z), (0, 0, 0)) = \alpha\}$$

esferas de raio α com centro na origem.

Mostraremos nos capítulos seguintes que, a menos de conjugação, este é o único fluxo riemanniano singular em \mathbb{R}^3 com a métrica canônica sendo a métrica adaptada e tendo a origem como folha singular.

O fecho das folhas de (M, \mathcal{F})

Observamos que se (M, \mathcal{F}) é uma folheação riemanniana singular modelo, isto é se \mathcal{F} é uma partição de M pelas órbitas de uma ação diferenciável $\varphi : H \times M \rightarrow M$, onde $H \subset Isom(M, g)$ é um subgrupo de Lie conexo, então $(M, \overline{\mathcal{F}})$ é ainda uma folheação riemanniana singular. De fato, é bem conhecido que se \mathcal{F} é uma partição de M pelas órbitas de φ então $\overline{\mathcal{F}}$ é uma partição de M pelas órbitas da ação $\overline{\varphi} : \overline{H} \times M \rightarrow M$. Como $\overline{H} \subset Isom(M, g)$ é um subgrupo de Lie conexo segue que $\overline{\mathcal{F}}$ é uma folheação riemanniana singular modelo.

Lema 2.16. ([Mol]₂) Se uma folha $L \subset \Sigma_r$, então $\overline{L} \subset \Sigma_r$.

Demonstração. ([Mol]₂)

O fecho de cada folha de (Σ_r, \mathcal{F}) é uma subvariedade de M (ver Teor. 5.1 [Mol]₂ e observando que Σ_r , $r > r_0$, não é compacto, mas o fecho das

folhas de \mathcal{F} em \sum_r são compactas). O fecho das folhas portanto forma uma partição $\overline{\mathcal{F}}$ de M por subvariedades imersas e conexas. Como a distância entre duas folhas de \mathcal{F} permanece localmente constante, então isto também é verdadeiro para o seu fecho $\overline{\mathcal{F}}$. Logo, para $(M, \overline{\mathcal{F}})$ ser uma folheação riemanniana singular é suficiente verificar que $\mathcal{X}(\overline{\mathcal{F}})$ é transitivo ao longo de suas folhas singulares, pois temos que $\mathcal{X}(\overline{\mathcal{F}})$ é transitivo quando restrito as folhas regulares, visto que \mathcal{F} em \sum_{r_1} é uma folheação riemanniana regular e \sum_{r_1} é um aberto em M .

Molino conjectura que se (M, \mathcal{F}) é uma folheação riemanniana singular então $(M, \overline{\mathcal{F}})$ é ainda uma folheação riemanniana singular.

Folheações riemannianas singulares de codim 1

Seja (M, \mathcal{F}) uma folheação riemanniana singular de codim 1.

Suponhamos que \mathcal{F} não é uma folheação riemanniana regular, logo existe uma folha singular L . Sejam $x_0 \in L$ e $V_\alpha^{P_{x_0}}$ uma vizinhança tubular distinguida de x_0 . Como $\dim \mathcal{F} = n - 1$ temos que cada tubo é uma placa de \mathcal{F} , como isto vale para todo $x \in L$ segue que L é uma folha isolada no estrato singular que contém L . Logo L é compacta.

Tomando uma vizinhança tubular distinguida da folha singular L teremos que nesta vizinhança tubular todas as folhas de \mathcal{F} são compactas,

pois os tubos serão folhas de \mathcal{F} . Portanto $\mathcal{X}(\overline{\mathcal{F}})$ é transitivo ao longo de suas folhas singulares, segue que $(M, \overline{\mathcal{F}})$ é ainda uma folheação riemanniana singular. Suponhamos por absurdo que exista alguma folha não compacta em (M, \mathcal{F}) , disto seguirá que o estrato das folhas regulares de $(M, \overline{\mathcal{F}})$ será igual a M , logo esta folha seria densa em M , contradição pois conseguimos uma vizinhança tubular distinguida de L tal que todas as folhas são compactas. Portanto, se em (M, \mathcal{F}) existir uma folha singular então todas as folhas de \mathcal{F} serão compactas.

Suponhamos que $\sum_{r_0} \neq \emptyset$ e que $(\sum_{r_1}, \mathcal{F})$ seja transversalmente orientável, então o espaço das folhas \sum_{r_1}/\mathcal{F} é difeomorfo ao intervalo $]0, 1[$. Como o espaço das folhas M/\mathcal{F} é difeomorfo a $[0, 1]$ segue que existe exatamente duas folhas singulares correspondentes a $p^{-1}(0)$ e $p^{-1}(1)$, onde $p : M \rightarrow M/\mathcal{F}$ é a projeção quociente.

Exemplo. Sejam M uma variedade diferenciável compacta, conexa e orientável de dimensão dois e (M, \mathcal{F}) uma folheação riemanniana singular sobre M com folhas singulares (isto é, $\sum_0 \neq \emptyset$). Suponhamos que $(\sum_{r_1}, \mathcal{F})$ seja transversalmente orientável, disto vem que (M, \mathcal{F}) possui 2 folhas singulares, digamos que sejam $x_0, x_1 \in M$ tais folhas singulares. Tomemos vizinhanças tubulares distinguidas de x_0 e x_1 , cada uma destas vizinhanças tubulares distinguidas é difeomorfa ao disco aberto $D^2(0,1)$ cujo centro é uma folha singular e as folhas regulares são difeomorfas a S^1 . Podemos escrever:

$$M \cong \overline{D^2(0,1)} \cup_f \overline{D^2(0,1)},$$

onde f é um difeomorfismo entre as fronteiras de $\overline{D^2(0,1)}$. Segue que M é difeomorfa a S^2 . Usando a proposição 2.13 temos que \mathcal{F} é conjugada a folheação riemanniana singular modelo em S^2 dada pela ação linear

$$\varphi : S^1 \times S^2 \longrightarrow S^2$$

definida por $\varphi(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = (\theta_2, \theta_1 + \theta_3)$.

Em variedades de dimensão 3, as folheações riemannianas singulares de codim 1 poderão ter dois tipos de folhas singulares: pontos isolados ou curvas S^1 . No capítulo IV, pag.57, faremos uma descrição destas folheações.

Em variedades de dimensão 4, as folheações riemannianas singulares de codim 1 poderão apresentar três tipos de folhas singulares: pontos isolados, curvas S^1 ou 2-variedades compactas e conexas. Permanece em aberto descrever estas folheações.

CAPITULO III

FOLHEAÇÕES RIEMANNIANAS SINGULARES CUJAS ÚNICAS FOLHAS SINGULARES SÃO DE DIMENSÃO ZERO

Seja (M^n, \mathcal{F}^m) uma folheação riemanniana singular tal que as únicas folhas singulares são de dimensão zero ($\Sigma_0 \neq \emptyset$), onde M^n é uma variedade compacta e conexa. Estudaremos este tipo de folheação porque generaliza consideravelmente os fluxos riemannianos singulares com $\Sigma_0 \neq \emptyset$.

Mostraremos neste capítulo que se $(\mathbb{R}^n, \mathcal{F}^m)$, $m \leq 3$, é uma folheação riemanniana singular cujas únicas folhas singulares são pontos, com a origem do \mathbb{R}^n sendo uma folha singular e a métrica canônica do \mathbb{R}^n sendo uma métrica adaptada a \mathcal{F}^m , então esta folheação singular é dada pelas órbitas de uma ação diferenciável $\varphi : H \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, onde $H \subset SO(n)$ é um subgrupo de lie conexo. Isto quer dizer que $(\mathbb{R}^n, \mathcal{F}^m)$ é uma folheação riemanniana singular modelo. Obtemos um resultado em esferas euclidianas a exemplo de um resultado de [Grom-Grov]. Provamos também que se

(M^n, \mathcal{F}^m) , $m > 1$, é uma folheação riemanniana singular nas condições acima, então todas as folhas serão compactas.

Analisaremos neste capítulo as possíveis dimensões do estrato singular Σ_0 de (M^n, \mathcal{F}^m) e mostraremos que as dimensões de Σ_0 dependerão das dimensões n e m .

Notação: Neste capítulo estaremos sempre considerando (M^n, \mathcal{F}^m) uma folheação riemanniana singular cujas únicas folhas singulares são de dimensão zero e $\Sigma_0 \neq \emptyset$, com folhas regulares de dimensão m . Daqui para frente chamaremos tais folheações de folheações riemannianas singulares.

As propriedades locais em torno das singularidades são essenciais no estudo das folheações riemannianas singulares. Pela observação 2.14 o estudo local se reduz a estudar uma folheação riemanniana singular no \mathbb{R}^n com a métrica canônica sendo a métrica adaptada e a origem do \mathbb{R}^n sendo uma folha singular. Isto ressalta a importância do seguinte teorema:

Teorema 3.1. Seja $(\mathbb{R}^n, \mathcal{F}^m)$ uma folheação riemanniana singular, $m \leq 3$. Suponhamos que a métrica riemanniana canônica de \mathbb{R}^n seja uma métrica adaptada a \mathcal{F}^m e que a origem do \mathbb{R}^n seja uma folha singular. Então existe um subgrupo de Lie conexo $H \subset SO(n)$ e uma ação linear $\Phi : H \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que as suas órbitas são as folhas de \mathcal{F}^m .

Demonstração.

Lema 3.2. Σ_0 é um subespaço vetorial do \mathbb{R}^n .

Observação. Se $\dim \Sigma_0 = 0$, então $\Sigma_0 = \{\text{origem do } \mathbb{R}^n\}$ e segue imediatamente o resultado do lema 3.2. De fato, suponhamos por absurdo que exista outra folha singular além da origem, neste caso usando transformações homotéticas, com relação a origem, conseguiremos uma semi-reta composta de folhas singulares, o que implicaria $\dim \Sigma_0 \geq 1$, contradição.

Demonstração do Lema 3.2. Pela observação acima devemos demonstrar o lema para o caso de $\dim \Sigma_0 \geq 1$.

A origem do \mathbb{R}^n pertence a Σ_0 por hipótese.

Vejamos que a soma de $x_1, x_2 \in \Sigma_0$ (identificados como vetores) ainda pertence a Σ_0 . Para isto, é suficiente provar que qualquer ponto x_0 entre x_1 e x_2 contido na reta que passa por x_1 e x_2 ainda pertence a Σ_0 , pois o vetor soma de x_1 e x_2 é um vetor que pertence a reta que passa pela origem e por um ponto x_0 como acima. Assim se $x_0 \in \Sigma_0$ então por uma transformação homotética conveniente este vetor soma é ainda um ponto de Σ_0 .

Se x_2 pertence a reta que passa por x_1 e a origem, o resultado é obtido usando uma transformação homotética. Suponhamos que x_2 não pertença a reta que passa por x_1 e a origem. Tomemos a esfera S_{x_1, α_1}^{n-1} com centro em x_1 de raio α_1 e S_{x_2, α_2}^{n-1} com centro em x_2 e raio α_2 tal que $S_{x_1, \alpha_1}^{n-1} \cap S_{x_2, \alpha_2}^{n-1} = \{x_0\}$. Suponhamos por absurdo que x_0 pertença a alguma folha regular

L de \mathcal{F}^m , então isto implica que L está inteiramente contida em S_{x_1, α_1}^{n-1} e S_{x_2, α_2}^{n-1} ao mesmo tempo, o que é um absurdo. Logo, $x_0 \in \Sigma_0$. \square

Seja $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \Sigma_0$ a projeção ortogonal.

Diremos que \mathcal{F} é saturada em $A \subset M$ se $p^{-1}(p(A)) = A$, onde $p : M \rightarrow M/\mathcal{F}$ é a projeção quociente.

Lema 3.3. \mathcal{F}^m é saturada em $\pi^{-1}(x)$, para cada $x \in \Sigma_0$.

Demonstração. Sejam $x \in \Sigma_0$, $y \in \pi^{-1}(x)$ e L_y a folha passando por y . Suponhamos por absurdo que exista $z \in L_y$ tal que $z \notin \pi^{-1}(x)$. Se $d(y, x) = \alpha$ sabemos que $L_y \subset S_\alpha^{\Sigma_0}$, onde $S_\alpha^{\Sigma_0}$ é o tubo com centro em Σ_0 cujos pontos estão a uma distância α de Σ_0 . A distância de pontos de $S_\alpha^{\Sigma_0}$ até Σ_0 são realizadas por retas perpendiculares a Σ_0 , isto implica que $d(z, x) > \alpha$, pois $z \notin \pi^{-1}(x)$. Logo, chegamos a uma contradição pois $d(L_y, x)$ é constante. \square

Observação 3.4. É claro que se $x \in \Sigma_0$ e $\dim \Sigma_0 = k$, então $\pi^{-1}(x)$ é um espaço \mathbb{R}^{n-k} e em $\pi^{-1}(x)$ a única folha singular é x . Além disso, é fácil ver que $(\pi^{-1}(x), \mathcal{F}^m)$ é ainda uma folheação riemanniana singular com a métrica canônica do \mathbb{R}^{n-k} sendo a métrica adaptada.

Lema 3.5. Seja $(\mathbb{R}^l, \mathcal{T}^m)$ uma folheação riemanniana singular, $m \leq 3$, cuja única folha singular é a origem do \mathbb{R}^l e sendo a métrica canônica do \mathbb{R}^l uma métrica adaptada a \mathcal{T}^m . Então, existe um subgrupo de Lie conexo

$H \subset SO(l)$ e uma ação linear $H \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^l$ tal que suas órbitas são as folhas de \mathcal{T}^m .

Demonstração do Lema 3.5. Caso $m = l - 1$, os tubos S_r^{l-1} serão as folhas de \mathcal{T}^m e o resultado é imediato com $H = SO(l)$.

Suponhamos que $m < l - 1$. Cada tubo centrado na origem do \mathbb{R}^l será uma esfera S_r^{l-1} de raio $r > 0$ e \mathcal{T}^m em cada esfera é saturada por folhas regulares, pois a distância de qualquer folha regular à folha singular (origem) é constante. Não é difícil verificar que \mathcal{T}^m restrita a cada esfera é uma folheação regular e a métrica induzida nestas esferas é uma métrica adaptada a \mathcal{T}^m , conseqüentemente \mathcal{T}^m em cada esfera é uma folheação riemanniana regular com folhas regulares de dimensão m . Segue de [Grom-Grov] que em cada esfera S_r^{l-1} a folheação é dada pelas órbitas de uma ação linear de um subgrupo $H_r \subset SO(l)$.

Fixemos um $r > 0$, então pelos argumentos acima $(S_r^{l-1}, \mathcal{T}^m)$ é dada pelas órbitas de uma ação linear

$$\Psi_r : H_r \times S_r^{l-1} \rightarrow S_r^{l-1}, \text{ com } H_r \subset SO(l).$$

Vamos mostrar que as órbitas da ação linear

$$\varphi : H_r \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^l,$$

definida por $\varphi(\theta, \alpha, \theta_1, \dots, \theta_{l-1}) = (\alpha, \Psi_r(\theta, r, \theta_1, \dots, \theta_{l-1}))$, são as folhas de \mathcal{T}^m .

Vejamos para as esferas de raio diferente de r . Para cada esfera S_β^{l-1} com $\beta \neq r$, tomamos α tal que $\alpha r = \beta$ e definimos a ação diferenciável

$$\tilde{\Psi}_\alpha : H_r \times S_\beta^{l-1} \longrightarrow S_\beta^{l-1}$$

por $\tilde{\Psi}_\alpha(\theta, y) = h_\alpha \circ \Psi_r(\theta, h_{1/\alpha}(y))$, onde h_α e $h_{1/\alpha}$ são transformações homotéticas de raio α e $1/\alpha$, respectivamente. As transformações homotéticas podem ser definidas globalmente em \mathbb{R}^l , pois o \mathbb{R}^l se comporta como uma vizinhança tubular distinguida, podemos assim usar o lema da transformação homotética 2.7. Como a transformação homotética preserva a folheação, as órbitas de $\tilde{\Psi}_\alpha$ são folhas de \mathcal{T}^m em S_β^{l-1} , pois as órbitas de $\tilde{\Psi}_\alpha$ são as órbitas de Ψ_r trazidas pela transformação homotética. Observamos que $\varphi/(H_r \times S_\beta^{l-1}) = \tilde{\Psi}_\alpha$. Logo as órbitas de φ são as folhas de \mathcal{T}^m . \square

Se $k = 0$, então o teorema segue imediatamente do lema 3.5.

Se $k > 0$, então segue da observação 3.4 que em cada fibra $\pi^{-1}(x)$, $x \in \Sigma_0$, existe uma m -folheação riemanniana singular nas condições do lema 3.5. Logo pelo lema 3.5 para cada $x \in \Sigma_0$, \mathcal{F}^m em $\pi^{-1}(x)$ é dada pelas órbitas de um subgrupo de Lie conexo $H_x \subset SO(n - k)$. Vamos mostrar que podemos definir uma ação linear $H_x \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que as órbitas desta ação são as folhas de \mathcal{F}^m , para algum $x \in \Sigma_0$ fixado.

Seja $\pi^{-1}(0)$ a fibra da origem $\{0\}$ do \mathbb{R}^n , então pelo lema 3.5 existe $H_0 \subset SO(n - k)$ tal que as órbitas de uma ação linear

$$\Psi : H_0 \times \pi^{-1}(0) \longrightarrow \pi^{-1}(0),$$

são as folhas de \mathcal{F}^m em $\pi^{-1}(0)$. Definimos a ação

$$\Phi : H_0 \times (\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}) \longrightarrow \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$$

por $\Phi(\theta, x, y) = (x, \Psi(\theta, y))$, onde identificamos Σ_0 com \mathbb{R}^k e $(\Sigma_0)^\perp$ com \mathbb{R}^{n-k} .

Vamos mostrar que as órbitas de Φ são as folhas de \mathcal{F}^m .

Como vimos anteriormente qualquer folha de \mathcal{F}^m está contida numa fibra $\pi^{-1}(y)$, para algum $y \in \mathbb{R}^k$. Logo é suficiente verificar que em cada fibra $\pi^{-1}(y)$ as órbitas de Φ são as folhas \mathcal{F}^m . Sejam $R \subset \Sigma_0$ uma reta que passa pela origem do \mathbb{R}^n e $x \in R$, $x \neq \{0\}$. Definimos aplicações ($\lambda > 0$)

$$h_{x,\lambda} : \cup_r S_{x,r}^{n-1} \longrightarrow \cup_{\lambda r} S_{x,\lambda r}^{n-1}$$

por $h_{x,\lambda}(z) = \lambda(z - x) + x$, onde $S_{x,\beta}^{n-1}$ denota a esfera de raio β com centro em x . Como $h_{x,\lambda}$ é uma transformação homotética, $h_{x,\lambda}$ preserva as folhas de \mathcal{F}^m .

Tomemos $y \in R$, $y \neq x$. Definimos a ação

$$\Psi_y : H_0 \times \pi^{-1}(y) \longrightarrow \pi^{-1}(y)$$

por $\Psi_y(\theta, z) = h_{x,\lambda'} \circ \Psi(\theta, h_{x,1/\lambda'}(z))$, onde $\lambda' = \frac{|x-y|}{|x|}$.

Como $h_{x,\lambda'}$ e $h_{x,1/\lambda'}$ preservam as folhas de \mathcal{F}^m , as órbitas de Ψ_y são as folhas de \mathcal{F}^m na fibra $\pi^{-1}(y)$. É fácil verificar que $h_{x,\lambda'}(\pi^{-1}(0)) = \pi^{-1}(y)$.

Vamos mostrar que $\Phi/(H_0 \times \pi^{-1}(y)) = \Psi_y$.

Seja $z = (y, y') \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ tal que $z \in \pi^{-1}(y)$, observamos que se $x \in R$ então $x = (\tilde{x}, 0) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$. Agora

$$\begin{aligned}
\Psi_y(\theta, z) &= h_{x,\lambda'} \circ \Psi(\theta, h_{x,1/\lambda'}(z)) = h_{x,\lambda'} \circ \Psi(\theta, (1/\lambda')(z - x) + x) \\
&= h_{x,\lambda'} \circ \Psi(\theta, (1/\lambda')((y, y') - (\tilde{x}, 0)) + (\tilde{x}, 0)) \\
&= h_{x,\lambda'} \circ \Psi(\theta, ((1/\lambda')(y - \tilde{x}) + \tilde{x}, y'/\lambda')) \\
&= h_{x,\lambda'}(((1/\lambda')(y - \tilde{x}) + \tilde{x}, \Psi(\theta, y'/\lambda')) \\
&= h_{x,\lambda'}((1/\lambda')(y - \tilde{x}) + \tilde{x}, 1/\lambda'\Psi(\theta, y')) \\
&= \lambda'[((1/\lambda')(y - \tilde{x}) + \tilde{x}, ((1/\lambda')\Psi(\theta, y')) - (\tilde{x}, 0)] + (\tilde{x}, 0) \\
&= \lambda'((1/\lambda')(y - \tilde{x}), (1/\lambda')\Psi(\theta, y')) + (\tilde{x}, 0) \\
&= (y - \tilde{x}, \Psi(\theta, y')) + (\tilde{x}, 0) = (y, \Psi(\theta, y')) = \Phi(\theta, y, y') = \Phi(\theta, z).
\end{aligned}$$

□

Observação. Ainda do trabalho de [Grom-Grov] segue que no teorema

3.1 $\dim H = m$, exceto o caso $m = n - k - 1$.

Corolário 3.6. Seja (M^n, \mathcal{F}^m) uma m -folheação riemanniana singular, $m \leq 3$, sobre a n -variedade M compacta e conexa. Então para cada $x \in \Sigma_0$ existe uma vizinhança U de x tal que (U, \mathcal{F}^m) é conjugada a folheação $(\mathbb{R}^n, \tilde{\mathcal{F}}^m)$ descrita no teorema 3.1.

Proposição 3.7. Seja $(\mathbb{R}^n, \mathcal{F}^m)$ como no teorema 3.1, então $(\mathbb{R}^n, \overline{\mathcal{F}}^m)$ é dada pelas órbitas da ação linear $\Psi : \overline{H} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, onde as órbitas da ação $\varphi : H \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (obtida pelo teorema 3.1) são as folhas de \mathcal{F}^m e $H \subset SO(n)$.

Demonstração. Pelo teorema 3.1 as folhas de \mathcal{F}^m são as órbitas de uma ação linear

$$\varphi : H \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

onde $H \subset SO(n)$. Como vimos anteriormente as folhas de \mathcal{F}^m estão contidas nas esferas S_r^{n-1} , logo basta mostrarmos que o fecho das órbitas de $\varphi_r : H \times S_r^{n-1} \rightarrow S_r^{n-1}$, definida pela restrição de φ a S_r^{n-1} , é igual as órbitas de $\Psi_r : \overline{H} \times S_r^{n-1} \rightarrow S_r^{n-1}$, definida pela restrição de Ψ a S_r^{n-1} . Mas, isto segue do fato bem conhecido que se $H \subset Isom(N)$ é um subgrupo de Lie conexo e N é uma variedade compacta e conexa então o fecho das órbitas da ação diferenciável $\eta : H \times N \rightarrow N$, é o conjunto das órbitas da ação $\bar{\eta} : \overline{H} \times N \rightarrow N$, com $\bar{\eta}/(H \times N) = \eta$. \square

Vejamos um teorema análogo a um resultado obtido por Gromoll-Grove ([Grom- Grov]) sobre m -folheações riemannianas (regulares), $m \leq 3$, sobre

esferas euclidianas S^n . Diremos que (S^n, \mathcal{F}^m) é uma m -folheação riemanniana singular sobre a esfera euclidiana S^n se a métrica adaptada a \mathcal{F}^m é a métrica induzida em S^n pela métrica riemanniana canônica do \mathbb{R}^{n+1} . $S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} / x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$.

Teorema 3.8. Seja (S^n, \mathcal{F}^m) uma m -folheação riemanniana singular sobre a esfera euclidiana S^n , $m \leq 3$. Então existe um subgrupo de Lie conexo $H \subset SO(n+1)$ e uma ação linear $\varphi : H \times S^n \rightarrow S^n$ tal que as órbitas de φ são as folhas de \mathcal{F}^m . Em outras palavras, (S^n, \mathcal{F}^m) nas condições acima é uma folheação riemanniana singular modelo.

Demonstração. A folheação \mathcal{F}^m em S^n induz de maneira natural uma folheação singular \mathcal{T} em \mathbb{R}^{n+1} com folhas regulares de dimensão m e folhas singulares de dimensão zero, sendo a origem do \mathbb{R}^{n+1} uma folha singular. Esta folheação singular é obtida usando a transformação homotética $h_\alpha : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ dada por $h_\alpha(x) = \alpha x$, em cada esfera $S_\alpha^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} / x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = \alpha^2\}$, $\alpha > 0$. Além disso, h_α define em cada esfera S_α^n uma m -folheação riemanniana singular conjugada a \mathcal{F}^m que denotaremos por \mathcal{F}_α^m .

Lema 3.9. A métrica canônica do \mathbb{R}^{n+1} é uma métrica adaptada a \mathcal{T} , isto é, $(\mathbb{R}^{n+1}, \mathcal{T})$ é uma m -folheação riemanniana singular.

Demonstração. Tomemos uma reta R e uma folha L_x de \mathcal{T} , suponhamos que R intercepta L_x em x perpendicularmente. Verifiquemos primeiramente que se a reta R intercepta uma folha L_y em y , com x e $y \in S_\alpha^n$,

α fixado, então R interceptará L_y perpendicularmente em y . Suponhamos que R intercepta L_y em y , com $y \in S_\alpha^n$. Observamos que a curva dada pela interseção $\mathbb{R}_{0,R}^2 \cap S_\alpha^n$ é uma geodésica em S_α^n com respeito a métrica riemanniana induzida pela métrica riemanniana canônica do \mathbb{R}^{n+1} , onde $\mathbb{R}_{0,R}^2$ é o plano em \mathbb{R}^{n+1} determinado pela origem e pela reta R (ver por exemplo [Spiv], vol I). Podemos supor que R não passa pela origem, pois se passar é claro que R interceptará L_y em y perpendicularmente.

L_x é perpendicular a $\mathbb{R}_{0,R}^2$ em x , pois dado $v \in T_x R$ não nulo e u um vetor radial não nulo em x , então eles são perpendiculares a L_x e geram $\mathbb{R}_{0,R}^2$. Segue que $\mathbb{R}_{0,R}^2 \cap S_\alpha^n$ é perpendicular a L_x em x . Observamos que L_x é uma folha de \mathcal{F}_α^m , como $(S_\alpha^n, \mathcal{F}_\alpha^m)$ é uma folheação riemanniana singular, segue que $\mathbb{R}_{0,R}^2 \cap S_\alpha^n$ é perpendicular a L_y em y , logo L_y é perpendicular também a $\mathbb{R}_{0,R}^2$, portanto R é perpendicular a L_y em y .

Agora sejam $x \in S_\alpha^n$, $y \in S_\beta^n$, $\alpha \neq \beta$, e R interceptando L_y em y . Vamos mostrar que R intercepta L_y em y perpendicularmente. A transformação homotética $h_{\alpha/\beta}$ leva a folha L_y na folha $L_{h_{\alpha/\beta}(y)}$ contida na esfera S_α^n . Pelos argumentos anteriores $\mathbb{R}_{0,R}^2 \cap S_\alpha^n$ é uma geodésica perpendicular a L_x e a $L_{h_{\alpha/\beta}(y)}$ o que implica $\mathbb{R}_{0,R}^2 \cap S_\beta^n$ intercepta L_y perpendicularmente em y , logo $\mathbb{R}_{0,R}^2$ intercepta L_x e L_y perpendicularmente, portanto R intercepta L_y em y perpendicularmente. Segue o lema. \square

Assim, conseguimos uma m -folheação riemanniana singular $(\mathbb{R}^{n+1}, \mathcal{T})$ nas condições do teorema 3.1, tal que quando restrita a S^n é a m -folheação riemanniana singular (S^n, \mathcal{F}^m) sobre a esfera euclidiana S^n . Pelo teorema

3.1 existe um subgrupo de Lie conexo $H \subset SO(n+1)$ e uma ação linear $\phi : H \times \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ cujas órbitas são as folhas de \mathcal{T} . Definimos a aplicação

$$\varphi : H \times S^n \rightarrow S^n$$

por $\varphi(\theta, x) = \phi(\theta, x)$. É claro que φ é uma ação linear. Desta forma as órbitas de φ são as folhas de \mathcal{F}^m . \square

Veremos a seguir que o fato de $m > 1$, nos dá mais informações sobre (M^n, \mathcal{F}^m) .

Proposição 3.10. Sejam (M^n, \mathcal{F}^m) uma folheação riemanniana singular, $m > 1$ e M^n variedade compacta e conexa. Seja $x_0 \in \Sigma_0$ e $s = \dim C_{0,x_0}$, onde C_{0,x_0} é a componente conexa de Σ_0 que contém x_0 . Nestas condições temos as seguintes alternativas:

a) se $n - s - 1 = m$, então existe uma vizinhança de x_0 onde cada folha regular é difeomorfa a esfera S^m .

b) se $n - s - 1 > m$, então m é um número ímpar e existe uma vizinhança de x_0 onde cada folha regular é uma esfera homológica racional de dimensão m .

Em ambos os casos todas as folhas de (M^n, \mathcal{F}^m) serão compactas.

Demonstração. Seja $x_0 \in \Sigma_0$, e $V_\alpha^{x_0}$ uma vizinhança tubular distinguida de x_0 . Assim $V_\alpha^{x_0}$ é difeomorfa (via aplicação exponencial) a \mathbb{R}^n com a origem do \mathbb{R}^n sendo uma folha singular da folheação \mathcal{F}^* ($= \exp_{x_0}^{-1}$

(\mathcal{F}^m). Por Molino a métrica riemanniana canônica do \mathbb{R}^n é adaptada a \mathcal{F}^* . Assim temos a folheação riemanniana singular $(\mathbb{R}^n, \mathcal{F}^*)$ cujas folhas singulares são de dimensão zero e as folhas regulares de dimensão m , com a origem sendo uma folha singular. Pelo teorema 3.1, \mathbb{R}^n se decompõem em $\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{n-s}$ onde cada ponto de \mathbb{R}^s é uma folha singular de \mathcal{F}^* e além disso \mathcal{F}^* é saturada em $\{y\} \times \mathbb{R}^{n-s}$, $y \in \mathbb{R}^s$, tendo $\{y\} \times \{0\}$ como única folha singular (em $\{y\} \times \mathbb{R}^{n-s}$), além disto segue também que $(\{y\} \times \mathbb{R}^{n-s}, \mathcal{F}^*)$ é uma folheação riemanniana singular, onde a métrica canônica de $\{y\} \times \mathbb{R}^{n-s}$ é uma métrica adaptada a \mathcal{F}^* . Em $\{y\} \times \mathbb{R}^{n-s}$ os tubos serão as esferas S_α^{n-s-1} de raio α com centro em $\{y\} \times \{0\}$. Temos então os seguintes possíveis casos:

a) se $n - s - 1 = m$, neste caso cada tubo de $(\{y\} \times \mathbb{R}^{n-s}, \mathcal{F}^*)$ já é a própria folha regular. Portanto, como isto ocorrerá para cada fibra $\{y\} \times \mathbb{R}^{n-s}$, teremos que cada folha regular nesta vizinhança $V_\alpha^{x_0}$ será difeomorfa a esfera S^m .

b) se $n - s - 1 > m$, teremos como observamos na demonstração do teorema 3.1, em cada tubo S_α^{n-s-1} uma folheação riemanniana regular de dimensão m induzida por \mathcal{F}^* . Como $m > 1$, temos por [Ghys] (teorema 5.3 e parte da demonstração do corolário 5.2) que esta folheação é uma "fibrção de Seifert generalizada" com folha tipo sendo uma esfera de homologia racional de dimensão ímpar. Como isto ocorrerá em cada fibra $\{y\} \times \mathbb{R}^{n-s}$, segue o resultado.

Observamos que em ambos os casos acima todas as folhas de \mathcal{F}^m em $V_\alpha^{x_0}$ são compactas. Vamos mostrar que todas as folhas de (M^n, \mathcal{F}^m) são compactas.

Observação 3.11. Seja $(M^n, \overline{\mathcal{F}^m})$ o fecho das folhas de (M^n, \mathcal{F}^m) , m qualquer. Então $(M^n, \overline{\mathcal{F}^m})$ é ainda uma folheação riemanniana singular. De fato, observamos no capítulo II que para $(M^n, \overline{\mathcal{F}^m})$ ser ainda uma folheação riemanniana singular é suficiente mostrar que $\mathcal{L}(\overline{\mathcal{F}^m})$ é transitivo nas folhas singulares de \mathcal{F}^m . Mas isto é imediato, pois as folhas singulares são de dimensão zero.

Lema 3.12. Todas as folhas de (M^n, \mathcal{F}^m) são compactas.

Demonstração. Suponhamos por absurdo que exista alguma folha de dimensão m de \mathcal{F}^m não compacta. Então a dimensão das folhas do estrato regular $\sum_{\overline{r_1}}$ de $\overline{\mathcal{F}^m}$ é maior do que m . Agora o estrato regular de $(M^n, \overline{\mathcal{F}^m})$ é denso em M^n (pela observação 3.11 $(M^n, \overline{\mathcal{F}^m})$ é ainda uma folheação riemanniana singular). Chegamos assim a uma contradição, pois existe uma vizinhança $V_\alpha^{x_0}$ de x_0 , $x_0 \in \sum_0$, tal que todas as folhas são compactas o que implica $V_\alpha^{x_0} \cap \sum_{\overline{r_1}} = \emptyset$. \square

Corolário 3.13. Não existe (M^n, \mathcal{F}^m) folheação riemanniana singular nas condições da proposição anterior tal que $\dim \sum_0 < n - m - 1$ e m par.

O teorema abaixo responde a seguinte questão: qual a relação entre as dimensões de \sum_0 e as dimensões de \mathcal{F}^m e M^n ?

Sejam C_x uma componente conexa de Σ_0 que contém $x \in \Sigma_0$ e $s = \dim C_x$. No caso de \mathcal{F} ser um fluxo riemanniano singular definimos $m' = \dim \overline{\mathcal{F}}$.

Teorema 3.14. Sejam (M^n, \mathcal{F}^m) uma folheação riemanniana singular e M^n uma variedade compacta e conexa. Então temos as seguintes possibilidades para s :

a) se m é par, então $s = n - m - 1$.

b) se m é ímpar, então temos duas alternativas:

i) se n é par, então $s = 2j$, para algum $j = 0, 1, \dots, t$, onde t é o maior inteiro tal que $t \leq (n - m)/2$.

ii) se n é ímpar, então $s = 2j + 1$, para algum $j = 0, 1, \dots, t$, onde t é o maior inteiro tal que $t \leq (n - m - 1)/2$.

Além disso, se $m = 1$ e $m' > 1$, então $s < n - m' - 1$.

Lema 3.15. Nas condições do teorema temos que $m \leq n - s - 1$. Se $m < n - s - 1$ então $n - s - 1$ é um número ímpar. Além disso, se $m = 1$ e $m' > 1$ então $s < n - m' - 1$.

Demonstração. Sejam $x_0 \in C_{x_0} \subset \Sigma_0$, $V_\alpha^{x_0}$ uma vizinhança tubular distinguida de x_0 . Como na proposição 3.10, $V_\alpha^{x_0}$ é difeomorfa a $\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{n-s}$, onde em $\{y\} \times \mathbb{R}^{n-s}$, $y \in \mathbb{R}^s$, a única folha singular é a origem e \mathcal{F}^* é saturada em $\{y\} \times \mathbb{R}^{n-s}$, onde $\mathcal{F}^* = \exp_{x_0}^{-1}(\mathcal{F}^m)$. Além disso \mathcal{F}^* induz

em cada esfera S_α^{n-s-1} com centro na origem de $\{y\} \times \mathbb{R}^{n-s}$, uma folheação riemanniana regular de dimensão m . Claramente, temos $m \leq n - s - 1$, pois \mathcal{F}^* é saturada nas esferas S_α^{n-s-1} . Se $m = n - s - 1$, uma folha regular de \mathcal{F}^* em S_α^{n-s-1} é a própria esfera S_α^{n-s-1} . Se $m < n - s - 1$, teremos uma folheação riemanniana regular em S_α^{n-s-1} , o que implica que $n - s - 1$ deve ser um número ímpar, já que não existem folheações regulares sobre esferas de dimensão par.

Para $m = 1$ e $m' > 1$, temos que $m' < n - s - 1$, pois segue de Carriere-Carron (ver [Car]) que nenhum fluxo riemanniano regular é denso sobre as esferas, logo $s < n - m' - 1$. \square

Demonstração do Teorema 3.14.

a) se m é par, segue que não existem folheações riemannianas regulares sobre as esferas, portanto pelo lema 3.15 este caso só é possível se $m = n - s - 1$, isto é $s = n - m - 1$.

b) se m é ímpar e n par, neste caso temos duas alternativas:

1) se $m = n - s - 1$, neste caso $s = n - m - 1$, em particular s é um número par;

2) se $m < n - s - 1$, pelo lema 3.15 temos que $n - s - 1$ é um número ímpar e como n é um número par, segue que s é um número par. Logo podemos escrever $s = 2j$, para algum $j = 0, 1, \dots, t$, onde t é o maior inteiro tal que $t \leq (n - m)/2$.

Agora, se m é ímpar e n ímpar, temos duas alternativas: i) $m = n - s - 1$, logo s é um número ímpar; ii) $m < n - s - 1$, pelo lema 3.15 $n - s - 1$ é um número ímpar e como n é ímpar segue que s é ímpar. Logo podemos escrever $s = 2j + 1$, para algum $j = 0, 1, \dots, t$, onde t é o maior inteiro tal que $t \leq (n - m - 1)/2$.

A parte final do teorema 3.14 relativa a $m = 1$ e $m' > 1$, segue do lema 3.15. \square

Corolário 3.16. Sejam $(M^{2k+1}, \mathcal{F}^m)$ como no teorema 3.14. Então \mathcal{F}^m possui folhas singulares isoladas se e somente se $m = 2k$.

Demonstração. Suponhamos que $s = 0$. Pelo teorema 3.14 m é necessariamente par e $s = 2k - m$, o que implica $m = 2k$.

Se $\text{codim } \mathcal{F}^m$ é 1 então segue do capítulo II que $s = 0$. \square

Tabela 3.17. Mostramos abaixo os únicos valores possíveis para n, m, m' e s , com $m \neq n - 1$, para $n = 3, 4, 5$.

n	3	4	4	4	4	5	5	5	5	5
m	1	1	1	1	2	1	1	1	2	3
m'	1	1	1	2	2	1	1	2	2	3
s	1	0	2	0	1	1	3	1	2	1

Observações:

a) esta tabela é consequência imediata do teorema 3.14.

b) pode-se construir, sem dificuldades, uma tabela semelhante para $n > 5$.

c) serão dados exemplos nos capítulos seguintes para cada caso acima quando $n = 3$ e 4 .

d) pelo corolário 3.16, se $m = n - 1$ então $s = 0$.

e) se m é par, todas as componentes conexas de Σ_0 terão a mesma dimensão.

f) no capítulo IV exibiremos um fluxo riemanniano singular em uma 4-variedade que admite componentes conexas de Σ_0 de dimensões distintas.

Proposição 3.19. Sejam (M^n, \mathcal{F}) um fluxo riemanniano singular, com $\Sigma_0 \neq \emptyset$ e $x_0 \in \Sigma_0$. Então temos as seguintes propriedades:

a) se existir uma vizinhança U de x_0 tal que todas as folhas em U são fechadas, então todas as folhas em (M^n, \mathcal{F}) são fechadas.

b) seja $\Sigma_{\bar{1}}$ o estrato de folhas de dimensão 1 de $(M^n, \bar{\mathcal{F}})$ (isto é, o conjunto de todas as folhas fechadas de \mathcal{F}), então $\Sigma_{\bar{1}} \neq \emptyset$ e o fecho $\overline{\Sigma_{\bar{1}}}$ contém todas as folhas singulares de \mathcal{F} (isto é, $\Sigma_0 \subset \overline{\Sigma_{\bar{1}}}$).

c) seja L uma folha regular de \mathcal{F} , então \bar{L} é difeomorfo a um toro T^r e (\bar{L}, \mathcal{F}) é conjugada a um fluxo linear regular sobre T^r , $1 \leq r < n - s - 1$.

Demonstração.

a) é analogo ao lema 3.12.

b) pelo corolário 3.6, dado $x_0 \in \Sigma_0$ existe uma vizinhança de x_0 , U , tal que (U, \mathcal{F}) é conjugada a um fluxo $(\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{n-s}, \mathcal{F}^*)$, onde $s = \dim C_{0,x_0}$. Em cada fibra $\{y\} \times \mathbb{R}^{n-s}$, $y \in \mathbb{R}^s$, \mathcal{F}^* é saturada tendo por folha singular somente $\{y\} \times \{0\}$ e \mathcal{F}^* induz nas esferas S_α^{n-s-1} , com centro em $\{y\} \times \{0\}$, um fluxo riemanniano regular. Por [Ghys] existe pelo menos uma folha fechada em $(S_\alpha^{n-s-1}, \mathcal{F}^*)$, para cada $\alpha > 0$. Segue o resultado.

c) seja L uma folha regular de \mathcal{F} , \bar{L} é uma subvariedade fechada e conexa, logo compacta e conexa em M , seja U uma vizinhança de x_0 , como a dada pelo corolário 3.7. Se $L \cap U \neq \emptyset$ então segue da descrição de U que L está contida numa esfera S_α^{n-s-1} , $\alpha > 0$, que não contém nenhuma folha singular, logo \bar{L} ainda estará contida em S_α^{n-s-1} . Portanto, (\bar{L}, \mathcal{F}) é um fluxo riemanniano regular denso em \bar{L} compacta e conexa, por um resultado de Carriere-Carron (ver [Car]) \bar{L} é difeomorfa a um toro T^r , $1 \leq r < n - s - 1$, \mathcal{F} em \bar{L} é conjugada a um fluxo linear regular sobre T^r .
 \square

CAPITULO IV

FLUXOS RIEMANNIANOS SINGULARES SOBRE AS 3 E 4-VARIEDADES

Chamamos de fluxos riemannianos singulares as folheações riemannianas singulares cujas folhas regulares são de dimensão 1.

O objetivo deste capítulo é classificar os fluxos riemannianos singulares sobre as 3-variedades a exemplo do trabalho de Carriere ([Car]) sobre fluxos riemannianos em 3-variedades e descrever os fluxos riemannianos singulares sobre as 4-variedades de maneira análoga ao trabalho de Almeida-Molino ([Alm-Mol]) sobre fluxos riemannianos sobre 4-variedades.

Obtemos alguns resultados sobre fluxos riemannianos singulares, com todas folhas fechadas, tais resultados nos auxiliarão no estudo dos fluxos riemannianos singulares sobre variedades de dimensões pequenas.

Fluxos riemannianos singulares com todas as folhas fechadas

Vejam os que acontece se (M, \mathcal{F}) é um fluxo riemanniano regular (isto é $\Sigma_0 = \emptyset$) com todas as folhas fechadas. Neste caso todas as folhas de \mathcal{F} tem holonomia finita (ver [Mol]₂), para M não necessariamente compacta. Por [Eps]₂ e [Eps]₃ isto é equivalente ao fato das folhas serem subvariedades totalmente geodésicas; e usando o teorema:

Teorema 4.1 ([Wad]). Seja (M, \mathcal{F}) um fluxo regular tal que as folhas são fechadas, onde M não é necessariamente compacta. Então existe uma ação diferenciável $\phi : S^1 \times M \rightarrow M$ tal que as órbitas são as folhas de \mathcal{F} , se e somente se, existe alguma métrica riemanniana em M com respeito a qual as folhas de \mathcal{F} são subvariedades totalmente geodésicas de M .

Obtemos o teorema bem conhecido:

Teorema 4.2. Seja (M, \mathcal{F}) um fluxo riemanniano regular (M não é necessariamente compacta), com todas as folhas fechadas, sobre M conexa. Então existe uma ação diferenciável $\phi : S^1 \times M \rightarrow M$ tal que as órbitas são as folhas de \mathcal{F} .

O exemplo abaixo mostra que o teorema 4.2 não admite uma generalização para um fluxo singular (não riemanniano) com todas as folhas fechadas e $\Sigma_0 \neq \emptyset$. Neste caso, não existe nem sequer uma ação topológica efetiva do S^1 tal que as órbitas sejam as folhas do fluxo.

Exemplo. Considere o fluxo singular \mathcal{F} no toro $S^1 \times S^1$ cujas as folhas regulares são $S^1 \times \{\alpha\}$, $\alpha \in S^1 - \{e\}$, e as folhas singulares são os pontos de $S^1 \times \{e\}$, $e \in S^1$. Existe uma ação do S^1 diferenciável em $T^2 - (S^1 \times \{e\})$ tal que as órbitas são as folhas de \mathcal{F} . Se existisse uma ação topológica do S^1 em T^2 , poderíamos considerá-la uma ação efetiva (ver demonstração da proposição 4.3). Contudo não existe uma ação topológica efetiva do S^1 no toro T^2 com pontos fixos (ver [Bre]).

Consideremos o caso de um fluxo riemanniano singular (M, \mathcal{F}) com $\sum_0 \neq \emptyset$ e com todas as folhas fechadas.

Proposição 4.3. Seja (M^n, \mathcal{F}) um fluxo riemanniano singular com todas as folhas fechadas e $\sum_0 \neq \emptyset$, onde M^n é compacta e conexa. Então existe uma ação topológica efetiva $\Psi : S^1 \times M \rightarrow M$, com as seguintes propriedades:

- a) as folhas de \mathcal{F} são as órbitas de Ψ .
- b) $\Psi / (S^1 \times (M - \sum_0))$ é uma ação efetiva diferenciável.
- c) se C é uma componente conexa de \sum_0 de dim k , então existe uma vizinhança de C em M , V^C , que é um fibrado localmente trivial com trivializações $U \times D^{n-k}$, onde U é um aberto em C , com \mathcal{F} saturada em cada fibra D^{n-k} .

Demonstração. $(M - \sum_0, \mathcal{F})$ é um fluxo riemanniano regular com todas as folhas fechadas. Como $\sum_1 = M - \sum_0$ é conexo, segue do caso

regular que existe uma ação C^∞ $\varphi' : S^1 \times \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_1$ tal que as órbitas de φ' são as folhas de \mathcal{F} em Σ_1 . Definimos a ação efetiva diferenciável:

$$\varphi : (S^1/N) \times \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_1$$

por $\varphi(\bar{\theta}, y) = \varphi'(\theta, y)$, onde $N = \{\theta \in S^1 / \varphi'(\theta, y) = y, \forall y \in \Sigma_1\}$. N é um subgrupo fechado de S^1 que fixa todos os pontos de Σ_1 pela ação φ' . N é finito ou todo S^1 . Entretanto N não pode ser todo S^1 , pois o conjunto de pontos fixos é Σ_0 , segue que S^1/N é difeomorfo a S^1 .

Assim

$$\varphi : S^1 \times \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_1,$$

é uma ação diferenciável efetiva do S^1 cujas as órbitas são as folhas de \mathcal{F} em Σ_1 .

Definimos a aplicação

$$\Psi : S^1 \times M \rightarrow M$$

por
$$\Psi(\theta, y) = \begin{cases} \varphi(\theta, y), & \text{se } y \notin \Sigma_0 \\ y, & \text{se } y \in \Sigma_0. \end{cases}$$

Ψ é contínua nos pontos de Σ_0 . De fato, seja $x \in \Sigma_0$, tomemos uma vizinhança tubular distinguida de x , V^x , nesta vizinhança as folhas de \mathcal{F} estão contidas nas esferas S_α^x de raio α com centro em x , logo as órbitas de Ψ também estão contidas nestas esferas, assim

$$\lim_{(\theta_n, y_n) \rightarrow (\theta, x)} \Psi(\theta_n, y_n) = \dot{x} = \Psi(\lim \theta_n, \lim y_n),$$

portanto Ψ é contínua em x . É claro que Ψ é uma ação topológica.

Os itens a) e b) da proposição são agora imediatos.

Seja C uma componente conexa de Σ_0 .

Lema 4.4. Seja (M, \mathcal{F}) um fluxo riemanniano singular com $\Sigma_0 \neq \emptyset$. Então \mathcal{F} é saturada nas fibras transversas da vizinhança tubular distinguida V_r^C .

Demonstração. Sejam $x \in V_r^C$, P_x a placa passando por x contida em V_r^C e $\pi : V_r^C \rightarrow C$ a projeção ortogonal.

Sejam h_α a transformação homotética definida em V_r^C , $r' \in \mathbb{R}$ tal que $x \in S_{r'}^{\pi(x)}$, segue que $P_x \subset S_{r'}^{\pi(x)}$. Logo, a placa $h_\alpha(P_x)$ está contida em $S_{\alpha r'}^{\pi(x)}$, para todo α suficientemente pequeno. Assim $\lim_{\alpha \rightarrow 0} h_\alpha(P_x)$ está contido em $\lim_{\alpha \rightarrow 0} S_{\alpha r'}^{\pi(x)} = \pi(x)$. Portanto, para todo $z \in P_x$ temos que $\pi(z) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} h_\alpha(z) = \pi(x)$. \square

A propriedade c) da proposição segue do lema acima. \square

Permanece em aberto a questão de sabermos se, dado um fluxo riemanniano singular definido em M com todas as folhas fechadas e $\Sigma_0 \neq \emptyset$, existe uma ação do S^1 diferenciável em M tal que as órbitas sejam as folhas do fluxo riemanniano singular.

Proposição 4.5. Seja (M^n, \mathcal{F}) um fluxo riemanniano singular com todas as folhas fechadas, $\dim \Sigma_0 = n - 2$ e M^n uma variedade compacta

e conexa tal que as vizinhanças tubulares $V_{r_i}^{C_i}$ das componentes conexas C_1, \dots, C_k de Σ_0 sejam da forma $C_i \times D^2$ (vizinhança tubular produto), $i = 1, \dots, k$. Então existe uma ação diferenciável $\varphi : S^1 \times V_{r_i}^{C_i} \longrightarrow V_{r_i}^{C_i}$ tal que as órbitas são as folhas de \mathcal{F} .

Demonstração. Para simplificar a notação escreveremos a componente conexa C_i apenas como C , na realidade os argumentos usados independem do índice i .

Seja

$$\psi_C : S^1 \times (C \times D^2(0, r)) \longrightarrow C \times D^2(0, r)$$

dada por $\psi_C(\theta, x, \alpha, \theta') = (x, \alpha, \theta + \theta')$.

Sejam φ_1 e φ_2 duas ações diferenciáveis do grupo de Lie G definidas nas variedades X e Y , respectivamente. Dizemos que as ações são equivalentes se existe um difeomorfismo $f : X \longrightarrow Y$ tal que $f(\varphi_1(g, x)) = \varphi_2(g, f(x))$, para todo $g \in G$ e para todo $x \in X$, neste caso dizemos que f é um difeomorfismo equivariante.

Lema 4.6. Uma ação livre diferenciável ρ do S^1 em $C \times S^1$ atuando no segundo fator é equivalente a ação linear $\Phi : S^1 \times C \times S^1 \longrightarrow C \times S^1$ dada por $\Phi(\theta, x, \theta') = (x, \theta + \theta')$.

Demonstração. Basta definir a aplicação

$$f : C \times S^1 \longrightarrow C \times S^1$$

por $f(\rho(\theta, x, e)) = \Phi(\theta, x, e)$, onde e é o elemento neutro de S^1 . f está bem definida (ver por exemplo [Bre]).

Observe que $\rho/(S^1 \times C \times \{e\})$ e $\Phi/(S^1 \times C \times \{e\})$ são difeomorfismos.

Logo, como

$$f(x, \theta) = (\Phi/(S^1 \times C \times \{e\})) \circ (\rho/(S^1 \times C \times \{e\}))^{-1}(x, \theta)$$

segue que f é um difeomorfismo. Vamos mostrar que as ações ρ e Φ são equivalentes

$$\begin{aligned} f(\rho(\theta, x, y)) &= f(\rho(\theta, \rho(\theta', x, e))) = f(\rho(\theta\theta', x, e)) \\ &= \Phi(\theta\theta', x, e) = \Phi(\theta, (\Phi(\theta', x, e))) = \Phi(\theta, f(\rho(\theta', x, e))) \\ &= \Phi(\theta, f(x, y)), \text{ para todo } \theta \in S^1 \text{ e } (x, y) \in C \times S^1. \quad \square \end{aligned}$$

Do lema acima temos que a ação $(\partial\overline{V}_r^C, \Psi)$ dada na proposição 4.3 é equivalente a ação $(C \times S^1, \Phi)$ definida no lema 4.6. Portanto as órbitas de ψ_C em $\partial\overline{V}_r^C$ são as folhas de \mathcal{F} . Como ψ_C é definida levando uma folha de um tubo em outra folha de outro tubo homoteticamente, vemos que todas as órbitas de ψ_C são as folhas de \mathcal{F} . \square

Folheações riemannianas singulares de codim 1 sobre as 3-variedades

Seja (M^3, \mathcal{F}) uma folheação riemanniana singular de codim 1 com folha singular, sobre a 3-variedade M^3 compacta, conexa e orientável. Suponhamos que \mathcal{F} é transversalmente orientável no estrato regular. Segue do capítulo II, que $M/\mathcal{F} = [0,1]$ e as únicas folhas singulares de \mathcal{F} são $p^{-1}(0) = L_0$ e $p^{-1}(1) = L_1$, onde $p: M \rightarrow M/\mathcal{F}$ é a projeção quociente.

O estrato regular (Σ_2, \mathcal{F}) , define uma folheação riemanniana de codim 1 com todas as folhas fechadas, sobre o aberto conexo Σ_2 de M^3 .

Segue por uma versão do teorema de estabilidade (ver por exemplo [Cam-Lins]) que todas as folhas de (Σ_2, \mathcal{F}) são difeomorfas uma a outra.

Se houver folha singular de dimensão zero, então numa vizinhança tubular distinguida desta folha singular os tubos serão difeomorfos a esferas S^2 , o que implica que as folhas regulares de \mathcal{F} nesta vizinhança tubular serão difeomorfas a esferas S^2 . Como vimos acima as folhas de (Σ_2, \mathcal{F}) são difeomorfas, logo todas as folhas de (Σ_2, \mathcal{F}) , neste caso, são difeomorfas a esferas S^2 .

Se houver folha singular de dimensão um, então numa vizinhança tubular distinguida desta folha singular os tubos serão difeomorfos a toros T^2 , logo todas as folhas de (Σ_2, \mathcal{F}) , neste caso, serão difeomorfas a toros T^2 .

Da análise acima, concluímos que as duas folhas singulares são sempre de mesma dimensão.

Tomemos duas vizinhanças tubulares distinguidas de L_0 e L_1 , V^{L_0} e V^{L_1} , respectivamente, tal que $p^{-1}([0, 1/2)) = V^{L_0}$ e $p^{-1}((1/2, 1]) = V^{L_1}$.

Assim,

$$M \simeq \overline{p^{-1}([0, 1/2))} \cup_{\tilde{f}} \overline{p^{-1}((1/2, 1])} \simeq \overline{V^{L_0}} \cup_f \overline{V^{L_1}},$$

onde \tilde{f} e f são difeomorfismos entre as respectivas fronteiras, logo (M^3, \mathcal{F}) só pode ser uma das seguintes alternativas:

a) se as folhas singulares são pontos, então

$$M \simeq \overline{B^3(0, 1)} \cup_{f'} \overline{B^3(0, 1)},$$

as folhas regulares de \mathcal{F} em cada bola B^3 são as esferas

$$S_\alpha^2 = \{x \in B^3 / d(x, 0) = \alpha\}$$

e as folhas singulares são as origens de cada bola B^3 . Portanto, neste caso M é difeomorfa a S^3

b) se as folhas singulares são difeomorfas cada uma a esfera S^1 , então

$$M \simeq \overline{(S^1 \times D^2)} \cup_{f'} \overline{(S^1 \times D^2)},$$

e \mathcal{F} em cada toro sólido é dado pelas órbitas da ação

$$\varphi : (SO(2) \times SO(2)) \times (S^1 \times D^2) \longrightarrow S^1 \times D^2$$

definida por $\varphi(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \alpha, \theta_4) = (\theta_1 + \theta_3, \alpha, \theta_2 + \theta_4)$, onde $(\theta_3, \alpha, \theta_4)$ é uma parametrização para $S^1 \times D^2$.

Fluxos Riemannianos Singulares sobre as 3-variedades

Carriere demonstrou o seguinte teorema, no qual dá a classificação dos fluxos riemannianos regulares sobre as 3-variedades.

Teorema 4.7.([Car]) Seja \mathcal{F} um fluxo riemanniano regular (orientável) sobre uma 3-variedade fechada e conexa M (orientável) então temos as seguintes possibilidades:

1) se as folhas de \mathcal{F} são densas, então M é difeomorfa a T^3 e \mathcal{F} é conjugada a um fluxo linear sobre T^3 .

2) se as folhas de \mathcal{F} não são nem fechadas e nem densas, então dois casos são possíveis:

a) M é difeomorfa a T^3 e \mathcal{F} é conjugada a um fluxo linear sobre T^3 ;

ou

b) M é difeomorfa a um fibrado hiperbólico T_A^3 (toro hiperbólico), onde $T_A^3 = (T^2 \times \mathbb{R}) / (m, t) \sim (A(m), t+1)$ com $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ e $\text{tr} A > 2$. A direção própria Δ_2 gerada pelo auto-vetor v_2 (associado ao auto-valor $1/\lambda$) de A induz sobre $T^2 \times \mathbb{R}$ um fluxo $\overline{\Phi}_2$ que é irracional em cada fibra T^2 . $\overline{\Phi}_2$ define sobre T_A^3 um fluxo Φ_2 . \mathcal{F} é conjugada a um fluxo Φ_2 .

3) se \mathcal{F} possui duas folhas fechadas, então dois casos são possíveis:

a) M é difeomorfa a um espaço lenticular

$$L_{p,q} = (S^1 \times \overline{D^2}) \cup_f (S^1 \times \overline{D^2})$$

e \mathcal{F} é conjugada a um fluxo onde as folhas nos toros sólidos são densas em toros T_α^2 , α o raio em $S^1 \times D^2$, e as folhas fechadas são os círculos no centro de cada toro sólido.

b) M é difeomorfa a $S^2 \times S^1$, e o fluxo \mathcal{F} é conjugado a um fluxo dado pela suspensão de uma rotação irracional de S^2 .

4) se o fluxo \mathcal{F} tem todas as folhas fechadas, então M é um fibrado de Seifert onde as fibras são as órbitas de \mathcal{F} .

Observações:

1) todos os casos da classificação acima são isométricos exceto 2.b).

2) fica claro a partir do teorema 4.7 que para classificar os fluxos riemannianos singulares sobre 3-variedades, resta considerar apenas o caso de fluxos riemannianos singulares com $\sum_0 \neq \emptyset$.

Seja (M, \mathcal{F}) um fluxo riemanniano singular com $\sum_0 \neq \emptyset$, sobre a 3-variedade M compacta, conexa e orientável, com (\sum_1, \mathcal{F}) transversalmente orientável.

Exemplo. Usando 2.5 e o trabalho de [Ray] sobre ações do S^1 sobre 3-variedades podemos obter um grande número de exemplos.

Sejam C_i as componentes conexas do estrato minimal \sum_0 .

Teorema 4.8. Seja (M, \mathcal{F}) um fluxo riemanniano singular sobre a 3-variedade M compacta e conexa (orientável), com $\sum_0 \neq \emptyset$. Então (M, \mathcal{F})

tem a seguinte descrição: para cada i , C_i é difeomorfo a S^1 , \mathcal{F} na vizinhança tubular distinguida $V_{r_i}^{C_i}$ é saturada nas fibras transversas difeomorfas a $D^2(0, r_i)$ com todas as folhas fechadas e $(M - \cup_{i=1}^k V_{r_i}^{C_i}, \mathcal{F})$ é um fibrado de Seifert. Além disso, M/\mathcal{F} é uma superfície, a menos de um número finito de pontos singulares no seu interior, compacta e conexa com bordo difeomorfo a Σ_0 .

Observação 4.9. Se $x_0 \in \Sigma_0$, então na vizinhança tubular distinguida de x_0 , $V_{r_0}^{x_0}$, uma folha $L \in \mathcal{F}$ tal que $d(x_0, L) = \alpha < r_0$ está inteiramente contida no tubo $S_\alpha^{x_0}$ de $V_{r_0}^{x_0}$. De fato, Molino mostra que a componente conexa de $L_y \cap V_{r_0}^{x_0}$ que contém y , está contida em $S_\alpha^{x_0}$, mas como os tubos $S_\alpha^{x_0}$ são difeomorfos as esferas S^2 e L_y é conexo, segue que L_y está inteiramente contida em $S_\alpha^{x_0}$.

Lema 4.10. Seja $x_0 \in \Sigma_0$, então o fluxo \mathcal{F} em $V_{r_0}^{x_0}$ é saturado com todas folhas fechadas e $\dim \Sigma_0 = 1$.

Demonstração. A vizinhança tubular distinguida $V_{r_0}^{x_0}$ é difeomorfa a bola aberta $B^3(0, r_0)$. Pelo capítulo II podemos considerar a métrica usual do \mathbb{R}^3 como a métrica adaptada a \mathcal{F}^* ($= \exp_{x_0}^{-1}(\mathcal{F})$) em $B^3(0, r_0)$. Pela observação 4.9 as folhas de \mathcal{F}^* em $V_{r_0}^{x_0}$ que estão a distância α , $0 < \alpha < r_0$, de x_0 estão inteiramente contidas em $S_\alpha^{x_0}$ que é difeomorfa a S^2 . Assim temos para cada α o fluxo riemanniano singular $(S_\alpha^{x_0}, \mathcal{F}^*)$ induzido por \mathcal{F}^* em $S_\alpha^{x_0}$.

Fixemos α , como $S_\alpha^{x_0}$ é difeomorfa a esfera S^2 , \mathcal{F}^* possui singularidades, pois não existem folheações riemannianas regulares sobre S^2 . Pelos resultados do capítulo II a folheação riemanniana de codim 1 $(S_\alpha^{x_0}, \mathcal{F}^*)$ com \mathcal{F}^* orientável e transversalmente orientável possui todas as folhas fechadas e exatamente 2 folhas singulares. Como α é arbitrário, para cada $0 < \alpha < r_0$, $(S_\alpha^{x_0}, \mathcal{F}^*)$ é como descrito acima. Usando transformações homotéticas podemos concluir que existe uma semi-reta em $(B^3(0, r_0), \mathcal{F}^*)$ composta de folhas singulares de \mathcal{F}^* , portanto $\dim \Sigma_0 = 1$. \square

Observação 4.11. Essencialmente o lema 4.10 faz uma descrição de um fluxo riemanniano singular em \mathbb{R}^3 , tendo a origem como folha singular e admitindo a métrica canônica como uma métrica adaptada a este fluxo.

Pela lema 4.10 qualquer vizinhança tubular distinguida de $x \in \Sigma_0$, possui todas as folhas fechadas, logo pela proposição 3.19, segue que todas as folhas de (M, \mathcal{F}) são fechadas.

Lema 4.12. M/\mathcal{F} é uma superfície a menos de um número finito de pontos no seu interior, com bordo Σ_0/\mathcal{F} .

Demonstração. Como todas as folhas são fechadas e como a folheação induzida no estrato regular (Σ_1, \mathcal{F}) é um fluxo riemanniano regular, segue de [Mol]₂ que Σ_1/\mathcal{F} é uma superfície a menos de um número finito de pontos no seu interior correspondentes as folhas com holonomia não triviais. Pelo lema 4.10 vemos que se $x_0 \in \Sigma_0$ então $V_{r_0}^{x_0}/\mathcal{F}$ é difeomorfo a um

subconjunto do \mathbb{R}^2 tendo por fronteira as folhas singulares de \mathcal{F} em $V_{r_0}^{x_0}$.
Segue o resultado. \square

Observação 4.13. Os argumentos do lema acima são essencialmente os mesmos desenvolvidos por Molino em alguns casos do fecho $\bar{\mathcal{G}}$, onde \mathcal{G} é uma folheação riemanniana regular.

O estrato singular \sum_0 sendo compacto se decompõem em um número finito de componentes conexas,

$$\sum_0 = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_k.$$

Logo pelo lema 4.10, cada C_i é difeomorfo a S^1 , $i = 1, \dots, k$.

Tomemos vizinhanças tubulares distinguidas de C_i , $V_{r_i}^{C_i}$, $i = 1, \dots, k$, com raios r_i suficientemente pequenos para que sejam disjuntas duas a duas. Pelo lema 4.4, \mathcal{F} é saturada nas fibras transversas D^2 de $V_{r_i}^{C_i}$.

$(M - \cup_{i=1}^k V_{r_i}^{C_i}, \mathcal{F})$ é um fluxo riemanniano regular com todas as folhas fechadas sobre a 3-variedade $(M - \cup_{i=1}^k V_{r_i}^{C_i})$ compacta e conexa (com bordo), tendo por fronteira k componentes conexas cada uma difeomorfa a um toro T^2 . Segue de [Eps]₁ que $(M - \cup_{i=1}^k V_{r_i}^{C_i}, \mathcal{F})$ é um fibrado de Seifert. Isto conclui a demonstração do teorema 5.2. \square

Proposição 4.14. Seja (M^3, \mathcal{F}) um fluxo riemanniano singular e $\sum_0 \neq \emptyset$. Então existe uma ação efetiva diferenciável $\varphi : S^1 \times M^3 \rightarrow M^3$ tal que as órbitas de φ são as folhas de \mathcal{F} .

Demonstração. Pelo teorema 4.8 todas as folhas de \mathcal{F} são fechadas e $\dim \Sigma_0 = 1$, onde cada componente conexa C_i de Σ_0 é difeomorfa a S^1 . Tomemos uma vizinhança tubular distinguida de C_i , $V_{\alpha_i}^{C_i}$. Cada $V_{\alpha_i}^{C_i}$ é difeomorfa ao toro sólido $S^1 \times D^2(0, \alpha_i)$, com as folhas de \mathcal{F} saturadas nos discos transversos $D^2(0, \alpha_i)$.

Sem perda de generalidade, podemos supor que Σ_0 é conexa, para simplificar a notação escreveremos $\Sigma_0 = C$.

Para o fluxo riemanniano regular $(M - V_\alpha^C, \mathcal{F})$ existe uma ação diferenciável efetiva (proposição 4.3)

$$\phi : S^1 \times (M - V_\alpha^C) \longrightarrow M - V_\alpha^C,$$

tal que as órbitas de ϕ são as folhas \mathcal{F} . ϕ induz em $\partial \overline{V_\alpha^C}$ uma ação diferenciável do S^1 , agindo no disco transverso. Observamos que $\partial \overline{V_\alpha^C}$ é difeomorfa a $S^1 \times S^1$.

Definimos a ação diferenciável

$$\Phi : S^1 \times (S^1 \times D^2(0, \alpha)) \longrightarrow S^1 \times D^2(0, \alpha)$$

por $\Phi(e^{i\theta}, e^{i\theta'}, re^{i\theta''}) = (e^{i\theta'}, re^{i(\theta+\theta'')})$, $0 \leq \theta, \theta', \theta'' \leq 2\pi$, $r \in [0, \alpha[$.

Pelo lema 4.6, $\Phi/S^1 \times (S^1 \times S^1)$ é equivariante a $\phi/S^1 \times \partial \overline{V_\alpha^C}$, isto é existe um difeomorfismo equivariante $f : S^1 \times S^1 \longrightarrow \partial \overline{V_\alpha^C}$. Φ induz uma ação diferenciável $\tilde{\Phi}$ em $\overline{V_\alpha^C}$.

Fazendo a colagem (ver [Con-Flo]) das ações ϕ e $\tilde{\Phi}$, obtemos uma 3-variedade $M' = (M - V_\alpha^C) \cup_f \overline{V_\alpha^C}$ e uma ação diferenciável Φ' do S^1 em M' .

Por 2.5, Φ' induz um fluxo riemanniano singular \mathcal{F}' em M' , cujos pontos fixos são as folhas singulares.

Vamos mostrar que (M, \mathcal{F}) é conjugada a (M', \mathcal{F}') . Por construção de M' e f , para exibirmos um difeomorfismo entre M e M' que leve folhas de \mathcal{F} em folhas \mathcal{F}' é suficiente mostrar que f é difeotópica a identidade.

Lema 4.15. A aplicação f obtida pelo lema 4.6 é difeotópica a identidade.

Demonstração. Por construção, f restrita a $C \times \{e\}$ é a identidade e $f(x, y) = (x, g(x, y))$, onde $g : C \times S^1 \rightarrow S^1$ é diferenciável. Segue disto que a matriz de $GL(2, \mathbb{Z})$ associada a f pelo funtor de homotopia é a matriz identidade e portanto ([Rol], pg.26) f é isotópica a identidade. Sendo f um difeomorfismo, a isotopia pode ser construída diferenciável, logo f é difeotópica a identidade. \square

A proposição 4.14 é agora imediata. \square

Por 2.5, a recíproca da proposição 4.14 é verdadeira.

Corolário 4.16. Seja (M, \mathcal{F}) um fluxo riemanniano singular com $\sum_0 \neq \emptyset$ sobre a 3-variedade M compacta e conexa. Então M é difeomorfa

a

$$S^3 \# (S^2 \times S^1) \# \dots \# (S^2 \times S^1)_{2g+h-1} \# L_{(\alpha_1, \beta_1)} \# \dots \# L_{(\alpha_l, \beta_l)}$$

onde $\#$ indica soma conexa, g o gênero da 2-variedade topológica M/\mathcal{F} , h o número de componentes conexas de Σ_0 , l o número de folhas com holonomia e $L_{(\alpha_i, \beta_i)}$ espaço lenticular. Além disso, \mathcal{F} é dada por uma ação do S^1 representada pela $(2l + 2)$ -upla de números inteiros

$$(g, h, (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_l, \beta_l)).$$

A demonstração segue da proposição 4.14 e da classificação de [Ray] (ver também [Orl-Ray]₁) para 3-variedades compactas, conexas e orientáveis, com órbitas orientáveis na categoria diferenciável.

A $(2l + 2)$ -upla de inteiros

$$(g, h, (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_l, \beta_l)),$$

é um conjunto de invariantes associado a uma ação φ do S^1 em uma 3-variedade compacta, conexa e orientável. Dado este conjunto de invariantes, φ é descrita da seguinte maneira: seja $V_{r_i}^{C_i} \cong C_i \times D^2$ vizinhança tubular da componente conexa C_i , $i = 1, \dots, h$, do conjunto de pontos fixos, $V_{t_j}^{L_j} \cong L_j \times D^2$ vizinhança tubular da órbita excepcional L_j (folha com holonomia), $j = 1, \dots, l$, $M' = M - \cup_{i=1}^h V_{r_i}^{C_i} - \cup_{j=1}^l V_{t_j}^{L_j}$, $(M')^*$ o espaço órbita (2-variedade) de gênero g , a ação φ em cada um destes conjuntos é dada pelas seguintes ações lineares usuais:

$$\varphi/S^1 \times V_{r_i}^{C_i} : S^1 \times (D^2 \times S^1) \longrightarrow D^2 \times S^1$$

$$(z, \rho e^{i\theta}, e^{i\theta'}) \longmapsto (z\rho e^{i\theta}, e^{i\theta'})$$

$$\varphi/S^1 \times V_{t_j}^{L_j} : S^1 \times (D^2 \times S^1) \longrightarrow (D^2 \times S^1)$$

$$(z, \rho e^{i\theta}, e^{i\theta'}) \longmapsto (z^{\alpha_j} \rho e^{i\theta}, z^{\beta_j} e^{i\theta'})$$

$$\varphi/S^1 \times M' : S^1 \times ((M')^* \times S^1) \longrightarrow ((M')^* \times S^1)$$

$$(e^{i\theta}, x, e^{i\theta'}) \longmapsto (x, e^{i(\theta+\theta')})$$

onde $0 \leq \rho \leq 1$, $0 \leq \theta < 2\pi$, $0 \leq \theta' < 2\pi$.

Corolário 4.17. Seja (M, \mathcal{F}) um fluxo riemanniano singular com $\Sigma_0 \neq \emptyset$ sobre a 3-variedade M compacta, conexa e simplesmente conexa. Então M é difeomorfa a S^3 e \mathcal{F} é dada pelas órbitas da ação linear usual do S^1 em S^3 com pontos fixos.

O corolário 4.17 mostra que a conjectura de Poincaré é verdadeira se a 3-variedade admite um fluxo riemanniano singular com $\Sigma_0 \neq \emptyset$.

Observação 4.18. Pelo teorema 4.7 e corolário 4.17 um fluxo riemanniano singular sobre a esfera S^3 , (S^3, \mathcal{F}) , só pode ser um dos seguintes tipos:

- a) caso regular: i) teorema 4.7 item 3.a; ii) teorema 4.7 item 4.
- b) caso singular: corolário 4.17.

Fluxos Riemannianos Singulares sobre 4-variedades

Em [Alm-Mol] é feita uma classificação dos fluxos riemannianos regulares sobre as 4-variedades compactas e conexas (orientáveis). Classificação esta baseada na álgebra estrutural do fluxo riemanniano regular sobre M . Em consequência deste trabalho, para estudar os fluxos riemannianos singulares sobre 4-variedades resta considerar somente os casos em que $\Sigma_0 \neq \emptyset$.

Seja (M, \mathcal{F}) um fluxo riemanniano singular com $\Sigma_0 \neq \emptyset$ sobre a 4-variedade M compacta, conexa e orientável, com (Σ_1, \mathcal{F}) transversalmente orientável.

O lema a seguir nos dá a descrição da vizinhança de uma singularidade.

Lema 4.19. Seja $x_0 \in \Sigma_0$, então \mathcal{F} na vizinhança tubular distinguida de x_0 , $V_{r_0}^{x_0}$, é um dos seguintes tipos:

1) se x_0 é isolado em Σ_0 . Então, ou

a) para cada α ($0 < \alpha < r_0$), $(S_\alpha^{x_0}, \mathcal{F})$ é conjugada ao fluxo riemanniano regular sobre a esfera S^3 descrito pelo teorema 4.7 item 3.a;

ou

b) para cada α ($0 < \alpha < r_0$), $(S_\alpha^{x_0}, \mathcal{F})$ é conjugada ao fluxo riemanniano regular sobre S^3 descrito pelo teorema 4.7 item 4.

2) se x_0 não é isolado em Σ_0 . Então para cada α , $(S_\alpha^{x_0}, \mathcal{F})$ é conjugada ao fluxo riemanniano singular sobre S^3 dado pelo corolário 4.17.

Demonstração. Fixado α , o tubo $S_\alpha^{x_0}$ em $V_{r_0}^{x_0}$ é difeomorfo a esfera S^3 . Pela transformação homotética, $(S_\alpha^{x_0}, \mathcal{F})$ é conjugada a $(S_{\alpha'}^{x_0}, \mathcal{F})$ para qualquer α' , $0 < \alpha' < r_0$. O resultado segue então da classificação dos fluxos riemannianos singulares sobre a esfera S^3 (ver observação 4.18).

□

Observação 4.20. Todos os fluxos riemannianos singulares descritos no lema 4.19, em $V_{r_0}^{x_0}$, $x_0 \in \Sigma_0$, são levados por $\exp_{x_0}^{-1}$ em fluxos riemannianos singulares dados pelas órbitas de uma ação linear

$$H \times B^4(0, r_0) \longrightarrow B^4(0, r_0),$$

onde $B^4(0, r_0) = \exp_{x_0}^{-1}(V_{r_0}^{x_0})$ é a bola aberta com centro na origem de raio r_0 e $H \subset SO(4)$ é um subgrupo de Lie conexo. De fato, em cada tubo $S_\alpha^{x_0}$, \mathcal{F} é conjugada a um fluxo dado pela ação $\psi : H \times S^3 \longrightarrow S^3$, $H \subset SO(4)$. Consideremos agora a ação

$$\varphi : H \times B^4(0, r_0) \longrightarrow B^4(0, r_0)$$

dada por $\varphi(h, \theta_1, \theta_2, \theta_3, r) = (\psi(h, \theta_1, \theta_2, \theta_3), r)$, onde $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, r)$ são coordenadas polares para $B^4(0, r_0)$. Usando a transformação homotética fica claro que as órbitas desta ação são as folhas de \mathcal{F} em $B^4(0, r_0)$.

Observação 4.21. $(M, \overline{\mathcal{F}})$ é ainda uma folheação riemanniana singular, ver observação 3.11.

Lema 4.22. As folhas regulares de $(M, \overline{\mathcal{F}})$ tem dimensão ≤ 2 .

Demonstração. Pela observação 4.21 $(M, \overline{\mathcal{F}})$ é ainda uma folheação riemanniana singular. Suponhamos por absurdo que exista uma folha de dimensão maior que dois em $(M, \overline{\mathcal{F}})$, então o estrato regular $\Sigma_{\overline{1}}$ de $(M, \overline{\mathcal{F}})$ é constituído de folhas de dimensão > 2 , como $\Sigma_{\overline{1}}$ é denso em M temos uma contradição, pois pelo lema 4.19, $\Sigma_{\overline{1}} \cap V_{r_0}^{x_0} = \emptyset$, para qualquer $x_0 \in \Sigma_0$.

□

Temos então dois casos a estudar:

Primeiro Caso. As folhas de $\Sigma_{\overline{1}}$ são de dimensão 1. Neste caso todas as folhas de \mathcal{F} são fechadas.

Exemplos:

1) Seja $\varphi : SO(2) \times \overline{B^4(0, 1)} \longrightarrow \overline{B^4(0, 1)}$ a ação linear definida por

$$\varphi(\theta, \theta_1, \theta_2, \theta_3, r) = (\Psi(\theta, \theta_1, \theta_2, \theta_3), r),$$

onde Ψ é uma das ações lineares do teorema 4.7 item 4 sobre a esfera S^3 com coordenadas polares $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$. Neste caso todas as folhas são fechadas. Realizamos a colagem (ver [Con- Flo])

$$(M^4, \varphi') = \overline{(B^4(0, 1), \varphi)} \cup_{id} \overline{(B^4(0, 1), \varphi)},$$

onde id é a aplicação identidade da fronteira de $\overline{B^4(0, 1)}$. Com isto conseguimos um fluxo riemanniano singular com duas singularidades isoladas cujas folhas são as órbitas da ação φ' .

2) Definimos a ação diferenciável

$$\psi : S^1 \times (S_2 \times \overline{D^2(0,1)}) \longrightarrow (S_2 \times \overline{D^2(0,1)})$$

por $\psi(\theta_1, z, re^{i\theta_2}) = (z, re^{i(\theta_1+\theta_2)})$, onde S_2 é uma 2-variedade compacta, conexa e orientável. Fazemos a colagem

$$(M^4, \psi') = (S_2 \times \overline{D^2(0,1)}, \psi) \cup_{id} (S_2 \times \overline{D^2(0,1)}, \psi),$$

onde id é aplicação identidade entre as fronteiras de $S_2 \times \overline{D^2(0,1)}$, conseguimos assim um fluxo riemanniano singular com $\sum_0 = S_2 \cup S_2$, cujas folhas serão as órbitas da ação diferenciável ψ' .

Poderemos conseguir muitos outros exemplos de fluxos riemannianos singulares com todas as folhas fechadas através do trabalho de Fintushel ([Fin]) sobre ações do S^1 em variedades de dimensão quatro.

Decompomos \sum_0 em componentes conexas C_i , $i = 1, \dots, k$.

Segue da tabela 3.17 que C_i só pode ser um ponto ou uma 2-variedade compacta e conexa. Logo, C_i não pode ser a esfera S^1 . Observe que também poderíamos deduzir as dimensões de C_i usando o lema 4.19.

Agora, usando proposição 4.3 temos que existe uma ação efetiva do S^1 em M , tal que as órbitas são as folhas de \mathcal{F} .

Segundo Caso. As folhas de $\sum_{\bar{1}}$ são de dimensão 2.

Exemplo. Seja $\varphi : T^2 \times M \longrightarrow M$ uma ação diferenciável com pontos fixos sobre a 4-variedade M compacta e conexa, então existe uma métrica

riemanniana g (ver 2.5) tal que T^2 age como um subgrupo de isometrias de (M, g) , portanto as órbitas de φ definem as folhas de uma folheação riemanniana singular em M . Tomemos um subgrupo de lie H de T^2 , conexo de dimensão 1 tal que $\overline{H} = T^2$. Com isso φ induz uma ação $\varphi^* : H \times M \rightarrow M$ cujas órbitas serão as folhas de um fluxo riemanniano singular. Disto segue que cada ação φ de T^2 em M define pela ação φ^* de H em M um fluxo riemanniano singular tal que o fecho deste fluxo é dado pelas órbitas de φ . Do trabalho de [Orl-Ray]₂ sobre ações de T^2 sobre 4-variedades, obtemos um grande número de exemplos cujas órbitas (folhas) do estrato regular de $(M, \overline{\mathcal{F}})$ são de dimensão 2.

Lema 4.23. Seja (M, \mathcal{F}) um fluxo riemanniano singular com $\sum_0 \neq \emptyset$ e com folhas regulares de $\overline{\mathcal{F}}$ de dimensão 2. Então $\sum_0 = \{x_1, \dots, x_k\}$, $(V_{r_i}^{x_i}, \mathcal{F})$ é como no lema 4.19 item 1.a e $(M - \cup_{i=1}^k V_{r_i}^{x_i}, \mathcal{F})$ é a restrição de um fluxo riemanniano regular sobre uma 4-variedade compacta e conexa (sem bordo) (N, \mathcal{F}') com folhas de $\overline{\mathcal{F}'}$ de dimensões 1 e 2.

Demonstração. Pelo lema 4.19 temos uma única possibilidade para $(V_{r_0}^{x_0}, \mathcal{F})$, com $x_0 \in \sum_0$ e folhas regulares de $\overline{\mathcal{F}}$ de dimensão 2, que é o descrito no item 1.a, logo as singularidades são isoladas, segue que $\sum_0 = \{x_1, \dots, x_k\}$, $k < \infty$.

Consideremos vizinhanças tubulares distinguidas de $x_i \in \sum_0$, $V_{r_i}^{x_i}$ com raios r_i suficientemente pequenos para que as vizinhanças tubulares sejam disjuntas duas a duas.

Seja $M' = M - \cup_{i=1}^k V_{r_i}^{x_i}$. Cada uma das componentes conexas do bordo de M' é difeomorfa a S^3 . Fazemos a colagem

$$(N, \mathcal{F}') = (M', \mathcal{F}) \cup_{id} (M', \mathcal{F}),$$

onde id é a aplicação identidade entre as fronteiras de M' . Com isso (N, \mathcal{F}') é um fluxo riemanniano regular sobre a 4-variedade N compacta e conexa. Segue o resultado . \square

Fica assim demonstrado o seguinte teorema:

Teorema 4.24. Seja (M, \mathcal{F}) um fluxo riemanniano singular com $\sum_0 \neq \emptyset$ sobre a 4-variedade M compacta e conexa. Então temos duas possibilidades:

1) se todas as folhas forem fechadas, as componentes conexas de \sum_0 são pontos ou são 2-variedades compactas e conexas . (M, \mathcal{F}) é dado pelas órbitas de uma ação topológica efetiva $\varphi : S^1 \times M \longrightarrow M$, tal que φ restrita ao estrato regular é diferenciável.

2) se houver folha não fechada, então $\sum_0 = \{x_1, \dots, x_k\}$ e $(M - \cup_{i=1}^k V_{r_i}^{x_i}, \mathcal{F})$ é a restrição de um fluxo riemanniano regular descrito em [Alm-Mol] com folhas regulares de $\overline{\mathcal{F}}$ de dimensão 2 e para cada $i = 1, \dots, k$, $(V_{r_i}^{x_i}, \mathcal{F})$ é dado por uma ação $H \times B^4 \longrightarrow B^4$, onde H é um subgrupo de Lie conexo de T^2 de dimensão 1 tal que $\overline{H} = T^2$.

O exemplo abaixo mostra a existência de um fluxo riemanniano singular numa variedade compacta e conexa de dimensão 4, com todas fo-

lhas fechadas, tal que \sum_0 é uma união disjunta de um número finito de 2-variedades e de um número par de singularidades isoladas.

Exemplo. Consideremos a ação do S^1 diferenciável

$$\varphi : S^1 \times (S^3 \times S^1) \longrightarrow (S^3 \times S^1)$$

dada por $\varphi(\theta, x, \theta') = (x, \theta + \theta')$. Sejam g_1, \dots, g_k k inteiros positivos, $T_{g_i, C} = g_i$ -toro cheio contido em S^3 , $i = 1, \dots, k$, tais que $T_{g_i, C} \cap T_{g_j, C} = \emptyset$, se $i \neq j$. Os conjuntos $T_{g_i, C} \times S^1$ são abertos em $S^3 \times S^1$. Observamos que $\partial(\overline{T_{g_i, C}} \times S^1) = T_{g_i} \times S^1 = \partial(T_{g_i} \times \overline{D^2})$, onde T_{g_i} é o g_i -toro. Definimos a ação

$$\phi_i : S^1 \times (T_{g_i} \times \overline{D^2}) \longrightarrow T_{g_i} \times \overline{D^2}$$

por $\phi_i(\theta, x, \alpha, \theta') = (x, \alpha, \theta + \theta')$ desta forma as ações φ e ϕ_i coincidem em $\partial(\overline{T_{g_i, C}} \times S^1)$, podendo assim serem coladas. Portanto, obtemos uma ação do S^1 em

$$(S^3 - \cup_{i=1}^k T_{g_i, C}) \times S^1 \cup_{id} \cup_{i=1}^k (T_{g_i} \times \overline{D^2})$$

que possui $\cup_{i=1}^k T_{g_i}$ como o conjunto de pontos fixos.

Tomemos o S^4 com uma ação diferenciável orientável do S^1 com dois pontos fixos isolados $\{x_1, x_2\}$. Seja L uma órbita regular desta ação em S^4 , tomemos uma vizinhança tubular V^L de L , logo V^L é difeomorfo a $L \times B^3$ com S^1 agindo em L e trivialmente em B^3 . Agora $\partial(L \times \overline{B^3}) = \partial(\overline{D^2} \times S^2)$. Colamos a ação do S^1 em $(S^4 - L \times B^3)$ com a ação em

$$((S^3 - \cup_{i=1}^k T_{g_i, C}) \times S^1 - (T_{0, C} \times S^1)),$$

a colagem esta bem definida pois $\partial(S^4 - L \times \overline{B^3}) = \partial(\overline{T_{0,C}} \times S^1)$ e as ações são iguais nestes conjuntos, portanto colamos pela identidade. Podemos repetir r vezes a colagem de $S^4 - L \times B^3$ como acima.

Portanto obtemos uma ação diferenciável do S^1 numa 4-variedade compacta e conexa cujo conjunto de pontos fixos é $\cup_{i=1}^k T_{g_i} \cup_{j=1}^{2r} \{x_j\}$. Por 2.5 esta ação do S^1 , resultante das colagens, define um fluxo riemanniano singular com todas as folhas fechadas tal que \sum_0 é o conjunto de pontos fixos desta ação.

BIBLIOGRAFIA

- [Alm-Mol] R. Almeida-P. Molino, *Flots Riemanniens sur les 4-variétés compactes*, Tohoku Mathematical Journal, vol. 38, 2, pg. 313- 326, 1986.
- [Bol] J. Bolton, *Transnormal Systems*, Quart. J. Math. Oxford, 24 (1973), 385-395.
- [Bre] G.E. Bredon, *Introduction to Compact Transformation Groups*, Academic Press, New York and London, 1972.
- [Blu-Heb] R.A.Blumenthal-J.Hebda, *Complementary distributions which preserve the leaf geometry and applications to totally geodesic foliations*, Quart. Journal Math. Oxford, 35, 383-392, 1984.
- [Cai] G. Cairns, *Feuilletages Géodésibles*, Thesis, Montpellier, 1987.

- [Cam-Lins] C. Camacho-A. Lins Neto, *Teoria Geométrica das Folheações*, IMPA-Projeto Euclides, 1979.
- [Car] Y. Carriere, *Flots Riemanniens*, "Structure transverses aux feuilletages", *Astérisque* 116, 1984, 31-52.
-
- [Con-Flo] P.E. Conner-E.E. Floyd, *Differentiable Periodic Maps*, Springer-Verlag, 1964.
- [Daz] P. Dazord, *Feuilletages a singularites*, *Indag. Math.*, 47, 21-39, 1985.
- [Eps]₁ D.B.A. Epstein, *Periodic flows on three-manifolds*, *Ann. Math.*, 95, 66-82, 1972.
- [Eps]₂ D.B.A. Epstein, *Foliations by Geodesic Circles*, Appendix A, *Manifolds all of whose geodesics are closed*, A.L. Besse, Springer-Verlag, 1978.
- [Eps]₃ D.B.A. Epstein, *Foliations with all leaves compact*, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, 26, 1976, 265-282.
- [Fin] R.Fintushel, *Classification of circle actions 4-manifolds*, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 242, 377-390, 1978.

[Ghys] E. Ghys, *Feuilletages riemanniens sur les varietes simplement connexes*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 34, 203-223, 1984.

[Grom-Grov] D. Gromoll-K. Grove, *The low-dimensional metric foliations of euclidean spheres*, J. Diff. Geometry, 28, 143-156, 1988.

[Hir] M.W. Hirsch, *Differential Topology*, Springer-Verlag, 1976.

[Law] H.B. Lawson, Jr., *Foliations*, Bul. of the American Math. Soc., vol. 80, número 3, 369-418, 1974.

[Mol]₁ P. Molino, *Feuilletages riemanniens singuliers*, Seminaire Gaston Darboux, Universite des Sciences et Techniques du Languedoc, 1-20, 1985-1986.

[Mol]₂ P. Molino, *Riemannian foliations*, Progress in Math., vol. 73, Birkauser, 1988.

[Orl-Ray]₁ P. Orlik-F. Raymond, *Actions of $SO(2)$ on 3-manifolds*, Proceedings of the conference on Transformation Groups, Springer-Verlag, 297-318, 1968.

- [Orl-Ray]₂ P. Orlik-F. Raymond, *Action of the torus on 4-manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc., 152, 531-559, 1970.
- [Ray] F. Raymond, *Classification of the action of the circle on 3-manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc., 131, 51-78, 1968.
-
- [Rei] B. Reinhart, *Foliated manifolds with bundle-like metrics*, Ann. of Math., 69, 1959, 119-132.
- [Rol] D. Rolfsen, *Knots and Links*, Math. Lecture Series 7, Publ. or Perish Inc., 1976.
- [Spiv] M. Spivak, *A comprehensive introduction to differential geometry*, vol. I, Publish or Perish, Inc., Berkeley, 1979.
- [Ste] P. Stefan, *Accessible sets, orbits and foliations with singularities*, Proc. London Math. Soc., 29, 699-713, 1974.
- [Sus] H. Sussmann, *Orbits of families of vector fields and integrability of distributions*, Trans. Amer. Math. Soc., 180, 171-188, 1973.

[Wad] A.W. Wasdley, *Geodesic foliations by circles*, J. Diff. Geometry, 10, 541-549, 1975.

Roberto Correa da Silva

Universidade Federal de Santa Catarina

Departamento de Matemática

Florianópolis, Santa Catarina, Brasil

Correio Eletrônico: MTM1AZT@BRUFSC.BITNET

Francisco Rui T. Almeida

Universidade de São Paulo

Instituto de Matemática e Estatística

São Paulo, São Paulo, Brasil

Correio Eletrônico: RUI@IME.USP.BR