# A Conjectura do Normalizador e o Problema do Isomorfismo em Grupos de Frobenius

Thierry Corrêa Petit Lobão

Tese apresentada

ao

Instituto de Matemática e Estatística

da

Universidade de São Paulo

para a obtenção do grau de Doutor

em

Matemática

Área de concentração: Álgebra

Orientador: Prof. Dr. Francisco César Polcino Milies

*Durante a elaboração deste trabalho, o autor recebeu apoio financeiro da CAPES*

- São Paulo, outubro de 2000 -

Este exemplar corresponde à redação final
da tese devidamente corrigida e
defendida por Thierry Corrêa Petit Lobão
e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, 10 de novembro de 2000.

Banca examinadora:

- Prof. Dr. Francisco César Polcino Milies (Orientador) - IME - USP
- Prof. Dr. Mikhajolo Dokuchaev - IME - USP
- Prof. Dr. Antônio Paques - IMECC - UNICAMP
- Prof. Dr. Norai Rocco - UnB
- Prof. Dr. Sudarshan Kumar Sehgal - Univ. Alberta

*Dedico este trabalho a minha família:*
*irmã e sobrinhos, e a meus pais*

*Annette e Newton,*

*tanto me deram, tão pouco retribuí,*
*e a um lindo sorriso, que tudo redime:*

*Suani.*

# Agradecimentos

*Amicus certus in re incerta cernitur*
- Cicero, *De amicitia*

Muitas foram, de fato, as situações incertas para chegar até aqui, e não poderiam ser mais certos os amigos que encontrei. Apenas estes já compensariam todo o esforço!

Como o quarto dos Três Mosqueteiros, não esqueço as batalhas travadas ao lado de Antônio, Maria de Lourdes (Lourdinha) e Raul nos campos da Álgebra, eu que viera das plagas da Lógica, onde também fizera grandes companheiros: Claus, Hugo, Marcelo (Coniglio)... E foram tantos outros e tão caros: Osmar, Maria, Batista, Ana Cláudia, Armando, Allan, Cássio, Marcelo (Major), Rosana, Jair, Fernando, Ângela, Péricles, Ézio, Deborah, Vitor, Christian, Márcio, Daniel, Joaci, Gladys, Andreas, Cristiana, V. Bovdi... Recordo também os professores: J. Zimbarg, R. Bianconi, I. Druck, F. Miraglia, P. Agozzini, R. Costa, J. Gonçalves, E. Marcos, I. Shestakov, H. Guzzo. Agradeço em especial a M. Dokuchaev, S. O. Juriaans, A. A. Bovdi, M. Parmenter, A. Giambruno e S. K. Sehgal pela atenção que sempre dispensaram às minhas consultas pessoais ou por correspondência. Guardo, particularmente, uma saudosa lembrança de S. Hariki.

Há também os amigos da Física: Adriana, Maurício, Silvia, Roberta, Cristiano, Maysa, Sartorelli, Salinas...

Foram importantes o incentivo e apoio dos amigos J. F. Andrade, C. C. Borges e F. Bunchaft; este último meu orientador de mestrado, portanto, em parte responsável pelo que viria depois... Lembro também os meus amigos do Departamento em nossa Universidade.

Não poderia, absolutamente, deixar de mencionar a *nação baiana*, que sempre se fez presente, amenizando o frio da *terra da garoa*. Foram amigos, colegas, parentes, meus e de Suani, o gato da vizinha (ambos baianos, ele antendendo pelo nome de *James Dean*!)... Porém não posso nomeá-los! Só alguém inteirado das complexidades e idiosincrasias da sutil tecitura da alma

# Abstract

The present work deals with integral group rings determined by finite groups, especially Frobenius' groups.

The main result of our investigation centers on the *normalizer conjecture*. We obtained a complete solution of such question regarding the class of integral group rings of Frobenius' groups, that is to say, we demonstrated that the conjecture is valid *for all* Frobenius' groups.

We also investigated the *isomorphism problem* in Frobenius' groups. We proved that the internal structure of such groups is determined in detail by their integral group rings. Besides, we obtained positive solutions to said problem under not very restrictive additional conditions.

Finally, we discussed possible extensions of our proposed results, since such results pointed to paths through which the research, be it on the normalizer conjecture or be it on the isomorphism problem, may proceed, we think so, with great profit.

# Resumo

Ao longo deste trabalho, estaremos lidando com anéis de grupo integrais determinados por grupos finitos; em particular, os grupos de Frobenius.

O resultado central de nossa investigação refere-se à *conjectura do normalizador*; obtivemos uma solução completa desta questão para a classe dos anéis de grupo integrais de grupos de Frobenius; ou seja, demostramos que a conjectura é válida para *todos* os grupos de Frobenius.

Investigamos também o *problema do isomorfismo* em grupos de Frobenius; verificamos que a estrutura interna de tais grupos é pormenorizadamente determinada por seus anéis de grupo integrais. Obtivemos ainda soluções positivas do problema sob condições adicionais pouco restritivas.

Por fim, discutimos possíveis extensões dos resultados que propomos, uma vez que estes revelaram direções em que a pesquisa, seja da conjectura do normalizador seja do problema do isomorfismo, poderá, assim nos parece, prosseguir com grande proveito.

# Conteúdo

# Introdução

*Uno ut labore absoluat aerumnas duas*

\- Plauto, *Amphitruo*

A estrutura dos anéis de grupo surge de modo natural e é ubíqua na teoria das representações de grupo; está presente também em diversos outros ramos da álgebra, como em topologia algébrica ou teoria de homologia; todavia, como afirma Polcino Milies em [59], o estudo dos anéis de grupo antecede tais teorias, remontando aos trabalhos de W. R. Hamilton (1805-1865) e A. Cayley (1821-1895).

Define-se um anel de grupo $\mathbf{A}G$ como um módulo livre, gerado sobre o grupo $G$ com coeficientes no anel com unidade $\mathbf{A}$, ao qual se impõe uma multiplicação, por distributividade, a partir da operação do grupo; deste modo, $\mathbf{A}G$ terá de fato uma estrutura de anel (ou álgebra, em relação a $\mathbf{A}$). A situação que nos interessa, neste trabalho, diz respeito aos anéis de grupo integrais sobre grupos finitos, *id est*, aos anéis de grupo em que $G$ é um grupo finito e $\mathbf{A}$ é o anel de inteiros $\mathbb{Z}$.

Há várias e desafiadoras questões sobre os anéis de grupo; entre estas destaca-se o, assim chamado, *problema do isomorfismo*, que consiste em verificar se um dado grupo é determinado, a menos de uma isomorfia, por seu anel de grupo. Esta questão assumiu posição central na teoria e foi mesmo responsável, em grande medida, por seu desenvolvimento. Verificou-se que, para diversas classes de grupos finitos, o anel de grupo $\mathbb{Z}G$, de fato, determinava o grupo $G$; o que deu à questão o *status* de importante conjectura: os grupos finitos são determinados por seus anéis de grupo integrais; como suspeitava G. Higman já em 1940 (assim observou Sandling em [74]).

Outra importante questão, na teoria dos anéis de grupo integrais sobre grupos finitos, tornou-se conhecida na forma de uma conjectura: a *conjectura do normalizador*. A suposição é de que o normalizador de $G$ no grupo de unidades de $\mathbb{Z}G$ é o menor possível, ou seja, é gerado apenas pelos elementos do grupo e unidades centrais do anel de grupo. Esta conjectura ganhou grande força com a constatação de que é válida para vastas classes de grupos; ademais observou-se que também guarda um curioso vínculo com o problema do isomorfismo, no caso de alguns grupos infinitos.

Os grupos de Frobenius constituem uma classe de grupos que desempenha um papel fundamental na teoria dos grupos finitos. Assim é que diversos autores têm examinado os anéis de grupo por eles determinados; nos últimos anos, M. A. Dokuchaev, S. O. Juriaans e C. Polcino Milies obtiveram uma série de interessantes resultados relacionados a estes anéis de grupo. Seguindo esta linha, nos propusemos a investigar como os anéis de grupo integrais sobre grupos de Frobenius se comportam frente às duas questões mencionadas: a conjectura do normalizador e o problema do isomorfismo.

A questão do normalizador, em verdade, é o objetivo primeiro deste trabalho; pois foi ela que motivou toda a nossa pesquisa. Os grupos de Frobenius, por suas propriedades, mostravam-se adequados à investigação desta conjectura, um vez que todas as soluções, até então propostas, não os abarcavam. Por tal razão e, *a fortiori*, pela importância destes para a teoria dos grupos, a decisão em estudá-los com respeito à conjectura do normalizador, naturalmente, se impôs. A pesquisa do problema do isomorfismo para estes grupos surgiu como estudo paralelo; motivado não apenas pelo trato com estes mas também, e principalmente, pelo resultado obtido por Juriaans e Polcino Milies, em [32], determinando as ordens das unidades de torção em seus anéis de grupo. Este resultado fora alcançado pouco antes do início da nossa investigação, e foi uma consequência, que dele extraímos, que nos sugeriu uma possível linha de ataque ao problema.

Em relação à questão do normalizador, obtivemos uma solução positiva completa para os citados grupos; ou seja, *todos os grupos de Frobenius satisfazem a conjectura do normalizador.* No que diz respeito ao problema do isomorfismo, verificamos que, realmente, diversas propriedades específicas destes grupos estão determinadas por seus anéis de grupo; obtivemos mesmo que a estrutura interna dos grupos de Frobenius está muito bem determinada. Ademais logramos soluções do problema em algumas famílias de tais grupos, bem como apontamos algumas direções que, assim nos parece, levariam a uma solução geral da questão sobre os grupos de Frobenius.

O primeiro capítulo apresenta uma seqüência de conceitos e teoremas imprescindíveis ao desenvolvimento dos resultados que almejamos. Deve ser usado, portanto, como um texto de referência; sendo a leitura do mesmo obviamente dispensável.

A solução, já mencionada, da conjectura do normalizador é apresentada no segundo capítulo. Lá, fazemos o que nos parece ser uma exposição completa do desenvolvimento da pesquisa acerca da questão; pois que são apresentados todos os resultados que conhecemos, uma vez que publicados até o momento. Observamos também que o nosso resultado apresenta uma efetiva extensão do campo de validade da conjectura, pois que a classe dos grupos de Frobenius extrapola, ou é até mesmo disjunta, as famílias de grupos já obtidas.

O terceiro capítulo aborda o problema do isomorfismo. Após uma discussão do problema referente aos grupos finitos em geral e uma breve exposição dos principais resultados já obtidos, apresentamos algumas conjecturas também relacionadas à questão. São exibidos outrossim os resultados estabelecidos com respeito aos anéis de grupo sobre grupos de Frobenius, notadamente os referentes aos três autores já citados. Observando que um grupo de Frobenius apresenta-se como um produto semidireto - com uma peculiar ação de um complemento sobre o núcleo deste produto, os nossos principais resultados, neste capítulo, atestam que qualquer grupo que seja uma $\mathbb{Z}$-base do anel de grupo $\mathbb{Z}G$, em que $G$ é um grupo de Frobenius, será, necessariamente, um grupo de Frobenius com núcleo e complemento, respectivamente, isomorfos aos de $G$.

O último capítulo assegura que, além das características determinadas pelo anel de grupo anteriormente provadas, alguns subgrupos de $G$ também são, necessariamente, determinados por $\mathbb{Z}G$; sendo estes subgrupos extremamente importantes, uma vez que, como será esclarecido, constituem o próprio grupo $G$; ou, noutras palavras, eles o *constróem*. Demonstramos finalmente que certas condições, válidas seja para o núcleo, seja para o complemento de $G$, são suficientes para a obtenção de soluções completas do problema do isomorfismo.

Concluímos com uma discussão sobre possíveis extensões dos resultados que defendemos, apresentando algumas propostas de pesquisa que, confiamos, podem levar a soluções que ampliem as que aqui expomos.

Finalizando, é conveniente salientar que, para especificar os nossos resultados, adotamos a convenção de introduzí-los sempre em letras maiúsculas.

# Capítulo 1

# Conceitos e resultados preliminares

Estão aqui apresentados os principais conceitos e resultados a serem explorados nos próximos capítulos; executuando-se os demasiado elementares que, por isso mesmo, são conhecidos pelo leitor com um mediano conhecimento da álgebra. Trata-se, portanto, de um, provavelmente, enfadonho rol de definições e teoremas sem demonstração. Sugerimos ao leitor que dispense este capítulo, consultando-o apenas quando as referências no texto fizerem-no necessário.

Advertimos o leitor que, salvo menção explícita em contrário, todos os grupos aqui tratados serão finitos; assim como todos os anéis de grupo com os quais lidaremos serão integrais. Há que se observar ainda que os resultados aqui arrolados convêm às aplicações específicas neste trabalho; sendo assim, seus enunciados ou ordem de exposição podem diferir da forma como são apresentados na literatura acerca destes.

Como referências básicas ou uma primeira leitura à teoria de grupos, sugerimos as obras de Scott [80], Rotman [73] ou Robinson [64]. Um bom texto introdutório aos anéis de grupo é oferecido por Polcino Milies em [57]; aguardamos ainda, para breve, a publicação do livro de Polcino Milies e S. K. Sehgal [62]. Referências mais específicas e avançadas serão propostas ao longo do texto.

## 1.1 Grupos

Várias são as classes de grupos que serão referidas neste trabalho; em particular, a dos grupos nilpotentes, que são caracterizados pelo fato de admitirem uma série normal central. Os grupos nilpotentes estão contidos numa classe maior de grupos: os grupos solúveis. Estes também são caracterizados por admitirem uma série normal de subgrupos; sendo que, neste caso, exige-se apenas que os fatores da série sejam abelianos.

Quanto aos grupos nilpotentes, lembramos os resultados seguintes:

**Proposição 1.1** *Todo p-grupo é nilpotente.*

**Proposição 1.2** *São equivalentes:*

*(i) um grupo $G$ é nilpotente;*

*(ii) $G$ é produto direto de seus subgrupos de Sylow;*

*(iii) todo subgrupo maximal em $G$ é normal;*

*(iv) todo subgrupo próprio de $G$ é subgrupo próprio de seu normalizador.*

Dado um grupo $G$, estarão determinados dois particulares subgrupos em $G$: o subgrupo de Frattini e o subgrupo de Fitting; que serão notados, respectivamente, por $\Phi(G)$ e $Fit(G)$. No caso de $G$ ser nilpotente ou solúvel, estes subgrupos gozam de propriedades interessantes.

Define-se o subgrupo de Frattini de $G$ como a interseção de todos os subgrupos maximais em $G$; se $G$ não apresenta subgrupos maximais, estipula-se $\Phi(G) = G$. Um elemento $g$ de $G$ é dito ser um não-gerador de $G$ se o mesmo é dispensável em todo conjunto gerador de $G$; em outros termos: se $G = \langle S, g\rangle$, então $G = \langle S\rangle$, para todo subconjunto $S$. Sendo assim, prova-se que $\Phi(G)$ é o conjunto de todos os elementos não-geradores de $G$. Valem ainda os seguintes resultados a respeito de $\Phi(G)$:

**Proposição 1.3** *Dado o grupo $G$:*

*(i) $\Phi(G)$ é nilpotente e característico em $G$;*

*(ii) $G$ é nilpotente se, e somente se, $G' \leq \Phi(G)$; em que $G'$ denota o subgrupo $[G, G]$;*

*(iii) $\Phi(G_1 \times \cdots \times G_r) = \Phi(G_1) \times \cdots \times \Phi(G_r)$;*

*(iv) se $G$ é um $p$-grupo abeliano elementar, então $\Phi(G) = (1)$;*

*(v) se $G$ é um $p$-grupo contendo o subgrupo normal $H$, então $G/H$ é abeliano elementar se, e somente se, $\Phi(G)$ está contido em $H$;*

*(vi) se $G$ é um $p$-grupo, então $G/\Phi(G)$ é um $p$-grupo abeliano elementar;*

*(vii) se $G$ é um $p$-grupo, então $\Phi(G) = G'G^p$, em que $G^p = \langle g^p : g \in G\rangle$.*

Dem: Veja Scott [80] e Suzuki [85].

Por fim, vale ainda o famoso teorema da base de Burnside:

**Proposição 1.4** *Se $G$ é um $p$-grupo, então:*

*(i) qualquer elemento no complementar de $\Phi(G)$ em $G$ pertence a algum conjunto gerador minimal de $G$;*

*(ii) o conjunto $\{g_1, \cdots, g_r\}$ é gerador minimal de $G$ se, e somente se, o conjunto $\{\Phi(G)g_1, \cdots, \Phi(G)g_r\}$ é gerador minimal para $G/\Phi(G)$.*

Dem: Ibidem.

E ainda seu corolário:

**Proposição 1.5** *O único automorfismo de um $p$-grupo $G$, cuja ordem é relativamente prima à ordem de $G$ e que fixa todos os elementos de $G/\Phi(G)$, é a identidade.*

Dem: Ibidem.

Já o subgrupo de Fitting, $Fit(G)$, é definido como sendo o subgrupo normal nilpotente maximal em $G$. Evidentemente $Fit(G)$ é característico em $G$; as principais propriedades do subgrupo de Fitting exploradas neste trabalho estão coletadas na proposição a seguir:

**Proposição 1.6** *Dado o grupo $G$:*

*(i) $Fit(G) = I_{p_1} \times \cdots \times I_{p_r}$, em que $I_{p_i}$ denota a interseção de todos os $p_i$-subgrupos de Sylow de $G$;*

*(ii) se $G$ é um grupo solúvel, então*

$$C_G(Fit(G)) = \zeta(Fit(G));$$

*em que $C_G(Fit(G))$ e $\zeta(Fit(G))$ denotam, respectivamente, o centralizador em $G$ e o centro de $Fit(G)$.*

Dem: Veja Passman [51] ou Scott [80].

Alguns tipos específicos de grupos serão necessários em nosso trabalho; para introduzí-los, gostaríamos de lembrar que todo grupo pode ser determinado pela exibição de um conjunto de geradores juntamente com as relações que estes guardam entre si; um tal sistema é dito ser uma presentação e, para estes, vale o resultado:

**Proposição 1.7** *Dois grupos são isomorfos se, e somente se, admitem a mesma presentação.*

Dem: Veja Magnus [42].

Algumas classes de $p$-grupos terão grande importância em nosso trabalho.

Os $p$-grupos abeliano elementares são simplesmente definidos como o produto direto de grupos de ordem $p$. O grupo de automorfismo de tais grupos é dado por:

**Proposição 1.8** *Se $G$ é um $p$-grupo abeliano elementar de ordem $|G| = p^n$, então $Aut(G) \simeq GL(n,p)$.*

É oportuno lembrar aqui o fato notório de que o grupo de automorfismo de um grupo cíclico, independentemente da ordem deste cíclico, é sempre abeliano.

Um $p$-grupo será dito ser um $p$-grupo especial se $G' = \Phi(G) = \zeta(G)$ |[1]; para tais grupos prova-se:

**Proposição 1.9** *Se $G$ é um $p$-grupo especial, então a classe de nilpotência de $G$ é, no máximo, igual a 2 e seu expoente, menor ou igual a $p^2$.*

Para $p$-grupos de ordem ímpar e classe de nilpotência menor ou igual a 2, vale:

**Proposição 1.10** *Se $G$ é um $p$-grupo com classe de nilpotência menor ou igual a 2, $p$ é ímpar e $G/\zeta(G)$ é abeliano elementar, então $(xy)^p = x^p y^p$ para quaisquer $x$ e $y$ em $G$.*

Dem: Veja Gorenstein [22].

Outra importante classe é constituída pelos 2-grupos chamados quatérnios|[2]. Um grupo quatérnio com $2^n$ elementos (n maior que 2) tem a seguinte presentação:

$$Q_{2^n} = \langle a, b : a^{2^{n-1}} = 1, \quad b^2 = a^{2^{n-2}}, \quad b^{-1}ab = a^{-1} \rangle.$$

[1]Veja Aschbacher [3].

[2]Estes grupos também são denominados quatérnios generalizados; nós os referiremos simplesmente como quatérnios.

Um quatérnio tem uma única involução, isto é, um único elemento de ordem 2, $z = a^{2^{n-2}}$; seu centro é dado por $\mathcal{Z} = \{1, z\}$ e o comutador, por $Q'_{2^n} = \langle a^2 \rangle$. Estão ainda garantidas as seguintes propriedades:

**Proposição 1.11** *Dado o quatérnio $Q_8$, valem:*

*(i) todo subgrupo próprio de $Q_8$ é cíclico;*

*(ii) $Aut(Q_8) \simeq Sym_4$.*

**Proposição 1.12** *Dado o quatérnio $Q_{2^n}$ com $n \geq 4$, valem:*

*(i) todo subgrupo de $Q_{2^n}$ é cíclico ou quatérnio;*

*(ii) se $N$ é normal em $Q_{2^n}$ e não abeliano, então $[Q_{2^n} : N] = 1$ ou 2 e $N$ é um quatérnio;*

*(iii) $Q_{2^n}$ possui um subgrupo característico cíclico de índice 2: $\langle a \rangle$;*

*(iv) $Aut(Q_{2^n})$ é um 2-grupo;*

*(v) $Q_{2^n}$ tem apenas três classes de conjugação com elementos de ordem 4: a classe do $a^{2^{n-3}}$, $C_b$ e $C_{ab}$;*

*(vi) $Q_{2^n}$ é o único 2-grupo não abeliano com $2^n$ elementos que possui exatamente um grupo de ordem 2.*

Dem: Veja Passman [51].

Destes fatos, não é difícil concluir-se que $Q_{2^n} = \langle a \rangle \dot{\cup} C_b \dot{\cup} C_{ab}$; qualquer elemento não central em $\langle a \rangle$ tem, como conjugado, apenas o seu inverso. Ademais, os elementos de ordem $2^{n-1}$ são da forma $a^t$, para $t$ ímpar.

Um grupo em que todos os subgrupos de Sylow são cíclicos será chamado de $Z$-grupo em homenagem a Zassenhaus que, a partir dos trabalhos de Hölder e Burnside|[3], obteve o seguinte teorema de estrutura:

[3]Confira Burnside [6] páginas 163 a 166.

**Proposição 1.13** *$G$ é um grupo cujos subgrupos de Sylow são todos cíclicos se, e somente se, $G$ admite a presentação:*

$$G = \langle a, b : a^m = 1 = b^n, \;\; b^{-1}ab = a^r \rangle$$

*em que $r^n \equiv 1 (mod \;\; m)$, $m$ é ímpar, $0 \leq r < m$ e $m$ e $n(r-1)$ são primos relativos.*

Dem: Veja Zassenhaus [94] ou Robinson [64].

Observe que os citados grupos são cíclicos ou metacíclicos que cindem. Os números $m$, $n$ e $r$, acima, caracterizam estes grupos; na medida em que um outro $Z$-grupo $H$, analogamente definido pelos números $k$, $l$ e $s$, será isomorfo a $G$, se, e somente se, $k = m$, $l = s$ e os grupos cíclicos $\langle r \rangle$ e $\langle s \rangle$, em $\mathbb{Z}_m$, coincidem (confira este fato em Robinson [64]). Os $Z$-grupos são um caso particular dos grupos cujos subgrupos de Sylow são todos abelianos; para estes vale o seguinte resultado, devido a Taunt:

**Proposição 1.14** *Se todos os subgrupos de Sylow do grupo $G$ são abelianos, então*

$$G' \cap \zeta(G) = (1)$$

Dem: Veja Robinson [64].

Há dois grupos lineares especiais que terão particular importância neste trabalho, são eles $SL(2,3)$ e $SL(2,5)$; quanto a estes podemos afirmar:

**Proposição 1.15** *$SL(2,3)$ admite a presentação*

$$\langle a, b, c : a^4 = 1 = c^3, \;\; b^2 = a^2, \;\; b^{-1}ab = a^{-1}, \;\; c^{-1}ac = b, \;\; c^{-1}bc = ab \rangle = Q_8 \rtimes C_3$$

**Proposição 1.16** *Quanto a $SL(2,5)$, valem:*

*(i)* $SL(2,5) = \langle x, y, z : x^3 = y^5 = z^2 = 1, \;\; zxz = x, \;\; zyz = y, \;\; (xy)^2 = z \rangle$;

*(ii) o elemento $z$ é a única involução em $SL(2,5)$, ademais, fazendo $\mathcal{Z} = \langle z \rangle$, $SL(2,5)/\mathcal{Z} \simeq Alt_5$;*

*(iii) $SL(2,5)$ é o único grupo não solúvel com 120 elementos cujos 2-subgrupos de Sylow são quatérnios;*

*(iv) $SL(2,5)$ é o único grupo perfeito com 120 elementos*|[4].

Dem: Veja Passman [51], Huppert [25] e Huppert & Blackburn [26].

A propósito do item (iii) da proposição anterior, vale lembrar que $Sym_5$ é um outro grupo não solúvel com 120 elementos; sendo o único destes cujos 2-subgrupos de Sylow são diedrais.

Serão também necessárias, em nosso trabalho, extensões dos grupos $SL(2,3)$ e $SL(2,5)$ pelo cíclico $C_2$; as quais denotaremos, seguindo a notação de Zassenhaus, $\mathcal{G}_4$ e $\mathcal{G}_5$, respectivamente. Os subgrupos de Sylow de ordem par dos grupos $\mathcal{G}_4$ e $\mathcal{G}_5$ são quatérnios; com relação ao grupo $\mathcal{Z}$ definido anteriormente, temos ainda:

**Proposição 1.17** *Se o grupo $G$ possui uma única involução $z$, valem:*

*(i) se $G/\langle z\rangle \simeq Sym_4$, então $G \simeq \mathcal{G}_4$;*

*(ii) se $G/\langle z\rangle \simeq Sym_5$, então $G \simeq \mathcal{G}_5$.*

Dem: Veja Zassenhaus [94] e Huppert [25].

Observamos que a ordem do grupo $\mathcal{G}_4$ é 48, já o grupo $\mathcal{G}_5$ possui 240 elementos.

Em vários dos resultados apresentados, ou que serão ainda expostos, é imprescindível o conhecido teorema de Schur-Zassenhaus. Lembrando que $K$ é um subgrupo de Hall de $G$ se sua ordem e índice em $G$ são relativamente primos.

**Proposição 1.18** *Se $K$ é um subgrupo de Hall normal em $G$, então existe um subgrupo $H$ de $G$, dito complemento de $K$, tal que $G = K \rtimes H$; ademais dois complementos quaisquer serão conjugados.*

Todo o nosso trabalho será devotado ao estudo dos grupos de Frobenius; as fontes mais indicadas para um estudo sistemático de tais grupos são certamente o artigo de Zassenhaus [94] e os livros de Huppert [25] e Passman [51], sugerimos também a leitura de Dornhoff [18] ou Tsuzuku [87].

[4]Um grupo $G$ é dito perfeito se $G = G' \neq (1)$.

Os grupos de Frobenius desempenham um papel fundamental na teoria dos grupos finitos, como nos ensina Gorenstein em [22]|[5]; são eles, grupos de permutação transitivos e não regulares, isto é, o subgrupo fixando uma letra é não trivial, porém só a identidade fixa mais que uma letra. A estrutura destes grupos é bastante peculiar; já G. Frobenius provou o seguinte resultado:

**Proposição 1.19** *Se $G$ é um grupo de Frobenius, então existe um subgrupo $K$, normal em $G$, pelo qual $G$ cinde; isto é, existe um subgrupo $H$, tal que*

$$G = K \rtimes H.$$

Os grupos de Frobenius foram estudados também por Burnside, Thompson e Zassenhaus; podemos ainda apontar-lhe as seguintes características:

**Proposição 1.20** *São equivalentes:*

*(i) $G = K \rtimes H$ é um grupo de Frobenius;*

*(ii) existe um subgrupo normal, próprio e não trivial, $K$ em $G$ tal que, para todo $k$ em $K$,*

$$C_G(k) \subseteq K;$$

*(iii) a ordem de $G$ é $n \cdot m$ com $(n, m) = 1$ e, para todo $g$ em $G$, ou $g^n = 1$ ou $g^m = 1$, ademais $K = \{g : g^n = 1\}$ é um subgrupo normal, próprio e não trivial em $G$.*

**Proposição 1.21** *Se $G = K \rtimes H$ é um grupo de Frobenius, valem:*

*(i) $|H|$ divide $|K| - 1$;*

*(ii) $G$ é a união disjunta de $K$ e todos os conjugados de $H^*$ ($H^* = H - 1$);*

*(iii) a ação de $H$ sobre $K$ é livre de pontos fixos, isto é, se $h$ está em $H^*$, $h$ determina um automorfismo sobre $K$ que fixa apenas a unidade ($h^{-1}kh = k$ se, e somente se, $h = 1$ ou $k = 1$);*

[5] Confira também Isaacs [27] à pag. 101 e Dixon [13], pag. 85.

*(iv) se $|H|$ é par, então $K$ é abeliano.*

Quanto ao núcleo $K$ do grupo de Frobenius $G = K \rtimes H$, Thompson obteve que

**Proposição 1.22** *O núcleo $K$ é nilpotente.*

Observe que do item (i) da Proposição 1.21 segue que $(|K|, |H|) = 1$, portanto, do teorema de Thompson e do item (i) da Proposição 1.6, segue que o núcleo $K$ é o subgrupo de Fitting do grupo de Frobenius $G$; consequentemente $K$ está unicamente determinado e é característico em $G$.

Quanto à estrutura de um complemento $H$ de um grupo de Frobenius, estudados por Burnside e Zassenhaus, podemos afirmar:

**Proposição 1.23** *Se $H$ é um complemento de Frobenius, então:*

*(i) seus subgrupos de Sylow de ordens ímpares são cíclicos; já os de ordem par são cíclicos ou quatérnios;*

*(ii) se a ordem de $H$ é par, então $H$ possui uma única involução, isto é, um único elemento de ordem 2.*

Note que a involução referida no item (ii), será, evidentemente, central no complemento em tela; ademais, do item (iv) da Proposição 1.21, não é difícil demonstrar-se que esta involução age sobre os elementos do núcleo invertendo-os.

Demonstra-se que existem complementos de Frobenius solúveis ou não; no primeiro caso, vale o resultado a seguir:

**Proposição 1.24** *Se $H$ é um complemento de Frobenius solúvel, então existe um subgrupo $H_0$, normal em $H$, tal que $H_0$ é um $Z$-grupo e $H/H_0$ é isomorfo a algum subgrupo de $Sym_4$.*

Já os complementos não solúveis obedecem a:

**Proposição 1.25** *Se $H$ é um complemento de Frobenius não solúvel, então existe um subgrupo $H_0$, normal em $H$, com índice 1 ou 2 tal que*

$$H_0 = M \times SL(2,5),$$

*sendo $M$ um $Z$-grupo de ordem relativamente prima a 120, a ordem de $SL(2,5)$.*

Há ainda dois resultados bastante úteis acerca dos grupos de Frobenius, são eles:

**Proposição 1.26** *Seja $G = K \rtimes H$ um grupo de Frobenius, então valem:*

*(i) se $H_0$ é um subgrupo próprio e não trivial de $H$, então $K \rtimes H_0$ é um grupo de Frobenius;*

*(ii) se $K_0$ é um subgrupo próprio e não trivial de $K$, normal em $G$, então $G/K_0 \simeq (K/K_0) \rtimes H$ é um grupo de Frobenius;*

*(iii) se $K_0$ e $H_0$ são subgrupos não triviais de $K$ e $H$, respectivamente, tais que $N_G(K_0)$ está contido em $H_0$, então $K_0 \rtimes H_0$ é um grupo de Frobenius.*

**Proposição 1.27** *Seja $G = K \rtimes H$ um grupo de Frobenius e $N$ um subgrupo normal em $G$, então $N$ contém ou está contido no núcleo $K$.*

Passemos agora aos anéis de grupo.

## 1.2 Anéis de Grupo

A estrutura conhecida como anel de grupo tem grande importância em vários ramos da álgebra, podemos defini-la como: se $G$ é um grupo e $\mathbf{A}$ um anel com unidade, o anel de grupo $\mathbf{A}G$ é determinado por todas as somas formais:

$$\alpha = \sum_{g \in G} a_g \cdot g,$$

em que $a_g$ está em $\mathbf{A}$ e o suporte de $\alpha$, ou seja, o conjunto

$$supp(\alpha) = \{g : a_g \neq 0\},$$

é finito.

Neste estudo, estaremos sempre tratando com grupos finitos (salvo menção explícita em contrário), logo a exigência anterior quanto ao suporte é trivialmente atendida; ademais nos interessam os, assim chamados, anéis de grupo integrais, isto é, em que $\mathbf{A}$ é o anel dos inteiros $\mathbb{Z}$.

Estão definidos em $\mathbb{Z}G$ as operações de adição e multiplicação abaixo:

(I) $\sum_{g\in G} a_g \cdot g + \sum_{g\in G} b_g \cdot g = \sum_{g\in G}(a_g + b_g) \cdot g$;

(II) $\sum_{g\in G} a_g \cdot g \times \sum_{h\in G} b_h \cdot h = \sum_{g\in G} \sum_{h\in G} a_g b_h \cdot gh$.

Observe que, identificando um elemento $g$ de $G$ com $1\cdot g$, em $\mathbb{Z}G$, o anel de grupo $\mathbb{Z}G$ terá uma estrutura de $\mathbb{Z}$-módulo livre com base $G$; podemos ainda admitir que $G$ está contido em $\mathbb{Z}G$, ou melhor, $G$ é um subgrupo do grupo de unidades $U(\mathbb{Z}G)$ do anel de grupo. Todo subgrupo de $U(\mathbb{Z}G)$, que é uma base de $\mathbb{Z}G$ sobre $\mathbb{Z}$, é dito ser uma base grupal de $\mathbb{Z}G$.

A aplicação abaixo é um morfismo de anéis

$$\begin{array}{rccc} \epsilon: & \mathbb{Z}G & \longrightarrow & G \\ & \sum_{g\in G} a_g \cdot g & \longmapsto & \sum_{g\in G} a_g \end{array}$$

chamada função de aumento; seu núcleo é o ideal de aumento, notado por $\Delta(G)$. Diremos ainda que os elementos de $\mathbb{Z}G$ cujo aumento é 1 são normalizados. Se $u$ é uma unidade, isto é, um elemento de $U(\mathbb{Z}G)$, evidentemente $\epsilon(u) = \pm 1$; as unidades normalizadas compõem o grupo $U_1(\mathbb{Z}G)$. Unidades da forma $a \cdot g$, sendo $a$ um elemento de $\mathbb{Z}$ e $g$ determinado em $G$, são chamados unidades triviais.

É imediato que qualquer morfismo de grupos $\theta : G \longrightarrow H$ pode ser diretamente estendido a um morfismo dos anéis de grupo $\Theta : \mathbb{Z}G \longrightarrow \mathbb{Z}H$; sendo assim, se $N$ é um subgrupo normal em $G$, a aplicação quociente determina o seguinte morfismo:

$$\begin{array}{rccc} \pi_N: & \mathbb{Z}G & \longrightarrow & \mathbb{Z}(G/N) \\ & \sum_{g\in G} a_g g & \longmapsto & \sum_{g\in G} a_g g \cdot N. \end{array}$$

O núcleo desta aplicação é um ideal denotado por $\Delta(G,N)$; não é difícil demonstrar que $\Delta(G,N) = \mathbb{Z}G \cdot \Delta(N)$. Um fato importante acerca do ideal $\Delta(G,N)$ é estabelecido por

**Proposição 1.28** *Sendo $N$ um subgrupo normal em $G$:*

$$G \cap (1 + \Delta(G,N)) = N.$$

Dem: Veja Passman [52].

O anel de grupo $\mathbb{Z}G$ admite uma aplicação involução:

$$\begin{array}{rcl} * : \quad \mathbb{Z}G & \longrightarrow & \mathbb{Z}G \\ (\sum_{g\in G} a_g g)^* & = & \sum_{g\in G} a_g g^{-1} \end{array}$$

com as propriedades

(i) $g^* = g^{-1}$;

(ii) $(\alpha + \beta)^* = \alpha^* + \beta^*$;

(iii) $(\alpha\beta)^* = \beta^*\alpha^*$;

(iv) $(\alpha^*)^* = \alpha$.

Prova-se com relação à involução $*$:

**Proposição 1.29** *Para $\alpha$ em $\mathbb{Z}G$, $\alpha\alpha^* = 1$ se, e somente se, $\alpha = \pm g$, para algum $g$ em $G$.*

As unidades de torção em $\mathbb{Z}G$ determinam um conjunto denotado por $TU(\mathbb{Z}G)$; para as unidades de torção normalizadas, valem os resultados, devidos a Berman e Higman:

**Proposição 1.30** *Se $\alpha$ é uma unidade de torção, isto é, $\alpha^n = 1$, tal que o coeficiente do 1 é não nulo, $\alpha(1) \neq 0$, então $\alpha = 1$ ou $\alpha = -1$.*

Donde segue o corolário óbvio:

**Proposição 1.31** *Se $\alpha$ está em $TU(\mathbb{Z}G)$ e $\alpha \neq \pm 1$, então $\alpha(1) = 0$.*

A teoria dos anéis de grupo apresenta um resultado análogo ao teorema de Lagrange:

**Proposição 1.32** *Se $u$ é uma torção normalizada em $\mathbb{Z}G$ cuja ordem é $n$, então $n$ é um divisor de ordem de $G$.*

O centro de $\mathbb{Z}G$ goza de uma propriedade muito conveniente; se $\mathcal{C}_g$ é a classe de conjugação, no grupo $G$, do elemento $g$, denotaremos por $\hat{\mathcal{C}}_g$ a soma dos elementos que constituem esta classe, isto é, $\hat{\mathcal{C}}_g = \sum_{h\in G} h^{-1}gh$; pode-se demonstrar o resultado a seguir:

**Proposição 1.33** *As somas de classes $\{\hat{\mathcal{C}}_g\}_{g\in G}$ determinam uma base, sobre $\mathbb{Z}$, do centro, $\zeta(\mathbb{Z}G)$, de $\mathbb{Z}G$.*

Como corolário imediato deste resultado, podemos inferir que toda unidade de torção no centro de $\mathbb{Z}G$ será trivial.

Há uma subestrutura em $\mathbb{Z}G$ que nos será de grande valia, trata-se do grupo aditivo gerado pelos produtos de Lie: $[\alpha, \beta] = \alpha\beta - \beta\alpha$, para $\alpha$ e $\beta$ em $\mathbb{Z}G$. Denotaremos este submódulo de $\mathbb{Z}G$ por $[\![\mathbb{Z}G, \mathbb{Z}G]\!]$, evitando uma possível confusão com o comutador em grupos. É possível demonstrar que $[\![\mathbb{Z}G, \mathbb{Z}G]\!]$ é gerado, sobre $\mathbb{Z}$, pelos elementos da forma $[\![g, h]\!] = gh - hg$, para $g$ e $h$ em $G$.

Uma importante propriedade deste grupo é estabelecida por:

**Proposição 1.34** *Se $n$ é um número natural e $p$ um primo, para quaisquer $\alpha$ e $\beta$ em $\mathbb{Z}G$, vale:*

$$(\alpha+\beta)^{p^n} \equiv \alpha^{p^n} + \beta^{p^n} (mod \;\; [\![\mathbb{Z}G, \mathbb{Z}G]\!]).$$

Dem: Veja Sehgal [82].

Denotando por $\sim_G$ a relação de conjugação no grupo $G$, para um dado $\alpha = \sum_{h\in G} a_h \cdot h$ em $\mathbb{Z}G$ e fixado $g$ em $G$, definimos

$$\tilde{\alpha}(g) = \sum_{h\sim_G g} a_h.$$

Assumindo a notação acima, pode-se provar que:

**Proposição 1.35** *Se $\alpha$ pertence a $[\![\mathbb{Z}G, \mathbb{Z}G]\!]$, então $\tilde{\alpha}(g) = 0$ para todo $g$ em $G$.*

Dem: Veja Sehgal [81].

De posse destes resultados, Zassenhaus obteve o teorema:

**Proposição 1.36** *Seja $u$ uma unidade normalizada em $\mathbb{Z}G$, se $u$ é de torção com ordem $o(u) = p^n$, em que $p$ é um primo, então existe um elemento $g$, no suporte de $u$, tal que $o(g) = p^n$ e $\tilde{u}(g) \neq 0$.*

Em boa parte deste trabalho, estaremos tratando do chamado problema do isomorfismo; que consiste em saber se um grupo finito $G$ é determinado por seu anel de grupo integral $\mathbb{Z}G$, ou, em outros termos, seria a implicação

$$\mathbb{Z}G \simeq \mathbb{Z}\dot{G} \quad \Longrightarrow \quad G \simeq \dot{G}$$

verdadeira? Uma discussão pormenorizada do problema do isomorfismo será desenvolvida no terceiro capítulo, onde serão também apresentadas algumas conjecturas a ele relacionadas. Exibiremos aqui apenas os principais resultados que nos serão úteis adiante.

Dos resultados de G. Higman e S. D. Berman, segue que

**Proposição 1.37** *Se $G$ é um grupo abeliano e $\mathbb{Z}G \simeq \mathbb{Z}\dot{G}$, então $G \simeq \dot{G}$.*

Já A. Whitcomb obteve:

**Proposição 1.38** *Se $G$ é um grupo metabeliano e $\mathbb{Z}G \simeq \mathbb{Z}\dot{G}$, então $G \simeq \dot{G}$.*

Os trabalhos de D. Glauberman e D. Passman [49, 50] revelam a existência de uma correspondência bijetora antre as classes de conjugação de $G$ e $\dot{G}$ que preserva algumas características destas classes; resumimos estes fatos em:

**Proposição 1.39** *Se $\Theta : \mathbb{Z}G \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}\dot{G}$ é um isomorfismo e $\hat{\mathcal{C}}_g$ é uma soma de classe em $G$, então $\Theta(\hat{\mathcal{C}}_g)$ é uma soma de classe em $\dot{G}$, isto é, existe $x$ em $\dot{G}$ tal que $\Theta(\hat{\mathcal{C}}_g) = \hat{\mathcal{C}}_x$; e valem ainda:*

*(i) $\Theta(\hat{\mathcal{C}}_{g^n}) = \hat{\mathcal{C}}_{x^n}$ para todo inteiro $n$;*

*(ii) $o(g) = o(x)$ e $|\mathcal{C}_g| = |\mathcal{C}_x|$;*

*(iii) se $\Theta(\hat{\mathcal{C}}_g) = \hat{\mathcal{C}}_x$ e $\Theta(\hat{\mathcal{C}}_h) = \hat{\mathcal{C}}_y$ então existem $v$ e $w$ em $\dot{G}$ tais que $\Theta(\hat{\mathcal{C}}_{gh}) = \hat{\mathcal{C}}_{x \cdot y^v} = \hat{\mathcal{C}}_{x^w \cdot y}$.*

Este último teorema permite estabelecer-se uma correspondência entre os subgrupos normais de $G$ e os de $\dot{G}$, que de fato é um isomorfismo (preserva a estrutura booleana) entre estes reticulados; ademais grupos normais correspondentes apresentam uma série de semelhanças. Utilizaremos ainda aqui a notação: se $N$ é um subgrupo normal em $G$ (ou um subconjunto qualquer), $\hat{N}$ denota a soma de seus elementos. Teremos então:

**Proposição 1.40** *Se $\Theta : \mathbb{Z}G \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}\dot{G}$ é um isomorfismo e $N$ um subgrupo normal em $G$, então existe em $\dot{G}$ um subgrupo normal $\nu(N)$ satisfazendo a:*

*(i)* $\Theta(\hat{N}) = \widehat{\nu(N)}$;

*(ii)* $|N| = |\nu(N)|$;

*(iii) se* $M \lhd G$, $N \lhd G$, $N \leq M$, *então* $\nu(M) \leq \nu(N)$;

*(iv)* $\Theta(\Delta(G, N)) = \Delta(\dot{G}, \nu(N))$;

*(v)* $\mathbb{Z}(G/N) \simeq \mathbb{Z}(\dot{G}/\nu(N))$;

*(vi) se* $M \lhd G$ *e* $N \lhd G$, *então* $\nu([M, N]) = [\nu(M), \nu(N)]$;

*(vii)* $N/N' \simeq \nu(N)/\nu(N)'$;

*(viii) se* $\mathcal{C}^n(N) = \langle g^n : g \in N \rangle$, *então* $\nu(\mathcal{C}^n(N)) = \mathcal{C}^n(\nu(N))$;

*(ix) se* $\mathcal{C}_n(N) = \langle g^n : g \in N,\ g^n = 1 \rangle$, *então* $\nu(\mathcal{C}_n(N)) = \mathcal{C}_n(\nu(N))$.

Dem: Veja Passman [49].

Observemos que, do item (viii) da Proposição 1.40, segue que $N$ e $\nu(N)$ têm o mesmo expoente; ademais, muito embora não esteja demonstrado que os grupos de Frattini de $G$ e $\dot{G}$ estejam associados nesta correspondência (como observou Passman em [50] corrigindo o equívoco anterior em [49]), em virtude da Proposição 1.3, não é difícil concluir-se que, se $N$ é nilpotente, então $\nu(\Phi(N)) = \Phi(\nu(N))$.

Dos resultados anteriores, decorre obviamente o resultado a seguir:

**Proposição 1.41** *Se $G = G_1 \times G_2$, com $(|G_1|, |G_2|) = 1$, sendo $G_1$ e $G_2$ determinados por seus anéis de grupo, então $G$ é também determinado por $\mathbb{Z}G$.*

Veremos adiante que o problema do isomorfismo está associado a algumas conjecturas (confira a primeira seção do Capítulo 3); entre estas, temos as denominadas (CZ-3) e (Aut). Para a primeira, A. Valenti obteve:

**Proposição 1.42** *Se $G = C_r \rtimes C_s$ é um grupo metacíclico com $(r, s) = 1$, então $G$ satisfaz (CZ-3).*

Dem: Veja Valenti [88].

Também os grupos nilpotentes satisfazem (CZ-3), como provou A. Weiss:

**Proposição 1.43** *Se $G$ é um grupo nilpotente, então (CZ-3) é válida em $G$.*

Dem: Veja Weiss [90] e [91].

Já G. L. Peterson conseguiu provar:

**Proposição 1.44** *Se $G = G_1 \times G_2$, com $(|G_1|, |G_2|) = 1$, e vale (Aut) para $G_1$ e $G_2$, então vale (Aut) para $G$.*

Dem: Veja Peterson [55].

Finalizando, gostaríamos de tecer alguns comentários acerca da literatura sobre anéis de grupo, além das referências já mencionadas no início do capítulo. A obra de D. Passman [52], pela extensão e abrangência, é o cânon em anéis de grupo; porém, para tópicos não abordados por esta, como uma ótima referência apontamos o livro de S. K. Sehgal [81]. Muitas das questões aqui abordadas dizem respeito às unidades de $\mathbb{Z}G$; quanto a este tópico, a melhor fonte de consulta é a pormenorizada exposição desenvolvida por S. K. Sehgal em [82]; é também valiosa a obra de G. Karpilowsky [33]. Tivemos a oportunidade de consultar a obra intitulada *Group Rings* de autoria do Prof. A. A. Bovdi, gentilmente cedida pelo mesmo; infelizmente, embora extremamente valiosa, está ainda por ser vertida para a língua inglesa.

# Capítulo 2

# A Conjectura do Normalizador

Este capítulo apresenta uma questão que tornou-se conhecida em forma de conjectura: A Conjectura do Normalizador. Serão aqui apresentados, nas primeiras seções, os principais resultados, a ela referentes, obtidos até o momento; estes resultados estabelecem algumas famílias de grupos que são soluções do problema. Em seguida, será demonstrado aquele que, como já foi mencionado, é o principal resultado desta pesquisa: que a classe dos grupos de Frobenius constitui uma solução positiva à conjectura.

## 2.1 A conjectura e uma primeira solução

Lembramos ao leitor que os anéis de grupo que serão aqui tratados são integrais e definidos sobre grupos finitos; a menos de menção explícita em contrário.

Tomemos um anel de grupo $\mathbb{Z}G$; é sabido que uma base grupal qualquer deste anel é subgrupo do seu grupo de unidades $U(\mathbb{Z}G)$. Deste modo, podemos afirmar, em relação a $G$, que

$$G < U = U(\mathbb{Z}G).$$

É natural, portanto, que se coloque a seguinte questão: Qual o normalizador do grupo $G$ no grupo de unidades de seu anel de grupo; ou seja, que dizer de $N_U(G)$ ?

Se denotarmos por $\zeta$ o centro do grupo de unidades $U(\mathbb{Z}G)$, é imediata a conclusão:

$$G \cdot \zeta \leq N_U(G),$$

em que o produto não é necessariamente direto, pois que o centro de $G$ pode não ser trivial.

A conjectura do normalizador afirma que vale exatamente a igualdade na expressão anterior. Em outros termos, conjectura-se que, em anéis de grupo integrais sobre grupos finitos, $\mathbb{Z}G$, o normalizador de $G$ em $U(\mathbb{Z}G)$ é determinado exclusivamente por aqueles elementos que de modo forçoso normalizam $G$; neste sentido, podemos dizer que $N_U(G)$ é o menor possível.

Eis uma formulação da conjectura do normalizador:

*Dado um grupo finito $G$ e sendo $N_U(G)$ o seu normalizador no grupo de unidades, $U(\mathbb{Z}G)$, de seu anel de grupo integral, vale então que*

$$N_U(G) = G \cdot \zeta.$$

O problema 43 no livro *Units in Integral Group Rings* de S. K. Sehgal, veja [82], refere-se à conjectura apresentando-a como a questão:

*Se $G$ é um grupo finito, vale $N_U(G) = G \cdot \zeta$ ?*

A questão anterior já tinha sido colocada, em uma formulação distinta embora equivalente, por S. Jackowski e Z. Marciniak em um importante trabalho conjunto, publicado em 1987 – veja [28]. Para apresentar esta formulação, é necessário observar que, dado $u$, uma unidade no normalizador de $G$, $N_U(G)$, determina-se naturalmente um automorfismo $\varphi_u$ em $G$ conforme:

$$\varphi_u(g) := u^{-1}gu, \text{ para todo } g \text{ em } G.$$

Se denotarmos por $Aut_U(G)$ o conjunto dos automorfismos de $G$ definidos deste modo, é imediato que $Aut_U(G)$ é um grupo que contém como subgrupo $Inn(G)$, o grupo dos automorfismos internos de $G$. Vale a conjectura do normalizador se, e somente se, para todo $u$ em $N_U(G)$, tem-se que $u = g_0 z_0$, com $g_0$ em $G$ e $z_0$ em $\zeta$; sendo assim, segue que $\varphi_u(g) = u^{-1}gu = g_0^{-1}gg_0$, pois que $z_0$ é central; o que equivale a afirmar-se que $\varphi_u$ é um automorfismo interno de $G$. Em vista deste fato, os autores citados apresentam a questão do normalizador como:

*Se $G$ é um grupo finito, vale $Aut_U(G) = Inn(G)$?*

Muito embora o artigo de Jackowski e Marciniak tenha sido, ao que parece, a primeira vez em que foi aventado, de modo explícito na literatura, o interesse por uma solução geral desta questão para grupos finitos; o primeiro resultado nesta direção já fora obtido, há duas décadas, por D. B. Coleman em um artigo de 1964 – veja [10]. Coleman tratava então com álgebras de grupo modulares; por intermédio de um método simples e engenhoso obteve o seguinte resultado:

**Teorema 2.1** *(Coleman, 64) Seja $G$ um $p$-grupo finito e $\mathbb{F}$ um corpo de característica $p$, então vale $N_U(G) = G \cdot \zeta$ na álgebra de grupo $\mathbb{F}G$.*

Adaptando a demonstração de Coleman, os autores Jackowski e Marciniak obtiveram uma extensão do resultado anterior para anéis de grupo integrais. Este resultado é de suma importância – não apenas para a pesquisa desenvolvida pelos autores citados, mas também para o que nos propomos a apresentar – pois que revela a validade da conjectura, em uma versão local, para todos os grupos finitos. Para a conveniência do leitor e pela importância deste resultado para os que virão em seguida, apresentaremos a versão desenvolvida em Sehgal [82].

**Teorema 2.2** *(Jackowski & Marciniak, 87) Seja $P$ um $p$-subgrupo do grupo finito $G$ e $u$ em $N_U(G)$, existe então $g_0$ em $G$ tal que $\varphi_u(h) = g_0^{-1}hg_0$, para todo $h$ em $P$.*

Demonstração: Como $u$ está em $N_U(G)$, para todo $h$ em $G$, temos que $\varphi_u(h) = u^{-1}hu$ pertence a $G$, logo

$$u = h^{-1}u\varphi_u(h). \tag{2.1}$$

Define-se então uma ação $\sigma$ do subgrupo $P$ sobre o conjunto $G$ conforme: se $h$ pertence a $P$ e $g$, a $G$, tem-se

$$\sigma_h(g) = h^{-1}g\varphi_u(h).$$

Vale notar que esta não é, de fato, uma ação de grupo; seria uma contra-ação, na medida em que $\sigma_h \circ \sigma_f = \sigma_{fh}$; porém todas as propriedades referentes às ações de grupo permanecem igualmente válidas.

Se $u$ é escrito como $u = \sum_{g \in G} u(g)g$, segue de (2.1) que

$$u = \sum_{g \in G} u(g)h^{-1}g\varphi_u(h). \tag{2.2}$$

Observa-se então, em (2.2), que a função $u : G \to \mathbb{Z}$, dada por $g \mapsto u(g)$, é constante nas órbitas pela ação $\sigma$; uma vez que o comprimento destas órbitas é um divisor da ordem do $p$-subgrupo $P$, segue que este comprimento é uma potência de $p$. Ora, $u$ é uma unidade em $\mathbb{Z}G$, em conseqüência o aumento, $\epsilon$, de $u$ obedece a:

$$\pm 1 = \epsilon(u) = \sum_i c_i p^{t_i},$$

em que $c_i = u(g_i)$ e $p^{t_i}$ é o comprimento da órbita de $g_i$, sendo $g_i$ um elemento em $G$. A conclusão é, portanto, que existe uma órbita de comprimento um, pois do contrário o número primo $p$ seria um divisor de $\pm 1$ ! Em outras palavras, existe um elemento $g_0$, em $G$, fixado pela ação $\sigma$; ou seja, $\sigma_h(g_0) = g_0$, para todo $h$ em $P$.

Por fim,

$$\sigma_h(g_0) = h^{-1}g_0\varphi_u(h) = g_0 \text{ , para todo } h \text{ em } P;$$

ou ainda

$$\varphi_u(h) = g_0^{-1}hg_0 \text{ , para todo } h \text{ em } P.$$

**q.e.d.**

Vale notar que o resultado, de fato, afirma que $N_U(G) \leq C_U(P) \cdot G$; uma vez que $u^{-1}hu = g_0^{-1}hg_0$. Lembrando agora que o centralizador de $G$ em $U$ é precisamente o centro de $U$, segue a nossa afirmação de que o mesmo aponta para uma solução local da conjectura para os $p$-subgrupos de $G$.

A partir do último teorema decorre a validade da conjectura para a importante classe dos grupos nilpotentes finitos, como afirma o corolário a seguir.

**Corolário 2.1** *Seja $G$ um grupo nilpotente finito, então $N_U(G) = G \cdot \zeta$.*

Demonstração: Basta observar que, sendo $G$ um grupo finito, $G$ é o produto direto de seus subgrupos de Sylow; lembrando que, neste caso, os elementos de distintos subgrupos de Sylow comutam entre si, o resultado segue da aplicação do teorema a cada um dos subgrupos de Sylow de $G$.

**q.e.d.**

Uma conjectura, como tal, só se estabelece quando há indícios de sua validade, senão em geral, para extensas ou importantes classes de objetos; o corolário anterior, sem dúvida, já seria um bom argumento favorável à conjectura do normalizador, entretanto resultados bem mais poderosos foram obtidos por Jackowski e Marciniak. Estes resultados justificam a próxima seção.

## 2.2 Os resultados de Jackowski e Marciniak

Apresentaremos agora os resultados de Jackowski e Marciniak. A pesquisa destes autores desempenha um papel fundamental no desenvolvimento da proposição que defendemos; por este motivo será exposta detidamente. De início, fazem-se necessários dois lemas auxiliares:

**Lema 2.1** *Seja $u$ uma unidade no normalizador de $G$ em $U$, $N_U(G)$, seja ainda $\varphi_u$ o automorfismo de $G$ determinado por $u$; a ordem de $\varphi_u$ será divisível apenas por aqueles primos que dividem a ordem de $G$.*

Demonstração: Observe o leitor que, embora $u$ não seja necessariamente uma unidade de torção, $\varphi_u$ é um automorfismo do grupo finito $G$; logo a ordem de $\varphi_u$ está bem definida. Suponhamos agora que a ordem de $\varphi_u$ seja relativamente prima à ordem de $G$; considerando-se uma potência adequada de $u$, podemos assumir que

$$\varphi_u^p = \iota,$$

sendo $p$ um primo que não divide a ordem de $G$ e $\iota$ a identidade em $G$. Seja $H = \{g \in G : \varphi_u(g) = g\}$, isto é, $H$ é determinado pelos elementos em $G$ fixados por $\varphi_u$; é evidente que $H$ é um subgrupo de $G$. Como as somas de classe são elementos centrais dos anéis de grupo, segue que se $\mathcal{C}$ é uma classe de conjugação em $G$, então

$$u^{-1}(\sum_{g\in\mathcal{C}} g)u = \sum_{g\in\mathcal{C}} g.$$

Deste modo, $\varphi_u$ será uma bijeção em $\mathcal{C}$. Uma vez que a ordem de $\mathcal{C}$ divide a ordem de $G$, esta última sendo relativamente prima à ordem de $\varphi_u$, segue que existe, em $\mathcal{C}$, um ponto fixado por $\varphi_u$; isto é, a interseção $H \cap \mathcal{C}$ é não vazia. Pela teoria de grupos, $H$ tem $[G : N_G(H)]$ conjugados, como $H \subseteq N_G(H)$, a reunião desses tem, quando muito, $1 + (|H| - 1)[G : H]$ elementos; se $H \neq G$, essa reunião não esgotaria $G$. Donde $H = G$; ou seja, $\varphi_u$ será a identidade em $G$ !

**q.e.d.**

No próximo lema, $*$ denota a involução em $\mathbb{Z}G$, mencionada no primeiro capítulo e que opera como $*(\sum_g a_g g) = \sum_g a_g g^{-1}$.

**Lema 2.2** *Se $u$ é uma unidade em $\mathbb{Z}G$, então $u$ pertencerá ao normalizador $N_U(G)$ se, e somente se, $u^*u$ for central em $\mathbb{Z}G$.*

Demonstração: Para $u$ em $N_U(G)$, tem-se $\varphi_u(g) = u^{-1}gu$, para todo $g$ em $G$. Sendo assim, $\varphi_u(g^{-1}) = u^{-1}g^{-1}u$ e, aplicando-se a involução $*$, segue que $\varphi_u(g) = u^*g(u^{-1})^*$ donde $g = (u^*)^{-1}\varphi_u(g)u^*$; consequentemente

$$(uu^*)^{-1}g(uu^*) = (u^*)^{-1}u^{-1}guu^* = (u^*)^{-1}\varphi_u(g)u^* = g,$$

ou seja, $uu^*$ é central. Ademais

$$u^*u = u^{-1}uu^*u = uu^*.$$

Reciprocamente, se $u^*u$ é central, do fato que $u^*u = uu^*$, obtemos, para todo $g$ em $G$,

$$(u^{-1}gu)(u^{-1}gu)^* = u^{-1}guu^*g^{-1}(u^{-1})^* = u^{-1}uu^*(u^{-1})^* = u^*(u^*)^{-1} = 1;$$

pela Proposição 1.29, segue que $u^{-1}gu$ está em $G$; isto é, $u$ pertence a $N_U(G)$.

**q.e.d.**

Os lemas anteriores permitem a demonstração do resultado que segue, devido a J. Krempa e anunciado em Jackowski & Marciniak [28].

**Proposição 2.1** *(Krempa) Se $u$ pertence a $N_U(G)$, então $u^2$ estará em $G \cdot \zeta$.*

Demonstração: Considere a unidade $u^*u^{-1}$, segue então que

$$u^*u^{-1}(u^*u^{-1})^* = u^*u^{-1}(u^{-1})^*u = u^*(u^*u)^{-1}u = u^*u(u^*u)^{-1} = 1,$$

pois, pelo Lema 2.2, $u^*u$ é central. Mais uma vez, pela Proposição 1.29, temos que $u^*u^{-1}$ é uma unidade trivial; e, já que $\epsilon(u^*u^{-1}) = 1$, a conclusão é que $u^*u^{-1} = g_0$, para $g_0$ em $G$. Ora, em conseqüência

$$g_0u^2 = u^*u;$$

por fim $u^2$ pertence a $G \cdot \zeta$, pois $u^*u$ é central !

**q.e.d.**

Dos resultados anteriores, Jackowski e Marciniak extraem a surpreendente conclusão a seguir:

**Teorema 2.3** *(Jackowski & Marciniak, 87) Se $G$ é um grupo de ordem ímpar, vale a conjectura do normalizador para $G$.*

Demonstração: Se $u$ está em $N_U(G)$, pelo resultado de Krempa – a proposição anterior – $\varphi_u^2$ é um automorfismo interno de $G$. Sendo a ordem de $G$ ímpar, a ordem, $t$, de $\varphi_u$ também o será pelo Lema 2.1. Deste modo, $t$ e 2 serão primos relativos; existem pois $r$ e $s$, números inteiros, tais que $2.r + t.s = 1$, e portanto

$$\varphi_u = \varphi_u^{2r+ts} = \varphi_u^{2r} \cdot \varphi_u^{t \cdot s} = \varphi_u^{2r};$$

já que $\varphi_u^2$ é um automorfismo interno, $\varphi_u$ será também um automorfismo interno de $G$. O resultado segue da, já mencionada, reformulação equivalente da conjectura.

q.e.d.

O último teorema revela que, para se obter uma solução geral acerca da questão em tela, há apenas que se investigar os grupos finitos de ordem par. Tratando então com grupos de tal ordem, os autores Jackowski e Marciniak obtêm ainda uma solução da conjectura para estes grupos com uma dada restrição. Para tanto, os autores valem-se de um método que reproduziremos em seguida, já que o mesmo assume um papel central no resultado que objetivamos defender.

Primeiramente, observamos que o problema do normalizador reduz-se à análise de um determinado conjunto de unidades normalizadas $u$ em $N_U(G)$; ou, equivalentemente, de automorfismos $\varphi_u$ em $Aut_U(G)$. É justamente esta técnica que exploraremos no resultado que propomos; em vista disso, justifica-se que a apresentemos pormenorizadamente.

Para um 2-subgrupo de Sylow, $S$, fixado em $G$, define-se o subconjunto $I_S$ de $Aut_U(G)$ como segue

$$I_S := \{\varphi_u \in Aut_U(G) : \varphi_u^2 = \iota \text{ e } \varphi_u \mid_S = \iota\};$$

isto é, o subconjunto dos automorfismos de $G$, determinados por unidades normalizadoras, tal que estes automorfismos sejam involuções e as restrições dos mesmos ao 2-subgrupo de Sylow fixado, a identidade. Vale para este conjunto o resultado a seguir.

**Teorema 2.4** *Se $I_S$ está contido em $Inn(G)$ - o subgrupo dos automorfismos internos de $G$ - para um 2-subgrupo de Sylow $S$ de $G$, então vale a conjectura do normalizador para o grupo $G$.*

Demonstração: Supondo que $I_S$ esteja contido em $Inn(G)$ e que $\varphi_u$, pertencente a $Aut_U(G)$, seja um automorfismo determinado por $u$ em $N_U(G)$, a estratégia da prova consistirá em demonstrar-se a existência de $\psi$, em $Inn(G)$, tal que $\psi \cdot \varphi_u$ esteja em $I_S$. O resultado seguirá do fato de que $\varphi_u$ será, deste modo, um automorfismo interno de $G$; uma vez que, como já foi mencionado, a conjectura do normalizador decorre de $Aut_U(G)$ ser um subgrupo de $Inn(G)$.

Do Teorema 2.2, segue que existe $g_1$ em $G$ tal que

$$\varphi_u(h) = g_1^{-1} h g_1, \text{ para todo } h \text{ em } S;$$

definindo um automorfismo interno de $G$ como

$$\gamma(g) := g_1 g g_1^{-1}, \text{ para todo } g \text{ em } G,$$

conclui-se que a composição $\gamma \cdot \varphi_u$ é a identidade quando restrita a $S$. Denotando $ug_1^{-1}$ por $v$, é imediato que $v$ pertence a $N_U(G)$ e $\gamma \cdot \varphi_u = \varphi_v$ pertencerá a $Aut_U(G)$.

A Proposição 2.1 afirma, em sua demonstração, que existe $f$ em $G$ tal que $v^* = fv$; ademais, como $v^*v$ é central, para todo $g$ em $G$, vale

$$\varphi_v^2(g) = fgf^{-1}.$$

Tomemos o grupo cíclico $\langle f \rangle$; se notarmos por $S_2(f)$ e $S_{2'}(f)$ os 2-subgrupo de Sylow e $2'$-subgrupo de Hall, respectivamente, de $\langle f \rangle$, teremos:

$$\langle f \rangle = S_2(f) \times S_{2'}(f);$$

como ambos são cíclicos, $S_2(f) = \langle f_1 \rangle$ e $S_{2'}(f) = \langle f_2 \rangle = \langle f_2^2 \rangle$; daí a conclusão: $f = f_1 \cdot f_2^2$, em que $f_1$ é um 2-elemento e 2 não divide a ordem de $f_2$.

Definimos então $\delta$ em $Inn(G)$ como:

$$\delta(g) := f_2^{-1} g f_2, \text{ para todo } g \text{ em } G;$$

lembrando que $v^* = fv$, segue que $v = v^* f^{-1} = fvf^{-1}$, ou seja, $f$ comuta com $v$ e, já que $f_2 \in \langle f \rangle$, decorre que

$$\delta \cdot \varphi_v = \varphi_v \cdot \delta.$$

Mais ainda, uma vez que $f$ está em $C_G(S)$ – pois sendo $\varphi_v$ a identidade quando restrita a $S$, $\varphi_v^2$ também o será – segue então que $\delta$ fixa $S$ pontualmente. Consequentemente, o automorfismo $\theta = \delta \cdot \varphi_v$ satisfaz, como se pode facilmente verificar:

(I) $\theta(h) = h$, para todo $h$ em $S$;

(II) $\theta^2(g) = f_1 g f_1^{-1}$, para todo $g$ em $G$, sendo $f_1$ um 2–elemento.

Analogamente, fazendo $w = vf_2$, segue que $\theta = \varphi_w$ está em $Aut_U(G)$. Como $f_1$ centraliza $S$ e sendo $f_1$ um 2-elemento, obtemos que $f_1$ pertence a $\zeta(S)$, o centro de $S$ – basta observar que $\langle S, f_1 \rangle$ é um 2-subgrupo de $G$.

Já que, para todo $h$ em $S$, $\varphi_w(h) = h$, tem-se

$$w = \sum_{g \in G} a_g g = \sum_{g \in G} a_g h^{-1} g h;$$

Observamos portanto que, em relação a ação de $S$ sobre $G$ determinanda por conjugação, a função $a : G \to \mathbb{Z}$, em que $a(g) = a_g$, é constante nas órbitas da mesma; como 2 não divide $\epsilon(w) = \pm 1$, existe necessariamente um ponto, $g_0$, fixado pela ação, no suporte de $w$; evidentemente $g_0$ pertence a $C_G(S)$.

Seja $w_0$ a projeção linear de $w$ no subanel $\mathbb{Z}C_G(S)$ de $\mathbb{Z}G$; como $g_0$ está em $supp(w)$, segue que $w_0$ não é 0. Denotamos ainda por $\bar{w}_0$ a redução módulo 2 de $w$ a $\mathbb{Z}_2 C_G(S)$.

Do fato de $\bar{w}_0$ pertencer a $\mathbb{Z}_2 C_G(S)$, concluímos que o cardinal do suporte de $\bar{w}_0$ é igual a $\epsilon(\bar{w}_0)$; por outro lado, é óbvio que $\epsilon(\bar{w}_0) \equiv \epsilon(w_0)\ (mod\, 2)$. Para $g$ em $supp(w)$, teremos que $g$ pertencerá ou não a $C_G(S)$; no primeiro caso, $g$ é um ponto fixo para a ação em tela; no segundo, a órbita de $g$ tem comprimento potência de 2 – pois $S$ é um 2-grupo e, como já mencionado, os coeficientes dos elementos em uma mesma órbita são iguais – consequentemente $\epsilon(w_0) \equiv \epsilon(w)\ (mod\, 2)$. Por fim, como $\epsilon(w) = \pm 1$, resumimos estes dados como:

$$card(supp(\bar{w}_0)) = \epsilon(\bar{w}_0) \equiv \epsilon(w_0) \equiv \epsilon(w) \equiv 1\ (mod\, 2);$$

ou seja, o suporte de $\bar{w}_0$ é constituído por um número ímpar de elementos em $C_G(S)$.

De $w = vf_2$, $v^* = fv$ e $f = f_1 f_2^2$, segue que

$$w^* = f_2^{-1} v^* = f_2^{-1} f_1 f_2^2 v = f_1 f_2 v = f_1 w;$$

pois $f$ comuta com $v$ e $f_1$ pertence a $\langle f \rangle$. Já foi visto que $f_1$ está em $\zeta(S)$; consequentemente, para a projeção $w_0$ de $w$, vale

$$w_0^* = f_1 w_0;$$

desta equação decorre

$$\bar{w}_0^* = f_1 \bar{w}_0. \tag{2.3}$$

Tomemos um elemento $h_1$ no suporte de $\bar{w}_0$; segue de (2.3) que $f_1 h_1 = h_2^{-1}$ para algum $h_2$ também no suporte de $\bar{w}_0$; sendo assim, $f_1 h_2 = f_1(h_1^{-1} f_1^{-1}) = h_1^{-1}$, pois $h_1$ está em $C_G(S)$ e $f_1$ em $S$. A conclusão é que o suporte de $w_0$ é a união disjunta de conjuntos da forma $\{h_1, h_2\}$, com $f_1 h_1 = h_2^{-1}$. Ora, já foi visto que o cardinal do suporte de $\bar{w}_0$

é ímpar, logo, para ao menos um destes conjuntos, deve valer $f_1 h_1 = h_1^{-1}$, ou seja, $f_1 = h_1^{-2}$; porém $f_1$ é um 2-elemento, isto implica que $h_1$ também o é, e, já que $h_1$ está em $C_G(S)$, segue que $h_1$ pertence a $\zeta(S)$.

Para concluir, definimos o automorfismo interno de $G$ como

$$\psi(g) = h_1 g h_1^{-1}, \text{ para todo } g \text{ em } G.$$

Observamos agora que a composição $\psi \cdot \varphi_w$ é tal que:

(I) Para todo $h$ em $S$:

$$\psi \cdot \varphi_w(h) = h_1 w^{-1} h w h_1^{-1} = h,$$

pois já foi visto que $w$ comuta com os elementos de $S$; ademais $h_1$ pertence a $\zeta(S)$.

(II) Para todo $g$ em $G$:

$$(\psi \cdot \varphi_w)^2(g) = h_1 w^{-1} h_1 w^{-1} g w h_1^{-1} w h_1^{-1};$$

lembrando agora que $h_1$ pertence a $\zeta(S)$, $w$ comuta com os elementos de $S$, ademais que $w = v f_2$ e que, para todo $g$ em $G$, vale $v^{-2} g v^2 = f g f^{-1}$, em que $f = f_1 f_2^2$ e $f$ comuta com $v$, segue:

$$\begin{aligned}
(\psi \cdot \varphi_w)^2(g) &= h_1^2 w^{-2} g w^2 h_1^{-2} \\
&= f_1^{-1} (v f_2)^{-2} g (v f_2)^2 f_1 \\
&= f_1^{-1} f_2^{-2} v^{-2} g v^2 f_2^2 f_1 \\
&= f_1^{-1} f_2^{-2} f g f^{-1} f_2^2 f_1 = g.
\end{aligned}$$

Logo a composição $\psi \cdot \varphi_w$ é um elemento de $I_S$; uma vez que $I_S$ está contido em $Inn(G)$ por hipótese, é forçoso que $\varphi_w$ seja automorfismo interno, pois $\psi$ assim o é. Retrocedendo na demonstração, vemos que $\varphi_w = \delta \cdot \varphi_v$, com $\delta$ em $Inn(G)$; como também $\varphi_v = \gamma \cdot \varphi_u$, em que $\gamma$ é também um automorfismo interno, a conclusão é, pois, que $\varphi_u$ pertence a $Inn(G)$.

**q.e.d.**

O resultado anterior é a ferramenta principal que possibilita aos autores, via a aplicação da teoria de cohomologia de grupos, estabelecer o teorema a seguir.

**Teorema 2.5** *(Jackowski & Marciniak, 87) Se o grupo finito $G$ possui um 2-subgrupo de Sylow normal, então vale a conjectura do normalizador para $G$.*

Demonstração: Sejam $S$ o 2-subgrupo de Sylow normal em $G$, $I_S$ o conjunto tratado no resultado anterior e $\varphi_u$ em $I_S$. Sendo $T$ o quociente $G/S$, já que $\varphi_u$, quando restrito a $S$, é a identidade, $\varphi_u$ induz um automorfismo quociente, $\bar{\varphi}_u$, em $T$ que ainda é uma involução; ou seja, $\bar{\varphi}_u^2 = \iota$. Como $u \in N_U(G)$ e $\mathbb{Z}(G/S) \simeq \mathbb{Z}T$, é imediato que a unidade $\bar{u}$, em $\mathbb{Z}T$, normaliza $T$, isto é, $\bar{u}$ está em $N_U(T)$; porém a ordem de $T$ é ímpar, do Teorema 2.3 decorre que $\bar{\varphi}_u$ pertence a $Aut_U(T) = Inn(T)$. Aplicando agora o Lema 2.1, advém, do fato de que $\bar{\varphi}_u$ é uma involução, que $\bar{\varphi}_u$ é a identidade em $T$. Visto que $(|S|, |T|) = 1$ segue que, quando $T$ age sobre $\zeta(S)$, o centro de $S$, por conjugação, o primeiro grupo de cohomologia é trivial, isto é $\mathcal{H}^1(T, \zeta(S)) = 0$; sendo assim, todo 1-ciclo é uma 1-coborda; as hipóteses do Satz 17.1c em Huppert [25] estão, pois, satisfeitas, logo $\varphi_u$ é um automorfismo interno.

**q.e.d.**

Os resultados que acabamos de exibir deixam patente a força da conjectura do normalizador em anéis integrais de grupos finitos; entretanto vale notar que uma extensa pesquisa acerca das propriedades de $Aut_U(G)$ foi realizada por Marcin Mazur. Numa série de trabalhos – veja [44, 45, 46, 47, 48] – Mazur obtém a validade de algumas propriedades, que são variantes da conjectura do normalizador, para certas famílias de grupos; bem como obtém a validade da conjectura para outros anéis de coeficientes que não apenas $\mathbb{Z}$. Mazur adverte também para a existência de um vínculo entre a conjectura do normalizador e o problema do isomorfismo, este aspecto será discutido adiante.

## 2.3 Os grupos de Blackburn e outros resultados recentes

No que diz respeito à conjectura do normalizador para anéis integrais de grupos finitos, por algum tempo não se obtiveram novas classes de grupos, além das apontadas por Jackowski e Marciniak, em que a validade da conjectura fosse assegurada. A situação assim esteve até que, próximo ao final do ano de 1998, Y. Li, M. M. Parmenter e S.

Sehgal, em [41], lograram demonstrar a conjectura para mais uma classe de grupos; a qual chamaremos de classe dos grupos de Blackburn. Este é um dos resultados que agora comentaremos; todavia, posto que o trabalho destes autores seja importante para a questão do normalizador, não desenvolveremos aqui a sua demonstração. E isto apenas porque a prova do mesmo não é essencial para o resultado que propomos; contudo vale notar que as técnicas que os autores utilizam são, cremos, bastante profícuas para os que estejam interessados nesta questão; sugerimos, pois, ao leitor que não se furte a uma leitura do artigo mencionado.

Os grupos em que todos os subgrupos são normais são os chamados grupos de Dedekind. Se a ordem de um tal grupo ímpar, já vimos que a conjectura do normalizador é satisfeita (*a fortiori* porque, neste caso, os grupos são necessariamente abelianos, a conclusão é trivial!); o mesmo para a ordem for par, pois um 2-subgrupo de Sylow será normal. Vemos assim que os resultados de Jackowski e Marciniak garantem que a classe dos grupos cujos subgrupos são normais representa uma solução à questão do normalizador. Por este motivo, Li, Parmenter e Sehgal lidam com uma particular classe de grupos disjunta da classe de Dedekind: dado $G$, nesta classe, a interseção dos subgrupos não normais de $G$, denotada por $R(G)$, é não trivial.

A classe mencionada acima, qual seja, a dos grupos finitos para os quais a interseção dos seus subgrupos não normais é não trivial, foi completamente descrita por N. Blackburn em [5]; sendo assim, referiremos estes grupos simplesmente como grupos de Blackburn.

É interessante notar o fato elementar a seguir; cuja prova será exibida, porquanto será futuramente aplicado.

**Proposição 2.2** *Se $G$ é um grupo de Blackburn, então $R(G)$ é um subgrupo cíclico e característico em $G$.*

Demonstração: Por definição, $R(G) = \bigcap H_i$, em que $H_i$ percorre todos os subgrupos não normais de $G$. Para que $H$, um subgrupo de $G$, seja não normal em $G$ é necessário que possua ao menos um subgrupo cíclico não normal em $G$. Em sendo assim, a interseção acima pode ser restrita aos subgrupos cíclicos não normais em $G$, isto é,

$$R(G) = \cap_{C \ntrianglelefteq G} C;$$

consequentemente $R(G)$ é cíclico.

Uma vez que um automorfismo de $G$ associa subgrupos cíclicos não normais a subgrupos cíclicos não normais, segue que $R(G)$ é um subgrupo característico de $G$.

**q.e.d.**

Objetivando atacar os grupos de Blackburn, os autores citados primeiramente desenvolvem dois resultados que, em si mesmos, são valiosos.

**Teorema 2.6** *Seja $G = \langle H, g \rangle$, em que $H$ é um subgrupo abeliano de índice 2, então vale a propriedade do normalizador para $G$.*

Vale observar que este resultado inclui os grupos diedrais e os chamados $Q^*$-grupos propostos por S. R. Arora e I. B. S. Passi em [2].

**Teorema 2.7** *Seja $G$ o produto direto dos grupos $G_1$ e $G_2$, $G = G_1 \times G_2$, então vale a propriedade do normalizador para $G$ se, e somente se, a mesma vale para $G_1$ e para $G_2$.*

Blackburn descreve os grupos que levam o seu nome segundo os cinco exaustivos casos abaixo:

a) $G$ possui um subgrupo abeliano $A$ de expoente $kp^n$, sendo $n \geq 1$; $p$ é primo e $(k, p) = 1$. $G/A$ é cíclico de ordem $p^r$ e, se $Au$ gera $G/A$, $u$ pode ser escolhido de modo que $u^{p^r}$ tenha ordem $p^n$. Existe um inteiro $\xi \equiv 1(p^n)$ tal que $x^u = x^\xi$ para todo $x \in A$.

b) $G$ é o produto direto de um grupo abeliano de ordem ímpar por um grupo de uma das duas formas a seguir:

b.1) o produto direto de um grupo quatérnio de ordem 8, um grupo cíclico de ordem 4 e um grupo abeliano elementar;

b.2) o produto direto de dois grupos quatérnios de ordem 8 e um grupo abeliano elementar.

c) $G$ possui um subgrupo $H$ do tipo descrito em a), com $p = 2$ e $r = 1$. $H$ tem índice 2 em $G$, e se $G$ for gerado por $H$ e $t$, $t$ pode ser escolhido de modo que $u^t = u^{-1}$, $t^2 = u^{2^n}$ e $x^t = x^\eta$, para algum $\eta \equiv -1(2^n)$.

d) $G$ possui um subgrupo abeliano de índice 2. $G$ é gerado por $A$ e $t$ em que $t^2$ é um elemento de $A$ de ordem 2. Se $x$ é um elemento de $A$, $x^t = x^\zeta$ para algum $\zeta \equiv -1(2^n)$.

e) $G$ é o produto direto de $H$ por um grupo quatérnio de ordem 8 e um 2-grupo abeliano elementar, em que $H$ é de ordem ímpar e do tipo descrito em a).

De posse desta classificação, analisando caso a caso os grupos descritos, Li, Parmenter e Sehgal obtêm o resultado central de seu artigo:

**Teorema 2.8** *(Li, Parmenter & Sehgal, 99) Seja $G$ um grupo finito, se $R(G)$ é não trivial, então a propriedade do normalizador é válida para $G$.*

Este resultado amplia consideravelmente a classe dos grupos finitos para os quais é válida a conjectura do normalizador; ademais é uma conseqüência do mesmo que, se $G$ é um contra-exemplo para a conjectura, é necessário que $G$ possua ao menos dois subgrupos cíclicos não normais, sendo que ao menos um deles é um 2-grupo.

Ora, os grupos de Frobenius de ordem par constituem uma classe que atende precisamente a estas condições; estes serão o objeto da próxima seção.

Antes, porém, ressaltamos que, ainda no ano de 1998, Roggenkamp e Marciniak obtiveram uma solução para a conjectura, estabelecendo o resultado a seguir:

**Teorema 2.9** *(Marciniak & Roggenkamp, 98) Seja $G$ um grupo metabeliano finito, se um 2-subgrupo de Sylow de $G$ é abeliano, então vale a propriedade do normalizador para $G$.*

Na primeira metade do ano de 1999, Y. Li anunciou, na *Réunion d'été 1999 de la Société Mathématique du Canada*, uma extensão do resultado anterior, ver [40], qual seja:

**Teorema 2.10** *(Li, 99) Seja $G$ um grupo metabeliano finito e $B$ um subgrupo abeliano normal em $G$, tal que o quociente $G/B = A$ é abeliano. Se $P = B_2 \rtimes D$ e $C_{A_2}(B_2) = C_{A_2}(b)$, para algum $b$ em $B_2$, sendo $P$ um 2-subgrupo de Sylow de $G$, e $B_2$ e $A_2$ os 2-subgrupos de Sylow de $B$ e $A$, respectivamente, então vale a propriedade do normalizador em $G$.*

Ademais revelou que alcançara a prova da seguinte proposição:

**Proposição 2.3** *Vale a propriedade do normalizador para um grupo metabeliano finito que cinde e que possui um 2-subgrupo de Sylow diedral.*

Este é, pois, o estado em que se encontra a pesquisa da conjectura do normalizador; passemos então à nossa proposta.

## 2.4 Os grupos de Frobenius

Esta seção apresenta o resultado que obtivemos acerca da conjectura do normalizador; qual seja, que a conjectura é válida para a classe dos grupos de Frobenius.

Os grupos de Frobenius já foram apresentados, bem como as suas características, no capítulo anterior; para conforto do leitor resumiremos aqui as propriedades destes grupos que serão exploradas na seção.

Um grupo de Frobenius $G$ apresenta-se como o produto semidireto de dois subgrupos não triviais:

$$G = K \rtimes H$$

e valem as propriedades

(i) $(|K|, |H|) = 1$;

(ii) para $k$ em $K$ e $h$ em $H$, se $h^{-1}kh = k$, então ou $k = 1$ ou $h = 1$;

(iii) $K$ é o subgrupo de Fitting de $G$;

(iv) se $|H|$ é par, então $K$ é abeliano; ademais existe um único elemento $z$ em $H$ tal que $z^2 = 1$; logo este elemento é central e $zkz = k^{-1}$ para todo $k$ em $K$.

Os resultados expostos nas seções anteriores serão também de fundamental importância na demonstração que segue. Eis o resultado que obtivemos:

**TEOREMA 2.1** *Vale a conjectura do normalizador para os grupos de Frobenius.*

Demonstração: A técnica desta demonstração consiste em obter as condições necessárias para a aplicação dos resultados das seções anteriores.

Seja $G$ um grupo de Frobenius; segundo o Teorema 2.3, se $|G|$ é ímpar, segue o resultado. Logo basta tomarmos $G$ com ordem par.

Das propriedades listadas acima e de $G = K \rtimes H$, segue que $|G| = |K| \cdot |H|$; como $(|K|, |H|) = 1$, concluímos que ou $2 \Big| |K|$, ou $2 \Big| |H|$. Suponhamos que $2 \Big| |K|$; sendo $K$ o subgrupo de Fitting de $G$, decorre que $K$ é nilpotente e característico em $G$; consequentemente, se $S_2$ é um 2-subgrupo de Sylow de $G$, é imediato que $S_2$ é um subgrupo característico de $K$ e, portanto, será também subgrupo normal de $G$. O Teorema 2.5 assegura, então, o resultado procurado.

Consideraremos, portanto, que $|H|$ seja par$|$[1], segue das propriedades listadas que $K$ é abeliano. Fixemos $S$, um 2-subgrupo de Sylow de $G$, tal que $S$ esteja contido em $H$; definimos então o já mencionado conjunto $I_S$ como

$$I_S := \{\varphi_u \in Aut_U(G) : \varphi_u^2 = \iota \text{ e } \varphi_u \mid_S = \iota\}.$$

Analisaremos como um automorfismo $\varphi_u$, em $I_S$, age sobre o grupo $G$; lembremos que, por definição, $u$ está em $N_U(G)$ e é tal que

$$\varphi_u(g) = u^{-1}gu, \text{ para todo } g \text{ em } G.$$

De início, observamos que $\varphi_u(g)$ e $g$ são conjugados em $G$, para todo $g$ em $G$, pois

$$\varphi_u(g) - g = u^{-1}gu - g = [\![u^{-1}, gu]\!];$$

como $[\![u^{-1}, gu]\!]$ pertence a $[\![\mathbb{Z}G, \mathbb{Z}G]\!]$, da Proposição 1.35, segue que

$$\varphi_u(g) \sim_G g.$$

Seja agora $S_p$ um $p$-subgrupo de Sylow, que não seja trivial, de $K$; o Teorema 2.2 garante a existência de $g_0$ em $G$, da forma $g_0 = k_0h_0$, com $k_0$ em $K$ e $h_0$ em $H$, tal que

$$\varphi_u(k) = u^{-1}ku = h_0^{-1}k_0^{-1}kk_0h_0, \text{ para todo } k \text{ em } S_p.$$

Uma vez que $K$ é abeliano, segue que

$$u^{-1}ku = h_0^{-1}kh_0.$$

Teremos dois casos a considerar:

[1] Pode-se provar que, neste caso, um 2-subgrupo de Sylow de $G$ é, necessariamente, não normal!

1) $h_0 = 1$. Neste caso, $u^{-1}ku = k$, para todo $k$ em $S_p$, e, portanto, a ação de $\varphi_u$ sobre $S_p$ é trivial.

2) $h_0 \neq 1$. Observamos que $S_p$ é característico em $K$, pois que $K$ é o subgrupo de Fitting de $G$; segue daí que $S_p$ é um subgrupo característico em $G$; logo a restrição de $\varphi_u$ a $S_p$ é um automorfismo; isto assegura que

$$\varphi_u^2(k) = h_0^{-1}h_0^{-1}kh_0h_0 = h_0^{-2}kh_0^2.$$

Porém $\varphi_u$ pertence a $I_S$, donde $\varphi_u^2$ é a identidade; assim

$$\varphi_u^2(k) = k = h_0^{-2}kh_0^2.$$

Uma vez que $S_p$ não é a identidade, do fato da ação de $H$ sobre $K$ ser livre de pontos fixos, concluímos que $h_0^2 = 1$. A propriedade $(iv)$ citada anteriormente implica em $h_0 = z$; ou seja, a ação de $\varphi_u$ sobre $S_p$ inverte todos os elementos de $S_p$, pois $zkz = k^{-1}$.

Vimos, portanto, que, dado um $p$-subgrupo de Sylow $S_p$ em $K$, ou $\varphi_u$ fixa todos os elementos de $S_p$ ou os inverte a todos. Como $K$ é o produto direto de seus subgrupos de Sylow, pois que é nilpotente, resta saber se $\varphi_u$ fixa os elementos de alguns subgrupos de Sylow e inverte os elementos dos demais. Consideremos então que $K$ seja decomposto como $K = X \times Y$; em que $X$ é o produto dos subgrupos de Sylow nos quais $\varphi_u$ age como a identidade, ao passo que $Y$ é determinado como o produto daqueles em que $\varphi_u$ age invertendo seus elementos – evidentemente $X$ e $Y$ são subgrupos característicos em $K$. Deste modo, um elemento genérico $k$ em $K$ escreve-se como $k = xy$, com $x$ em $X$ e $y$ em $Y$, e vale:

$$u^{-1}xyu = xy^{-1}.$$

No início deste raciocínio, obtivemos que $xy$ e $xy^{-1}$ são elementos conjugados em $G$; logo existe um elemento em $G$, que notaremos $k_0h_0$, – obviamente $k_0$ em $K$ e $h_0$ em $H$ – tal que

$$xy^{-1} = h_0^{-1}k_0^{-1}xyk_0h_0 = h_0^{-1}xyh_0 = h_0^{-1}xh_0h_0^{-1}yh_0.$$

Do fato de $X$ e $Y$ serem subgrupos característicos de $K$, segue que são normais em $G$, portanto

$$h_0^{-1}xh_0 = x \quad \text{e} \quad h_0^{-1}yh_0 = y^{-1}.$$

Temos então duas possibilidades:

a) $h_0 = 1$. Sendo assim, $y = y^{-1}$, ou seja, $y^2 = 1$; porém 2 não divide $|K|$, consequentemente $y = 1$. Ora, isto equivale a dizer que $Y$ é trivial e $K = X$; noutros termos, $\varphi_u$ age sobre $K$ como a identidade.

b) $h_0 \neq 1$. Mais uma vez, lembrando que a ação de $h_0$ é livre de pontos fixos, concluímos que $x = 1$. Neste caso, $X$ é trivial e $K = Y$; assim $\varphi_u$ age sobre $K$ invertendo os seus elementos.

Concluímos que a ação de $\varphi_u$ sobre $K$ é tal que ou $\varphi_u$ fixa todos os seus elementos ou, exclusivamente, inverte todos estes elementos.

Investigaremos agora como $\varphi_u$ age sobre um elemento $h$ de $H$.

Como $z$ é um elemento central em $H$, cuja ordem é 2, e já que $\varphi_u$ fixa um 2-subgrupo de Sylow de $H$ – pois $\varphi_u$ está em $I_S$ – concluímos que $\varphi_u(z) = z$; ou, equivalentemente, $z$ comuta com $u$. Consideremos $h$ um elemento de $H$ distinto do 1; é sabido que $h$ é conjugado, em $G$, a $\varphi_u(h)$; logo existe $h_0k_0$, em $G$, tal que

$$u^{-1}hu = k_0^{-1}h_0^{-1}hh_0k_0.$$

Conjugando por $z$

$$zu^{-1}huz = zk_0^{-1}h_0^{-1}hh_0k_0z;$$

donde

$$u^{-1}hu = k_0h_0^{-1}hh_0k_0^{-1},$$

pois já vimos que $z$ comuta com $u$, é central em $H$ e age sobre $K$ invertendo seus elementos; por conseguinte

$$k_0^{-1}h_0^{-1}hh_0k_0 = k_0h_0^{-1}hh_0k_0^{-1}$$

$$h_0^{-1}hh_0k_0^2 = k_0^2h_0^{-1}hh_0,$$

e, uma vez que $h \neq 1$ e sua ação é livre de pontos fixos, segue que $k_0^2 = 1$. Como 2 não divide $|K|$, concluímos que $k_0 = 1$; ou seja, que a restrição de $\varphi_u$ a $H$ é também um automorfismo.

Obtivemos que a restrição de $\varphi_u$ a $H$ é um automorfismo, resta-nos, pois, verificar que automorfismo é este; para tanto, usaremos um artifício: um elemento genérico em $G$, porém fixado, tem a forma $kh$, com $k$ em $K$ e $h$ em $H$; sendo $K$ normal em $G$, existirá um elemento $k_0$ em $K$, bem determinado, tal que

$$kh = hk_0; \tag{2.4}$$

desta equação extraímos as duas, óbvias, abaixo:

$$h^{-1}k^{-1} = k_0^{-1}h^{-1} \tag{2.5}$$

e

$$h^{-1}k = k_0h^{-1}. \tag{2.6}$$

Consideremos primeiramente que $\varphi_u$ age sobre $K$ como a identidade, isto é, $\varphi_u(k) = k$ para todo $k$ em $K$; sendo assim, para um elemento genérico $kh$ em $G$, teremos

$$u^{-1}khu = ku^{-1}hu$$

e

$$u^{-1}hk_0u = u^{-1}huk_0;$$

multiplicando, à direita, a primeira equação por $h^{-1}k^{-1}$ e a segunda por $k_0^{-1}h^{-1}$, segue que

$$u^{-1}khuh^{-1}k^{-1} = ku^{-1}huh^{-1}k^{-1}$$

e

$$u^{-1}hk_0uk_0^{-1}h^{-1} = u^{-1}huh^{-1};$$

as equações (2.5) e (2.6) asseguram que

$$ku^{-1}huh^{-1}k^{-1} = u^{-1}khuh^{-1}k^{-1} = u^{-1}hk_0uk_0^{-1}h^{-1} = u^{-1}huh^{-1},$$

isto é,

$$ku^{-1}huh^{-1}k^{-1} = u^{-1}huh^{-1}.$$

Do fato de $\varphi_u$ ser um automorfismo em $H$, segue que $u^{-1}huh^{-1}$ pertence a $H$; como a ação é livre de pontos fixos e $k$ é um elemento genérico de $K$, concluímos que $u^{-1}huh^{-1} = 1$, ou seja,

$$\varphi_u(h) = u^{-1}hu = h, \quad \text{para todo } H.$$

Para o caso em que $\varphi_u$ age sobre $K$ invertendo seus elementos, o raciocínio é análogo. Tomemos um elemento genérico $kh$ em $G$, valem então:

$$u^{-1}khu = k^{-1}u^{-1}hu$$

e

$$u^{-1}hk_0u = u^{-1}huk_0^{-1};$$

multiplicando, à direita, a primeira equação por $h^{-1}k$ e a segunda por $k_0h^{-1}$, obteremos

$$u^{-1}khuh^{-1}k = k^{-1}u^{-1}huh^{-1}k$$

e

$$u^{-1}hk_0uk_0h^{-1} = u^{-1}huh^{-1};$$

as equações (2.5) e (2.6) garantem então que

$$k^{-1}u^{-1}huh^{-1}k = u^{-1}khuh^{-1}k = u^{-1}hk_0uk_0h^{-1} = u^{-1}huh^{-1},$$

isto é,

$$k^{-1}u^{-1}huh^{-1}k = u^{-1}huh^{-1}.$$

Exatamente como no caso anterior, concluímos que $u^{-1}huh^{-1} = 1$, ou seja,

$$\varphi_u(h) = u^{-1}hu = h, \quad \text{para todo } H.$$

Os dois casos demonstram que $\varphi_u$ age sobre $H$ como a identidade.

Finalmente, demonstramos, até o momento, que se nos é dada uma unidade $u$, em $N_U(G)$, tal que o automorfismo por ela determinado, $\varphi_u$, pertença a $I_S$, então, para todo $h$ em $H$, teremos $\varphi_u(h) = h$; ademais obtivemos também que ou $\varphi_u(k) = k$, para todo $k$ em $K$, ou $\varphi_u(k) = k^{-1}$, para todo $k$ em $K$. Portanto, para um elemento genérico $kh$ em $G$, ocorre $\varphi_u(kh) = kh$ ou ainda, para todo $kh$ em $G$, $\varphi_u(kh) = k^{-1}h = zkhz$. Em ambos os casos, $\varphi_u$ é um automorfismo interno de $G$, provamos pois que $I_S$ está contido em $Inn(G)$; o Teorema 2.4 garante então que

$$Aut_U(G) \leq Inn(G)$$

ou, equivalentemente, vale a conjectura do normalizador para $G$.

q.e.d.

Vale observar um fato que nos parece relevante: o resultado que acabamos de expor representa uma ampliação efetiva da classe de grupos para os quais vale a conjectura do normalizador. Esta afirmação é corroborada pelo resultado a seguir.

**PROPOSIÇÃO 2.1** *A classe dos grupos de Frobenius é disjunta da classe dos grupos de Blackburn.*

Demonstração: De fato, em um grupo de Frobenius $G = K \rtimes H$, um complemento $H$ é não normal em $G$; segue disto que $R(G)$ é subgrupo de $H$, pois que é a interseção de todos os grupos não normais. Por outro lado, a Proposição 1.27 afirma que $R(G)$ deve conter ou estar contido em $K$, pois que é normal em $G$. Uma vez que $K \cap H = (1)$, concluímos que $R(G)$ é trivialmente $(1)$, não é portanto um grupo de Blackburn.

**q.e.d.**

O próximo capítulo abordará o problema do isomorfismo; vale, portanto, notar que Mazur, em [44], observou uma curiosa relação entre a conjectura do normalizador e o problema do isomorfismo para grupos infinitos; de fato, ele obteve o seguinte teorema.

**Teorema 2.11** *Se $G$ é um grupo finito e $C_\infty$ representa um grupo cíclico infinito, então o problema do isomorfismo para $\mathbb{Z}(G \times C_\infty)$ tem reposta afirmativa se, e somente se, tem resposta afirmativa para $G$ e vale a conjectura do normalizador em $G$.*

Esta proposição foi generalizada por E. Jespers e O. S. Juriaans em [29], que obtiveram o mesmo resultado substituindo $C_\infty$ por um grupo abeliano finitamente gerado.

Ademais, M. Hertweck, em [24], alega que, adaptando as idéias de Mazur, conseguira obter um contra-exemplo tanto para o problema do isomorfismo quanto para a conjectura do normalizador. Seus argumentos contudo, até o momento, não foram publicados; não estão, portanto, completamente explicitados.

# Capítulo 3

# O Problema do Isomorfismo – Parte I

Este capítulo apresenta aquele que talvez seja o problema central da teoria dos anéis de grupos integrais: o Problema do Isomorfismo. A importância desta questão reside não apenas no fato de que uma solução para ela teria extrema relevância na teoria dos anéis de grupo, e, por consequência, para a teoria das representações de grupo, bem como para a própria teoria dos grupos; ocorre que o problema do isomorfismo é, em parte, responsável pelo próprio desenvolvimento da pesquisa em anéis de grupo; na medida em que a sua investigação revelou uma série de outras questões que, em si mesmas, são de grande interesse para a teoria. Faremos aqui uma exposição sucinta do problema e de algumas questões a ele relacionadas, como também de algumas soluções destas tendo em vista os grupos de Frobenius.

Ainda neste capítulo, serão apresentados alguns dos resultados que obtivemos, os quais apontam para uma possível solução do problema do isomorfismo. Veremos que as bases grupais de anéis de grupos de Frobenius são também grupos de Frobenius; tendo também estruturas muito semelhantes, pois que apresentam núcleos e complementos repectivamente isomorfos.

## 3.1 Considerações acerca dos anéis de grupos

Entre os muitos problemas que se destacaram na teoria de anéis de grupo, o chamado Problema do Isomorfismo assume uma posição central. Ele já está presente na tese de doutoramento de G. Higman, de 1940, na qual este afirma textualmente:

> *"Whether it is possible for two non-isomorphic groups to have isomorphic integral group rings, I do not know; but the results of section 5 suggest it is unlikely"*
>
> (confronte referência Sandling [74]).

Na Conferência de Álgebra em Michigan, no ano de 1947, o problema do isomorfismo foi publicamente apresentado por R.M. Thrall, que o formulou explicitamente como:

> *Dados um grupo $G$ e um corpo $\mathbf{K}$, determinar todos os grupos $H$ tais que $\mathbf{K}G \simeq \mathbf{K}H$.*

Entretanto, o que modernamente traduz-se como o interesse por quais propriedades de um grupo finito $G$ se refletem sobre o anel de grupo $\mathbf{R}G$ já atraia a atenção de W. Burnside, G. Frobenius e I. Schur (ver Roggenkamp [67]). Com respeito a grupos finitos, é imediato que se dois grupos são isomorfos, os seus anéis de grupo, determinados a partir de um mesmo anel de coeficientes, também o serão; deste modo, a questão a ser examinada poderia ser formulada como:

> *Se $G$ é um grupo finito, $H$ um outro grupo qualquer e $\mathbf{R}$ um anel com unidade tais que $\mathbf{R}G \simeq \mathbf{R}H$, será então que $G \simeq H$?*

Embora alguns resultados tenham sido obtidos, como o de P. Perlis e G. Walker em [53] – o qual prova que se $G$ é um grupo abeliano finito, $\mathbb{Q}$ o anel dos racionais e $\mathbb{Q}G \simeq \mathbb{Q}H$, então $G \simeq H$ – é fácil concluirmos que a resposta a essa questão é: em geral, não! De fato, se $G$ e $H$ forem quaisquer grupos abelianos finitos de mesma ordem e $\mathbb{C}$, o corpo dos complexos, então $\mathbb{C}G \simeq \mathbb{C}H$; pois que estas álgebras são semi-simples. Ademais a descoberta, feita por E. C. Dade em [12], de dois grupos metabelianos finitos não isomorfos cujas álgebras de grupo, definidas sobre qualquer corpo, são isomorfas, revelou que resultados mais atraentes devem ser obtidos a partir de anéis bem particulares. Os trabalhos de G. Higman e S. D. Berman, por exemplo, acerca das unidades de anéis de grupo, levam à conclusão que se $G$ é um grupo abeliano finito e $\mathbb{Z}G \simeq \mathbb{Z}H$, então $G \simeq H$. Em 1968, A. Whitcomb obteve resultados que implicavam: se $G$ é um grupo metabeliano finito e $\mathbb{Z}G \simeq \mathbb{Z}H$, então $G \simeq H$. Os grupos nilpotentes finitos também representam uma solução positiva sobre o anel $\mathbb{Z}$, conforme demonstraram K. Roggenkamp e L. L. Scott. Segundo R. Sandling, veja [76], a classe dos grupos circulares oferece outra solução ao problema do isomorfismo para $\mathbb{Z}$. A lista das soluções do problema do isomorfismo, referentes ao anel $\mathbb{Z}$, prossegue com grupos hamiltonianos e 2-hamiltonianos; grupos diedrais; grupos simétricos; alguns grupos lineares, como os especiais; grupos simples e semi-simples; o mesmo se pode afirmar com respeito a algumas extensões de grupos abelianos e quatérnios; e isto só para citar alguns! Uma exposição panorâmica, porém sintética, destes resultados pode ser conferida em Sandling [75], sugerimos também que se observem as obras de Polcino Milies e Sehgal, em [62], e a deste último autor em [82], ou ainda a de Roggenkamp em [67].

É oportuno observar que, independentemente de se obter uma solução do problema do isomorfismo para grupos finitos, a existência do isomorfismo $\mathbb{Z}G \simeq \mathbb{Z}H$ acarreta uma série de semelhanças entre os grupos $G$ e $H$. Os dois grupos terão, por exemplo, a mesma ordem e seus centros serão isomorfos – pode-se demonstrar até mesmo que seus segundos centros também o serão. Ademais um resultado, primeiramente devido a G. Glauberman (veja [49], bem como [9]), implica existir uma correspondência entre as classes de conjugação dos grupos $G$ e $H$, via as somas destes elementos, que preserva a ordem destas e a ordem de seus elementos, entre outras propriedades. Deste resultado, segue que $\mathbb{Z}G$ determina a tábua de caracteres de $G$; outrossim pode-se concluir que existe um isomorfismo das estruturas booleanas dos reticulados de subgrupos normais de $G$ e $H$; ou seja, preservando as interseções e produtos dos subgrupos normais, preserva ainda a ordem destes subgrupos. E as semelhanças entre os grupos $G$ e $H$ não param aí; características como abelianidade, nilpotência, solubilidade, são compartilhadas pelos dois grupos; isto porque a isomorfia dos anéis de grupo integrais determina uma correspondência entre as séries centrais e derivadas dos dois grupos – vale notar, portanto, que, no caso de grupos nilpotentes, até mesmo a classe de nilpotência estará determinada! Há uma série de outras propriedades, das quais gozam os elementos pertencentes às bases grupais do anel de grupo $\mathbb{Z}G$ e que não foram aqui arroladas, que sugerem que a semelhança mencionada acima é ainda mais forte|[1]. Como excelentes fontes de consulta para tais resultados, sugerimos ao leitor os textos [33, 49, 56, 57, 58, 62, 75, 82], como também suas listas bibliograficas.

Fica patente, pois, que o isomorfismo $\mathbb{Z}G \simeq \mathbb{Z}\dot{G}$ impõe uma espantosa semelhança entre os grupos $G$ e $\dot{G}$ quando estes são finitos; esta semelhança justificou que se conjecturasse que o problema do isomorfismo, para estes anéis de grupos integrais – isto é, cujo anel de coeficientes é o $\mathbb{Z}$ – tem resposta positiva para todos os grupos finitos. E é esta conjectura que se tornou conhecida como o Problema do Isomorfismo; seguindo a notação em Sehgal [82], referiremo-nos doravante a tal conjectura como (Iso), ou seja:

$$\text{(Iso)} \qquad \mathbb{Z}G \simeq \mathbb{Z}\dot{G} \Longrightarrow G \simeq \dot{G}$$

Vale observar que, adaptando uma idéia de M. Mazur, veja [45], acerca de extensões infinitas de grupos finitos, M. Hertweck alega ter obtido um contra-exemplo para o problema do isomorfismo. Todavia, até o momento, só nos foi dado conhecer um esboço demasiado resumido e, portanto, inconcludente da prova defendida por Hertweck (ver [24]). Não obstante este fato, vale, sem dúvida, o esforço em aprofundar-se a investigação acerca do problema do isomorfismo; bem como verificar-se a existência de outras classes de grupos que respondam positivamente à questão.

Associadas ao problema do isomorfismo, foram levantadas várias outras questões; diversas conjecturas foram propostas acerca dos elementos inversíveis, as chamadas unidades, de um anel de grupo integral; surgiram, assim, as conjecturas de A. A. Bovdi (veja [4, 14, 17]); tornaram-se também conhecidas as, assim chamadas, conjecturas de H. Zassenhaus. Estas últimas terão um papel central no que desenvolveremos, por este motivo, nós as apresentamos aqui explicitamente; para uma estudo exten-

[1] Confira os resultados do primeiro capítulo.

so destas, sugerimos Sehgal [82], onde há também uma série de soluções para tais conjecturas; é ainda desta referência que retiramos a notação que adotaremos para indicá-las, como segue|[2]:

(CZ-1) Se $u$ é uma unidade normalizada, de ordem finita em $\mathbb{Z}G$, então $u$ é conjugada, em $\mathbf{Q}G$, a um elemento $g$ de $G$.

(CZ-2) Se $\mathbb{Z}G = \mathbb{Z}\dot{G}$ e $\dot{G}$ é normalizado, então $\dot{G}$ é conjugado, em $\mathbf{Q}G$, ao grupo $G$.

(CZ-3) Se $H$ é um subgrupo finito, normalizado em $\mathbb{Z}G$, então $H$ é conjugado, em $\mathbf{Q}G$, a um subgrupo de $G$.

(Aut) Se $\Theta$ é um automorfismo de $\mathbb{Z}G$, então existe um automorfimo $\lambda$ de $G$ e uma unidade $\alpha$, em $\mathbf{Q}G$, tal que $\Theta(g) = \alpha^{-1}\lambda(g)\alpha$, para todo $g$ em $G$.

Em que $\mathbf{Q}$ denota o anel dos racionais.

Demonstra-se que, de (CZ-3), decorrem (CZ-1) e (CZ-2); esta última, (CZ-2), equivale à conjunção de (Iso) e (Aut).

Encontraram-se soluções interessantes para estas conjecturas: os resultados obtidos por G. Higman revelam que os grupos abelianos respondem a todas as conjecturas; a conjectura (CZ-1) foi investigada por C. Polcino Milies, J. Ritter e S. K. Sehgal em [60, 61], sendo obtidas algumas soluções envolvendo grupos metacíclicos; os grupos nilpotentes respondem a (CZ-2), como provaram K. Roggenkamp e L. L. Scott (veja [70]); para estes mesmos grupos A. Weiss obteve (CZ-3) em [90]; N. A. Fernandes, em [19], também investigou (CZ-3) para grupos simétricos; G. Peterson provou (Aut) para os grupos simétricos em [54]; esta mesma conjectura foi explorada por A. Giambruno, S. K. Sehgal e A. Valenti, que observaram soluções desta acerca de alguns produtos orlados envolvendo os grupos simétricos e alternados (veja [21]); A. Valenti também obteve (CZ-3) para alguns grupos metabelianos que cindem em [88]. Doutra parte, contra-exemplos às conjecturas também foram revelados; assim K. Roggenkamp e L. L. Scott apontaram um grupo metabeliano que não obedece a

[2]Lembramos que uma unidade $u$ é normalizada se seu aumento, $\epsilon(u)$, é 1. Portanto, diremos que um grupo é normalizado se seus elementos assim o forem.

(CZ-2), veja Kingler [39]. Estes são alguns poucos exemplos do imenso volume de resultados acerca deste tema.

As conjecturas de Zassenhaus revelaram-se, portanto, uma fonte abundante de pesquisa na área de unidades dos anéis de grupo; pesquisa esta que segue com grande vigor. Algumas variações destas conjecturas têm também grande importância; entre estas vale ressaltar as versões mais fracas das conjecturas (CZ-1) e (CZ-3), respectivamente, a seguir, sendo que a primeira delas é uma das conjecturas de Bovdi:

(Ord) Se $u$ é uma unidade normalizada de ordem finita em $\mathbb{Z}G$, então existe, em $G$, um elemento $g$ cuja ordem é idêntica à de $u$.

($p$-CZ-3) Se $H$ é um $p$-subgrupo finito normalizado em $\mathbb{Z}G$, então $H$ é conjugado, em $\mathbf{Q}G$, a um subgrupo de $G$.

Estas conjecturas – bem como as demais conjecturas de A. A. Bovdi, já mencionadas – foram investigadas, entre outros, por M. Dokuchaev, S. O. Juriaans e C. Polcino Milies; em particular, Juriaans obteve, em [31], uma solução positiva de uma das conjecturas de Bovdi com respeito a grupos de Frobenius; ademais os dois primeiros autores citados obtiveram (p-CZ-3) para os grupos de Frobenius solúveis em [15]; este resultado foi em seguida generalizado pelos três autores, em [16], para todos os grupos de Frobenius – com a ressalva de que seus complementos não pudessem ser homomorficamente mapeados em $Sym_5$. Quanto a (Ord), os dois últimos autores obtiveram, em [32], a validade da mesma para os grupos de Amitsur; esta importante classe de grupos é composta pelos subgrupos finitos do grupo multiplicativo de um anel de divisão de característica zero e foi descrita por S. A. Amitsur em [1], estes grupos caracterizam-se por serem complementos de grupos Frobenius; os grupos análogos, para o caso da característica $p$, foram classificados por I. N. Herstein em [23] e tratam-se de $p'$-grupos (veja também uma excelente exposição em Shirvani & Wehrfritz [84]).

## 3.2 Grupos de Frobenius e anéis de grupo

Já mencionamos que os grupos de Frobenius compõem uma classe de destacada importância na teoria dos grupos finitos (confira Gorenstein [22] à pagina 37, Isaacs [27] pág. 101 ou Dixon & Mortimer [13] pág. 85); os resultados que acabamos de referir atestam que os grupos de Frobenius têm se revelado um campo fértil para a investigação de questões acerca das unidades de seus anéis de grupo integrais. Vale ressaltar que, em alguns casos, os grupos de Frobenius também atendem às conjecturas de A. A. Bovdi, como o demonstrou Juriaans em [30] e [31]. Lidando também com um grupo de Frobenius metacíclico, K. W. Roggenkamp, em [65], logrou demonstrar que o grupo das unidades normalizadas de $\mathbb{Z}G$ cinde por um subgrupo normal livre – pode-se mesmo demonstrar (Iso) deste fato. Os grupos de Frobenius foram também alvo de investigação por parte de H. Wingen em [93]; J.L. Margot em [43]; W. Kimmerle e K. W. Roggenkamp em [37] (veja também [66]); anéis de grupos de Frobenius sobre outros anéis de coeficientes foram igualmente estudados, como, por exemplo, fizeram J. Ritter e S. K. Sehgal em [63]. Em virtude desta pletora de resultados relativos aos grupos de Frobenius, nada mais natural que também os investigássemos; tendo como particular objetivo explorar as consequências que poderíamos extrair dos resultados principais de [16] e [32], com vistas a uma possível solução do problema do isomorfismo a partir destes; e, a este propósito, serão devotadas as próximas páginas.

É mister esclarecer aqui que, em uma conferência realizada em julho de 1986 em Arcata, Leonard L. Scott anunciou que, utilizando os métodos de rigidez de A. Weis publicados em [91] (veja também o apendice em Sehgal [82]), teria obtido, juntamente com Klaus W. Roggenkamp, o seguinte resultado:

**Proposição 3.1** *Seja $G$ um grupo finito que possui um $p$-subgrupo normal contendo seu próprio centralizador em $G$, suponha que $H$ é um grupo normalizado em $\mathbb{Z}G$ com $\mathbb{Z}G = \mathbb{Z}H$, então $H$ é conjugado a $G$ por uma unidade em $\mathbb{Z}_pG$.*

Veja Scott [77] e também Scott [78].

Estando assegura a validade desta proposição, pode-se concluir (Iso) para os grupos de Frobenius – e até mesmo (CZ-2). Todavia o autor, nas referências acima, não apresenta a prova desta afirmação; ademais o enunciado desta é precedido pela passagem:

> *"Using it* [os métodos de Weiss], *we have been able to complete the proof (the details have been written down, but not thoroughly cheked) of the following result, which we said at the conference we could prove modulo questions about conjugacy of defect groups in blocks."* (*sic*)

Este resultado é referido em outras obras de Scott e Roggenkamp; entretanto em nenhuma delas é apresentada a sua prova completa. Em [37], por exemplo, este resultado é o pré-requesito essencial para uma série de outras proposições, porém a referência apresentada para justificá-lo é ainda [77] e [78], já aludidas; ocorre que, como já comentamos, nestas referências – sendo que ambas são atas de exposições em congressos – a demonstração não é inteiramente explicitada; há apenas um esboço demasiado sintético desta, em que várias lacunas estão por ser preenchidas. Já em [67], este resultado é mais uma vez mencionado e, como comprovação para ele, é dada, além de mais uma vez [77], uma série de citações a cartas pessoais e manuscritos não publicados |[3].

Não é, absolutamente, de nosso interesse aludirmos à polêmica sobre se os autores citados obtiveram uma demonstração realmente completa deste resultado; entretanto, vez que tal demonstração jamais foi publicamente exposta, cremos que justifica-se plenamente a nossa linha de investigação; até porque os métodos que utilizamos são diversos daqueles que os autores afirmam ter empregado.

Concluindo esta seção, apresentaremos um resultado que se mostrará de suma importância no que em seguida desenvolveremos; trata-se de uma proposição obtida recentemente por Juriaans e Polcino Milies, em [32], acerca da ordem de uma unidade de torcão em um anel de grupo integral sobre um grupo de Frobenius. Por ser um resultado que está por ser publicado, exibiremos uma breve demonstração.

**Teorema 3.1** *Seja $G$ um grupo de Frobenius com núcleo $K$ e complemento $H$; se $u$ é uma unidade de ordem finita e normalizada em $\mathbb{Z}G$, então a ordem de $u$, $o(u)$, divide, exclusivamente, ou a ordem de $K$, ou a ordem de $H$.*

Demonstração: Sejam os inteiros $m$ e $n$ as ordens de $K$ e $H$ respectivamente; suponha que $u$ seja uma unidade de ordem finita e normalizada em $\mathbb{Z}G$ que

[3]Estes autores, bem como outros com quem têm trabalhado em parceria, valem-se desta proposição como a pedra angular para a obtenção de uma série de outras; isto pode ser constatado em [72, 38, 67, 36, 69, 79, 71]; em nenhuma destas, porém, a demonstração da proposição é exposta.

contradiga o afirmado pelo teorema, ou seja, a ordem de $u$, $o(u)$, não divide $n$ nem $m$. Sabemos que $o(u)$ divide $n \cdot m$, a ordem do grupo $G = K \rtimes H$ |[4]; como $n$ e $m$ são primos relativos, existe um primo $p$ divisor de $n$ e $o(u)$; analogamente, existe um primo $q$ divisor de $m$ e $o(u)$. Assim garantimos que uma certa potência de $u$ terá ordem $p \cdot q$, em que $p$ e $q$ são primos divisores de $n$ e $m$ respectivamente; sem perda de generalidade, podemos assumir que $o(u) = p \cdot q$. Observando que, como $n$ e $m$ são primos relativos, $p$ e $q$ serão primos distintos; por intermédio de potências adeqüadas de $u$, podemos escrever esta unidade como $u = v \cdot w$, sendo que $o(v) = p$ e $o(w) = q$; evidentemente as unidades $v$ e $w$ são diferentes de 1 e $-1$.

Denotemos por $\Psi : \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z}H$ o homomorfismo de $\mathbb{Z}$-álgebras induzido pelo epimorfismo $G \to H$, projeção de $G$ em seu complemento de Frobenius. Se $\Psi(v) \neq 1$, então $o(\Psi(v)) = p$; porém a ordem de $\Psi(v)$ deve dividir a ordem de $H$, isto é, $m$ |[5]; concluímos, pois, que $\Psi(v) = 1$.

Do fato de $o(w) = q$, segue que o suporte de $w$, *supp*$(w)$, contém um elemento $g$, de ordem $q$, tal que $\tilde{w}(g) := \sum_{x \sim g} w(x) \neq 0$ |[6].

Da estrutura do grupo de Frobenius e do fato de $o(g) = q$, segue que $g$ é conjugado, em $G$, a um elemento, $h$, de $H$; portanto $\sum_{x \sim h} w(x) \neq 0$ e, consequentemente, $\Psi(w) \neq 1$. Temos enfim que:

$$\Psi(u) = \Psi(v)\Psi(w) = \Psi(w) \neq 1;$$

devido ao resultado de Berman-Higman |[7], segue que o coeficiente da unidade em $\Psi(w)$ é zero, isto porém implica

$$\sum_{k \in K} u(k) = 0. \tag{3.1}$$

Sendo $p$ e $q$ primos distintos, segue do teorema de Fermat a existência de um inteiro $t$ |[8] tal que

$$q^t \equiv 1 (mod\ p);$$

e, uma vez que $v$ e $w$ comutam, pois que são potências de $u$, teremos

$$u^{q^t} = v^{q^t} w^{q^t} = v.$$

[4] Veja, por exemplo, Proposição 1.32 no primeiro capítulo.

[5] Confira a Proposição 1.32.

[6] Veja Proposição 1.35.

[7] Veja as Proposições 1.30 e 1.31.

[8] De fato, a afirmação vale para $t = p - 1$.

Observamos que, como $v^p = 1$ e $v \neq \pm 1$, forçosamente o coeficiente do 1 em $u^{q^t}$ é nulo pela Proposição 1.31.

Usando agora a Proposição 1.34, podemos afirmar que

$$u^{q^t} = \sum_{g \in G} u'(g) g^{q^t} + \alpha,$$

com $\alpha$ em $q\mathbb{Z}G + [\![\mathbb{Z}G, \mathbb{Z}G]\!]$ |[9] e $u'(g) = (u(g))^{q^t}$. É importante observar que o coeficiente do 1 em $\alpha$, $\alpha(1)$, é nulo; isto deve-se ao fato de que, para qualquer elemento em $[\![\mathbb{Z}G, \mathbb{Z}G]\!]$, o coeficiente do 1 é nulo (confira a Proposição 1.35).

Seja agora $g$ um elemento de $G$, distinto de 1, tal que $g^{q^t}$ pertença a $K$; pela Proposição 1.20, ou $g^m = 1$, ou $g^n = 1$; caso $g^m = 1$, $g$ pertenceria a algum conjugado de $H$ e, consequentemente, nenhuma potência de $g$ estaria em $K$; sendo assim, $g^n = 1$ e concluímos, ainda pela Proposição 1.20, que $g$ pertence a $K$.

Temos então:

$$u^{q^t} = \sum_{g \in K} u'(g) g^{q^t} + \sum_{g \notin K} u'(g) g^{q^t} + \alpha,$$

com $\alpha$ em $q\mathbb{Z}G + [\![\mathbb{Z}G, \mathbb{Z}G]\!]$.

Segue daí que

$$1 = \Psi(v) = \Psi(u^{q^t}) = \sum_{g \in K} u'(g) + \Psi(\sum_{g \notin K} u'(g) g^{q^t}) + \Psi(\alpha).$$

Observamos que, no segundo membro, a contribuição de $\Psi(\sum_{g \notin K} u'(g) g^{q^t})$ para o termo 1 é nula; quanto a $\Psi(\alpha)$, uma vez que os elementos de $[\![\mathbb{Z}H, \mathbb{Z}H]\!]$ também não contribuem para o termo 1 |[10], podemos afirmar que seu coeficiente para o 1 é um múltiplo de $q$, sendo assim:

$$1 \equiv \sum_{g \in K} u'(g) (mod\ q).$$

Por fim, já que $u'(g) = (u(g))^q$ e $(u(g))^q \equiv u(g) (mod\ q)$ |[11], teremos

$$1 \equiv \sum_{g \in K} u(g) (mod\ q);$$

todavia isto contradiz a equação (3.1) obtida anteriormente.

**q.e.d.**

[9] Confira a demonstração da Proposição 1.34.

[10] Mais uma vez, este fato segue da Proposição 1.35.

[11] Segue do teorema de Fermat.

## 3.3 As bases grupais e os núcleos de Frobenius

Nesta seção, analisaremos a estrutura do grupo $G$, admitindo a existência do isomorfismo $\Theta : \mathbb{Z}G \simeq \mathbb{Z}\dot{G}$ em que $G$ é um grupo de Frobenius.

Nosso primeiro resultado revela um importante aspecto do grupo $\dot{G}$, passemos a ele:

**TEOREMA 3.1** *Seja $G$ um grupo de Frobenius, se $\mathbb{Z}G \simeq \mathbb{Z}\dot{G}$ é um isomorfismo, então o grupo $\dot{G}$ é também um grupo de Frobenius.*

Demonstração: Suponhamos que $G = K \rtimes H$, com $|K| = n$ e $|H| = m$, sabemos que $|G| = n \cdot m$ e que $(n, m) = 1$. Como $K$ é normal em $G$, pela correspondência entre os subgrupos normais de $G$ e os de $\dot{G}$ (Proposição 1.40), existe $\dot{K}$, um subgrupo normal em $\dot{G}$, com a mesma ordem $n$ de $K$. Sendo assim, $\dot{K}$ é um subgrupo de Hall de $\dot{G}$; do teorema de Schur-Zassenhaus, concluímos que $\dot{G} = \dot{K} \rtimes \dot{H}$, para algum subgrupo $\dot{H}$ de $\dot{G}$.

Tomemos agora $g$ em $\dot{G}$, tal que $g^n = 1$, e seja $C$ o grupo cíclico por ele gerado, obviamente a ordem de $C$ é um divisor de $n$; podemos decompor $C$ em seus subgrupos de Sylow:

$$C = S_{p_1} \times \cdots \times S_{p_t},$$

em que cada primo $p_i$ divide $n$. Ora, cada $S_{p_i}$ estará contido em um $p_i$-subgrupo de Sylow de $\dot{G}$, $\bar{S}_{p_i}$, isto é,

$$S_{p_i} \leq \bar{S}_{p_i}, \text{ para todo } i \text{ em } \{1, \cdots, t\}.$$

Contudo, do fato de $\dot{K}$ ser um subgrupo de Hall de $\dot{G}$, podemos garantir que, para todo primo $p$, divisor de $n$, o $p$-subgrupo de Sylow de $\dot{G}$ está contido em $\dot{K}$; consequentemente, $C$ é um subgrupo de $\dot{K}$. Concluímos assim que

$$\dot{K} = \{g \in \dot{G} : g^n = 1\}.$$

Para finalizar, do teorema da seção anterior, temos que, para todo $g$ em $\dot{G}$, ou $g^n = 1$, ou $g^m = 1$ (exclusivamente); em virtude da Proposição 1.20 segue que $\dot{G} = \dot{K} \rtimes \dot{H}$ é um grupo de Frobenius.

**q.e.d.**

Este resultado foi o que primeiramente nos motivou a investigar o problema do isomorfismo relativo aos grupos de Frobenius, pois, afinal, ele revela que a semelhança existente entre os grupos $G$ e $\dot{G}$ – além de todas as já citadas – era bem acentuada. Com o próximo resultado, veremos que esta semelhança entre os grupos é ainda mais forte.

**TEOREMA 3.2** *Seja $G$ um grupo de Frobenius, se $\mathbb{Z}G \simeq \mathbb{Z}\dot{G}$, então os núcleos dos grupos de Frobenius $G$ e $\dot{G}$ são isomorfos.*

Demonstração: Seja $G = K \rtimes H$, o resultado anterior nos garante que $\dot{G} = \dot{K} \rtimes \dot{H}$ é um grupo de Frobenius em que $K$ e $\dot{K}$ estão associados pela correspondência entre os subgrupos normais de $G$ e $\dot{G}$; tendo, portanto, a mesma ordem. O teorema de Thompson afirma que $K$ e $\dot{K}$ são grupos nilpotentes; consequentemente, estes grupos decompõem-se no produto direto de seus $p$-subgrupos de Sylow, decomposição esta que se efetua sobre os mesmos primos. Todavia, para um dado primo $p$, os $p$-subgrupos de Sylow de $K$ e $\dot{K}$ poderiam ser não isomorfos. Provaremos que isto não ocorre; ou seja, para qualquer primo $p$, os $p$-subgrupos de Sylow de $K$ e $\dot{K}$ serão isomorfos. A isomorfia de $K$ e $\dot{K}$ decorrerá, portanto, da nilpotência destes grupos.

Se $\Theta : \mathbb{Z}G \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}\dot{G}$ é o isomorfismo entre os anéis de grupo, sem perda de generalidade, podemos, substituindo $G$ por $\Theta(G)$, assumir que $\mathbb{Z}G = \mathbb{Z}\dot{G}$. Uma vez que $K$ é nilpotente, se $S_p$ é um $p$-subgrupo de Sylow de $G$ contido em $K$, então $S_p$ é normal em $G$. Ora, $S_p$ é portanto um subgrupo de Hall de $G$, pelo teorema de Schur-Zassenhaus, podemos escrever $G = S_p \rtimes L$ para algum complemento $L$. Ao subgrupo normal $S_p$, corresponde, em $\dot{G}$, o subgrupo normal $\dot{S}_p$, dado por

$$\dot{S}_p = \dot{G} \cap (1 + \Delta(G, S_p)).$$

Podemos agora aplicar um resultado que será referido no quarto capítulo como a Proposição 4.1, o qual garante que $\dot{S}_p$, sendo um subgrupo finito de $U(1 + \Delta(G, S_p))$, é racionalmente conjugado a um subgrupo de $G$; como a ordem de $\dot{S}_p$ é a mesma de $S_p$, da nilpotência de $K$, concluímos que $\dot{S}_p$ é racionalmente conjugado a $S_p$.

q.e.d.

Obtivemos, pois, até o momento, que se $\mathbb{Z}G \simeq \mathbb{Z}\dot{G}$, em que $G$ é um grupo de Frobenius, então $\dot{G}$ será também um grupo de Frobenius – de mesma ordem de $G$ ! – e os núcleos, $K$ e $\dot{K}$, destes grupos serão isomorfos. Se escrevermos $G = K \rtimes H$ e $\dot{G} = \dot{K} \rtimes \dot{H}$, o ítem (v) da Proposição 1.40 nos permite afirmar ainda a existência de um isomorfismo dos anéis de grupo de seus complementos, ou seja,

$$\mathbb{Z}H \simeq \mathbb{Z}\dot{H}.$$

O objetivo da próxima seção será explorar este isomorfismo, e lá veremos que este resultado será essencial em nosso desenvolvimento.

## 3.4 Os complementos de Frobenius: o caso não solúvel

Como demonstramos na seção anterior, se $G$ é um grupo de Frobenius, um isomorfismo da forma $\mathbb{Z}G \simeq \mathbb{Z}\dot{G}$ implicará $\dot{G}$ ser também um grupo de Frobenius cujo núcleo é isomorfo ao núcleo de $G$; ademais estará estabelecido um isomorfismo da forma $\mathbb{Z}H \simeq \mathbb{Z}\dot{H}$, em que $H$ e $\dot{H}$ são complementos dos grupos de Frobenius $G$ e $\dot{G}$, respectivamente. É natural, portanto, que investiguemos este último isomorfismo. Contudo nossos resultados serão um pouco mais gerais, pois que analisaremos o isomorfismo $\mathbb{Z}H \simeq \mathbb{Z}\dot{H}$ admitindo tão somente que $H$ é um complemento de Frobenius; isto é, sem a hipótese adicional de que este seja proveniente de um isomorfismo entre anéis de grupo de Frobenius, o que implicaria $\dot{H}$ ser também um complemento de Frobenius.

Os resultados apresentados no primeiro capítulo revelam a estrutura de um complemento de Frobenius; desta particular estrutura, podemos, já, extrair uma primeira proposição:

**TEOREMA 3.3** *Se $H$ é um complemento de Frobenius de ordem ímpar, então $H$ é uma solução ao problema do isomorfismo.*

Demonstração: Seja o isomorfimso $\mathbb{Z}H \simeq \mathbb{Z}\dot{H}$ em que $H$ é um complemento de Frobenius de ordem ímpar; o resultado de Burnside (Proposição 1.23) garante-nos que, em sendo ímpar a ordem de $H$, todos os seus subgrupos de Sylow serão cíclicos; aplicando a proposição de Zassenhaus (Proposição 1.13), acerca destes grupos, concluímos que $H$ é um grupo metacíclico; deste modo, o teorema decorre do resultado de Whitcomb (Proposição 1.38).

q.e.d.

Em virtude deste resultado, resta-nos apenas investigar os complementos de Frobenius de ordem par; todavia o teorema anterior admite, obviamente, uma extensão direta, a qual inclui alguns grupos de ordem par.

**TEOREMA 3.4** *Se $H$ é um complemento de Frobenius cujo 2-subgrupo de Sylow é cíclico, então $H$ é uma solução ao problema do isomorfismo.*

Demonstração: Idêntica à anterior, pois como, pelo resultado de Burnside (Proposição 1.23), os subgrupos de Sylow de $H$, de ordem ímpar, são cíclicos, o teorema segue, analogamente, dos resultados de Zassenhaus (Proposição 1.13) e de Whitcomb (Proposição 1.38).

q.e.d.

A nossa investigação, face a este resultado, prosseguirá tratando dos complementos de ordem par cujos 2-subgrupos de Sylow não são cíclicos; os resultados de Burnside (Proposição 1.23) afirmam que, neste caso, estes subgrupos são quatérnios, possivelmente generalizados |[12]. Antes porém de desenvolvermos este estudo, alguns resultados, de caráter geral, relativos aos $Z$-grupos serão extremamente utéis. Lembramos que estes são os grupos cujos subgrupos de Sylow são cíclicos. A Proposição 1.13, descreve inteiramente estes grupos; adotaremos a mesma notação desta proposição nos resultados que defendemos a seguir.

[12]Doravante estes subgrupos serão tratados indistintamente por "quatérnios"; dispensando assim o qualificativo adicional "generalizado".

**LEMA 3.1** *Dois $Z$-grupos são isomorfos se, e somente se, seus centros, subgrupos comutadores e grupos abelianizados têm, respectivamente, as mesmas ordens.*

Demonstração: Sejam pois $G$ e $H$ dois $Z$-grupos tais que $|\zeta(G)| = |\zeta(H)|$, $|G'| = |H'|$ e $|G/G'| = |H/H'|$; se $G$ é abeliano, por ser um $Z$-grupo, será cíclico; de $|G'| = |H'|$ segue que também $H$ é abeliano e, portanto, cíclico; finalmente de $|\zeta(G)| = |\zeta(H)|$, temos que $G$ e $H$ têm a mesma ordem, sendo, consequentemente, isomorfos.

No caso de $G$ ser não abeliano, temos a seguinte presentação:

$$G = \langle a, b : a^m = 1 = b^n,\ b^{-1}ab = a^r \rangle,$$

em que $r^n \equiv 1(mod\ m)$; $0 \leq r < m$; 2 não divide $m$; $(m, n(r-1)) = 1 = (m, r)$ |[13].

Uma vez que $[a, b] = a^{r-1}$, segue que $G' \leq \langle a \rangle$; por outro lado, de $(r-1, m) = 1$, decorre que $\langle a \rangle \leq G'$; ou seja, $G' = \langle a \rangle$.

Como $\zeta(G)$ é um grupo abeliano com subgrupos de Sylow cíclicos, temos que $\zeta(G)$ é cíclico. Seja pois $\zeta(G) = \langle a^x b^y \rangle$, para determinados $x$ e $y$. O resultado de Taunt (Proposição 1.14) afirma que $\langle a \rangle \cap \zeta(G) = (1)$; logo, se $y = 0$, forçosamente $x = 0$; já no caso de $y \neq 0$, vale:

$$a(a^x b^y) = (a^x b^y)a,$$

logo

$$ab^y = b^y a;$$

ou seja, $b^y$ está em $\zeta(G)$; donde $a^x$ pertence a $\zeta(G)$, o que implica $x = 0$. Concluímos pois que $\zeta(G) < \langle b \rangle$ (subgrupo próprio, pois $G$ não é abeliano); segue daí que existe $n_0$, minimal, $1 < n_0 \leq n$ e tal que $r^{n_0} \equiv 1(mod\ m)$; obviamente $n_0 = n/|\zeta(G)|$, está pois bem determinado.

Do fato de $|G'| = |H'|$ e $|G/G'| = |H/H'|$, como ambos são $Z$-grupos, segue que $G$ e $H$ têm a mesma ordem. Já que $|\zeta(G)| = |\zeta(H)|$, $H$ é também não abeliano, consequentemente, toda a análise que acabamos de desenvolver é igualmente válida para $H$. Sabemos que $G$ é caracterizado pelos números $m$, $n$ e $r$, em que $m = |G'|$ e $n = |G/G'|$; uma vez que $n_0$ está bem determinado, decorre do comentário à Proposição 1.13 que $G$ e $H$ são isomorfos.

[13]Veja a Proposição 1.13.

q.e.d.

A partir deste lema, extraímos o próximo, que desempenhará importante papel nos resultados que, em seguida, desenvolveremos.

**LEMA 3.2** *Sejam $G$ um grupo finito qualquer e $\mathbb{Z}G \simeq \mathbb{Z}\dot{G}$ um isomorfismo; se $N$ é um $Z$-grupo normal em $G$, então $N$ é isomorfo ao grupo $M$, normal em $\dot{G}$, que lhe está associado na correspondência entre subgrupos normais.*

Demonstração: Seja $\mathbb{Z}G \simeq \mathbb{Z}\dot{G}$ e denotemos por $\nu$ a correspondência entre os subgrupos normais de $G$ com os de $\dot{G}$, assim $\nu(N) = M$, a Proposição 1.40 relaciona as propriedades de $\nu$. Caso $N$ seja abeliano, sendo em $Z$-grupo, será cíclico; a proposição afirma que $M = \nu(N)$ é também abeliano, ademais, como as ordens e expoentes de $N$ e $M$ são iguais, segue que $M$ é um grupo cíclico isomorfo a $N$. No caso de $N$ não ser abeliano, teremos que $N = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, em que, segundo a demonstração do lema anterior, $N' = \langle a \rangle$. Ainda pela Proposição 1.40, sabemos que $\nu(N') = M'$, que $N/N' \simeq M/M'$, bem como $\nu(\zeta(N)) = \zeta(M)$. Finalmente, como $\nu$ conserva também as ordens do grupo, concluímos, a partir do lema anterior, que $N$ e $M$ são grupos isomorfos.

q.e.d.

Voltemos agora aos complementos de Frobenius; como sabemos, a estrutura destes grupos depende fortemente da solubilidade. Analisemos primeiramente o caso em que $H$ é um complemento de Frobenius não solúvel; pois que, neste caso, sua estrutura é, para nossos propósitos, mais simples. Para um tal grupo, vale o resultado a seguir:

**TEOREMA 3.5** *Se $H$ é um complemento de Frobenius não-solúvel, então $H$ é uma solução ao problema do isomorfismo.*

Demonstração: Os resultados expostos no primeiro capítulo afirmam que, sendo $H$ um complemento de Frobenius não-solúvel, existe um subgrupo $H_0$ com as propriedades:

$$[H : H_0] = 1 \text{ ou } 2 \quad \text{e} \quad H_0 = M \times SL(2,5),$$

em que $M$ é um $Z$-grupo tal que $(|M|, 120) = 1$.

Admitamos primeiramente que $[H : H_0] = 1$, deste modo

$$H = M \times SL(2,5).$$

Como $M$ é metacíclico, está determinado por seu anel de grupo $\mathbb{Z}M$. Quanto a $SL(2,5)$, pela Proposição 1.16, este é o único grupo perfeito com 120 elementos; segue portanto, da Proposição 1.40, que $SL(2,5)$ também é determinado pelo seu anel de grupo integral. Finalmente, a Proposição 1.41 garante que o produto direto $M \times SL(2,5)$, uma vez que $(|M|, 120) = 1$, é uma solução ao problema do isomorfismo.

Passemos ao caso $[H : H_0] = 2$; obviamente teremos $H_0 \lhd H$. Como $(|M|, 120) = 1$, os grupos $M$ e $SL(2,5)$ são característicos em $H_0$ e, portanto, normais em $H$; uma vez que $M$ é um subgrupo de Hall de $H$, podemos afirmar que:

$$H = M \rtimes \langle SL(2,5), v \rangle,$$

sendo $v^2 = xy$ em $SL(2,5)|$[14], logo sua ordem é 8, e a ação de $SL(2,5)$ sobre $M$ é trivial.

Seja $\mathbb{Z}H \simeq \mathbb{Z}\dot{H}$ um isomorfismo normalizado e denotemos por $\nu$ o isomorfismo entre os reticulados de subgrupos normais em $H$ e $\dot{H}$. Sabemos que, sendo $H$ não solúvel, $\dot{H}$ assim também o será. Do lema anterior decorre

$$M \simeq \nu(M).$$

Como $\nu$ preserva as ordens e os subgrupos comutadores, $\nu(SL(2,5))$ será um grupo perfeito com 120 elementos, donde

$$SL(2,5) \simeq \nu(SL(2,5)).$$

Finalmente, das propriedades do isomorfismo $\nu$, concluímos que

$$H_0 \simeq \nu(H_0);$$

[14] Confira a estrutura de $SL(2,5)$ no primeiro capítulo.

e como $[\dot{H} : \nu(H_0)] = 2$ e $\nu(M)$ é um subgrupo de Hall normal em $\dot{H}$ segue que

$$\dot{H} \simeq M \rtimes \langle SL(2,5), w\rangle,$$

em que $w^2$ está em $SL(2,5)$ e a ação de $SL(2,5)$ sobre $M$ é trivial (pois $H_0 \simeq \nu(H_0)$!).

Sabemos que, do isomorfismo $\mathbb{Z}H \simeq \mathbb{Z}\dot{H}$, podemos obter:

$$\mathbb{Z}(\langle SL(2,5), v\rangle) \simeq \mathbb{Z}(H/M) \simeq \mathbb{Z}(\dot{H}/\nu(M)) \simeq \mathbb{Z}(\langle SL(2,5), w\rangle) \quad (3.2)$$

Da estrutura dos complementos de Frobenius, decorre que existe em $\langle SL(2,5), v\rangle$ um único elemento $z$, de ordem 2; como este elemento é central |[15], o subgrupo $\mathcal{Z} = \{1, z\}$ é normal em $\langle SL(2,5), v\rangle$. Ora, um 2-subgrupo de Sylow de $\langle SL(2,5), v\rangle$ é isomorfo a $Q_{16}$ |[16], consequentemente um 2-subgrupo de Sylow do quociente $\langle SL(2,5), v\rangle/\mathcal{Z}$ será um grupo diedral com 8 elementos, pois que

$$Q_{16}/\mathcal{Z} \simeq D_8.$$

Temos pois que $\langle SL(2,5), v\rangle/\mathcal{Z}$ é um grupo não solúvel de ordem 120, cujos 2-subgrupos de Sylow são diedrais, logo

$$\langle SL(2,5), v\rangle/\mathcal{Z} \simeq Sym_5.$$

Nos ensina Zassenhaus, em [94], que existe um único grupo com 240 elementos, com um único elemento central de ordem 2 e cujo grupo quociente pelo cíclico gerado por este elemento é o $Sym_5$; denotemos este grupo por $\mathcal{G}_5$, seguindo a notação de Zassenhaus. Concluímos, da equação (3.2), que:

$$\langle SL(2,5), v\rangle \simeq \mathcal{G}_5 \simeq \langle SL(2,5), w\rangle. \quad (3.3)$$

Contudo, ainda não provamos que $H \simeq \dot{H}$, pois que as ações de $v$ e $w$ sobre $M$ podem ser distintas. Passemos ao estudo destas ações, supondo $w$ determinado por $v$ e por (3.3).

Do isomorfismo $\mathbb{Z}H \simeq \mathbb{Z}\dot{H}$, obtemos também

$$\mathbb{Z}(\langle M, \bar{v}\rangle) \simeq \mathbb{Z}(H/SL(2,5)) \simeq \mathbb{Z}(\dot{H}/\nu(SL(2,5)) \simeq \mathbb{Z}(\langle M, \bar{w}\rangle),$$

[15] Veja a Proposição 1.23.

[16] $Q_{16}$ denota o quatérnio com 16 elementos, $D_8$ o diedral com 8 elementos e $Sym_5$ o grupo de permutações sobre 5 letras.

em que $\bar{v}$ e $\bar{w}$ denotam as projeções de $v$ e $w$, respectivamente, nos grupos quocientes. Evidentemente, 2 é a ordem de $\bar{v}$ e $\bar{w}$; segue daí que todos os subgrupos de Sylow de $\langle M, \bar{v}\rangle$ são cíclicos; pela Proposição 1.13, $\langle M, \bar{v}\rangle$ será metacíclico; consequentemente

$$\langle M, \bar{v}\rangle \simeq \langle M, \bar{w}\rangle.$$

Uma vez que as ordens de $M$ e $v$ são relativamente primas, as ações de $v$ e $\bar{v}$ sobre $M$ são idênticas, donde

$$\langle M, v\rangle \simeq \langle M, w\rangle.$$

Lembremos agora que $M$ é um $Z$-grupo, isto é, $M$ é cíclico ou, caso contrário, um metacíclico que cinde; ademais $M$ tem ordem ímpar. No caso em que $M = \langle a\rangle$, dadas as ordens de $M$ e $\bar{v}$, concluímos que $v$ atua sobre seus subgrupos de Sylow fixando ou invertendo os elementos destes; decorre disto que as ações de $v$ e $w$ sobre $a$ são idênticas. Se $M = \langle a\rangle \rtimes \langle b\rangle$, em que $M' = \langle a\rangle$, pelo mesmo motivo aludido, $v$ e $w$ agem identicamente sobre $a$; por outro lado, como $\langle M, v\rangle$ é também um $Z$-grupo, não é difícil concluirmos que algum conjugado de $b$ em $M$ comuta com $v$; podemos afirmar o mesmo para $w$. Deste modo, podemos assegurar que $\langle M, v\rangle$ e $\langle M, w\rangle$ têm presentações idênticas.

Obtivemos, assim, que $H$ e $\dot{H}$ admitem uma mesma presentação, são, pois, grupos isomorfos|[17].

**q.e.d.**

## 3.5 Os complementos de Frobenius: o caso solúvel

Investigaremos, nesta seção, os complementos de Frobenius solúveis; em virtude do TEOREMA 3.4, basta que nos restrinjamos à situação em que estes grupos tenham ordem par e cujos 2-subgrupos de Sylow sejam quatérnios. Como foi afirmado anteriormente|[18], se $H$ é um tal grupo, então $H$ é a extensão de um $Z$-grupo por um

[17] Veja a Proposição 1.7 do primeiro capítulo.

[18] Confira o primeiro capítulo.

subgrupo de $Sym_4$ |[19]. Ora, se $\mathbb{Z}H \simeq \mathbb{Z}\dot{H}$ é um isomorfismo e $H_0$ é o $Z$-grupo, normal em $H$, mencionado, o LEMA 3.2 nos garante que $\nu(H_0)$ é um $Z$-grupo, normal em $\dot{H}$ e isomorfo a $H_0$ ; se considerarmos, agora, o isomorfismo

$$\mathbb{Z}(H/H_0) \simeq \mathbb{Z}(\dot{H}/\nu(H_0)),$$

poderemos afirmar que, assim como $H$, $\dot{H}$ é também a extensão de um $Z$-grupo por um subgrupo de $Sym_4$; mais ainda: os núcleos e quocientes destas extensões são, respectivamente, isomorfos! Isto porque todos os subgrupos de $Sym_4$ são, notoriamente, determinados por seus anéis de grupo integrais.

O fato observado é mais um indício de que as estruturas de $H$ e $\dot{H}$ são bastante assemelhadas; como bem sabemos, a solubilidade de $H$ já implica $\dot{H}$ ser também um grupo solúvel. Outro aspecto comum aos grupos $H$ e $\dot{H}$ decorre do teorema 5.1 em [15], que afirma que os subgrupos de Sylow destes grupos são racionalmente conjugados. Desenvolveremos agora o resultado:

**TEOREMA 3.6** *Se $H$ é um complemento de Frobenius solúvel, então $H$ é uma solução ao problema do isomorfismo.*

Demonstração: Seja $\mathbb{Z}H \simeq \mathbb{Z}\dot{H}$ um isomorfismo normalizado. Como já afirmamos, é suficiente tratarmos do caso em que os 2-subgrupos de Sylow do grupo $H$ são quatérnios. Todo o nosso desenvolvimento fundamentar-se-á na análise do subgrupo de Fitting de $H$, o qual denotaremos por $F$. Como $F$ é nilpotente, seus subgrupos de Sylow serão característicos; indicaremos o 2-subgrupo de Sylow de $F$ por $F_2$, evidentemente $F_2 \lhd H$; denotaremos ainda por $S_2$ um 2-subgrupo de Sylow de $H$. Nossa prova será desenvolvida em vários casos, e uma de suas pedras angulares é a estrutura do centralizador de $F_2$ em $H$, que notaremos por $H_0 = C_H(F_2)$; por fim concluíremos que $H$ e $\dot{H}$ terão a mesma presentação.

**1º caso: $F_2$ é cíclico.**

Neste caso, todos os subgrupos de Sylow de $F$ serão cíclicos, pois os subgrupos de Sylow de $H$ de ordem ímpar assim o são; como $F$ é nilpotente, segue que $F$ será

[19]Note o leitor que, necessariamente, esta extensão não cinde, pois que, em $Sym_4$, temos um 2-subgrupo de Sylow diedral, o que é incompatível com os 2-subgrupos de Sylow de um complemento de Frobenius, cíclicos ou quatérnios.

um grupo cíclico. Sendo $H$ solúvel, da Proposição 1.6, teremos:

$$C_H(F) = \zeta(F) = F,$$

e, já que $F \lhd H$, segue

$$H/F = N_H(F)/C_H(F) \leq Aut(F).$$

Do fato de $F$ ser cíclico, decorre que $Aut(F)$ é abeliano e, assim, $H$ será um grupo metabeliano; deste modo, o isomorfismo $H \simeq \dot{H}$, que buscamos, segue do resultado de Whitcomb (Proposição 1.36).

**$2^{\underline{o}}$ caso: $F_2$ é o quatérnio $Q_8$ e $S_2$ também o é.**

Observemos que, ainda neste caso, $F_2 \lhd H$. Definamos

$$H_0 = C_H(F_2);$$

como $F_2 \lhd H$, teremos $H_0 \lhd H$, pois $H_0 \lhd N_H(F_2) = H$. Sabemos, de $F_2 = Q_8$, que $\zeta(F_2) = \{1, z\} = \mathcal{Z}$, em que $z$ é o único elemento de ordem 2, é também central em $H$ |[20]. Decorre daí que

$$H_0 = \mathcal{Z} \times H_1;$$

em que $H_1$ é um grupo cuja ordem não é divisível por 2, pois o 2-subgrupo de Sylow de $H_0$ é $\mathcal{Z}$, que é central em $H$. Segue, pois, que seus subgrupos de Sylow são cíclicos e, da Proposição 1.13, que $H_1$ é um grupo metacíclico; observamos também, dada a sua ordem, que $H_1$ é característico em $H_0$ e, consequentemente, normal em $H$.

Como $F_2$ e $H_1$ são normais em $H$, com ordens relativamente primas, e $H_1$ centraliza $F_2$, teremos $F_2H_1 = Q_8 \times H_1 \lhd H$; por outro lado

$$H/H_0 = N_H(F_2)/C_H(F_2) \leq Aut(Q_8) \simeq Sym_4|^{21};$$

uma vez que $Q_8/\mathcal{Z}$ é isomorfo a $C_2 \times C_2$, o grupo de Klein, concluímos que

$$H/H_0 \simeq C_2 \times C_2 \quad \text{ou} \quad H/H_0 \simeq Alt_4;$$

pois 4 divide $|H/H_0|$, porém 8 não divide $|H/H_0|$.

Teremos, pois, duas situações a analisar:

[20]Veja Proposição 1.23 no primeiro capítulo.

[21]Confira a Proposição 1.11 do primeiro capítulo.

a) $H/H_0 \simeq C_2 \times C_2$

Neste caso, em virtude de sua ordem, $H_1$ será um subgrupo de Hall de $H$; uma vez que $F_2 = Q_8$ também o é, concluímos que

$$H = F_2 \times H_1.$$

Por fim, como $H_1$ é um grupo metacíclico, cuja ordem é relativamente prima à ordem de $Q_8$, pela Proposição 1.41, podemos afirmar que

$$H \simeq \dot{H}.$$

b) $H/H_0 \simeq Alt_4$

Assim como, no caso anterior, das propriedades de $F_2$ e $H_1$ decorre $F_2H_1 = F_2 \times H_1 \lhd H$ e, consequentemente,

$$H = \langle F_2 \times H_1, t \rangle,$$

sendo $t$ um 3-elemento tal que $t^3$ é um dos geradores de $H_1$.

Observamos ainda que

$$H/H_1 \simeq F_2 \rtimes C_3;$$

isto porque $F_2$ é um subgrupo de Hall normal em $H$, ademais o produto não pode ser direto pois que os 3-subgrupos de Sylow de $H$ não centralizam $F_2$. O grupo $F_2 \rtimes C_3$ é o conhecido grupo linear especial $SL(2;3)$.

Tomando-se $\nu$, o isomorfismo entre os reticulados de subgrupos normais de $H$ e $\dot{H}$, obtemos que

$$\nu(F_2) \lhd \dot{H} \quad \text{e} \quad \nu(F_2) \simeq Q_8;$$

uma vez que $Q_8$ é o único grupo não abeliano com 8 elementos que satisfaz as condições impostas pela Proposição 1.40. Vale ainda

$$\nu(H_1) \lhd \dot{H} \quad \text{e} \quad \nu(H_1) \simeq H_1,$$

em virtude do LEMA 3.2. Das propriedades de $\nu$, obtemos que

$$\nu(F_2 \times H_1) = \nu(F_2) \times \nu(H_1).$$

Ora, o cíclico $C_3$ é determinado por seu anel de grupo integral; já que

$$H/F_2 \times H_1 \simeq C_3,$$

podemos afirmar que

$$\dot{H} \simeq \langle F_2 \times H_1, v\rangle, \text{ com } v^3 \text{ em } H_1.$$

Observamos, agora, que o grupo $\langle H_1, t\rangle$ é metacíclico, pois que seus subgrupos de Sylow são todos cíclicos; do resultado de Whitcomb, Proposição 1.38, e de

$$\mathbb{Z}\langle H_1, t\rangle \simeq \mathbb{Z}(H/F_2) \simeq \mathbb{Z}(\dot{H}/\nu(F_2)) \simeq \mathbb{Z}\langle H_1, v\rangle,$$

concluímos que

$$\langle H_1, t\rangle \simeq \langle H_1, v\rangle. \tag{3.4}$$

Como $F_2$ é um subgrupo de Hall normal em $H$, podemos admitir a igualdade em (3.4). Resta-nos verificar como $t$ opera sobre $F_2$. Já que o grupo $SL(2,3)$ é determinado por seu anel de grupo integral e como, devido à Proposição 1.40, vale

$$\mathbb{Z}\langle F_2, \bar{t}\rangle \simeq \mathbb{Z}(H/H_1) \simeq \mathbb{Z}(\dot{H}/\nu(H_1)) \simeq \mathbb{Z}\langle F_2, \bar{v}\rangle,$$

concluímos que:

$$\langle F_2, \bar{t}\rangle \simeq \langle F_2, \bar{v}\rangle.$$

Uma vez que as ordens de $F_2$ e $H_1$ são relativamente primas, temos que, para $x_1$ e $x_2$ em $F_2$,

$$x_1 = x_2 \text{ se, e somente se, } x_1 \equiv x_2 \pmod{H_1};$$

deste modo, podemos afirmar que $t$ age sobre $F_2$, em $H_1$, assim como $v$ age sobre $F_2$, em $\dot{H}$.

Sendo assim, os grupos $H$ e $\dot{H}$ admitem a mesma presentação, consequentemente

$$H \simeq \dot{H}.$$

**3º caso: $F_2$ é o quatérnio $Q_8$, porém $S_2$ não o é.**

Neste caso, $S_2$ é um quatérnio com $|S_2| \geq 16$, a Proposição 1.12 nos garante então que $[S_2 : F_2] = 2$, pois $F_2 \lhd S_2$; sendo assim, $S_2 \simeq Q_{16}$.

Analogamente ao caso anterior e com as mesmas características, tomemos o grupo:

$$H_0 = C_H(F_2) = \mathcal{Z} \times H_1.$$

Ora, mais uma vez $H/H_0$ é isomorfo a um subgrupo de $Sym_4$; porém, como $S_2 \simeq Q_{16}$ e já que $Q_{16}/\zeta(Q_{16})$ é o grupo diedral com 8 elementos $C_4 \rtimes C_2$, concluímos que tal grupo deve estar contido em $H/H_0$, logo

$$H/H_0 \simeq C_4 \rtimes C_2 \quad \text{ou} \quad H/H_0 \simeq Sym_4.$$

Há assim duas situações a serem analisadas:

a) $H/H_0 \simeq C_4 \rtimes C_2$

Os grupos $F_2$ e $H_1$ são normais em $H$, suas ordens são relativamente primas e $H_1$ centraliza $F_2$, logo

$$F_2 H_1 = F_2 \times H_1 \lhd H.$$

De $H/H_0 = C_4 \rtimes C_2$, advém $H/F_2 \times H_1 \simeq C_2$, ou seja

$$H = \langle F_2 \times H_1, t \rangle;$$

em que $o(t) = 8$ e $t^2$ é um gerador em $F_2$, pois $\langle F_2, t \rangle \simeq Q_{16}$.

Os subgrupos normais $F_2$ e $H_1$ determinam os normais $\nu(F_2)$ e $\nu(H_1)$ em $\dot{H}$, ademais $\nu(F_2) \simeq Q_8 \simeq F_2$, pois temos aqui a mesma situação anterior para o grupo $Q_8$. Vale também $\nu(H_1) \simeq H_1$ pelo LEMA 3.2. Das propriedades de $\nu$, obtemos

$$\nu(F_2 \times Q_8) = \nu(F_2) \times \nu(Q_8) \lhd H.$$

Como o cíclico $C_2$ é determinado por seu anel de grupo integral (Proposição 1.37), podemos descrever $\dot{H}$ como:

$$\dot{H} \simeq \langle F_2 \times H_1, v \rangle \text{ com } o(v) = 8,$$

pois $\langle F_2, v \rangle \simeq Q_{16}$, em virtude, mais uma vez, de $Q_{16}$ ser o único grupo com 16 elementos que atende às condições da Proposição 1.40. Sendo assim, pelas propriedades deste quatérnio, podemos admitir

$$\langle F_2, t \rangle = \langle F_2, v \rangle.$$

Resta-nos, portanto, verificar como $t$ atua sobre $H_1$. Tomando-se o quociente

$$H/Q_8 \simeq \langle H, \bar{t}\rangle, \text{ com } o(\bar{t}) = 2,$$

é imediato que este grupo é metacíclico; pelo resultado de Whitcomb e da Proposição 1.40, segue de

$$\mathbb{Z}\langle H_1, \bar{t}\rangle \simeq \mathbb{Z}(H/F_2) \simeq \mathbb{Z}(\dot{H}/\nu(F_2)) \simeq \mathbb{Z}\langle H_1, \bar{v}\rangle,$$

que

$$\langle H_1, \bar{t}\rangle \simeq \langle H_1, \bar{v}\rangle.$$

Uma vez que 2 não divide $|H_1|$, podemos afirmar que $t$ age sobre $H_1$ do mesmo modo como $\bar{t}$ age sobre $H_1$. Lembrando agora que $H_1$ é um $Z$-grupo, o raciocínio segue os mesmos passos da demonstração do TEOREMA 3.5. Como nos casos anteriores

$$H \simeq \dot{H}.$$

b) $H/H_0 \simeq Sym_4$

Os grupos $F_2$ e $H_1$ são, ainda neste caso, normais em $H$, com ordens relativamente primas; também vale:

$$F_2H_1 = F_2 \times H_1 \lhd H.$$

Denotemos por $T$ o grupo $H/H_1$; da isomorfia entre $H/H_0$ e $Sym_4$, decorre que $T$ é um grupo com 48 elementos, ademais $T$ possui um elemento central com ordem 2. Podemos ainda afirmar sobre $T$:

$$Sym_4 \simeq H/H_0 = H/(\mathcal{Z} \times H_1) \simeq T/\mathcal{Z}.$$

Sendo assim, advém, da Proposição 1.17, que $T$ é o grupo $\mathcal{G}_4$. Sabemos que este grupo tem a propriedade de que $Q_8 \lhd \mathcal{G}_4$, logo

$$H/F_2 \times H_1 \simeq \mathcal{G}_4/Q_8 \simeq Sym_3.$$

Em virtude deste fato e de que $S_2 \simeq Q_{16}$, podemos assumir que existem os elementos $t$ e $u$, em $H$, tais que

$$t^3 \text{ em } H_1 \quad \text{e} \quad \langle F_2, u\rangle \simeq Q_{16};$$

sendo $t$ um 3-elemento tal que $t^3$ é um gerador em $H_1$ e $u^2$, um gerador de $F_2$; consequentemente,

$$H = \langle F_2 \times H_1, t, u \rangle.$$

Assim, como no caso anterior, é válido que

$$\nu(F_2 \times H_1) = \nu(F_2) \times \nu(H_1) \simeq F_2 \times H_1;$$

como $Sym_3$ é determinado por seu anel de grupo integral, segue que também $\dot{H}$ admite uma estrutura da forma

$$\dot{H} \simeq \langle F_2 \times H_1, v, w \rangle,$$

em que $v^3$ está em $H_1$ e $\langle F_2, w \rangle \simeq Q_{16}$, em virtude das propriedades de $Q_{16}$ já comentadas; assim, podemos admitir que

$$\langle F_2, u \rangle = \langle F_2, w \rangle.$$

Observamos agora que o quociente $H/F_2$ é um grupo metacíclico, pois a ordem de $u$ neste quociente é 2, sendo assim determinado pelo seu anel de grupo integral; esta última propriedade é também válida, como o sabemos, para os quocientes:

$$H/H_1 \simeq \mathcal{G}_4 \text{ e } H/F_2 \times H_1 \simeq Sym_3.$$

Analogamente ao caso anterior, vale ainda que

$$\langle H_1, t, \bar{u} \rangle = H/F_2 \simeq \dot{H}/F_2 = \langle H_1, v, \bar{w} \rangle;$$

assumimos $v$ determinado por $t$ via este isomorfismo.

Finalmente, do fato das ordens de $F_2$ e $H_1$ serem relativamente primas, de forma inteiramente análoga ao caso anterior, teremos que

$$H \simeq \dot{H}.$$

**$4^{\underline{o}}$ caso: $F_2$ é um quatérnio de ordem maior ou igual a 16.**

Valendo-nos da Proposição 1.12, podemos afirmar que

$$[S_2 : F_2] = 1 \text{ ou } 2.$$

a) $[S_2 : F_2] = 1$

Lançaremos mão, mais uma vez, do subgrupo:

$$H_0 = C_H(F_2) = \mathcal{Z} \times H_1;$$

as propriedades de $H_1$, sendo as mesmas dos casos anteriores; todavia há um fato novo aqui:

$$H/H_0 = N_H(F_2)/C_H(F_2) \leq Aut(F_2);$$

da Proposição 1.12, segue que $Aut(F_2)$ é um 2-grupo. Decorre deste fato que $F_2$ é centralizado por todos os subgrupos de Sylow de ordem ímpar; uma vez que $S_2 = F_2 \lhd H$, obtemos:

$$H = F_2 \times H_1;$$

em que $F_2$ é um grupo nilpotente e $H_2$ um grupo metacíclico com ordens relativamente primas; das propriedades vistas no primeiro capítulo, teremos

$$H \simeq \dot{H}.$$

b) $[S_2 : F_2] = 2$

Trataremos, também aqui, com o grupo

$$H_0 = C_H(F_2) = \mathcal{Z} \times H_1,$$

as propriedades de $H_1$ continuam idênticas às dos casos anteriores; ademais, como no último caso, $H/H_0$ será um 2-subgrupo. Deste fato e de $[S_2 : F_2] = 2$, podemos concluir que

$$H/H_1 \simeq S_2.$$

Decorre daí que $H/(F_2 \times H_1)$ será um cíclico de ordem 2, ou seja:

$$H = \langle F_2 \times H_1, t \rangle,$$

em que $o(t) = |F_2|$ e $t^2$ é um gerador em $F_2$, pois $\langle F_2, t \rangle \simeq S_2$.

Aos grupos normais $F_2$ e $H_1$, correspondem, em $\dot{H}$, os normais $\nu(F_2)$ e $\nu(H_1)$; ainda aqui, ocorre que

$$\nu(F_2) \simeq F_2 \quad \text{e} \quad \nu(H_1) \simeq H_1,$$

em virtude das Proposições 1.12 e 1.40, como também aplica-se o LEMA 3.2. Teremos, assim,

$$\nu(F_2 \times H_1) = \nu(F_2) \times \nu(H_1) \simeq F_2 \times H_1.$$

O grupo cíclico $C_2$ é determinado por seu anel de grupo integral; do que discutimos acima, podemos afirmar para $\dot{H}$:

$$\dot{H} \simeq \langle F_2 \times H_1, v \rangle,$$

com $o(v) = |F_2|$, pois $\langle F_2, v \rangle \simeq S_2$; como nos outros casos, podemos ainda admitir

$$\langle F_2, t \rangle = \langle F_2, v \rangle.$$

O quociente $H/F_2$ é metacíclico, logo, determinado por seu anel de grupo integral, bem como o nilpotente $S_2$. Já que as ordens de $F_2$ e $H_1$ são relativamente primas e $H_1$ é um $Z$-grupo, assim como nos casos anteriores, concluímos que

$$H \simeq \dot{H}.$$

**q.e.d.**

Concluímos, pelo que foi exposto neste capítulo, que da isomorfia dos anéis de grupos integrais de $G$ e $\dot{G}$, se um destes é um grupo de Frobenius finito, segue que ambos assim o serão, com núcleos e complementos idênticos. Contudo não abordamos a questão da possível isomorfia entre $G$ e $\dot{G}$; este será o tema do próximo capítulo.

# Capítulo 4

# O Problema do Isomorfismo – Parte II

Observaremos, neste capítulo, como os resultados já obtidos, acerca dos núcleos e complementos dos grupos de Frobenius, podem ser empregados com vistas a uma solução do Problema do Isomorfismo para tais grupos. Exibiremos, de fato, algumas soluções deste problema para determinadas famílias de grupos de Frobenius.

## 4.1 A questão da ação

O capítulo anterior nos revelou que os fatores que constituem um grupo de Frobenius estão determinados por seus anéis de grupos integrais; ou seja: se $G = K \rtimes H$ é um grupo de Frobenius, seu núcleo $K$, por ser nilpotente, estará determinado por $\mathbb{Z}K$; ademais um complemento, neste caso $H$, também estará determinado por seu anel de grupo integral, $\mathbb{Z}H$. Demonstramos ainda que, do isomorfismo de anéis de grupo, $\mathbb{Z}G \simeq \mathbb{Z}\dot{G}$, segue que $\dot{G}$ é também um grupo de Frobenius com núcleo e complementos, respectivamente, isomorfos aos de $G$. Todavia, em que pese a grande semelhança entre $G$ e $\dot{G}$, os fatos acerca dos núcleos e complementos destes grupos não nos autorizam, absolutamente, a inferir sua isomorfia. A afirmação a seguir esclarece esta questão:

> **Afirmação:** *Existem grupos de Frobenius não isomorfos que apresentam núcleos e complementos, respectivamente, isomorfos.*

Verificaremos esta afirmação exibindo um exemplo deveras curioso, pois trata-se de um caso em que a ordem dos grupos é a menor possível; ademais os núcleos e complementos envolvidos são extremamente simples.

Construiremos os grupos $G$ e $\dot{G}$ como produtos semidiretos sobre núcleos e complementos determinados, respectivamente, pelos grupos a seguir:

$$K = \langle a \rangle \times \langle b \rangle \qquad \text{e} \qquad H = \langle c \rangle,$$

em que $\langle a \rangle$ e $\langle b \rangle$ são duas cópias do grupo cíclico de ordem 7, ao passo que $\langle c \rangle$ é o grupo cíclico de ordem 3. Definiremos a ação de $H$ sobre $K$, em $G$, como:

$$c^{-1}ac = a^2 \qquad \text{e} \qquad c^{-1}bc = b^2.$$

Já a ação de $H$ sobre $K$, em $\dot{G}$, será dada por:

$$c^{-1}ac = a^2 \qquad \text{e} \qquad c^{-1}bc = b^4.$$

Evidentemente, $G$ e $\dot{G}$ são grupos de Frobenius; os quais, muito embora apresentem os mesmos núcleos e complementos, são não isomorfos. Isto é facilmente comprovado; basta observar que o grupo $G$ possui os oito subgrupos normais a seguir:

$$\langle a \rangle,\ \langle b \rangle,\ \langle ab \rangle,\ \langle ab^2 \rangle, \cdots, \langle ab^6 \rangle;$$

entretanto, em $\dot{G}$, há apenas os subgrupos normais

$$\langle a \rangle \quad \text{e} \quad \langle b \rangle.$$

Todavia vale notar que, neste caso, os grupos $G$ e $\dot{G}$ estão determinados por seus anéis de grupo integrais; isto decorre do resultado de Whitcomb (Prop. 1.38), pois que estes grupos são, ambos, metabelianos.

O caso que acabamos de analisar é bastante elucidativo quanto ao problema do isomorfismo para os grupos de Frobenius: por um lado, ele nos revela que tais grupos, ainda que apresentem núcleos e complementos, respectivamente, idênticos, podem ter estruturas muito diversas; isto porque as ações dos complementos sobre os núcleos podem ser bem diferenciadas. Deveremos, pois, nos precaver de que os resultados do capítulo anterior podem não ser suficientes para o isomorfismo buscado. Por outro lado, contudo, o caso em tela nos assegura que o isomorfismo entre estes anéis de grupo impõe também severas restrições às ações em causa; podendo implicar a esperada solução! Em verdade, este fato nos despertou a confiança em que a linha de raciocínio que desenvolvíamos poderia chegar a bom termo. Afinal, a ação de um complemento sobre o núcleo revela-se, de alguma forma, seja nas classes de conjugação do grupo, seja em seu reticulado de subgrupos normais; porém tanto este quanto aquelas estão – como bem o sabemos da teoria de anéis de grupo – delimitados, em certos aspectos, pela isomorfia entre os anéis de grupo. Em outros termos, conjecturamos que se $G$ e $\dot{G}$ são grupos de Frobenius não isomorfos com as características referidas (mesmos núcleos e complementos), apresentam forçosamente divergências em suas estruturas (como no exemplo visto, em que os reticulados de subgrupos normais são inteiramente distintos); divergências estas que serão interditadas pela isomorfia de seus anéis de grupo!

O resultado a seguir, embora extremamente elementar, é mais um indício de que nossa confiança numa solução ao problema do isomorfismo não é de todo vã.

TEOREMA 4.1 *Um grupo de Frobenius, cujo núcleo é um grupo cíclico, é uma solução ao problema do isomorfismo.*

Demonstração: Seja $G = K \rtimes H$ um grupo de Frobenius cujo núcleo $K$ é um grupo cíclico; a ação de $H$ sobre $K$ traduz-se pelo monomorfismo de grupos a seguir:

$$\varphi : H \hookrightarrow Aut(K);$$

a razão de $\varphi$ ser um monomorfismo segue do fato da ação de $H$ sobre $K$ ser livre de pontos fixos: se $h_1$ e $h_2$ são elementos de $H$ tais que

$$\varphi(h_1) = \varphi(h_2),$$

então, para um $k$ qualquer, em $K$,

$$h_1^{-1} k h_1 = h_2^{-1} k h_2;$$

consequentemente, para $k \neq 1$,

$$h_1 = h_2.$$

Uma vez que $K$ é cíclico, seu grupo de automorfismo $Aut(K)$ é abeliano; como observamos que $H$ é isomorfo a um subgrupo de $Aut(K)$, segue que $H$ é abeliano. Advém do resultado de Whitcomb (Prop. 1.38) que $G$ é determinado por seu anel de grupo.

**q.e.d.**

Adiante veremos outras soluções ao problema do isomorfismo.

## 4.2 Condições necessárias

Nesta seção, apresentaremos algumas condições necessárias à solução do problema do isomorfismo para os grupos de Frobenius.

Sabemos, do resultado de Thompson (Prop. 1.22), que o núcleo $K$ do grupo de Frobenius $G = K \rtimes H$ é nilpotente; da Proposição 1.2(ii) e do fato de $K$ ser o grupo de Fitting de $G|$[1], segue que, se $K_p$ é o $p$-subgrupo de Sylow de $K$ (admitamos apenas

[1] Observe a discussão após a Proposição 1.22.

os não triviais), o subgrupo $K_p \rtimes H$, em $G$, é um grupo de Frobenius. Chamaremos a estes subgrupos de $p$-componentes de Frobenius de $G$.

Suponhamos agora que o grupo de Frobenius $G = K \rtimes H$ seja isomorfo a $\dot{G} = \dot{K} \rtimes \dot{H}$; segue da Prop. 1.18 que tal isomorfismo, pela conjugação de um elemento apropriado em $\dot{K}$, pode ser reduzido a um isomorfismo $\gamma$ tal que $\gamma(K) = \dot{K}$ e $\gamma(H) = \dot{H}$. Sendo assim, é evidente que uma condição necessária para a isomorfia de $G$ e $\dot{G}$ é que as suas $p$-componentes sejam isomorfas para todo primo $p$ divisor da ordem de $K$.

Pretendemos demonstrar que o isomorfismo $\mathbb{Z}G \simeq \mathbb{Z}\dot{G}$ implica serem as $p$-componentes de $G$ e $\dot{G}$ também isomorfas. Uma conseqüência imediata deste resultado seria uma solução do problema do isomorfismo para os grupos de Frobenius cujos núcleos são $p$-grupos. Teríamos, assim, uma solução geral do problema no caso em que as condições necessárias, já mencionadas, fossem também suficientes para a isomorfia dos dois grupos.

A técnica utilizada na demonstração do nosso próximo resultado consistirá em estender um isomorfismo $\lambda_p : K_p \xrightarrow{\sim} \dot{K}_p$ a toda a $p$-componente, obtendo assim $K_p \rtimes H \simeq \dot{K}_p \rtimes \dot{H}$. O isomorfismo $\lambda_p$ é determinando por um teorema de S. K. Sehgal, obtido a partir do método desenvolvido pelo mesmo, em parceria com A. Giambruno, utilizando os resultados de A. Weiss|[2]; reproduzimos aqui este resultado:

**Proposição 4.1** *Seja $G = P \rtimes X$, em que $P$ é um $p$-grupo cuja ordem não divide a ordem $m = |X|$, e seja $Y$ um subgrupo finito de $U(1 + \Delta(G, P))$, então existe $\alpha$ em $\mathbf{Q}G$ tal que $\alpha^{-1} Y \alpha \subseteq G$.*

Dem: Veja, em Sehgal [82], teorema 41.12.

Passemos ao nosso resultado:

**LEMA 4.1** *Sejam $G = K \rtimes H$ um grupo de Frobenius e $\mathbb{Z}G \simeq \mathbb{Z}\dot{G}$ um isomorfismo, para todo primo $p$ divisor de $|K|$, se $K_p$ é cíclico ou $K_p' \neq \Phi(K_p)$, as $p$-componentes de $G$ e $\dot{G}$ são isomorfas.*

[2] Confira [20] bem como [91].

Demonstração: Tomemos o isomorfismo $\Theta : \mathbb{Z}G \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}\dot{G}$, em que $G = K \rtimes H$ é um grupo de Frobenius; já sabemos do capítulo anterior que $\dot{G} = \dot{K} \rtimes \dot{H}$, com $K$ e $\dot{K}$ isomorfos, bem como $H$ e $\dot{H}$. Se $K_p$ é um $p$-subgrupo de Sylow (não trivial), $K_p$ é normal em $G$ como já foi comentado; podemos, pois, afirmar que $G$ se decompõe segundo

$$G = K_p \rtimes (K_{p'} \rtimes H)$$

em que $K_{p'}$ representa o produto dos demais subgrupos de Sylow presentes em $K$. Analogamente, $\dot{G}$ admite a decomposição

$$\dot{G} = \dot{K}_p \rtimes (\dot{K}_{p'} \rtimes \dot{H}).$$

Claro está que $K_p$ e $\dot{K}_p$ estão associados pela correspondência entre subgrupos normais, isto é, $\nu(K_p) = \dot{K}_p$. Das Proposições 1.28 e 1.40, segue que $\Theta(K_p) \subseteq U(1 + \Delta(\dot{G}, \dot{K}_p))$; sendo assim, podemos aplicar a proposição anterior (Prop. 4.1) e, pela ordem de $K_p$, concluir que existe $\alpha$ em $\mathbf{Q}\dot{G}$ tal que

$$\alpha^{-1}\Theta(K_p)\alpha = \dot{K}_p.$$

Uma vez que $\Theta$ preserva as somas de classe e já que estas são centrais (veja as Proposições 1.33 e 1.39), teremos que a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \lambda_p : & K_p & \xrightarrow{\sim} & \dot{K}_p \\ & k & \longmapsto & \alpha^{-1}\Theta(k)\alpha \end{array}$$

é um isomorfismo que aplica as classes de conjugação de $G$, contidas em $K_p$, em classes de conjugação de $\dot{G}$. Nosso objetivo é demonstrar que $\lambda_p$ pode ser estendida ao grupo $K_p \rtimes H$ sobre $\dot{K}_p \rtimes \dot{H}$.

Observe primeiramente que, como na correspondência entre os subgrupos normais vale $\nu(K_{p'}) = \dot{K}_{p'}$, da Proposição 1.40 segue que

$$\mathbb{Z}(K_p \rtimes H) \simeq \mathbb{Z}(G/K_{p'}) \simeq \mathbb{Z}(\dot{G}/\dot{K}_{p'}) \simeq \mathbb{Z}(\dot{K}_p \rtimes \dot{H});$$

donde, se $K_p$ é cíclico, pelo TEOREMA 4.1, concluímos que $K_p \rtimes H \simeq \dot{K}_p \rtimes \dot{H}$.

Suponhamos que $K_p$ seja abeliano; pelo que acabamos de expor, podemos assumir que $K_p$ é não cíclico e, uma vez que $K_p' \neq \Phi(K)$, pela Proposição 1.3, segue que $K_p$ não é abeliano elementar. Tomemos $k$ em $K_p$; das propriedades de $\lambda_p$, para um $h$ fixado em $H$, existe $y$ em $\dot{H}$ tal que

$$\lambda_p(h^{-1}kh) = y^{-1}\lambda_p(k)y.$$

Provaremos que $y$ é determinado exclusivamente por $h$; para tanto, sejam $k_1$ e $k_2$ em $K_p$, analogamente, existirão $y_0$, $y_1$ e $y_2$ em $\dot{H}$ tais que

$$\lambda_p(h^{-1}k_1h) = y_1^{-1}\lambda_p(k_1)y_1 \qquad \text{e} \qquad \lambda_p(h^{-1}k_2h) = y_2^{-1}\lambda_p(k_2)y_2,$$

como também

$$\lambda_p(h^{-1}k_1k_2h) = y_0^{-1}\lambda_p(k_1k_2)y_0.$$

Conseqüentemente,

$$y_0^{-1}\lambda_p(k_1k_2)y_0 = y_1^{-1}\lambda_p(k_1)y_1y_2^{-1}\lambda_p(k_2)y_2. \tag{4.1}$$

Como $K_p$ não é um $p$-grupo abeliano elementar, podemos escolher $k_1$ e $k_2$ com ordens distintas; admitamos, pois, que

$$o(k_1) = r < o(k_2).$$

Decorre de (4.1) e da abelianidade de $K_p$ que

$$y_0^{-1}\lambda_p(k_2)^r y_0 = y_0^{-1}\lambda_p(k_1k_2)^r y_0 = y_2^{-1}\lambda_p(k_2)^r y_2;$$

uma vez que $k_2^r$ não é a unidade e a ação de $\dot{H}$ sobre $\dot{K}_p$ é livre de pontos fixos, concluímos por

$$y_0 = y_2;$$

em virtude ainda de (4.1), por um raciocínio análogo, obtemos

$$y_0 = y_1 = y_2.$$

Assim, $y_0$ é determinado por $h$, independentemente de $k_1$ ou $k_2$. Ora, como qualquer elemento $k$ em $K_p$ terá ordem distinta ou da ordem de $k_1$ ou da de $k_2$, por um argumento inteiramente semelhante ao já desenvolvido, concluímos que: fixado $h$ em $H$, para todo $k$ em $K_p$, existe $y$ em $\dot{H}$ tal que

$$\lambda_p(h^{-1}kh) = y^{-1}\lambda_p(k)y.$$

Estabelecemos, pois, uma aplicação dos elementos de $H$ em $\dot{H}$:

$$\mu_p : h \longmapsto y;$$

que tal aplicação é bijetiva, decorre das propriedades de $\lambda_p$ e da ação de $\dot{H}$ sobre $\dot{K}_p$. Considerando $\mu_p(1) = 1$, podemos provar que $\mu_p$ é um morfismo de grupos: de fato, de

$$\lambda_p((h_1h_2)^{-1}k(h_1h_2)) = \lambda_p(h_2^{-1}(h_1^{-1}kh_1)h_2),$$

segue que

$$\mu_p(h_1h_2) = \mu_p(h_1) \cdot \mu_p(h_2).$$

Finalmente, definimos a aplicação

$$\gamma_p : K_p \rtimes H \longrightarrow \dot{K}_p \rtimes \dot{H}$$

por

$$\gamma_p(kh) = \lambda_p(k) \cdot \mu_p(h);$$

obviamente $\gamma_p$ é uma bijeção, como também vale

$$\gamma_p(h^{-1}kh) = \lambda_p(h^{-1}kh) = \mu_p(h^{-1})\lambda_p(k)\mu_p(h);$$

é imediato que $\gamma_p$ é um isomorfismo do grupo $K_p \rtimes H$ sobre $\dot{K}_p \rtimes \dot{H}$.

O caso em que $K_p$ é não abeliano é desenvolvido de forma análoga à anterior. Observamos, entretanto, que a abelianidade era essencial, no caso precedente, para a definição da aplicação $\mu_p$; pois que, para quaisquer elementos $k_1$ e $k_2$, valia:

$$(k_1k_2)^r = {k_1}^r {k_2}^r;$$

bastava, portanto, escolher-se convenientemente os elementos $k_1$ e $k_2$ e a potência $r$ para que $\mu_p$ estivesse bem definida. Tal não vale, sem restrições, em $K_p$ não abeliano; contornaremos esta dificuldade tratando com um grupo quociente de $K_p$ adequadamente abeliano.

Como os subgrupos comutadores e de Frattini de $K_p$ correspondem-se por $\lambda_p$, pela Proposição 1.40, podemos determinar o isomorfismo

$$\bar{\lambda}_p : (K_p/K_p') \longrightarrow (\dot{K}_p/\dot{K}_p'),$$

obviamente

$$\bar{\lambda}_p(h^{-1}\bar{k}h) = y^{-1}\bar{\lambda}_p(\bar{k})y.$$

Do fato de $K_p' \neq \Phi(K_p)$, segue que $K_p/K_p'$ não é um $p$-grupo abeliano elementar; por um raciocínio idêntico ao caso anterior, determinamos uma aplicação de $H$ em $\dot{H}$

$$\mu_p : h \longmapsto y.$$

Todavia $\mu_p$ foi determinada em referência ao grupo $K_p/K'_p$; devemos mostrar que é válida também em relação ao grupo $K_p$. Tomemos $S = \{k_1, \cdots, k_r\}$ um conjunto gerador minimal para $K_p$; do teorema da base, Prop. 1.4, $\{k_1\Phi(K_p), \cdots, k_r\Phi(K_p)\}$ é um conjunto gerador de $K_p/\Phi(K_p)$. Segundo a Proposição 1.3, $K'_p \leq \Phi(K_p)$, logo $\{k_1K'_p, \cdots, k_rK'_p\}$ contém um conjunto gerador de $K_p/K'_p$. Segue destes fatos que a aplicação $\mu_p$ é válida para os elementos de $S$ e, consequentemente, em todo o $K_p$.

O raciocínio é desenvolvido de modo análogo ao caso anterior, obtendo-se o isomorfismo esperado.

**q.e.d.**

Para finalizar esta seção, um comentário sobre a hipótese, $K'_p \neq \Phi(K_p)$. Como foi visto na demonstração do LEMA 4.1, o isomorfismo $\mathbb{Z}G \simeq \mathbb{Z}\dot{G}$ implica um isomorfismo entre os anéis de grupo de $K_p \rtimes H$ e $\dot{K}_p \rtimes H$; na próxima seção, veremos que, no caso em que $K_p$ é abeliano, a estrutura do grupo $H$ (e, em particular, dos seus 2-subgrupos de Sylow) pode acarretar o isomorfismo destas $p$-componentes. Assim, se $K_p$ é abeliano e $K'_p = \Phi(K_p)$, teremos que $K_p$ é abeliano elementar, donde $H$ é um subgrupo de $GL(n,p)$, em que $|K_p| = p^n$ [3]. Ora, os $q$-subgrupos de Sylow de $GL(n,p)$ foram examinados por A. J. Weir, em [89], e R. Carter e P. Fong em [8]; deste modo, podemos obter informações mais precisas sobre a estrutura de $H$.

Admitamos agora $K_p$ não abeliano e $K'_p = \Phi(K_p)$; esta situação ocorre, em particular, com os $p$-grupos especiais, isto é, em que $K'_p = \Phi(K_p) = \zeta(K_p)$. No primeiro capítulo, vimos que a classe de nilpotência de $K_p$ é, no máximo, 2 e $\exp(K_p)$, menor ou igual a $p^2$. A situação em que $\exp(K_p) = p^2$ e $p$ é ímpar nos é conveniente, pois, pela Proposição 1.10, para quaisquer $k_1$ e $k_2$ em $K_p$, vale $(k_1k_2)^p = k_1^pk_2^p$; vimos que esta *quase abelianidade* e o fato de existirem dois elementos em $K_p$ com ordens distintas são suficientes para a demonstração anterior. Podemos, portanto, afirmar:

**LEMA 4.2** *Em condições análogas às do lema anterior (LEMA 4.1), são também isomorfas as $p$-componentes em que $p$ é ímpar e cujo núcleo é um $p$-grupo especial de expoente $p^2$.*

[3] Confira os resultados, no primeiro capítulo, acerca dos $p$-grupos abeliano elementares.

São ainda possíveis algumas extensões do LEMA 4.1 considerando as $p$-componentes em que $p$ é 2 ou em que $K_p$ é um $p$-grupo regular; nós as dispensamos aqui por serem muito particulares.

## 4.3 Condições suficientes

Já foi mencionado, na seção anterior, que a abelianidade do núcleo de Frobenius, a depender da estrutura de um complemento, poderia implicar uma solução para o problema do isomorfismo. Exploraremos este fato nesta seção; lembrando ao leitor que, das propriedades dos grupos de Frobenius, a abelianidade do núcleo sempre ocorre quando um complemento tem ordem par.

Será necessário, para o nosso estudo, um importante resultado desenvolvido por Sudarshan K. Sehgal, em parceria com Surinder K. Sehgal e H. Zassenhaus, que pode ser conferido em [83] (veja também Sehgal [82]); nós o reproduzimos aqui:

**Proposição 4.2** *Seja $G = A \rtimes X$ com $A$ abeliano e $(|A|, |X|) = 1$; supondo que $X$ satisfaça (CZ-2), então*

$$\mathbb{Z}G \simeq \mathbb{Z}G \Longrightarrow G \simeq \dot{G}.$$

De início, podemos obter uma solução de (Iso) para o grupo de Frobenius $G = K \rtimes H$ em que um 2-subgrupo de Sylow de $H$ é cíclico e o núcleo $K$ é abeliano (o que sempre ocorre se o tal 2-subgrupo de Sylow é não trivial):

**TEOREMA 4.2** *Seja $G$ um grupo de Frobenius com núcleo abeliano; se um 2-subgrupo de Sylow do complemento é cíclico, então $G$ é uma solução ao problema do isomorfismo.*

Demonstração: Do que já foi exposto sobre os complementos de Frobenius e da Proposição 1.13, segue que um tal complemento de $G$ é um $Z$-grupo. Se este complemento é abeliano, a afirmação segue do resultado de Whitcomb (Prop. 1.38); caso seja metacíclico, terá a forma $C_m \rtimes C_n$ com $(m, n) = 1$. Ora, Valenti (Prop. 1.42) demonstrou que tais grupos satisfazem (CZ-3); como (CZ-3) obviamente implica (CZ-2), temos as condições da proposição anterior atendidas, segue, pois, o resultado.

**q.e.d.**

Sabemos que um complemento de Frobenius $H$, de ordem par e não solúvel, é sempre uma extensão de $M \times SL(2,5)$; em que $M$ é um $Z$-grupo, as ordens de $M$ e $SL(2,5)$ são relativamente primas e este subgrupo tem índice 1 ou 2 em $H$. Também no caso em que $H$ é solúvel de ordem par, exceto possivelmente quando $H$ é metabeliano|[4], $H$ é uma extensão de $M \times Q$; em que $Q$ denota um quatérnio e $M$ um $Z$-grupo de ordem ímpar, sendo o índice deste subgrupo igual a 1, 3, 6 ou $2^n$ ($n$ maior ou igual a 3) em $H$.

Analisando os grupos acima em que o núcleo da extensão tem índice 1, isto é, $M \times SL(2,5)$ e $M \times Q$, que denominaremos tipo I e II, respectivamente, obtivemos o resultado a seguir:

**TEOREMA 4.3** *Se $G$ é um grupo de Frobenius cujo complemento é do tipo I ou II, então $G$ é uma solução ao problema do isomorfismo.*

Demonstração: Tomemos $G = K \rtimes H$; em ambos os casos, I ou II, o complemento $H$ é de ordem par, logo o núcleo $K$ é abeliano. Caso (CZ-2) seja válida em $H$, podemos aplicar a Proposição 4.2.

Pelo resultado de Valenti (Prop. 1.42), vale (CZ-3) para $M$; da proposição de Weiss (Prop. 1.43), o mesmo ocorre para o quatérnio $Q$; Polcino Milies, Dokuchaev e Juriaans provaram (CZ-3) também para $SL(2,5)$ em [16]. Já comentamos que (CZ-3) implica a conjetura (Aut); como a ordem de $M$ é relativamente prima às ordens de $SL(2,5)$, no caso I, e $Q$, no caso II, do resultado de Peterson (Prop. 1.44) segue que vale (Aut) para $H$ em ambos os casos, I e II.

Por fim, uma vez que já foi provado (Iso) para $H$, basta lembrarmos que a conjunção das conjecturas (Aut) e (Iso) implica (CZ-2), assim vale (CZ-2) para $H$ e o resultado segue.

**q.e.d.**

[4]Note que alguns destes serão metacíclicos, caímos no caso coberto pelo TEOREMA 4.2.

Os últimos resultados sugerem que uma solução da conjectura (CZ-2) para todos os complementos de Frobenius de ordem par, acarretaria a solução do problema do isomorfismo para todos os grupos de Frobenius com tais complementos.

Em verdade, perseguimos uma tal solução e obtivemos sucesso em casos particulares. No caso, por exemplo, em que $H$ é um complemento do tipo de Amitsur, foi possível obter (CZ-2). Como já mencionamos, os grupos de Amitsur são os subgrupos finitos do grupo multiplicativo de um anel de divisão com característica zero|[5]. A prova é obtida diretamente utilizando-se os resultados e métodos desenvolvidos por Dokuchaev e Juriaans em [15] e por estes mesmos autores, juntamente com Polcino Milies, em [16].

Coloca-se, portanto, o problema de, sabendo-se que um complemento de Frobenius de ordem par é sempre uma extensão de um grupo para o qual vale (CZ-2) – os tipos I ou II mencionados – obter esta conjectura para tais extensões... tarefa para outros navegadores, pois a tanto não nos ajudou o engenho e arte!

[5]Veja Amtisur [1] e Shirvani & Wehrfritz [84].

# Conclusão

$\Theta\acute{\alpha}\lambda\alpha\sigma\sigma\alpha, \vartheta\acute{\alpha}\lambda\alpha\sigma\sigma\alpha$
- Xenofonte, *Anábase*

O propósito inicial e, por isso mesmo, central da nossa investigação, como já anunciamos na introdução, foi a conjectura do normalizador. Em particular, o exame da questão relativa aos grupos de Frobenius mostrava-se muito atraente. Primeiramente, pela relevância que esta classe de grupos, fato já mencionado diversas vezes, apresentava na teoria dos grupos finitos; tratava-se, pois, de uma classe que, embora específica, não fora construída adrede para atender às nossas propostas, tendo importância intrínseca. Em segundo lugar, Polcino Milies|[6], em parceria com Dokuchaev e Juriaans, examinando os anéis de grupo determinados por tais grupos, obteve uma série de interessantes resultados; revelando que esta classe de anéis de grupo constituía um campo fértil para a pesquisa. Todavia nenhum destes resultados se referia à conjectura do normalizador – como de resto nenhum outro autor, até onde conhecemos, tratara desta questão. Finalmente, a estrutura peculiar dos grupos de Frobenius, especificamente os de complementos pares, não permitia que os resultados de Jackowski e Marciniak os abrangessem; vez que seus 2-subgrupos de Sylow, neste caso, jamais são normais. Ademais nenhum dos resultados recentes inclui a classe dos grupos de Frobenius: de fato, o resultado de Roggenkamp e Marciniak, acerca de metabelianos cujo 2-subgrupo de Sylow é abeliano, não contém os grupos de Frobenius, exceto no caso bastante restrito em que um complemento é cíclico; o teorema de Li, Parmeter e Sehgal sobre os grupos de Blackburn também não se aplica a estes grupos; pois, como demonstramos, estas classes são disjuntas. Por fim, as últimas proposições de Li tratam de grupos cujos 2-subgrupos de Sylow admitem uma estrutura incompatível com os grupos de Frobenius.

Quanto à pesquisa do problema do isomorfismo, esta desenvolveu-se, como afirmamos anteriormente, em paralelo à investigação do normalizador e foi motivada principalmente pelo resultado obtido por Polcino Milies e Juriaans em [32]. Este resultado, que foi apresentado no capítulo terceiro, determina as ordens das unidades de torção do anel de grupo definido por um grupo de Frobenius e foi desenvolvi-

[6]Confira as referências [15], [16], [31] e [32]

do pouco antes de iniciarmos o nosso trabalho; a partir dele obtivemos a primeira proposição associada ao problema do isomorfismo, aqui exposta no TEOREMA 3.1, garantindo que todas as bases grupais destes anéis de grupo eram também grupos de Frobenius. Tal proposição originou todo o trabalho que a sucedeu, pois que a mesma nos estimulou a perseguir uma solução ou, quando menos, uma estratégia de ataque ao problema do isomorfismo.

Pretendemos agora discutir os resultados que obtivemos e, pricipalmente, sugerir, o que nos parecem ser, algumas direções que apontam para possíveis extensões destes resultados.

## A conjectura do normalizador

Examinando os grupos de Frobenius, com respeito a esta conjectura, obtivemos o TEOREMA 2.1. Trata-se de um resultado geral, ou seja, *todos os grupos de Frobenius satisfazem a conjectura do normalizador*. Este fato é, cremos, relevante; pois, reafirmamos, é válido sem restrição alguma para esta importante classe de grupos.

Quando se alcança um tal resultado, a primeira questão que se coloca é: seria possível estendê-lo? Ou, pelo menos, indaga-se em que outras situações as técnicas empregadas em seu desenvolvimento podem ser utilizadas.

O cerne da demonstração do nosso resultado apóia-se nos métodos desenvolvidos por Jackowski e Marciniak em [28]; é evidente que estes métodos podem ser estendidos a diversas outras aplicações. Em particular, acreditamos que um raciocínio análogo ainda se aplicaria em algumas extensões de grupos de Frobenius como, por exemplo, em grupos de Zassenhaus; esta é uma família de grupos com transitividade dupla. De fato, obtivemos algum progresso nesta direção em casos específicos. Outras extensões de grupos de Frobenius que examinamos foram os chamados *grupos de três estágios*; assim fizemos porque uma solução da questão para estes grupos implicaria a validade da conjectura para os grupos cujos centralizadores dos elementos não triviais são nilpotentes, conhecidos como CN-grupos|[7]. Infelizmente, nesta direção, os nossos resultados ainda são inconclusivos, pois que ainda muito preliminares. Cremos também que o nosso argumento pode ser empregado, com algum proveito, em classes mais amplas que a dos grupos de Frobenius; para citar algumas destas, lem-

[7] Para inteirar-se destes grupos, sugerimos Passman [51] e Gorenstein [22].

bramos que os grupos que atendem à condição de Camina generalizam os grupos de Frobenius; o mesmo se pode dizer dos grupos que obedecem à condição de Wielandt (emboram não sejam, propriamente, grupos que contenham subgrupos de Frobenius, como o são, os de Zassenhaus)|[8]; demonstra-se facilmente que, sob certas condições, há grupos nestas classes que, embora não sejam grupos de Frobenius, satisfazem a conjectura do normalizador.

Coloca-se também a questão de uma possível generalização do nosso resultado a grupos infinitos. Há que se tomar algum cuidado aqui: a nossa técnica vale-se de caracteríticas bem específicas dos grupos que examinamos e que, nestes, estão plenamente asseguradas. Ocorre que a extensão do conceito de grupo de Frobenius à esfera dos grupos infinitos não transporta, necessariamente, todas as propriedades garantidas para os de ordem finita|[9]; de fato, para tais grupos, o que entendemos por *núcleo* do grupo pode não ser nilpotente, há casos em que é trivial (apenas a identidade) e outros até, em que nem mesmo é um subgrupo! Assim, para preservar as características que nos são convenientes, há que se tomar algumas precauções; O. H. Kegel, em [34] (veja também Kegel & Wehrfritz [35]), demonstrou que muito da estrutura original dos grupos de Frobenius é respeitada no caso infinito, quando se impõe que estes sejam localmente finitos. Uma condição menos restritiva que a finitude local, mas que também preserva muitas das propriedades dos grupos finitos, foi estabelecida por M. C. Collins em [11]. Restaria verificar se seria possível estabelecer a conjectura também para tais grupos. Todavia o Professor Victor Bovdi, em comunicação pessoal, já nos afirmara estar convicto de que o nosso resultado admitiria uma extensão direta para o caso dos grupos localmente finitos; de fato, recentemente, fomos informados, por E. Jespers e S. O. Juriaans, que os mesmos vem obtendo algum sucesso no trato desta questão.

# O problema do isomorfismo

Não era nossa pretensão inicial, dada a dificuldade da questão, obtermos uma solução geral do problema do isomorfismo, para os grupos de Frobenius, por meio dos métodos que empregamos; muito embora vislumbrássemos esta possibilidade. Acredi-

---

[8] Veja, por exemplo, Camina [7] e Wielandt [92].

[9] Confira Dixon & Mortimer [13].

tamos, todavia, que alcançamos alguns êxitos animadores nesta direção. Poderíamos sintetizar os resultados que obtivemos, nos capítulos terceiro e quarto, afirmando, com alguma imprecisão, que: *a estrutura mais íntima dos grupos de Frobenius está fortemente determinada por seus anéis de grupo.*

Devemos salientar que a determinação da estrutura destes grupos, mencionada anteriormente, desce a minúncias, como assegurar a isomorfia de alguns importantes subgrupos do grupo em tela. Lembrando que os grupos sob exame são sempre produtos semidiretos; obtivemos que toda base grupal do anel de grupo integral de um grupo de Frobenius é, também ela, um grupo de Frobenius com núcleo e complementos, respectivamente, idênticos aos do grupo gerador. Verificamos ainda que outros subgrupos fundamentais na estrutura do grupo estão bem definidos; por exemplo, não apenas todos os subgrupos Sylow estão determinados; subgrupos que também apresentam uma estrutura de Frobenius estão, na maioria dos casos, também definidos pelo anel de grupo. Em particular, com exceção de algumas situações muito restritivas, todos os subgrupos de Frobenius cujas ordens atendem a uma certa condição de maximalidade, chamados aqui de $p$-componentes de Frobenius, estão determinados. As exceções que referimos aqui dizem respeito às $p$-componentes associadas aos $p$-subgrupos de Sylow do núcleo de Frobenius cujos abelianizados são abeliano elementares. Contudo, lembrando que estes abelianizados definem-se via quocientes por elementos não-geradores do grupo, poderíamos dizer que, ainda nestes casos, as $p$-componentes estão *essencialmente* determinadas!

Uma questão que se revelou intrincada em nosso estudo dos grupos de Frobenius, foi a das possíveis ações dos complementos sobre os núcleos destes grupos. Tais ações podem ser bem complexas; contudo há alguns atenuantes, ou seja, fatos que de alguma forma restringem as possíveis ações. Para os conhecedores de cohomologia de grupos, por exemplo, vale observar que, quando o núcleo de um grupo de Frobenius é abeliano, o segundo grupo de cohomologia deste, com respeito ao núcleo é trivial. Caso o núcleo não seja abeliano, um complemento será, necessariamente, um tipo muito especial de metacíclico, ou ainda cíclico; teremos assim que o grupo de Frobenius em pauta será uma extensão cíclica de um outro grupo também de Frobenius; este, por sua vez, tem, como segundo grupo de cohomologia, o grupo trivial. Outrossim foi justamente a natureza particular da ação do grupo de Frobenius que nos permitiu desenvolver muitos dos resultados que propomos.

Obtivemos também, sob certas condições satisfeitas seja pelo núcleo, seja pelos complementos do grupo de Frobenius, soluções do problema do isomorfismo. Estas soluções apontam direções em que, cremos, a pesquisa pode caminhar com grande proveito. A nossa investigação nos fortaleceu a confiança em que é bem provável uma demonstração de (CZ-2) para todos os grupos que sejam complementos de Frobenius; o que, como vimos no último capítulo, implicaria a solução do problema do isomorfismo para todos os grupos de Frobenius com núcleo abeliano. De fato, verificamos que tal resultado é possível em vários casos; entre estes, como mencionamos, obtivemos (CZ-2) para todos os complementos do tipo de Amitsur|[10]. Uma vez alcançada esta vitória, ficariam por ser subjugados apenas os grupos de Frobenius com núcleo não abeliano; ocorre porém que, nestes casos, como já colocamos, os complementos são grupos extremamente simples, pois que são cíclicos ou metacíclicos que cindem! E, como sabemos, extensões por grupos cíclicos são casos razoavelmente tratáveis.

*"Empenha-te em fazer com que teu livro tenha um objetivo e que este te eleve. Só assim teu livro estará acabado."*

Girolamo Cardano

[10]Veja Amitsur [1] e Shirvani & Wehrfritz [84].

# Bibliografia


[1] Amitsur, S. A., Finite subgroups of division rings, Trans, Amer. Math. Soc. **80**, pp 361-386 (1955).

[2] Arora, S. R. & Passi, I. B. S., Central height of the unit group of an integral group ring, Comm. Alg. **21**, pp 73-3683 (1993).

[3] Aschbacher, M., *Finite group theory*, Cambridge studies in advanced mathematics 10, Cambridge Unversity Press, 1994.

[4] Bovdi, A. & Marciniak, Z. & Sehgal, S. K., Torsion Units in Infinite Group Rings, J. Num. Th. **47**, pp 284-299 (1994).

[5] Blackburn, N., Finite Groups in which the Nonnormal Subgroups have Nontrivial Intersection, J. Alg. **3**, pp 30-37 (1996).

[6] Burnside, W., *Theory of Groups of Finite Order*, (Segunda edição) Cambridge University Press, 1911.

[7] Camina, A. R., Some conditions which almost characterize Frobenius groups, Israel J. Math. **31**,2, pp 153-160 (1978)

[8] Carter, R & Fong, P., The Sylow 2-Subgroups of the Finite Classical Groups, J. Alg. **1**, pp 139-151 (1964).

[9] Cohn, J. A. & Livingstone, D., On the structure of group algebras I, Can. J. Math. **17**, 4, pp 583-593 (1965).

[10] Coleman, D., On the modular group ring of a $p$-group, Proc. Amer. Math. Soc. **15** (4), pp 511-514 (1964).

[11] Collins, M. J., Some Infinite Frobenius Groups, J. Alg. **131**, pp 161-165 (1990).

[12] Dade, E. C., Deux groupes finis distincts ayant la même algèbre de groupe sur tout corps, Math. A. **119**, pp 345-348 (1971).

[13] Dixon, J. D. & Mortimer, B., *Permutations groups*, Springer-Verlag, New York, 1996.

[14] Dokuchaev, M. A., Torsion units in integral group rings of nilpotent metabelian groups, Comm. Alg. (2)**20**, pp 423-435 (1992).

[15] Dokuchaev, M. A. & Juriaans, S. O., Finite subgroups of integral group rings, Can. J. Math. **48**(6), pp 1170-1179 (1996).

[16] Dokuchaev, M. A. & Juriaans, S. O. & Polcino Milies, F. C., Integral Group Rings of Frobenius Groups and the Conjectures of Zassenhaus, Comm. Alg. **25**(7), pp 2311-2325 (1997).

[17] Dokuchaev, M. A. & Sehgal, S. K., Torsion units in integral group rings of solvable groups, Comm. Alg. **22**(12), pp 5005-5020 (1994).

[18] Dornhoff, L. *Group Representation Theory - Part A*, Marcel Dekker, New York, 1971.

[19] Fernandes, N. A., Torsion Units of the Integral Group Ring of $S_4$, Bol. Soc. Bras. Mat. (1)**18**, pp 1-10 (1987).

[20] Giambruno, A. & Sehgal, S. K., Automorphisms of the integral group ring of the wreath product of a $p$-group with $S_n$, Rock Moun. J. **22**, pp 1303-1316 (1992).

[21] Giambruno, A. & Sehgal, S. K. & Valenti, A., Automorphisms of the integral group rings of some wreath products, Comm. Alg. **19**, pp 519-534 (1991).

[22] Gorenstein, D., *Finite Groups*, Harper & Row, New York, 1968.

[23] Herstein, I. N., Finite multiplicative subgroups in division rings, Pacific J. Math. **3**, pp 121-126 (1953).

[24] Hertweck, H., Two non-isomorphic finite groups with isomorphic integral group rings, não publicado.

[25] Huppert, B., *Endliche Gruppen I*, Spriger-Verlag, Berlin-Heidelberg 1967.

[26] Huppert, B, & Blackburn, N., *Finite Groups III*, Spriger-Verlag, Berlin-Heidelberg 1982.

[27] Isaacs, I. M., *Character Theory of Finite Groups*, Dover, New York, 1994.

[28] Jackowski, S. & Marciniak, Z., Group automorphisms inducing the identity map on cohomology, J. Pure App. Alg. **44**, pp 241-250 (1987).

[29] Jespers, E. & Juriaans, S. O., Isomorphisms of Integral Group Rings of Infinite Groups, a ser publicado em Journal of Algebra.

[30] Juriaans, S. O., Torsion units in integral group rings, Comm. Alg. **22**(12), pp 4905-4913 (1994).

[31] Juriaans, S. O., Torsion units in integral group rings, Canad. Math. Bull. **38**(3), pp 317-324 (1995).

[32] Juriaans, S. O. & Polcino Milies, F. C., Units of Integral Group Rings of Frobenius Groups, a ser publicado em ........

[33] Karpilovsky, G., *Unit Groups of Group Rings*, Longman Scientific & Technical, Essex, 1989.

[34] Kegel, O. H., Lokal endliche Gruppen mit nicht-trivialer Partition, Arch. Math. **13**, pp 10-28 (1962).

[35] Kegel, O. H. & Wehrfritz, B. A., *Locally Finite Groups*, North-Holland 1973.

[36] Kimmerle, W., On Automorphisms of $\mathbf{Z}G$ and the Zassenhaus Conjectures, Canad. Math. Soc.; Conference Proc. **18**, pp 383-397 (1996).

[37] Kimmerle, W. & Roggenkamp, K. W., Projective limits of group rings, J. Pure Appl. Alg. **88**, pp 119-142 (1993).

[38] Kimmerle, W. & Roggenkamp, K. W., A Sylowlike theorem of integral group rings of finite solvable groups, Arch. Math. **60**, pp 1-6 (1993).

[39] Kingler, L., Construction of a counter example to a conjecture of Zassenhaus, Comm. Alg. **19** pp 2303-2330 (1991).

[40] Li, Y., The normalizer of a metabelian group in its integral group ring, versão preliminar.

[41] Li, Y. & Parmenter, M. M. & Sehgal, S. K., On the Normalizer Property for Integral Group Rings, Comm. Alg. **27**(9), pp 4217-4223 (1999).

[42] Magnus, W. & Karrass, A. & Solitar, D., *Combinatorial Group Theory: presentations of groups in terms of generators and relations*, (segunda edição) Dover, New York 1976.

[43] Margot, Jean-Louis, Radical de Jacobson d'un anneau de groupe sur un groupe de Frobenius fini, C. R. Acad. Sc. Paris **280A**, pp 551-554 (1975).

[44] Mazur, M., Automorphisms of finite groups, Comm. Alg. **22** (15), pp 6259-6271 (1994).

[45] Mazur, M., On the isomorphism problem for finite group rings of infinite groups, Expo. Math. **13**, pp 433-445 (1995).

[46] Mazur, M., The normalizer of a group in the unit group of its group ring, não publicado.

[47] Mazur, M., The normalizer of a metabelian group in its group ring, versão preliminar.

[48] Mazur, M., The Normalizer of a Group in the Unit Group of its Group Ring, J. Alg. **212**, pp 175-189 (1999).

[49] Passman, D. S., Isomorphic groups and group rings, Pacific J. Math **15**, pg. 561-563 (1965).

[50] Passman, D. S., Corrections to Isomorphic groups and group rings, Pacific J. Math. **43**, pp 823-824 (1972).

[51] Passman, D. S., *Permutation Groups*, W. A. Benjamin, New York, 1968.

[52] Passman, D. S., *The Algebraic Structure of Group Rings*, R. E. Krieger Publ., Malabar 1985.

[53] Perlis, P. & Walker, G. L., Abelian group algebras of finite order, Trans. Amer. Math. Soc. **68**, pp 420-426 (1950).

[54] Peterson, G. L., Automorphisms of the integral group ring of $S_n$, Proc. Amer. Math. Soc. **59**, pp 14-18 (1976).

[55] Peterson, G. L., On the Automorphism Group of an Integral Group Ring, I, Arc. Math. **28**, pp 577-583 (1977).

[56] Polcino Milles, C., Units of group rings. A short survey, em Groups St. Andrews - 1981, editado por C. M. Campbell and E. F. Robertson, London Math. Soc., Lectures Notes Series **71**, Cambridge Univ. Press, London, pp 281-297, 1982.

[57] Polcino Milles, C., *Anéis de grupo*, IV Escola de Álgebra, SBM, São Paulo, 1976.

[58] Polcino Milles, C., *Unidades de Anéis de Grupos*, XIV Escola de Álgebra, Rio de Janeiro, 1996.

[59] Polcino Milles, C., The Early History of Group Rings, em Groups St. Andrews - 1981, editado por C. M. Campbell and E. F. Robertson, London Math. Soc., Lectures Notes Series **71**, Cambridge Univ. Press, London, pp 270-280, 1982.

[60] Polcino Milies, C. & Ritter, J. & Sehgal, S. K., On a conjecture of Zassenhaus on torsion units in integral group rings II, Proc. Amer. Math. Soc. **97(2)**, pp 206-210 (1986).

[61] Polcino Milies, C. & Sehgal, S. K., Torsion Units in integral group rings of metacyclic groups, J. Numb. Th. **19**, pg 103-114 (1984).

[62] Polcino Milies, C. & Sehgal, S. K., *Group Rings: an introduction*, não publicado.

[63] Ritter, J. & Sehgal, S. K., Units of Group Rings of Solvable and Frobenius Groups over Large Rings of Cyclotomic Integers, J. Alg. **158**, pp 116-129 (1993).

[64] Robinson, D. J. S., *A Course in the Theory of Groups*, (segunda edição) Spriger-Verlag, New York 1996.

[65] Roggenkamp, K. W., Zur Einheitengruppe der ganzzahligen Grupperinge metazyklicher Frobeniusgruppen, Arch. Math. **35**, pp 263-266 (1980).

[66] Roggenkamp, K. W., *The Isomorphism Problem and units in group rings of finite groups*, Groups - St. Andrews 1981; Lec. Notes Series **71**, London Math. Soc., Ed. C. M. Campbell & E. F. Robertson.

[67] Roggenkamp, K. W., The isomorphism problem for integral group rings of finite groups, Progress in Math. **95**, pp 193-220 (1991).

[68] Roggenkamp, K. W., *Structure of Integral Group Rings*, Sem. Algèbre P. Dubreil et M-P Molliarin, Lec. Notes Math. **867**, pp 421-440; Springer-Verlag, 1981.

[69] Roggenkamp, K. W., The isomorphism problem for finite group rings, Contemp. Math. **131**(1), pp 285-298 (1992).

[70] Roggenkamp, K. W. & Scott, L. L., Isomorphisms for $p$-adic group rings, Ann. Math. **126**, pp 593-647 (1987).

[71] Roggenkamp, K. W. & Taylor, M. J., *Group Rings and Class Groups*, Birkhäuser Verlag, Basel 1992.

[72] Roggenkamp, K. W. & Zimmermann, A., On the isomorphism problem for integral group rings of finite groups, Arch. Math. **59**, pp 534-544 (1992).

[73] Rotman, J. J., *An Introduction to the Theory of Groups*, (Quarta edição) Spriger-Verlag, New York 1995.

[74] Sandling, R., Graham Higman's Thesis "Units in Group Rings", Integral Representations and Applications (Proc. Conference at Oberwolfach 1980), Lec. Not. Math. **882**, pp 92-116, Springer-Verlag (1981).

[75] Sandling, R., *The Isomorphism Problem for group Rings*, Lec. Notes Pur. Appl. Alg. **1142**, pp 258-288, Springer, Berlin (1985).

[76] Sandling, R., Group rings of circle groups and unit groups, Math. Zeitsch. **140**, pp 195-202 (1992).

[77] Scott, L. L., Recent Progress on the Isomorphism Problem, Proc. Sym. Pure Math. **47**, pp 259-273 (1987).

[78] Scott, L. L., Defect groups and the isomorphism problem, Astérisque **181-182**, pp 217-262 (1990) - Proc. Colloq. Luminy, França.

[79] Scott, L. L., On a Conjecture of Zassenhaus and beyond, Contemp. Math. **131**, pp 325-343 (1992).

[80] Scott, W. R., *Group Theory*, Dover 1987.

[81] Sehgal, S. K., *Topics in Group Rings*, Marcel Dekker, 1978.

[82] Sehgal, S. K., *Units in Integral Group Rings*, Longman's, Essex (1993).

[83] Sehgal, Sudarshan K. & Sehgal, Surinder K. & Zassenhaus, H., Isomorphism of integral group rings of abelian by nilpotent class two groups, Comm. Alg. **12**(19), pp 2401-2407 (1984).

[84] Shirvani, M. & Wehrfritz, B. A. F., *Skew Linear Groups*, London Math. Soc. Lec. Notes Series **118**, Cambridge University Press, Cambridge, 1986.

[85] Suzuki, M., *Group Theory I*, Springer-Verlag, 1982.

[86] Suzuki, M., *Group Theory II*, Springer-Verlag, New York 1986.

[87] Tsuzuku, T., *Finite groups and finite geometries*, Cambridge University Press, 1982.

[88] Valenti, A., Torsion Units in Integral Group Rings, Proc. Amer. Math. Soc. **120(1)**, pp 1-4 (1994).

[89] Weir, A. J., Sylow $p$-subgroups of the classical groups over finite fields with characteristic prime to $p$, Proc. Am. Math. Soc. **6**, pp 529-533 (1955).

[90] Weiss, A., Torsion units in integral group rings, J. Reine Angew. Math. **415**, pp 175-181 (1991).

[91] Weiss, A., Rigidity of $p$-adic torsion, Ann. Math. **127**, pp 317-332 (1988).

[92] Wielandt, H., Über die Existenz von Normalteilern in endlichen Gruppen, Math. Nachr. **18**, pp 274-280 (1958).

[93] Wingen, H., On the Wedderburn Structure of Some Integral Group Rings, J. Alg. **171**, pp 294-327 (1995).

[94] Zassenhaus, H., Über endliche Fastkörper, Abhand. Math. Sem. **11**, pp 187-221 (1936).