

**Decaimento da solução  
para a equação da onda**

**Antonio Ronaldo Gomes Garcia**

**DISSERTAÇÃO APRESENTADA  
AO  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA  
DA  
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
PARA  
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE  
EM  
MATEMÁTICA**

Área de concentração: Análise  
Orientador: Prof. Alfredo Jorge Aragona Vallejo

*Durante a elaboração deste trabalho, o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES-UERN.*

São Paulo, 08 de junho de 2001

## Decaimento de solução para a equação da onda

Este exemplar corresponde à redação  
final da dissertação devidamente corrigida  
e defendida por Antonio Ronaldo Gomes Garcia  
e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, 08 de junho de 2001.

Banca examinadora:

- Prof. Dr. Alfredo Jorge Aragona Vallejo (orientador) - MAT - IME- USP
- Prof. Dr. Oswaldo Rio Branco de Oliveira - MAT- IME - USP
- Prof. Dr. Clodoaldo Grotta Ragazzo - MAP - IME - USP

## Resumo

Conhecendo a solução da equação da onda na presença de um obstáculo, chamada de solução exterior, cuja existência é provada em [5], capítulo  $V$ , passamos a questionar sobre o seu comportamento na vizinhança de um ponto fixado  $x_0$  em seu domínio. O primeiro trabalho nesta direção foi feito por C. H. Wilcox [11], mostrando que, se o obstáculo é esférico, então a taxa de decaimento é minimamente tão rápida quanto exponencial. Em seguida, Cathleen Morawetz [6], em seu trabalho mostrou que, se o obstáculo é estrelado, então a solução, minimamente decai tão rapidamente quanto  $1/\sqrt{t}$ .

Neste trabalho, fazemos um estudo detalhado deste resultado desenvolvido por Cathleen Morawetz em [6]. O tema central é o decaimento, local, da solução da equação da onda na presença de um obstáculo. Aqui, o obstáculo é visto como um subconjunto do  $\mathbb{R}^3$  compacto, estrelado de fronteira suave. Enunciamos e provamos, de forma elementar, que o decaimento da solução da equação da onda é minimamente tão rápido quanto  $1/\sqrt{t}$ . Mas antes provamos que, localmente, a energia minimamente decai tão rapidamente quanto  $1/t$ .

## Abstract

Once we know the solution of the wave equation on a domain outside the obstacle, called exterior solution, which existence is proved in [5], chapter *V*, we question about its behavior in a neighborhood of a fixed point  $x_0$  in the domain. The first work in this direction was done by C. H. Wilcox [11], who showed that if the obstacle is spherical, then the rate of decay is at least exponential. After Cathleen Morawetz [6], showed that if the obstacle is star-sharped, then the rate of decay is at least  $1/\sqrt{t}$ .

In this work, we study in detail the result developed by Cathleen Morawetz [6]. The main result is the local decay of the solution of the wave equation in the presence of an star-sharped obstacle. Therefore we will define an star-sharped obstacle as a stated compact subset of  $\mathbb{R}^3$  with a smooth boundary. We state and prove in an elementary way that the solution of the wave equation decays out at least as  $1/\sqrt{t}$ . Before that we proved the energy decay out, locally, at least as  $1/t$ .

A minha mãe e filhos,  
pelo apoio e confiança durante todos estes anos.

---

# Agradecimentos

Este trabalho foi realizado graças a todos aqueles que acreditaram na sua realização e, portanto, aqui vão meus sinceros agradecimentos.

- Agradeço a Deus por ter me dado forças para continuar lutando e acreditando em meu potencial.
- Aos meus pais, Expedito (in memorian) e Maria das Dores, pois sem eles não estaria vencendo mais esta etapa da minha vida. E a meus filhos Gelson e Hozana Raquel que aprenderam a me amar mesmo estando ausente.
- Ao professor Oswaldo Rio Branco por ter me oferecido o tema, além de suas sugestões e correções durante o desenvolvimento desta dissertação.
- Ao professor Aragona que aceitou orientar-me neste trabalho.
- À banca examinadora pela sua contribuição no trabalho.
- Aos professores do IME-USP que em muito contribuíram para minha formação matemática, em especial as professoras Elvia Mureb sallum, Elza F. Gomide e Carmem S. Cardassi (in memorian).
- Aos professores do Departamento de Matemática e Estatística da Universidade Estadual do Rio Grande do Norte-UERN.
- À administração superior da UERN por valorizar a idéia da qualificação funcional, em particular do seu corpo docente.

- Aos colegas que durante o presente trabalho testemunharam meu esforço e dedicação, dentre os quais cito: Jocirei, Emivan, Adriana, Maria do Carmo, Jefferson, Edna, Marcelo, Jorge Zavaleta, Ramiro, Gaspar, German, Walter, Luciana, Irene, José Villena, Cecília, Pablo, Claus (que muito me ajudou a me familiarizar com LaTeX), Márcio, Samuel, Placido (Maranhão), David, Calixto, Antonio Chávez, Mário, Daniel, Raul, Edson (Rolo), Bárbara; enfim, à família IME-USP.
- Aos professores do Departamento de Engenharia da Escola Superior de Agricultura de Mossoró e, em especial, aos professores Edmilson e Alcindo Junior.
- Ao professor Matos (da UFPB), que ministrou a disciplina de EDP no curso de verão-2001 na UFPE em Recife, e seus orientandos de mestrado Cícero, Luciana e Paulo.
- Aos alunos de graduação em Matemática da UERN, em especial Laudelino, João e Elias por me ouvirem durante os seminários sobre minha dissertação.
- À Jeovanizélio Firmino (ex-aluno e colega de docência) e sua esposa Rita Quirino pelo apoio jamais negado.
- Aos colegas da Turma Diferente ( $\neq$ ) que sempre lutaram por um ensino de qualidade, em especial Sidney, Saturnino, Junior (colega de Departamento) e Lacôncia.
- A Maria do Carmo pelos seus conselhos e companheirismo, sempre disposta a ajudar.
- A mi hermano Jorge Brisset por honrarme con su presencia.
- Aos meus irmãos: Lúcia, Marta (por muito que tem feito), Francisco de Assis e José Olímpio.
- As meninas da copa: Dalvina Mendes, Dona Maria e Juvita.
- À Dona Maria e seu José, donos da república onde viver quando em São Paulo.

Se desejas um aluno excepcional não me convides, mas se queres alguém para lutar até a morte por teus objetivos, quando comum aos meus, aqui estou.

---

# Índice

Lista de Figuras	xiv
Introdução	1
<b>1 Conceitos básicos</b>	<b>5</b>
1.1 Problema de Cauchy para a equação da onda . . . . .	6
1.2 Conservação da energia para onda livre . . . . .	10
1.3 Solução no semi-espaço . . . . .	11
1.3.1 Método das médias esféricas ( $n$ ímpar) . . . . .	11
1.3.2 Método da redução de Hadamard ( $n$ par) . . . . .	17
1.4 Princípio de Huyghen . . . . .	18
<b>2 Decaimento da solução</b>	<b>21</b>
2.1 Identidades básicas. . . . .	22
2.2 Conservação da energia na presença de obstáculo . . . . .	22
2.3 Decaimento da solução. . . . .	27
<b>A Identidades de Green</b>	<b>45</b>



A.1 Identidades de Green . . . . .	49
Referências Bibliográficas	55
Índice Remissivo	57

---

# Lista de Figuras

1.1	Região de influência. . . . .	6
1.2	Cone de luz. . . . .	7
1.3	Cone de luz rebatido. . . . .	9
1.4	Região cônica . . . . .	9
2.1	Obstáculo $\mathcal{B} = \mathbb{R}^3 - \Omega$ . . . . .	23
2.2	Região $\mathcal{D} = \Omega \times [0, t_1]$ , $\Omega = (\mathbb{R}^3 - \mathcal{B})$ . . . . .	24
2.3	Corpo estrelado: bolas concêntricas. . . . .	29
2.4	Corpo estrelado em relação à origem. . . . .	34
2.5	Região cilíndrica. . . . .	36



---

# Introdução

Neste trabalho pretendemos estudar o decaimento local da solução, suave <sup>1</sup>, do problema

$$\begin{cases} \square u = \Delta u - u_{tt} = 0, \forall x \in \Omega \text{ e } \forall t \in \mathbb{R}^+ \\ u(x, 0) = f(x), \forall x \in \Omega \\ u_t(x, 0) = g(x), \forall x \in \Omega \\ u(x, t) = 0, \forall x \in \partial\mathcal{B} \text{ e } \forall t \in \mathbb{R}^+ \end{cases} \quad (1)$$

onde  $\mathcal{B} = \mathbb{R}^3 - \Omega$  é um corpo estrelado com fronteira  $\partial\mathcal{B}$  suave e  $f, g$  são funções suficientemente regulares. Este tema foi desenvolvido por Cathleen Morawetz [6], onde ficou estabelecido que se o corpo refletor  $\mathcal{B}$  é estrelado, compacto e com  $\partial\mathcal{B}$  suave (localmente gráfico de uma função  $C^\infty$ ), então a solução minimamente decai tão rapidamente quanto  $1/\sqrt{t}$ .

Sabendo-se que, em todo ponto, a perturbação pode ser medida em termos de energia, espera-se que toda a energia e, portanto, a perturbação, também viaje para o infinito. Naturalmente, se um corpo é denteado (ou tem configuração irregular) a taxa de decaimento será diminuída pela reflexão devida às reverberações produzidas pela denteação.

O fluxo de energia para soluções da equação da onda na presença de um corpo refletor pode ser analisado com variantes graus de refinamento, usando desigualdades quadráticas, o princípio de Huyghen e Ótica geométrica. As relações existentes entre estas técnicas e sua validade em cada caso são discutidas em [7]. Adotamos para esta dissertação a técnica

---

<sup>1</sup>Suave é o mesmo que suficientemente diferenciável.

das desigualdades quadráticas usando o multiplicador

$$x \cdot \nabla u + tu_t + u.$$

O objetivo, é transformar

$$(x \cdot \nabla u + tu_t + u)\square u$$

em um campo vetorial  $G$  em  $\mathbb{R}^4$ . Esta transformação será utilizada na prova do Teorema 2.3.5 o qual estabelece que, fixada uma região compacta  $\mathcal{R}$ , a energia, concentrada na região  $\mathcal{R}$ , no instante  $t$ , dada por  $E(\mathcal{R}, t)$  minimamente decai tão rapidamente quanto  $1/t$ .

Façamos agora uma breve descrição do trabalho. No Capítulo 1 reunimos alguns resultados sobre o problema de Cauchy para a equação da onda, tais como: existência da solução, princípio da conservação de energia para a onda livre e unicidade da solução do problema de valor inicial para a equação da onda em  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  e em  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ , considerando a equação da onda homogênea com velocidade de propagação unitária e dados iniciais suficientemente regulares e, ainda, comentamos um pouco sobre o princípio de Huyghen.

Na Seção 1.1 apresentamos o problema de Cauchy para a equação da onda. Enunciamos na Seção 1.2 o princípio da conservação de energia para a onda livre, que constitui uma ferramenta importantíssima para sistemas lineares, pois é deste princípio que sai a prova da unicidade de solução para a maioria dos problemas em equações diferenciais parciais lineares, em particular para a equação da onda, objeto de nossos estudos. Na Subseção 1.3.1 construímos a solução para o problema de Cauchy para a equação da onda no semi-espaco, usando o método das médias esféricas para dimensão espacial ímpar. Na Subseção 1.3.2 usamos o método da redução de Hadamard, que é aplicado quando a dimensão espacial é par. Encerramos o Capítulo com a Seção 1.4 que estuda o comportamento da solução para dimensões par e ímpar e estudamos o princípio de Huyghen.

No Capítulo 2 concentram-se todos os resultados desta dissertação, que estão dispostos em três seções que descreveremos sucintamente. A Seção 2.1 apresenta as identidades básicas para a conversão da equação

$$(x \cdot \nabla u + tu_t + u)\square u$$

em um campo  $G$  em  $\mathbb{R}^4$  as quais serão aplicadas, como já mencionado, na prova do Teorema 2.3.5. A Seção 2.2 apresenta a prova do princípio da conservação de energia na presença de um obstáculo, donde obtemos a prova da unicidade da solução para o problema (1). Ainda nesta direção, apresentamos uma prova (Corolário 2.2.5) da limitação de  $u$ , na  $\|\cdot\|_2$  independentemente do tempo. A última, Seção 2.3, destina-se à prova do decaimento da solução para o problema (1) (Teorema 2.3.6) e para tal, previamente, demonstramos o decaimento, local, da energia (Teorema 2.3.5).

Este trabalho ainda dispõe no Apêndice A, da apresentação de alguns resultados básicos sobre Equações Diferenciais Parciais (EDP's), alguns com demonstrações, úteis à sua consecução e também para torná-lo de leitura auto-suficiente e acessível a estudantes de mestrado.



## Conceitos básicos

Apresentamos neste capítulo alguns conceitos básicos sobre a teoria do operador da onda (ou d'alembertiano) que serão úteis para os nossos propósitos. Para esta exposição seguiremos basicamente o Capítulo 5 de [2], além das referências [1] e [4].

Iniciamos fazendo uma análise da equação da onda 1-dimensional

$$u_{xx} - u_{tt} = 0, \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$

onde  $x$  representa o ponto material na corda,  $t$  o tempo e a função  $u(x, t)$  descreve a posição do ponto material  $x$  na corda no instante  $t$ . Aqui, estamos considerando a equação da onda homogênea com velocidade de propagação unitária.

O seguinte resultado é bem simples, porém muito ilustrativo.

**Proposição 1.0.1.** *Se  $u \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$  satisfaz à equação da onda*

$$u_{xx} - u_{tt} = 0,$$

*então existem funções  $f, g \in C^2(\mathbb{R})$  tais que*

$$u(x, t) = f(x + t) + g(x - t). \quad (1.1)$$

**Observação 1.0.1.** *Toda função dada pela fórmula (1.1) é uma solução de  $u_{xx} - u_{tt} = 0$ .*

Como consequência da fórmula (1.1), temos que o problema de Cauchy para equação da onda 1-dimensional

$$\begin{cases} u_{xx} - u_{tt} = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ e } \forall t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) = g(x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (1.2)$$



tem como solução, supondo regularidade suficiente, a função

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[f(x+t) + f(x-t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} g(s) ds \quad (1.3)$$

conhecida como a Fórmula de d'Alembert .

Supondo que  $f$  e  $g$  têm suportes compactos contidos no intervalo  $[a, b]$ , aqui denominado domínio de influência dos dados iniciais, segue como consequência da fórmula (1.3) que  $u$  é nula fora da região de influência dos dados iniciais , hachurada na figura 1.1

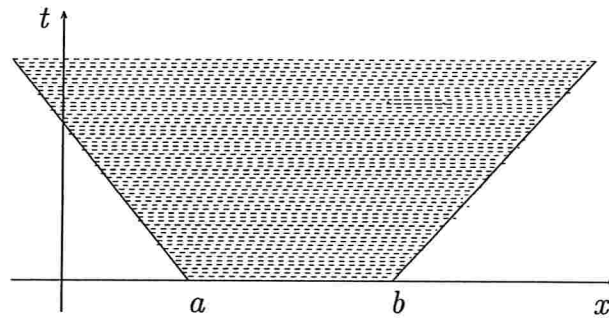


Figura 1.1: Região de influência.

## 1.1 Problema de Cauchy para a equação da onda

Denotando por  $P = P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial^\alpha$  um operador diferencial parcial linear (ODPL) de ordem  $m$  (isto é,  $\exists \alpha \in \mathbb{N}^n$  com  $|\alpha| = m$  e  $a_\alpha \neq 0$ ) com coeficientes em  $C^\infty(\Omega)$ , temos que seu símbolo principal, em um ponto  $x \in \Omega$ , é o polinômio homogêneo de ordem  $m \in \mathbb{N}$

$$P_m(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) \xi^\alpha, \quad \forall x \in \Omega \text{ e } \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Um vetor  $\xi$  é dito característico para  $P$ , no ponto  $x_0 \in \Omega$ , se  $P_m(x_0, \xi) = 0$ . O conjunto

$$\{\xi \in \mathbb{R}^n : P_m(x_0, \xi) = 0\}$$

denominamos de variedade característica de  $P$  no ponto  $x_0$ .

Uma hipersuperfície  $S$  é dita característica para  $P$ , no ponto  $x_0$ , se  $\nu = \nu(x_0)$ , o vetor normal à  $S$  no ponto  $x_0$ , é um vetor característico . Dizemos que  $S$  é não-característica se não é característica em nenhum ponto.

No caso particular do operador d'alembertiano

$$\square = \sum_{j=1}^n \partial_{x_j}^2 - \partial_t^2; \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \text{ e } t \geq 0$$

temos que seu símbolo principal é, em todo ponto, o polinômio

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\xi, \tau) &\longmapsto \|\xi\|^2 - \tau^2 \end{aligned}$$

e conseqüentemente sua variedade característica é o cone

$$\Gamma = \{(\xi, \tau) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \|\xi\|^2 = \tau^2\}$$

denominado cone de luz . Esquemáticamente, temos a figura 1.2

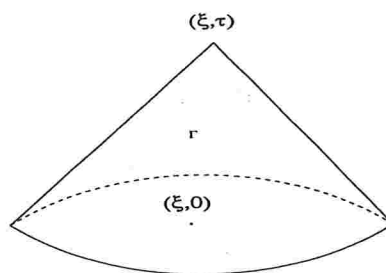


Figura 1.2: Cone de luz.

Construções simples (exemplo de Hadamard (ver [2])) mostram que não é suficiente os dados iniciais serem pré-determinados sobre uma hipersuperfície não-característica para que o problema de Cauchy seja bem posto (isto é: existência, unicidade e dependência contínua com respeito aos dados iniciais e/ou de fronteira).

Um problema de Cauchy consiste em determinar uma solução  $u$ , suave, da equação diferencial parcial (de ordem  $m$ )

$$F[x, (\partial^\alpha u)_{|\alpha| \leq m}] = 0, \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ e } m \in \mathbb{N},$$

$\Omega$  um subconjunto aberto em  $\mathbb{R}^n$ , tendo como dados iniciais  $m$  funções  $\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{m-1}$

definidas sobre uma hipersuperfície  $S$ , não-característica, contida em  $\Omega$ , tais que

$$\begin{cases} u|_S = \phi_0 \\ \partial_\nu u|_S = \phi_1 \\ \vdots \\ \partial_\nu^{m-1} u|_S = \phi_{m-1}. \end{cases}$$

onde  $\partial_\nu^j u$  é a  $j$ -ésima derivada de  $u$  na direção normal. Temos, então, que o problema

$$\begin{cases} \square u = \Delta u - \partial_t^2 u = 0, \forall (x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \\ u(x, 0) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}^n \\ u_t(x, 0) = g(x), \forall x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (1.4)$$

é um problema de Cauchy em  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ , pois o hiperplano

$$\{(x, 0) : x \in \mathbb{R}^n\}$$

é uma hipersuperfície não-característica, visto que o vetor normal  $\nu = (0, 1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  é não-característico.

Agora, observando que o operador da onda é invariante em tempos reversos

$$(x, t) \mapsto (x, -t),$$

vemos que é suficiente considerarmos soluções no semi-espço  $t \geq 0$ , pois resultados similares podem ser obtidos para  $t \leq 0$ .

Passamos, então, ao estudo do problema de Cauchy (1.4) com  $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$ . Entretanto, neste caso, ocorre que o vetor normal à superfície não-característica (o hiperplano  $t = 0$ ) está no interior do cone de luz

$$\Gamma = \{(\xi, \tau) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \|\xi\|^2 = \tau^2\}$$

qualquer que seja o ponto considerado no hiperplano  $t = 0$ . E, portanto, temos que o problema de Cauchy é bem posto.

Supomos também conhecido o teorema abaixo, o qual implica na unicidade da solução (ver [2]) e que estabelece que o valor de uma solução para a equação da onda em um ponto  $(x_0, t_0)$  depende apenas dos valores dos dados iniciais na “bola”

$$\{(x, 0) : \|x - x_0\| \leq t_0\}$$

vide figura 1.3

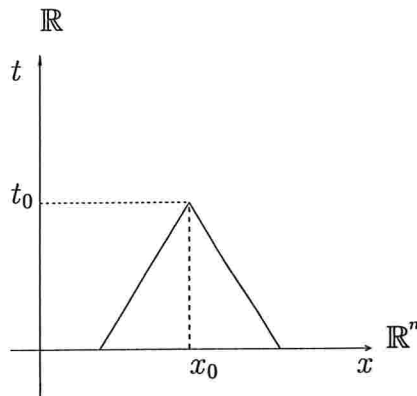


Figura 1.3: Cone de luz rebatido.

**Teorema 1.1.1.** *Suponhamos que  $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+)$  e que*

$$\square u = \Delta u - \partial_t^2 u = 0.$$

*Suponhamos, também que  $u = \partial_t u = 0$  na bola*

$$\mathcal{B} = \{(x, 0) : \|x - x_0\| \leq t_0\}$$

*contida no hiperplano  $t = 0$ , onde  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  e  $t_0 > 0$ . Então  $u$  é nula na região cônica*

$$\Gamma = \{(x, t) : 0 \leq t \leq t_0 \text{ e } \|x - x_0\| \leq t_0 - t\}.$$

Esquemáticamente temos a figura 1.4

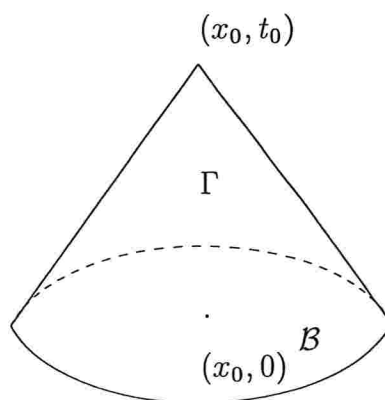


Figura 1.4: Região cônica

Inversamente, os dados de Cauchy em uma região  $\mathcal{R}$ , contida no hiperplano  $t = 0$ , influenciam apenas os pontos de  $\mathbb{R}^n \times [0, +\infty)$  que pertencem ao cone de luz que irradia de  $\mathcal{R}$ .

## 1.2 Conservação da energia para onda livre

É sabido também que a equação da onda é um sistema conservativo. Isto é, a energia total é constante. Porém a energia é, em geral, um funcional positivo dos dados iniciais do sistema; para sistemas governados por equações lineares, a energia é uma forma quadrática definida positiva. A conservação de energia implica que, se no instante inicial a energia é nula, então a energia é nula para todo instante  $t$ ; para sistemas lineares, que é o caso da equação da onda, concluímos que as soluções são unicamente determinadas por seus dados iniciais. Para soluções com dados iniciais não-nulos, a conservação de energia fornece a priori uma limitação que, quando combinada com técnicas de projeções ortogonais, conduz a uma prova da existência de soluções com dados iniciais de energia finita (ver [7]). A equação da onda é um sistema conservativo, i.e., a energia é constante, se os dados iniciais  $f$  e  $g$  são funções suficientemente regulares. Mais precisamente, temos o resultado:

**Proposição 1.2.1.** *Consideremos o problema*

$$\begin{cases} \square u = \Delta u - \partial_t^2 u = 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall t \geq 0 \\ u(x, 0) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}^n \\ \partial_t u(x, 0) = g(x), \forall x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

onde  $f, g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Então temos

$$E(t) = \int_{\mathbb{R}^n} (\|\nabla u\|^2 + u_t^2) dx \tag{1.5}$$

é constante. Isto é, vale a conservação de energia.

## 1.3 Solução no semi-espaço

Nesta seção desejamos construir soluções para o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \square u = \Delta u - \partial_t^2 u = 0, \forall x \in \mathbb{R}^n \text{ e } \forall t \geq 0 \\ u(x, 0) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}^n \\ \partial_t u(x, 0) = g(x), \forall x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (1.6)$$

Para tanto, apresentamos duas técnicas de resolução para o Problema (1.6) em um semi-espaço; uma é a técnica das médias esféricas, para quando a dimensão espacial for ímpar, e a outra proveniente desta, é o método da redução de Hadamard para quando a dimensão espacial é par (considera-se a solução para  $n$  ímpar obtidas das médias esféricas fazendo  $x_{n+1} = 0$ .)

### 1.3.1 Método das médias esféricas ( $n$ ímpar)

O método das médias esféricas, devido a Poisson, consiste em dar uma solução radial para o Problema (1.6). Inicialmente façamos as seguintes definições:

**Definição 1.3.1.** Se  $\phi$  é uma função contínua sobre  $\mathbb{R}^n$  definimos a média esférica  $M_\phi(x; r)$  por

$$M_\phi(x; r) = \frac{1}{\omega_n} \int_{S_1(0)} \phi(x + ry) d\sigma(y), \quad x \in \mathbb{R}^n \text{ e } r \in \mathbb{R}.$$

**Definição 1.3.2.** Se  $\phi$  é uma função contínua sobre  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ , definimos  $M_\phi(x; r, t)$ , fixados  $t$  e  $r$  a média esférica de  $\phi$ , considerada como uma função apenas da variável  $x$ , por

$$M_\phi(x; r, t) = \frac{1}{\omega_n} \int_{S_1(0)} \phi(x + ry, t) d\sigma(y).$$

As funções definidas em 1.3.1 e 1.3.2 são pares na variável  $r$ , são de classe  $C^{k+1}$  se  $\phi$  for de classe  $C^k$ ,  $M_\phi(\cdot; 0) = \phi(\cdot)$ . E ainda, se  $\phi \in C^2$ , então  $M_\phi$  satisfaz a equação diferencial de Darboux (ver [4]):

$$\Delta_x M_\phi = \left( \partial_r^2 + \frac{n-1}{r} \partial_r \right) M_\phi.$$

Temos, o resultado abaixo:

**Proposição 1.3.1.** *Se  $u$  satisfaz (1.6) então, para cada  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $M_u(x; r, t)$  satisfaz*

$$\begin{cases} (\partial_r^2 + \frac{n-1}{r}\partial_r)M_u = \partial_t^2 M_u \\ M_u(x; r, 0) = M_f(x; r) \\ \partial_t M_u(x; r, 0) = M_g(x; r). \end{cases}$$

**Observação 1.3.1.** *Visto que*

$$\partial_r^2 + \frac{n-1}{r}\partial_r$$

*é o Laplaciano para funções radiais sobre  $\mathbb{R}^n$  (conforme em [4]), a Proposição 1.3.1 diz que a função*

$$v(y, t) = M_u(x; \|y\|, t)$$

*satisfaz a equação da onda.*

Quando a dimensão espacial é ímpar a equação

$$\left(\partial_r^2 + \frac{n-1}{r}\partial_r\right)M_u = \partial_t^2 M_u,$$

conhecida como a equação de Euler-Poisson-Darboux (vide [4]), pode ser reduzida a uma equação da onda 1-dimensional. E é com este propósito que enunciamos:

**Lema 1.3.2.** *Se  $\phi \in C^{k+1}(\mathbb{R})$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$ , então,  $\forall r \neq 0$ , temos*

$$\frac{d^2}{dr^2} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right)^{k-1} [r^{2k-1}\phi(r)] = \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right)^k \left[r^{2k} \frac{d}{dr}\phi(r)\right]. \quad (1.7)$$

*Prova.* Vamos demonstrar por indução sobre  $k$ . Se  $k = 1$ , a fórmula é verdadeira, pois

$$\frac{d^2}{dr^2} [r\phi(r)] = \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right) \left[r^2 \frac{d}{dr}\phi(r)\right].$$

Suponhamos que a mesma é verdadeira para  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k > 1$ , isto é, vale (1.7). Mostremos, então que, ela se verifica para  $k + 1$ , isto é,

$$\frac{d^2}{dr^2} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right)^k [r^{2k+1}\phi(r)] = \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right)^{k+1} \left[r^{2k+2} \frac{d}{dr}\phi(r)\right].$$

De fato, desenvolvendo o primeiro membro da fórmula acima, obtemos

$$\frac{d^2}{dr^2} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right)^k [r^{2k+1}\phi(r)] = \frac{d^2}{dr^2} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right)^{k-1} \left[r^{2k-1} \left((2k+1)\phi(r) + r \frac{d}{dr}\phi(r)\right)\right].$$

Usando a hipótese de indução para a função

$$\psi(r) = (2k + 1)\phi(r) + r \frac{d}{dr} \phi(r),$$

vem

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dr^2} \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^k [r^{2k+1} \phi(r)] &= \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^k \left[ r^{2k} \frac{d}{dr} \left( (2k + 1)\phi(r) + r \frac{d}{dr} \phi(r) \right) \right] \\ &= \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^{k+1} \left[ r^{2k+2} \frac{d}{dr} \phi(r) \right]. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{d^2}{dr^2} \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^k [r^{2k+1} \phi(r)] = \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^{k+1} \left[ r^{2k+2} \frac{d}{dr} \phi(r) \right] \quad (1.8)$$

como queríamos provar. ■

Para uma aplicação futura, definiremos um operador linear de entrelaçamento.

**Definição 1.3.3.** *Sejam  $A$ ,  $B$  e  $T$  operadores lineares. Dizemos que  $T$  entrelaça  $A$  e  $B$  se  $AT = TB$ . Neste caso, dizemos que  $T$  é um operador linear de entrelaçamento.*

**Exemplo 1.3.3.** *Seja  $\phi \in C^{k+1}(\mathbb{R})$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$ . Definimos o operador linear  $T_k$  por*

$$(T_k \phi)(r) = \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^{k-1} [r^{2k-1} \phi(r)]. \quad (1.9)$$

Então  $T_k$  entrelaça os operadores

$$A = \frac{d^2}{dr^2} \text{ e } B = \left( \frac{d^2}{dr^2} + 2kr^{-1} \frac{d}{dr} \right).$$

*Prova.* De fato, notemos que o segundo membro de (1.7) é igual a:

$$\left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^{k-1} \left[ r^{2k-1} \left( \frac{d^2}{dr^2} + 2kr^{-1} \frac{d}{dr} \right) \phi(r) \right]. \quad (1.10)$$

Logo, aplicando sucessivamente (1.9), o Lema 1.3.2 e a identidade (1.10), temos

$$\begin{aligned} A(T_k \phi(r)) &= \frac{d^2}{dr^2} [T_k \phi(r)] \\ &= \frac{d^2}{dr^2} \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^{k-1} [r^{2k-1} \phi(r)] \\ &= \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^k \left[ r^{2k} \frac{d}{dr} \phi(r) \right] \\ &= \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^{k-1} \left[ r^{2k-1} \left( \frac{d^2}{dr^2} + 2kr^{-1} \frac{d}{dr} \right) \phi(r) \right] \\ &= \left[ T_k \left( \frac{d^2}{dr^2} + 2kr^{-1} \frac{d}{dr} \right) \phi(r) \right] \\ &= T_k(B\phi(r)) \end{aligned}$$



o que prova

$$A(T_k \phi(r)) = T_k(B\phi(r)). \quad (1.11)$$

Isto é,  $T_k$  é um operador de entrelaçamento. ■

Estamos aptos, finalmente, a reduzir a equação diferencial de Euler-Poisson-Darboux a uma equação da onda 1-dimensional. De fato, supondo que  $M_u \in C^{k+1}(\mathbb{R})$  e aplicando o operador  $T_k$  a ambos os membros da equação diferencial de Euler-Poisson-Darboux com  $n$  ímpar,  $n = 2k + 1$ , temos

$$T_k(\partial_r^2 + 2kr^{-1}\partial_r)M_u = T_k\partial_t^2 M_u \implies \partial_r^2 T_k M_u = \partial_t^2 T_k M_u.$$

Portanto, se  $u$  satisfaz a equação da onda  $n$ -dimensional,  $n = 2k + 1$ , então  $T_k M_u$  satisfaz a equação da onda 1-dimensional (em  $r$  e  $t$ ).

Retornemos ao Problema (1.6), no caso em que a dimensão espacial  $n$  é ímpar e maior ou igual a 3. Para isto, supondo que existe a solução  $u$  de (1.6). Exibiremos tal função, e em seguida mostraremos que  $u$  é de fato a solução.

Suponhamos que  $u$  satisfaz (1.6) e que  $u, f, g$  são funções diferenciáveis, pelo menos de classe  $C^{\frac{n+3}{2}}$ . Pela Proposição 1.3.1 a média esférica  $M_u$  satisfaz a equação diferencial de Euler-Poisson-Darboux com dados iniciais

$$\begin{cases} M_u(x; r, 0) = M_f(x; r) \\ \partial_t M_u(x; r, 0) = M_g(x; r). \end{cases}$$

Portanto, se definirmos

$$\begin{cases} v(r, t) = TM_u(x; r, t), x \in \mathbb{R}^n, r = \|x\| \text{ e } t \in \mathbb{R} \\ \phi(r) = TM_f(x; r), \forall x \in \mathbb{R}^n, r \in \mathbb{R} \\ \psi(r) = TM_g(x; r), \forall x \in \mathbb{R}^n, r \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

onde  $T$  é o operador linear de entrelaçamento para  $k = \frac{n-1}{2}$ , i.e.,

$$T(\phi) = T_{(\frac{n-1}{2})}(\phi) = \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right)^{\frac{n-3}{2}} [r^{n-2}(\phi)],$$

então por consequência imediata do fato que  $T$  é um operador linear de entrelaçamento e da Proposição 1.3.1,  $v$  satisfaz

$$\begin{cases} \partial_r^2 v(r, t) = \partial_t^2 v(r, t), \forall (r, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ v(r, 0) = \phi(r), \forall r \in \mathbb{R} \\ \partial_t v(r, 0) = \psi(r), \forall r \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Portanto,  $v$  é solução de um problema de Cauchy 1-dimensional cuja solução é dada por (1.3), i.e.,

$$v(r, t) = \frac{1}{2}[\phi(r+t) + \phi(r-t)] + \frac{1}{2} \int_{r-t}^{r+t} \psi(s) ds.$$

Recuperemos  $u$  a partir de  $v$ . A princípio, obtemos a  $M_u$  desfazendo o operador  $T$ , isto é, integrando sucessivamente ambos os lados de

$$v(r, t) = TM_u(x; r, t).$$

Então, obtida a  $M_u$  usamos a definição desta com  $r = 0$  e recuperamos a função  $u$ , já que  $M_u(x; 0, t) = u(x, t)$ .

**Observação 1.3.4.** Podemos fazer isto de um modo elementar notando que

$$(T_k \phi)(r) = \sum_{j=0}^{k-1} C_j^k r^{j+1} \frac{d^j}{dr^j} \phi(r), \quad (1.12)$$

onde  $C_j^k \in \mathbb{R}$  e, em particular, temos

$$C_0^k r = \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^{k-1} [r^{2k-1}] = 1.3.5. \dots (2k-1)r. \quad (1.13)$$

*Prova.* Pela definição do operador  $T_k$  dada em (1.9), podemos observar que as potências de  $r$  são dadas por

$$(2k-1) - (k-1-j) - (k-1) = j+1.$$

Provemos, por indução sobre  $k$ , a fórmula (1.13). Se  $k = 1$ , então

$$C_0^1 r = r$$

com  $C_0^1 = 1$ .

Suponhamos que (1.13) vale para um certo  $k$ ,  $k > 1$  e mostremos, que a mesma vale para  $k+1$ . Ora,

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^k [r^{2k+1}] &= \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^{k-1} \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) [r^{2k+1}] \\ &= \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^{k-1} [(2k+1)r^{2k-1}] \\ &= (2k+1) \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^{k-1} [r^{2k-1}]. \end{aligned}$$

Pela hipótese de indução, vem

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right)^k [r^{2k+1}] &= (2k+1)C_0^k r \\ &= 1.3.5. \dots (2k-1)(2k+1)r \\ &= C_0^{k+1} r. \end{aligned}$$

E, portanto,

$$\left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right)^k [r^{2k+1}] = C_0^{k+1} r.$$

Isto conclui a prova de (1.13). ■

Agora, aplicando o operador  $T = T_k$  conforme aparece em (1.12) para  $M_u$  com  $k = \frac{n-1}{2}$ , obtemos

$$\begin{aligned} v(r, t) &= TM_u(x; r, t) \\ &= \sum_{j=0}^{\frac{n-3}{2}} C_j^{\frac{n-1}{2}} r^{j+1} \partial_r^j M_u(x; r, t) \\ &= C_0^{\frac{n-1}{2}} r M_u(x; r, t) + \sum_{j=1}^{\frac{n-3}{2}} \alpha_j r^{j+1} \partial_r^j M_u(x; r, t) \quad (\text{onde } \alpha_j = \text{const.}) \\ &= 1.3.5. \dots (n-2)r M_u(x; r, t) + \sum_{j=1}^{\frac{n-3}{2}} \alpha_j r^{j+1} \partial_r^j M_u(x; r, t). \end{aligned}$$

Logo,

$$v(r, t) = 1.3.5. \dots (n-2)r M_u(x; r, t) + \sum_{j=1}^{\frac{n-3}{2}} \alpha_j r^{j+1} \partial_r^j M_u(x; r, t) \quad (1.14)$$

Finalmente, isolando a  $M_u$  em (1.14) e aplicando o limite quando  $r$  tende para 0, temos por L'Hôpital que

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \lim_{r \rightarrow 0} M_u(x; r, t) \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{1.3.5. \dots (n-2)r} v(r, t) \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{1.3.5. \dots (n-2)r} \left( \frac{1}{2} [\phi(r+t) + \phi(r-t)] + \frac{1}{2} \int_{r-t}^{r+t} \psi(s) ds \right). \end{aligned}$$

Visto que  $M_f$  e  $M_g$  são funções pares de  $r$ , segue de (1.9) que  $\phi = TM_f$  e  $\psi = TM_g$  são funções ímpares e, portanto,

$$u(x, t) = \frac{1}{1.3.5. \dots (n-2)} \lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{1}{2r} [\phi(t+r) - \phi(t-r)] + \frac{1}{2r} \int_{t-r}^{t+r} \psi(s) ds \right)$$

e pela definição de derivada, vem

$$u(x, t) = \frac{1}{1.3.5 \dots (n-2)} \left[ \partial_r \phi \Big|_{r=t} + \psi(t) \right]. \quad (1.15)$$

Se desenvolvermos a definição de  $\phi$  e  $\psi$ , obtemos a fórmula desejada para a função  $u$  em termos dos dados iniciais  $f$  e  $g$ . A mesma está explícita no seguinte:

**Teorema 1.3.5.** *Suponhamos que  $n$  é ímpar e  $n \geq 3$ . Se  $f \in C^{\frac{n+3}{2}}(\mathbb{R}^n)$  e  $g \in C^{\frac{n+1}{2}}(\mathbb{R}^n)$ , então a função*

$$u(x, t) = \frac{1}{1.3.5 \dots (n-2)\omega_n} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{[(n-3)/2]} t^{n-2} \int_{S_1(0)} f(x+ty) d\sigma(y) + \left( \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{[(n-3)/2]} t^{n-2} \int_{S_1(0)} g(x+ty) d\sigma(y) \right]. \quad (1.16)$$

resolve o Problema de Cauchy (1.6).

Quando  $n = 3$ , temos simplesmente

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( t \int_{S_1(0)} f(x+ty) d\sigma(y) \right) + t \int_{S_1(0)} g(x+ty) d\sigma(y) \right]$$

ou ainda,

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{t} \int_{S_t(x)} f(z) d\sigma(z) \right) \right] + \frac{1}{4\pi t} \int_{S_t(x)} g(z) d\sigma(z)$$

conhecida como fórmula de Kirchhoff.

### 1.3.2 Método da redução de Hadamard ( $n$ par)

A solução do Problema (1.6) para  $n$  par é obtida através da solução para  $n$  ímpar fazendo uso do método da redução de Hadamard. Isto é apenas uma consequência trivial da observação que, se  $u$  é uma solução da equação da onda em  $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}$ , a qual independe da variável  $x_{n+1}$ , então  $u$  satisfaz a equação da onda em  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  com  $n$  par. Neste caso, vemos os dados iniciais  $f$  e  $g$  como funções de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , porém independente da variável  $x_{n+1}$ , e, assim, escrevemos a solução do problema de Cauchy e verificamos que ela é também independente de  $x_{n+1}$ . De fato, temos o seguinte resultado:

**Teorema 1.3.6.** *Se  $n$  é par,  $f \in C^{(n+4)/2}(\mathbb{R}^n)$  e  $g \in C^{(n+2)/2}(\mathbb{R}^n)$ , então a solução do problema (1.6) é*

$$u(x, t) = \frac{2}{1.3.5. \dots (n-1)\omega_{n+1}} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{(n-2)/2} t^{n-1} \int_{B_1(0)} \frac{f(x+ty)}{\sqrt{1-\|y\|^2}} dy + \left( \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{(n-2)/2} t^{n-1} \int_{B_1(0)} \frac{g(x+ty)}{\sqrt{1-\|y\|^2}} dy \right]. \quad (1.17)$$

Para  $n = 2$  esta fórmula se reduz a:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{\partial}{\partial t} t \int_{B_1(0)} \frac{f(x+ty)}{\sqrt{1-\|y\|^2}} dy + t \int_{B_1(0)} \frac{g(x+ty)}{\sqrt{1-\|y\|^2}} dy \right].$$

## 1.4 Princípio de Huyghen

As fórmulas (1.3), (1.16) e (1.17) fornecem a solução do Problema (1.6) em dimensões arbitrárias.

Notemos também que estas fórmulas concordam com o Teorema de unicidade (1.1.1): o valor de  $u$  em  $(x_0, t_0)$  depende apenas dos valores de  $f$  e  $g$  na bola  $\|x - x_0\| \leq t_0$  contida no hiperplano  $t = 0$ . Na verdade, podemos dizer mais:

- Se  $n = 1$ ,  $u(x_0, t_0)$  depende dos valores de  $g$  sobre  $|x - x_0| \leq t_0$ , e sobre os valores de  $f$  apenas em  $x_0 = \pm t_0$ .
- Se  $n$  é ímpar,  $n \geq 3$ ,  $u(x_0, t_0)$  depende apenas dos valores de  $f$  e  $g$  e de algumas de suas derivadas na esfera  $\|x - x_0\| = t_0$ .
- Se  $n$  é par,  $u(x_0, t_0)$  depende dos valores de  $f$  e  $g$  sobre a bola  $\|x - x_0\| \leq t_0$ , e os valores próximos à fronteira são mais influenciados pelo fator  $\sqrt{1 - \|y\|^2}$  no denominador do integrando, que aparece na solução (1.17).

Analisando a fórmula para a solução da equação da onda quando  $n = 3$ , supondo que  $\text{supp}(f) \cup \text{supp}(g) \subseteq B(0, R)$ , e fixado  $x_0 \in \mathbb{R}^3$ , temos que para  $t \geq 0$  e  $y \in S_1(0)$ , tem-se

$$\|x_0 + ty\| \geq \|ty\| - \|x_0\| = t - \|x_0\|.$$

Logo,

$$t > \|x_0\| + R \implies \|x_0 + ty\| > R$$

e, portanto,

$$f(x_0 + ty) = g(x_0 + ty) = 0, \forall t > \|x_0\| + R, \forall y \in S_1(0).$$

Concluimos, então que  $u(x_0, t) = 0, \forall t > \|x_0\| + R$ . O mesmo não ocorre quando  $n = 2$ , mas o conjunto frente de ondas decairá vagarosamente.

**Exemplo 1.4.1.** *Suponha que você está numa sala escura na posição  $x_0$ , e alguém na origem acende uma lâmpada de flash no tempo  $t = 0$ . Então no tempo  $t_0 = \|x_0\|$  você vê um flash de luz e novamente a escuridão. Em um mundo de dimensão par, você veria uma explosão de luz num instante  $t_0$ , mas em vez de desaparecer imediatamente, ela enfraqueceria gradualmente, embora não venha a desaparecer.*

No capítulo 2 exibiremos a prova da conservação de energia na presença de um obstáculo, mostraremos a unicidade de solução e trataremos do tema principal desta dissertação: o decaimento da solução para a equação da onda na presença de um obstáculo com dados iniciais suficientemente regulares e com condição de fronteira estacionária.



## Decaimento da solução

Consideremos uma perturbação que inicialmente está confinada a uma região limitada e que se propaga livremente no espaço segundo a equação da onda . Ela se espalha em todas as direções alcançando todos os pontos do espaço. Portanto, fixado um ponto, a perturbação diminui a influência, neste ponto, decaindo segundo uma taxa que depende da dimensão do espaço. Por exemplo, o fenômeno da propagação da onda em um espaço tri-dimensional possui a característica que os conjuntos frente de onda são sempre bem marcados, i.e., para dados de Cauchy de suporte compacto, a amplitude da onda em um ponto fixado  $x_0$  do espaço sempre se anula depois de decorrido um tempo suficientemente longo, de forma que a frente de onda definitivamente abandona o ponto  $x_0$  em direção ao infinito. Isso é determinado pelo princípio de Huyghen estudado no Capítulo 1.

Wilcox mostrou em [11] que para o problema da equação da onda no complementar  $\Omega$  de um corpo esférico tri-dimensional  $\mathcal{B}$ , o decaimento da solução  $u$ , em qualquer ponto fixado  $x_0 \in \Omega = \mathbb{R}^3 - \mathcal{B}$  é pelo menos exponencial. Por razões físicas foi conjecturado em [11] que a mesma situação ocorre se existir um corpo  $\mathcal{B}$  (também chamado de obstáculo, quando compacto) em algum lugar do espaço, desde que  $\partial\mathcal{B}$  tenha propriedades que nos permitam denominá-lo de corpo refletor. Nesse caso, a onda que parte da perturbação original atinge o corpo e é refletido por ele.

É sabido que em qualquer ponto a perturbação pode ser medida em termos de “energia”. Assim, espera-se que toda a energia e, portanto, a perturbação também, viaje para o infinito. Naturalmente, se um corpo tem uma configuração denteada e complicada a taxa de decaimento será diminuída pela reflexão devido às reverberações produzidas pela denteação (ver [8]).



Neste capítulo queremos apresentar, conforme mencionamos, de uma forma elementar o trabalho desenvolvido por Cathleenn S. Morawetz [6] o qual estabelece que se o corpo refletor  $\mathcal{B}$  é estrelado, compacto e com  $\partial\mathcal{B}$  suave ( $\partial\mathcal{B}$  é localmente gráfico de uma função de classe  $C^\infty$ ), então a taxa de decaimento de  $u$  é pelo menos tão rapidamente quanto  $1/\sqrt{t}$ .

## 2.1 Identidades básicas.

Nesta seção apresentaremos as identidades básicas que se fazem necessárias ao desenvolvimento das seções seguintes.

Seja  $u$  é uma função suficientemente diferenciável. Então valem:

1.  $u_\phi u_{\phi\phi} = \frac{1}{2}(u_\phi^2)_\phi$ ;
2.  $u_\phi u_{\rho\rho} = (u_\phi u_\rho)_\rho - \frac{1}{2}(u_\rho^2)_\phi$ ;
3.  $\rho u_\rho u_{\rho\rho} = \frac{1}{2}[(\rho u_\rho^2)_\rho - u_\rho^2]$ ;
4.  $\rho u_\rho u_{\phi\phi} = (\rho u_\rho u_\phi)_\phi - \frac{1}{2}[(\rho u_\phi^2)_\rho - u_\phi^2]$ ;
5.  $u u_{\rho\rho} = (u u_\rho)_\rho - u_\rho^2$ ;

Estas identidades serão usadas na prova do Teorema 2.3.5 para converter a expressão

$$(x \cdot \nabla u + t u_t + u) \square u$$

em um campo vetorial  $G$  em  $\mathbb{R}^4$ .

## 2.2 Conservação da energia na presença de obstáculo

Sejam  $\Omega$  um aberto em  $\mathbb{R}^3$  tal que  $\mathcal{B} = \mathbb{R}^3 - \Omega$  é um obstáculo, isto é, um conjunto compacto com  $\partial\mathcal{B}$  suave e, ainda,  $\mathcal{B}$  um corpo estrelado. Então, é possível mostrarmos que nestas condições vale a conservação da energia se os dados de Cauchy são suficientemente regulares em  $\Omega$ <sup>1</sup>. Mais precisamente, temos

<sup>1</sup>Notemos que a regularidade da solução da equação da onda em domínios exteriores depende da regularidade dos dados iniciais (ver [5] capítulo V).

**Teorema 2.2.1 (Princípio da conservação de energia).** *Seja  $\mathcal{B}$  um corpo estrelado  $\mathcal{B} = \mathbb{R}^3 - \Omega$ . Seja  $u$  solução, suave, do problema de valor inicial e de fronteira (P.V.I.F.) para a equação da onda*

$$\begin{cases} \square u = 0, \forall x \in \Omega, \forall t \geq 0 \\ u(x, 0) = f(x), \forall x \in \Omega \\ u_t(x, 0) = g(x), \forall x \in \Omega \\ u(x, t) = 0, \forall x \in \partial\mathcal{B}, \forall t \geq 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

onde  $f, g \in C_c^\infty(\Omega)$ . Então, temos

$$E(t) = \int_{\Omega} (\|\nabla u(x, t)\|^2 + u_t^2(x, t)) dx = E(0), \forall t \geq 0.$$

Vide figura 2.1 <sup>2</sup>

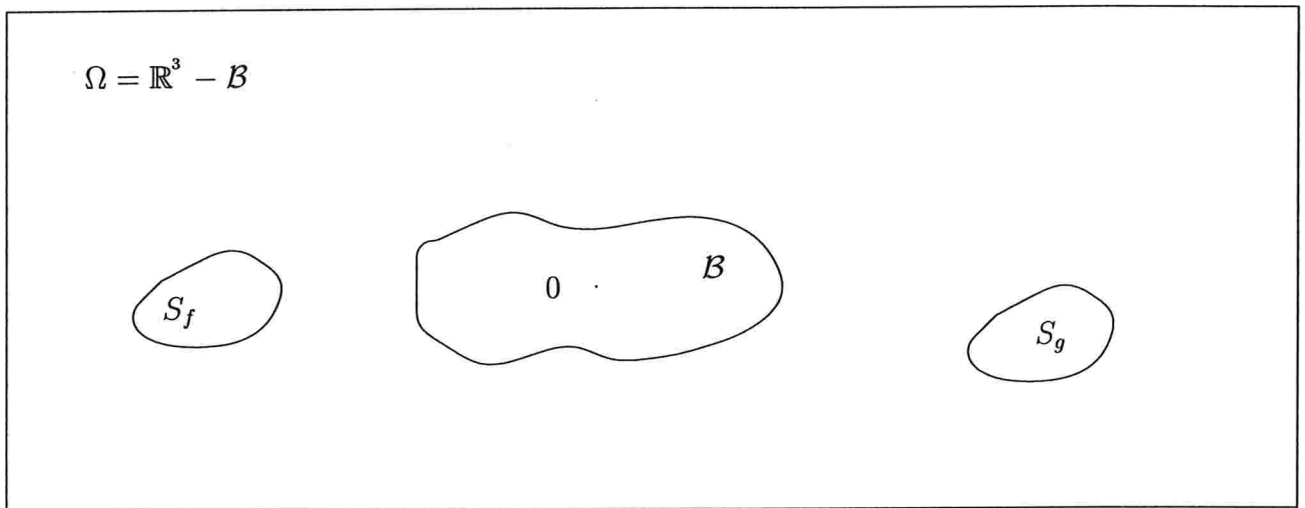


Figura 2.1: Obstáculo  $\mathcal{B} = \mathbb{R}^3 - \Omega$

*Prova.* De fato, se fixarmos  $t_1 \geq 0$ , então multiplicando-se

$$\square u = \Delta u - u_{tt} = 0$$

por  $u_t$ , vem

$$u_t(\Delta u - u_{tt}) = 0,$$

agora integrando em  $x$  e em  $t$  sobre o domínio  $\mathcal{D} = \Omega \times [0, t_1]$ , ilustrado na figura 2.2, temos

<sup>2</sup> $S_f = \text{supp}(f) \subset \Omega$  e  $S_g = \text{supp}(g) \subset \Omega$ .

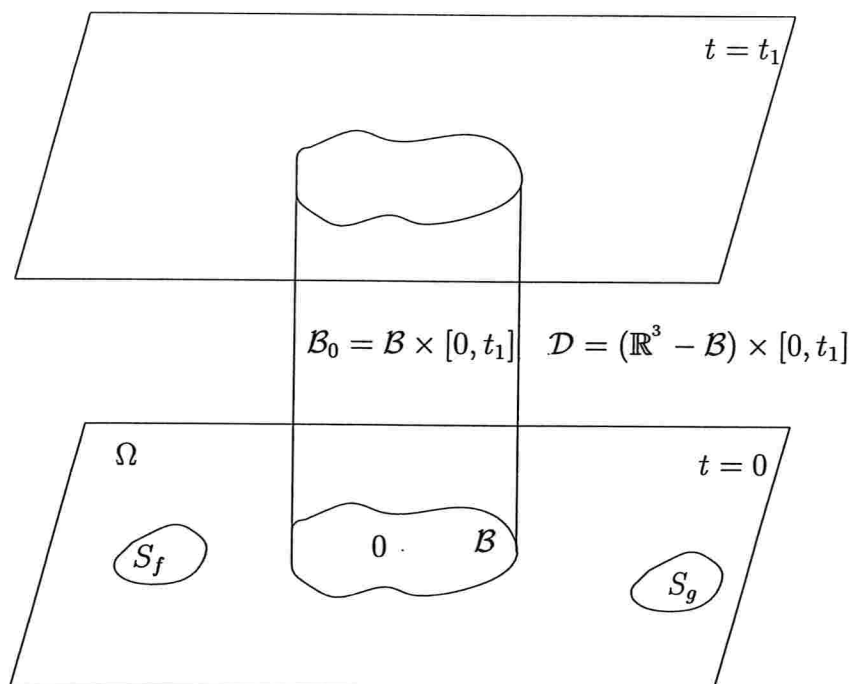


Figura 2.2: Região  $D = \Omega \times [0, t_1]$ ,  $\Omega = (\mathbb{R}^3 - B)$ .

$$\int_0^{t_1} \int_{\Omega} u_t (\Delta u - u_{tt}) dx dt = 0.$$

Mas

$$\begin{aligned} \sum_i u_t u_{x_i x_i} &= \sum_i (u_t u_{x_i})_{x_i} - \sum_i u_{t x_i} u_{x_i} \\ &= \sum_i (u_t u_{x_i})_{x_i} - \sum_i \left( \frac{u_{x_i}^2}{2} \right)_t \\ &= \operatorname{div}(u_t \nabla u) - \sum_i \left( \frac{u_{x_i}^2}{2} \right)_t. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\int_0^{t_1} \int_{\Omega} \sum_i u_t u_{x_i x_i} dx dt &= \int_0^{t_1} \int_{\Omega} \operatorname{div}(u_t \nabla u) dx dt - \int_0^{t_1} \int_{\Omega} \sum_i \left( \frac{u_{x_i}^2}{2} \right)_t dx dt \\
&= \int_0^{t_1} \left( \int_{\Omega} \operatorname{div}(u_t \nabla u) dx \right) dt - \int_0^{t_1} \int_{\Omega} \sum_i \left( \frac{u_{x_i}^2}{2} \right)_t dx dt \\
&= - \int_0^{t_1} \left( \int_{\partial \mathcal{B}} (u_t \nabla u) \cdot \nu_x d\sigma(x) \right) dt - \int_0^{t_1} \int_{\Omega} \sum_i \left( \frac{u_{x_i}^2}{2} \right)_t dx dt \\
&= - \int_0^{t_1} \int_{\Omega} \sum_i \left( \frac{u_{x_i}^2}{2} \right)_t dx dt,
\end{aligned}$$

pois

$$\int_{\partial \mathcal{B}} (u_t \nabla u) \cdot \nu(x) d\sigma(x) = 0$$

já que, por hipótese,  $u \equiv 0$  sobre a fronteira de  $\mathcal{B}$ , o mesmo vale para  $u_t$ . Conseqüentemente, temos

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^{t_1} \int_{\Omega} u_t (\Delta u - u_{tt}) dx dt \\
&= \int_0^{t_1} \int_{\Omega} u_t \Delta u dx dt - \int_0^{t_1} \int_{\Omega} u_t u_{tt} dx dt \\
&= - \int_{\Omega} \left[ \int_0^{t_1} \left( \sum_1 \left( \frac{u_{x_i}^2}{2} \right)_t + u_t u_{tt} dt \right) dx \right] \\
&= - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[ \int_0^{t_1} \sum_1 \left( u_{x_i}^2 \right)_t dt + \int_0^{t_1} (u_t^2)_t dt \right] dx \\
&= - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[ \sum_1 \left( u_{x_i}^2 \right)(x, t_1) - \sum_1 \left( u_{x_i}^2 \right)(x, 0) + u_t^2(x, t_1) - u_t^2(x, 0) \right] dx
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\int_{\Omega} [\|\nabla u\|^2(x, t_1) + u_t^2(x, t_1)] dx = \int_{\Omega} [\|\nabla u\|^2(x, 0) + u_t^2(x, 0)] dx, \quad \forall t_1 \geq 0.$$

Isto é,

$$E(t_1) = E(0), \quad \forall t_1 \geq 0.$$

■

O princípio da conservação de energia é, como foi dito antes, uma ferramenta poderosa para sistemas lineares, pois garante a unicidade de solução para dados iniciais suficientemente regulares. Portanto, visto que (2.1) é um problema desta natureza, vale o seguinte resultado:

**Corolário 2.2.2 (Unicidade).** *A solução do P.V.I.F. (2.1) é única.*

*Prova.* É uma consequência imediata do princípio da conservação de energia, pois se existem duas soluções para o Problema (2.1), então a diferença  $v = u_1 - u_2$  resolve um problema da mesma natureza, agora homogêneo, onde vale o princípio da conservação de energia, então chegamos a conclusão que  $v$  é constante e visto que  $v = 0$  na fronteira de  $\mathcal{B}$  segue que  $v$  é nula e, portanto,  $u_1 = u_2$ . ■

**Observação 2.2.3.** *Seja  $u$  uma solução de (2.1). Então  $w = u_t$  satisfaz o seguinte problema de valor inicial e de fronteira*

$$\begin{cases} \square w = 0, \forall x \in \Omega, \forall t \geq 0 \\ w(x, 0) = g(x), \forall x \in \Omega \\ w_t(x, 0) = h(x), \forall x \in \Omega \\ w(x, t) = 0, \forall x \in \partial\mathcal{B}, \forall t \geq 0, \end{cases} \quad (2.2)$$

onde  $h = \Delta f$  e  $h = 0$  em  $\mathcal{B}$ .

*Prova.* A condição que merece uma prova é a terceira. Vejamos:

$$\begin{aligned} w_t(x, 0) &= u_{tt}(x, 0) \\ &= \Delta u(x, 0) \end{aligned}$$

como  $u(x, 0) = f(x)$  segue que

$$w_t(x, 0) = \Delta f(x)$$

■

Motivado pela observação acima temos o seguinte resultado:

**Corolário 2.2.4.** *Se  $w$  é uma solução, suave, do sistema*

$$\begin{cases} \square w = \Delta w - w_{tt} = 0, \forall x \in \Omega, \forall t \geq 0 \\ w(x, 0) = h(x), \forall x \in \Omega \\ w_t(x, 0) = f(x), \forall x \in \Omega \\ w(x, t) = 0, \forall x \in \partial\mathcal{B} \text{ e } \forall t \geq 0, \end{cases} \quad (2.3)$$

onde  $\Delta h = g$ ,  $h = 0$  em  $\mathcal{B}$ , então  $w_t = u$ .

*Prova.* Usando a Observação 2.2.3, é fácil ver que  $v = w_t$  satisfaz (2.1) e pelo Corolário 2.2.2 segue que  $v = w_t = u$ . ■

O Corolário 2.2.4 desempenha um papel importante para o resultado:

**Corolário 2.2.5.** *Se  $u$  é uma solução de 2.1, então existe  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  tal que*

$$\int_{\Omega} [u(x, t)]^2 dx \leq \lambda, \quad \forall t \geq 0. \quad (2.4)$$

*Neste caso dizemos que  $u$  é limitada na  $\|\cdot\|_2$ .*

*Prova.* Com efeito, se  $u$  é uma solução de (2.1), então pelo Corolário 2.2.4

$$w_t(x, t) = u(x, t), \quad \forall t \geq 0,$$

onde  $w$  é solução de (2.3) e, portanto, pelo princípio da conservação de energia para  $w$  ( $E_w$ <sup>3</sup>), temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [u(x, t)]^2 dx &\leq E_w(t_1) \\ &= \int_{\Omega} [\|\nabla w(x, t_1)\|^2 + (w_t(x, t_1))^2] dx \\ &= \int_{\Omega} [\|\nabla w(x, 0)\|^2 + (w_t(x, 0))^2] dx \\ &= \int_{\Omega} [\|\nabla h(x)\|^2 + (f(x))^2] dx \\ &= \lambda < \infty. \end{aligned}$$

No trabalho da Cathleen S. Morawetz [6] há uma estimativa da energia para o sistema (2.1), considerando os dados iniciais  $f, g \in C^\infty$ . Apresenta, também, uma prova da unicidade da solução e a desigualdade (2.4). ■

## 2.3 Decaimento da solução.

Uma vez obtida a existência de solução, a próxima questão é saber como ela se comporta quando  $t$  tende para o infinito, e a conjectura natural para domínios exteriores é esperar

<sup>3</sup>Indica a quantidade de energia para a solução  $w$  da equação da onda.

que a solução tenda para zero sobre subconjuntos compactos. O primeiro resultado nesta direção foi obtido por C. H. Wilcox. Ele mostrou em [11] que o decaimento, local, da solução é minimamente tão rápido quanto a função exponencial, se o complementar de  $\Omega$  é um corpo esférico. Em seguida Cathleen Morawetz mostrou em [6] que, a solução minimamente decai tão rapidamente quanto  $1/\sqrt{t}$  se o complementar de  $\Omega$  é compacto estrelado de fronteira suave. Isto é, quando o complementar  $\mathcal{B}$  de  $\Omega$  é um “obstáculo”. Nesta seção vamos demonstrar este resultado. Mas antes mostraremos que, localmente, a energia minimamente decai tão rapidamente quanto  $1/t$ .

Suponhamos que  $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^3$  é um obstáculo, isto é, um corpo estrelado e compacto com fronteira  $\partial\mathcal{B}$  suave. Então, se  $u$  é uma solução suficientemente diferenciável da equação

$$\square u = \Delta u - u_{tt} = 0, \quad \forall x \in \Omega = \mathbb{R}^3 - \mathcal{B}, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad (2.5)$$

$u$  satisfaz a desigualdade (2.10) da Proposição 2.3.2. Para mostrarmos isto faremos o seguinte resultado:

**Lema 2.3.1.** *Sejam  $\epsilon_1 < \epsilon_2 < \epsilon_3 < \epsilon$  e  $B_{\epsilon_1}(x_0) \subset B_{\epsilon_2}(x_0) \subset B_{\epsilon_3}(x_0) \subset B_{\epsilon}(x_0)$  bolas concêntricas com centro em  $x_0$  situadas na região exterior a  $\mathcal{B}$ . Consideremos a função*

$$v = \frac{\Psi}{\|x - x_0\|}, \quad (2.6)$$

onde  $\Psi \in C_c^\infty(B_{\epsilon}(x_0))$ ,  $\Psi = 1$  em  $B_{\epsilon_2}(x_0)$ ,  $\Psi = 0$  em  $B_{\epsilon}(x_0) - B_{\epsilon_3}(x_0)$  e  $|\Psi| \leq 1$  em  $B_{\epsilon}(x_0)$ . Então,  $v, \Delta v \in L^2(\mathbb{R}^3)$  e, ainda mais,

$$\int_{B_{\epsilon}(x_0)} (u\Delta v - v\Delta u) dx = 4\pi u(x_0, t), \quad (2.7)$$

onde  $u$  é solução de (2.5).

Esquemáticamente, temos a figura 2.3.

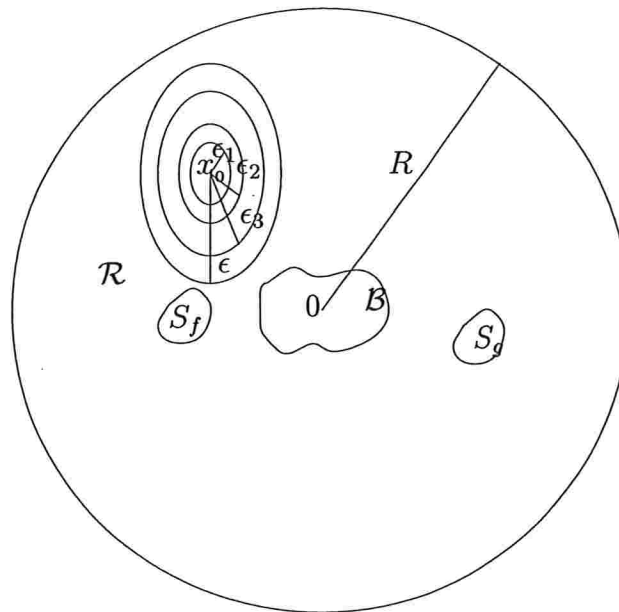


Figura 2.3: Corpo estrelado: bolas concêntricas.

*Prova.* Podemos escrever a função  $v$  como segue

$$v = -4\pi \frac{\Psi}{-4\pi \|x - x_0\|} = -4\pi F(x - x_0) \Psi, \quad (2.8)$$

onde  $F(x - x_0) = (-4\pi \|x - x_0\|)^{-1}$  é a solução fundamental do laplaciano.

Utilizando a segunda identidade de Green, apresentada no Apêndice A (Teorema A.1.3



parte (ii)), para as funções  $v, u$  no conjunto  $B_{\epsilon_3}(x_0) - B_{\epsilon_1}(x_0)$ , temos

$$\begin{aligned}
 \int_{B_{\epsilon_3}(x_0) - B_{\epsilon_1}(x_0)} (u\Delta v - v\Delta u) dx &= \int_{\partial(B_{\epsilon_3}(x_0) - B_{\epsilon_1}(x_0))} \left( u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) d\sigma \\
 &= \int_{S_{\epsilon_3}(x_0)} \left( u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) d\sigma - \\
 &\quad - \int_{S_{\epsilon_1}(x_0)} \left( u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) d\sigma \\
 &= \int_{S_{\epsilon_3}(x_0)} \left( u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) d\sigma - \\
 &\quad - \int_{S_{\epsilon_1}(x_0)} u \frac{\partial v}{\partial \nu} d\sigma + \int_{S_{\epsilon_1}(x_0)} v \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma \\
 &= -4\pi \int_{S_{\epsilon_3}(x_0)} \left( u \frac{\partial(F\Psi)}{\partial \nu} - F\Psi \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) d\sigma + \\
 &\quad + 4\pi \int_{S_{\epsilon_1}(x_0)} u \frac{\partial F}{\partial \nu} d\sigma - 4\pi \int_{S_{\epsilon_1}(x_0)} F \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma.
 \end{aligned}$$

Portanto, temos

$$\begin{aligned}
 \int_{B_{\epsilon_3}(x_0) - B_{\epsilon_1}(x_0)} (u\Delta v - v\Delta u) dx &= -4\pi \int_{S_{\epsilon_3}(x_0)} \left( u \frac{\partial(F\Psi)}{\partial \nu} - F\Psi \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) d\sigma + \\
 &\quad + 4\pi \int_{S_{\epsilon_1}(x_0)} u \frac{\partial F}{\partial \nu} d\sigma - 4\pi \int_{S_{\epsilon_1}(x_0)} F \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma
 \end{aligned}$$

tomando o limite da expressão acima para  $\epsilon_1$  tendendo para zero, temos pelo Lema A.1.1 partes (i) e (ii) que

$$\int_{B_{\epsilon_3}(x_0)} (u\Delta v - v\Delta u) dx = -4\pi \int_{S_{\epsilon_3}(x_0)} \left( u \frac{\partial(F\Psi)}{\partial \nu} - F\Psi \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) d\sigma + 4\pi u(x_0, t), \quad (2.9)$$

pois

$$\lim_{\epsilon_1 \rightarrow 0} \int_{S_{\epsilon_1}(x_0)} u \frac{\partial F}{\partial \nu} d\sigma = u(x_0, t) \quad \text{e} \quad \lim_{\epsilon_1 \rightarrow 0} \int_{S_{\epsilon_1}(x_0)} F \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma = 0.$$

Agora, tomamos o limite da expressão (2.9) para  $\epsilon_3$  tendendo para  $\epsilon$  e obtemos

$$\int_{B_{\epsilon}(x_0)} (u\Delta v - v\Delta u) dx = 4\pi u(x_0, t),$$

visto que

$$\int_{S_{\epsilon_3}(x_0)} \left( u \frac{\partial(F\Psi)}{\partial \nu} - F\Psi \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) d\sigma = 0,$$

pois, por hipótese <sup>4</sup>,  $\Psi = 0$  em uma vizinhança da  $S_\epsilon(x_0)$ . ■

Agora estamos com todas as ferramentas necessárias para mostrarmos o resultado desejado, que segue abaixo:

**Proposição 2.3.2.** *Toda solução  $u$  de (2.5) satisfaz a desigualdade*

$$|u(x_0, t)| < K_1 \left( \int_{\mathcal{R}} u^2(x, t) dx \right)^{\frac{1}{2}} + K_2 \left( \int_{\mathcal{R}} u_{tt}^2(x, t) dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.10)$$

onde  $\mathcal{R}$  é a região do espaço limitada por  $\mathcal{B}$  e uma esfera de raio  $R$  contendo  $\mathcal{B}$  (que depende de  $x_0$ ). Isto é  $\mathcal{R} = B(0, R) - \mathcal{B}$ . As duas constantes  $K_1, K_2 \in \mathbb{R}^+$  também dependem de  $x_0$ .

*Prova.* Seja  $\epsilon$  o raio da bola de centro  $x_0 \in \Omega$  como na hipótese do Lema 2.3.1. Então, temos

$$\begin{aligned} 4\pi |u(x_0, t)| &= \left| \int_{B_\epsilon(x_0)} (u\Delta v - v\Delta u) dx \right| \\ &\leq \int_{B_\epsilon(x_0)} |u\Delta v - v\Delta u| dx \\ &\leq \int_{B_\epsilon(x_0)} (|u\Delta v| + |v\Delta u|) dx, \end{aligned}$$

onde  $v$  é a função definida em (2.6). Como  $\Delta u = u_{tt}$  segue que

$$4\pi |u(x_0, t)| \leq \int_{B_\epsilon(x_0)} |u\Delta v| + \int_{B_\epsilon(x_0)} |vu_{tt}| dx.$$

Pela desigualdade de Schwarz, obtemos

$$\begin{aligned} 4\pi |u(x_0, t)| &\leq \left( \int_{B_\epsilon(x_0)} (\Delta v)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{B_\epsilon(x_0)} u^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \\ &\quad + \left( \int_{B_\epsilon(x_0)} v^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{B_\epsilon(x_0)} u_{tt}^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Agora, tomamos as constantes

$$\begin{cases} \frac{1}{4\pi} \left( \int_{B_\epsilon(x_0)} (\Delta v)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{4\pi} \left( \int_{\mathcal{R}} (\Delta v)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = K_1 < \infty \\ \frac{1}{4\pi} \left( \int_{B_\epsilon(x_0)} v^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{4\pi} \left( \int_{\mathcal{R}} v^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = K_2 < \infty, \end{cases}$$

<sup>4</sup> $\Psi$  tem suporte compacto em  $B_\epsilon(x_0)$ .

e obtemos

$$\begin{aligned} |u(x_0, t)| &\leq K_1 \left( \int_{B_\epsilon(x_0)} u^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + K_2 \left( \int_{B_\epsilon(x_0)} u_{tt}^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall B_\epsilon(x_0) \subset \mathcal{R} \\ &\leq K_1 \left( \int_{\mathcal{R}} u^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + K_2 \left( \int_{\mathcal{R}} u_{tt}^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Logo,

$$|u(x_0, t)| \leq K_1 \left( \int_{\mathcal{R}} u^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + K_2 \left( \int_{\mathcal{R}} u_{tt}^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

onde  $\mathcal{R}$  é a região situada entre  $\partial\mathcal{B}$  e alguma esfera de raio  $R$  suficientemente grande centrada na origem, isto é,  $\mathcal{R} = B_R(0) - \mathcal{B}$ . ■

Apresentaremos agora o enunciado e a prova do Teorema 2.3.5 o qual estabelece que a energia da solução da equação da onda com obstáculo minimamente decai tão rapidamente quanto  $1/t$ . Mas antes faremos algumas observações importantes à sua prova.

**Observação 2.3.3.** *Se  $\alpha \in \mathbb{R}$  é tal que  $\alpha \leq l$ ,  $l > 0$ , então  $\alpha = N + M$ , onde  $N \leq 0$  e  $|M| \leq l$ .*

*Prova.*

- Se  $-l \leq \alpha \leq l$ , então  $N = 0$  e  $M = \alpha$ .
- Se  $\alpha \leq -l$ , então  $\alpha + l \leq 0$  e, portanto,  $\alpha = N + M$  com  $N = \alpha + l$  e  $M = -l$ .

■

**Observação 2.3.4.** *Se  $u = 0$  em  $\partial\mathcal{B}$ , então*

$$\nabla u = \left( \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) \nu, \quad \text{sobre } \partial\mathcal{B}, \quad (2.11)$$

onde  $\frac{\partial u}{\partial \nu}$  é a derivada normal e  $\nu$  é o vetor exterior normal à fronteira de  $\mathcal{B}$ .

*Prova.* De fato, se  $u = 0$ , sobre  $\partial\mathcal{B}$ , então  $\partial\mathcal{B}$  é uma hipersuperfície de nível zero em relação a  $u$  e, portanto,  $\nabla u \perp \partial\mathcal{B}$ . Mas  $\nu \perp \partial\mathcal{B}$ . Logo,  $\nabla u \parallel \nu$ , então existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que

$$\nabla u = \lambda \nu \quad (2.12)$$

como

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \nabla u \cdot \nu = \lambda \nu \cdot \nu = \lambda.$$

segue que

$$\nabla u = \left( \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) \nu$$

sobre a fronteira de  $\mathcal{B}$ . ■

Consideremos o seguinte problema de valor inicial e de fronteira. Seja  $u$  uma solução, suave, do sistema

$$\begin{cases} \square u = 0, \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \\ u(x, 0) = f(x), \quad \forall x \in \Omega \\ u_t(x, 0) = g(x), \quad \forall x \in \Omega \\ u(x, t) = 0 \quad \forall x \in \partial\mathcal{B}, \quad \forall t \geq 0, \end{cases} \quad (2.13)$$

onde  $f, g \in C_c^\infty(\Omega)$  são funções com suporte na  $B_R(0)$ ,  $\mathcal{B}$  é um corpo estrelado e  $\Omega$ , o complementar de  $\mathcal{B}$ , um aberto do  $\mathbb{R}^3$ . Nestas condições, podemos mostrar o seguinte resultado:

**Teorema 2.3.5.** *Seja  $u$  uma solução de (2.13). Então,*

$$E(\mathcal{R}, t) = \int_{\mathcal{R}} (\|\nabla u\|^2 + u_t^2) dx < K/t, \quad (2.14)$$

onde  $K$  depende de  $f, g$  e  $k$ , o raio de suporte dos dados iniciais e do corpo estrelado.  $\mathcal{R}$  é a região entre  $\partial\mathcal{B}$  e uma esfera fixa de raio  $R$  suficientemente grande contendo o corpo estrelado e o suporte dos dados iniciais.

*Prova.* Suponhamos que  $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^3$  é um corpo estrelado com respeito à origem, isto é,

$$x \cdot \nu = (x_1, x_2, x_3) \cdot (\xi, \eta, \zeta) = x_1\xi + x_2\eta + x_3\zeta \geq 0, \quad \forall x \in \partial\mathcal{B}, \quad (2.15)$$

onde  $\nu$  é o vetor exterior normal (unitário) à fronteira de  $\mathcal{B}$ .

Esquemáticamente, temos a figura 2.4

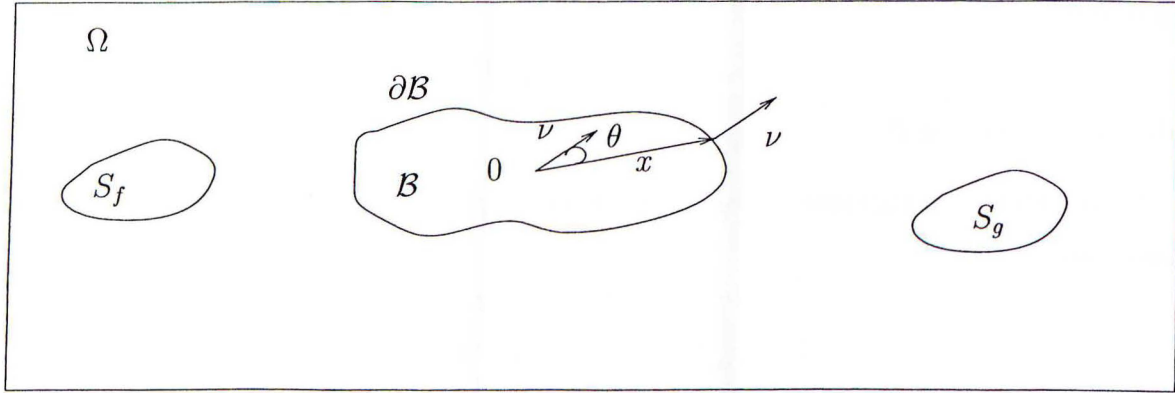


Figura 2.4: Corpo estrelado em relação à origem.

Multipliquemos a primeira equação de (2.13) por

$$x \cdot \nabla u + tu_t + u, \quad ^5$$

então

$$\begin{aligned} 0 &= (x \cdot \nabla u + tu_t + u) \square u \\ &= (x_1 u_{x_1} + x_2 u_{x_2} + x_3 u_{x_3} + tu_t + u)(u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} + u_{x_3 x_3} - u_{tt}) \\ &= x_1 u_{x_1} u_{x_1 x_1} + x_1 u_{x_1} u_{x_2 x_2} + x_1 u_{x_1} u_{x_3 x_3} - x_1 u_{x_1} u_{tt} + \dots + \\ &\quad + u u_{x_1 x_1} + u u_{x_2 x_2} + u u_{x_3 x_3} - u u_{tt} \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} 0 &= x_1 u_{x_1} u_{x_1 x_1} + x_1 u_{x_1} u_{x_2 x_2} + x_1 u_{x_1} u_{x_3 x_3} - x_1 u_{x_1} u_{tt} + \dots + \\ &\quad + u u_{x_1 x_1} + u u_{x_2 x_2} + u u_{x_3 x_3} - u u_{tt}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Agora, vamos usar as cinco identidades básicas apresentadas no início deste capítulo no segundo membro da expressão (2.16) com o intuito de transformá-lo no divergente de

<sup>5</sup>Em  $\mathbb{R}^n$  teríamos  $x \cdot \nabla u + tu_t + \frac{n-1}{2}u$  como multiplicador.

um campo vetorial  $G$  em  $\mathbb{R}^4$ . Fazendo isto, temos

$$\begin{aligned}
0 &= \left( \frac{x_1 u_{x_1}^2}{2} \right)_{x_1} - \frac{u_{x_1}^2}{2} + (x_1 u_{x_1} u_{x_2})_{x_1} - \left( \frac{x_1 u_{x_2}^2}{2} \right)_{x_1} + \frac{u_{x_2}^2}{2} + (x_1 u_{x_1} u_{x_3})_{x_3} - \\
&\quad - \left( \frac{x_1 u_{x_3}^2}{2} \right)_{x_1} + \frac{u_{x_3}^2}{2} - (x_1 u_{x_1} u_t)_t + \left( \frac{x_1 u_t^2}{2} \right)_{x_1} - \frac{u_t^2}{2} + \dots + \\
&\quad + (u u_{x_1})_{x_1} - u_{x_1}^2 + (u u_{x_2})_{x_2} - u_{x_2}^2 + (u u_{x_3})_{x_3} - u_{x_3}^2 - (u u_t)_t + u_t^2 \\
&= \left( \frac{x_1 u_{x_1}^2}{2} - \frac{x_1 u_{x_2}^2}{2} - \frac{x_1 u_{x_3}^2}{2} + \frac{x_1 u_t^2}{2} + x_2 u_{x_1} u_{x_2} + x_3 u_{x_1} u_{x_3} + t u_{x_1} u_t + u u_{x_1} \right)_{x_1} + \\
&\quad + \dots + \left( -\frac{t u_{x_1}^2}{2} - \frac{t u_{x_2}^2}{2} - \frac{t u_{x_3}^2}{2} - \frac{t u_t^2}{2} - x_1 u_{x_1} u_t - x_2 u_{x_2} u_t - x_3 u_{x_3} u_t - u u_t \right)_t \\
&= \operatorname{div}(G).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\operatorname{div}(G) = 0, \quad (2.17)$$

onde

$$\begin{aligned}
G &= \left( \frac{x_1 u_{x_1}^2}{2} - \frac{x_1 u_{x_2}^2}{2} - \frac{x_1 u_{x_3}^2}{2} + \frac{x_1 u_t^2}{2} + x_2 u_{x_1} u_{x_2} + x_3 u_{x_1} u_{x_3} + t u_{x_1} u_t + u u_{x_1}; \right. \\
&\quad - \frac{x_2 u_{x_1}^2}{2} + \frac{x_2 u_{x_2}^2}{2} - \frac{x_2 u_{x_3}^2}{2} + \frac{x_2 u_t^2}{2} + x_1 u_{x_1} u_{x_2} + x_3 u_{x_2} u_{x_3} + t u_t u_{x_2} + u u_{x_2}; \\
&\quad - \frac{x_3 u_{x_1}^2}{2} - \frac{x_3 u_{x_2}^2}{2} - \frac{x_3 u_{x_3}^2}{2} + \frac{x_3 u_t^2}{2} + x_1 u_{x_1} u_{x_3} + x_2 u_{x_2} u_{x_3} + t u_t u_{x_3} + u u_{x_3}; \\
&\quad \left. - \frac{t u_{x_1}^2}{2} - \frac{t u_{x_2}^2}{2} - \frac{t u_{x_3}^2}{2} - \frac{t u_t^2}{2} - x_1 u_{x_1} u_t - x_2 u_{x_2} u_t - x_3 u_{x_3} u_t - u u_t \right). \quad (2.18)
\end{aligned}$$

Seja  $\tilde{\mathcal{R}} = (D(0, R + t_1) - \mathcal{B}) \times [0, t_1]$  a região limitada pelas “tampas”

$$\Gamma_1 = (D(0, R + t_1) - \mathcal{B}) \times \{0\}$$

$$\Gamma_2 = (D(0, R + t_1) - \mathcal{B}) \times \{t_1\}$$

e as duas superfícies cilíndricas

$$\Gamma_3 = \partial \mathcal{B} \times [0, t_1]$$

$$\Gamma_4 = S(0, R + t_1) \times [0, t_1].$$

O raio  $R$  que tomamos é tal que  $B(0, R) \supset \operatorname{supp}(f) \cup \operatorname{supp}(g) \cup \mathcal{B}$  e, ainda  $u(x, t) = 0$  se  $\|x\| \geq t + R$ , pois esta região está “longe” do domínio de influência dos dados iniciais.

Seja  $\partial\tilde{\mathcal{R}}$  a fronteira de  $\tilde{\mathcal{R}}$ . Então

$$\partial\tilde{\mathcal{R}} = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4.$$

Esquemáticamente temos a figura 2.5

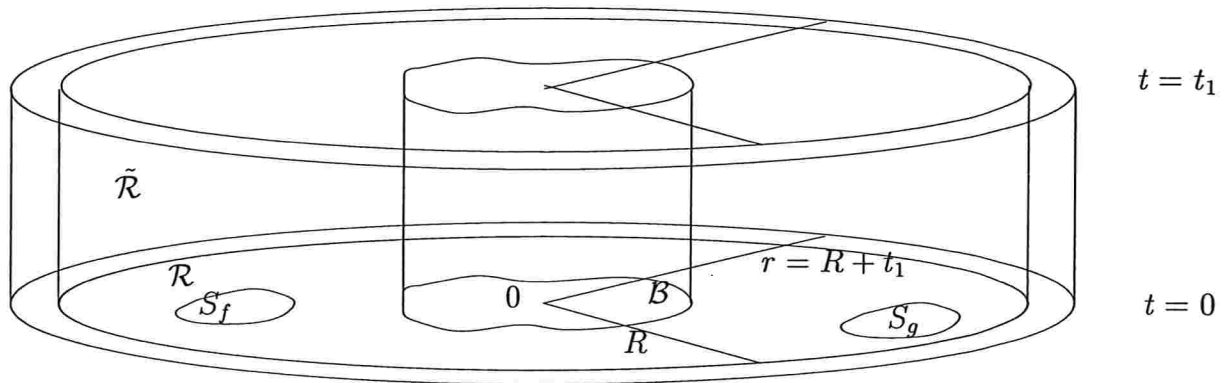


Figura 2.5: Região cilíndrica.

Como  $\Gamma_4$  é a superfície cilíndrica gerada pela esfera  $S(0, R + t_1)$ , temos que  $\Gamma_4$  está fora do domínio de influência dos dados iniciais e, portanto,  $u$  e todas as suas derivadas se anulam. Logo,  $G = 0$  sobre  $\Gamma_4$ . Portanto, integrando ambos os lados de (2.17) sobre a região  $\tilde{\mathcal{R}}$ , obtemos

$$\int_{\tilde{\mathcal{R}}} \operatorname{div}(G) dx dt = 0. \quad (2.19)$$

Por outro lado, vamos desenvolver

$$\mathcal{J} = \int_{\tilde{\mathcal{R}}} \operatorname{div}(G) dx dt. \quad (2.20)$$

Então, pelo teorema do divergente, vem

$$\begin{aligned}
\mathcal{J} &= \int_{\partial\tilde{\mathcal{R}}} G \cdot \mathcal{N} d\sigma \\
&= - \int_{\Gamma_1} G \cdot (0, 0, 0, 1) d\sigma + \int_{\Gamma_2} G \cdot (0, 0, 0, 1) d\sigma - \int_{\Gamma_3} G \cdot (\xi, \eta, \zeta, 0) d\sigma \\
&= \int_{\Gamma_1} [(x \cdot \nabla u)u_t + uu_t] dx + \int_{\Gamma_2} \left[ -\frac{t_1}{2} (\|\nabla u\|^2 + u_t^2) - (x \cdot \nabla u)u_t - uu_t \right] dx - \\
&\quad - \int_{\Gamma_3} \left[ \left( \frac{x_1 u_{x_1}^2}{2} - \frac{x_1 u_{x_2}^2}{2} - \frac{x_1 u_{x_3}^2}{2} + x_2 u_{x_1} u_{x_2} + x_3 u_{x_1} u_{x_3} \right) \xi + \right. \\
&\quad \quad \left. + \left( -\frac{x_2 u_{x_1}^2}{2} + \frac{x_2 u_{x_2}^2}{2} - \frac{x_2 u_{x_3}^2}{2} + x_1 u_{x_1} u_{x_2} + x_3 u_{x_2} u_{x_3} \right) \eta + \right. \\
&\quad \quad \left. + \left( -\frac{x_3 u_{x_1}^2}{2} - \frac{x_3 u_{x_2}^2}{2} + \frac{x_3 u_{x_3}^2}{2} + x_1 u_{x_1} u_{x_3} + x_2 u_{x_2} u_{x_3} \right) \zeta \right] d\sigma.
\end{aligned}$$

Isto é,

$$\begin{aligned}
\mathcal{J} &= \int_{\Gamma_1} [(x \cdot \nabla u)u_t + uu_t] dx + \int_{\Gamma_2} \left[ -\frac{t_1}{2} (\|\nabla u\|^2 + u_t^2) - (x \cdot \nabla u)u_t - uu_t \right] dx - \\
&\quad - \int_{\Gamma_3} \left[ \left( \frac{x_1 u_{x_1}^2}{2} - \frac{x_1 u_{x_2}^2}{2} - \frac{x_1 u_{x_3}^2}{2} + x_2 u_{x_1} u_{x_2} + x_3 u_{x_1} u_{x_3} \right) \xi + \right. \\
&\quad \quad \left. + \left( -\frac{x_2 u_{x_1}^2}{2} + \frac{x_2 u_{x_2}^2}{2} - \frac{x_2 u_{x_3}^2}{2} + x_1 u_{x_1} u_{x_2} + x_3 u_{x_2} u_{x_3} \right) \eta + \right. \\
&\quad \quad \left. + \left( -\frac{x_3 u_{x_1}^2}{2} - \frac{x_3 u_{x_2}^2}{2} + \frac{x_3 u_{x_3}^2}{2} + x_1 u_{x_1} u_{x_3} + x_2 u_{x_2} u_{x_3} \right) \zeta \right] d\sigma. \tag{2.21}
\end{aligned}$$

Chamemos as integrais que aparecem em (2.21) de:

$$\mathcal{J}_1 = \int_{\Gamma_1} [(x \cdot \nabla u)u_t + uu_t] dx, \quad t = 0 \tag{2.22}$$

$$\mathcal{J}_2 = \int_{\Gamma_2} \left[ -\frac{t_1}{2} (\|\nabla u\|^2 + u_t^2) - (x \cdot \nabla u)u_t - uu_t \right] dx, \quad t = t_1 \tag{2.23}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_3 &= - \int_{\Gamma_3} \left[ \left( \frac{x_1 u_{x_1}^2}{2} - \frac{x_1 u_{x_2}^2}{2} - \frac{x_1 u_{x_3}^2}{2} + x_2 u_{x_1} u_{x_2} + x_3 u_{x_1} u_{x_3} \right) \xi + \right. \\
&\quad \quad \left. + \left( -\frac{x_2 u_{x_1}^2}{2} + \frac{x_2 u_{x_2}^2}{2} - \frac{x_2 u_{x_3}^2}{2} + x_1 u_{x_1} u_{x_2} + x_3 u_{x_2} u_{x_3} \right) \eta + \right. \\
&\quad \quad \left. + \left( -\frac{x_3 u_{x_1}^2}{2} - \frac{x_3 u_{x_2}^2}{2} + \frac{x_3 u_{x_3}^2}{2} + x_1 u_{x_1} u_{x_3} + x_2 u_{x_2} u_{x_3} \right) \zeta \right] d\sigma. \tag{2.24}
\end{aligned}$$



Então

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2 + \mathcal{J}_3.$$

Estudemos cada uma dessas integrais. Inicialmente temos que

$$\mathcal{J}_1 = \int_{\Gamma_1} [(x \cdot \nabla u)u_t + uu_t]dx$$

é limitada, pois esta integral está calculada sobre  $\Gamma_1$  que está situada no plano  $t = 0$  e, portanto, seu integrando é uma função dos dados iniciais  $f$  e  $g$  e do  $\nabla f$ , que têm suporte compacto contido em  $\mathcal{R}$ , a região limitada por  $S(0, R)$  e  $\partial\mathcal{B}$ .

Deixaremos por último a análise da integral  $\mathcal{J}_2$  devido a sua complexidade em relação as outras duas. Calculemos, portanto a integral  $\mathcal{J}_3$ . Temos

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_3 &= - \int_{\Gamma_3} \left[ \frac{x_1 u_{x_1}^2}{2} \xi - \frac{x_1 u_{x_2}^2}{2} \xi - \frac{x_1 u_{x_3}^2}{2} \xi + x_2 u_{x_1} u_{x_2} \xi + x_3 u_{x_1} u_{x_3} \xi - \right. \\ &\quad \left. - \frac{x_2 u_{x_1}^2}{2} \eta + \frac{x_2 u_{x_2}^2}{2} \eta - \frac{x_2 u_{x_3}^2}{2} \eta + x_1 u_{x_1} u_{x_2} \eta + x_3 u_{x_2} u_{x_3} \eta - \right. \\ &\quad \left. - \frac{x_3 u_{x_1}^2}{2} \zeta - \frac{x_3 u_{x_2}^2}{2} \zeta + \frac{x_3 u_{x_3}^2}{2} \zeta + x_1 u_{x_1} u_{x_3} \zeta + x_2 u_{x_2} u_{x_3} \zeta \right] d\sigma \\ &= - \int_{\Gamma_3} \left[ \frac{x_1}{2} \left( u_{x_1}^2 \xi - u_{x_2}^2 \xi - u_{x_3}^2 \xi + 2u_{x_1} u_{x_2} \eta + 2u_{x_1} u_{x_3} \zeta \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{x_2}{2} \left( -u_{x_1}^2 \eta + u_{x_2}^2 \eta - u_{x_3}^2 \eta + 2u_{x_1} u_{x_2} \xi + 2u_{x_2} u_{x_3} \zeta \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{x_3}{2} \left( -u_{x_1}^2 \zeta - u_{x_2}^2 \zeta + u_{x_3}^2 \zeta + 2u_{x_1} u_{x_3} \xi + 2u_{x_2} u_{x_3} \eta \right) \right] d\sigma. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_3 &= - \int_{\Gamma_3} \left[ \frac{x_1}{2} \left( u_{x_1}^2 \xi - u_{x_2}^2 \xi - u_{x_3}^2 \xi + 2u_{x_1} u_{x_2} \eta + 2u_{x_1} u_{x_3} \zeta \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{x_2}{2} \left( -u_{x_1}^2 \eta + u_{x_2}^2 \eta - u_{x_3}^2 \eta + 2u_{x_1} u_{x_2} \xi + 2u_{x_2} u_{x_3} \zeta \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{x_3}{2} \left( -u_{x_1}^2 \zeta - u_{x_2}^2 \zeta + u_{x_3}^2 \zeta + 2u_{x_1} u_{x_3} \xi + 2u_{x_2} u_{x_3} \eta \right) \right] d\sigma. \quad (2.25) \end{aligned}$$

Como  $\Gamma_3$  é a superfície cilíndrica gerada pela  $\partial\mathcal{B}$  segue da Observação 2.3.4 que (2.25) se reduz a:

$$\mathcal{J}_3 = -\frac{1}{2} \int_{\Gamma_3} (x \cdot \nu) \left( \frac{\partial u}{\partial \nu} \right)^2 d\sigma. \quad (2.26)$$

Logo,  $\mathcal{J}_3 \leq 0$ , pois  $x \cdot \nu \geq 0$  por (2.15).

Finalmente, estudemos o comportamento da integral sobre

$$\Gamma_2 = (D(0, R + t_1) - \mathcal{B}) \times \{t_1\}.$$

Isto é, analisando a integral  $\mathcal{J}_2$ , temos

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_2 &= \int_{\Gamma_2} \left[ -\frac{t_1}{2} (\|\nabla u\|^2 + u_t^2) - (x \cdot \nabla u)u_t - uu_t \right] dx \\ &= -\frac{t_1}{2} \int_{\Gamma_2} (\|\nabla u\|^2 + u_t^2) dx - \int_{\Gamma_2} (x \cdot \nabla u)u_t dx - \int_{\Gamma_2} uu_t dx \\ &= -\frac{t_1}{2} \int_{\Gamma_2 - \mathcal{R}} (\|\nabla u\|^2 + u_t^2) dx - \frac{t_1}{2} \int_{\mathcal{R}} (\|\nabla u\|^2 + u_t^2) dx \\ &\quad - \int_{\Gamma_2 - \mathcal{R}} (x \cdot \nabla u)u_t dx - \int_{\mathcal{R}} (x \cdot \nabla u)u_t dx - \int_{\Gamma_2} uu_t dx. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_2 &= -\frac{t_1}{2} \int_{\Gamma_2 - \mathcal{R}} (\|\nabla u\|^2 + u_t^2) dx - \frac{t_1}{2} \int_{\mathcal{R}} (\|\nabla u\|^2 + u_t^2) dx \\ &\quad - \int_{\Gamma_2 - \mathcal{R}} (x \cdot \nabla u)u_t dx - \int_{\mathcal{R}} (x \cdot \nabla u)u_t dx - \int_{\Gamma_2} uu_t dx. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Sejam

$$\begin{cases} \mathcal{J}_{21} = -\frac{t_1}{2} \int_{\Gamma_2 - \mathcal{R}} (\|\nabla u\|^2 + u_t^2) dx \\ \mathcal{J}_{22} = -\frac{t_1}{2} \int_{\mathcal{R}} (\|\nabla u\|^2 + u_t^2) dx \\ \mathcal{J}_{23} = -\int_{\Gamma_2 - \mathcal{R}} (x \cdot \nabla u)u_t dx \\ \mathcal{J}_{24} = -\int_{\mathcal{R}} (x \cdot \nabla u)u_t dx \\ \mathcal{J}_{25} = -\int_{\Gamma_2} uu_t dx. \end{cases} \quad (2.28)$$

Precisamos analisar cada uma das cinco integrais que aparecem em (2.28). Inicialmente podemos ver que

$$\begin{cases} \mathcal{J}_{21} \leq 0 \\ \mathcal{J}_{22} < 0. \end{cases} \quad (2.29)$$

Agora, vamos mostrar as seguintes desigualdades:

$$\begin{cases} |\mathcal{J}_{23}| \leq -\mathcal{J}_{21} + \frac{R}{2} E(0) \\ |\mathcal{J}_{24}| \leq \frac{R}{2} E(0) \\ |\mathcal{J}_{25}| \leq \lambda E(0), \quad \lambda \in \mathbb{R}^+. \end{cases} \quad (2.30)$$

De fato, para a primeira delas, temos

$$\begin{aligned} |\mathcal{J}_{23}| &= \left| \int_{\Gamma_2 - \mathcal{R}} (x \cdot \nabla u) u_t dx \right| \\ &\leq \int_{\Gamma_2 - \mathcal{R}} |x \cdot \nabla u| |u_t| dx \end{aligned}$$

usando a desigualdade de Schwarz, obtemos

$$\begin{aligned} |\mathcal{J}_{23}| &\leq \int_{\Gamma_2 - \mathcal{R}} \|x\| \|\nabla u\| |u_t| dx \\ &\leq (t_1 + R) \int_{\Gamma_2 - \mathcal{R}} \|\nabla u\| |u_t| dx. \end{aligned}$$

Pela desigualdade fundamental <sup>6</sup>, vem

$$\begin{aligned} |\mathcal{J}_{23}| &\leq \frac{t_1 + R}{2} \int_{\Gamma_2 - \mathcal{R}} (\|\nabla u\|^2 + u_t^2) dx. \\ &= \frac{t_1}{2} \int_{\Gamma_2 - \mathcal{R}} (\|\nabla u\|^2 + u_t^2) dx + \frac{R}{2} E(t_1) \\ &= -\mathcal{J}_{21} + \frac{R}{2} E(0). \end{aligned}$$

Esta última igualdade segue da primeira equação em (2.28) e do princípio da conservação de energia. Logo,

$$|\mathcal{J}_{23}| \leq -\mathcal{J}_{21} + \frac{R}{2} E(0). \quad (2.31)$$

Agora, vamos estimar  $\mathcal{J}_{24}$ :

$$\begin{aligned} |\mathcal{J}_{24}| &= \left| \int_{\mathcal{R}} (x \cdot \nabla u) u_t dx \right| \\ &\leq \int_{\mathcal{R}} |x \cdot \nabla u| |u_t| dx \end{aligned}$$

usando a desigualdade de Schwarz, vem

$$\begin{aligned} |\mathcal{J}_{24}| &\leq \int_{\mathcal{R}} \|x\| \|\nabla u\| |u_t| dx \\ &\leq R \int_{\mathcal{R}} \|\nabla u\| |u_t| dx. \end{aligned}$$

---

<sup>6</sup>Se  $a, b \in \mathbb{R}$ , então  $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ .

Novamente usamos a desigualdade fundamental e obtemos

$$\begin{aligned} |\mathcal{J}_{24}| &\leq \frac{R}{2} \int_{\mathcal{R}} (\|\nabla u\|^2 + u_t^2) dx \\ &= \frac{R}{2} E(t_1). \end{aligned}$$

Do princípio da conservação de energia, temos

$$|\mathcal{J}_{24}| \leq \frac{R}{2} E(0), \quad (2.32)$$

pois  $E(t_1) = E(0)$ .

Finalmente, vamos estimar  $|\mathcal{J}_{25}|$ :

$$\begin{aligned} |\mathcal{J}_{25}| &= \left| \int_{\Gamma_2} u u_t dx \right| \\ &\leq \int_{\Gamma_2} |u| |u_t| dx \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{\Gamma_2} (u^2 + u_t^2) dx \\ &\leq \lambda E(0), \end{aligned}$$

sendo que esta última desigualdade é uma consequência do Corolário 2.2.5. Logo,

$$|\mathcal{J}_{25}| \leq \lambda E(0). \quad (2.33)$$

E, portanto, as fórmulas (2.31), (2.32) e (2.33), provam as desigualdades em (2.30). Isto é,

$$\begin{cases} |\mathcal{J}_{23}| \leq -\mathcal{J}_{21} + \frac{R}{2} E(0) \\ |\mathcal{J}_{24}| \leq \frac{R}{2} E(0) \\ |\mathcal{J}_{25}| \leq \lambda E(0), \quad \lambda \in \mathbb{R}^+. \end{cases}$$

Como  $\mathcal{J}_{21} \leq 0$  (por (2.29)), segue da Observação 2.3.3 que podemos escrever

$$\mathcal{J}_{21} + \mathcal{J}_{23} = N + M,$$

onde  $N \leq 0$  e  $|M| \leq \frac{R}{2} E(0)$ .

Semelhantemente, combinando (2.22), (2.26), (2.29), (2.30), isto é, as fórmulas

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{J}_1 = \int_{\Gamma_1} [(x \cdot \nabla u)u_t + uu_t]dx, \quad t = 0 \\ \mathcal{J}_3 = -\frac{1}{2} \int_{\Gamma_3} (x \cdot \nu) \left( \frac{\partial u}{\partial \nu} \right)^2 d\sigma \\ \mathcal{J}_{21} \leq 0 \\ \mathcal{J}_{22} < 0 \\ |\mathcal{J}_{23}| \leq -\mathcal{J}_{21} + \frac{R}{2}E(0) \\ |\mathcal{J}_{24}| \leq \frac{R}{2}E(0) \\ |\mathcal{J}_{25}| \leq \lambda E(0), \quad \lambda \in \mathbb{R}^+. \end{array} \right.$$

E a Observação 2.3.3 temos, por (2.20), que

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_{22} + \mathcal{J}_3 + N + M, \quad (2.34)$$

onde  $N \leq 0$ ,  $\mathcal{J}_{22} < 0$ ,  $\mathcal{J}_3 \leq 0$  e  $|M| \leq C(R)E(0)$ , isto é,  $|M|$  é limitado por uma constante  $C$ , que depende do raio da bola fixada e da energia inicial. Por outro lado temos que  $\mathcal{J} = 0$  (por (2.19)). Portanto, cada um dos termos negativos  $N$ ,  $\mathcal{J}_{22}$  e  $\mathcal{J}_3$  são limitados em valor absoluto, em particular,

$$t_1 \int_{\mathcal{R}} (\|\nabla u\|^2 + u_t^2) dx < K,$$

onde  $\mathcal{R}$  é a região do espaço limitada por  $S(0, R)$  e  $\partial\mathcal{B}$ . Isto prova que a energia minimamente decai tão rapidamente quanto  $1/t$ . ■

Agora, enunciamos e provamos o resultado principal:

**Teorema 2.3.6.** *Seja  $u$  uma solução, suave, do problema de valor inicial e de fronteira*

$$\left\{ \begin{array}{l} \square u = \Delta u - u_{tt} = 0, \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall t \geq 0 \\ u(x, 0) = f(x), \quad \forall x \in \Omega \\ u_t(x, 0) = g(x), \quad \forall x \in \Omega \\ u(x, t) = 0, \quad \forall x \in \partial\mathcal{B} \text{ e } t \geq 0, \end{array} \right. \quad (2.35)$$

onde  $\mathcal{B}$  é um corpo estrelado com fronteira suave,  $f$  e  $g$  são funções suficientemente regulares suportadas em  $B = B(0, R)$ . Então, localmente,  $u$  decai com o tempo pelo menos tão rápido quanto  $\frac{1}{\sqrt{t}}$ .

*Prova.* Suponhamos que  $\mathcal{B}$  é um corpo estrelado com fronteira suave com respeito a origem e  $f$  e  $g$  são funções suficientemente regulares suportadas em  $B = B(0, R)$ . Seja

$\mathcal{R}$  a região limitada por  $\partial\mathcal{B}$  e  $S(0, R)$ . Então, da observação 2.2.3 segue que se  $u$  é uma solução (2.35), então  $v = u_t$  é uma solução de (2.2). E, portanto, para  $v$  vale o Teorema 2.3.5, isto é,

$$t \int_{\mathcal{R}} v_t^2 dx \leq t \int_{\mathcal{R}} (\|\nabla v\|^2 + v_t^2) dx < C_2.$$

Mas  $v_t = u_{tt}$  e, portanto, temos

$$t \int_{\mathcal{R}} v_t^2 dx = t \int_{\mathcal{R}} u_{tt}^2 dx < C_2. \quad (2.36)$$

Além disso, se  $w$  é uma solução de (2.3), então pelo Corolário 2.2.4, temos  $w_t = u$  e, portanto, aplicando o Teorema 2.3.5 para  $w$ , obtemos

$$t \int_{\mathcal{R}} w_t^2 dx \leq t \int_{\mathcal{R}} (\|\nabla w\|^2 + w_t^2) dx < C_1.$$

Como

$$t \int_{\mathcal{R}} w_t^2 dx = t \int_{\mathcal{R}} u^2 dx$$

segue que

$$t \int_{\mathcal{R}} u^2 dx < C_1. \quad (2.37)$$

Por (2.37) e (2.36), temos

$$\int_{\mathcal{R}} u^2 dx < \frac{C_1}{t} \text{ e } \int_{\mathcal{R}} u_{tt}^2 dx < \frac{C_2}{t}. \quad (2.38)$$

Agora, substituindo-se as majorações obtidas (2.38) na desigualdade (2.10) da Proposição 2.3.2, temos

$$\begin{aligned} |u(x_0, t)| &< K_1 \left( \int_{\mathcal{R}} u^2(x, t) dx \right)^{\frac{1}{2}} + K_2 \left( \int_{\mathcal{R}} u_{tt}^2(x, t) dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &< K_1 \left( \frac{C_1}{t} \right)^{\frac{1}{2}} + K_2 \left( \frac{C_2}{t} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= K t^{-1/2}. \end{aligned}$$

E, portanto,

$$|u(x_0, t)| < K t^{-1/2}.$$

Isto encerra prova do nosso resultado principal. ■



## Identidades de Green

Vamos apresentar neste apêndice as identidades de Green. A fonte que seguiremos para este relato é basicamente a proposta por Rafael Iório em [3] e para consulta sugerimos [9] e [10].

Vamos estudar alguns conceitos da topologia do  $\mathbb{R}^n$ , o conceito de superfície em  $\mathbb{R}^n$  e algumas de suas propriedades básicas que seram importantes no desenvolvimento de todo este apêndice. Se  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  e  $r > 0$ , definiremos a bola aberta de centro  $x_0$  e raio  $r$  o conjunto

$$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| < r\},$$

onde  $\|\cdot\|$  denota a norma euclidiana usual. A esfera de centro  $x_0$  e raio  $r > 0$  será denotada por  $\partial B(x_0, r)$  ou  $S(x_0, r)$ .

Se  $\Omega$  é um aberto do  $\mathbb{R}^n$  e  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$ , o gradiente da  $f$  é a função

$$\nabla f = \text{grad } f = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right).$$

Uma função  $G : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  (ou  $\mathbb{C}^n$ ) é dita um campo vetorial real (ou complexo).  $G$  é de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$  se, e somente, se cada uma de suas componentes  $G_i : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{C}$ ),  $i = 1, 2, \dots, n$  o são. Neste caso a divergência da  $G$  é a função

$$\nabla \cdot G = \text{div } G = \sum_{i=1}^n \frac{\partial G_i}{\partial x_i}.$$

Se  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{C}$ ) é de classe  $C^k$ ,  $k \geq 2$ , o laplaciano da  $f$  é a função

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$



**Observação A.0.7.** Se  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{C}$ ) é de classe  $C^k$ ,  $k \geq 2$ , então o laplaciano da  $f$  é igual a divergência do gradiente da  $f$ , i.e.,

$$\Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f).$$

*Prova.* De fato, se  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{C}$ ) é de classe  $C^k$ ,  $k \geq 2$ ,  $\operatorname{grad} f = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$  é pelo menos de classe  $C^1$  sobre  $\Omega$  e, portanto,

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \operatorname{div} \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \Delta f.$$

Como queríamos mostrar. ■

Definições idênticas permanecem válidas para  $\bar{\Omega}$ .

Uma superfície  $M$  de classe  $C^k$ ,  $1 \leq k \leq \infty$  é um subconjunto  $S$  do  $\mathbb{R}^n$  tal que para todo  $x_0 \in S$  existe uma vizinhança aberta de  $x_0$ ,  $V_{x_0} \subset \mathbb{R}^n$ , e uma função real,  $\phi \in C^k$  em  $V_{x_0}$  satisfazendo  $\nabla \phi \neq 0$  em  $V_{x_0}$  e  $S \cap V_{x_0} = \{x \in V_{x_0} : \phi(x) = 0\}$ . Neste caso, utilizando o teorema da função implícita (e uma mudança de coordenada conveniente)  $S$  pode ser representada localmente como gráfico de uma função de classe  $C^k$ .

**Teorema A.0.8 (Da divergência).** Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um domínio limitado com  $\partial\Omega$  suave e  $G$  um campo vetorial de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$  em  $\bar{\Omega}$ . Então

$$\int_{\partial\Omega} G(y) \cdot \nu(y) d\sigma(y) = \int_{\Omega} \operatorname{div} G(x) dx$$

onde  $\nu(y)$  denota a normal exterior a  $\partial\Omega$  no ponto  $y$  e  $d\sigma(y)$  é a medida geométrica natural sobre  $\partial\Omega$ .

**Proposição A.0.9.** A função  $x \rightarrow \|x\|^\lambda$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  é integrável sobre uma vizinhança do zero se, e somente, se  $\lambda > -n$  e integrável fora desta vizinhança se, e somente, se  $\lambda < -n$ .

*Prova.* Com efeito, se  $x \in \mathbb{R}^n$ , então  $x = r\omega$ , onde  $0 < r \leq 1$ ,  $r = \|x\|$  e  $\omega = \frac{x}{\|x\|}$ .

$\omega \in S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$  e, portanto,  $dx = r^{n-1} dr d\omega$  e

$$\begin{aligned}
 \int_{0 < \|x\| \leq 1} \|x\|^\lambda dx &= \int_0^1 \int_{S(0,1)} r^\lambda r^{n-1} dr d\omega \\
 &= \int_0^1 r^{\lambda+n-1} dr \int_{S(0,1)} d\omega \\
 &= \omega_n \int_0^1 r^{\lambda+n-1} dr \quad (\text{seja, então } \epsilon > 0, \text{ temos}) \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \omega_n \int_\epsilon^1 r^{\lambda+n-1} dr \\
 &= \frac{\omega_n}{\lambda+n} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (1 - \epsilon^{\lambda+n}) \\
 &= \frac{\omega_n}{\lambda+n} < +\infty
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

se, e somente, se  $\lambda + n > 0 \iff \lambda > -n$ , pois quando  $\epsilon \rightarrow 0$ ,  $\epsilon^{\lambda+n} \rightarrow 0$ . Como queríamos provar.

Agora, vamos ver o caso  $\int_{\|x\| \geq 1} \|x\|^\lambda dx$ .

$$\begin{aligned}
 \int_{\|x\| \geq 1} \|x\|^\lambda dx &= \int_1^\epsilon \int_{S(0,1)} r^\lambda r^{n-1} dr d\omega \\
 &= \int_1^\epsilon r^{\lambda+n-1} dr \int_{S(0,1)} d\omega \\
 &= \omega_n \int_1^\epsilon r^{\lambda+n-1} dr \quad (\text{seja, então } \epsilon \text{ arbitrariamente grande, temos}) \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow +\infty} \omega_n \int_1^\epsilon r^{\lambda+n-1} dr \\
 &= \frac{\omega_n}{\lambda+n} \lim_{\epsilon \rightarrow +\infty} (\epsilon^{\lambda+n} - 1) \\
 &= -\frac{\omega_n}{\lambda+n} < +\infty
 \end{aligned} \tag{A.2}$$

se, e somente, se  $\lambda + n < 0 \iff \lambda < -n$ , pois quando  $\epsilon \rightarrow +\infty$ ,  $\epsilon^{\lambda+n} \rightarrow 0$ . Logo, esta provada a afirmativa. ■

**Corolário A.0.10.** A função  $x \rightarrow \|x\|^{-\lambda}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  é integrável sobre uma vizinhança do zero se, e somente, se  $\lambda < n$  e integrável fora desta vizinhança se, e somente, se  $\lambda > n$ .

*Prova.* A prova deste fato é imediata da Proposição A.0.9. ■

**Observação A.0.11.** Se  $\lambda = n$ , então

$$\int_{0 < \|x\| \leq 1} \|x\|^{-n} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \omega_n \int_{\epsilon}^1 r^{-n+n-1} dr = \omega_n \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [-\ln(\epsilon)] \rightarrow +\infty$$

pois o  $\ln(\epsilon) \rightarrow -\infty$  quando  $\epsilon \rightarrow 0$ . No caso  $\|x\| \geq 1$ , temos

$$\int_{\|x\| \geq 1} \|x\|^{-n} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow +\infty} \omega_n \int_1^{\epsilon} r^{-n+n-1} dr = \omega_n \lim_{\epsilon \rightarrow +\infty} [\ln(\epsilon)] \rightarrow +\infty$$

pois o  $\ln(\epsilon) \rightarrow +\infty$  quando  $\epsilon \rightarrow +\infty$ . Logo, a função  $x \rightarrow \|x\|^{-\lambda}$  não é integrável para  $\lambda = n$ .

Note que  $\omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$ , onde  $\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{s-1} dt, s > 0$  é a área da superfície esférica do  $\mathbb{R}^n$ .

**Exemplo A.0.12.** Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  um domínio regular (aberto, limitado com  $\partial\Omega$  suave) e  $x_0$  um ponto fixado em  $\Omega$ , então a função  $y \in \Omega \mapsto F(x_0 - y) = -(\omega_n \|x_0 - y\|)^{-1}$  é localmente integrável e

$$\int_{B(x_0, \epsilon)} |F(x_0 - y)| dy = \frac{\epsilon^2}{2} < +\infty.$$

*Prova.* De fato, se introduzirmos coordenadas esféricas  $y - x_0 = r\omega$ ,  $0 < r \leq \epsilon$  e  $\|\omega\| = 1$ , então  $dy = r^2 dr d\omega$ , onde  $d\omega$  denota o elemento de área na  $S(x_0, 1)$  e, portanto,

$$\begin{aligned} \int_{B(x_0, \epsilon)} |F(x_0 - y)| dy &= \int_{B(x_0, \epsilon)} |-(4\pi \|x_0 - y\|)^{-1}| dy \\ &= \int_{B(x_0, \epsilon)} |-(4\pi \|r\omega\|)^{-1}| r^2 dr d\omega \\ &= (4\pi)^{-1} \int_{S(0,1)} d\omega \int_0^{\epsilon} r^{-1} r^2 dr \\ &= (4\pi)^{-1} \int_{S(0,1)} d\omega \frac{r^2}{2} \Big|_0^{\epsilon} \\ &= (4\pi)^{-1} 4\pi \frac{\epsilon^2}{2} = \frac{\epsilon^2}{2} < +\infty \end{aligned} \tag{A.3}$$

como queríamos provar. ■

**Observação A.0.13.** Poderíamos, ter mostrado que

$$y \in \Omega \mapsto F(x_0 - y) = -(4\pi \|x_0 - y\|)^{-1}$$

é localmente integrável, trasladando o problema para a origem e, em seguida, aplicando o Corolário A.0.10, pois  $\lambda = 1 < 3$  que é a dimensão do espaço  $\mathbb{R}^3$ . Mas como precisávamos do valor desta integral resolvemos fazer seu cálculo diretamente.

## A.1 Identidades de Green

Vamos obter nesta seção as três identidades fundamentais que são conhecidas por Identidades de Green, mas inicialmente faremos alguns resultados que serão necessários para suas, respectivas, demonstrações.

**Lema A.1.1.** *Se a função  $g \in C(\overline{B(x, \epsilon)})$ , então*

- (i)  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S(x, \epsilon)} F(x - y)g(y)d\sigma(y) = 0$
- (ii)  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S(x, \epsilon)} \frac{\partial F(x-y)}{\partial \nu_y} g(y)d\sigma(y) = g(x)$  onde  $\nu_y$  denota a normal exterior a  $S(x, \epsilon)$  no ponto  $y$  e  $F(x - y) = -(4\pi\|x_0 - y\|)^{-1}$ .

Antes de provarmos este Lema faremos uma observação que será de extrema importância para sua prova.

**Observação A.1.2.** *Notemos que:*

- (a)  $\int_{S(x, \epsilon)} F(x - y)g(y)d\sigma(y) = -(4\pi\epsilon)^{-1} \int_{S(x, \epsilon)} g(y)d\sigma(y)$
- (b)  $\frac{\partial F(x-y)}{\partial \nu_y} = (4\pi)^{-1}\|x - y\|^{-2}$

*Prova.* Mostremos (a):

$$\begin{aligned} \int_{S(x, \epsilon)} F(x - y)g(y)d\sigma(y) &= \int_{S(x, \epsilon)} -(4\pi\|x - y\|)^{-1}g(y)d\sigma(y) \\ &= -(4\pi\epsilon)^{-1} \int_{S(x, \epsilon)} g(y)d\sigma(y) \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

a última igualdade se deve ao fato que na  $S(x, \epsilon)$ , temos que  $\|x - y\| = \epsilon$ . E, assim, fica mostrada a afirmativa em (a).

Agora, mostremos a afirmativa em (b):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F(x-y)}{\partial \nu_y} &= \nabla_y F(x-y) \cdot \nu_y \\
&= \left( \frac{\partial F(x-y)}{\partial y_1}, \frac{\partial F(x-y)}{\partial y_2}, \frac{\partial F(x-y)}{\partial y_3} \right) \cdot \frac{y-x}{\|y-x\|} \\
&= (4\pi)^{-1} \|x-y\|^{-3} (y_1 - x_1, y_2 - x_2, y_3 - x_3) \cdot \frac{y-x}{\|y-x\|} \\
&= (4\pi)^{-1} \|x-y\|^{-3} \frac{(y-x) \cdot (y-x)}{\|y-x\|} \\
&= (4\pi)^{-1} \|x-y\|^{-3} \frac{\|y-x\|^2}{\|y-x\|} = (4\pi)^{-1} \|x-y\|^{-2} \tag{A.5}
\end{aligned}$$

e, portanto, segue o resultado. ■

*Prova.* (Do Lema A.1.1). Parte (i): Pela parte (a) da Observação A.1.2, temos

$$\begin{aligned}
\left| \int_{S(x,\epsilon)} F(x-y)g(y)d\sigma(y) \right| &= \left| - (4\pi\epsilon)^{-1} \int_{S(x,\epsilon)} g(y)d\sigma(y) \right| \\
&\leq (4\pi\epsilon)^{-1} \int_{S(x,\epsilon)} |g(y)|d\sigma(y) \\
&\leq (4\pi\epsilon)^{-1} M 4\pi\epsilon^2 = M\epsilon \rightarrow 0 \tag{A.6}
\end{aligned}$$

quando  $\epsilon \rightarrow 0$ ,  $M = \sup_{y \in \overline{B(x,\epsilon)}} |g(y)|$  este número existe, pois  $g \in C(\overline{B(x,\epsilon)})$ . E isto prova (i).

Parte(ii):Pela parte (b)da Observação A.1.2),temos

$$\begin{aligned}
\int_{S(x,\epsilon)} \frac{\partial F(x-y)}{\partial \nu_y} g(y)d\sigma(y) &= \int_{S(x,\epsilon)} (4\pi)^{-1} \|x-y\|^{-2} g(y)d\sigma(y) \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon^2} \int_{S(x,\epsilon)} g(y)d\sigma(y) \tag{A.7}
\end{aligned}$$

Observe que (A.7) é exatamente o valor médio da função  $g(y)$  sobre a esfera  $S(x,\epsilon)$ . Sabendo-se que  $g \in C(\overline{B(x,\epsilon)})$   $g$  é uniformemente contínua (e limitada) e, portanto, dado  $\delta > 0$  existe  $\gamma = \gamma(\delta)$  tal que, se  $y_1, y_2 \in \overline{B(x,\epsilon)}$ ,  $|g(y_1) - g(y_2)| < \delta$ . Então, tomando-se

$\epsilon < \delta$ , temos

$$\begin{aligned}
\left| \int_{S(x,\epsilon)} \frac{\partial F(x-y)}{\partial \nu_y} g(y) d\sigma(y) - g(x) \right| &= \frac{1}{4\pi\epsilon^2} \left| \int_{S(x,\epsilon)} g(y) d\sigma(y) - \int_{S(x,\epsilon)} g(x) d\sigma(y) \right| \\
&\leq \frac{1}{4\pi\epsilon^2} \int_{S(x,\epsilon)} |g(y) - g(x)| d\sigma(y) \\
&\leq \frac{1}{4\pi\epsilon^2} \int_{S(x,\epsilon)} \delta d\sigma(y) \\
&\leq \frac{\delta}{4\pi\epsilon^2} 4\pi\epsilon^2 = \delta.
\end{aligned} \tag{A.8}$$

Daí segue (ii). E de (i) e (ii), está provado o Lema A.1.1. ■

**Teorema A.1.3.** *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 3$  um domínio limitado, onde vale o Teorema da divergência, A.0.8, e  $u, v \in C^k(\bar{\Omega})$ ,  $k \geq 2$ . Então*

- (i)  $\int_{\Omega} (v(x)\Delta u(x) + \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)) dx = \int_{\partial\Omega} v(y) \frac{\partial u(y)}{\partial \nu_y} d\sigma(y)$
- (ii)  $\int_{\Omega} (v(x)\Delta u(x) - u(x)\Delta v(x)) dx = \int_{\partial\Omega} \left( v(y) \frac{\partial u(y)}{\partial \nu_y} - u(y) \frac{\partial v(y)}{\partial \nu_y} \right) d\sigma(y)$
- (iii)  $\forall x \in \Omega$  tem-se

$$u(x) = \int_{\Omega} F(x-y)\Delta u(y) dy + \int_{\partial\Omega} \left[ u(y) \frac{\partial F(x-y)}{\partial \nu_y} - F(x-y) \frac{\partial u(y)}{\partial \nu_y} \right] d\sigma(y),$$

onde  $F(x-y) = -(4\pi\|x-y\|)^{-1}$ ,  $(x-y) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  e  $\frac{\partial}{\partial \nu_y}$  denota a derivada direcional em relação a normal no ponto  $y \in \partial\Omega$ .

*Prova.* Parte (i): Sabemos que

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega} v(y) \frac{\partial u(y)}{\partial \nu_y} d\sigma(y) &= \int_{\partial\Omega} v(y) [\nabla u(y) \cdot \nu_y] d\sigma(y) \\
&= \int_{\partial\Omega} [v(y) \nabla u(y)] \cdot \nu_y d\sigma(y) \quad (\text{pelo Teorema da divergência, temos}) \\
&= \int_{\Omega} \operatorname{div}[v(x) \nabla u(x)] dx \\
&= \int_{\Omega} \operatorname{div}[v(x)(u_{x_1}(x), u_{x_2}(x), u_{x_3}(x))] dx \\
&= \int_{\Omega} ([v(x)u_{x_1}(x)]_{x_1} + [v(x)u_{x_2}(x)]_{x_2} + [v(x)u_{x_3}(x)]_{x_3}) dx \\
&= \int_{\Omega} [v(x)\Delta u(x) + \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)] dx
\end{aligned} \tag{A.9}$$

desenvolvendo a regra do produto para derivadas, arranjando os termos que aí aparecem e substituindo as identidades convenientemente, obtemos a última integral desejada. E, portanto, vale a identidade em (i).

Parte (ii): Pela parte (i) trocando-se  $v$  por  $u$ , temos

$$\int_{\Omega} (u(x)\Delta v(x) + \nabla v(x) \cdot \nabla u(x)) dx = \int_{\partial\Omega} u(y) \frac{\partial v(y)}{\partial \nu_y} d\sigma(y)$$

agora, subtraindo, membro a membro, a equação em (i) desta última, temos a igualdade em (ii), pois  $\nabla u(x) \cdot \nabla v(x) = \nabla v(x) \cdot \nabla u(x)$ .

Parte (iii): Finalmente, vamos mostrar a identidade em (iii), mas antes faremos algumas considerações técnicas sobre as integrais que aí aparecem. Inicialmente percebamos que se  $y \in \partial\Omega$ , então  $y \neq x, \forall x \in \Omega$  e, portanto, o integrando

$$u(y) \frac{\partial F(x-y)}{\partial \nu_y} - F(x-y) \frac{\partial u(y)}{\partial \nu_y}$$

é contínua em  $\partial\Omega$ , pois  $x-y \neq 0, \forall y \in \partial\Omega$  e  $x \in \Omega$ . Daí, tem sentido a integral que compõe o segundo termo de  $u(x)$  na terceira identidade. Quanto ao integrando

$$F(x-y)\Delta u(y)$$

na primeira integral, integral sobre  $\Omega$ , da função  $u$  precisamos ter mais cuidado com a função  $F(x-y)$  que multiplica o laplaciano da  $u$ , pois neste caso temos singularidade a considerar, já que a integral deste integrando é sobre  $\Omega$  e, portanto, podemos ter  $x=y$  donde a função  $F(x-y) = -(4\pi\|x-y\|)^{-1}$  não está definida, mas pelo Exemplo A.0.12 sabemos que  $F$  é localmente integrável em  $\mathbb{R}^3$  e a integral sobre a  $B(x_0, \epsilon)$  de  $F$  é igual  $\frac{\epsilon^2}{2} < +\infty$ . Sendo o  $\Delta u$  uma função limitada (de fato, se  $\Omega$  é limitado,  $\bar{\Omega}$  é compacto e como o laplaciano da  $u$  é contínua, pois  $u \in C^2(\bar{\Omega})$  segue que  $\Delta u$  é limitada e uniformemente contínua em  $\bar{\Omega}$ ) segue que se  $\epsilon > 0$  é tal que  $\overline{B(x_0, \epsilon)} \subset \Omega$  e  $M = \sup_{y \in \bar{\Omega}} \Delta u(y)$ , temos

$$\begin{aligned} \left| \int_{\bar{\Omega}} F(x_0-y)\Delta u(y) dy \right| &\leq \int_{\bar{\Omega}} |F(x_0-y)| |\Delta u(y)| dy \\ &\leq M \int_{\bar{\Omega}} |F(x_0-y)| dy \\ &= M \left( \int_{\bar{\Omega} \setminus B(x_0, \epsilon)} |F(x_0-y)| dy + \int_{B(x_0, \epsilon)} |F(x_0-y)| dy \right) \\ &< +\infty \end{aligned} \tag{A.10}$$

pois  $F(x - y)$  é contínua em  $\overline{\Omega} \setminus B(x_0, \epsilon)$ . Portanto, a integral sobre  $\overline{\Omega}$  existe no sentido de Lebesgue. Em particular,

$$\int_{\Omega} F(x - y) \Delta u(y) dy = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \int_{\overline{\Omega} \setminus B(x_0, \epsilon)} F(x_0 - y) \Delta u(y) dy \right),$$

onde a integral sobre  $\overline{\Omega} \setminus B(x_0, \epsilon)$  podem ser interpretadas como integrais de Riemann, pois o integrando  $F(x_0 - y) \Delta u(y)$  é uma função contínua definida no compacto  $\overline{\Omega} \setminus B(x_0, \epsilon)$ . Logo, destas considerações tem sentido o primeiro membro da função  $u(x)$  na identidade em (iii) e, portanto, a função  $u(x)$  esta bem definida. Agora, basta mostrarmos sua validade.

Fixemos  $x_0 \in \Omega$  e seja  $\epsilon > 0$  tal que  $\overline{B(x_0, \epsilon)} \subset \Omega$ . Seja, então  $\Omega_\epsilon = \Omega \setminus \overline{B(x_0, \epsilon)}$ . Como  $v(y) = F(x_0 - y)$  pertence a  $C^2(\overline{\Omega_\epsilon})$ , pois para todo  $y \in \Omega_\epsilon$   $y \neq x_0$ , e sendo  $\Omega_\epsilon$  um domínio limitado, onde vale o teorema da divergência segue que podemos aplicar a identidade em (ii) para a função  $v(y) = F(x_0 - y)$ , então

$$\int_{\Omega_\epsilon} (F(x_0 - y) \Delta u(y) dy = \int_{\partial \Omega_\epsilon} \left( F(x_0 - y) \frac{\partial u(y)}{\partial \nu_y} - u(y) \frac{\partial F(x_0 - y)}{\partial \nu_y} \right) d\sigma(y) \quad (\text{A.11})$$

pois  $u(y) \Delta F(x_0 - y) = 0$  já que  $\Delta v(y) = \Delta F(x_0 - y) = 0$ . De fato,  $v(y) = F(x_0 - y) = -(4\pi \|x_0 - y\|)^{-1}$  pertence a  $C^2(\Omega_\epsilon)$  e, portanto, podemos calcular  $\Delta v(y) = \Delta F(x_0 - y)$ . Então

$$\begin{aligned} \Delta v(y) = \Delta F(x_0 - y) &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 F(x_0 - y)}{\partial y_i^2} \\ &= \sum_{i=1}^3 \left[ (4\pi)^{-1} \left( \left( \sum_{i=1}^3 (x_i^0 - y_i)^2 \right)^{-\frac{3}{2}} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. -3(x_i^0 - y_i)^2 \left( \sum_{i=1}^3 (x_i^0 - y_i)^2 \right)^{-\frac{5}{2}} \right) \right] \\ &= 3(4\pi)^{-1} (\|x_0 - y\|^{-3} - \|x_0 - y\|^2 \|x_0 - y\|^{-5}) \\ &= 3(4\pi)^{-1} (\|x_0 - y\|^{-3} - \|x_0 - y\|^{-3}) = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$



Agora, desenvolvendo o segundo membro da equação (A.11), vem

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_\epsilon} (F(x_0 - y)\Delta u(y))dy &= \int_{\partial\Omega_\epsilon} \left( F(x_0 - y)\frac{\partial u(y)}{\partial\nu_y} - u(y)\frac{\partial F(x_0 - y)}{\partial\nu_y} \right) d\sigma(y) \\
&= \int_{\partial\Omega} \left( F(x_0 - y)\frac{\partial u(y)}{\partial\nu_y} - u(y)\frac{\partial F(x_0 - y)}{\partial\nu_y} \right) d\sigma(y) - \\
&\quad - \int_{S(x_0, \epsilon)} \left( F(x_0 - y)\frac{\partial u(y)}{\partial\nu_y} - u(y)\frac{\partial F(x_0 - y)}{\partial\nu_y} \right) d\sigma(y) \\
&= \int_{\partial\Omega} \left( F(x_0 - y)\frac{\partial u(y)}{\partial\nu_y} - u(y)\frac{\partial F(x_0 - y)}{\partial\nu_y} \right) d\sigma(y) - \\
&\quad - \int_{S(x_0, \epsilon)} F(x_0 - y)\frac{\partial u(y)}{\partial\nu_y} d\sigma(y) + \\
&\quad + \int_{S(x_0, \epsilon)} u(y)\frac{\partial F(x_0 - y)}{\partial\nu_y} d\sigma(y). \tag{A.13}
\end{aligned}$$

O sinal negativo que surge no segundo termo da segunda igualdade se justifica, pois a normal exterior a  $\partial\Omega$  aponta para dentro da bola  $B(x_0, \epsilon)$ . E, portanto, fazendo  $\epsilon \rightarrow 0$  e usando o Lema A.1.1 parte (i) e (ii), respectivamente, temos

$$\begin{aligned}
\int_{S(x_0, \epsilon)} F(x_0 - y)\frac{\partial u(y)}{\partial\nu_y} d\sigma(y) &\rightarrow 0 \\
\int_{S(x_0, \epsilon)} u(y)\frac{\partial F(x_0 - y)}{\partial\nu_y} d\sigma(y) &\rightarrow u(x_0)
\end{aligned}$$

pois  $\frac{\partial u(y)}{\partial\nu_y}$  e  $u(y)$  são ambas contínuas em  $\overline{B(x_0, \epsilon)}$ . De modo que

$$\int_{\Omega} (F(x_0 - y)\Delta u(y))dy = \int_{\partial\Omega} \left( F(x_0 - y)\frac{\partial u(y)}{\partial\nu_y} - u(y)\frac{\partial F(x_0 - y)}{\partial\nu_y} \right) d\sigma(y) + u(x_0).$$

Agora, rearranjando esta equação e lembrando que  $x_0 \in \Omega$  é um ponto arbitrário esta provada a identidade em (iii).

De (i), (ii), (iii) esta provado o Teorema A.1.3. ■

As três identidades que aparecem no Teorema A.1.3 são conhecidas, respectivamente, por primeira, segunda e terceira identidade de Green.

---

## Referências Bibliográficas

- [1] D. G. DE FIGUEIREDO, *Análise de Fourier e equações diferenciais parciais*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1977.
- [2] G. B. FOLLAND, *Introduction to partial differential equations*, Princeton University Press, Princeton, NJ, second ed., 1995.
- [3] R. IÓRIO, JR. AND V. D. M. IÓRIO, *Equações diferenciais parciais: uma introdução*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1988.
- [4] F. JOHN, *Partial differential equations*, Springer-Verlag, New York, fourth ed., 1991.
- [5] P. D. LAX AND R. S. PHILLIPS, *Scattering theory*, Academic Press Inc., Boston, MA, second ed., 1989. With appendices by Cathleen S. Morawetz and Georg Schmidt.
- [6] C. S. MORAWETZ, *The decay of solutions of the exterior initial-boundary value problem for the wave equation*, *Comm. Pure Appl. Math.*, 14 (1961), pp. 561–568.
- [7] —, *Energy flow: Wave motion and geometrical optics*, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 76 (1970), pp. 661–674.
- [8] J. RALSTON, *Note on the decay of acoustic waves*, *Duke Math. J.*, 46 (1979), pp. 799–804.
- [9] S. L. SOBOLEV AND E. R. DAWSON, *Partial differential equations of mathematical physics*, Pergamon Press, Oxford, 1964. Translated from the third Russian edition by E. R. Dawson; English translation edited by T. A. A. Broadbent.

- [10] W. A. STRAUSS, *Partial differential equations*, John Wiley & Sons Inc., New York, 1992. An introduction.
- [11] C. H. WILCOX, *The initial boundary value problem for the wave equation in an exterior domain with spherical boundary*, Amer. Math. Soc., 6 (1959).

---

# Índice Remissivo

$E(\mathcal{R}, t)$  indica a energia de  $u$ , na região  $\mathcal{R}$ , no instante  $t$ , 2

$E_w$ : indica a quantidade de energia para a solução  $w$  da equação da onda, 27

$\Delta$ : indica o Laplaciano de uma função, 8

$\Delta_x$ : indica o Laplaciano na variável  $x$ , 11

$\alpha \in \mathbb{N}^n$ ,  $\partial^\alpha = \partial^{\alpha_1} \partial^{\alpha_2} \dots \partial^{\alpha_n}$ , é o operador diferencial de ordem  $\alpha$ , 7

$\alpha \in \mathbb{N}^n$ ,  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ ,  $\alpha_i \in \mathbb{N}$ , é um multi-índice, 6

$\nabla$ : indica o gradiente de uma função, 10

$\omega_n$ : indica a área da superfície esférica do  $\mathbb{R}^n$ , 11

$\omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$ , onde  $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} dt$ ,  $s > 0$  é a área da superfície esférica do  $\mathbb{R}^n$ , 48

$\partial_\nu^j u$  é a  $j$ -ésima derivada de  $u$  na direção normal, 8

$\square$ : símbolo usado para definir o Operador de d'Alembert, 2

$\xi \in \mathbb{R}^n$ ,  $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2} \dots \xi_n^{\alpha_n}$ , 6

$x \cdot \nabla u + tu_i + u$ : multiplicador, 2

cone de luz, 7, 8

conjunto frente de ondas, 19

conjuntos frente de onda, 21

conservação de energia, 22

conservativo, 10

corpo esférico, 21

corpo estrelado, 1, 23, 33, 42

corpo refletor, 1, 21, 22

decaimento da solução, 21

decaimento local, 1

desigualdade de Schwarz, 31, 40

domínio de influência dos dados iniciais, 6, 36

energia, 21

equação da onda 1-dimensional, 5

equação da onda 1-dimensional, 14

equação da onda, 21

equação da onda  $n$ -dimensional, 14

equação da onda com obstáculo, 32

equação de Euler-Poisson-Darboux, 12

equação diferencial de Darboux, 11

equação diferencial de Euler-Poisson-Darboux,

- estrelado, 22  
existência de solução, 27  
Fórmula de d'Alembert, 6  
fórmula de Kirchhoff, 17  
flash de luz, 19  
fluxo de energia, 1  
funções ímpares, 16  
funções pares, 16  
Hadamard, 7  
hipersuperfície, 6  
hipersuperfície não-característica, 8  
invariante, 8  
Laplaciano para funções radiais, 12  
média esférica, 11  
método da redução de Hadamard, 17  
método das médias esféricas, 11  
obstáculo, 22  
operador d'alembertiano, 7  
operador da onda, 8  
operador diferencial parcial linear, 6  
operador linear de entrelaçamento, 14  
operador linear de entrelaçamento, 13  
polinômio homogêneo, 6  
Princípio de Huyghen, 18  
princípio de Huyghen, 21  
problema de Cauchy, 5, 7, 11  
problema de valor inicial e de fronteira  
(P.V.I.F.), 23  
problema de valor inicial e de fronteira  
P.I.V.F., 33  
reflexão, 21  
região cônica, 9  
região de influência dos dados iniciais, 6  
reverberações, 1, 21  
símbolo principal, 7  
solução fundamental, 29  
suave, 1  
suficientemente regulares, 1  
superfície não-característica, 8  
taxa de decaimento, 22  
variedade característica, 6, 7  
vetor característico, 6  
vetor exterior normal, 33  
vetor normal, 6, 8