

**Mergulhos de quivers
com translação em quivers
de tipo $\mathbb{Z}\Delta$**

EDSON RIBEIRO ALVARES

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR
EM
MATEMÁTICA

Área de Concentração: **Álgebra**
Orientador: **Prof. Dr. Flávio Ulhoa Coelho**

Durante a elaboração deste trabalho o autor recebeu apoio financeiro da CAPES e da UFPR.

— São Paulo, agosto de 2002 —

Mergulhos de quivers com translação em quivers de tipo $\mathbb{Z}\Delta$

Edson Ribeiro Alvares

Este exemplar corresponde à redação final da tese, devidamente corrigida, defendida por Edson Ribeiro Alvares e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, 22 de agosto de 2002.

Banca examinadora:

- Prof. Dr. Flávio Ulhoa Coelho (orientador) — MAT-IME-USP
- Prof. Dr. Héctor Alfredo Merklen Goldschmidt — MAT-IME-USP
- Prof^a. Dr^a. María Inés Platzeck — Universidad Nacional Del Sur
- Prof. Dr. Miguel Angel Alberto Ferrero — UFRGS
- Prof^a. Dr^a. Sonia Elisabet Trepode — Universidad de Mar Del Plata

Analice Gebauer Volkov
(*in memoriam*)

*Beatriz Pierin de Barros e
Silva*
(*in memoriam*)

Agradecimentos

Todos os que fizeram uma tese ou que estão fazendo sabem que é uma etapa da vida muitas vezes prazerosa, muitas vezes árdua. Tudo no ambiente em que você está inserido pode ser visto como um fator para seu sucesso ou não. E, em geral, nos ambientes existem seres humanos. Falemos deles, já que são com eles e para eles que estudamos tanto.

Escolhi como orientador um ser humano extremamente dedicado a matemática e a esta instituição que é o IME-USP. Esta pessoa é Flávio Ulhoa Coelho. Foi ele quem me acompanhou durante todos estes anos e é a ele que devo agradecer por tantas broncas para me colocar no rumo, por ter lido tantas vezes o trabalho e pelos conselhos. Conselhos esses que eu em geral não seguia como ele mesmo dizia, apesar de que quando olho para trás vejo que ele influenciou muito na minha formação e na minha postura diante da matemática.

Outro ser que também influenciou minha conduta como professor foi o Prof. Hector Alfredo Merklen Goldschmidt. Suas aulas me fizeram repensar o processo ensino-aprendizagem. Durante essas aulas, conheci alguns outros seres e acabei fazendo uma boa amizade com Hernan Alonso Giraldo Salazar. Nós dois, juntamente com Clézio, fizemos um bom grupo para estudar o livro do Auslander. Fizemos os créditos juntos e viajamos muito também.

No ano 2000, começamos a pensar na tese. Ocorreram muitas mudanças neste ano. Chegavam para estudar em São Paulo o Carlos Henrique dos Santos e a Beatriz, ambos vindos da UFPR. Estava apreensivo por ter terminado os créditos e ter que fazer uma tese. Dali para frente parecia tudo muito nebuloso.

E de fato foi um ano difícil e de muita dor. Perdemos a Beatriz e a Analice. Cada um de nós chorou a sua maneira e tentou aprender alguma coisa. Elas se foram e deixaram a certeza de que precisávamos fazer uma nova releitura do mundo. Fizemos

novos amigos.

Meu pai deu sinal de cansaço, mas felizmente foi somente um susto. Recuperou-se e me ensinou algo sobre vontade de viver.

Logo em seguida o trabalho começava a deslanchar. Ora achando que não existia nada, ora achando que estava próximo do final. Neste período, Marcelo Lanzilotta fazia o pós-doutorado no IME e apresentei a ele o que vinha pensando. Fiquei mais seguro do que vinha fazendo e a ele devo meu muito obrigado.

Bom, durante esses quatro anos vários seres tão complicados passaram e deixaram suas marcas. Outros entraram na minha vida e alguns outros continuaram nela. Quero agradecer aqui a companhia e amizade de Carlos Henrique dos Santos, Clézio Aparecido Braga, Maria Izabel Ramalho Martins e Eduardo Nascimento Marcos.

Devo agradecer também a duas mulheres. São elas, Maria Simone e Sandra Eliza. Sobre elas tenho algo simples e belo a dizer, mas esse pedaço de papel não me é suficiente para fazê-lo.

Sumário

Introdução	1
1 Quiver com Translação	7
1.1 Quivers	7
1.2 Morfismos de Quivers	11
1.3 Álgebras de caminhos	12
1.4 Representações de Quivers	14
1.5 Seqüências e quivers de Auslander-Reiten	15
1.6 Dimensões Homológicas	19
2 Quivers com translação com seção	21
2.1 Propriedades de quivers com seção	22
2.2 Quiver com translação com seção e sem ciclos	27
2.3 As definições de Ringel e Size Li	28
2.4 Uma seção especial para quivers com translação	35
2.4.1 Uma relação de ordem para os injetivos e projetivos de Γ	35
2.4.2 A seção que contém injetivos minimais ou projetivos maximais	40
2.4.3 Resultados Principais	43
3 Álgebras Shod	46
3.1 Álgebras shod	46

3.2	Caminhos de módulos injetivos para módulos projetivos	47
3.3	Componentes do quiver A.R. de uma álgebra shod	49
3.4	Extensões por um ponto	51
4	Mergulho em $\mathbb{Z}\tilde{\Delta}$ de um quiver com seção dupla	52
4.1	Quivers com seção dupla, algumas propriedades	53
4.1.1	Seção dupla	54
4.1.2	Seções duplas para álgebras shod e quivers com translação	56
4.2	Subquivers Δ^i de uma seção dupla Δ	60
4.3	Quiver modificado	68
4.4	O mergulho	75
	Referências Bibliográficas	87

Introdução

Os principais objetos de estudo da teoria de representações de álgebras são as categorias de módulos. Num certo contexto, esta teoria estuda a categoria de módulos finitamente gerados à esquerda (ou à direita) sobre uma álgebra de Artin, isto é, um anel finitamente gerado sobre seu centro e este por sua vez é um anel artiniano. Casos particulares desta álgebra são as álgebras de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado. Este trabalho se enquadra no contexto das álgebras de Artin. Para uma álgebra de Artin A , denotaremos por $\text{mod}A$ a categoria dos A -módulos finitamente gerados e $\text{ind}A$ a subcategoria plena de $\text{mod}A$ consistindo dos representantes de cada isoclasse de módulos indecomponíveis.

Uma classe de álgebras que foi amplamente estudada é a classe das álgebras hereditárias (álgebras tais que todo submódulo de um módulo projetivo é projetivo). Gabriel caracterizou as álgebras hereditárias do tipo de representação finito como aquelas que estão associadas aos diagramas de Dynkin. Posteriormente, Nazarova e outros provaram que as álgebras hereditárias mansas estão caracterizadas pelos diagramas de Dynkin estendidos, também conhecidos como diagramas Euclidianos.

Um dos problemas clássicos da teoria de representações consiste em descobrir o tipo de representação de uma álgebra dada, isto é, saber qual o *número* de classes de isomorfismos de módulos indecomponíveis sobre a álgebra dada. Faz parte do problema, também, descobrir se este número é finito ou infinito e se, no caso de ser infinito, os módulos indecomponíveis poderão ser de alguma forma parametrizados. No caso de ser possível parametrizar é o que chamamos de álgebra do tipo manso e caso contrário, do tipo selvagem.

Dois dos problemas que mais contribuíram para o desenvolvimento da teoria foram, sem dúvida, as conjecturas de Brauer-Thrall I e II. A primeira foi resolvida por Roiter e é hoje conhecida como Teorema de Roiter. Roiter provou que uma álgebra de dimensão finita é do tipo de representação finito se, e somente se, existir um limitante superior para o comprimento dos módulos indecomponíveis sobre esta álgebra (ver [Roi68]). Em seguida, Auslander apresentou uma generalização do Teorema de Roiter para anéis artinianos em [Aus74]. Foi em [AR75] que se deu o surgimento das

seqüências de Auslander-Reiten (“almost split sequences”), que por sua vez deram um novo impulso ao desenvolvimento da teoria de representações além de esclarecer inúmeras questões levantadas nas conjecturas de Brauer-Thrall. A segunda conjectura de Brauer-Thrall diz que para uma álgebra de dimensão finita do tipo de representação infinito sobre um corpo infinito, existe um número infinito de dimensões onde dada uma dessas dimensões, existem infinitos módulos indecomponíveis não isomorfos com a dimensão dada.

Outra forma de estudar as categorias de módulos de uma álgebra de Artin A é estudá-la através do seu quiver de Auslander-Reiten Γ_A . A introdução do conceito de quiver ampliou as possibilidades para atacar problemas relativos a uma categoria de módulos previamente fixada. Em poucas palavras, podemos dizer que um quiver é um grafo orientado.

Neste trabalho, faremos primeiramente um estudo dos quivers de uma forma geral e que, em particular, se aplica para quivers de Auslander-Reiten. No Capítulo 1 desenvolveremos toda a teoria básica de quiver e em particular apresentaremos o conceito de quiver de Auslander-Reiten. A princípio podemos dizer que o quiver de Auslander-Reiten é simplesmente um grafo orientado onde cada vértice representa a classe de isomorfismos de um módulo indecomponível e cada flecha representa um morfismo irredutível entre dois módulos indecomponíveis. Um morfismo entre módulos indecomponíveis é dito irredutível se não puder ser escrito como uma composição de dois morfismos a não ser que um dos morfismos da composição cinda.

Um dos caminhos para investigar localmente o quiver de Auslander-Reiten é estudar as formas das componentes conexas do quiver de Auslander-Reiten. Nesta direção citamos, por exemplo [HPR80], [Zha91] e [Liu93]. Neste último podemos ver um estudo das formas das componentes regulares de Γ_A . Além disso, com as mesmas técnicas que Auslander usou para provar a conjectura de Brauer-Thrall I (morfismos irredutíveis e o Lema de Harada-Sai), Liu obteve mais informações sobre as formas das componentes conexas do quiver de Auslander-Reiten Γ_A para álgebras de Artin do tipo de representação infinito [Liu92]. Neste trabalho ele apresentou uma nova prova do Teorema de Happel-Preiser-Ringel [HPR80] que afirma que componentes conexas regulares periódicas de Γ_A são tubos estáveis.

Por outro lado, Auslander apresentou algumas questões sobre ciclos orientados que motivaram o trabalho de Bautista e Smalø [BS83]. Neste trabalho Bautista e Smalø provaram a não existência de ciclos seccionais. Lembramos que Liu apresentou uma generalização deste resultado em [Liu92] provando a não existência de ciclos pré-seccionais. Ainda neste trabalho, Liu apresentou uma prova de que as componentes estáveis periódicas são as únicas componentes estáveis de Γ_A que contêm um ciclo orientado. Provou também que se uma componente conexa de Γ_A contiver um ciclo orientado, então Γ_A contém seqüências de Auslander-Reiten com um único termo do

meio indecomponível. Já um estudo das componentes semi-estáveis que contêm ou não ciclos orientados foi feito por Liu em [Liu93].

Outra linha de pesquisa que se ampliou ao longo dos últimos vinte anos foi a teoria inclinante, que está de alguma forma relacionada com a teoria de equivalência de Morita. Sabemos que, em geral, é difícil estudar diretamente a categoria de módulos de uma determinada álgebra. Por isso, a idéia foi estudar a categoria de módulos de uma outra álgebra que de alguma forma seja mais simples que a primeira e que tenha alguma relação com esta. Neste caso, constrói-se na teoria inclinante um módulo sobre uma álgebra dada tal que a categoria de módulos de sua álgebra de endomorfismos esteja próxima da categoria de módulos da álgebra original, porém que não lhe seja equivalente, de tal forma que venha simplificar o problema. O fato do estudo da categoria de módulos das álgebras hereditárias estar bastante desenvolvido, possibilitou a sua utilização na teoria inclinante.

A teoria inclinante teve suas raízes no artigo [BGP73] de Bernstein-Gelfand-Ponomarev onde foi apresentada uma outra prova do Teorema de Gabriel sobre a classificação das álgebras hereditárias do tipo de representação finito. Neste trabalho eles introduziram os conceitos de funtores de Coxeter. Posteriormente, Auslander-Platzek-Reiten apresentaram uma formulação homológica destes funtores e introduziram o conceito hoje conhecido como módulo APR-inclinante. Em 1980, Brenner-Butler introduziram a primeira definição formal de módulo inclinante e demonstraram o hoje conhecido Teorema de Brenner-Butler (ver [BB80]). Neste trabalho eles provaram a existência de equivalências parciais entre subcategorias da categoria de módulos de uma álgebra e da álgebra de endomorfismos de um módulo inclinante. Desta forma, surgiu o conceito de álgebra inclinada que é a álgebra de endomorfismos de um módulo inclinante sobre uma álgebra hereditária. Posteriormente, Happel-Ringel simplificaram a definição de módulo inclinante e mostraram as principais propriedades das álgebras inclinadas (ver [HR82]).

A classe das álgebras quase-inclinadas foram introduzidas em [HRS96] com o objetivo de dar uma teoria inclinante geral para as categorias abelianas e desde então é objeto de muitos trabalhos de pesquisa. Concretamente uma álgebra quase-inclinada é uma álgebra de endomorfismos $End_{\mathcal{H}}(T)$, onde T é um objeto inclinante numa categoria abeliana e hereditária \mathcal{H} . Este conceito admite uma caracterização que também foi dada por Happel-Reiten-Smalø, que é muito utilizada quando se trabalha com esta classe de álgebras. Eles provaram que uma álgebra A é quase-inclinada se, e somente se,

(QT1) dimensão global de A é menor ou igual a dois;

(QT2) cada A -módulo indecomponível tem dimensão projetiva ou dimensão injetiva menor ou igual a um.

As álgebras quase-inclinadas podem também ser caracterizadas pela **propriedade**

IP: qualquer caminho em $indA$ de um módulo injetivo para um módulo projetivo pode ser refinado para um caminho de morfismos irredutíveis e qualquer tal caminho é seccional.

Neste contexto, Size Li mostrou em [Li00] que as componentes não semi-regulares do quiver de Auslander-Reiten de uma álgebra de Artin A , sem ciclos orientados, têm a propriedade IP se, e somente se, tais componentes podem ser mergulhadas em um quiver $\mathbb{Z}\Delta$ onde Δ é seção da componente. Generalizamos este resultado de Size Li para quivers com translação (Teorema (2.39)). Além disso, apresentamos uma forma de construir seções para quivers com translação não semi-estáveis sem ciclos orientados, tais que as fontes ou os poços nas seções são vértices injetivos ou projetivos, respectivamente (Teorema (2.36), (2.37)).

As condições (QT1) e (QT2) para álgebras quase-inclinadas, induzem a existência de uma trisseção em $indA$. Seja \mathcal{L}_A (respectivamente \mathcal{R}_A) a subcategoria plena de $indA$, consistindo dos módulos tais que seus antecessores (respectivamente sucessores) têm a dimensão projetiva (respectivamente injetiva) no máximo um. Neste contexto tem-se, $indA = (\mathcal{L}_A \setminus \mathcal{R}_A) \cup (\mathcal{L}_A \cap \mathcal{R}_A) \cup (\mathcal{R}_A \setminus \mathcal{L}_A)$, e os morfismos vão da esquerda para a direita na trisseção (ver [HRS96]).

Coelho-Lanzilotta fizeram em [CL99] uma extensão dessa classe de álgebras A para as quais $indA = \mathcal{L}_A \cup \mathcal{R}_A$. Eles introduziram a noção de **álgebras shod** como sendo as álgebras que satisfazem apenas a propriedade (QT2). A palavra shod é a abreviação de small homological dimension. Observamos que a dimensão global de uma álgebra shod é no máximo três. A classe das álgebras shod contém a classe das álgebras quase-inclinadas.

As álgebras shod podem ter dimensão global três, enquanto que as álgebras quase-inclinadas e as inclinadas têm dimensão global no máximo dois. Já as álgebras hereditárias têm dimensão global no máximo um. Uma álgebra A é chamada de **shod** (small homological dimension) desde que, para cada A -módulo X , a dimensão projetiva de X ou a dimensão injetiva de X seja menor ou igual a um. Uma álgebra de dimensão global igual a três é chamada de **estritamente shod** ou **shod estrita**. Todas as álgebras hereditárias são exemplos de álgebras shod já que todos seus módulos têm dimensão projetiva no máximo um. As álgebras inclinadas e as quase-inclinadas também são exemplos de álgebras shod.

O teorema fundamental de [CL99] nos fornece a equivalência entre as três afirmações seguintes sobre uma álgebra de Artin A :

- (a) A é uma álgebra shod;
- (b) $indA = \mathcal{L}_A \cup \mathcal{R}_A$;
- (c) qualquer caminho em $indA$ de um módulo injetivo para um módulo projetivo pode ser refinado para um caminho de morfismos irredutíveis e tal caminho tem no máximo

dois ganchos e, quando tiver dois, eles são consecutivos.

Denotaremos por **propriedade IGP**, a propriedade do item (c) que caracteriza as álgebras shod.

Coelho-Lanzilotta provaram também em [CL01a] que se A for uma álgebra shod e Γ uma componente não semi-regular de Γ_A , então Γ tem somente um número finito de τ -órbitas e não possui ciclos orientados.

Em [CL01a], eles consideraram uma classe ainda mais geral de álgebras, as chamadas **álgebras fracamente shod**. Uma álgebra A é fracamente shod se existir um inteiro n_0 tal que qualquer caminho em $\text{ind}A$ de um módulo injetivo para um projetivo tem comprimento no máximo n_0 .

Percorrendo um outro caminho em que tínhamos apenas como ferramenta as propriedades de quivers translação, estudamos os quivers translação nos quais existe um inteiro n_0 tal que todo caminho de um vértice injetivo para um vértice projetivo tenha no máximo n_0 ganchos. Estes quivers incluem a classe dos quivers que têm a propriedade IGP e que, por sua vez, contém a classe dos quivers que têm a propriedade IP. Observe que um mergulho do quiver Γ no quiver Γ' , é uma aplicação que leva vértices de Γ em vértices de Γ' e flechas de Γ em flechas de Γ' , preservando a translação, sendo injetora sobre os vértices, sobre as flechas e sobre as órbitas de Γ (ver definição em (2.2)). Construímos um exemplo de uma componente de um quiver de Auslander-Reiten de uma Álgebra de Artin que não pode ser mergulhado em um quiver $\mathbb{Z}\Delta$ (Exemplo (4.44)).

Em [RS01], Reiten-Skowroński introduziram o conceito de seção dupla e provaram que toda álgebra shod possui uma seção dupla. Generalizamos este conceito para quivers com translação e provamos que um quiver translação com a propriedade IGP e com seção dupla Δ pode ser mergulhado em um quiver $\mathbb{Z}\tilde{\Delta}$ (Teorema (4.18)). Mostramos que um quiver com seção dupla Δ não possui ciclos orientados (Proposição (4.6)) e que se um quiver possui seção dupla, não necessariamente tem a propriedade IGP (Exemplo (4.8)).

O trabalho ficou estruturado da seguinte forma: No Capítulo 1 apresentamos os resultados básicos da teoria de representações tendo como tema principal os quivers translação. Apresentamos alguns exemplos e provamos que um quiver translação $\mathbb{Z}\Delta$ possui ciclos orientados se, e somente se, Δ possuir ciclos orientados.

No Capítulo 2 apresentamos a generalização do resultado de Size Li (ver Teorema (2.39)). Introduzimos o conceito de mergulho de quivers (Definição (2.2)), apresentamos um exemplo de quiver translação com a propriedade IP e que possui ciclo orientado (Exemplo (2.26)). Provamos que quivers com translação Γ , semi-estáveis, sem ciclos orientados, podem ser mergulhados em um quiver $\mathbb{Z}\Delta$ onde Δ é uma seção de Γ que

possui fontes, ou que possui poços. No caso de fontes, estas são vértices injetivos de Γ e no caso de poços, são vértices projetivos (Teorema (2.36) e Teorema (2.37)).

No Capítulo 3 apresentamos as álgebras shod de uma forma geral, explorando os casos particulares de álgebras shod. Apresentamos também o conceito de álgebras fracamente shod.

No Capítulo 4 generalizamos ainda mais as possibilidades para mergulhar uma componente não semi-regular do quiver de Auslander-Reiten de uma álgebra de Artin. Introduzimos o conceito de seção dupla e provamos que se (Γ, τ) for um quiver com seção dupla e com a propriedade IGP, então existe um quiver $\tilde{\Delta}$ tal que Γ está mergulhado em $\mathbb{Z}\tilde{\Delta}$ (Teorema (4.18)). Apresentamos exemplos de quivers com seção dupla que não possuem a propriedade IGP (Exemplo (4.5)) e provamos que todo quiver translação com seção dupla não possui ciclos orientados (Proposição (4.6)). Generalizamos o conceito de pares de vértices dirigidos do contexto da categoria de módulos para o contexto de quivers com translação e apresentamos alguns resultados relativos a este conceito (Lemas (4.14), (4.16)) além de alguns exemplos que ilustram a generalidade do contexto de quivers com translação com seção dupla e com a propriedade IGP com relação a componentes do quiver de Auslander-Reiten com a propriedade IGP. E por último mostramos que em geral as álgebras fracamente shod não podem ser mergulhadas em um quiver $\mathbb{Z}\Delta$ (Exemplo (4.44)).

Capítulo 1

Quiver com Translação

Nosso principal objeto de estudo neste trabalho, são os quivers translação. Neste capítulo apresentaremos uma relação dos resultados básicos utilizados neste trabalho. As demonstrações e/ou conceitos omitidos podem ser encontrados em [ARS97], caso contrário, mencionaremos a fonte. Os conceitos de quiver com translação e o caso particular de quiver de Auslander-Reiten serão bastante explorados durante todo o decorrer do trabalho. Obtivemos inúmeros resultados para quivers com translação que valem particularmente para quivers de Auslander-Reiten.

1.1 Quivers

Um **quiver** $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1)$ é um grafo orientado, onde Γ_0 denota o conjunto dos vértices e Γ_1 denota o conjunto das flechas entre estes vértices. Denotaremos por $s : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_0$ e $e : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_0$ as aplicações onde $s(\alpha) = a$ e $e(\alpha) = b$ quando $\alpha : a \rightarrow b$ for uma flecha do vértice a para o vértice b . Um quiver (Γ_0, Γ_1) é **localmente finito** se para cada $x \in \Gamma_0$, existir somente um número finito de flechas chegando ou partindo de x .

Para cada $x \in \Gamma_0$, denotaremos por x^- o conjunto dos antecessores imediatos de x , isto é, $x^- = \{y \in \Gamma_0 \mid \text{existe flecha } y \rightarrow x\}$. Dualmente, seja x^+ o conjunto dos sucessores imediatos de x , isto é, $x^+ = \{y \in \Gamma_0 \mid \text{existe flecha } x \rightarrow y\}$.

Seja τ uma aplicação injetora de um subconjunto Γ'_0 de Γ_0 para Γ_0 . Dizemos que o par (Γ, τ) é um quiver com translação ou simplesmente **quiver com translação** se as seguintes condições estiverem satisfeitas:

(a) Γ não tem laços, isto é, flechas cujos vértices inicial e final coincidem e nem flechas múltiplas.

(b) Se $x \in \Gamma_0$, for tal que τx está definido, então $x^- = \tau(x)^+$.

Além disso, dizemos que (Γ, τ) é um **quiver com translação próprio** se satisfizer:

(c) Se $x \in \Gamma_0$ for tal que τx estiver definido, então x^- é não vazio.

A aplicação $\tau : \Gamma'_0 \rightarrow \Gamma_0$ é chamada **translação do quiver** Γ .

Como τ é injetora, se $\tau x = y$, então podemos definir a inversa τ^- de τ em seu conjunto imagem Γ''_0 e assim $\tau^- y = x$.

Seja (Γ, τ) um quiver com translação. Uma **valoração sobre Γ** consiste de um par de inteiros (d_{xy}, d'_{xy}) associado a cada flecha $x \rightarrow y$ tais que:

(a) $d_{xy} = d'_{\tau yx}$ e

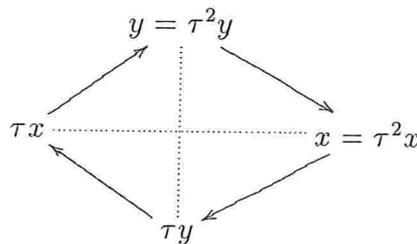
(b) $d'_{xy} = d_{\tau yx}$

para toda flecha $x \rightarrow y$ com y não projetivo.

Seja $x \in \Gamma_0$. Dizemos que x é um **vértice projetivo** se x não estiver no domínio de τ e chamaremos um vértice $x \in \Gamma_0$ um **vértice injetivo** se x não estiver na imagem de τ . Além disso, τ induz uma aplicação sobre um subconjunto Γ'_1 de Γ_1 . Mais precisamente, se $\alpha : y \rightarrow x$ for uma flecha com x sendo um vértice não projetivo, então existe uma única flecha $\tau x \rightarrow y$ em Γ_1 que denotaremos por $\sigma(\alpha)$. A aplicação σ sobre Γ'_1 obtida desta forma é chamada **semi-translação** do quiver com translação. Ela é completamente determinada por τ .

Um vértice $j \in \Gamma$ é chamado **poço** se não existir flecha $\alpha \in \Gamma$ com $s(\alpha) = j$ e é chamado **fonte** se não existir $\alpha \in \Gamma$ com $e(\alpha) = j$.

Exemplo 1.1 Considere (Γ, τ) o seguinte quiver com translação

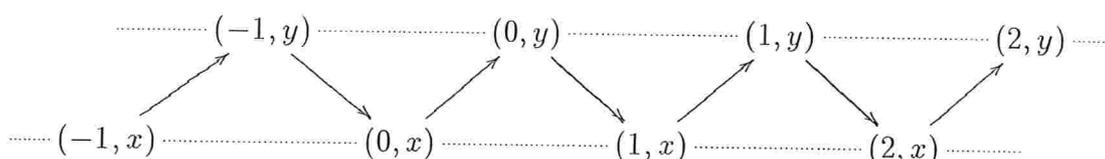


onde a linha tracejada indica a ligação entre um vértice e seu respectivo transladado. É fácil ver que Γ não tem poços nem fontes e nem vértices projetivos ou vértices injetivos.

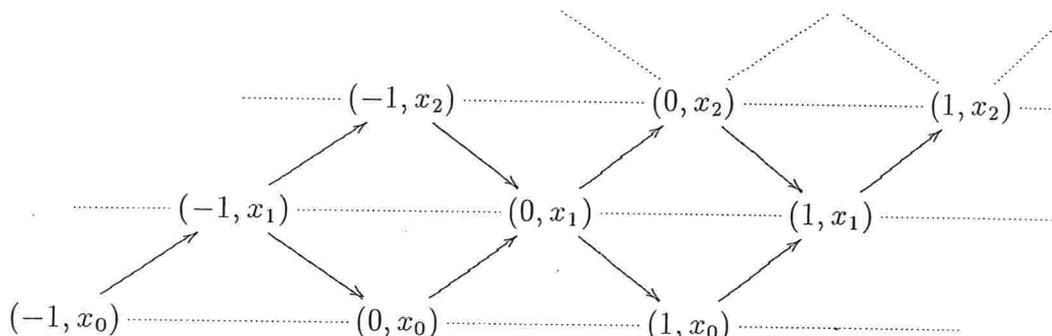
Uma forma de construir famílias de quivers com translação pode ser dada da seguinte maneira. Considere Δ um quiver sem laços (possivelmente infinito). Construimos o quiver com translação $\mathbb{Z}\Delta$ a seguir. O conjunto dos vértices de $\mathbb{Z}\Delta$ é $(\mathbb{Z}\Delta)_0 =$

$\mathbb{Z} \times \Delta_0$. As flechas em $\mathbb{Z}\Delta$ são como segue. Para cada flecha $\alpha : x \rightarrow y$ em Δ e cada $n \in \mathbb{Z}$, definimos flechas α_n de (n, x) para (n, y) e $\sigma(\alpha_n)$ de $(n-1, y)$ para (n, x) . A translação em $\mathbb{Z}\Delta$ é dada por $\tau(n, x) = (n-1, x)$ para cada $x \in \Gamma$ e cada $n \in \mathbb{Z}$. Desta forma, $\mathbb{Z}\Delta$ torna-se um quiver translação. Observe que $\mathbb{Z}\Delta$ não tem nem vértices projetivos, nem vértices injetivos.

Exemplo 1.2 Considere o quiver $A_1 : x \rightarrow y$. Assim, $\mathbb{Z}A_1$ é o quiver



Exemplo 1.3 Seja $\Delta = A_\infty : x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow \cdots \rightarrow x_n \rightarrow x_{n+1} \rightarrow \cdots$. Temos $\mathbb{Z}A_\infty$ da seguinte forma:



Seja $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1)$ um quiver. Um **caminho** δ em Γ é uma seqüência ordenada de flechas $\delta = \alpha_n \cdots \alpha_1$ com $e(\alpha_t) = s(\alpha_{t+1})$ para $1 \leq t < n$ e α_j em Γ para todo $j \in \{1, \dots, n\}$ ou é um vértice e o denotaremos com o símbolo ϵ_j com $j \in \Gamma_0$. Em geral, denotaremos tal caminho por $x_0 \xrightarrow{\alpha_1} x_1 \xrightarrow{\alpha_2} \cdots \xrightarrow{\alpha_{n-1}} x_{n-1} \xrightarrow{\alpha_n} x_n$ ou simplesmente por $x_0 \rightsquigarrow x_n$. Dizemos que n é o **comprimento** do caminho δ . Os caminhos que são vértices dizemos que tem comprimento nulo. Um caminho de comprimento maior ou igual a um de um vértice x para ele próprio é chamado **ciclo orientado**. Se existir um caminho de um vértice x em Γ para um vértice y em Γ , diremos que x é **antecessor** de y e y é **sucessor** de x . Se existir uma flecha $x \rightarrow y$ em Γ , diremos que x é **antecessor imediato** de y em Γ e y é **sucessor imediato** de x em Γ . Um subquiver Γ' de Γ é chamado **convexo** desde que qualquer caminho $x_0 \rightarrow \cdots \rightarrow x_m$ de Γ com $x_0, x_m \in \Gamma'$ esteja completamente contido em Γ' .

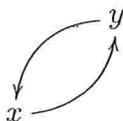
Um tipo especial de caminho que nos será útil neste trabalho é definido a seguir:

Definição 1.4 Seja $x_0 \rightarrow \cdots \rightarrow x_n$ um caminho em um quiver com translação (Γ, τ) . Se $x_{k-1} = \tau x_{k+1}$ para algum k ($1 \leq k \leq n-1$), então diremos que x_k é um **gancho** do caminho. Diremos que dois ganchos x_k e x_j são consecutivos se $|k-j|=1$. Se tal caminho não contiver ganchos ele será chamado de **caminho seccional**.

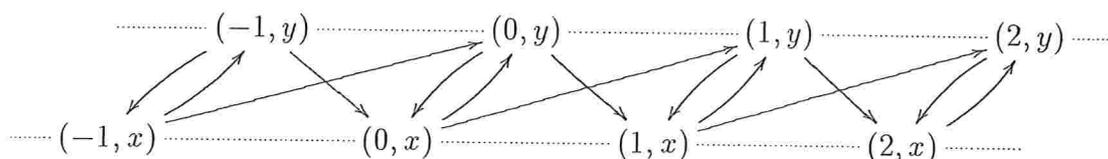
Exemplo 1.5 Seja $\Gamma = \mathbb{Z}A_\infty$ o quiver com translação do Exemplo (1.3). Vemos que este quiver Γ não possui ciclos orientados.

O exemplo a seguir é de um quiver Δ onde $\mathbb{Z}\Delta$ tem ciclos orientados.

Exemplo 1.6 Considere Δ o quiver:



e $\mathbb{Z}\Delta$ o quiver:



Em geral, vale a seguinte afirmação sobre ciclos num quiver $\mathbb{Z}\Delta$.

Lema 1.7 Seja $\mathbb{Z}\Delta$ um quiver. Então, $\mathbb{Z}\Delta$ possui ciclos orientados se, e somente se, Δ possui ciclos orientados.

Demonstração: A prova da necessidade é imediata. Vamos supor que $\mathbb{Z}\Delta$ possui um ciclo orientado. Sabemos que todas as flechas de $\mathbb{Z}\Delta$ são da forma $(n, x) \rightarrow (n, y)$ ou $(n-1, y) \rightarrow (n, x)$ para algum inteiro n e alguma flecha $x \rightarrow y$ em Δ . Então podemos dizer que se existir um ciclo orientado em $\mathbb{Z}\Delta$ então tal ciclo é da forma $(m, x_0) \rightarrow (m, x_1) \rightarrow \cdots \rightarrow (m, x_n)$ para algum inteiro m e algum $n \geq 1$ e vértices x_i em Δ com $0 \leq i \leq n$. Então, $x_0 = x_n$. Assim, temos o ciclo $x_0 \rightarrow \cdots \rightarrow x_n$ em Δ . ■

Definição 1.8 Seja Γ um quiver. Um **passeio** de um vértice x para um vértice y em Γ é uma seqüência de vértices em Γ , $x = x_1, \dots, y = x_m$ tal que para cada k ($1 \leq k \leq m - 1$), existe ou uma flecha $x_k \rightarrow x_{k+1}$ ou uma flecha $x_{k+1} \rightarrow x_k$ em Γ . Um quiver Γ é **conexo** se para cada par de vértices x e y em Γ , existe um passeio de x para y em Γ .

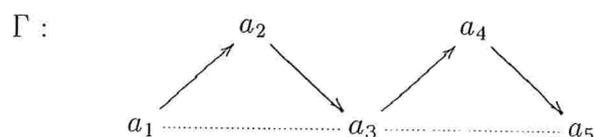
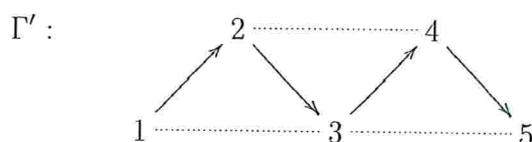
Seja (Γ, τ) um quiver com translação. Em geral, consideraremos um quiver com translação como um quiver conexo e próprio. Para evitar sobrecarregar a notação, ao invés de usarmos o símbolo Γ_1 para nos referirmos às flechas de um quiver Γ e Γ_0 para nos referirmos aos vértices deste quiver, simplesmente diremos que estamos tomando uma flecha ou um vértice de Γ .

1.2 Morfismos de Quivers

Para estudarmos as relações entre quivers, precisamos do conceito de morfismo entre quivers.

Definição 1.9 Sejam Γ' e Γ dois quivers. Um **morfismo de quivers** $f : \Gamma' \rightarrow \Gamma$ é um par de aplicações $f_0 : \Gamma'_0 \rightarrow \Gamma_0$ e $f_1 : \Gamma'_1 \rightarrow \Gamma_1$ tais que se α for uma flecha em Γ'_1 de um vértice x para um vértice y em Γ'_0 , então $f_1(\alpha)$ será uma flecha em Γ_1 do vértice $f_0(x)$ para o vértice $f_0(y)$. Diremos que f é um **isomorfismo de quivers** se f_0 e f_1 forem aplicações bijetoras.

Exemplo 1.10 Sejam (Γ', τ') e (Γ, τ) os seguintes quivers translação:



Podemos estabelecer um isomorfismo entre tais quivers da seguinte forma: $f_0(k) = a_k$, $k \in \{1, 2, \dots, 5\}$ e $f_1(k \rightarrow k+1) = a_k \rightarrow a_{k+1}$, $k \in \{1, \dots, 4\}$. É fácil ver que o morfismo f é um isomorfismo de quivers apesar do vértice 4 não ser um vértice projetivo em Γ' e $f_0(4) = a_4$ ser um vértice projetivo em Γ . Vemos que apesar dos quivers serem quivers translação, esta estrutura não foi considerada para definir o morfismo f .

Para quivers com translação, definiremos no próximo capítulo um morfismo que preserva translações. Com a definição de quiver com translação, evitaremos a situação do exemplo acima, do vértice ser não projetivo no domínio do morfismo e ser projetivo no contra-domínio.

1.3 Álgebras de caminhos

Seja R um anel Artiniano comutativo com unidade. Uma R -álgebra de Artin A ou simplesmente **álgebra de Artin** é uma anel com unidade A que é também um R -módulo e é finitamente gerado como R -módulo tal que para cada $\alpha \in R$ e $a, b \in A$ vale a seguinte igualdade: $\alpha(ab) = (\alpha a)b = a(\alpha b)$.

Assumiremos durante todo este trabalho que as álgebras são álgebras de Artin e que dada uma álgebra de Artin A , denotaremos por $\text{mod}A$ a categoria dos A -módulos à esquerda finitamente gerados e por $\text{ind}A$ a subcategoria plena de $\text{mod}A$, onde tomamos como objetos um representante de cada classe de isomorfismos de A -módulos indecomponíveis.

Seja Γ um quiver finito, isto é, onde Γ_0 e Γ_1 sejam conjuntos finitos. Dado um corpo k , podemos definir a k **álgebra de caminhos** $k\Gamma$ da seguinte forma: seja $k\Gamma$ o k -espaço vetorial tendo como base os caminhos de Γ . Podemos ver que $k\Gamma$ tem uma estrutura natural como k -álgebra definindo uma multiplicação sobre os caminhos da base de $k\Gamma$ da seguinte forma. Dados dois caminhos da base de $k\Gamma$, $\gamma_1 = \alpha_n \cdots \alpha_1$ e $\gamma_2 = \beta_m \cdots \beta_1$, definimos:

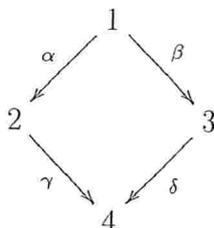
$$\gamma_2\gamma_1 = \begin{cases} \beta_m \cdots \beta_1 \alpha_n \cdots \alpha_1 & \text{se } e(\alpha_n) = s(\beta_1) \\ 0 & \text{se } e(\alpha_n) \neq s(\beta_1) \end{cases}$$

Uma vez definido o produto sobre os elementos da base de $k\Gamma$, estendemos linearmente a multiplicação a todos os elementos de $k\Gamma$. Assim, $k\Gamma$ tem uma estrutura de k -álgebra. Observe que $\sum_{j \in \Gamma_0} e_j$ é o elemento identidade de $k\Gamma$.

Segue como consequência desta definição a seguinte proposição:

Proposição 1.11 *Se k for um corpo e Γ for um quiver finito, então $k\Gamma$ será uma k -álgebra de dimensão finita se, e somente se, Γ não contiver ciclos orientados.*

Exemplo 1.12 *Seja k um corpo e Γ o quiver:*



Então $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \gamma\alpha, \delta\beta\}$ é uma k -base para $k\Gamma$.

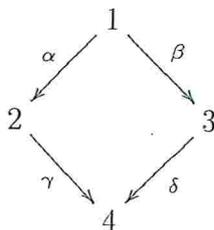
Uma **relação** em Γ é uma combinação linear de caminhos de comprimento maior ou igual a dois, todos com o mesmo vértice inicial e final. Seja J o ideal de $k\Gamma$ gerado pelas flechas de Γ . Um ideal I de $k\Gamma$ é **admissível** se $J^n \subset I \subset J^2$, para algum $n \geq 2$. Todo ideal admissível é gerado por um sistema de relações R .

Definição 1.13 Um **quiver com relações** é um par (Γ, R) definido por um quiver Γ e um sistema de relações R de um ideal admissível I de $k\Gamma$. A álgebra de caminhos determinada por um quiver com relações (Γ, R) é por definição: $k\Gamma/I$.

Podemos mencionar o seguinte resultado conhecido como Teorema de Gabriel.

Teorema 1.14 Toda álgebra de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado, básica e indecomponível, é isomorfa a uma álgebra de caminhos determinada por um quiver com relações.

Exemplo 1.15 Seja k um corpo e Γ o quiver



Seja R a relação $\gamma\alpha - \delta\beta$ em Γ . A álgebra $k\Gamma/I$ onde I é o ideal de $k\Gamma$ gerado pelo sistema de relações R tem como k -base o conjunto $\{\bar{\epsilon}_1, \bar{\epsilon}_2, \bar{\epsilon}_3, \bar{\epsilon}_4, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}, \bar{\delta}, \bar{\gamma}\bar{\alpha}\}$.

1.4 Representações de Quivers

Vimos que uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado pode ser vista como quociente de uma álgebra de caminhos sobre um ideal gerado por um sistema de relações. Nesta seção pretendemos visualizar os módulos como representações sobre um quiver com relações.

Seja k um corpo, Γ um quiver finito e $k\Gamma$ uma álgebra de caminhos. Seja C um módulo à esquerda sobre a álgebra de caminhos $k\Gamma$. Então $C = \bigoplus_{j \in \Gamma_0} e_j C$ é a decomposição de C em uma soma finita de k -espaços vetoriais. Se α for uma flecha de j para l em Γ , então a multiplicação à esquerda por α induz uma aplicação k -linear de $e_j C$ para $e_l C$. Isto motiva a definição dada a seguir.

Uma **representação** (V, f) de um quiver Γ sobre um corpo k é um conjunto de k -espaços vetoriais de dimensão finita $\{V(j) | j \in \Gamma_0\}$ juntamente com transformações lineares $f_\alpha : V(j) \rightarrow V(l)$ para cada flecha $\alpha : j \rightarrow l$. Assumiremos que as representações são de dimensão finita, isto é, $\dim_k V(j) < \infty$, para todo $j \in \Gamma_0$.

Um morfismo $h : (V, f) \rightarrow (V', f')$ entre duas representações de Γ sobre k é uma coleção $\{h_j : V(j) \rightarrow V'(j)\}_{j \in \Gamma_0}$ de transformações lineares tais que para cada $\alpha : j \rightarrow l$ em Γ o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{array}{ccc} V(j) & \xrightarrow{h_j} & V'(j) \\ \downarrow f_\alpha & & \downarrow f'_\alpha \\ V(l) & \xrightarrow{h_l} & V'(l) \end{array}$$

Se $h : (V, f) \rightarrow (V', f')$ e $g : (V', f') \rightarrow (V'', f'')$ forem dois morfismos entre representações, então a composição gh está definida tomando-se a composição $g_j h_j$ para cada morfismo $h_j : V_j \rightarrow V'_j$ e $g_j : V'_j \rightarrow V''_j$ e para cada $j \in \Gamma_0$. Desta forma, obtemos a **categoria das representações de Γ sobre k** , denotada por $\mathbf{Rep}\Gamma$, e o seguinte resultado:

Proposição 1.16 *Se k for um corpo e Γ um quiver finito, então as k -categorias $\mathbf{Rep}\Gamma$ e $f.d.(k\Gamma)$ onde $f.d.(k\Gamma)$ é a categoria dos $k\Gamma$ -módulos à esquerda de dimensão finita sobre k são equivalentes.*

Seja k um corpo, Γ um quiver finito e (Γ, R) um quiver com relações. Vamos definir a categoria $\mathbf{Rep}(\Gamma, R)$ como sendo a subcategoria plena de $\mathbf{Rep}\Gamma$ cujos objetos são os pares (V, f) com $f_\sigma = 0$ para cada relação σ em R . Então temos a seguinte proposição:

Proposição 1.17 *Se k for um corpo, Γ um quiver finito e (Γ, R) um quiver com relações R , então as categorias $\text{Rep}(\Gamma, R)$ e $f.d.(k\Gamma/I)$ são equivalentes, onde I é o ideal admissível de $k\Gamma$ gerado pelas relações de R .*

1.5 Seqüências e quivers de Auslander-Reiten

Nesta seção consideraremos A uma álgebra de Artin e todos os A -módulos na categoria $\text{mod}A$.

Na década de setenta, M. Auslander e I. Reiten introduziram o conceito de seqüência quase-cindida, hoje conhecida como seqüência de Auslander-Reiten. Os morfismos que compõem tais seqüências são irredutíveis, isto é, não cindem e não são compostas de morfismos que não cindem. Os morfismos irredutíveis, juntamente com os módulos indecomponíveis são a estrutura básica do quiver de Auslander-Reiten. Estes quivers nos fornecem uma visão da categoria $\text{mod}A$. Atualmente muitos resultados na teoria de representações de álgebras dependem do estudo deste quiver. Vejamos alguns conceitos básicos sobre este assunto (ver [ARS97]).

Definição 1.18 *Uma seqüência exata curta de A -módulos que não cinde $0 \rightarrow N \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} M \rightarrow 0$ é uma **seqüência de Auslander-Reiten** ou **seqüência de A. R** se:*

- 1) os módulos N e M são indecomponíveis;
- 2) dado $h \in \text{Hom}_A(X, M)$ que não seja um epimorfismo que cinde, existe $h' \in \text{Hom}_A(X, E)$ tal que $gh' = h$.

Observação 1.19 *Se N e M forem módulos indecomponíveis, então a segunda condição é equivalente a:*

- 2') dado $h \in \text{Hom}_A(N, Y)$ que não seja um monomorfismo que cinde, então existe $h' \in \text{Hom}_A(E, Y)$ tal que $h'f = h$.

Sobre a existência e unicidade das seqüências de A.R. temos:

Teorema 1.20 *Dados A uma álgebra de Artin e $M, N \in \text{ind}A$:*

- a) *Se M não for projetivo, então existe uma única seqüência de A.R. terminando em M :*

$$0 \rightarrow M' \rightarrow E \rightarrow M \rightarrow 0.$$

- b) *Se N não for injetivo, então existe uma única seqüência de A.R. começando em N :*

$$0 \rightarrow N \rightarrow E \rightarrow N' \rightarrow 0.$$

Observação 1.21 Pelo Teorema (1.20), vimos que se existir uma seqüência de Auslander-Reiten, então ela é única. Assim, dado um módulo não projetivo e indecomponível M , sabemos que existe um módulo M' e uma seqüência de Auslander-Reiten começando em M' e terminando em M . Pela unicidade da seqüência de Auslander-Reiten, o módulo M' está bem determinado, isto é, é único salvo isomorfismo. Então denotaremos por τM o módulo M' . De modo análogo, dado um módulo indecomponível e não injetivo N , existe uma seqüência de Auslander-Reiten começando em N e terminando em N' . Pela unicidade da existência de tal seqüência, podemos dizer que o módulo N' está bem determinado e por isso chamaremos de $\tau^- N$ o módulo N' . Chamaremos τ a **translação de Auslander-Reiten** e por τ^- a sua inversa. Sabemos que τM e $\tau^- N$ podem ser calculados através dos funtores compostos DTr e TrD respectivamente. Sobre as definições destes funtores e como calcular τM através de DTr e $\tau^- N$ através de TrD , ver [ARS97].

Os morfismos que fazem parte das seqüências de Auslander-Reiten possuem propriedades importantes que devemos destacar. Primeiramente definimos os seguintes conceitos:

Definição 1.22 Seja M um módulo indecomponível.

a) Um morfismo $g : E \rightarrow M$ é um **poço** em M se:

- (i) g não for um epimorfismo que cinde;
- (ii) todo morfismo $h : E \rightarrow E$ tal que $gh = g$ é um automorfismo;
- (iii) dado $h \in \text{Hom}_A(X, M)$ que não seja um epimorfismo que cinde, então existe $h' \in \text{Hom}_A(X, E)$ tal que $gh' = h$.

b) Um morfismo $f : M \rightarrow E$ é uma **fonte** em M se:

- (i) f não for um monomorfismo que cinde;
- (ii) todo morfismo $h : E \rightarrow E$ tal que $hf = f$ é um automorfismo;
- (iii) dado $h \in \text{Hom}_A(M, X)$ que não seja um monomorfismo que cinde, então existe $h' \in \text{Hom}_A(E, X)$ tal que $h'f = h$.

As relações entre as seqüências de A.R. e os conceitos de morfismo fonte e morfismo poço são as seguintes:

Proposição 1.23 Consideremos uma seqüência de A.R.:

$$0 \rightarrow N \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} M \rightarrow 0.$$

Então:

- a) f é um morfismo fonte e qualquer outro morfismo fonte em N é isomorfo a f ;
- b) g é um morfismo poço e qualquer outro morfismo poço em M é isomorfo a g .

Note que no caso em que P for um A -módulo projetivo indecomponível sobre uma álgebra de Artin A e I for um A -módulo injetivo indecomponível, valem as seguintes afirmações:

Proposição 1.24 *Seja P um A -módulo projetivo indecomponível não simples, e I um A -módulo injetivo indecomponível não simples:*

- (a) *A inclusão $i : \text{rad}P \hookrightarrow P$ é um morfismo poço e qualquer outro morfismo poço em P é isomorfo a i .*
 (b) *O epimorfismo $t : I \rightarrow I/\text{soc}I$ é um morfismo fonte e todo outro morfismo fonte em I é isomorfo a t .*

Agora vamos relacionar estes conceitos com o conceito de morfismo irredutível apresentado a seguir:

Definição 1.25 *Um morfismo que não cinde $f : X \rightarrow Y$ com X e Y em $\text{mod}A$ é um **morfismo irredutível** se para cada decomposição $f = gh$ (onde $h : X \rightarrow Z$ e $g : Z \rightarrow Y$ estão em $\text{mod}A$) ou h será um monomorfismo que cinde ou g será um epimorfismo que cinde.*

Proposição 1.26 *Seja M um A -módulo indecomponível.*

- a) *Um morfismo $h : M \rightarrow X$ é irredutível se, e somente se, existir $h' : M \rightarrow X'$ tal que $(h \ h')^t$ é uma fonte em M .*
 b) *Um morfismo $h : X \rightarrow M$ é irredutível se, e somente se, existir $h' : X' \rightarrow M$ tal que $(h \ h')$ é um poço em M .*

Nosso objetivo agora é apresentar um exemplo de quiver com translação que está diretamente relacionado com os conceitos acima de seqüências de Auslander-Reiten e morfismos irredutíveis. Assim, vamos introduzir agora o conceito de radical da categoria $\text{mod}A$ que entre outros fatos, nos permitirá falar nas flechas desse novo quiver.

Seja A uma álgebra de Artin e sejam X e Y módulos em $\text{mod}A$. Então definimos o **radical** de $\text{Hom}_A(X, Y)$ por $\text{rad}_A(X, Y) = \{f \in \text{Hom}_A(X, Y) \mid hfg \text{ não é um isomorfismo para quaisquer } g : Z \rightarrow X \text{ e } h : Y \rightarrow Z \text{ com } Z \text{ em } \text{ind}A\}$. Dado um número natural n , definimos as potências do radical indutivamente: $\text{rad}^n(X, Y) = \{f \in \text{Hom}_A(X, Y) \mid \text{existe } Z \in \text{mod}A \text{ e morfismos } g \in \text{rad}_A(X, Z) \text{ e } h \in \text{rad}_A^{n-1}(Z, Y) \text{ com } f = hg\}$. Definimos $\text{rad}^\infty(X, Y) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{rad}_A^n(X, Y)$. Indicaremos por $\text{rad}^\infty(\text{mod}A)$ o ideal de $\text{mod}A$ gerado por todos os morfismos em $\text{rad}^\infty(X, Y)$ para algum $X, Y \in \text{ind}A$.

Temos a seguinte relação entre os morfismos irredutíveis e o radical:

Proposição 1.27 *Seja $f : X \rightarrow Y$ um morfismo entre A -módulos indecomponíveis X e Y em $\text{mod}A$. Então f é irredutível se, e somente se, $f \in \text{rad}_A(X, Y) \setminus \text{rad}_A^2(X, Y)$.*

Dados X e Y em $indA$, considere o grupo abeliano

$$Irr(X, Y) = rad_A(X, Y)/rad_A^2(X, Y)$$

como um $T_Y-T_X^{op}$ -bimódulo de um modo natural, onde T_Z denota a álgebra de divisão $End_A Z/rad(End Z)$ para cada $Z \in indA$. Assim, $Irr(X, Y)$ torna-se um $T_Y-T_X^{op}$ -espaço vetorial.

Proposição 1.28 *Sejam X e Y A -módulos indecomponíveis e suponhamos que existam morfismos irredutíveis de X para Y . Então:*

- (a) *A multiplicidade de X como somando de M quando existir um morfismo poço $f : M \rightarrow Y$ é igual a dimensão de $Irr(X, Y)$ como T_X^{op} -espaço vetorial.*
 (b) *A multiplicidade de Y como somando de N quando existir um morfismo fonte $g : X \rightarrow N$ é igual a dimensão de $Irr(X, Y)$ como T_Y -espaço vetorial.*

Agora definiremos o quiver de Auslander-Reiten.

Definição 1.29 *Dada uma álgebra de Artin A , o quiver de Auslander-Reiten de A ou quiver **A. R. de A** é assim definido:*

- a) *Os vértices de $(\Gamma_A)_0$ estão em correspondência biunívoca com as classes de isomorfismos dos A -módulos indecomponíveis, isto é, a cada $M \in indA$ associamos o vértice $[M]$. Dois vértices $[M]$ e $[M']$ são iguais, se e somente se, $M \simeq M'$.*
 b) *Existe uma flecha $[M] \rightarrow [N]$ em $(\Gamma_A)_1$, se e somente se, existir um morfismo irredutível $M \rightarrow N$. Tal flecha tem **valorção (a, b)** se existir um morfismo fonte $M \rightarrow {}_a N \oplus Y$ onde N não é somando de Y e existir um morfismo poço $bM \oplus Z \rightarrow N$ onde M não é somando de Z .*
 c) *O par (Γ_A, τ) é um quiver com translação onde definimos τ como sendo a aplicação injetora tal que $\tau[M] = [\tau M]$.*

Observação 1.30 *A aplicação τ está definida sobre um subconjunto $(\Gamma_A)'_0$ de $(\Gamma_A)_0$ formado pelos vértices de $(\Gamma_A)_0$ tais que $\tau[M] = [\tau M]$, isto é, o subconjunto de $(\Gamma_A)_0$ formado pelos vértices $[M]$ de $(\Gamma_A)_0$ tais que τM está definido. Pelo Teorema (1.20), podemos dizer que existe o vértice $[\tau M]$ se, e somente se, M não é um módulo projetivo. Portanto, os vértices correspondentes aos módulos projetivos são os vértices projetivos e os correspondentes aos módulos injetivos são os vértices injetivos. Sendo assim, podemos dizer que o quiver (Γ, τ) é um quiver com translação pois:*

- a) *o quiver Γ_A não tem laços já que não existe morfismo irredutível $f : X \rightarrow X$ para cada $X \in indA$. Este quiver não tem flechas múltiplas por definição.*
 b) *Para cada vértice $[M] \in (\Gamma_A)_0$, tal que $\tau([M])$ está definido, temos que $\tau([M])^+ = \{[E_k] | E_k \text{ é somando indecomponível de } E \text{ onde } E \text{ é o termo do meio da seqüência de Auslander-Reiten que termina em } M\} = [M]^-$.*

Podemos ver que (Γ_A, τ) é um quiver com translação próprio e localmente finito.

1.6 Dimensões Homológicas

As demonstrações dos resultados apresentados nesta seção poderão ser encontradas no texto de Ibrahim Assem [Ass97].

Definição 1.31 *Seja A uma R -álgebra de Artin e M um A -módulo.*

(a) *Se a resolução projetiva minimal de M for*

$$0 \rightarrow P_n \rightarrow \cdots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

*com $P_n \neq 0$ para algum inteiro positivo n , então dizemos que a **dimensão projetiva** de M é igual a n (denotaremos dimensão projetiva de M por $dp M = n$). Se não existir resolução projetiva finita, dizemos que a dimensão projetiva de M é infinita e escrevemos $dp M = \infty$.*

(b) *Se a resolução injetiva minimal de M for*

$$0 \rightarrow M \rightarrow I^0 \rightarrow I^1 \rightarrow \cdots \rightarrow I^n \rightarrow 0$$

*com $I_n \neq 0$ para algum inteiro positivo n , então dizemos que a **dimensão injetiva** de M é igual a n (denotaremos dimensão injetiva de N por $di N = n$). Se não existir resolução injetiva finita, dizemos que a dimensão injetiva de M é infinita ($di M = \infty$).*

Temos o seguinte resultado com relação a dimensão projetiva e injetiva.

Teorema 1.32 *Seja A uma R -álgebra de Artin, M um A -módulo e $n \geq 0$. As seguintes condições são equivalentes:*

- (a) $dp M \leq n$.
- (b) $Ext_A^k(M, -) = 0$ para todo $k > n$.
- (c) $Ext_A^{n+1}(M, -) = 0$.
- (d) *Para toda seqüência exata $0 \rightarrow L_{n-1} \rightarrow P_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$ com P_i projetivos, teremos L_{n-1} projetivo.*

Dado um A -módulo N e $n \geq 0$, as seguintes condições são equivalentes:

- (a) $di N \leq n$.
- (b) $Ext_A^k(-, N) = 0$ para todo $k > n$.
- (c) $Ext_A^{n+1}(-, N) = 0$.
- (d) *Para toda seqüência exata $0 \rightarrow N \rightarrow I^0 \rightarrow \cdots \rightarrow I^{n-1} \rightarrow L^{n-1} \rightarrow 0$ com I^j injetivo, teremos L^{n-1} injetivo.*

Definimos a **dimensão global** de A (denotaremos por $dim gl. A$) como sendo o supremo das dimensões projetivas de todos os A -módulos. O seguinte resultado é bastante útil:

Teorema 1.33 .

(a) $\dim gl. A = \sup\{dpM | M \text{ é um } A\text{-módulo}\} = \sup\{di N | N \text{ é um } A\text{-módulo}\}.$

(b) $\dim gl. A = \sup\{dp M | M \text{ é indecomponível}\}.$

(c) $\dim gl. A = \sup\{dp S | S \text{ é um } A\text{-módulo simples}\}.$

Capítulo 2

Quivers com translação com seção

Nosso objetivo neste capítulo é estudar quivers com translação com seção, propriedades decorrentes de um quiver possuir seção e a relação entre um quiver que possui uma seção Δ com o quiver $\mathbb{Z}\Delta$. Trabalharemos com quiver com translação próprio e conexo. Provaremos que um quiver com translação (Γ, τ) que possui uma seção tem a propriedade de que todo possível caminho de um vértice injetivo para um vértice projetivo é seccional (Teorema (2.9)). Além disso, apresentaremos uma prova mais sucinta do seguinte resultado de Liu (ver [Liu93]): se um quiver com translação não possuir ciclos e nem vértices projetivos então ele terá uma seção. Um resultado análogo vale se Γ não possuir vértices injetivos (Teorema (2.23), (2.25)).

Cabe destacar que nossos principais resultados neste capítulo são generalizações de diversos resultados de Size Li para quivers translação provados em [Li00]. Dentre estes estão os Teoremas (2.36), (2.37) e (2.39). Muitas demonstrações se generalizam com as mudanças óbvias enquanto que em certos casos teremos que especificar as mudanças e também o tipo de generalização obtido.

No Teorema (2.36) provaremos que se (Γ, τ) não possuir ciclos orientados e nem vértices projetivos e possui um número finito e próprio de vértices injetivos, então Γ possui uma seção especial Δ que possui fontes, tais fontes são vértices injetivos minimais de Γ e todo vértice de Δ tem um antecessor injetivo em Δ e $\tau\Delta$ não tem antecessor injetivo. Uma versão dual deste resultado é estabelecida no Teorema (2.37).

No Teorema (2.39) provaremos que se Γ for um quiver semi-regular e com a propriedade de que todo caminho de um vértice injetivo para um vértice projetivo é seccional, então Γ possui dois tipos de seções: uma com as propriedades enunciadas no Teorema (2.36) e a outra com as propriedades enunciadas no Teorema (2.37).

Vale destacar também que Coelho-Lanzilotta provaram em [CL01a] que se uma

componente não semi-regular do quiver de Auslander-Reiten de uma álgebra de Artin for tal que todo caminho de um vértice injetivo para um vértice projetivo tem um número limitado de ganchos, então tal componente não possui ciclos orientados. Com o Exemplo (2.26) mostramos que este resultado não necessariamente é verdadeiro para um quiver com translação mesmo que o número de ganchos entre vértices injetivos para vértices projetivos seja nulo.

2.1 Propriedades de quivers com seção

Para falarmos de relações entre quivers com translação, a ferramenta natural é o morfismo de quivers com translação que definimos a seguir. Antes, porém, precisamos do conceito de órbita.

Definição 2.1 *Dados um quiver com translação (Γ, τ) e x um vértice em Γ_0 , definimos a órbita de x em Γ ao conjunto $\mathcal{O}(x) = \{\tau^n x \mid n \in \mathbb{Z} \text{ e tal que existe } \tau^n x\}$. Dizemos também que x é **estável à direita** se existir $\tau^{-n}x$ para todo inteiro positivo n e que x é **estável à esquerda** se existir $\tau^n x$ para todo inteiro positivo n . Dizemos que x é **estável** se for estável à esquerda e à direita. Diremos também que x é um vértice **τ -periódico** se existir um inteiro $n > 0$ tal que $\tau^n x = x$.*

Observe que se um quiver com translação (Γ, τ) próprio possuir um vértice τ -periódico, então Γ possui um ciclo orientado.

Definição 2.2 *Um morfismo entre quivers com translação valorados $f : (\Gamma', \tau') \rightarrow (\Gamma, \tau)$ é um par (f_0, f_1) com $f_0 : \Gamma'_0 \rightarrow \Gamma_0$ e $f_1 : \Gamma'_1 \rightarrow \Gamma_1$ tal que*

- (a) $f_0(\tau'(x)) = \tau(f_0(x))$ para todo x não projetivo em Γ'_0 .
- (b) Se α for uma flecha em Γ'_1 com valoração (a, b) , então $f_1(\alpha)$ será uma flecha em Γ_1 com valoração (a, b) .

Dizemos que f é um **mergulho** se f_0 e f_1 forem aplicações injetoras e, além disso, f satisfizer a seguinte condição:

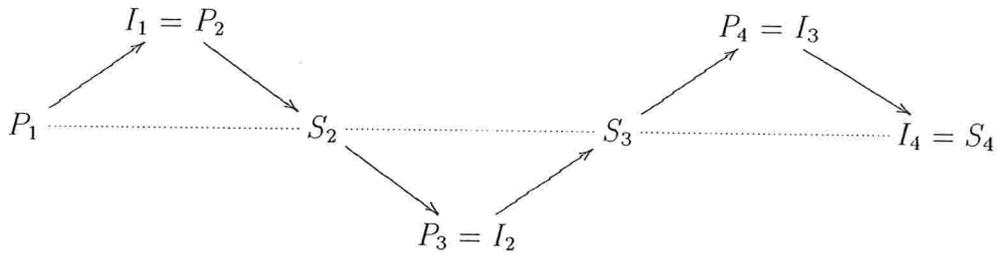
- (c) Dados os vértices x e y de Γ' , tais que $\mathcal{O}(x) \neq \mathcal{O}(y)$, então $\mathcal{O}(f_0(x)) \neq \mathcal{O}(f_0(y))$.

O conceito de mergulho fora mencionado em alguns trabalhos de S. Liu e S. Li. Queremos com esta definição acima ser fiel a idéia expressa no trabalho de S. Liu. Colocamos o item (c) na definição de morfismo entre quivers com translação, fruto das discussões suscitadas com o exemplo abaixo:

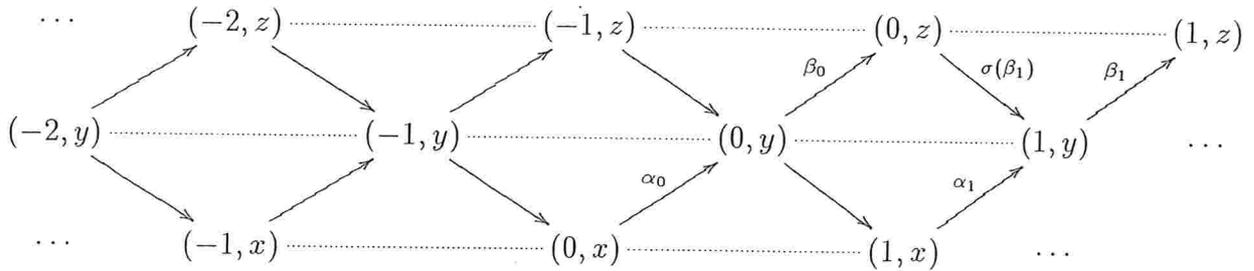
Exemplo 2.3 Considere A a k -álgebra de caminhos com radical quadrado zero (k um corpo) dada pelo quiver:

$$1 \xleftarrow{\alpha} 2 \xleftarrow{\beta} 3 \xleftarrow{\gamma} 4$$

O quiver de Auslander-Reiten Γ_A de A é dado a seguir:



Temos que (Γ_A, τ) , onde τ é a translação de Auslander-Reiten, é um quiver translação. Seja Δ o quiver $x \xrightarrow{\alpha} y \xrightarrow{\beta} z$. O quiver com translação $(\mathbb{Z}\Delta, \rho)$ será então:

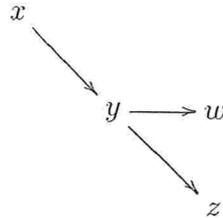


Podemos definir um morfismo entre quivers com translação $f : (\Gamma_A, \tau) \rightarrow (\mathbb{Z}\Delta, \rho)$ como segue: $f_0(S_4) = (1, y)$, $f_0(P_2) = (-2, z)$, $f_0(P_3) = (0, x)$, $f_0(P_4) = (0, z)$. Logo, $f_0(S_3) = f_0(\tau S_4) = \rho(f_0(S_4)) = (0, y)$, $f_0(S_2) = (-1, y)$ e $f_0(P_1) = (-2, y)$. Dessa forma, f_0 é injetora sobre os vértices. As flechas ficaram assim definidas:

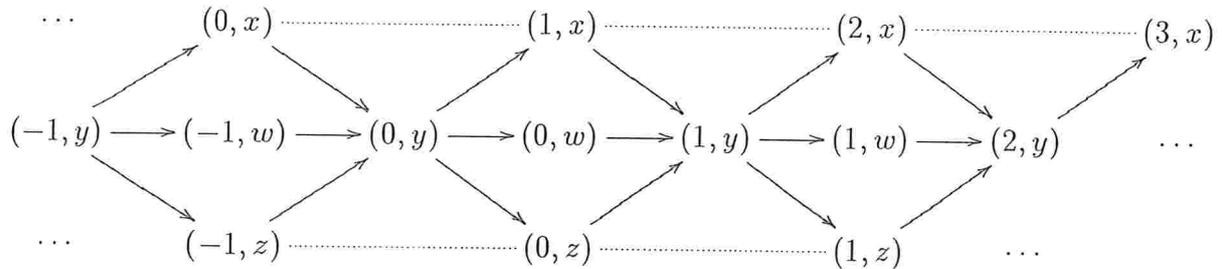
$$\begin{aligned} f_1(P_1 \rightarrow I_1) &= \beta_{-2} = (-2, y) \rightarrow (-2, z), \\ f_1(I_1 \rightarrow S_2) &= \sigma(\beta_{-1}) = (-2, z) \rightarrow (-1, y), \\ f_1(S_2 \rightarrow P_3) &= \sigma(\alpha_0) = (-1, y) \rightarrow (0, x), \\ f_1(I_2 \rightarrow S_3) &= \alpha_0 = (0, x) \rightarrow (0, y), \\ f_1(S_3 \rightarrow P_4) &= \beta_0 = (0, y) \rightarrow (0, z), \\ f_1(P_4 \rightarrow S_4) &= \sigma(\beta_1) = (0, z) \rightarrow (1, y). \end{aligned}$$

Assim, f_1 também é injetora. Porém f não é um mergulho pois $\mathcal{O}(I_1) \neq \mathcal{O}(P_4)$ em Γ_A e $\mathcal{O}(f_0(I_1)) = \mathcal{O}((-2, z)) = \mathcal{O}((0, z)) = \mathcal{O}(f_0(P_4))$. Podemos observar que o número de órbitas de Γ_A é quatro e de $\mathbb{Z}\Delta$ é três.

Porém, é possível definir um mergulho de Γ em um $\mathbb{Z}\Delta$ se tomarmos o quiver $\Delta = D_4$:



Assim, o quiver $(\mathbb{Z}D_4, \rho)$ é da seguinte forma:



e podemos definir um mergulho $f : (\Gamma_A, \tau) \rightarrow (\mathbb{Z}D_4, \rho)$ como segue:

$$f_0(I_4) = (2, y) \text{ e então } f_0(S_3) = f_0(\tau I_4) = \rho(f_0(I_4)) = \rho(2, y) = (1, y);$$

$$f_0(S_2) = f_0(\tau S_3) = \rho(f_0(S_3)) = \rho(1, y) = (0, y);$$

$$f_0(P_1) = f_0(\tau S_2) = \rho(f_0(S_2)) = (-1, y);$$

$f_0(I_1) = (0, x)$, $f_0(P_3) = (0, z)$ e $f_0(I_3) = (1, w)$. Deste modo, f_0 é injetora sobre o conjunto dos vértices de $(\Gamma_A)_0$. As flechas podem ser definidas:

$$f_1(P_1 \rightarrow I_1) = (-1, y) \rightarrow (0, x),$$

$$f_1(I_1 \rightarrow S_2) = (0, x) \rightarrow (0, y),$$

$$f_1(S_2 \rightarrow P_3) = (0, y) \rightarrow (0, z),$$

$$f_1(P_3 \rightarrow S_3) = (0, z) \rightarrow (1, y),$$

$$f_1(S_3 \rightarrow I_3) = (1, y) \rightarrow (1, w),$$

$$f_1(I_3 \rightarrow I_4) = (1, w) \rightarrow (2, y).$$

Dessa forma, f_1 também é injetora e é fácil ver que se $\mathcal{O}(X) \neq \mathcal{O}(Y)$, então $\mathcal{O}(f_0(X)) \neq \mathcal{O}(f_0(Y))$ para todo par de vértices X e Y em $(\Gamma_A)_0$.

Definição 2.4 Seja (Γ, τ) um quiver translação. Um subquiver pleno Δ de Γ é uma seção em Γ se satisfizer as seguintes propriedades:

S.1 Não existem ciclos orientados em Δ .

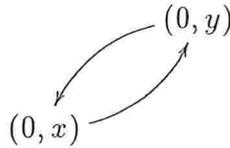
S.2 O subquiver Δ encontra cada τ -órbita em Γ exatamente uma vez.

S.3 Cada caminho em Γ com ponto inicial e final em Δ está em Δ .

Se o quiver com translação (Γ, τ) for um quiver translação valorado, então o subquiver Δ é um quiver com translação valorado com a valoração natural de Γ .

Observação 2.5 (a) *Todo caminho com vértice inicial e final numa seção Δ é seccional. De fato, se $x = x_0 \rightarrow \cdots \rightarrow x_n = y$ for um caminho em Γ_0 com x e y em Δ , então pela propriedade S.3 o caminho está em Δ . Pela propriedade S.2 tal caminho é seccional.*

(b) *Em [BS83] Bautista-Smalø provaram que não existem ciclos seccionais no quiver de Auslander-Reiten de uma álgebra de artin. Porém esse resultado não vale em geral para quiver translação. No Exemplo (1.6) temos o ciclo*



que é seccional.

Pelo item (a) vimos que todo caminho numa seção é seccional. Se tal seção for seção de um quiver de Auslander-Reiten de uma álgebra de artin, então o item S.1 da definição de seção pode ser omitido. Como também estamos interessados em mergulhos de quivers de A.R. de uma álgebra de artin em $\mathbb{Z}\Delta$, então vamos manter na definição de seção o item S.1.

Lema 2.6 *Sejam (Γ, τ) um quiver translação, Δ uma seção em Γ e $x \rightarrow y$ uma flecha em Γ .*

a) *Se $x \in \Delta$, então y ou τy pertence a Δ .*

b) *Se $y \in \Delta$ então x ou $\tau^{-1}x \in \Delta$.*

Demonstração: a) Se $x \in \Delta$ e $y \notin \Delta$, então y não é projetivo. De fato, se fosse projetivo, como Δ encontra cada τ -órbita de Γ , existiria um inteiro $k \geq 1$ tal que $\tau^{-k}y \in \Delta$ e teríamos o caminho $x \rightarrow y \rightarrow \cdots \rightarrow \tau^{-k}y$ com extremos em Δ . Por S.3 e S.2 na definição de seção teríamos uma contradição. Como y não é projetivo, logo existe $\tau y \in \Gamma$ e como Δ é seção, existe um inteiro $k \geq 1$ tal que $\tau^k y \in \Delta$. Se $k > 1$, teremos o caminho $\tau^k y \rightarrow \cdots \rightarrow \tau y \rightarrow x$ com $\tau^k y$ e x em Δ e por S.3 e S.2, temos novamente uma contradição. Portanto $\tau y \in \Delta$.

b) A segunda afirmação segue de forma dual. ■

Apresentamos a seguir um resultado importante de Liu [Liu93] sobre quivers com translação que utilizaremos com frequência neste trabalho.

Proposição 2.7 *Seja (Γ, τ) um quiver com translação próprio e conexo. Se Γ contiver uma seção Δ , então Γ pode ser mergulhado em $\mathbb{Z}\Delta$.*

Em [ASS] pode ser encontrada a demonstração de que um quiver com translação com seção não possui ciclos orientados. Os autores fazem uso da Proposição (2.7) para provar este fato. A seguir apresentamos uma prova direta usando a definição de seção.

Teorema 2.8 *Seja (Γ, τ) um quiver com translação próprio e conexo com uma seção Δ . Então Γ não possui ciclos orientados.*

Demonstração: Suponhamos que exista um ciclo $x = x_0 \rightarrow \cdots \rightarrow x_s = x$ ($s > 1$) em Γ . Pelo item S.2 da definição de seção, existe um inteiro k tal que $\tau^k x \in \Delta$. Suponhamos sem perda de generalidade que $k \geq 0$.

Se existir $\tau^k x_u$ para todo índice u com $0 \leq u \leq s$, então pelo item S.3, teremos o ciclo $\tau^k x = \tau^k x_0 \rightarrow \cdots \rightarrow \tau^k x_s = \tau^k x$ em Δ , o que é uma contradição com S.1. Portanto, para algum índice $j \in \{1, \dots, s-1\}$ não existe $\tau^k x_j$ e então, para algum inteiro $0 \leq l < k$, existe um índice j tal que $\tau^l x_j = p$ para algum projetivo p em Γ . Dentre estes vértices escolhemos o vértice x_j que tem o menor inteiro l com esta propriedade. Logo temos o caminho $\tau^k x \rightsquigarrow \tau^l x = \tau^l x_0 \rightarrow \cdots \rightarrow \tau^l x_j = p \rightarrow \cdots \rightarrow \tau^l x_{s-1} \rightarrow \tau^l x_s = \tau^l x$ em Γ .

Como Δ encontra todas as órbitas de Γ , existe um inteiro $r \geq 0$ tal que $\tau^{-r} p \in \Delta$. Como existe caminho de $\tau^k x$ para $\tau^l x_j = p$ com $\tau^k x \in \Delta$, então $r = 0$. Caso contrário, teríamos os vértices p e $\tau^{-r} p$ em Δ por (S.3), contradizendo (S.2). Portanto $p \in \Delta$. Neste caso, o caminho $p \rightarrow \cdots \rightarrow \tau^l x \rightarrow \cdots \rightarrow \tau^l x_j = p$ está em Δ , contradizendo a definição de seção.

O caso $k \leq 0$, é análogo. Portanto Γ não contém ciclos orientados. ■

Uma outra propriedade interessante de um quiver com seção está enunciado no Teorema seguinte. A prova original fora dada para quivers de Auslander-Reiten em [Li00]. Apresentamos aqui uma prova, geral para quiver translação.

Teorema 2.9 *Seja (Γ, τ) um quiver com translação próprio e conexo com uma seção. Então, todo possível caminho em Γ de um vértice injetivo para um vértice projetivo é seccional.*

Demonstração: Suponhamos que Γ possa ser mergulhado em algum $\mathbb{Z}\Delta$ com Δ isomorfo a uma seção de Γ . Então Δ pode ser visto como uma seção de Γ e para todo possível caminho $i = m_0 \rightarrow m_1 \rightarrow \cdots \rightarrow m_n = p$ em Γ com i vértice injetivo e p vértice projetivo, existem inteiros $k, j \geq 0$ tais que $\tau^k i$ e $\tau^{-j} p$ pertencem a Δ pois a seção encontra cada τ -órbita exatamente uma vez. Obtemos assim o caminho

$\tau^k i \rightarrow \cdots \rightarrow i = m_0 \rightarrow \cdots \rightarrow m_n = p \rightarrow \cdots \rightarrow \tau^{-j} p$ em Γ . Deduzimos daí que o caminho $i = m_0 \rightarrow \cdots \rightarrow m_n = p$ é seccional, pois caminhos com extremos na seção, estão inteiramente contidos na seção. ■

Observe que, na demonstração do resultado acima, foi necessário apenas que o quiver com translação tivesse uma seção. Não houve necessidade de que Γ possuísse um número finito de vértices injetivos ou projetivos e que tivesse um número finito de órbitas. Agora a pergunta natural é se vale a recíproca do resultado acima, isto é, se (Γ, τ) for um quiver com translação próprio e conexo tal que todo possível caminho em Γ de um vértice injetivo para um vértice projetivo seja seccional, então Γ pode ser mergulhado em um quiver $\mathbb{Z}\Delta$. É o que faremos a seguir.

2.2 Quiver com translação com seção e sem ciclos

O resultado a seguir fora antes provado por Size Li [Li00] para uma componente do quiver de Auslander-Reiten. Aqui, com a mesma técnica, apresentamos a prova para quiver translação. Com este teorema, temos uma condição suficiente para que um quiver com translação (Γ, τ) contenha um ciclo orientado.

Teorema 2.10 *Seja (Γ, τ) um quiver com translação próprio e conexo com um número finito de vértices projetivos. Se existirem x e y em Γ tais que para infinitos inteiros positivos n , existam caminhos de x para $\tau^n y$ em Γ , então Γ contém um ciclo orientado.*

Demonstração: Como para infinitos inteiros n existem os vértices $\tau^n y$, então y é um vértice estável à esquerda. Além disso, existem infinitos inteiros n_j com j inteiro e $j \geq 0$, tais que $n_{j-1} < n_j$ para todo $j \geq 1$ de tal forma que existam caminhos em Γ de x para $\tau^{n_j} y$ para cada $j \geq 0$.

Considere o caminho $x = x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow \cdots \rightarrow x_m = \tau^{n_0} y$ em Γ . Suponhamos que todos os vértices do caminho $x_1 \rightarrow \cdots \rightarrow x_m = \tau^{n_0} y$ sejam estáveis à esquerda. Então existe em Γ o caminho $\tau^{n_0+m} y = \tau^m x_m \rightarrow \tau^{m-1} x_{m-1} \rightarrow \cdots \rightarrow \tau^2 x_2 \rightarrow \tau x_1 \rightarrow x = x_0$. Sabemos que existe algum índice j tal que $n_0 + m < n_j$ e tal que Γ contém um caminho de x para $\tau^{n_j} y$. Portanto Γ contém o ciclo orientado $x \rightsquigarrow \tau^{n_j} y \rightsquigarrow \tau^{n_0+m} y \rightsquigarrow x$.

Agora suponhamos que nem todos os vértices do caminho $x_1 \rightarrow \cdots \rightarrow x_m = \tau^{n_0} y$ sejam estáveis à esquerda. Consideremos o maior índice l com $0 \leq l \leq m-1$, tal que x_l não seja estável à esquerda, isto é, existe um inteiro l_1 tal que $\tau^{l_1} x_l = p_1$ para algum projetivo p_1 de Γ . Observamos que os vértices x_k são estáveis à esquerda para todo k com $l+1 \leq k \leq m$. Fazendo o mesmo procedimento anterior, podemos tomar um inteiro n_{j_1} para algum $j_1 > 0$, tal que existe um caminho $x \rightsquigarrow \tau^{n_{j_1}} y$ em Γ e um caminho de $\tau^{n_{j_1}} y$ para p_1 em Γ .

Se todos os vértices do caminho $x \rightsquigarrow \tau^{n_{j_1}} y$ forem estáveis à esquerda, podemos construir um ciclo como no primeiro caso. Porém, se existir um vértice neste caminho que não seja estável à esquerda, com o mesmo procedimento do segundo caso, existirá um índice $n_{j_2} > n_{j_1}$ e caminhos $x \rightsquigarrow \tau^{n_{j_2}} y$ e $\tau^{n_{j_2}} y \rightsquigarrow p_2$ com p_2 projetivo. Se p_2 for igual a p_1 , como existe um caminho $p_2 \rightsquigarrow \tau^{n_{j_1}} y$ em Γ , temos o seguinte ciclo orientado $p_2 = p_1 \rightsquigarrow \tau^{n_{j_1}} y \rightsquigarrow p_1$ em Γ . Caso p_2 seja distinto de p_1 , repetindo o procedimento anterior, teremos um inteiro $n_{j_3} > n_{j_2}$ e caminhos $x \rightsquigarrow \tau^{n_{j_3}} y$ e $\tau^{n_{j_3}} y \rightsquigarrow p_2$ em Γ . Este procedimento é finito pois o número de vértices projetivos em Γ é finito. Então, segue por indução que em algum passo do procedimento teremos um ciclo orientado. ■

O seguinte seguinte resultado é o dual do teorema acima.

Teorema 2.11 *Seja (Γ, τ) um quiver com translação próprio e conexo com um número finito de vértices injetivos. Se existirem x e y em Γ tais que para infinitos inteiros $j \geq 0$, existe um caminho de $\tau^{-j} x$ para y em Γ , então Γ contém um ciclo orientado.*

Como consequência:

Corolário 2.12 *Seja (Γ, τ) um quiver com translação próprio e conexo, com um número finito de vértices injetivos e projetivos e sem ciclos orientados e sejam x e y vértices de Γ . Se existir um caminho de x para y em Γ , então:*

(a) *Existe um inteiro $n \geq 0$ tal que Γ contém um caminho de x para $\tau^n y$, mas não contém caminho de x para $\tau^{n+1} y$.*

(b) *Existe um inteiro $m \geq 0$ tal que Γ contém caminho de $\tau^{-m} x$ para y , mas não contém caminho de $\tau^{-(m+1)} x$ para y .*

2.3 As definições de Ringel e Size Li

Nesta seção desenvolveremos algumas técnicas que nos permitirá construir seções para quivers sem ciclos orientados que não possuem vértices projetivos ou que não possuem vértices injetivos. E também para quivers que possuem ambos injetivos e projetivos, mas com a condição de que todo possível caminho de um vértice injetivo para um vértice projetivo seja seccional.

Definição 2.13 *Seja (Γ, τ) um quiver com translação próprio e conexo. Dizemos que Γ é estável à esquerda se todo vértice de Γ for estável à esquerda e estável à direita se todo vértice for estável à direita. Dizemos que Γ é estável se Γ for estável à esquerda e à direita. Além disso, podemos dizer que Γ é semi-estável se ele for estável à esquerda ou à direita.*

Segue da definição de vértice projetivo e injetivo que, um quiver estável à esquerda não possui vértice projetivo e um quiver estável à direita não possui vértice injetivo.

Em geral, na literatura, ao invés de estável usa-se o termo regular quando o quiver for um quiver A.R. de uma álgebra de artin, ou uma de suas componentes. Assim, é comum usar semi-regular no lugar de semi-estável e não semi-regular quando for não semi-estável.

Com o intuito de construir seções de quivers com translação, definimos os seguintes conjuntos:

$$S(x \rightarrow) = \{y \in \Gamma \mid \text{existe caminho de } x \text{ para } y \text{ e todo caminho de } x \text{ para } y \text{ é seccional}\},$$

$$S(\rightarrow x) = \{y \in \Gamma \mid \text{existe caminho de } y \text{ para } x \text{ e todo caminho de } y \text{ para } x \text{ é seccional}\}.$$

Esta definição é devida a Ringel [Rin84], mas observamos que ele trabalhou com quiver de Auslander-Reiten. O objetivo também era construir uma seção para o quiver.

Em [Li00], Size Li introduziu a seguinte definição: para $x \in \Gamma$, considerou o conjunto $\{y \in \Gamma \mid y = x, \text{ ou } \Gamma \text{ contém um caminho de } x \text{ para } y, \text{ mas não contém de } x \text{ para } \tau y\}$. Observamos que Li denotou este conjunto por $S(x \rightarrow)$. Aqui estaremos denotando tal conjunto por $S_L(x \rightarrow)$. Dualmente, $S_L(\rightarrow x) = \{y \in \Gamma \mid y = x, \text{ ou } \Gamma \text{ contém um caminho de } y \text{ para } x, \text{ mas não contém um caminho de } \tau^-y \text{ para } x\}$.

Lema 2.14 *Se (Γ, τ) for um quiver com translação e x um vértice qualquer em Γ , então $S(x \rightarrow) \subseteq S_L(x \rightarrow)$.*

Demonstração: Seja $y \in S(x \rightarrow)$, então existe caminho de x para y em Γ e todo caminho de x para y é seccional.

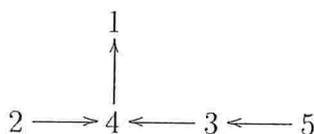
Vamos supor que $y \notin S_L(x \rightarrow)$. Se $x = y$, então pela definição, inferimos que existe um caminho de x para $\tau x = \tau y$ e portanto existe um caminho não seccional de x para y , contradizendo a hipótese de que $y \in S(x \rightarrow)$. Logo $x \neq y$.

Como existe caminho $x \rightsquigarrow y$ em Γ e $y \notin S_L(x \rightarrow)$, logo existe um caminho $x \rightsquigarrow \tau y$ em Γ . Portanto, existe o caminho $x \rightsquigarrow \tau y \rightsquigarrow y$ em Γ contradizendo o fato de que $y \in S(x \rightarrow)$.

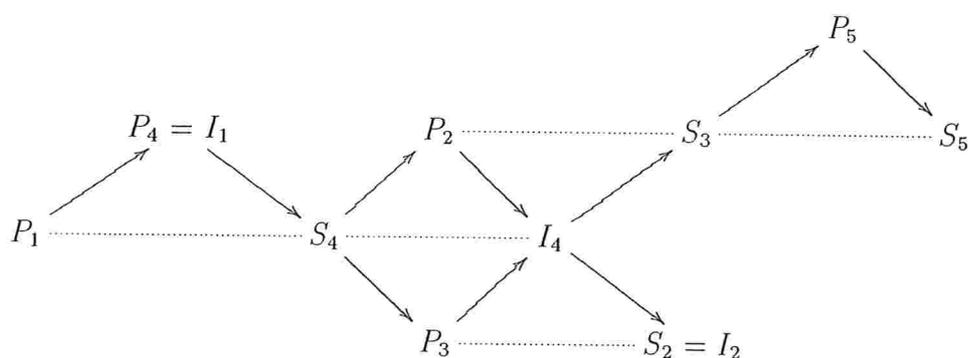
Portanto, se $y \in S(x \rightarrow)$, então $y \in S_L(x \rightarrow)$. ■

A seguir, apresentamos um exemplo em que $S_L(x \rightarrow)$ e $S(x \rightarrow)$ podem ser distintos.

Exemplo 2.15 *Seja A a álgebra de caminhos com radical quadrado nulo dada pelo quiver*



cujo quiver de Auslander-Reiten segue abaixo:



Vemos que $P_5 \in S_L(I_1 \rightarrow)$. Por outro lado como existe um caminho não seccional de I_1 para P_5 , inferimos que $P_5 \notin S(I_1 \rightarrow)$. Logo $S_L(I_1 \rightarrow) \not\subseteq S(I_1 \rightarrow)$.

Com o objetivo de unificar estas notações de Size Li e Ringel, temos a seguinte definição.

Definição 2.16 *Sejam (Γ, τ) um quiver com translação e $x \in \Gamma$.*

a) *Dizemos que um vértice projetivo $p \in \Gamma$ é um **projetivo final de gancho de x** se existir um caminho não seccional de x para p em Γ . O conjunto dos projetivos finais de gancho de x em Γ e seus sucessores serão denotados por $\mathcal{P}(x)$.*

b) *Dizemos que um vértice injetivo i é um **vértice injetivo inicial de gancho de x** , se existir um caminho não seccional de i para x em Γ . O conjunto dos vértices injetivos iniciais de gancho de x em Γ e seus antecessores, serão denotados por $\mathcal{I}(x)$.*

c) *Dizemos simplesmente que p é um **projetivo final de gancho** se $\mathcal{I}(p) \neq 0$ ou $p \in \mathcal{P}(i)$ para algum vértice injetivo i de Γ .*

Com esta terminologia temos o seguinte resultado:

Proposição 2.17 *Sejam (Γ, τ) um quiver com translação e x um vértice em Γ . Então:*

- a) $S_L(x \rightarrow) \setminus \mathcal{P}(x) = S(x \rightarrow)$.
- b) $S_L(\rightarrow x) \setminus \mathcal{I}(x) = S(\rightarrow x)$.

Demonstração: (a) Seja $y \in S(x \rightarrow)$. Então existe um caminho de x para y em Γ e todo caminho de x para y é seccional. Portanto $y \notin \mathcal{P}(x)$ e não existe caminho de x para τy . Assim, podemos dizer que $y \in S_L(x \rightarrow) \setminus \mathcal{P}(x)$. Então, $S(x \rightarrow) \subseteq S_L(x \rightarrow) \setminus \mathcal{P}(x)$.

Agora, seja $y \in S_L(x \rightarrow) \setminus \mathcal{P}(x)$. Portanto, existe um caminho de x para y , não existe caminho de x para τy e $y \notin \mathcal{P}(x)$. Queremos provar que todo caminho $x \rightsquigarrow y$ é seccional. Se existir um caminho em Γ da forma $x \rightsquigarrow \tau z \rightsquigarrow z \rightsquigarrow y$, então podemos dizer que todo vértice do caminho $z \rightsquigarrow y$ não é projetivo pois $y \notin \mathcal{P}(x)$. Portanto existe caminho $\tau z \rightsquigarrow \tau y$ e assim temos o caminho $x \rightsquigarrow \tau z \rightsquigarrow \tau y$ contradizendo a hipótese sobre y . Logo $y \in S(x \rightarrow)$.

(b) A prova de que $S(\rightarrow x) = S_L(\rightarrow x) \setminus \mathcal{I}(x)$ é análoga. ■

No contexto em que Li definiu o objeto $S_L(x \rightarrow)$, havia a propriedade de que todo caminho de um vértice injetivo para um vértice projetivo era seccional. Dessa forma para todo vértice injetivo $i \in \Gamma$, $\mathcal{P}(i) = \phi$ e para todo vértice projetivo p , $\mathcal{I}(p) = \phi$. Portanto a partir da Proposição anterior temos:

Corolário 2.18 *Seja (Γ, τ) um quíver com translação próprio e conexo tal que todo caminho de um vértice injetivo para um vértice projetivo em Γ é seccional.*

- a) *Se i for um vértice injetivo em Γ , então $S_L(i \rightarrow) = S(i \rightarrow)$*
- b) *Se p for um vértice projetivo, então $S_L(\rightarrow p) = S(\rightarrow p)$.*

Proposição 2.19 *Seja (Γ, τ) um quíver com translação próprio e conexo e seja $x \in \Gamma$. Então os subquívers plenos de Γ gerados por $S(x \rightarrow)$ e $S(\rightarrow x)$ são conexos, convexos e quando encontrarem uma τ -órbita de Γ , encontrarão no máximo uma vez.*

Corolário 2.20 *Seja (Γ, τ) um quíver com translação próprio e conexo e seja $x \in \Gamma$. Então os subquívers plenos de Γ gerados por $S_L(x \rightarrow)$ e $S_L(\rightarrow x)$ quando encontrarem uma τ -órbita de Γ , encontrarão no máximo uma vez.*

Seja (Γ, τ) um quíver com translação próprio e conexo. Observamos que dado $x \in \Gamma$, não necessariamente, $S(x \rightarrow)$ é conexo. No exemplo (2.15), se tomarmos o subquíver pleno de Γ_A gerado por $S_L(I_1 \rightarrow)$, podemos ver que este subquíver é desconexo.

Proposição 2.21 *Seja (Γ, τ) um quíver com translação e $a \rightarrow b$ uma flecha em Γ .*

(a) *Se $\mathcal{P}(x) = \phi$, valem as seguintes afirmações:*

- (i) *Se $a \in S(x \rightarrow)$, então $b \in S(x \rightarrow)$ ou $\tau b \in S(x \rightarrow)$.*
- (ii) *Se $b \in S(x \rightarrow)$, então $a \in S(x \rightarrow)$ ou a é injetivo ou $\tau^{-1}a \in S(x \rightarrow)$.*

(b) Se $\mathcal{I}(x) = \phi$ valem as seguintes afirmações:

(i) Se $a \in S(\rightarrow x)$, então $b \in S(\rightarrow x)$ ou b é projetivo ou $\tau b \in S(\rightarrow x)$.

(ii) Se $b \in S(\rightarrow x)$, então $a \in S(\rightarrow x)$ ou $\tau^-a \in S(\rightarrow x)$.

Demonstração: Vamos provar (a) já que a demonstração de (b) é análoga.

(i) Seja $a \in S(x \rightarrow)$, então existe um caminho de x para b em Γ . Se $b \notin S(x \rightarrow)$ então existe um caminho de x para b não seccional $x \rightsquigarrow \tau z \rightsquigarrow z \rightsquigarrow b$ em Γ . Como $\mathcal{P}(x) = \phi$ o caminho $z \rightsquigarrow b$ não contém vértices projetivos. Então existe um caminho $x \rightsquigarrow \tau z \rightsquigarrow \tau b$ em Γ e assim existe o caminho $x \rightsquigarrow \tau z \rightsquigarrow \tau b \rightarrow a$. Este caminho é seccional, pois $a \in S(x \rightarrow)$. Mais ainda todo caminho de x para τb é seccional pois $a \in S(x \rightarrow)$. Portanto $\tau b \in S(x \rightarrow)$.

(ii) Seja $b \in S(x \rightarrow)$ e suponhamos que $a \notin S(x \rightarrow)$. Neste caso, ou não existe caminho de x para a em Γ , ou existe algum caminho de x para a não seccional.

Se existisse um caminho de x para a não seccional, então como existe a flecha $a \rightarrow b$ teríamos um caminho não seccional de x para b em Γ . Assim podemos dizer que não existe um caminho de x para a não seccional, pois contradiz a hipótese de que $b \in S(x \rightarrow)$.

Agora vamos supor que não existe caminho de x para a em Γ . Se a for injetivo não temos nada mais para provar. Se não for injetivo, existe o caminho $x \rightsquigarrow b \rightarrow \tau^-a$ em Γ . Vamos supor que exista um caminho em Γ de x para τ^-a não seccional da forma $x \rightsquigarrow \tau z \rightsquigarrow z \rightsquigarrow \tau^-a$. Como $\mathcal{P}(x) = \phi$, logo não existe vértice projetivo no caminho $z \rightsquigarrow \tau^-a$. Assim, existe em Γ o caminho $x \rightsquigarrow \tau z \rightsquigarrow a$ contradizendo a hipótese da não existência de caminho de x para a em Γ . Portanto, todo caminho de x para τ^-a é seccional e então $\tau^-a \in S(x \rightarrow)$. ■

Como consequência da proposição anterior temos o seguinte resultado.

Corolário 2.22 *Seja Γ um quiver com translação próprio e conexo tal que todo caminho de um vértice injetivo para um projetivo em Γ é seccional e sejam i um vértice injetivo, p um vértice projetivo em Γ e $x \rightarrow y$ uma flecha em Γ . Valem as seguintes afirmações:*

(a) *Se $x \in S_L(\rightarrow p)$, então $y \in S_L(\rightarrow p)$ ou y é projetivo ou $\tau y \in S_L(\rightarrow p)$.*

(b) *Se $y \in S_L(i \rightarrow)$, então $x \in S_L(i \rightarrow)$ ou x é injetivo ou $\tau^-x \in S_L(i \rightarrow)$.*

(c) *Se $x \in S_L(i \rightarrow)$, então $y \in S_L(i \rightarrow)$ ou $\tau y \in S_L(i \rightarrow)$.*

(d) *Se $y \in S_L(\rightarrow p)$, então $x \in S_L(\rightarrow p)$ ou $\tau^-x \in S_L(\rightarrow p)$.*

Demonstração: Como caminho de injetivo para projetivo é seccional em Γ , segue que $\mathcal{P}(i) = \phi$ e $\mathcal{I}(p) = \phi$ para todo vértice injetivo i em Γ e todo vértice projetivo p . Assim, pela Proposição (2.17) $S_L(i \rightarrow) = S(i \rightarrow)$ e $S_L(\rightarrow p) = S(\rightarrow p)$ e da Proposição (2.21) segue as afirmações (a), (b), (c) e (d). ■

Com esta nova notação, temos uma prova mais sucinta do Teorema 3.4 de [Liu93].

Teorema 2.23 *Seja (Γ, τ) um quiver com translação próprio e conexo, sem ciclos orientados com um número finito de vértices projetivos e sem injetivos. Então Γ pode ser mergulhado em algum quiver $\mathbb{Z}\Delta$ com Δ sem sucessores projetivos e isomorfo a uma seção de Γ .*

Demonstração: Seja Γ um quiver sem vértices injetivos e x_0 um vértice arbitrário de Γ . Suponhamos que Γ contém um vértice projetivo p_1 . Considere o passeio $p_1 = y_0 - y_1 - \dots - y_s = x_0$ em Γ . Como cada y_i é estável à direita, então aplicando τ^{-1} repetidamente se necessário, obtemos um caminho de p_1 para $\tau^{-k}x_0$ para algum $k \geq 0$. Logo não existe caminho de $\tau^{-k}x_0$ para p_1 , pois Γ não contém ciclo orientado. Como Γ contém um número finito de vértices projetivos, repetindo este procedimento, inferimos que, existe um inteiro $n_0 \geq 0$ tal que Γ não contém caminho de $\tau^{-n_0}x_0$ para vértices projetivos de Γ .

Seja Δ o subquiver pleno de Γ gerado por $S(\tau^{-n_0}x_0 \rightarrow)$. Vamos provar que Δ é uma seção de Γ .

Podemos afirmar que Δ é conexo, convexo e encontra cada τ -órbita de Γ no máximo uma vez (Proposição (2.19)). Precisamos provar que Δ encontra todas as τ -órbitas de Γ .

Suponhamos que exista uma órbita \mathcal{O} de Γ tal que $\mathcal{O} \cap \Delta = \emptyset$. Dentre as órbitas com esta propriedade, podemos escolher uma órbita de um vértice u tal que $\mathcal{O}(u) \cap \Delta = \emptyset$ e exista $v \in \Delta$ e alguma flecha em Γ , $u \rightarrow \tau^k v$ ou $\tau^k v \rightarrow u$ ($k \in \mathbb{Z}$). De fato, se tomarmos um passeio de menor comprimento em Γ :

$$z = z_0 - z_1 - \dots - z_s = w$$

com $\mathcal{O}(z) \cap \Delta_0 \neq \emptyset$ e $\mathcal{O}(w) \cap \Delta_0 = \emptyset$, então $s = 1$. Se $s > 1$, então existem vértices z_1 e z_2 no passeio. Porém, se $\mathcal{O}(z_1) \cap \Delta_0 \neq \emptyset$ ou se $\mathcal{O}(z_1) \cap \Delta_0 = \emptyset$, contradiz a minimalidade do comprimento do passeio. Portanto, $s = 1$ e fazendo $u = w$ e $v = z$ temos que existe ou a flecha $u \rightarrow \tau^k v$ ou a flecha $\tau^k v \rightarrow u$ ($k \in \mathbb{Z}$) tal que $\mathcal{O}(u) \cap \Delta_0 = \emptyset$ e $\mathcal{O}(v) \cap \Delta_0 \neq \emptyset$.

Agora provemos que existem vértices a e b em Γ e alguma flecha $a \rightarrow b$ ou $b \rightarrow a$ com $b \in \Delta$. Podemos escolher $k = 0$.

Suponhamos que $k > 0$. Se existir a flecha $u \rightarrow \tau^k v$, então existirá a flecha $\tau^{-k}u \rightarrow v$ pois não existem injetivos em Γ . Assim, temos uma flecha $\tau^{-k}u \rightarrow v$ com $v \in \Delta$ e $\mathcal{O}(\tau^{-k}u) \cap \Delta_0 = \emptyset$. Já no caso em que $k = -t$ com $t > 0$ ($t \in \mathbb{Z}$), então existe a flecha $u \rightarrow \tau^{-t}v$. Dessa forma, existe a flecha $v \rightarrow \tau^{t-1}u$, pois caso contrário o vértice v teria um sucessor projetivo (observe que v é sucessor de $\tau^{-n_0}x_0$). Então temos uma flecha $v \rightarrow \tau^{t-1}u$ com $v \in \Delta$ e $\mathcal{O}(\tau^{t-1}u) \cap \Delta = \emptyset$. Também podemos supor que $k = 0$ no caso em que existe a flecha $\tau^k v \rightarrow u$ ($k \in \mathbb{Z}$). A prova deste fato é análoga.

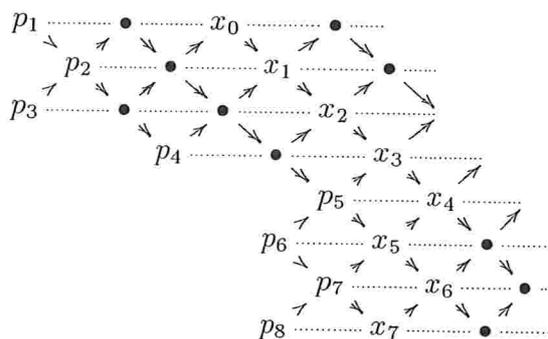
Portanto, se Δ não encontra todas as τ -órbitas de Γ , existem vértices x e y em Γ com $y \in \Delta$ e flechas $y \rightarrow x$ ou $x \rightarrow y$ em Γ com $\mathcal{O}(x) \cap \Delta = \emptyset$.

Se Γ contiver a flecha $y \rightarrow x$, pelo Corolário (2.12), existe um inteiro $m \geq 0$ tal que $\tau^m x \in S_L(\tau^{-n_0} x_0 \rightarrow)$. Sabemos que $S_L(\tau^{-n_0} x_0 \rightarrow) = S(\tau^{-n_0} x_0 \rightarrow)$, pois $\mathcal{P}(\tau^{-n_0} x_0) = \emptyset$ (Proposição (2.17)). Portanto $\tau^m x \in S(\tau^{-n_0} x_0 \rightarrow)$ e então $\tau^m x \in \Delta$, contradizendo a hipótese de que $\mathcal{O}(x) \cap \Delta = \emptyset$.

Se Γ contiver a flecha $x \rightarrow y$, então Γ contém a flecha $y \rightarrow \tau^-x$. Com esta flecha e a discussão do parágrafo anterior, temos novamente uma contradição.

Portanto, Δ encontra todas as τ -órbitas de Γ e assim Δ é uma seção de Γ . Pela Proposição (2.7), Γ pode ser mergulhado em $\mathbb{Z}\Delta$. ■

Exemplo 2.24 Consideremos o seguinte quiver estável à direita:



onde os vértices p_l com $1 \leq l \leq 8$, são vértices projetivos de Γ .

Vemos que os vértices x_j não possuem sucessor projetivo em (Γ, τ) . Logo da prova do Teorema (2.23), podemos dizer que para cada j , com $0 \leq j \leq 7$, $S(x_j \rightarrow)$ é uma seção de (Γ, τ) .

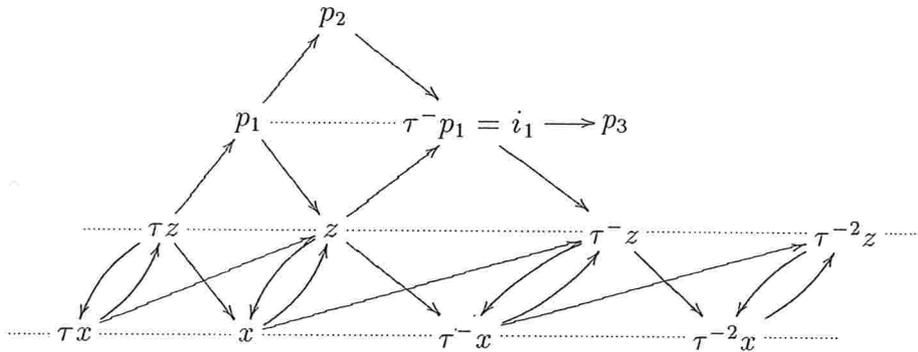
Na Seção (2.4), utilizaremos as técnicas de [Li00] para mostrar que um quiver com translação com as hipóteses do teorema acima, pode ser mergulhado num quiver $\mathbb{Z}\Delta$ onde a seção Δ possui algum poço e todos os poços de Δ são vértices projetivos. Segue abaixo o dual do teorema acima.

Teorema 2.25 Seja (Γ, τ) um quiver com translação próprio e conexo, sem ciclos orientados com um número finito de vértices injetivos e sem projetivos. Então Γ pode ser mergulhado em algum quiver $\mathbb{Z}\Delta$ com Δ sem antecessores injetivos e isomorfo a uma seção de Γ .

2.4 Uma seção especial para quivers com translação

Em [Li00], Li provou que se Γ for uma componente não semi-regular do quiver A.R. de uma álgebra de Artin, sem ciclos orientados, e tal que todo caminho de um vértice injetivo para um projetivo nesta componente é seccional, então Γ possui uma seção Δ . Utilizando as mesmas técnicas provaremos a seguir um resultado análogo para quivers com translação não semi-regulares (Teorema (2.39)). Além disso, provaremos que quivers semi-estáveis possuem um tipo especial de seção (Teoremas (2.36) e (2.37)).

Exemplo 2.26 Decorre de [CL01a] que se Γ for uma componente não semi-regular do quiver de Auslander-Reiten Γ_A de uma álgebra de Artin A tal que todo caminho de um vértice injetivo para um vértice projetivo seja seccional, então Γ não possui ciclos orientados. Este resultado não necessariamente se verifica para quiver translação. É o que mostraremos através do seguinte quiver:



Como no decorrer desta seção, estaremos trabalhando com um quiver (Γ, τ) tal que todo caminho de um vértice injetivo para um projetivo é seccional, então para cada vértice injetivo $i \in \Gamma$, o conjunto $\mathcal{P}(i) = \emptyset$ e para cada projetivo $p \in \Gamma$, $\mathcal{I}(p) = \emptyset$. Sendo assim, para cada injetivo i e projetivo $p \in \Gamma$, valem as propriedades dos Corolários (2.20), (2.22) e (2.18).

Observamos que neste contexto, $S_L(x \rightarrow) = S(x \rightarrow)$ para todo $x \in \Gamma$.

2.4.1 Uma relação de ordem para os injetivos e projetivos de Γ

Nesta seção consideraremos (Γ, τ) um quiver translação próprio e conexo, sem ciclos orientados e com um número finito de vértices projetivos e injetivos, e tal que

todo possível caminho de um vértice injetivo de Γ para um vértice projetivo de Γ seja seccional.

Nosso objetivo é construir uma seção para o quiver Γ e, para tanto, utilizaremos subquivers da forma $S(x \rightarrow)$ ou $S(\rightarrow x)$ com $x \in \Gamma$. No entanto, não é qualquer vértice x de Γ que nos interessa para construir tal seção. Definiremos uma relação de ordem para os vértices projetivos e para os vértices injetivos de Γ e escolheremos os vértices minimais ou maximais conforme o caso.

Definição 2.27 *Seja (Γ, τ) um quiver com translação próprio e conexo, sem ciclos orientados, com um número finito de vértices injetivos e projetivos e suponhamos que todo possível caminho de um vértice injetivo de Γ para um vértice projetivo de Γ seja seccional.*

(a) *Se Γ contiver no mínimo um vértice injetivo, então para quaisquer vértices injetivos $i_1, i_2 \in \Gamma$, definimos uma ordem " \leq " como segue:*

Dizemos que $i_1 \leq i_2$ se, e somente se, para qualquer $x \in S(i_2 \rightarrow)$, existir um inteiro $m \geq 0$ tal que $\tau^m x \in S(i_1 \rightarrow)$.

(b) *Se Γ contiver no mínimo um vértice projetivo, então para quaisquer vértices projetivos $p_1, p_2 \in \Gamma$, definimos uma ordem \geq como segue:*

Dizemos que $p_1 \geq p_2$ se, e somente se, para qualquer $x \in S(\rightarrow p_2)$ existir um inteiro $m \geq 0$ tal que $\tau^{-m} x \in S(\rightarrow p_1)$.

Sejam \mathcal{I} o conjunto dos vértices injetivos de Γ e \mathcal{P} o conjunto dos vértices projetivos de Γ . Com o próximo lema, mostraremos que (\mathcal{I}, \leq) e (\mathcal{P}, \geq) são conjuntos parcialmente ordenados, o que permitirá falar em elementos minimais e maximais de \mathcal{I} e \mathcal{P} .

Lema 2.28 *Seja (Γ, τ) um quiver com translação próprio e conexo sem ciclos orientados.*

(a) *Se Γ contiver algum vértice injetivo, então, (\mathcal{I}, \leq) é um conjunto parcialmente ordenado.*

(b) *Se Γ contiver algum vértice projetivo, então (\mathcal{P}, \geq) é um conjunto parcialmente ordenado.*

Demonstração: 1) É claro que $i \leq i$ para todo $i \in \Gamma$.

(2) Suponhamos que i_1, i_2 e i_3 estão em \mathcal{I} com $i_1 \leq i_2$ e $i_2 \leq i_3$. Então para qualquer $x \in S(i_3 \rightarrow)$, existe $m \geq 0$ tal que $\tau^m x \in S(i_2 \rightarrow)$. Além disso, como $i_1 \leq i_2$ existe $n \geq 0$ tal que $\tau^n(\tau^m x) \in S(i_1 \rightarrow)$. Assim, $i_1 \leq i_3$ por definição.

(3) Suponhamos que i_1 e i_2 estão em Γ com $i_1 \leq i_2$ e $i_2 \leq i_1$. Então, existem inteiros não negativos s e t tais que $\tau^s i_2 \in S(i_1 \rightarrow)$ e $\tau^t i_1 \in S(i_2 \rightarrow)$. Se $i_1 \neq i_2$, então Γ

contém um caminho $i_1 \rightarrow \cdots \rightarrow \tau^s i_2 \rightarrow \cdots \rightarrow i_2 \rightarrow \cdots \rightarrow \tau^t i_1 \rightarrow \cdots \rightarrow i_1$ que é uma contradição sobre a hipótese de Γ não conter ciclos orientados. Logo $i_1 = i_2$. Portanto (\mathcal{I}, \leq) é um conjunto parcialmente ordenado.

A prova de (b) é análoga. ■

Seja $\mathcal{I} = \{i_1, \dots, i_{k_0}, \dots, i_m\}$ o conjunto dos vértices injetivos de Γ onde i_1, \dots, i_{k_0} denota os seus elementos minimais e seja $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_{l_0}, \dots, p_u\}$ o conjunto de todos os vértices projetivos de Γ onde p_1, \dots, p_{l_0} denota os seus elementos maximais. Definimos

$$\overline{\Sigma} = S(i_1 \rightarrow) \cup \cdots \cup S(i_{k_0} \rightarrow),$$

$$\underline{\Sigma} = \{x \in \Gamma \mid x \in \overline{\Sigma} \text{ mas } \tau^k x \notin \overline{\Sigma} \text{ para todo inteiro } k \geq 1\},$$

$$(\overline{\Sigma})^* = S(\rightarrow p_1) \cup \cdots \cup S(\rightarrow p_{l_0}),$$

$$(\underline{\Sigma})^* = \{x \in \Gamma \mid x \in (\overline{\Sigma})^* \text{ mas } \tau^{-k} x \notin (\overline{\Sigma})^* \text{ para todo inteiro } k \geq 1\}.$$

Mostraremos, entre outras propriedades, que os subquivers plenos de Γ gerados por $\underline{\Sigma}$ e $\underline{\Sigma}^*$ são seções de Γ (Lema (2.34)). No lema a seguir apresentamos uma condição que permite dizer quando $i \leq i'$ para i e i' injetivos em Γ . Trata-se de uma condição que permitirá, por exemplo, mostrar que todos os injetivos minimais estão em $\underline{\Sigma}$. Analogamente para os projetivos maximais (Lema (2.30)).

Lema 2.29 *Seja (Γ, τ) um quiver com translação próprio e conexo com um número finito de vértices projetivos e injetivos, sem ciclos orientados e tal que todo caminho de um vértice injetivo para um vértice projetivo de Γ é seccional.*

(a) *Para i e $i' \in \mathcal{I}$, se existir um inteiro $m \geq 0$, tal que $\tau^m i' \in S(i \rightarrow)$, então $i \leq i'$.*

(b) *Para p e $p' \in \mathcal{P}$, se existir um inteiro $m \geq 0$, tal que $\tau^{-m} p' \in S(\rightarrow p)$, então $p \geq p'$.*

Demonstração: Provaremos apenas (a) já que a prova de (b) é análoga. Para todo $y \in S(i' \rightarrow)$, existe um caminho $i' \rightarrow \cdots \rightarrow y$ em Γ . Se $\tau^m i' \in S(i \rightarrow)$ para $m \geq 0$, existe um caminho $i \rightarrow \cdots \rightarrow \tau^m i'$ em Γ e assim existe $i \rightarrow \cdots \rightarrow \tau^m i' \rightarrow \cdots \rightarrow i' \rightarrow \cdots \rightarrow y$. Pelo Corolário (2.12), existe um inteiro $n \geq 0$ tal que $\tau^n y \in S_L(i \rightarrow)$. Observe que $\mathcal{P}(i) = \emptyset$, pois todo caminho de um vértice injetivo para um vértice projetivo é seccional. Então, $S_L(i \rightarrow) = S(i \rightarrow)$ (Proposição (2.17)). Portanto $i \leq i'$. ■

Com o próximo lema, fica claro que todos os injetivos minimais estão em $\underline{\Sigma}$ e os projetivos maximais em $\underline{\Sigma}^*$.

Lema 2.30 *Se (Γ, τ) for um quiver com translação próprio e conexo com um número finito de vértices projetivos e injetivos, sem ciclos orientados e tal que todo caminho de um vértice injetivo para um vértice projetivo em Γ é seccional, então $\{i_1, \dots, i_{k_0}\} \subseteq \underline{\Sigma}$ e $\{p_1, \dots, p_{l_0}\} \subseteq \underline{\Sigma}^*$.*

Demonstração: Vamos provar apenas a primeira inclusão pois para provar a segunda, as técnicas a serem utilizadas serão análogas.

Suponhamos que existe i_l com $1 \leq l \leq k_0$, tal que $i_l \notin \underline{\Sigma}$. Então existe um inteiro $k \geq 1$, tal que $\tau^k i_l \in \overline{\Sigma}$, pois $i_l \in \overline{\Sigma}$. Como $\tau^k i_l \in \overline{\Sigma}$, então existe j com $1 \leq j \leq k_0$, tal que $\tau^k i_l \in S(i_j \rightarrow)$. Pelo Lema (2.29), $i_j \leq i_l$ e então $j = l$, pois i_1, \dots, i_{k_0} são elementos minimais distintos de (Γ, τ) . Então Γ contém o caminho $i_l \rightarrow \dots \rightarrow \tau^k i_l \rightsquigarrow \tau^{k-1} i_l \rightsquigarrow i_l$, contradizendo a hipótese sobre Γ . Portanto $\{i_1, \dots, i_{k_0}\} \subseteq \underline{\Sigma} \neq \emptyset$. ■

Veremos que se o número de injetivos minimais de Γ for maior que um, então dado um injetivo minimal $i_l \in \mathcal{I}$, existirá um outro injetivo minimal $i_j \neq i_l$ tal que

$$S(i_l \rightarrow) \cap S(i_j \rightarrow) \neq \emptyset.$$

No próximo lema apresentamos uma condição suficiente para que tenhamos tal intersecção.

Lema 2.31 *Seja (Γ, τ) um quiver com translação próprio, conexo e sem ciclos orientados, tal que todo caminho de um vértice injetivo para um projetivo em Γ é seccional. Sejam i_1 e i_2 elementos minimais distintos de \mathcal{I} e p_1, p_2 elementos maximais distintos de \mathcal{P} .*

(a) *Se existirem $x \in S(i_1 \rightarrow)$ e $k \in \mathbb{Z}$ tais que $\tau^k x \in S(i_2 \rightarrow)$, então*

$$S(i_1 \rightarrow) \cap S(i_2 \rightarrow) \neq \emptyset.$$

(b) *Se existirem $x \in S(\rightarrow p_1)$ e $k \in \mathbb{Z}$ tais que $\tau^k x \in S(\rightarrow p_2)$, então*

$$S(\rightarrow p_1) \cap S(\rightarrow p_2) \neq \emptyset.$$

Demonstração: (a) É suficiente considerar o caso onde $k \geq 0$. Provaremos por indução sobre k . Quando $k = 0$, então $x = \tau^0 x \in S(i_1 \rightarrow) \cap S(i_2 \rightarrow)$. Suponhamos verdadeira para $k - 1 \geq 0$. Como $x \in S(i_1 \rightarrow)$, Γ contém um caminho

$$i_1 = x_0 \rightarrow \dots \rightarrow x_t = x \quad (t \geq 0) \quad (*).$$

Como $\tau^k x \in S(i_2 \rightarrow)$, Γ contém um caminho

$$i_2 = y_0 \rightarrow \dots \rightarrow y_s = \tau^k x \quad (s \geq 0) \quad (**).$$

Quando $t = 0$, isto é, $i_1 = x_0 = x$, então $\tau^k i_1 = \tau^k x \in S(i_2 \rightarrow)$. Assim, $i_2 \leq i_1$, contradizendo a hipótese de que i_1 e i_2 são elementos minimais distintos. Logo $t \geq 1$.

Temos o seguinte caminho $\tau^k x_t = \tau^k x \rightarrow \dots \rightarrow \tau x = \tau x_t \rightarrow x_{t-1}$ em Γ . Como existe o caminho (**), logo existe caminho de i_2 para x_{t-1} . Observe que i_2 sendo injetivo e não existindo caminho de injetivo para projetivo com gancho, segue que existem $\tau^{k-1} x_{t-1}$ e $\tau^k x_t \rightarrow \tau^{k-1} x_{t-1}$. Como $\tau^k x_t \in S(i_2 \rightarrow)$, então $\tau^{k-1} x_{t-1} \in S(i_2 \rightarrow)$ ou $\tau(\tau^{k-1} x_{t-1}) \in S(i_2 \rightarrow)$ (Proposição (2.21)).

Pela Proposição (2.19), $S(i_1 \rightarrow)$ é convexo e então $x_{t-1} \in S(i_1 \rightarrow)$. Se $\tau^k x_{t-1} = \tau(\tau^{k-1} x_{t-1}) \in S(i_2 \rightarrow)$, então ao invés de trabalharmos com a hipótese de que $\tau^k x_t \in S(i_2 \rightarrow)$, trabalharemos com x_{t-1} , uma vez que o comprimento do caminho de i_1 para x_{t-1} é menor que o comprimento do caminho (*). Além disso, temos que para algum j com $j \in \{0, \dots, t\}$, $\tau^k x_j \notin S(i_2 \rightarrow)$. De fato, se $\tau^k x_j \in S(i_2 \rightarrow)$ para todo $j \in \{0, \dots, t\}$, em particular $\tau^k x_0 = \tau^k x_0 \in S(i_2 \rightarrow)$. Pelo Lema (2.29) $i_2 \leq i_1$, contradizendo o fato de que i_2 e i_1 são minimais e distintos. Dessas observações, podemos dizer que $\tau^k x_{t-1} \notin S(i_2 \rightarrow)$. Então $\tau^{k-1} x_{t-1} \in S(i_2 \rightarrow)$ e como $x_{t-1} \in S(i_1 \rightarrow)$, segue da hipótese de indução que $S(i_1 \rightarrow) \cap S(i_2 \rightarrow) \neq \phi$.

(b) A demonstração de (b) é similar a demonstração de (a). ■

Agora mostraremos que para todo injetivo minimal i_l , existe um injetivo minimal i_j tal que

$$S(i_l \rightarrow) \cap S(i_j \rightarrow) \neq \phi.$$

Lema 2.32 *Seja (Γ, τ) um quiver com translação próprio e conexo com um número finito de vértices injetivos e projetivos, sem ciclos orientados e tal que todo caminho de um injetivo para um projetivo em Γ seja seccional. Seja $\mathcal{I} = \{i_1, \dots, i_{k_0}, \dots, i_m\}$ como antes, onde $\{i_1, \dots, i_{k_0}\}$ é o conjunto de todos os elementos minimais de (\mathcal{I}, \leq) .*

(a) *Se $k_0 > 1$, então para todo $l \in \{1, 2, \dots, k_0\}$, existe algum $j \in \{1, 2, \dots, k_0\}$ com $j \neq l$ tal que $S(i_l \rightarrow) \cap S(i_j \rightarrow) \neq \phi$.*

(b) *Se Γ contiver uma flecha $x \rightarrow y$ ou $y \rightarrow x$, onde $y \in S(i_l \rightarrow)$ com $1 \leq l \leq k_0$ e x está em uma τ -órbita disjunta de $S(i_l \rightarrow)$, então existem elementos minimais $i' \neq i_l$ em (\mathcal{I}, \leq) e $r \in \mathbb{Z}$ tais que $\tau^r x \in S(i' \rightarrow)$ e $S(i_l \rightarrow) \cap S(i' \rightarrow) \neq \phi$.*

Demonstração: Provaremos (a) e (b) simultaneamente.

Por hipótese, $k_0 > 1$. Podemos dizer que $S(i_l \rightarrow)$ não encontra toda τ -órbita de Γ , qualquer que seja $l \in \{1, \dots, k_0\}$. Suponhamos o contrário, isto é, que $S(i_l \rightarrow)$ encontra toda τ -órbita de Γ . Neste caso existem $j \in \{1, \dots, k_0\}$ com $l \neq j$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$ tais que $\tau^k i_j \in S(i_l \rightarrow)$. Segue do Lema (2.29) que $i_l \leq i_j$, contradizendo o fato de que i_l e i_j são minimais e distintos. Portanto para todo $l \in \{1, 2, \dots, k_0\}$, $S(i_l \rightarrow)$ não encontra todas as τ -órbitas de Γ .

Dentre as órbitas de Γ que não encontram $S(i_l \rightarrow)$, existe uma órbita $\mathcal{O}(x)$ com $x \in \Gamma$ tal que

$$\mathcal{O}(x) \cap S(i_l \rightarrow) = \phi,$$

e existe ou a flecha $\tau^n y \rightarrow x$ ou $x \rightarrow \tau^n y$ em Γ , com $y \in S(i_l \rightarrow)$ e $n \in \mathbb{Z}$.

Sem perda de generalidade, podemos supor $n = 0$. De fato, suponhamos que existe a flecha $\tau^n y \rightarrow x$ com $n > 0$. Se existir a flecha $y \rightarrow \tau^{-n} x$, então temos em Γ

um flecha $y \rightarrow \tau^{-n}x$ com $y \in S(i_l \rightarrow)$ e $\mathcal{O}(\tau^{-n}x) \cap S(i_l \rightarrow) = \phi$. Se não existir, então para algum $k < n$, existe a flecha $\tau^{n-k}y \rightarrow \tau^{-k}x$ com $\tau^{-k}x$ injetivo. Se $\tau^{-k}x$ for um vértice injetivo minimal de Γ , teremos $S(\tau^{-k}x \rightarrow) \cap S(i_l \rightarrow) \neq \phi$ com $\tau^{-k}x \neq i_l$ (Lema (2.31) (a)) uma vez que $\tau^{n-k-1}y \in S(\tau^{-k}x \rightarrow)$ e $y \in S(i_l \rightarrow)$. Se $\tau^{-k}x$ não for um vértice injetivo minimal, então existirá um vértice injetivo minimal i_j com $i_j \leq \tau^{-k}x$. Como $\tau^{n-k-1}y \in S(\tau^{-k}x \rightarrow)$, existe um inteiro $r \geq 0$ tal que $\tau^r(\tau^{n-k-1}y) \in S(i_j \rightarrow)$. Portanto $S(i_j \rightarrow) \cap S(i_l \rightarrow) \neq \phi$ com $i_l \neq i_j$ (Lema (2.31) (a)). O caso em que $n < 0$ e o caso em que existe a flecha $x \rightarrow \tau^n y$ são análogos a este. Portanto podemos supor que $n = 0$. Vejamos cada caso.

Caso (1): Quando Γ contém a flecha $x \rightarrow y$, obtemos que x é injetivo (Corolário (2.22)). Além disso, podemos dizer que $y \in S(x \rightarrow)$, pois caso contrário existe um caminho $x \rightsquigarrow \tau y$ em Γ . Assim, existe o caminho $x \rightsquigarrow \tau y \rightarrow x$, contradizendo o fato de que Γ não contém ciclos orientados. Como x é injetivo, existe um elemento minimal $i_j \in (\mathcal{I}, \leq)$ com $i_j \leq x$ e um inteiro $m_1 \geq 0$ tal que $\tau^{m_1}x \in S(i_j \rightarrow)$. Isto implica que $i_j \neq i_l$, caso contrário a órbita de x encontra $S(i_l \rightarrow)$. Pelo Corolário (2.12), existe um inteiro $m_2 \geq 0$ tal que $\tau^{m_2}y \in S(i_j \rightarrow)$. Além disso, $m_2 \geq m_1$, caso contrário, como existe caminho em Γ de i_j para $\tau^{m_1}x$, existiria um caminho de i_j para $\tau^{m_2+1}y$ uma vez que existe a flecha $x \rightarrow y$. Pelo Lema (2.31) obtemos $S(i_l \rightarrow) \cap S(i_j \rightarrow) \neq \phi$.

Caso (2): Se Γ contiver a flecha $y \rightarrow x$, então ou $x \in S(i_l \rightarrow)$ ou $\tau x \in S(i_l \rightarrow)$. Isso contradiz a hipótese sobre $\mathcal{O}(x)$. A prova de (a) está completa. Agora para provar (b), basta fazer $i' = i_j$ na prova de (a). ■

O resultado a seguir é a versão dual do lema que acabamos de provar.

Lema 2.33 *Seja (Γ, τ) um quiver com translação próprio e conexo com um número finito de vértices injetivos e projetivos, sem ciclos orientados e tal que todo caminho de um vértice injetivo para um projetivo em Γ seja seccional. Seja $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_{l_0}, \dots, p_u\}$ como antes, onde $\{p_1, \dots, p_{l_0}\}$ é o conjunto de todos os elementos maximais de (\mathcal{P}, \geq) .*

(a) *Se $l_0 > 1$, então para todo $l \in \{1, 2, \dots, l_0\}$, existe algum $j \in \{1, 2, \dots, l_0\}$ com $j \neq l$, tal que $S(\rightarrow p_l) \cap S(\rightarrow p_j) \neq \phi$.*

(b) *Se Γ contiver a flecha $x \rightarrow y$ ou $y \rightarrow x$, onde $y \in S(\rightarrow p_l)$ com $1 \leq l \leq l_0$ e x está em uma τ -órbita disjunta de $S(\rightarrow p_l)$, então existem elementos maximais $p' \neq p_l$ em (\mathcal{P}, \geq) e $r \in \mathbb{Z}$, tal que $\tau^r x \in S(\rightarrow p')$ e $S(\rightarrow p_l) \cap S(\rightarrow p') \neq \phi$.*

2.4.2 A seção que contém injetivos minimais ou projetivos maximais

Nesta seção apresentamos o resultado fundamental para a construção de certas seções especiais para alguns quivers semi-regulares e não semi-regulares. Manteremos as notações das seções anteriores.

Lema 2.34 *Seja (Γ, τ) um quiver com translação próprio e conexo com um número finito de vértices injetivos e projetivos, sem ciclos orientados e tal que todo caminho de um vértice injetivo em Γ para um vértice projetivo em Γ é seccional. Então:*

(a) $\underline{\Sigma}$ encontra cada τ -órbita de Γ exatamente uma vez.

(b) $\underline{\Sigma}$ é convexo em Γ .

(c) Se Σ for o subquiver pleno de Γ gerado por $\underline{\Sigma}$, então Σ não contém ciclos orientados, é conexo e é uma seção de Γ .

Demonstração: (a) Pelo Lema (2.30), temos que $\{i_1, \dots, i_{k_0}\} \subseteq \underline{\Sigma}$. Suponhamos que $\underline{\Sigma}$ encontra alguma τ -órbita de Γ no mínimo duas vezes. Então, existe $x \in \Gamma$ e um inteiro $m \geq 1$ tais que x e $\tau^m x$ estejam em $\underline{\Sigma}$. Porém, se $x \in \underline{\Sigma}$, então $x \in \overline{\Sigma}$ e $\tau^k x \notin \overline{\Sigma}$ para todo inteiro $k \geq 1$. Este fato contradiz a afirmação de que $\tau^m x \in \underline{\Sigma}$, pois se $\tau^m x \in \underline{\Sigma}$, então $\tau^m x \in \overline{\Sigma}$. Assim, $\underline{\Sigma}$ encontra uma τ -órbita no máximo uma vez.

Suponhamos que $\underline{\Sigma}$ não encontra todas as τ -órbitas de Γ . Então, existem vértices x e y em Γ tais que $\mathcal{O}(x) \cap \underline{\Sigma} = \phi$, $y \in \underline{\Sigma}$ e existe uma flecha $x \rightarrow y$ ou $y \rightarrow x$ em Γ .

Afirmamos que $S(i_l \rightarrow) \cap \mathcal{O}(x) = \phi$ para qualquer l com $1 \leq l \leq k_0$. Caso contrário, existe l_1 com $1 \leq l_1 \leq k_0$ e $k_1 \in \mathbb{Z}$ tal que $\tau^{k_1} x \in S(i_{l_1} \rightarrow) \subseteq \overline{\Sigma}$. Como $\underline{\Sigma} \cap \mathcal{O}(x) = \phi$, existe um inteiro $k_2 \geq 1$ tal que $\tau^{k_2}(\tau^{k_1} x) \in \overline{\Sigma}$. Então, existe l_2 com $1 \leq l_2 \leq k_0$ e $\tau^{k_2}(\tau^{k_1} x) \in S(i_{l_2} \rightarrow)$. Pela Proposição (2.19), temos $l_1 \neq l_2$. Novamente, como $\underline{\Sigma} \cap \mathcal{O}(x) = \phi$, existe um inteiro $k_3 \geq 1$ tal que $\tau^{k_3}(\tau^{k_2}(\tau^{k_1} x)) \in S(i_{l_3} \rightarrow)$ com $1 \leq l_3 \leq k_0$. Obtemos pela Proposição (2.19) que $l_3 \notin \{l_1, l_2\}$ pois $\tau^{k_1} x \in S(i_{l_1} \rightarrow)$, $\tau^{k_2}(\tau^{k_1} x) \in S(i_{l_2} \rightarrow)$ com $k_2 \geq 1$ e $\tau^{k_3}(\tau^{k_2}(\tau^{k_1} x)) \in S(i_{l_3} \rightarrow)$ com $k_3 \geq 1$. Se continuarmos essa análise com o método acima, obtemos que o conjunto $\{1, \dots, k_0\}$ é infinito, o que é uma contradição. Assim, $S(i_l \rightarrow) \cap \mathcal{O}(x) = \phi$, $l = 1, 2, \dots, k_0$.

Como $y \in \underline{\Sigma}$, existe l_0 com $1 \leq l_0 \leq k_0$, tal que $y \in S(i_{l_0} \rightarrow)$. Como Γ contém a flecha $x \rightarrow y$ ou $y \rightarrow x$ e $S(i_{l_0} \rightarrow) \cap \mathcal{O}(x) = \phi$, pelo Lema (2.32)(b) existem um elemento minimal i' de (\mathcal{I}, \leq) com $i' \neq i_0$ e $r \in \mathbb{Z}$ tais que $\tau^r x \in S(i' \rightarrow)$. Podemos dizer que $i' \neq i_l$ para todo $l \in \{1, \dots, k_0\}$, pois $S(i_l \rightarrow) \cap \mathcal{O}(x) = \phi$ para $l = 1, 2, \dots, k_0$ o que é uma contradição, pois (\mathcal{I}, \leq) contém somente k_0 elementos minimais. Portanto, $\underline{\Sigma}$ encontra todas as τ -órbitas em Γ no mínimo uma vez. Desse modo, $\underline{\Sigma}$ encontra cada τ -órbita em Γ exatamente uma vez.

(b) Suponhamos que Γ contenha o caminho $x \rightarrow x_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_s \rightarrow y$ com x e y em $\underline{\Sigma}$. Logo existe l com $1 \leq l \leq k_0$, tal que $x \in S(i_l \rightarrow)$ e então Γ contém o caminho de i_l para y . Assim, pelo Corolário (2.12) existe um inteiro k tal que $\tau^k y \in S(i_l \rightarrow) \subseteq \overline{\Sigma}$. Como $y \in \underline{\Sigma}$, então $k = 0$ o que significa que $y \in S(i_l \rightarrow)$. Dessa forma, $x_j \in S(i_l \rightarrow) \subseteq \overline{\Sigma}$ para todo j com $1 \leq j \leq s$. Suponhamos que existe algum $x_j \notin \underline{\Sigma}$. Então, existe um inteiro $u \geq 1$ tal que $\tau^u x_j \in \overline{\Sigma}$ e existe um inteiro q com $1 \leq q \leq k_0$ tal que $\tau^u x_j \in S(i_q \rightarrow)$. Pelo Corolário (2.12), existe um inteiro t , $t \geq u$ tal que $\tau^t y \in S(i_q \rightarrow) \subseteq \overline{\Sigma}$. Então, $y \notin \underline{\Sigma}$ o que é uma contradição com $y \in \underline{\Sigma}$. Assim, $x_j \in \underline{\Sigma}$, $j = 1, 2, \dots, k_0$.

(c) Como Γ não contém ciclos orientados, segue que o quiver Σ gerado por $\underline{\Sigma}$ também não contém ciclos orientados. Finalmente, provaremos que Σ é conexo. Suponhamos o contrário. Já que $\underline{\Sigma}$ encontra cada τ -órbita, o mesmo ocorre com Σ . Então existem x e y em Σ tais que Γ não contém uma flecha ligando x e y mas Γ contém uma flecha que liga a τ -órbita de x e de y , isto é, existem $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ com $k_1^2 + k_2^2 \neq 0$ tais que Γ contém a flecha $\tau^{k_1}x \rightarrow \tau^{k_2}y$ ou $\tau^{k_2}y \rightarrow \tau^{k_1}x$.

Afirmamos que Γ contém a flecha $\tau^kx \rightarrow y$ ou $x \rightarrow \tau^ky$, $y \rightarrow \tau^kx$ ou $\tau^ky \rightarrow x$ com $k \neq 0$. De fato, como k_1 ou k_2 é não nulo, vejamos primeiramente o caso em que um deles é nulo. Se $k_1 = 0$ temos a flecha $x \rightarrow \tau^{k_2}y$ ou $\tau^{k_2}y \rightarrow x$. Se $k_2 = 0$, então temos $\tau^{k_1}x \rightarrow y$ ou $y \rightarrow \tau^{k_1}x$.

Agora suponhamos k_1 e k_2 não nulos. Sem perda de generalidade, podemos supor também que $k_1 > k_2 > 0$. Neste caso, temos a flecha $\tau^{k_1-k_2}x \rightarrow y$ em Γ . Se k_1 e k_2 não forem positivos ou $k_1 < k_2$, teremos um dos casos enunciados acima. Agora suponhamos que $k_2 < 0$ e $k_1 > 0$. Afirmamos que existe $\tau^{k_1-k_2}x$. Caso contrário, como $y \in \Sigma$, então $y \in S(i_l \rightarrow)$ para algum $l \in \{1, \dots, k_0\}$. Logo existe um caminho do injetivo i_l para y . Se não existir $\tau^{k_1-k_2}x$, existirá um inteiro $t < k_1 - k_2$ tal que $\tau^t x$ é projetivo. Como existe em Γ um caminho de i_l para y e um caminho não seccional de y para $\tau^t x$, teremos uma contradição com a hipótese sobre os caminhos de Γ . Portanto existe $\tau^{k_1-k_2}x$. Neste caso, provamos que existe a flecha $y \rightarrow \tau^{k_1-k_2}x$ e então está provado a existência das flechas acima. Será suficiente discutir os casos em que Γ contém as flechas $\tau^kx \rightarrow y$ ou $x \rightarrow \tau^ky$ com $k \neq 0$ por causa da dualidade de x e y .

Se Γ contém a flecha $\tau^kx \rightarrow y$ com $k \neq 0$, então $k \neq 1$, pois caso contrário, Γ contém a flecha $y \rightarrow x$, o que é uma contradição. Então existe o caminho $y \rightarrow \tau^{k-1}x \rightsquigarrow \tau^{k-2}x \rightarrow \dots \rightarrow x$ se $k > 0$ e o caminho $x \rightsquigarrow \tau^kx \rightarrow y$ se $k < 0$. O que é impossível, pois x e y estão em Σ e valem (a) e (b). Analogamente, é impossível que Γ contenha a flecha $x \rightarrow \tau^ky$ com $k \neq 0$. Dessa forma, Σ é conexo. ■

Agora enunciamos o dual do lema anterior.

Lema 2.35 *Seja (Γ, τ) um quiver com translação próprio e conexo com um número finito de vértices injetivos e projetivos, sem ciclos orientados e tal que todo caminho de um vértice injetivo em Γ para um projetivo em Γ é seccional. Então:*

(a) $(\underline{\Sigma})^*$ encontra cada τ -órbita de Γ exatamente uma vez.

(b) $(\underline{\Sigma})^*$ é convexo em Γ .

(c) Se $(\underline{\Sigma})^*$ for o subquiver pleno de Γ gerado por $(\underline{\Sigma})^*$, então $(\underline{\Sigma})^*$ não contém ciclos orientados, é conexo e é uma seção de Γ .

2.4.3 Resultados Principais

Nesta seção mostraremos no Teorema (2.36) (Teorema (2.37)) que um quiver estável à esquerda (estável à direita) e sem ciclos orientados possui uma seção cujas fontes (poços) são os vértices injetivos minimais (projetivos maximais) de Γ . E no caso de um quiver não semi-regular tal que os caminhos de um vértice injetivo para um vértice projetivo sejam seccionais, provaremos que existem seções Δ e Δ' tais que Δ possui poços que são projetivos maximais de Γ e Δ' possui fontes que são os injetivos minimais de Γ .

Teorema 2.36 *Seja (Γ, τ) um quiver com translação próprio e conexo, sem ciclos orientados e com um número finito não nulo de vértices injetivos e sem projetivos. Então, Γ pode ser mergulhado em algum quiver $\mathbb{Z}\Delta$, onde Δ é isomorfo a uma seção de Γ , possui fontes e todas as fontes de Δ são vértices injetivos minimais de Γ . Além disso, todo vértice de Δ tem um antecessor injetivo minimal em Δ e os vértices de $\tau\Delta$ não tem antecessor injetivo em Γ .*

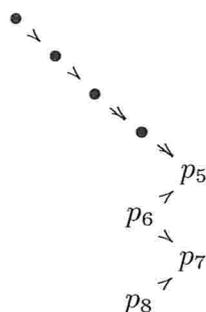
Demonstração: Seja $\mathcal{I} = \{i_1, \dots, i_{k_0}, \dots, i_s\}$ o conjunto dos vértices injetivos de Γ como definido anteriormente. Considere $\Delta = \Sigma$ como no Lema (2.34) (c). Então pelo Lema (2.34), temos que Δ é uma seção de Γ e pela Proposição (2.7) podemos dizer que Γ pode ser mergulhado no quiver $\mathbb{Z}\Delta$. Pelo Lema (2.30) segue que todos os injetivos minimais de Γ estão em $\underline{\Sigma}$, logo estão em Δ . Além disso, se x é um vértice em Δ , como $\Delta = \Sigma$ que é o subquiver gerado por $\underline{\Sigma}$, segue que $x \in \underline{\Sigma}$ e então $x \in \overline{\Sigma} = S(i_1 \rightarrow) \cup \dots \cup S(i_{k_0} \rightarrow)$, provando assim que x é sucessor de um vértice injetivo i_l com $1 \leq l \leq k_0$.

Seja $\tau x \in \Gamma$ com $x \in \Delta$. Afirmamos que τx não possui antecessor injetivo em Γ . De fato, se existir um injetivo i em Γ e um caminho $i \rightsquigarrow \tau x$ em Γ , logo pelo Corolário (2.12), existe um inteiro $n \geq 0$ tal que $\tau^n x \in S(i \rightarrow)$. Podemos dizer que existe um injetivo minimal i' tal que $\tau^r x \in S(i' \rightarrow)$ para algum inteiro r e $i' \leq i$. Neste caso, pela definição de $\underline{\Sigma}$, $x \notin \underline{\Sigma}$, contradizendo que $x \in \Delta = \Sigma$. Portanto, τx não possui antecessor injetivo para qualquer $x \in \Delta$. ■

Com o dual dos resultados que utilizamos para provar o Teorema acima, podemos provar também o resultado a seguir.

Teorema 2.37 *Seja (Γ, τ) um quiver com translação próprio e conexo, sem ciclos orientados e com um número finito próprio de vértices projetivos e sem injetivos. Então, Γ pode ser mergulhado em um quiver $\mathbb{Z}\Delta$, onde Δ é isomorfo a uma seção de Γ , possui poços e todos os poços de Δ são vértices projetivos maximais de Γ . Além disso, todo vértice de Δ tem um sucessor projetivo maximal em Δ e os vértices de $\tau^{-1}\Delta$ não tem sucessor projetivo em Γ .*

Exemplo 2.38 No Exemplo (2.24) tínhamos um quiver com translação sem vértices injetivos e apresentamos uma seção para aquele quiver. Sob a luz do Teorema acima, apresentamos abaixo a seção construída a partir dos projetivos maximais daquele quiver.



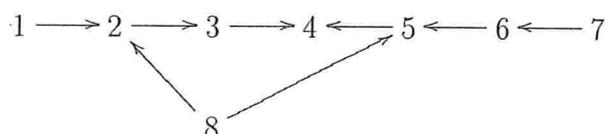
A prova do Teorema que enunciaremos a seguir é a mesma dada para o Teorema (2.36) e (2.37), pois o resultado principal que utilizamos para prová-los foi o Lema (2.34) que vale para quiver não semi-regular.

Teorema 2.39 Seja (Γ, τ) um quiver com translação próprio e conexo, sem ciclos orientados e não semi-regular, tal que todo caminho de um vértice injetivo para um vértice projetivo em Γ é seccional. Então:

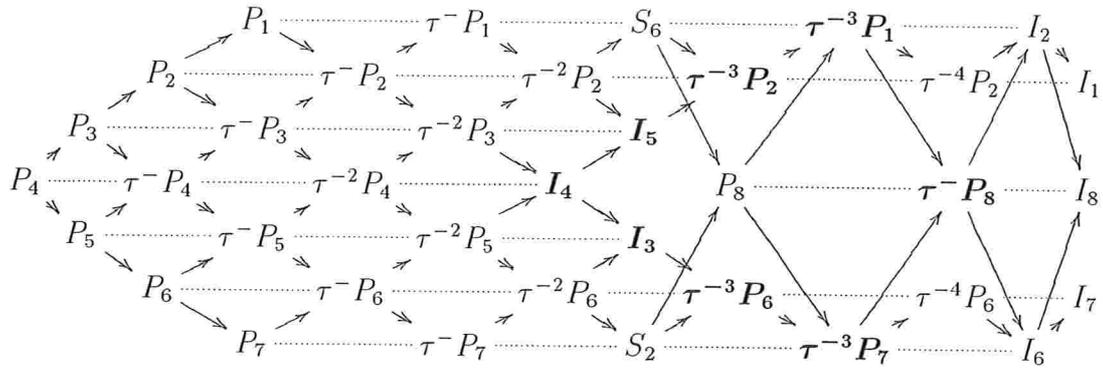
(a) Γ pode ser mergulhado em um quiver $\mathbb{Z}\Delta$ onde Δ é isomorfo a uma seção de Γ , Δ possui fontes, todas as fontes de Δ são vértices injetivos minimais de Γ . Além disso, todo vértice de Δ tem um antecessor injetivo minimal em Δ e $\tau\Delta$ não tem antecessor injetivo.

(b) Γ pode ser mergulhado em um quiver $\mathbb{Z}\Delta^*$, onde Δ^* é isomorfo a uma seção de Γ , Δ^* possui poços, todos os poços de Δ^* são projetivos maximais de Γ . Além disso, todo vértice de Δ^* tem um sucessor projetivo maximal em Δ^* e $\tau^{-}\Delta^*$ não tem sucessor projetivo.

Exemplo 2.40 Considere a seguinte álgebra de caminhos A com radical quadrado nulo:



A seguir apresentamos o quiver de Auslander-Reiten Γ_A de A com a respectiva seção Δ construída a partir dos vértices injetivos minimais (Teorema (2.39)):



Com o Teorema (2.9) e o Teorema (2.39), temos o seguinte resultado de Size Li [Li].

Corolário 2.41 *Seja Γ uma componente de Γ_A não contendo ciclo orientado. Então, Γ pode ser mergulhado em algum quiver $\mathbb{Z}\Delta$ com Δ isomorfo a uma seção de Γ , se e somente, se todo possível caminho de um vértice injetivo para um vértice projetivo é seccional.*

Capítulo 3

Álgebras Shod

As generalizações do conceito de álgebras quase-inclinadas e os resultados novos sobre álgebras shod foram introduzidos por Coelho e Lanzilotta em [CL99]. Neste capítulo apresentamos ao leitor um resumo dos principais resultados que utilizaremos neste trabalho. As demonstrações, bem como comentários sobre este assunto e também a relação desta classe de álgebras com outros assuntos não abordados neste trabalho, poderão ser encontrados na tese de doutorado de Lanzilotta [Lan00] e no trabalho publicado por Coelho na Revista Resenhas (Ver [Coe01]).

3.1 Álgebras shod

A palavra shod é a abreviação de “small homological dimension”.

Definição 3.1 *Uma álgebra de Artin A é chamada de **shod** (small homological dimension) desde que, para cada A -módulo indecomponível X , $dp_A X \leq 1$ ou $di_A X \leq 1$.*

Uma álgebra de Artin A é **quase-inclinada** se sua dimensão global for menor ou igual a dois e para cada A -módulo $X \in ind A$, $dp X \leq 1$ ou $di X \leq 1$. Em conseqüência, segue que, que a classe das álgebras shod contém a classe das álgebras inclinadas. Uma outra característica homológica das álgebras shod que ilustra bem esta generalização é o seguinte resultado de Happel-Reiten-Smalø.

Proposição 3.2 [HRS96] *Uma álgebra shod A tem dimensão global de no máximo três.*

Uma álgebra de dimensão global três será chamada de **shod estrita**. Todas as álgebras hereditárias são exemplos de álgebras shod já que todos os seus módulos tem dimensão projetiva no máximo um.

3.2 Caminhos de módulos injetivos para módulos projetivos

Nesta seção queremos apresentar alguns dos resultados sobre caminhos de módulos injetivos para módulos projetivos em $indA$. Os resultados foram provados por Coelho e Lanzilotta em [CL99]. Apresentamos a seguir um resultado que motiva o estudo de caminhos de módulos injetivos para módulos projetivos.

Teorema 3.3 [ARS97] *Seja A uma álgebra de Artin e X um módulo indecomponível. Então*

(a) $dp_A X \leq 1$, se e somente se, $Hom_A(D({}_A A)), \tau_A X) = 0$.

(b) $di_A X \leq 1$, se e somente se, $Hom_A(\tau_A^- X, A) = 0$.

Vemos através deste teorema que existe uma forte relação entre a existência de morfismos não nulos de módulos injetivos para a translação $\tau_A X$ do módulo $X \in indA$ e sua dimensão projetiva. De maneira análoga, existe uma relação entre a existência de morfismos não nulos de $\tau_A^- X$ para módulos projetivos e a dimensão injetiva de X .

Agora, se tomarmos uma álgebra shod, não existe um módulo indecomponível X com $dp_A X \geq 2$ e $di_A X \geq 2$ e assim o módulo X satisfaz alguma das afirmações do Teorema (3.3).

Antes de apresentar os principais resultados, precisamos do conceito de refinamento de um caminho. Dados X e Y em $indA$, denotaremos por $X \rightsquigarrow Y$ se existir um **caminho em $indA$**

$$X = X_0 \xrightarrow{f_1} X_1 \rightarrow \cdots \xrightarrow{f_{t-1}} X_{t-1} \xrightarrow{f_t} X_t = Y \quad (t \geq 0) (*),$$

de X para Y , isto é, cada f_j com $1 \leq j \leq t$ é um não isomorfismo não nulo e X_0, \dots, X_t são módulos indecomponíveis. Da mesma maneira na qual definimos na Seção (1.1), dizemos que X é **antecessor** de Y e Y é **sucessor** de X . Observe que cada A -módulo indecomponível é antecessor e sucessor dele mesmo. Quando todos os morfismos f_j 's no caminho (*) forem irredutíveis, então diremos que o caminho (*) é um **caminho de irredutíveis**, ou simplesmente diremos que é um caminho em Γ_A . Um caminho em Γ_A começando e terminando no mesmo módulo é um ciclo orientado.

Observamos que quando o caminho (*) for um caminho de irreduzíveis, este conceito de caminhos "coincide" com o conceito de caminhos apresentado na Seção (1.1), pois Γ_A é um quiver.

Definição 3.4 *Um refinamento de um caminho*

$$X = X_0 \xrightarrow{f_1} X_1 \rightarrow \cdots \xrightarrow{f_{t-1}} X_{t-1} \xrightarrow{f_t} X_t = Y \quad (t \geq 0),$$

em $\text{ind}A$ de X para Y , é um caminho

$$X = Z_0 \xrightarrow{g_1} Z_1 \xrightarrow{g_2} \cdots \xrightarrow{g_{u-1}} Z_{u-1} \xrightarrow{g_u} Z_u = Y$$

em $\text{ind}A$ tal que existe uma função σ preservando ordem de $\{1, \dots, t-1\}$ para $\{1, \dots, u-1\}$, tal que $X_j \simeq Z_{\sigma(j)}$ para cada $1 \leq j \leq t-1$.

Se A for uma álgebra de Artin, e

$$X = X_0 \xrightarrow{f_1} X_1 \rightarrow \cdots \rightarrow X_{t-1} \xrightarrow{f_t} X_t = Y \quad (**)$$

for um caminho em $\text{ind}A$, um **gancho** em (***) é um módulo X_j tal que $X_{j-1} \xrightarrow{f_j} X_j \xrightarrow{f_{j+1}} X_{j+1}$ satisfaz: (i) f_j e f_{j+1} são morfismos irreduzíveis; e (ii) $\tau X_{j+1} = X_{j-1}$. Um caminho de morfismos irreduzíveis sem gancho é chamado de caminho seccional.

Observe que o conceito de gancho e caminho seccional fora definido num outro contexto em que o caminho está num quiver com translação. Por abuso de notação usaremos o mesmo nome, pois quando os morfismos f_j 's forem morfismos irreduzíveis, o caminho (***) poderá ser visto como um caminho no quiver com translação (Γ_A, τ) . Além disso, no caso de uma álgebra shod, se existir um caminho de um módulo injetivo I para um módulo projetivo P em $\text{ind}A$:

$$I = X_0 \xrightarrow{f_1} X_1 \rightarrow \cdots \rightarrow X_{t-1} \xrightarrow{f_t} X_t = P,$$

então existirá um refinamento de irreduzíveis deste caminho. Este é o resultado que enunciamos a seguir:

Proposição 3.5 *Seja A uma álgebra shod e suponha que existe um caminho*

$$(\delta) : I = X_0 \xrightarrow{f_1} X_1 \rightarrow \cdots \rightarrow X_{t-1} \xrightarrow{f_t} X_t = P$$

em $\text{ind}A$, onde I e P são módulos injetivos e projetivos respectivamente. Então $f_j \notin \text{rad}^\infty(\text{mod}A)$ para cada j e assim (δ) tem um refinamento de morfismos irreduzíveis.

Temos os seguintes resultados nesta direção:

Teorema 3.6 [CL99] *Uma álgebra A é shod, se e somente se, qualquer caminho em $\text{ind}A$ de um módulo injetivo para um módulo projetivo pode ser refinado para um caminho de morfismos irredutíveis e qualquer refinamento tem no máximo dois ganchos e no caso de dois, estes são consecutivos.*

Proposição 3.7 *Seja A uma álgebra shod estrita e suponha que existe um caminho não seccional*

$$I = X_0 \xrightarrow{f_1} X_1 \rightarrow \cdots \rightarrow X_{t-1} \xrightarrow{f_t} X_t = P$$

de um módulo injetivo I para um projetivo P . Então:

(a) [CL99] *existe um caminho de I para P em Γ_A com exatamente um gancho.*

(b) *existe um módulo projetivo P' no caminho (α) que possui um submódulo X com $\text{dp}_A X \geq 2$.*

A quantidade de ganchos é nula num caminho de um módulo injetivo para um módulo projetivo em $\text{ind}A$, quando A for uma álgebra quase-inclinada. Esse resultado fora provado por Happel-Reiten-Smalø e enunciamos a seguir:

Proposição 3.8 [HRS96] *Uma álgebra A é quase-inclinada, se e somente se, qualquer caminho em $\text{ind}A$ de um módulo injetivo para um projetivo pode ser refinado a um caminho de morfismos irredutíveis e qualquer desses caminhos é seccional.*

Outra característica dos caminhos de um módulo injetivo para um módulo projetivo em $\text{ind}A$, sendo A uma álgebra shod estrita, está caracterizada na seguinte proposição.

Proposição 3.9 *Seja A uma álgebra shod estrita. Se existir um caminho de morfismos irredutíveis em $\text{ind}A$ de um módulo injetivo I para um módulo projetivo P com dois ganchos, então existe um caminho de I para P com somente um gancho.*

3.3 Componentes do quiver A.R. de uma álgebra shod

Nesta seção apresentamos algumas características das componentes não semi-regulares do quiver A.R. de uma álgebra shod.

Em [CL01a] Coelho-Lanzilotta introduziram o conceito de componentes hip-limitadas, definidas a seguir:

Definição 3.10 *Seja Γ uma componente não semi-regular de Γ_A onde A é uma álgebra de Artin. Dizemos que Γ é uma **componente hip-limitada** se existir um inteiro m_0 tal que qualquer caminho em $\text{ind}A$ de um módulo injetivo em Γ para um módulo projetivo em Γ tenha no máximo m_0 ganchos.*

Observação 3.11 *Neste mesmo trabalho, Coelho-Lanzilotta provaram que uma componente Γ é hip-limitada, se e somente se, existe um inteiro n_0 tal que qualquer caminho em $\text{ind}A$ de um módulo injetivo para um módulo projetivo em Γ , pode ser refinado a um caminho em Γ_A e qualquer refinamento tem comprimento no máximo n_0 .*

Assim, temos os seguintes resultados provados em [CL01a]:

Teorema 3.12 *Seja A uma álgebra de Artin e Γ uma componente hip-limitada de Γ_A . Valem as seguintes afirmações:*

- (a) Γ não tem ciclos orientados;
- (b) Se A for uma álgebra do tipo de representação infinito, então Γ tem somente um número finito de τ -órbitas.

Segue diretamente deste resultado as seguintes afirmações para uma álgebra shod:

Corolário 3.13 *Seja A uma álgebra shod e Γ uma componente não semi-regular de Γ_A . Valem as seguintes afirmações:*

- (a) Γ não tem ciclos orientados;
- (b) Se A for uma álgebra do tipo de representação infinito, então Γ tem somente um número finito de τ -órbitas.

Uma pergunta natural sobre estas componentes não semi-regulares de uma álgebra shod é a seguinte: Quantas componentes não semi-regulares existem? A resposta a esta questão foi dada por Coelho-Lanzilotta num contexto mais geral que este.

Em [CL01b], eles introduziram o conceito de álgebras fracamente shod. Uma álgebra é **fracamente shod** se existir um inteiro positivo m_0 tal que qualquer caminho em $\text{ind}A$ de não isomorfismos não nulos de um A -módulo injetivo indecomponível para um A -módulo projetivo indecomponível tem comprimento limitado por m_0 . Neste trabalho, eles provaram que este conceito é equivalente a dizer que existe um m_0 tal que qualquer caminho em $\text{ind}A$ de um módulo injetivo em Γ para um módulo projetivo em Γ passa por no máximo m_0 ganchos. Provam, também, que uma álgebra fracamente shod conexa possui uma única componente não semi-regular que é padrão generalizada e fiel. Como consequência dos principais resultados em ([CL01b] - 6.2), temos:

Proposição 3.14 *Seja A uma álgebra fracamente shod, tal que existe um caminho de morfismos não nulos de um módulo injetivo indecomponível de $indA$ para algum projetivo indecomponível de $indA$. Então, as componentes de Γ_A são da seguinte forma:*

- (a) componentes pós-projetivas;
- (b) componentes pré-injetivas;
- (c) uma única componente fiel hip-limitada que é a única componente não semi-regular.
- (d) componentes de tipo $\mathbb{Z}A_\infty$.
- (e) componentes construídas a partir de tubos ou $\mathbb{Z}A_\infty$ por inserção de raios ou co-rios.

3.4 Extensões por um ponto

Seja A uma álgebra de Artin e F uma álgebra com divisão sobre R e $M = {}_A M_F$ um A - F -bimódulo tal que ${}_A M \in modA$ e R age centralmente sobre ${}_A M_F$. A **extensão por um ponto de A** é a R -álgebra de Artin da forma:

$$\mathbf{A}[M] = \begin{pmatrix} F & 0 \\ {}_A M_F & A \end{pmatrix}$$

com a adição e multiplicação usuais. O quiver ordinário $Q_{A[M]}$ de $A[M]$ contém o quiver Q_A de A como um subquiver convexo e existe um vértice adicional (extensão) que é uma fonte. Podemos identificar a categoria $modA[M]$ com a categoria cujos objetos são ternas (V, X, ϕ) , onde $X \in modA$, $V \in modF$ e $\phi : {}_F V \rightarrow {}_F Hom_A(M, X)$ é uma aplicação F -linear. Um morfismo $h : (V, X, \phi) \rightarrow (W, Y, \psi)$ é dado pelo par (f, g) , onde $f : V \rightarrow W$ é F -linear, $g : X \rightarrow Y$ é um morfismo em $modA$ e $\psi f = Hom_A(M, g)\phi$. Então, o novo $A[M]$ -módulo projetivo indecomponível P é dado pela terna (F, M, id) onde $id : {}_F F \rightarrow {}_F Hom_A(M, M)$ associa o elemento identidade de F ao elemento identidade de $Hom_A(M, M)$.

Uma classe importante de extensões por um ponto ocorrem na seguinte situação: Seja Λ uma R -álgebra de Artin, básica e P um Λ -módulo projetivo indecomponível, ${}_\Lambda \Lambda = P \oplus Q$ e suponhamos que $Hom_\Lambda(P, Q \oplus radP) = 0$. Como P é um projetivo indecomponível, então $S = P/radP$ é um Λ -módulo simples e $End_\Lambda S$ é uma álgebra com divisão. Além disso, o homomorfismo canônico $End_\Lambda P \rightarrow End_\Lambda S$ é um isomorfismo. Então obtemos o seguinte isomorfismo de álgebras

$$\Lambda \simeq End_\Lambda({}_\Lambda \Lambda)^{op} \simeq \begin{pmatrix} F & 0 \\ {}_A M_F & A \end{pmatrix} = \mathbf{A}[M]$$

onde $F = End_\Lambda(P)^{op}$, $A = End_\Lambda Q^{op}$ e ${}_A M_F = Hom_\Lambda(Q, P) \simeq radP$ e

$$\mathbf{A}[M] = \begin{pmatrix} F & 0 \\ {}_A M_F & A \end{pmatrix}.$$

Capítulo 4

Mergulho em $\mathbb{Z}\tilde{\Delta}$ de um quiver com seção dupla

Seja (Γ, τ) um quiver translação próprio e conexo. Neste capítulo, em geral consideraremos (Γ, τ) um quiver translação com a **propriedade IGP**, isto é, todo caminho em Γ de um vértice injetivo para um vértice projetivo tem no máximo dois ganchos e quando tiver dois eles são consecutivos. Apresentaremos uma condição suficiente para que um quiver translação com a propriedade IGP esteja mergulhado em um quiver $\mathbb{Z}\Delta$ para algum quiver Δ . As técnicas utilizadas foram apenas técnicas relativas a quivers com translação. Como caso particular, este resultado vale para as componentes não semi-regulares do quiver de Auslander-Reiten de uma álgebra shod.

Nesta direção, cabe ressaltar que em [CL01b], Coelho-Lanzilotta introduziram as álgebras fracamente shod. As álgebras fracamente shod são caracterizadas pela propriedade hip, isto é, diremos que uma álgebra de Artin A tem a **propriedade hip** se existir um inteiro n_0 , tal que todo caminho em $indA$ de um módulo injetivo para um módulo projetivo pode ser refinado para um caminho de no máximo n_0 ganchos. No caso em que $n_0 = 0$, então todo caminho em $indA$ de um módulo injetivo para um módulo projetivo é seccional. As componentes não semi-regulares do quiver de Auslander-Reiten das álgebras de Artin em que $n_0 = 0$ foram o objeto de estudo de Size Li em [Li00].

Em [Li00], Size Li provou que uma componente não semi-regular do quiver de Auslander-Reiten de uma álgebra de Artin tal que todo caminho de um vértice injetivo para um vértice projetivo é seccional, pode ser mergulhada num quiver $\mathbb{Z}\Delta$. No Capítulo (2), generalizamos este resultado de Size Li para quivers com translação sem ciclos orientados.

Neste capítulo, mostraremos com o Exemplo (4.44) que, em geral, uma componente do quiver de Auslander-Reiten de uma álgebra fracamente shod não pode ser mer-

gulhada num quiver $\mathbb{Z}\Delta$. Por esse motivo, nos restringimos a investigar as álgebras shod. As álgebras shod são álgebras fracamente shod onde n_0 é no máximo dois e no caso em que n_0 é igual a dois, os ganchos são consecutivos.

Em [RS01], Reiten-Skowroński introduziram o conceito de seção dupla para uma componente \mathcal{C} do quiver de Auslander-Reiten de uma álgebra de Artin. Provaram que uma álgebra de Artin A , básica e conexa, é shod estrita se, e somente se, Γ_A possui uma componente com uma seção dupla (Teorema 8.2 [RS01]).

Neste capítulo, investigaremos as propriedades de quivers com translação (Γ, τ) com a propriedade IGP e/ou com seção dupla. Mostraremos que um quiver translação com seção dupla não necessariamente está mergulhado em um quiver $\mathbb{Z}\Delta$ (Exemplo (4.42)). Além disso, mostraremos que ter a propriedade IGP não é uma condição necessária para um quiver translação ter uma seção dupla (Exemplo (4.5)). Provaremos que todo quiver translação com seção dupla não possui ciclos orientados (Proposição (4.6)) e que se um quiver translação (Γ, τ) possuir uma seção dupla Δ , e a propriedade IGP, então Γ pode ser mergulhado em um quiver $\mathbb{Z}\tilde{\Delta}$ (Teorema (4.18)). Como para álgebras de Artin, básicas e conexas, as condições de ter a propriedade IGP ou ter seção dupla são equivalentes, segue como consequência de nosso resultado que para álgebras shod, as componentes não semi-regulares estão mergulhadas em um quiver $\mathbb{Z}\Delta$ (Corolário (4.43)).

Além disso, enfatizaremos a generalidade do conceito de quivers translação com a propriedade IGP ou com seção dupla com relação a uma componente do quiver de Auslander-Reiten de uma álgebra de Artin com seção dupla (ver Exemplo (4.12)).

4.1 Quivers com seção dupla, algumas propriedades

Nesta seção, consideraremos (Γ, τ) um quiver translação próprio e conexo e se A for uma álgebra de Artin, então a subcategoria $indA$ será considerada em geral com a seguinte propriedade: todo possível caminho de um módulo injetivo para um módulo projetivo tem no máximo dois ganchos e quando dois estes são consecutivos. A menos de menção em contrário, os quivers com translação terão a propriedade IGP.

Observação 4.1 *Por abuso de linguagem, quando necessário, diremos também que uma álgebra de Artin A tem a propriedade IGP ou que a categoria $indA$ tem a propriedade IGP se todo caminho em $indA$ de um módulo injetivo indecomponível I para um módulo projetivo indecomponível P tenha no máximo dois ganchos e quando dois estes sejam consecutivos.*

4.1.1 Seção dupla

Em [RS01], Reiten-Skowroński introduziram o conceito de seção dupla para componentes do quiver de Auslander-Reiten de uma álgebra de Artin. A seguir, definimos seção dupla para um quiver translação (Γ, τ) .

Definição 4.2 *Seja (Γ, τ) um quiver translação valorado, próprio e conexo. Um subquiver Δ de Γ , pleno valorado e conexo é chamado de **seção dupla** em Γ se as seguintes condições estiverem satisfeitas:*

- (1) Δ não tem ciclos orientados;
- (2) Δ é convexo em Γ ;
- (3) Para cada τ -órbita \mathcal{O} em Γ , temos $1 \leq |\Delta \cap \mathcal{O}| \leq 2$.
- (4) Se \mathcal{O} for uma τ -órbita em Γ e $|\Delta \cap \mathcal{O}| = 2$, então $\Delta \cap \mathcal{O} = \{x, \tau x\}$ para algum vértice x em Γ e existem caminhos seccionais $i \rightarrow \cdots \rightarrow \tau x$ e $x \rightarrow \cdots \rightarrow p$ com i injetivo e p projetivo.

Se $|\Delta \cap \mathcal{O}| = 2$ para alguma τ -órbita \mathcal{O} em Γ , diremos que Δ é uma **seção dupla estrita**.

Observação 4.3 *Observe que se $|\Delta \cap \mathcal{O}| = 1$ para cada τ -órbita \mathcal{O} em Γ , então de acordo com a Definição (2.4), temos que Δ é uma seção de (Γ, τ) .*

Lema 4.4 *Seja (Γ, τ) um quiver translação com seção dupla Δ . Se \mathcal{O} for uma τ -órbita em Γ e $\Delta \cap \mathcal{O} = \{\tau x, x\}$ para algum vértice x em Γ , valem as seguintes afirmações:*

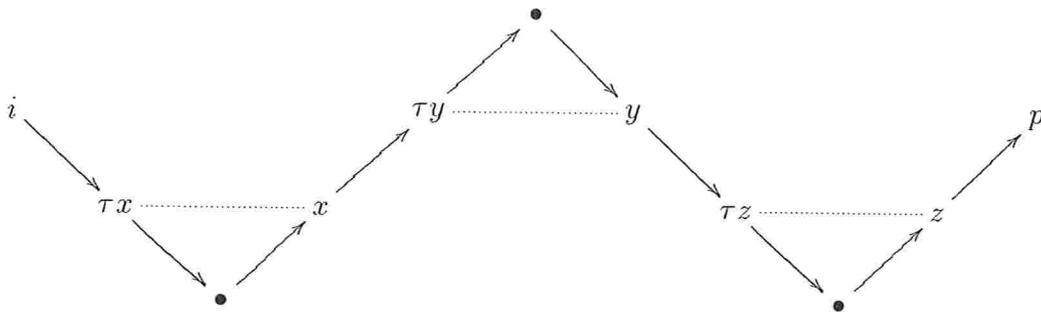
- (a) *Todos os caminhos $i \rightsquigarrow \tau x$ e $x \rightsquigarrow p$ em Γ , com i um vértice injetivo e p um vértice projetivo, estão em Δ .*
- (b) *Se (Γ, τ) tiver a propriedade IGP, então todo caminho $i \rightsquigarrow \tau x$ e $x \rightsquigarrow p$ com i um vértice injetivo e p um vértice projetivo, são seccionais e estão em Δ .*

Demonstração: (a) Seja i um vértice injetivo em Γ e $i \rightsquigarrow \tau x$ um caminho em Γ . Como Δ é uma seção dupla, existe um inteiro $k \geq 0$, tal que $\tau^k i \in \Delta$ e assim, o caminho $\tau^k i \rightsquigarrow i \rightsquigarrow \tau x$ está em Δ , pois Δ é convexo. Portanto, o caminho $i \rightsquigarrow \tau x$ está em Δ . Analogamente, é possível mostrar que o caminho $x \rightsquigarrow p$, onde p é projetivo, está em Δ .

(b) Seja $i \rightsquigarrow \tau x$ um caminho em Γ com i um vértice injetivo. Pelo item (a), sabemos que tal caminho está em Δ . Pela definição de seção dupla, existe um vértice projetivo p' em Γ e um caminho seccional $x \rightsquigarrow p'$ em Γ . Se o caminho $i \rightsquigarrow \tau x$ não for seccional, então o caminho $i \rightsquigarrow \tau x \rightsquigarrow x \rightsquigarrow p'$ terá dois ganchos não consecutivos, contradizendo a hipótese de (Γ, τ) ter a propriedade IGP. De forma análoga, mostra-se que $x \rightsquigarrow p$ é seccional. ■

Com o exemplo a seguir, podemos observar que a propriedade IGP na hipótese do Lema (4.4) (b) é necessária.

Exemplo 4.5 Considere (Γ, τ) o quiver translação:



Este quiver translação tem uma seção dupla Δ que neste caso, coincide com o próprio quiver. Vemos facilmente que (Γ, τ) não possui a propriedade IGP e que o caminho $i \rightsquigarrow \tau y$ não é seccional.

No Capítulo (2) apresentamos uma prova de que todo quiver translação (Γ, τ) com seção não possui ciclos orientados. A Proposição a seguir é uma generalização deste resultado para quivers com translação com seção dupla.

Proposição 4.6 Se (Γ, τ) for um quiver translação com seção dupla Δ , então Γ não possui ciclos orientados.

Demonstração: Suponhamos que exista um ciclo $x = x_0 \rightarrow \cdots \rightarrow x_s = x$ ($s \geq 1$) em Γ . Como $|\Delta \cap \mathcal{O}| \geq 1$ para toda órbita \mathcal{O} de Γ , então existe um inteiro k tal que $\tau^k x \in \Delta$. Suponhamos que $k \geq 0$. Se existir $\tau^k x_i$ para todo índice i com $1 \leq i \leq s - 1$, então existe o caminho $\tau^k x = \tau^k x_0 \rightarrow \cdots \rightarrow \tau^k x_s = \tau^k x$ em Γ com $\tau^k x \in \Delta$. Sendo Δ convexo segue que este ciclo está em Δ o que é uma contradição com a definição de seção dupla. Então para algum índice j , $j \in \{1, \dots, s - 1\}$ existe um inteiro $0 \leq l_j < k$ tal que $\tau^{l_j} x_j = p$ para algum projetivo p em Γ . Escolho o vértice x_j tal que o inteiro $l_j = l$ com esta propriedade é mínimo. Temos assim o caminho $\tau^k x \rightsquigarrow \tau^l x = \tau^l x_0 \rightarrow \tau^l x_1 \rightarrow \cdots \rightarrow \tau^l x_j = p$ em Γ .

Sabemos que algum vértice da órbita de p está em Δ , isto é, existe $r \geq 0$ tal que $\tau^{-r} p \in \Delta$. Temos assim o caminho $\tau^k x \rightsquigarrow \tau^l x = \tau^l x_0 \rightarrow \tau^l x_1 \rightarrow \cdots \rightarrow \tau^l x_j = p \rightsquigarrow \tau^{-r} p$ em Γ com $\tau^k x$ e $\tau^{-r} p$ em Δ . Pela convexidade de Δ podemos dizer que este caminho está em Δ e segue que o caminho $\tau^l x = \tau^l x_0 \rightarrow \tau^l x_1 \rightarrow \cdots \rightarrow \tau^l x_j = p$ está em Δ pois Δ é convexo. Como l é o menor inteiro com a propriedade acima, logo temos o caminho $\tau^l x = \tau^l x_0 \rightarrow \tau^l x_1 \rightarrow \cdots \rightarrow \tau^l x_j \rightarrow \tau^l x_{j+1} \rightarrow \cdots \rightarrow \tau^l x_s = \tau^l x$ com $\tau^l x$ em Δ . Assim,

este ciclo está em Δ , o que é uma contradição com a definição de seção dupla. Segue assim que Γ não possui ciclos orientados.

O caso $k < 0$ é análogo. ■

4.1.2 Seções duplas para álgebras shod e quivers com translação

Em geral, a classe dos quivers com translação com seção dupla contém a classe das componentes com seção dupla do quiver de Auslander-Reiten de uma álgebra shod.

Nesta seção, apresentaremos alguns exemplos que ilustram a generalidade do conceito de seção dupla para quivers com translação com relação ao mesmo conceito para componentes do quiver de Auslander-Reiten de uma álgebra shod.

Em [RS01], Reiten-Skowroński provaram a seguinte equivalência:

Teorema 4.7 *Seja A uma álgebra de Artin, básica e conexa. As seguintes afirmações são equivalentes:*

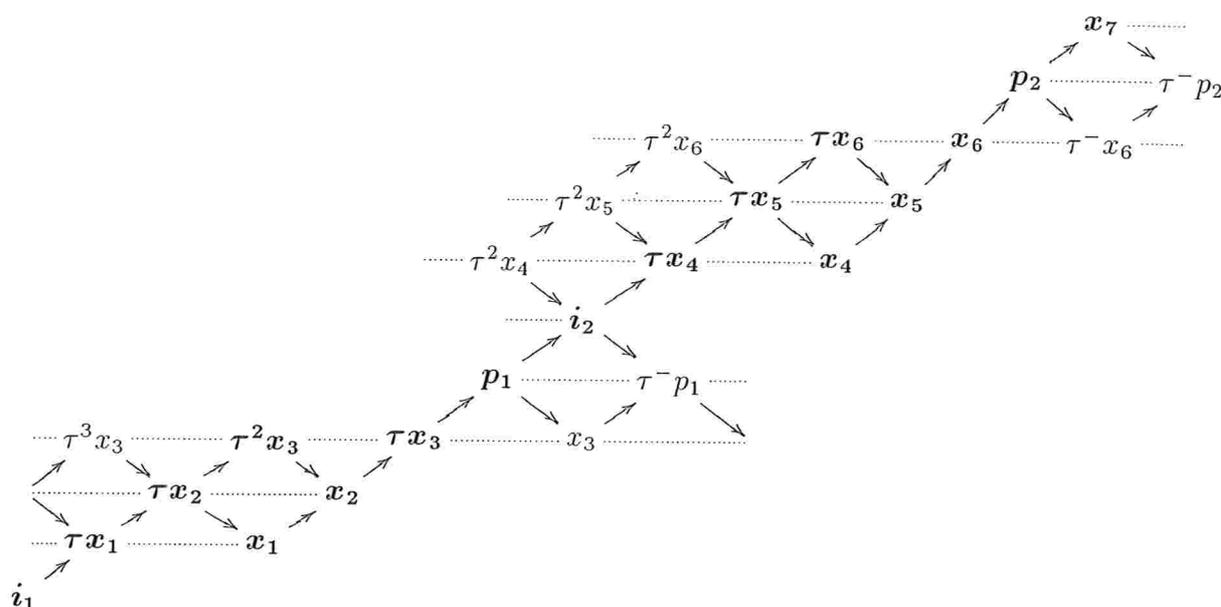
- (a) A é uma álgebra shod estrita.
- (b) Γ_A possui uma componente \mathcal{C} com uma seção dupla.

Se A for uma álgebra de Artin básica e conexa, com o teorema acima e a equivalência obtida no Teorema (3.6) podemos dizer que as seguintes afirmações são equivalentes:

- (a) A é uma álgebra shod estrita.
- (b) Γ_A possui uma componente \mathcal{C} com uma seção dupla.
- (c) A tem a propriedade IGP.

Diferentemente das componentes com seção dupla de álgebras shod, a propriedade IGP não é uma condição necessária para um quiver translação ter uma seção dupla. É o que mostramos com o exemplo a seguir.

Exemplo 4.8 *O quiver abaixo tem uma seção dupla e não tem a propriedade IGP. Observe que a seção dupla é o subquiver pleno gerado pelos vértices em negrito.*



Seja A uma álgebra de Artin e $\text{mod}A$ a categoria dos A -módulos à esquerda finitamente gerados. Sabemos que na categoria $\text{mod}A$ existe o conceito de pares de A -módulos dirigidos. Vamos definir aqui este conceito para vértices de um quiver translação e explorar as analogias em ambos os casos. Primeiramente definimos para módulos.

Definição 4.9 *Seja A uma álgebra de Artin. Um par de A -módulos (X, Y) com X e Y em $\text{mod}A$, é **dirigido** se não existirem X' e Y' somandos indecomponíveis de X e Y respectivamente, e um módulo não projetivo W , tais que exista $X' \rightsquigarrow \tau W$ e $W \rightsquigarrow Y'$. Se o par (X, X) for dirigido, diremos que o módulo X é dirigido.*

Para uma álgebra shod estrita $\Lambda = A[M]$, valem as seguintes propriedades para o módulo M .

Proposição 4.10 [RS01] [CL99] *Seja $\Lambda = A[M]$ uma álgebra shod estrita. Valem as seguintes afirmações:*

- (a) O módulo projetivo P onde $M = \text{rad}P$, não tem sucessor projetivo próprio em $\text{ind}\Lambda$.
- (b) Os pares (M, M) e (M, A) são dirigidos em $\text{mod}A$.

Sabemos que toda álgebra shod estrita Λ é uma extensão por um ponto, isto é, $\Lambda = A[M]$ (Teorema 6.1 [RS01]) e que Γ_Λ possui uma componente com uma seção

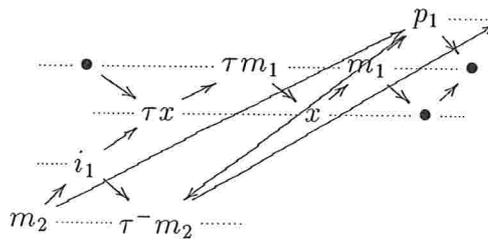
dupla onde P e M estão nesta componente. Tal componente possui a propriedade IGP e os pares (M, M) e (M, A) são dirigidos em $modA$.

Podemos fazer uma leitura do conceito de pares de módulos dirigidos como sendo pares de vértices dirigidos, já que cada módulo indecomponível de $ind\Lambda$ está associado a um vértice no quiver de Auslander-Reiten de Λ . Então definimos a seguir pares de vértices dirigidos.

Definição 4.11 *Sejam (Γ, τ) um quiver translação próprio e conexo e $x, y \in \Gamma_0$. Dizemos que o par (x, y) é **dirigido** se não existir em Γ um caminho de x para τw e de w para y com $w \in \Gamma_0$. Dados X e Y conjuntos de vértices de Γ_0 , dizemos que o par (X, Y) é **dirigido**, se o par (x, y) for dirigido para todo $x \in X$ e todo $y \in Y$.*

Agora temos o conceito de pares de A -módulos dirigidos na categoria $modA$, onde A é uma álgebra de Artin, e este mesmo conceito para quivers com translação. Com o exemplo seguinte, podemos ver facilmente que a classe das componentes do quiver de Auslander-Reiten com seção dupla de uma álgebra shod está contida propriamente na classe dos quivers com translação com seção dupla e com a propriedade IGP.

Exemplo 4.12 *Seja (Γ, τ) o quiver translação abaixo. Vemos que Γ tem uma seção dupla Δ e tem a propriedade IGP. A seção dupla é o subquiver pleno de (Γ, τ) gerado pelos vértices $i_1, \tau^-m_2, x, \tau x, m_1, \tau m_1, p_1$.*



Seja $M = p_1^-$. Observamos que para este quiver, o par (M, M) não é dirigido. Então este é um quiver translação com seção dupla e com a propriedade IGP e que não é componente de quiver de Auslander-Reiten de uma Álgebra shod (ver Proposição (4.10)).

Consideremos em (Γ, τ) o conjunto dos vértices projetivos p tais que $\mathcal{I}(p) \neq \phi$. Dados p e p' em (Γ, τ) tais que $\mathcal{I}(p) \neq \phi$ e $\mathcal{I}(p') \neq \phi$, provaremos no Lema (4.14) que o par (p, p') é dirigido. Como este resultado vale em geral para quivers com translação com seção dupla e com a propriedade IGP, então podemos dizer que o mesmo vale para as componentes do quiver de Auslander-Reiten de uma álgebra shod.

Definição 4.13 *Seja (Γ, τ) um quiver translação próprio e conexo. Seja $\mathcal{P}^g = \{p_1, \dots, p_s\}$ o subconjunto de \mathcal{P} tal que $\mathcal{I}(p_j) \neq \phi$ para $j \in \{1, \dots, s\}$ e denotemos por $M_k = p_k^-$ e $M = \cup_{k=1}^s M_k$. Seja $\mathcal{I}^g = \{i_1, \dots, i_s\}$ o subconjunto de \mathcal{I} tal que $\mathcal{P}(i_j) \neq \phi$ para $j \in \{1, \dots, s\}$.*

Temos as seguintes propriedades para os vértices de \mathcal{P}^g em um quiver translação com a propriedade IGP.

Lema 4.14 *Se (Γ, τ) for um quiver translação próprio, conexo e com a propriedade IGP, então o par (p_l, p_j) é dirigido para todos $p_l, p_j \in \mathcal{P}^g$.*

Demonstração: Suponhamos que existe um caminho não seccional de p_l para p_j em Γ , com $p_l \in \mathcal{P}^g$. Logo existe um caminho de um vértice injetivo para p_j com dois ganchos não consecutivos pois existe um caminho não seccional de um injetivo para p_l . ■

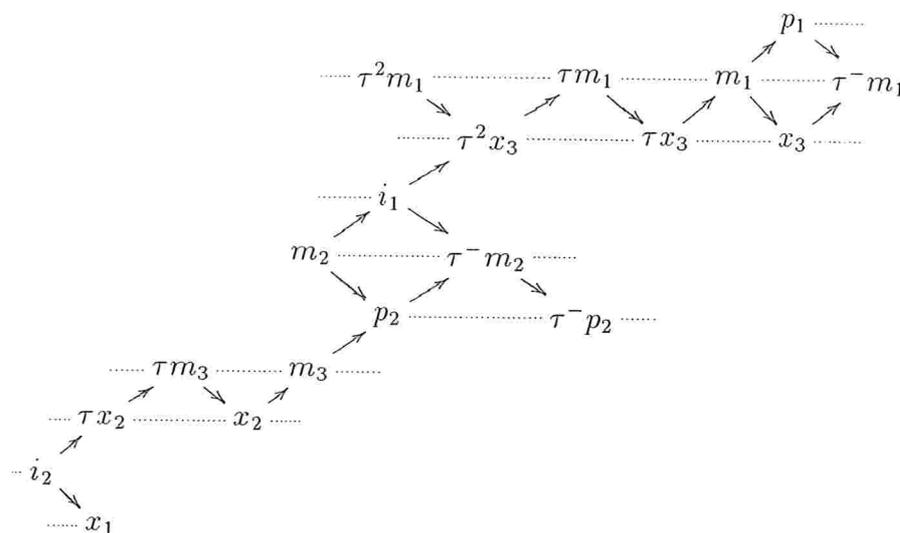
Com relação aos antecessores imediatos dos vértices de \mathcal{P}^g , podemos fazer a seguinte afirmação:

Lema 4.15 *Sejam (Γ, τ) um quiver translação próprio, conexo e com a propriedade IGP e $M_j = p_j^-$, $M_k = p_k^-$ com $p_j, p_k \in \mathcal{P}^g$. Se $x \in M_j$ for tal que $\mathcal{I}(x) \neq \phi$ e $y \in M_k$, então (x, y) é dirigido.*

Demonstração: Se (x, y) não for dirigido, então existe um caminho não seccional em Γ de x para y . Como $\mathcal{I}(x) \neq \phi$, então existe um caminho não seccional de um vértice injetivo i para x em Γ . Assim, temos em Γ um caminho $i \rightsquigarrow x \rightsquigarrow y \rightarrow p_k$, pois $y \in M_k$, com dois ganchos não consecutivos, contradizendo a hipótese. Portanto, (x, y) é dirigido. ■

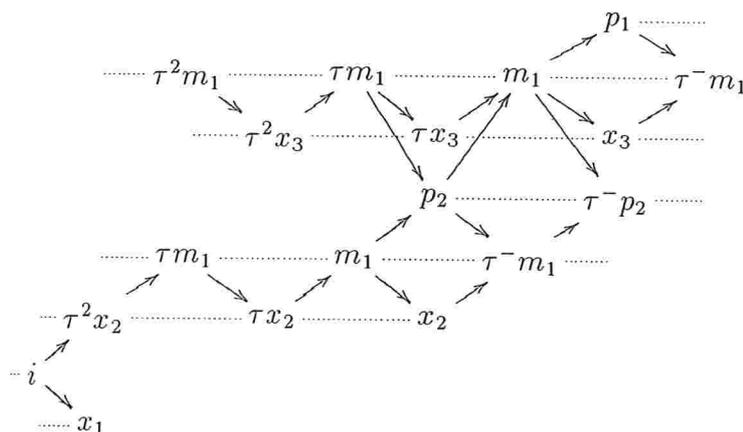
Com o intuito de ilustrar a hipótese que impusemos sobre o vértice x no lema acima, temos os seguintes exemplos.

Exemplo 4.16 *Seja (Γ, τ) o seguinte quiver translação com seção dupla. É fácil ver que este quiver tem a propriedade IGP.*



Sejam $M_1 = p_1^-$ e $M_2 = p_2^-$, com p_1 e p_2 em \mathcal{P}^g . Vemos que o par (M_2, M_1) não é dirigido. Observe que (Γ, τ) possui uma seção dupla, tem a propriedade IGP, porém $\mathcal{I}(m_2) = \phi$.

Exemplo 4.17 No quiver abaixo, se tomarmos $M_1 = p_1^-$ e $M_2 = p_2^-$, vemos que (Γ, τ) possui seção dupla, tem a propriedade IGP, porém (M_1, M_2) não é dirigido.



4.2 Subquivers Δ^i de uma seção dupla Δ

Seja (Γ, τ) um quiver translação próprio e conexo com uma seção dupla Δ . Entre as propriedades que queremos mostrar sobre quivers com seção dupla, ao final deste

capítulo provaremos o seguinte teorema:

Teorema 4.18 *Seja (Γ, τ) um quiver translação valorado, não semi-regular com uma seção dupla Δ e com a propriedade IGP. Então (Γ, τ) , pode ser mergulhado em um quiver $(\mathbb{Z}\tilde{\Delta}, \rho)$, onde $\tilde{\Delta}$ é o quiver modificado.*

Para provar este teorema, definiremos alguns objetos e provaremos alguns resultados prévios que conduzirão à prova deste teorema.

Seja (Γ, τ) um quiver translação próprio e conexo com uma seção dupla Δ . Definimos os seguintes subquivers plenos Δ^0, Δ^1 e Δ^2 de Δ gerados pelos seguintes conjuntos de vértices, respectivamente:

$$\begin{aligned} (\Delta^0)_0 &= \{x \in \Delta_0; \text{não existe caminho } \tau^-y \rightsquigarrow x, y \in \Delta_0\}. \\ (\Delta^1)_0 &= \{x \in \Delta_0; \tau x \notin (\Delta^0)_0 \text{ e existe um caminho } \tau^-y \rightsquigarrow x, y \in \Delta_0\} \text{ e} \\ (\Delta^2)_0 &= \{x \in \Delta_0; \tau x \in (\Delta^0)_0\}. \end{aligned}$$

A seguir enunciamos e provamos algumas das propriedades importantes destes subquivers.

Lema 4.19 *Se (Γ, τ) for um quiver translação próprio e conexo com uma seção dupla Δ , então $\Delta_0 = (\Delta^0)_0 \dot{\cup} (\Delta^1)_0 \dot{\cup} (\Delta^2)_0$.*

Demonstração: A inclusão $(\Delta^0)_0 \dot{\cup} (\Delta^1)_0 \dot{\cup} (\Delta^2)_0 \subseteq \Delta_0$ é imediata a partir da definição de cada um dos subquivers $\Delta^j (j = 0, 1, 2)$.

Também é imediato da definição que $\Delta^0 \cap \Delta^1 = \emptyset$ e $\Delta^0 \cap \Delta^2 = \emptyset$ e $\Delta^1 \cap \Delta^2 = \emptyset$.

Provemos a outra inclusão. Seja x um vértice qualquer da seção dupla Δ . Se $x \in \Delta^0$ não temos nada a provar. Caso contrário, existe um caminho $\tau^-y \rightsquigarrow x$ em Γ com $y \in \Delta_0$. Se além disso $\tau x \in \Delta^0$, então $x \in \Delta^2$, caso contrário, $x \in \Delta^1$. Provando assim que $\Delta_0 \subseteq (\Delta^0)_0 \dot{\cup} (\Delta^1)_0 \dot{\cup} (\Delta^2)_0$. ■

Da definição de Δ^i para $i = 0, 1, 2$, temos o seguinte lema.

Lema 4.20 *Se (Γ, τ) for um quiver translação próprio e conexo com uma seção dupla Δ , então Δ^0 é fechado para antecessores em Δ .*

Demonstração: Seja $x \rightsquigarrow y$ um caminho em Δ com $y \in \Delta^0$. Se x pertencer a $\Delta^1 \dot{\cup} \Delta^2$, teremos uma contradição com a definição de Δ^0 . Como $\Delta = \Delta^0 \dot{\cup} \Delta^1 \dot{\cup} \Delta^2$ (Lema (4.19)), segue que $x \in \Delta^0$. ■

Lema 4.21 *Seja (Γ, τ) um quiver translação próprio e conexo com seção dupla Δ e com a propriedade IGP. Se o par (x, y) com x e y em Δ não for dirigido, então todo caminho não seccional de x para y tem no máximo dois ganchos e quando dois eles são consecutivos. Além disso, se $x \rightsquigarrow \tau z \rightsquigarrow z \rightsquigarrow y$ for um caminho em Γ , então os pares $(x, \tau z), (z, y)$ são dirigidos e todo vértice do caminho $x \rightsquigarrow \tau z$ está em Δ^0 e $z \in \Delta^2$.*

Demonstração: Suponhamos que existe um caminho $x \rightsquigarrow y$ em Γ com pelo menos três ganchos, da seguinte forma: $x \rightsquigarrow \tau a_1 \rightsquigarrow a_1 \rightsquigarrow \tau b_1 \rightsquigarrow b_1 \rightsquigarrow \tau c_1 \rightsquigarrow c_1 \rightsquigarrow y$ em Γ . Como $x, y \in \Delta$ segue da convexidade de Δ que este caminho está em Δ . Pelo item (4) da Definição (4.2) existe um caminho de um injetivo de Γ até τa_1 e de c_1 até um projetivo de Γ . Então temos um caminho de um injetivo até um projetivo com três ganchos, contradizendo a hipótese. Portanto tal caminho tem no máximo dois ganchos e podemos dizer que se forem dois, serão consecutivos. Caso contrário fazendo o mesmo procedimento acima, teremos uma contradição com a hipótese IGP sobre (Γ, τ) .

Sejam $x \rightsquigarrow \tau z$ e $z \rightsquigarrow y$ caminhos em Γ . Se um destes caminhos não for seccional, então o caminho $x \rightsquigarrow \tau z \rightsquigarrow z \rightsquigarrow y$ terá dois ganchos não consecutivos, contradizendo o que provamos no parágrafo acima. Portanto, $(x, \tau z)$ e (z, y) são dirigidos.

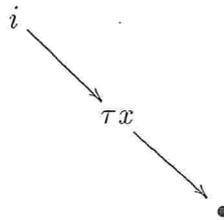
Agora, vamos provar que todo vértice do caminho $x \rightsquigarrow \tau z$ está em Δ^0 . Sabemos que o caminho $x \rightsquigarrow \tau z$ está em Δ . Se existir um vértice a neste caminho em Δ^1 ou em Δ^2 , teremos o caminho $w \rightsquigarrow \tau^- w \rightsquigarrow a \rightsquigarrow \tau z \rightsquigarrow z \rightsquigarrow y$ em Γ com $w \in \Delta$. Logo a existência do par (w, y) está em contradição com o que provamos acima. Portanto, todo vértice do caminho $x \rightsquigarrow \tau z$ está em Δ^0 .

A conclusão de que $z \in \Delta^2$ é direta da definição de Δ^2 . ■

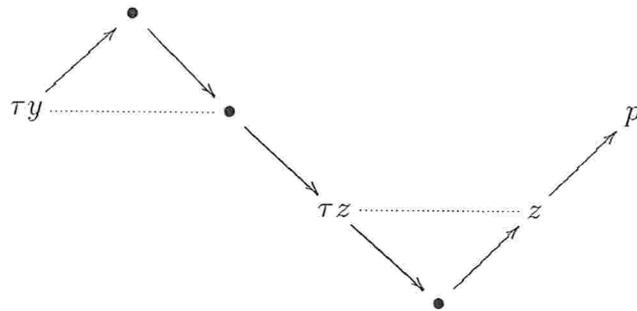
Vamos calcular os subquivers Δ^i ($0 \leq i \leq 2$) de alguns quivers com translação.

Exemplo 4.22 *Apresentamos a seguir o subquiver Δ^j ($j = 0, 1, 2$) de alguns dos exemplos anteriormente citados.*

(a) No quiver do Exemplo (4.5), temos que Δ^0 é o quiver

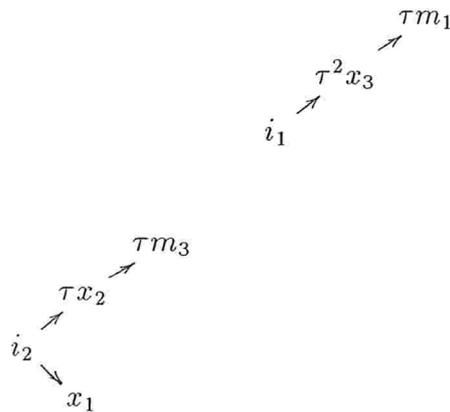


enquanto que Δ^2 contém apenas o vértice x e Δ^1 é o quiver



Podemos observar que Δ^1 encontra uma órbita de Γ mais de uma vez.

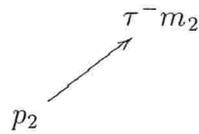
(b) No Exemplo (4.16), temos que Δ^0 é o quiver desconexo:



enquanto que Δ^2 é o quiver disjuntos que contém as flechas:



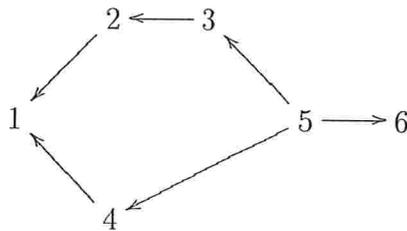
e Δ^1 é o subquiver desconexo que contém a flecha



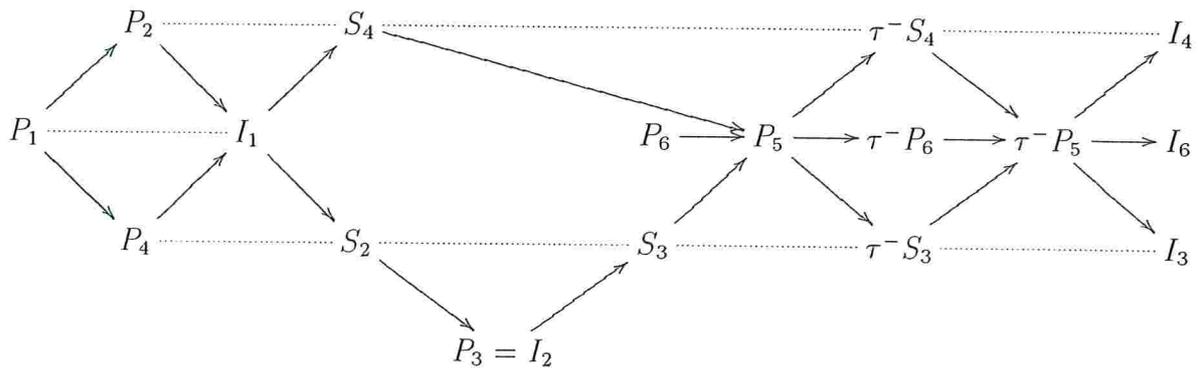
e o vértice p_1 .

Antes de apresentar mais algumas propriedades dos subquivers Δ^j de Δ , apresentamos a seguir alguns exemplos de quivers de álgebras shod estritas.

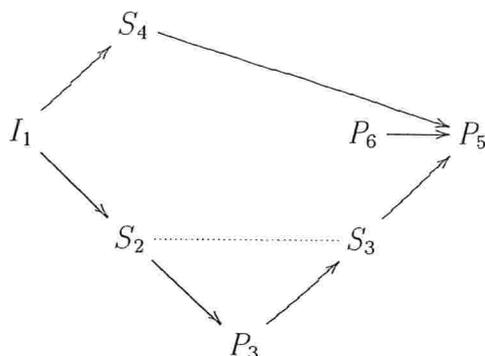
Exemplo 4.23 Seja k um corpo e A a k -álgebra com radical quadrado zero dada pelo quiver:



O quiver de Auslander-Reiten Γ_A de A é:

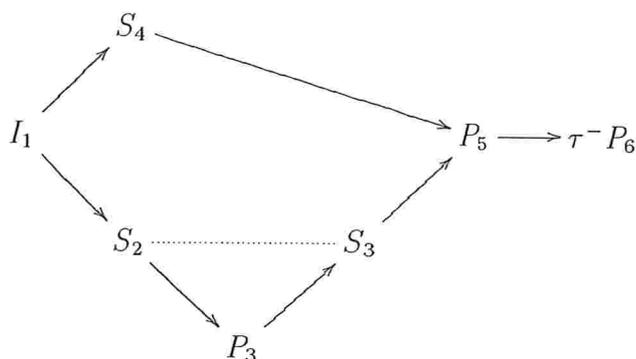


Esta é uma álgebra shod estrita e temos a seção dupla dada pelo subquiver pleno gerado por $I_1, S_4, S_2, P_3, S_3, P_6, P_5$.



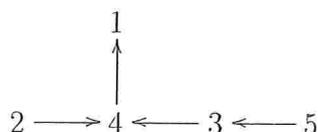
Neste caso, Δ^0 é o subquiver pleno gerado por I_1, S_4, S_2, P_3 e P_6 . Podemos ver que Δ^0 é desconexo e que Δ^2 contém um único vértice que é o vértice S_3 . Quanto ao quiver Δ^1 este possui um único vértice que é o vértice P_5 .

Neste mesmo exemplo, podemos tomar como seção dupla o subquiver pleno de Γ_A gerado por $I_1, S_4, S_2, P_3, S_3, P_5, \tau^- P_6$.

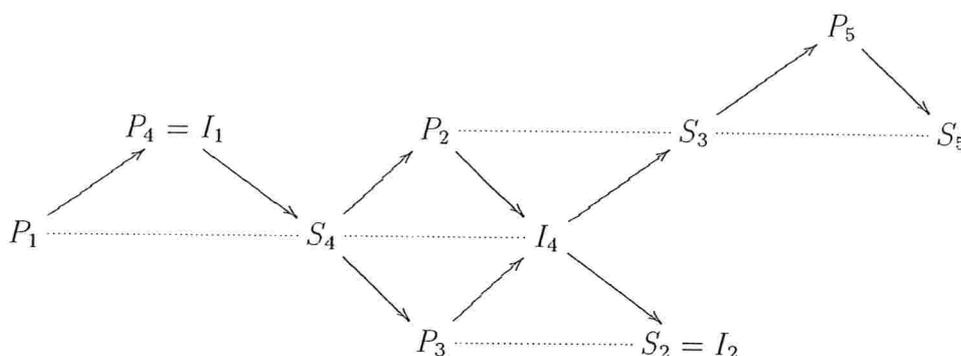


Neste caso, Δ^0 é um quiver conexo gerado por I_1, S_4, S_2, P_3 enquanto Δ^2 é dado pelo vértice S_3 e Δ^1 é dado pelo quiver conexo gerado por P_5 e $\tau^- P_6$. Vemos através deste exemplo que Δ^1 pode possuir um vértice não projetivo.

Exemplo 4.24 Seja A a k -álgebra com radical quadrado zero (k corpo) dada pelo quiver:



O quiver de Auslander-Reiten Γ_A é dado por:

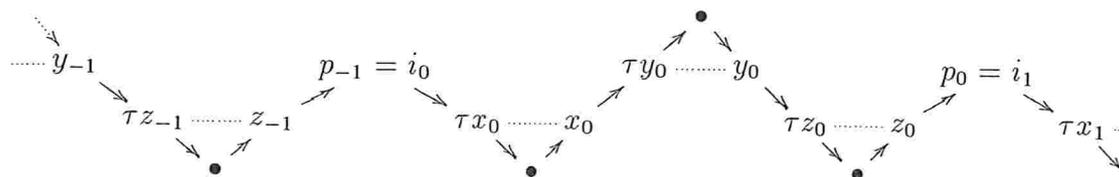


Neste caso, podemos tomar a seção dupla Δ como sendo o subquiver pleno de Γ_A gerado por $I_1, S_4, P_2, P_3, I_4, S_3, P_5$. Temos que Δ^0 é o subquiver conexo gerado por I_1, S_4, P_2, P_3 e Δ^2 é o subquiver conexo gerado por I_4, S_3 . O quiver Δ^1 contém um único vértice que é o vértice P_5 . Este exemplo ilustra que Δ^2 é um quiver conexo que não possui somente vértices, como no exemplo anterior. Observe que neste caso só existe uma seção dupla.

Com estes exemplos, vimos que os subquivers Δ^j de Δ , com $0 \leq j \leq 2$ podem ser desconexos e que o subquiver Δ^1 pode encontrar uma órbita duas vezes. Na observação seguinte, discutiremos as possibilidades de algum quiver Δ^j ser vazio.

Observação 4.25 Seja (Γ, τ) um quiver translação com uma seção dupla Δ . Uma pergunta natural sobre os subquivers Δ^j ($j = 0, 1, 2$) é se algum Δ^j pode ser vazio.

(a) Considere (Γ, τ) o seguinte quiver translação.



É fácil ver que este quiver têm uma seção dupla Δ que coincide com o próprio quiver. Neste caso, vemos que $\Delta^0 = \phi$, pois para todo vértice $x \in \Delta$, existe um caminho $\tau^{-1}y \rightsquigarrow x$ com $y \in \Delta$. Como $\Delta^0 = \phi$, então $\Delta^2 = \phi$ e $\Delta^1 = \Delta$ por definição.

(b) Se existir um par (x, y) não dirigido com x e y em Δ , segue da definição de seção dupla que Δ é uma seção dupla estrita. Porém, isso não significa que $\Delta^2 \neq \phi$, como mostra o quiver

acima. Porém, podemos dizer que:

Se Δ for uma seção dupla estrita, então $\Delta^1 \neq \phi$. De fato, se Δ for uma seção dupla estrita, existe um par de vértices τx e x em Δ . Neste caso, existe um vértice projetivo p e um caminho seccional de x para p em Δ . Como existe um caminho em Δ de $\tau^-(\tau x)$ para p , com τx em Δ e p um vértice projetivo, temos que $p \in \Delta^1$.

(c) Se (Γ, τ) tiver a propriedade IGP, então $\Delta^0 \neq \phi$. De fato, pelo Lema (4.21) temos $\Delta^0 \neq \phi$.

(d) Todo par (x, y) com x e y em Δ é dirigido se, e somente se, Δ for uma seção. Escrevendo de outra forma, temos que $\Delta^0 = \Delta$ se, e somente se, Δ for uma seção. Neste caso, $\Delta^2 = \Delta^1 = \phi$.

Nos próximos lemas, mostraremos que se um quiver translação tiver uma seção dupla Δ , então $\mathcal{P}^g \subseteq \Delta^1$. Se além de seção dupla, o quiver tiver a propriedade IGP, então $\mathcal{I}^g \subseteq \Delta^0$.

Lema 4.26 Seja (Γ, τ) um quiver translação com seção dupla Δ . São equivalentes:

- (a) Δ é uma seção dupla estrita.
- (b) $\mathcal{P}^g \neq \phi$.
- (c) $\mathcal{I}^g \neq \phi$.

Demonstração: Provemos primeiramente que (a) é equivalente a (b). A prova da necessidade é imediata. Suponhamos que Δ não é uma seção dupla estrita, então Δ é uma seção. Pelo Teorema (2.7), Γ pode ser mergulhado em $\mathbb{Z}\Delta$. Segue então do Teorema (2.9) que $\mathcal{I}(p) = \phi$ para todo vértice projetivo $p \in \Gamma$. Então $\mathcal{P}^g = \phi$.

De maneira análoga, prova-se que $\mathcal{I}^g \neq \phi$, se e somente se, Δ for uma seção dupla estrita. ■

Lema 4.27 Seja (Γ, τ) um quiver translação com seção dupla Δ . Então $\mathcal{P}^g \subseteq (\Delta^1)_0$.

Demonstração: Vamos supor que Δ é uma seção dupla estrita, pois caso contrário, $\mathcal{P}^g = \phi$ e então está provada a afirmação.

Seja $p \in \mathcal{P}^g$. Como Δ é seção dupla, existe um inteiro $k \geq 0$ tal que $\tau^{-k}p \in \Delta$. Como $p \in \mathcal{P}^g$, logo existe um vértice injetivo i em Γ e um caminho não seccional $i \rightsquigarrow p$ em Γ . Além disso, existe um inteiro $j \geq 0$ tal que $\tau^j i \in \Delta$. Assim, temos um caminho $\tau^j i \rightsquigarrow i \rightsquigarrow p \rightsquigarrow \tau^{-k}p$ com extremos em Δ . Pela convexidade de Δ , segue que o caminho $i \rightsquigarrow p$ está em Δ . Como tal caminho não é seccional, segue que tal caminho é da forma $i \rightsquigarrow y \rightsquigarrow \tau^{-1}y \rightsquigarrow p$ com $y \in \Gamma$. Como existe o caminho $\tau^{-1}y \rightsquigarrow p$, com $y \in \Delta$, e não existe τp , logo $p \in \Delta^1$ por definição de Δ^1 . ■

No Exemplo (4.5), temos um quiver translação com seção dupla tal que $\mathcal{I}^g \not\subseteq (\Delta^0)_0$. Porém se (Γ, τ) tiver a propriedade IGP, vale a seguinte afirmação:

Lema 4.28 *Se (Γ, τ) for um quiver translação com uma seção dupla Δ e com a propriedade IGP, então $\mathcal{I}^g \subseteq (\Delta^0)_0$.*

Demonstração: Se Δ for uma seção, temos que $\mathcal{I}^g = \phi$ e não temos nada para provar.

Suponhamos que Δ é uma seção dupla estrita. Seja $i \in \mathcal{I}^g$. Como Δ é uma seção dupla, segue que existe um inteiro $k \geq 0$, tal que $\tau^k i \in \Delta$. Como $i \in \mathcal{I}^g$, existe um projetivo $p \in \Gamma$ e um caminho não seccional $i \rightsquigarrow y \rightsquigarrow \tau^- y \rightsquigarrow p$ em Γ . Assim, segue do Lema (4.27) que $p \in (\Delta^1)_0 \subseteq \Delta_0$. Portanto, o caminho $\tau^k i \rightsquigarrow i \rightsquigarrow y \rightsquigarrow \tau^- y \rightsquigarrow p$ está em Δ pois $\tau^k i$ e p estão em Δ . Segue do Lema (4.21) que $k = 0$ e o caminho $i \rightsquigarrow y$ está completamente em Δ^0 . Portanto $i \in \Delta^0$. ■

4.3 Quiver modificado

Seja (Γ, τ) um quiver translação valorado, próprio e conexo com uma seção dupla Δ . A partir do quiver Δ , vamos definir um novo quiver $\tilde{\Delta}$, cujos vértices estão contidos em Δ_0 . Com este quiver provaremos o Teorema (4.18), isto é, que o quiver (Γ, τ) está mergulhado em $(\mathbb{Z}\tilde{\Delta}, \rho)$ onde ρ é uma translação usual definida sobre $\mathbb{Z}\tilde{\Delta}$. Antes porém, provaremos que tal quiver encontra cada τ -órbita de Γ no máximo uma vez e que é um quiver conexo.

Definição 4.29 *Seja (Γ, τ) um quiver translação valorado, próprio e conexo com uma seção dupla Δ . Definimos o quiver modificado $\tilde{\Delta}$ de Δ da seguinte forma:*

Seja $(\tilde{\Delta})_0 = (\Delta^0)_0 \cup (\Delta^1)_0$ e defino $(\tilde{\Delta})_1$ da forma a seguir. Dados $x, y \in (\tilde{\Delta})_0$, existe uma flecha $x \rightarrow y$ com valoração (a, b) em $(\tilde{\Delta})_1$ nos seguintes casos:

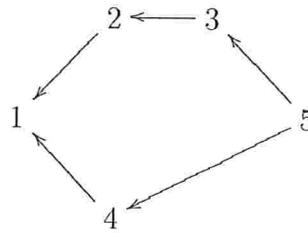
- (a) $x, y \in \Delta^0$ e existe uma flecha $x \rightarrow y$ em Δ com valoração (a, b) .
- (b) $x, y \in \Delta^1$ e existe uma flecha $x \rightarrow y$ em Δ com valoração (a, b) .
- (c) $x \in \Delta^0$ com $\tau^- x \in \Delta^2$ e existe a flecha $\tau^- x \rightarrow y$ em Δ com valoração (a, b) .
- (d) $y \in \Delta^0$, $x \in \Delta^1$ e existe a flecha $y \rightarrow x$ em Δ com valoração (b, a) .

Observação 4.30 *Se Δ for uma seção de (Γ, τ) , segue que $\Delta = \Delta^0$ e então $\Delta^1 = \Delta^2 = \phi$. Pelo item (a) da Definição (4.29) segue que $\Delta = \tilde{\Delta}$.*

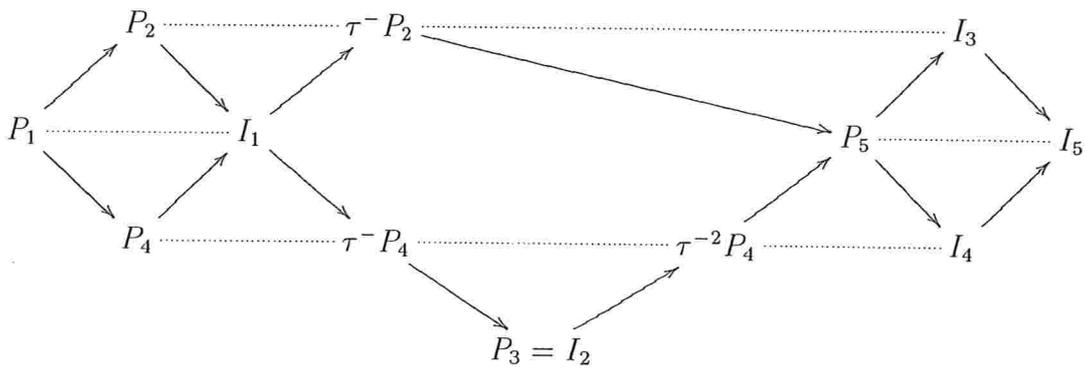
Por abuso de notação dizemos que $(\tilde{\Delta})_0$ encontra as órbitas de Γ . Além disso, nos resultados apresentados aqui faremos uso freqüente da propriedade de que se $x, y \in \Delta^j$ ($j = 0, 1, 2$) e existe uma flecha $x \rightarrow y$ em Γ , então esta flecha está em Δ . Esta afirmação segue da definição de seção dupla pois Δ é um subquiver pleno de Γ .

Nos exemplos a seguir, apresentamos o quiver modificado de alguns quivers com translação.

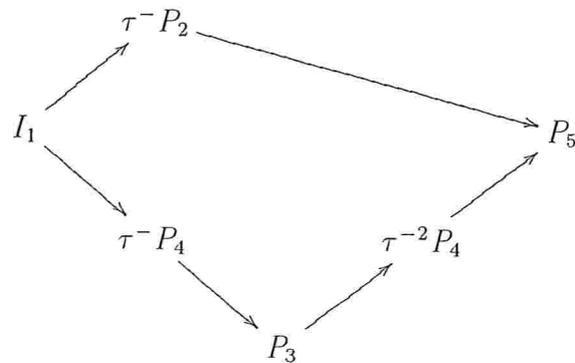
Exemplo 4.31 *Seja k um corpo e A a k -álgebra com radical quadrado zero dada pelo quiver*



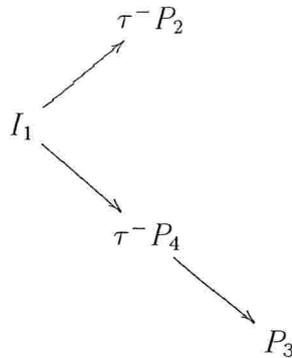
O quiver de Auslander-Reiten Γ_A de A é:



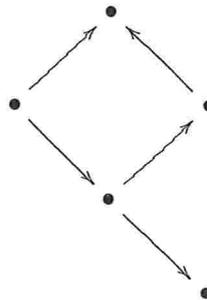
Temos que uma seção dupla Δ é o quiver pleno:



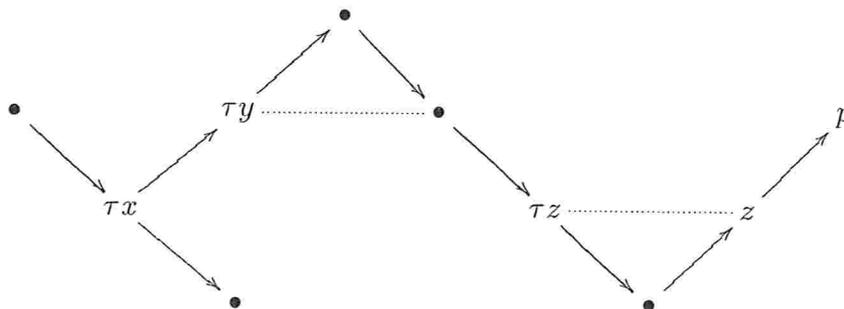
enquanto que Δ^0 é o quiver



e o quiver Δ^1 possui apenas o vértice P_5 . Já o quiver Δ^2 possui apenas o vértice $\tau^{-2}P_4$. Assim, $\tilde{\Delta}$ é o quiver:



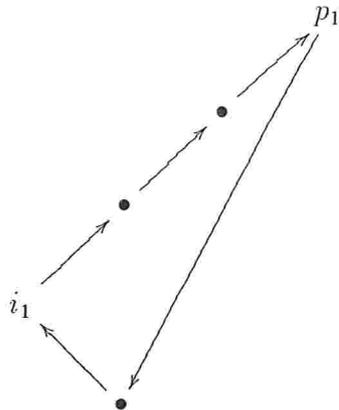
Exemplo 4.32 Apresentamos a seguir o quiver modificado do Exemplo (4.5).



Exemplo 4.33 Para o quiver do Exemplo (4.25), é fácil ver que $\tilde{\Delta} = \Delta$ pois $\Delta^0 = \phi$.

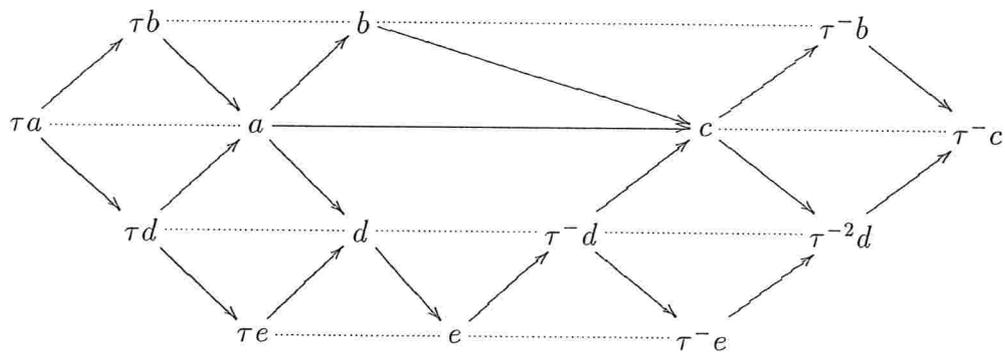
Com os exemplos a seguir veremos que um quiver modificado pode conter ciclos orientados.

Exemplo 4.34 Tomamos como exemplo, o quiver modificado do Exemplo (4.12).

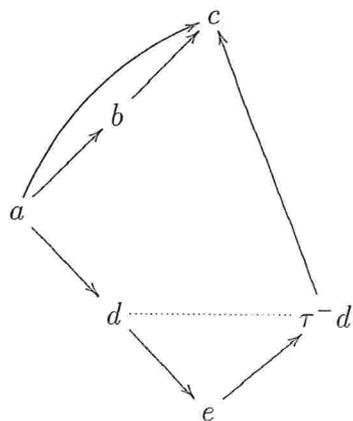


Este é um exemplo de quiver modificado que contém ciclos orientados.

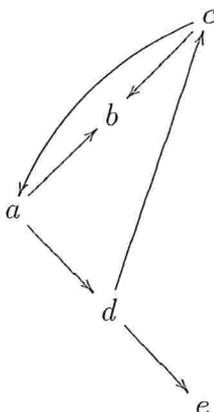
Exemplo 4.35



Segue abaixo a seção dupla deste quiver:



A seguir temos o quiver modificado $\tilde{\Delta}$:



que também possui ciclos orientados.

Seja (Γ, τ) um quiver translação próprio e conexo com uma seção dupla Δ . Com o intuito de provar que o quiver modificado $\tilde{\Delta}$ é conexo, provaremos alguns lemas técnicos.

Lema 4.36 *Seja (Γ, τ) um quiver translação próprio e conexo com uma seção dupla Δ . Se $(\delta) : x_0 - x_1 - \dots - x_r$ for um passeio com todos os vértices $x_i \in \Delta^0 \cup \Delta^1$, então existirá um passeio $(\tilde{\delta}) : x_0 - x_1 - \dots - x_r$ em $\tilde{\Delta}$ que é igual a δ a menos de algumas flechas invertidas.*

Demonstração: De fato, caso exista alguma flecha $x_i \rightarrow x_{i+1}$ com $x_i \in \Delta^0$ e $x_{i+1} \in \Delta^1$ ou $x_{i+1} \rightarrow x_i$ com $x_{i+1} \in \Delta^0$ e $x_i \in \Delta^1$ em Δ , então pelo item (d) da Definição de quiver modificado, existirá uma flecha $x_{i+1} \rightarrow x_i$ ou $x_i \rightarrow x_{i+1}$, respectivamente em $\tilde{\Delta}$. E assim temos um passeio em $\tilde{\Delta}$. ■

Lema 4.37 *Seja (Γ, τ) um quiver translação próprio e conexo com uma seção dupla Δ . Se $x_0 - x_1 - \dots - x_r$ for um passeio em Δ^2 , então existe um passeio de τx_0 para τx_r em Δ^0 .*

Demonstração: De fato, como cada x_i é um vértice em Δ^2 , segue que $\tau x_i \in \Delta^0$ para todo i . Assim, para cada flecha $x_i \rightarrow x_{i+1}$ ou $x_{i+1} \rightarrow x_i$ em Δ^2 , temos uma flecha $\tau x_i \rightarrow \tau x_{i+1}$ ou $\tau x_{i+1} \rightarrow \tau x_i$ em Δ^0 . ■

Corolário 4.38 *Seja (Γ, τ) um quiver translação próprio e conexo com uma seção dupla Δ . Se $x_0 - x_1 - \dots - x_r$ for um passeio em Δ^2 , então existe um passeio de τx_0 para τx_r em $\tilde{\Delta}$.*

Demonstração: Pelo Lema (4.37), dado o passeio de x_0 para x_r , existe um passeio de τx_0 para τx_r em Δ^0 . Como toda flecha de Δ^0 está em $\tilde{\Delta}$, segue que existe um passeio de τx_0 para τx_r em $\tilde{\Delta}$. ■

Proposição 4.39 *Se (Γ, τ) for um quiver translação próprio e conexo com uma seção dupla Δ , então o quiver modificado $\tilde{\Delta}$ de Δ é conexo.*

Demonstração: Seja $x_0 - \dots - x_r$ um passeio em Γ com x_0 e x_r em $\tilde{\Delta}$. Como x_0 e x_r estão no quiver modificado, segue que estão em $\Delta^0 \cup \Delta^1$. Portanto x_0 e x_r estão na seção dupla Δ . Então podemos dizer que o passeio que tomamos é um passeio em Δ pois, $x_0, x_1 \in \Delta^0 \cup \Delta^1$ e Δ é conexo. Se todos os vértices deste caminho estiverem em $\Delta^0 \cup \Delta^1$, então pelo Lema (4.36) existirá um passeio de x_0 para x_r em $\tilde{\Delta}$.

Suponhamos que algum vértice deste passeio não está em $\tilde{\Delta}$. Como o passeio está em Δ , segue que tal vértice está em Δ^2 . Seja k o menor inteiro com $0 < k < r$ tal que $x_k \in \Delta^2$. Logo existe um inteiro j , com $0 \leq j < r - k$ de tal forma que o passeio $x_k - \dots - x_{k+j}$ está completamente em Δ^2 e x_{k+j+1} esteja em $\Delta^0 \cup \Delta^1$. Pelo Lema (4.37), segue que existe um passeio de τx_k para τx_{k+j} em Δ^0 e pelo Corolário (4.38), segue que este passeio está em $\tilde{\Delta}$. Provaremos então que existe um passeio de x_0 para x_{k+j+1} em $\tilde{\Delta}$. Para isso, devemos analisar alguns casos.

Sabemos que τx_k e τx_{k+j} são vértices em Δ^0 e existem flechas $x_{k-1} - x_k$ e $x_{k+j} - x_{k+j+1}$ em Δ .

Vamos supor que existe a flecha $x_{k-1} \rightarrow x_k$ em Δ . Assim, existe a flecha $\tau x_k \rightarrow x_{k-1}$ em Δ . Como $x_{k-1} \in \Delta^0 \cup \Delta^1$ então, ou temos que a flecha $\tau x_k \rightarrow x_{k-1}$ está em Δ^0 e assim está em $\tilde{\Delta}$, ou temos que $\tau x_k \in \Delta^0$ e $x_{k-1} \in \Delta^1$. Assim, existirá a flecha $x_{k-1} \rightarrow \tau x_k$ em $\tilde{\Delta}$. Portanto existe um passeio $x_0 - \dots - x_{k-1} - \tau x_k - \dots - \tau x_{k+j}$ em $\tilde{\Delta}$ já que existe ou a flecha $\tau x_k \rightarrow x_{k-1}$ ou a flecha $x_{k-1} \rightarrow \tau x_k$ em $\tilde{\Delta}$.

Suponhamos agora que existe a flecha $x_k \rightarrow x_{k-1}$ em Δ com τx_k em Δ^0 e x_{k-1} em $\Delta^0 \cup \Delta^1$. Podemos dizer que x_{k-1} não está em Δ^0 , caso contrário teríamos um caminho de τx_k para x_{k-1} com τx_k em Δ e x_{k-1} em Δ^0 , contradizendo a definição de Δ^0 . Então, x_{k-1} está em Δ^1 . Logo, por definição existe uma flecha $\tau x_k \rightarrow x_{k-1}$ em $\tilde{\Delta}$ e portanto existe um passeio de x_0 para τx_{k+j} em $\tilde{\Delta}$.

Portanto, se existe a flecha $x_{k-1} - x_k$ em Δ , temos que existe o passeio $x_0 - \dots - x_{k-1} - \tau x_k - \dots - \tau x_{k+j}$ em $\tilde{\Delta}$.

Como x_{k+j+1} está em $\Delta^0 \cup \Delta^1$, vamos mostrar que existe um passeio de x_0 para x_{k+j+1} em $\tilde{\Delta}$. Primeiramente observamos que ou existe uma flecha $x_{k+j} \rightarrow x_{k+j+1}$ em Δ ou existe uma flecha $x_{k+j+1} \rightarrow x_{k+j}$ em Δ .

Vamos supor que existe a flecha $x_{k+j} \rightarrow x_{k+j+1}$. Neste caso, podemos dizer que x_{k+j+1} está em Δ^1 pois caso contrário, contraria a definição de Δ^0 . Assim, existe uma flecha de $\tau x_{k+j} \rightarrow x_{k+j+1}$ em $\tilde{\Delta}$ e portanto existirá o passeio de x_0 para x_{k+j+1} em $\tilde{\Delta}$. No caso de existir a flecha $x_{k+j+1} \rightarrow x_{k+j}$, então existirá a flecha $\tau x_{k+j} \rightarrow x_{k+j+1}$ em Δ . Como x_{k+j+1} está em $\Delta^0 \cup \Delta^1$, então se x_{k+j+1} estiver em Δ^0 , teremos uma flecha de τx_{k+j} para x_{k+j+1} em $\tilde{\Delta}$. Se x_{k+j+1} estiver em Δ^1 , então existirá uma flecha $x_{k+j+1} \rightarrow \tau x_{k+j}$ em $\tilde{\Delta}$. Portanto existirá um passeio de x_0 para x_{k+j+1} em $\tilde{\Delta}$.

Provamos assim que se o passeio $x_k \cdots x_{k+j}$ está em Δ^2 e x_{k+j+1} está em $\Delta^0 \cup \Delta^1$, então existirá um passeio de x_0 para x_{k+j+1} em $\tilde{\Delta}$. Neste caso, podemos dizer que existe um passeio de x_0 para x_{k+j+1} em $\tilde{\Delta}$. Repetindo o procedimento, podemos concluir que existirá um passeio de x_0 para x_r em $\tilde{\Delta}$. ■

Lema 4.40 *Se (Γ, τ) for um quiver translação com seção dupla Δ e $\tilde{\Delta}$ for o quiver modificado de Δ , então $\tilde{\Delta} \cap \mathcal{O} \neq \emptyset$ para toda órbita \mathcal{O} de Γ .*

Demonstração: Por definição, $(\tilde{\Delta})_0 = \Delta^0 \dot{\cup} \Delta^1$. Sabemos que $\Delta \cap \mathcal{O} \neq \emptyset$ para cada τ -órbita \mathcal{O} de Γ e os únicos vértices de Δ que não estão em $\tilde{\Delta}$ são os vértices de Δ^2 . Como para cada vértice x de uma órbita \mathcal{O} de Γ que está em Δ^2 existe um vértice τx em Δ^0 , segue que esta órbita \mathcal{O} encontra $\tilde{\Delta}$. ■

No exemplo seguinte, estamos supondo que (Γ, τ) tem a propriedade IGP. Esta hipótese é necessária, como podemos ver pelo Exemplo (4.5).

Lema 4.41 *Se (Γ, τ) for um quiver translação com seção dupla Δ e com a propriedade IGP, então $|\tilde{\Delta} \cap \mathcal{O}| = 1$ para cada τ -órbita \mathcal{O} de Γ .*

Demonstração: Temos que $(\tilde{\Delta})_0 = \Delta^0 \dot{\cup} \Delta^1$. Como $|\tilde{\Delta} \cap \mathcal{O}| \neq \emptyset$ segue que $(\Delta^0 \dot{\cup} \Delta^1) \cap \mathcal{O} \neq \emptyset$. Neste caso, $(\Delta^0 \cap \mathcal{O}) \dot{\cup} (\Delta^1 \cap \mathcal{O}) \neq \emptyset$ implicando que $(\Delta^0 \cap \mathcal{O}) \neq \emptyset$ ou $\Delta^1 \cap \mathcal{O} \neq \emptyset$. Se $\Delta^0 \cap \mathcal{O} \neq \emptyset$ segue da definição de Δ^0 que $|\Delta^0 \cap \mathcal{O}| = 1$.

Se $\Delta^1 \cap \mathcal{O} \neq \emptyset$ provemos que $|\Delta^1 \cap \mathcal{O}| = 1$. De fato, se $|\Delta^1 \cap \mathcal{O}| = 2$ então existe $x \in \Gamma$ tal que $\Delta^1 \cap \mathcal{O} = \{\tau x, x\}$. Como $\tau x \in \Delta^1$, segue que existe $y \in \Delta$ tal que existe um caminho de $\tau^{-1}y \rightsquigarrow \tau x$ em Γ . Assim pelo item (4) da Definição (4.2) segue que existe um caminho seccional de um vértice injetivo i em Γ para y e um caminho seccional de x para um vértice projetivo p . Logo temos o caminho $i \rightsquigarrow y \rightsquigarrow \tau^{-1}y \rightsquigarrow \tau x \rightsquigarrow x \rightsquigarrow p$ em Γ com dois ganchos não consecutivos. Assim temos uma contradição. Portanto $|\Delta^1 \cap \mathcal{O}| = 1$.

Agora provemos que $\Delta^0 \cap \mathcal{O} \neq \emptyset$ se, e somente se, $\Delta^1 \cap \mathcal{O} = \emptyset$. Se $\Delta^0 \cap \mathcal{O} \neq \emptyset$ e $\Delta^1 \cap \mathcal{O} \neq \emptyset$ então pelo Lema (4.19), como $\Delta^0 \cap \Delta^1 = \emptyset$ segue que $|\Delta \cap \mathcal{O}| = 2$ pois Δ

é seção dupla. Logo existe um vértice x em Γ tal que $(\Delta^0 \cap \mathcal{O}) \cup (\Delta^1 \cap \mathcal{O}) = \{\tau x, x\}$. Podemos dizer que τx está em Δ^0 pois se $\tau x \in \Delta^1$, segue que existe um caminho de τ^-y para τx com $y \in \Delta$. Pelo argumento dado acima, segue que teremos um caminho de um vértice injetivo para um vértice projetivo com dois ganchos não consecutivos. Segue daí que $x \in \Delta^2$. Como por hipótese $\Delta^1 \cap \mathcal{O} \neq \emptyset$ e sabemos que $\Delta^2 \cap \Delta^1 = \emptyset$ segue que $|\Delta \cap \mathcal{O}| > 2$. Portanto $|\Delta^1 \cap \mathcal{O}| = \emptyset$.

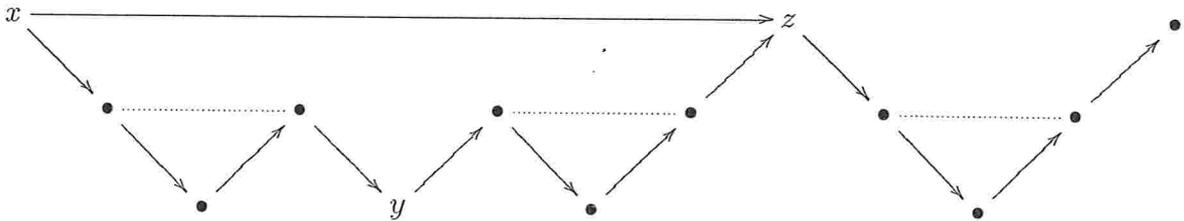
Reciprocamente, se $\Delta^1 \cap \mathcal{O} = \emptyset$, como $\Delta \cap \mathcal{O} \neq \emptyset$ para toda τ -órbita \mathcal{O} de Γ , seguirá que $(\Delta^0 \cup \Delta^2) \cap \mathcal{O} \neq \emptyset$. Então $\Delta^0 \cap \mathcal{O} \neq \emptyset$ ou $\Delta^2 \cap \mathcal{O} \neq \emptyset$. Se $\Delta^0 \cap \mathcal{O} \neq \emptyset$ não teremos mais nada para provar. Se $\Delta^2 \cap \mathcal{O} \neq \emptyset$ então pela definição de Δ^2 , seguirá que $\Delta^0 \cap \mathcal{O} \neq \emptyset$.

Em suma, provamos que toda órbita \mathcal{O} de Γ é tal que se $\Delta^j \cap \mathcal{O} \neq \emptyset$ então $|\Delta^j \cap \mathcal{O}| = 1$ para $j = 0, 1$ e $(\Delta^0 \cap \mathcal{O}) \neq \emptyset$, se e somente se, $(\Delta^1 \cap \mathcal{O}) = \emptyset$. Logo, ao tomarmos \mathcal{O} uma órbita de Γ , pelo Lema (4.40) temos que $\tilde{\Delta} \cap \mathcal{O} \neq \emptyset$ e então ou $(\Delta^0 \cap \mathcal{O}) \neq \emptyset$ ou $(\Delta^1 \cap \mathcal{O}) \neq \emptyset$. Se $(\Delta^0 \cap \mathcal{O}) \neq \emptyset$ segue que $(\Delta^1 \cap \mathcal{O}) = \emptyset$ e então $|\tilde{\Delta} \cap \mathcal{O}| = 1$. Se $\Delta^1 \cap \mathcal{O} \neq \emptyset$, então $\Delta^0 \cap \mathcal{O} = \emptyset$ e assim $|\tilde{\Delta} \cap \mathcal{O}| = 1$. ■

4.4 O mergulho

Nesta seção, (Γ, τ) é um quiver translação com uma seção dupla Δ . Para provar que (Γ, τ) está mergulhado num quiver $(\mathbb{Z}\tilde{\Delta}, \rho)$ vamos supor que Γ tem a propriedade IGP, pois um quiver translação com seção dupla, não necessariamente está mergulhado num quiver $\tilde{\Delta}$ como mostra o exemplo a seguir:

Exemplo 4.42 Podemos afirmar que um quiver translação que admite uma seção dupla não está necessariamente mergulhado num quiver $\mathbb{Z}\tilde{\Delta}$. Considere o quiver abaixo:



Este quiver é uma seção dupla, porém afirmamos e provamos a seguir que não existe mergulho de Γ em um quiver da forma $\mathbb{Z}\tilde{\Delta}$. Se existisse tal mergulho, poderíamos supor que o vértice x corresponderia a um vértice $(0, x)$ em $\mathbb{Z}\tilde{\Delta}$, enquanto que o vértice y corresponderá a um vértice $(1, y)$ em $\mathbb{Z}\tilde{\Delta}$ e z corresponderá a um vértice $(2, z)$ em $\mathbb{Z}\tilde{\Delta}$. Para que houvesse o mergulho, deveria existir uma flecha de $(0, x)$ para $(2, z)$ em $\mathbb{Z}\tilde{\Delta}$ o que nunca ocorre pois as flechas em $\mathbb{Z}\tilde{\Delta}$ são da forma $(n, a) \rightarrow (n, b)$ e $(n, b) \rightarrow (n+1, a)$ para cada $n \in \mathbb{Z}$.

Seja (Γ, τ) um quiver translação próprio e conexo com uma seção dupla Δ e $\tilde{\Delta}$ o respectivo quiver modificado. Seja $(\mathbb{Z}\tilde{\Delta}, \rho)$ o quiver translação conforme definido no primeiro capítulo. Denotaremos os vértices de Δ e $\tilde{\Delta}$ por letras minúsculas. Como ρ é injetora, se $\rho(n, x) = (n-1, x)$, então $\rho^-(n-1, x) = (n, x)$ para cada $x \in \tilde{\Delta}$ e $n \in \mathbb{Z}$. Agora, podemos provar o Teorema (4.18).

Teorema Seja (Γ, τ) um quiver translação valorado, não semi-regular com uma seção dupla Δ e com a propriedade IGP. Então (Γ, τ) , pode ser mergulhado em um quiver $(\mathbb{Z}\tilde{\Delta}, \rho)$, onde $\tilde{\Delta}$ é o quiver modificado.

Demonstração: Para definir o mergulho $\iota : (\Gamma, \tau) \rightarrow (\mathbb{Z}\tilde{\Delta}, \rho)$, precisamos definir $\iota_0 : \Gamma_0 \rightarrow (\mathbb{Z}\tilde{\Delta})_0$ e $\iota_1 : \Gamma_1 \rightarrow (\mathbb{Z}\tilde{\Delta})_1$ tais que se $\alpha \in \Gamma_1$ for uma flecha de x para y com valoração (a, b) , então $\iota(\alpha) \in \mathbb{Z}\tilde{\Delta}$ será uma flecha de $\iota(x)$ para $\iota(y)$ com valoração (a, b) . Além disso, $\iota(\tau x) = \rho(\iota(x))$ para todo x não projetivo em Γ .

Primeiramente vamos definir ι sobre alguns vértices de Γ e estender tal definição para todos os vértices de Γ .

Se $x \in (\Delta^0)_0$, definimos $\iota(x) = (0, x)$, e se $x \in (\Delta^1)_0$, definimos $\iota(x) = (1, x)$. Seja x um vértice qualquer de Γ_0 . Pelo Lema (4.41) temos $|\mathcal{O}(x) \cap \tilde{\Delta}| = 1$. Então, ou $|\mathcal{O}(x) \cap (\Delta^0)_0| = 1$ e $|\mathcal{O}(x) \cap (\Delta^1)_0| = 0$ ou, $|\mathcal{O}(x) \cap (\Delta^1)_0| = 1$ e $|\mathcal{O}(x) \cap (\Delta^0)_0| = 0$. No primeiro caso em que $|\mathcal{O}(x) \cap (\Delta^0)_0| = 1$, podemos dizer que $x = \tau^l y$ para algum $y \in \Delta^0$ e algum inteiro l . Dessa forma, $\iota(x) = (-l, y)$. No segundo caso em que $|\mathcal{O}(x) \cap (\Delta^1)_0| = 1$, temos $x = \tau^l y$ para algum $y \in \Delta^1$ e algum inteiro l . Neste caso, $\iota(x) = \iota(\tau^l y) = (-l + 1, y)$. Dessa forma, definimos $\iota_0 : \Gamma_0 \rightarrow (\mathbb{Z}\tilde{\Delta})_0$.

Agora definiremos $\iota_1 : \Gamma_1 \rightarrow (\mathbb{Z}\tilde{\Delta})_1$. Será fácil ver que se $x \rightarrow y$ for uma flecha com valoração (a, b) em Γ , então $\iota_1(\alpha)$ será uma flecha com valoração (a, b) em $\mathbb{Z}\tilde{\Delta}$. Considere $x \rightarrow y$ uma flecha qualquer de Γ . Como Δ é uma seção dupla, logo $\mathcal{O}(x) \cap \Delta \neq \emptyset$ e $\mathcal{O}(y) \cap \Delta \neq \emptyset$. Então, existem u e v em Δ tais que $x = \tau^n u$ e $y = \tau^m v$ para m e n inteiros. Vamos dividir em cinco casos. No caso (I) vamos supor $n = 0$ e no caso (II) vamos supor $m = 0$.

Caso (I): Se $n = 0$, teremos a flecha $x = u \rightarrow \tau^m v$ em Γ com $u, v \in \Delta$. Vamos analisar os casos (i) $m \geq 0$ e (ii) $m < 0$.

(i) Suponhamos que $m \geq 0$. Então existe o caminho $u \rightarrow \tau^m v \rightarrow \dots \rightarrow v$ em Γ com $u, v \in \Delta$. Como Δ é convexo, logo o caminho está em Δ . Porém $1 \leq |\Delta \cap \mathcal{O}| \leq 2$ o que acarreta $m = 0$ ou $m = 1$. Vamos discutir cada um desses casos: (a₁) se $m = 0$ e (a₂) se $m = 1$.

(a₁) Se $m = 0$, então teremos que a flecha $x \rightarrow y$ é da forma $x = u \rightarrow y = v$ com $u, v \in \Delta$. Precisamos analisar os seguintes casos:

- $a_{11}) u, v \in \Delta^0.$
 $a_{12}) u, v \in \Delta^1.$
 $a_{13}) u \in \Delta^0, v \in \Delta^1.$
 $a_{14}) u \in \Delta^0, v \in \Delta^2.$
 $a_{15}) u \in \Delta^1, v \in \Delta^0.$
 $a_{16}) u \in \Delta^1, v \in \Delta^2.$
 $a_{17}) u \in \Delta^2, v \in \Delta^1.$
 $a_{18}) u \in \Delta^2, v \in \Delta^2.$
 $a_{19}) u \in \Delta^2, v \in \Delta^0.$

Da existência da flecha $u \rightarrow v$ com $u, v \in \Delta$, segue do Lema (4.20) que os casos a_{15} e a_{19} são impossíveis.

$a_{11})$ Se $u, v \in \Delta^0$, então $x = u \rightarrow y = v$ é uma flecha em Γ e $\iota(x \rightarrow y) = (0, u) \rightarrow (0, v)$.

$a_{12})$ Se $u, v \in \Delta^1$, então $\iota(x \rightarrow y) = (1, u) \rightarrow (1, v)$.

$a_{13})$ Se $u \in \Delta^0, v \in \Delta^1$, então existe a flecha $v \rightarrow u$ em $\tilde{\Delta}$ e então $\iota(x \rightarrow y) = (0, u) \rightarrow (1, v)$.

$a_{14})$ Se $u \in \Delta^0$ e $v \in \Delta^2$, então $z = \tau v \in \Delta^0$ e então temos $\iota(z) = (0, z)$ e $\iota(v) = \iota(\tau^- z) = \rho(\iota(z)) = (1, z)$ e finalmente podemos dizer $\iota(x \rightarrow y) = (0, u) \rightarrow (1, z)$.

$a_{16})$ Se $u \in \Delta^1, v \in \Delta^2$, como em (a_{14}) , então $\iota(v) = (1, z)$ e $\iota(x \rightarrow y) = (1, u) \rightarrow (1, z)$ onde $z = \tau v \in \Delta^0$.

$a_{17})$ Se $u \in \Delta^2$ e $v \in \Delta^1$ então podemos dizer que $z = \tau u \in \Delta^0$ e $\iota(u) = \iota(\tau^- z) = \rho^-(\iota(z)) = \rho^-(0, z) = (1, z)$. Portanto $\iota(x \rightarrow y) = \iota(x) \rightarrow \iota(y) = (1, z) \rightarrow (1, v)$.

$a_{18})$ Se $u \in \Delta^2$ e $v \in \Delta^2$, então $z = \tau u \in \Delta^0$ e $w = \tau v \in \Delta^0$. Logo $\iota(u) = (1, z)$ e $\iota(v) = (1, w)$. Portanto $\iota(x \rightarrow y) = (1, z) \rightarrow (1, w)$.

(a_2) Suponhamos que $m = 1$, logo temos a flecha $x = u \rightarrow y = \tau v$, com $u, v \in \Delta$. Segue do Lema (4.21) que $u \in \Delta^0$ e $v \in \Delta^2$.

Segue que $z = \tau v \in \Delta^0$ e portanto $v \in \Delta^2$. Então $\iota(u) = (0, u)$ e $\iota(\tau v) = \iota(z) = (0, z)$. Assim $\iota(u \rightarrow \tau v) = (0, u) \rightarrow (0, z)$.

(ii) Se $m < 0$, então $m + 1 \leq 0$ com $u \rightarrow \tau^m v$ uma flecha em Γ e $u, v \in \Delta$. Assim, temos o caminho $v \rightsquigarrow \tau^{m+1} v \rightarrow u$. Pelo Lema (4.21) segue que $m + 1 = 0$ ou $m + 1 = -1$. Vamos analisar estes dois casos, isto é, $(b_1)m = -1$ e $(b_2)m = -2$.

$b_1)$ Temos a flecha $x = u \rightarrow y = \tau^- v$ com $v \rightarrow u$ uma flecha em Γ com $u, v \in \Delta$. Precisamos analisar cada um dos casos a seguir:

- $b_{11}) u, v \in \Delta^0.$
 $b_{12}) u, v \in \Delta^1.$

- $b_{13}) u \in \Delta^0, v \in \Delta^1.$
 $b_{14}) u \in \Delta^0, v \in \Delta^2.$
 $b_{15}) u \in \Delta^1, v \in \Delta^0.$
 $b_{16}) u \in \Delta^1, v \in \Delta^2.$
 $b_{17}) u \in \Delta^2, v \in \Delta^1.$
 $b_{18}) u \in \Delta^2, v \in \Delta^2.$
 $b_{19}) u \in \Delta^2, v \in \Delta^0.$

Pelo Lema (4.20) e pela existência da flecha $v \rightarrow u \in \Gamma$, segue que os casos b_{13} e b_{14} não ocorrem.

$b_{11})$ Neste caso, $\iota(u) = (0, u)$ e $\iota(v) = (0, v)$ e $\iota(x = u \rightarrow y = \tau^{-1}v) = \iota(u) \rightarrow \iota(\tau^{-1}v) = (0, u) \rightarrow \rho^{-1}(\iota(v)) = (0, u) \rightarrow (1, v)$.

$b_{12})$ Se $u, v \in \Delta^1$, então $\iota(x \rightarrow y) = \iota(u) \rightarrow \iota(\tau^{-1}v) = (1, u) \rightarrow \rho^{-1}(\iota(v)) = (1, u) \rightarrow (2, v)$.

$b_{15})$ Se $u \in \Delta^1, v \in \Delta^0$, então $\iota(u) = (1, u), \iota(v) = (0, v)$ e então $\iota(u \rightarrow \tau^{-1}v) = (1, u) \rightarrow \rho^{-1}(0, v) = (1, u) \rightarrow (1, v)$.

$b_{16})$ Se $u \in \Delta^1, v \in \Delta^2$, então $\iota(u) = (1, u)$ e $z = \tau v \in \Delta^0$. Logo $\iota(z) = (0, z)$ e $\iota(v) = \iota(\tau^{-1}z) = \rho^{-1}(\iota(z)) = (1, z)$ e $\iota(\tau^{-1}v) = \rho^{-1}(\iota(v)) = \rho^{-1}(1, z) = (2, z)$. Portanto, $\iota(x = u \rightarrow \tau^{-1}v) = \iota(u) \rightarrow \iota(\tau^{-1}v) = (1, u) \rightarrow (2, z)$.

$b_{17})$ Se $u \in \Delta^2, v \in \Delta^1$ e existe a flecha $x = u \rightarrow y = \tau^{-1}v$, então $z = \tau u \in \Delta^0$. Logo $\iota(u) = \iota(\tau^{-1}z) = \rho^{-1}(\iota(z)) = (1, z)$ e $\iota(\tau^{-1}v) = \rho^{-1}(\iota(v)) = (2, v)$. Temos $z = \tau u \rightarrow v$, com $\tau u \in \Delta^0$ e $v \in \Delta^1$. Então existe a flecha $v \rightarrow z$ em $\tilde{\Delta}$. Logo a flecha $\iota(x = u \rightarrow y = \tau^{-1}v) = (1, z) \rightarrow (2, v)$.

$b_{18})$ Se $u \in \Delta^2, v \in \Delta^2$ e existe a flecha $x = u \rightarrow y = \tau^{-1}v$, então $z = \tau u \in \Delta^0$ e $w = \tau v \in \Delta^0$. Assim, podemos dizer que $\iota(u) = \iota(\tau^{-1}z) = \rho^{-1}(\iota(z)) = (1, z)$ bem como $\iota(v) = (1, w)$. Assim, existe uma flecha $w \rightarrow z$ em Δ^0 já que existe a flecha $u \rightarrow \tau^{-1}v$. Logo $\iota(\tau^{-1}v) = (2, w)$ e $\iota(x = u \rightarrow y = \tau^{-1}v) = (1, z) \rightarrow (2, w)$.

$b_{19})$ Se $u \in \Delta^2, v \in \Delta^0$ com a flecha $x = u \rightarrow \tau^{-1}v$ em Γ . Neste caso, $z = \tau u \in \Delta^0$ e podemos dizer que existe a flecha $z \rightarrow v$ em Δ^0 pois existe a flecha $u \rightarrow \tau^{-1}v$ em Γ com $\tau u = z$ e v em Δ^0 . Então $\iota(u) = (1, z), \iota(\tau^{-1}v) = (1, v)$ e $\iota(x = u \rightarrow \tau^{-1}v) = (1, z) \rightarrow (1, v)$.

$b_2)$ Agora vejamos o caso $m = -2$. Temos a flecha $x = u \rightarrow y = \tau^{-2}v$ com $u, v \in \Delta$ e temos as possibilidades:

- $b_{21}) u, v \in \Delta^0.$
 $b_{22}) u, v \in \Delta^1.$
 $b_{23}) u \in \Delta^0, v \in \Delta^1.$
 $b_{24}) u \in \Delta^0, v \in \Delta^2.$
 $b_{25}) u \in \Delta^1, v \in \Delta^0.$

- $b_{26}) u \in \Delta^1, v \in \Delta^2.$
 $b_{27}) u \in \Delta^2, v \in \Delta^1.$
 $b_{28}) u \in \Delta^2, v \in \Delta^2.$
 $b_{29}) u \in \Delta^2, v \in \Delta^0.$

Pelo Lema (4.21) podemos dizer que os casos b_{21}, b_{23} e b_{24} são impossíveis. Como existe um caminho $v \rightsquigarrow \tau^{-1}v \rightarrow u$ em Γ com $u, v \in \Delta$, segue do Lema (4.21) que $v \in \Delta^0$, logo os casos b_{22}, b_{26}, b_{27} e b_{28} não ocorrem.

b_{25}) Se $u \in \Delta^1, v \in \Delta^0$, então $\iota(u) = (1, u)$ e $\iota(v) = (0, v)$. Como existe a flecha $\tau^{-1}v \rightarrow u$ em Γ já que existe $u \rightarrow \tau^{-2}v$ e $\tau(\tau^{-1}v) \in \Delta^0$, então existe em $\tilde{\Delta}$ a flecha $v \rightarrow u$. Assim, $\iota(u \rightarrow \tau^{-2}v) = \iota(u) \rightarrow \iota(\tau^{-2}v) = (1, u) \rightarrow (2, v)$.

b_{29}) Seja $u \in \Delta^2, v \in \Delta^0$ e suponhamos que existe a flecha $u \rightarrow \tau^{-2}v$ em Γ . Como existe também a flecha $v \rightarrow \tau u$ em Γ com $v, \tau u = z \in \Delta^0$, logo $\iota(u \rightarrow \tau^{-2}v) = \iota(u) \rightarrow \iota(\tau^{-2}v) = \rho^{-}(\iota(z)) \rightarrow \rho^{-2}(\iota(v)) = (1, z) \rightarrow (2, v)$.

Caso (II): Se $m = 0$, temos a flecha $x = \tau^n u \rightarrow y = v$ em Γ com $u, v \in \Delta$. Vamos analisar os casos: *i*) $n > 0$ e *ii*) $n < 0$ pois o caso $n = 0$ já foi analisado em (I)(i)(a_1).

(i) Se $n > 0$ teremos o caminho $\tau^n u \rightarrow y = v \rightarrow \tau^{n-1}u \rightsquigarrow u$ em Γ . Podemos dizer que $n = 1$ ou $n = 2$ pois Δ é convexo e $|\Delta \cap \mathcal{O}| \leq 2$ para toda órbita \mathcal{O} de Γ . Então vamos discutir os casos (a_1) $n = 1$ e (a_2) $n = 2$.

(a_1) Se $n = 1$, então teremos a flecha $x = \tau u \rightarrow y = v$ em Γ com $u, v \in \Delta$. Logo temos que verificar os casos:

- $a_{11}) u, v \in \Delta^0.$
 $a_{12}) u, v \in \Delta^1.$
 $a_{13}) u \in \Delta^0, v \in \Delta^1.$
 $a_{14}) u \in \Delta^0, v \in \Delta^2.$
 $a_{15}) u \in \Delta^1, v \in \Delta^0.$
 $a_{16}) u \in \Delta^1, v \in \Delta^2.$
 $a_{17}) u \in \Delta^2, v \in \Delta^1.$
 $a_{18}) u \in \Delta^2, v \in \Delta^2.$
 $a_{19}) u \in \Delta^2, v \in \Delta^0.$

Como existe a flecha $v \rightarrow u$ em Γ , segue do Lema (4.20) que os casos a_{13} e a_{14} não ocorrem.

a_{11}) Se $u, v \in \Delta^0$ e $x = \tau u \rightarrow y = v$ for uma flecha em Γ , então temos que a flecha $v \rightarrow u$ está em Δ^0 . Portanto $\iota(x \rightarrow y) = \iota(\tau u) \rightarrow \iota(v) = \rho(\iota(u)) \rightarrow \iota(v) = (-1, u) \rightarrow (0, v)$.

a_{12}) Se $u, v \in \Delta^1$, então $\iota(x \rightarrow y) = \iota(\tau u) \rightarrow \iota(v) = \rho(\iota(u)) \rightarrow \iota(v) = (0, u) \rightarrow (1, v)$.

a_{15}) Se $u \in \Delta^1$ e $v \in \Delta^0$, então $\iota(u) = (1, u)$ e $\iota(v) = (0, v)$. Assim, temos a flecha $v \rightarrow u$ em Γ e a flecha $u \rightarrow v$ em $\tilde{\Delta}$. Logo $\iota(x \rightarrow y) = \iota(\tau u) \rightarrow \iota(v) = \rho(\iota(u)) \rightarrow \iota(v) = (0, u) \rightarrow (0, v)$.

a_{16}) Se $u \in \Delta^1$ e $v \in \Delta^2$, então $z = \tau v \in \Delta^0$ e $\iota(u) = (1, u)$ e $\iota(v) = \rho^-(\iota(z)) = (1, z)$. Portanto $\iota(x \rightarrow y) = \iota(\tau u) \rightarrow \iota(v) = \rho(\iota(u)) \rightarrow \iota(v) = (0, u) \rightarrow (1, z)$.

a_{17}) Se $u \in \Delta^2$ e $v \in \Delta^1$, então $z = \tau u \in \Delta^0$ e temos a flecha $\tau u \rightarrow v$ em Γ com $\tau u \in \Delta^0$ e $v \in \Delta^1$. Assim, existe a flecha $v \rightarrow \tau u$ em $\tilde{\Delta}$. Portanto $\iota(\tau u) = (0, z)$ e $\iota(\tau u \rightarrow v) = (0, z) \rightarrow (1, v)$.

a_{18}) Se $u \in \Delta^2$ e $v \in \Delta^2$, então $z = \tau u \in \Delta^0$ e $w = \tau v \in \Delta^0$. Assim $\iota(x \rightarrow y) = \iota(\tau u) \rightarrow \iota(v) = \rho(\iota(u)) \rightarrow \iota(v) = \rho(\iota(\tau^-z)) \rightarrow \iota(\tau^-w) = \rho(\rho^-(\iota(z))) \rightarrow \rho^-(\iota(w)) = (0, z) \rightarrow (1, w)$.

a_{19}) Se $u \in \Delta^2$ e $v \in \Delta^0$, então $z = \tau u \in \Delta^0$ e $\iota(x \rightarrow y) = \iota(\tau u) \rightarrow \iota(v) = (0, z) \rightarrow (0, v)$.

(a_2) Se $n = 2$, então temos a flecha $x = \tau^2 u \rightarrow y = v$ em Γ com $u, v \in \Delta$. Vamos analisar também os casos

a_{21}) $u, v \in \Delta^0$.

a_{22}) $u, v \in \Delta^1$.

a_{23}) $u \in \Delta^0, v \in \Delta^1$.

a_{24}) $u \in \Delta^0, v \in \Delta^2$.

a_{25}) $u \in \Delta^1, v \in \Delta^0$.

a_{26}) $u \in \Delta^1, v \in \Delta^2$.

a_{27}) $u \in \Delta^2, v \in \Delta^1$.

a_{28}) $u \in \Delta^2, v \in \Delta^2$.

a_{29}) $u \in \Delta^2, v \in \Delta^0$.

Como existe o caminho $v \rightarrow \tau u \rightsquigarrow u$, pelo Lema (4.20), os casos a_{21}, a_{23}, a_{24} e a_{28} não ocorrem. Pelo Lema (4.21), os casos a_{22} e a_{26} também não ocorrem.

a_{25}) Se $u \in \Delta^1$ e $v \in \Delta^0$, então $\iota(u) = (1, u)$ e $\iota(v) = (0, v)$ e $\iota(x = \tau^2 u \rightarrow y = v) = \rho^2(\iota(u)) \rightarrow \iota(v) = (-1, u) \rightarrow (0, v)$.

a_{29}) Se $u \in \Delta^2$ e $v \in \Delta^0$, então $\iota(\tau u = z) = (0, z)$, $\iota(\tau^2 u) = \rho(\iota(\tau u)) = (-1, z)$ e $\iota(x \rightarrow y) = (-1, z) \rightarrow (0, v)$.

Se $m > 0$ e $n > 0$ então temos a flecha $x = \tau^n u \rightarrow y = \tau^m v$ em Γ com $u, v \in \Delta$. Então temos a flecha: (III) $u \rightarrow \tau^{m-n} v \in \Gamma$ se $m \geq n$ ou (IV) $\tau^{n-m} u \rightarrow v \in \Gamma$ se $n > m$.

Caso (III): Temos $m - n \geq 0$ e então estamos nas mesmas condições do caso (I)(i). Logo temos os casos (I)(i)(a_1) e (I)(i)(a_2) onde $m - n = 0$ e $m - n = 1$ respectivamente.

No caso (I)(i)(a_1) vimos ser possível apenas os casos $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{16}, a_{17}$ e a_{18} . Então vejamos qual a imagem $\iota(x \rightarrow y)$ em cada um desses casos com $m = n$.

a_{11}) Temos $\iota(x \rightarrow y) = \rho^n(\iota(u)) \rightarrow \rho^m(\iota(v)) = (-n, u) \rightarrow (-m, v)$.

a_{12}) $\iota(x \rightarrow y) = \rho^n(\iota(u)) \rightarrow \rho^m(\iota(v)) = (-n + 1, u) \rightarrow (-m + 1, v)$.

a_{13}) $\iota(x \rightarrow y) = (-n, u) \rightarrow (-m + 1, v)$.

a_{14}) $\iota(x \rightarrow y) = (-n, u) \rightarrow (-m + 1, z)$ onde $z = \tau v \in \Delta^0$.

a_{16}) $\iota(x \rightarrow y) = (-n + 1, u) \rightarrow (-m + 1, z)$ onde $z = \tau v \in \Delta^0$.

a_{17}) $\iota(x \rightarrow y) = \iota(\tau^n u) \rightarrow \iota(\tau^m v) = \rho^n(\iota(u)) \rightarrow \rho^m(\iota(v)) = (-n + 1, z) \rightarrow (-m + 1, v)$ onde $z = \tau u \in \Delta^0$.

a_{18}) $\iota(x \rightarrow y) = (-n + 1, z) \rightarrow (-m + 1, w)$ onde $z = \tau u \in \Delta^0$ e $w = \tau v \in \Delta^0$.

Quanto ao caso $(I)(i)(a_2)$ com $m - n = 1$ vimos que temos apenas uma possibilidade, isto é, a flecha $x = u \rightarrow y = \tau v$ com $u \in \Delta^0$ e $v \in \Delta^2$. Então $\iota(u \rightarrow \tau v) = (0, u) \rightarrow (0, z)$ com $z = \tau v \in \Delta^0$. Logo $\iota(x \rightarrow y) = \rho^n(\iota(u)) \rightarrow \rho^m(\iota(v)) = (-n, u) \rightarrow (-m, z)$ com $z = \tau v \in \Delta^0$.

Caso (IV) : Como $n > m$, logo $n - m > 0$ e então temos os casos $(II)(i)(a_1)$ e $(II)(i)(a_2)$ onde $n - m = 1$ e $n - m = 2$ respectivamente. No primeiro caso vimos ser possível apenas os itens $a_{11}, a_{12}, a_{15}, a_{16}, a_{17}, a_{18}$ e a_{19} . Vejamos cada um desses casos.

a_{11}) Se $\iota(\tau u \rightarrow v) = (-1, u) \rightarrow (0, v)$, então $\iota(x \rightarrow y) = \iota(\tau^n u \rightarrow \tau^m v) = \iota(\tau^{m+1} u \rightarrow \tau^m v) = \rho^m(\iota(\tau)) \rightarrow \rho^m(\iota(v)) = (-1 - m, u) \rightarrow (-m, v) = (-n, u) \rightarrow (-m, v)$.

a_{12}) Se $\iota(\tau u \rightarrow v) = (0, u) \rightarrow (1, v)$, então $\iota(x \rightarrow y) = (-m, u) \rightarrow (-m + 1, v) = (-n + 1, u) \rightarrow (-m + 1, v)$.

a_{15}) Se $\iota(\tau u \rightarrow v) = (0, u) \rightarrow (0, v)$, então $\iota(x \rightarrow y) = (-m, u) \rightarrow (-m, v) = (-n + 1, u) \rightarrow (-m, v)$.

a_{16}) Se $\iota(\tau u \rightarrow v) = (0, u) \rightarrow (1, z)$ onde $z = \tau v \in \Delta^0$, então $\iota(x \rightarrow y) = (-m, u) \rightarrow (-m + 1, z) = (-n + 1, u) \rightarrow (-m + 1, z)$ onde $z = \tau v \in \Delta^0$.

a_{17}) Se $\iota(\tau u \rightarrow v) = (0, z) \rightarrow (1, v)$ onde $z = \tau u \in \Delta^0$, então $\iota(x \rightarrow y) = (-m, z) \rightarrow (-m + 1, v) = (-n + 1, z) \rightarrow (-m + 1, v)$ onde $z = \tau u \in \Delta^0$.

a_{18}) Se $\iota(\tau u \rightarrow v) = (0, z) \rightarrow (1, w)$ onde $z = \tau u \in \Delta^0$ e $w = \tau v \in \Delta^0$, então $\iota(x \rightarrow y) = (-m, z) \rightarrow (-m + 1, w) = (-n + 1, z) \rightarrow (-m + 1, w)$ com $z = \tau u, w = \tau v \in \Delta^0$.

a_{19}) Se $\iota(\tau u \rightarrow v) = (0, z) \rightarrow (0, v)$ com $z = \tau u \in \Delta^0$, então $\iota(x \rightarrow y) = (-n + 1, z) \rightarrow (-m, v)$ com $z = \tau u \in \Delta^0$.

Agora vejamos o caso $(II)(i)(a_2)$. Para este caso vimos ser possível somente os itens a_{25} e a_{29} .

a_{25}) Se $\iota(\tau^2 u \rightarrow v) = (-1, u) \rightarrow (0, v)$, então $\iota(x \rightarrow y) = (\tau^n u \rightarrow \tau^m v) = \iota(\tau^{m+2} u) \rightarrow \iota(\tau^m v) = \rho^m(\iota(\tau^2 u)) \rightarrow \rho^m(\iota(v)) = (-m-1, u) \rightarrow (-m, v) = (-n+1, u) \rightarrow (-m, v)$.

a_{29}) Se $\iota(\tau^2 u \rightarrow v) = (-1, z) \rightarrow (0, v)$ onde $z = \tau u \in \Delta^0$, então $\iota(x \rightarrow y) = (-m-1, z) \rightarrow (-m, v) = (-n+1, z) \rightarrow (-m, v)$ onde $z = \tau u \in \Delta^0$.

Caso (V): Agora suponhamos que $m > 0$ e $n < 0$. Neste caso, temos o caminho $u \rightarrow \dots \rightarrow x = \tau^n u \rightarrow \tau^m v = y \rightarrow \dots \rightarrow v$ em Γ com $u, v \in \Delta$. Pelo Lema (4.21), tal caso não ocorre.

Caso (VI): Vejamos agora o caso $n > 0$ e $m < 0$. Temos assim o caminho $v \rightarrow \dots \rightarrow \tau^{m+1} v \rightarrow x = \tau^n u \rightarrow \tau^m v = y \rightarrow \dots \rightarrow u$ em Γ com $u, v \in \Delta$. Segue da convexidade de Δ que este caminho está em Δ . Como $1 \leq |\Delta \cap \mathcal{O}| \leq 2$ para toda órbita \mathcal{O} de Γ , segue que $n = 1$ e $m = -1$. Assim temos o caminho $v \rightarrow \tau u = x \rightarrow \tau^- v = y \rightarrow u$ em Γ . Podemos dizer que $v \in \Delta^0$. Quanto a u temos que $u \in \Delta^1$ ou $u \in \Delta^2$. Então $\iota(x = \tau u \rightarrow \tau^- v = y) = \rho(\iota(u)) \rightarrow \rho^-(\iota(v)) = (0, u) \rightarrow (1, v)$ se $u \in \Delta^1$ e $\iota(x \rightarrow y) = (0, z) \rightarrow (1, v)$ com $z = \tau u \in \Delta^0$ se $u \in \Delta^2$.

Provamos assim, que ao definir ι sobre os vértices e as flechas de Δ e estendendo sobre as outras flechas de Γ é possível se dizer qual a imagem de uma flecha α qualquer de Γ através da aplicação ι . Além disso, pela construção temos que ι é um morfismo entre quivers com translação.

Observe que ι está bem definida sobre os vértices de Γ pois Γ não possui vértices τ -periódicos. Podemos dizer também que ι é um mergulho. Provemos primeiramente que ι é injetora sobre o conjunto dos vértices. Se $\iota(x) = \iota(y)$ com $x, y \in \Gamma$, então temos que $x = \tau^n u$ para algum $u \in \Delta$ e $n \in \mathbb{Z}$ e $y = \tau^m v$ para algum $v \in \Delta$ e $m \in \mathbb{Z}$.

Se $u, v \in \Delta^0$, então $\iota(x) = \iota(\tau^n u) = \rho^n(\iota(u)) = (-n, u) = (-m, v) = \iota(y)$. Assim, $x = y$. Analogamente se $u, v \in \Delta^1$ e $u, v \in \Delta^2$.

Vamos supor que $u \in \Delta^0$ e $v \in \Delta^1$. Neste caso $\iota(x) = (-n, u) = (-m+1, v) = \iota(y)$. Portanto $u = v$ com $u \in \Delta^0$ e $v \in \Delta^1$ o que é contraditório.

Por último suponhamos que $u \in \Delta^0$ e $v \in \Delta^2$. Neste caso, $\tau v = z \in \Delta^0$ e $\iota(v) = \iota(\tau^- z) = \rho^-(\iota(z)) = (1, z)$ e então $\iota(x) = (-n, u) = (-m+1, z)$. Portanto $u = z = \tau v$ e $n = m-1$. Assim $x = \tau^n u = \tau^{n+1} v = \tau^m v = y$. Provamos assim que ι é injetora sobre os vértices.

Provemos agora que ι é injetora sobre as flechas de Γ . Se $\alpha = x \rightarrow y$ e $\beta = z \rightarrow w$ são flechas em Γ e $\iota(\alpha) = \iota(\beta)$, podemos dizer de forma geral que $\iota(\alpha) = (k_1, a) \rightarrow (k_2, b)$ e $\iota(\beta) = (l_1, c) \rightarrow (l_2, d)$. Se estas flechas são iguais em $\mathbb{Z}\tilde{\Delta}$, então $(k_1, a) = (l_1, c)$ e $(k_2, b) = (l_2, d)$, isto é, temos igualdades entre inteiros $k_1 = l_1$ e $k_2 = l_2$ e entre os vértices $a = c$ e $b = d$. Com uma análise semelhante a que fizemos acima para mostrar que os vértices x e y eram iguais, concluiremos que $\alpha = \beta$ e assim que ι é injetora sobre

o conjunto das flechas.

Finalmente, para concluir que ι é um mergulho, precisamos mostrar que ι é injetora sobre as órbitas de Γ , isto é, se $\mathcal{O}(x) \neq \mathcal{O}(y)$, então $\mathcal{O}(\iota(x)) \neq \mathcal{O}(\iota(y))$. Podemos dizer que isso é consequência direta da definição de $\tilde{\Delta}$ e ι pois a cada órbita $\mathcal{O}(x)$ em Γ , existe $u \in \tilde{\Delta}$ tal que $x = \tau^n u$, logo $\mathcal{O}(x) = \mathcal{O}(u)$. Analogamente, $\mathcal{O}(y) = \mathcal{O}(v)$ com $v \in \tilde{\Delta}$. Pela definição de ι , $\mathcal{O}(\iota(x)) \neq \mathcal{O}(\iota(y))$. ■

Seja A uma álgebra de Artin e Γ_A o quiver de Auslander-Reiten de A .

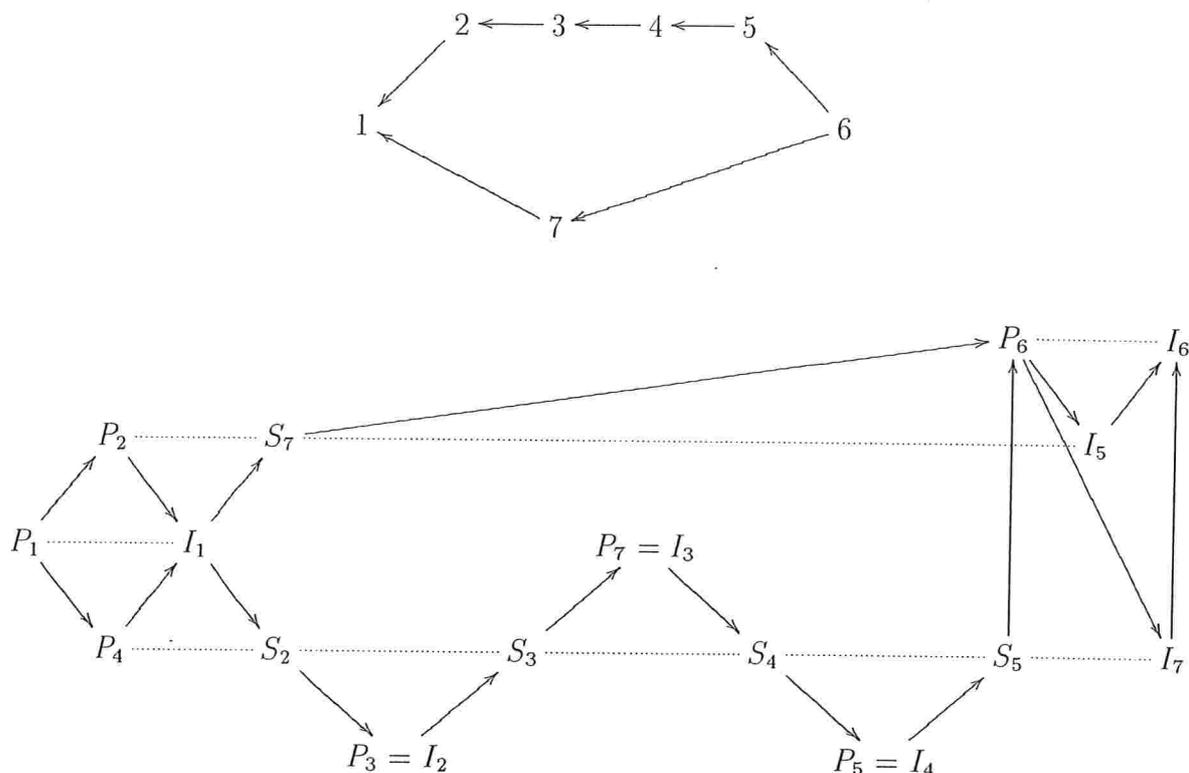
Com o Teorema (2.39) podemos dizer que as componentes não semi-regulares de uma álgebra quase-inclinada, estão mergulhadas em algum quiver $\mathbb{Z}\Delta$ e com o Teorema (4.18) generalizaremos este resultado, isto é, as componentes não semi-regulares de uma álgebra shod estrita também podem ser mergulhadas em algum quiver $\mathbb{Z}\Delta$. A seguir apresentaremos este resultado como consequência do teorema acima (Corolário (4.43)). Além disso, provaremos que nem toda álgebra fracamente shod pode ser mergulhada num quiver $\mathbb{Z}\Delta$ (Exemplo (4.44)). Apresentaremos também um exemplo de uma álgebra fracamente shod que pode ser mergulhada num quiver $\mathbb{Z}\Delta$ onde Δ possui um ciclo orientado.

Corolário 4.43 *Se A for uma álgebra shod e Γ for uma componente não semi-regular de Γ_A , então Γ pode ser mergulhada num quiver $\mathbb{Z}\tilde{\Delta}$.*

Demonstração: Pelo Teorema(4.7) temos que se A for uma álgebra shod estrita, então Γ_A possui uma componente \mathcal{C} com uma seção dupla Δ . Logo pelo Teorema (4.18), existe um quiver modificado $\tilde{\Delta}$, tal que a componente \mathcal{C} está mergulhada em $\mathbb{Z}\tilde{\Delta}$. ■

Pelo Teorema (4.18) vimos ser possível mergulhar num quiver $\mathbb{Z}\Delta$ as componentes não semi-regulares de álgebras shod (Corolário (4.43)). A pergunta natural a partir deste ponto é se as álgebras fracamente shod tem também esta propriedade. A resposta é que nem sempre isto ocorre. O Exemplo seguinte é de um quiver de Auslander-Reiten de uma álgebra fracamente shod que não é shod e que não pode ser mergulhado num quiver $\mathbb{Z}\Delta$. Em seguida apresentaremos um exemplo de uma álgebra fracamente shod que pode ser mergulhada num quiver $\mathbb{Z}\Delta$ onde Δ possui um ciclo orientado.

Exemplo 4.44 *Seja k um corpo algébricamente fechado e A uma k -álgebra com radical quadrado nulo e Γ_A o quiver de Auslander-Reiten de A dado abaixo:*



Agora, provemos que este quiver não pode ser mergulhado num quiver $\mathbb{Z}\Delta$. Suponhamos que existe $\iota : \Gamma_A \rightarrow \mathbb{Z}\Delta$, um mergulho para algum quiver Δ . Neste caso, $\iota(P_6) = (n, x)$ para algum n inteiro e para algum $x \in \Delta$. Logo existe uma flecha $y \rightarrow x$ ou $x \rightarrow y$ em Δ tal que $\iota(S_7 \rightarrow P_6) = (n, y) \rightarrow (n, x)$ ou $\iota(S_7 \rightarrow P_6) = (n-1, y) \rightarrow (n, x)$ respectivamente e existe uma flecha $z \rightarrow x$ ou $x \rightarrow z$ em Δ tal que $\iota(S_5 \rightarrow P_6) = (n, z) \rightarrow (n, x)$ ou $\iota(S_5 \rightarrow P_6) = (n-1, z) \rightarrow (n, x)$ respectivamente. Sendo assim, $\iota(S_5) = (n, z)$ ou $(n-1, z)$. Logo $\iota(S_2) = (n-3, z)$ ou $(n-4, z)$.

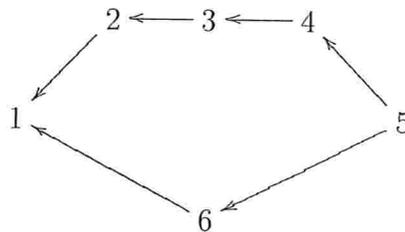
Como existe uma flecha $I_1 \rightarrow S_7$ e $\iota(S_7) = (n, y)$ ou $(n-1, y)$, logo existe uma flecha $a \rightarrow y$ ou $y \rightarrow a$ em Δ tal que $\iota(I_1 \rightarrow S_7) = (n, a) \rightarrow (n, y)$ ou $\iota(I_1 \rightarrow S_7) = (n-1, a) \rightarrow (n, y)$ se $\iota(S_7) = (n, y)$ ou ainda, $\iota(I_1 \rightarrow S_7) = (n-1, a) \rightarrow (n-1, y)$ ou $\iota(I_1 \rightarrow S_7) = (n-2, a) \rightarrow (n-1, y)$ se $\iota(S_7) = (n-1, y)$.

Sabemos que existe uma flecha $I_1 \rightarrow S_2$ e pela discussão acima, obtivemos que:

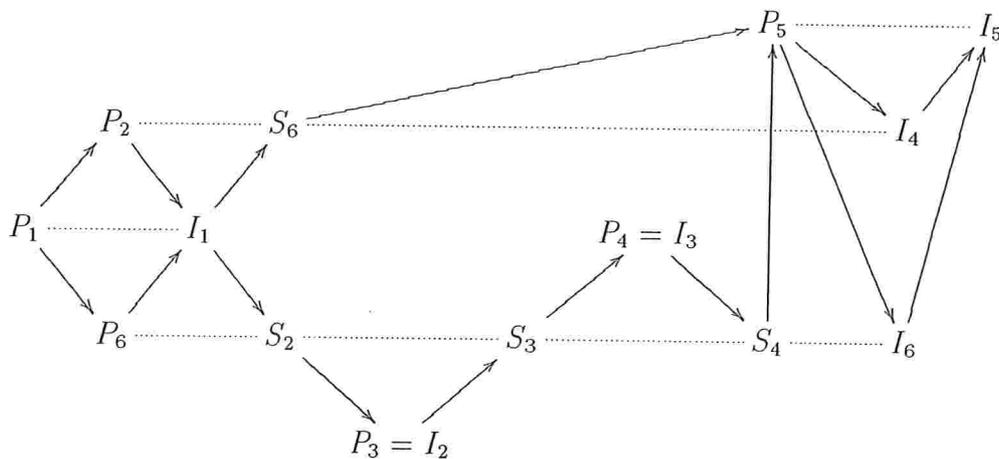
- (a) $\iota(I_1) = (n, a)$ se $\iota(S_7) = (n, y)$ e existe uma flecha $a \rightarrow y$ em Δ ou
- (b) $\iota(I_1) = (n-1, a)$ se $\iota(S_7) = (n, y)$ e existe uma flecha $y \rightarrow a$ em Δ ou
- (c) $\iota(I_1) = (n-1, a)$ se $\iota(S_7) = (n-1, y)$ e existe uma flecha $a \rightarrow y$ em Δ ou
- (d) $\iota(I_1) = (n-2, a)$ se $\iota(S_7) = (n-1, y)$ e existe uma flecha $y \rightarrow a$ em Δ .

Vamos verificar o que ocorre com $\iota(S_2)$. Se ocorrer (a), (b), (c) ou (d) temos uma contradição com a definição de $\mathbb{Z}\Delta$ pois em $\mathbb{Z}\Delta$ as flechas são da forma $(k, x) \rightarrow (m, y)$ com k e m inteiros, $x, y \in \Delta$ e $k = m$ ou $k = m - 1$ e se verificarmos cada uma das possíveis imagens de $\iota(I_1)$ em (a), (b), (c) e (d) veremos que é impossível existir flecha de $\iota(I_1)$ para $\iota(S_2)$ já que $\iota(S_2) = (n - 3, z)$ ou $(n - 4, z)$. Portanto não é possível existir mergulho de Γ_A num quíver $\mathbb{Z}\Delta$ para qualquer Δ .

Exemplo 4.45 Seja k um corpo e A a k -álgebra com radical quadrado nulo dada pelo quíver:

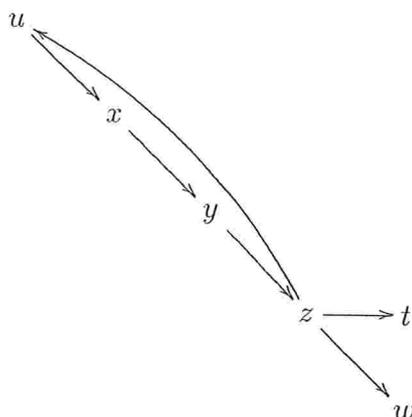


A seguir temos o quíver de Auslander-Reiten Γ_A :



Esta álgebra não é shod pois o caminho $I_1 \rightsquigarrow P_5$ tem dois ganchos não consecutivos, porém é uma álgebra fracamente shod.

Agora, considere o seguinte quíver Δ ,



e seu respectivo quiver translação $\mathbb{Z}\Delta$. Vamos definir um mergulho $\eta : (\Gamma_A, \tau) \rightarrow (\mathbb{Z}\Delta, \rho)$ da seguinte forma: $\eta(P_2) = (0, x), \eta(I_1) = (0, y), \eta(S_2) = (0, z), \eta(P_3 = I_2) = (0, w)$. Dessa forma podemos dizer que $\eta(P_1) = \eta(\tau I_1) = \rho(\eta(I_1)) = \rho(0, y) = (-1, y)$ e $\eta(\tau S_2) = \rho(\eta(S_2)) = \rho(0, z) = (-1, z)$. Logo $\eta(P_1 \rightarrow P_2) = (-1, y) \rightarrow (0, x)$, $\eta(P_2 \rightarrow I_1) = (0, x) \rightarrow (0, y)$, $\eta(I_1 \rightarrow S_2) = (0, y) \rightarrow (0, z)$, $\eta(P_1 \rightarrow P_3) = (-1, y) \rightarrow (-1, z)$, $\eta(S_2 \rightarrow P_3) = (0, z) \rightarrow (0, w)$. Como $\eta(S_3) = \eta(\tau^- S_2) = \rho^-(\eta(S_2)) = \rho^-(0, z) = (1, z)$ e então $\eta(P_3 \rightarrow S_3) = (0, w) \rightarrow (1, z)$.

Agora defino $\eta(P_4) = (1, t)$ e $\eta(S_3 \rightarrow P_4) = (1, z) \rightarrow (1, t)$. Assim, $\eta(S_4) = \eta(\tau^- S_3) = \rho^-(\eta(S_3)) = \rho^-((1, z)) = (2, z)$ e então $\eta(P_4 \rightarrow S_4) = (1, t) \rightarrow (2, z)$. Finalmente definimos $\eta(P_5) = (2, u)$ e então $\eta(S_6) = \eta(\tau^- P_2) = \rho^-(\eta(P_2)) = (1, x)$. Assim, $\eta(S_6 \rightarrow P_5) = (1, x) \rightarrow (2, u)$ e por fim, $\eta(S_4 \rightarrow P_5) = (2, z) \rightarrow (2, u)$, $\eta(P_5 \rightarrow I_6) = (2, u) \rightarrow (3, z)$, $\eta(P_5 \rightarrow I_4) = (2, u) \rightarrow (2, x)$, $\eta(I_4 \rightarrow I_5) = (2, x) \rightarrow (3, u)$, $\eta(I_6 \rightarrow I_5) = (3, z) \rightarrow (3, u)$. É fácil ver que η é um mergulho.

Referências Bibliográficas

- [AR75] M. Auslander and I. Reiten. Representation theory of Artin algebras III. *Comm. Algebra*, 3:239–294, 1975.
- [ARS97] M. Auslander, I. Reiten, and S. O. Smalø. *Representation theory of Artin algebras*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997. Corrected reprint of the 1995 original.
- [ASS] I. Assem, D. Simson, and A. Skowroński. Elements of representation theory of associative algebras. *preprint*.
- [Ass97] I. Assem. Algèbres et modules, cours et exercices. In *Enseignement des Mathématiques*, page 330 pages. Les Presses de l'Université d'Ottawa, Ottawa, 1997.
- [Aus74] M. Auslander. Representation theory of Artin algebras. I, II. *Comm. Algebra*, 1:177–268; *ibid.* 1 (1974), 269–310, 1974.
- [BB80] S. Brenner and M. C. R. Butler. Generalizations of the bernstein-gelfand-ponomarev reflection functors. In *Representation theory, II (Proc. Second Internat. Conf., Carleton Univ., Ottawa, Ont., 1979)*, pages 103–169. Springer, Berlin, 1980.
- [BGP73] I. N. Bernstein, I. M. Gelfand, and V. A. Ponomarev. Coxeter functors, and Gabriel's theorem. *Uspehi Mat. Nauk*, 28(2(170)):19–33, 1973.
- [BS83] R. Bautista and S. O. Smalø. Nonexistent cycles. *Comm. Algebra*, 11(16):1755–1767, 1983.
- [CL99] F. U. Coelho and M. A. Lanzilotta. Algebras with small homological dimensions. *Manuscripta Math.*, 100(1):1–11, 1999.
- [CL01a] F. U. Coelho and M.A. Lanzilotta. On non-semiregular components containing paths from injective to projective modules. *preprint*, 2001.

- [CL01b] F. U. Coelho and M.A. Lanzilotta. Weakly shod algebras. *preprint*, 2001.
- [Coe01] F. U. Coelho. Shod algebras. *Resenhas*, 5(1):25–61, 2001.
- [HPR80] D. Happel, U. Preiser, and C. M. Ringel. Vinberg's characterization of Dynkin diagrams using subadditive functions with application to D tr-periodic modules. In *Representation theory, II (Proc. Second Internat. Conf., Carleton Univ., Ottawa, Ont., 1979)*, pages 280–294. Springer, Berlin, 1980.
- [HR82] D. Happel and C. M. Ringel. Tilted algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 274(2):399–443, 1982.
- [HRS96] D. Happel, I. Reiten, and S. O. Smalø. Tilting in abelian categories and quasitilted algebras. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 120(575):viii+ 88, 1996.
- [Lan00] M.A. Lanzilotta. Álgebras shod. *Universidade de la Republica*, PhD's thesis:90 pp, 2000.
- [Li00] S. Li. The embedding of the components of the Auslander-Reiten quiver of an Artin algebra containing no oriented cycle. *Comm. Algebra*, 28(10):4635–4645, 2000.
- [Liu92] S. Liu. Degrees of irreducible maps and the shapes of Auslander-Reiten quivers. *J. London Math. Soc. (2)*, 45(1):32–54, 1992.
- [Liu93] S. Liu. Semi-stable components of an Auslander-Reiten quiver. *J. London Math. Soc. (2)*, 47(3):405–416, 1993.
- [Rin84] C. M. Ringel. *Tame algebras and integral quadratic forms*. Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [Roi68] A. V. Roiter. Unboundedness of the dimensions of the indecomposable representations of an algebra which has infinitely many indecomposable representations. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 32:1275–1282, 1968.
- [RS01] I. Reiten and A. Skowroński. Characterization of algebras with small homological dimension. *preprint*, 2001.
- [Zha91] Y. Zhang. The structure of stable components. *Canad. J. Math.*, 43(3):652–672, 1991.