Teoria de Conexões e Equações de Estrutura para Imersões Isométricas

André Teixeira Nobre Sardão

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM
MATEMÁTICA

Área de Concentração: **Geometria Diferencial**
Orientador: **Prof. Dr. Daniel Victor Tausk**

Durante a elaboração deste trabalho o autor recebeu apoio financeiro do CNPq

– São Paulo, abril de 2003 –

Teoria de Conexões e Equações de Estrutura para Imersões Isométricas

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por André Teixeira Nobre Sardão e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, abril de 2003.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Daniel Victor Tausk	IME - USP
Prof. Dr. Claudio Gorodski	IME - USP
Prof. Dr. Alcebíades Rigas	IMECC - UNICAMP

Agradecimentos

Gostaria de agradecer ao meu orientador Prof. Dr. Daniel Victor Tausk pela excelente orientação e pela sugestão do tema que deu origem a este trabalho.

Resumo

O objetivo desta dissertação é o de demonstrar uma generalização do Teorema Fundamental das Imersões Isométricas utilizando uma versão apropriada do Teorema de Frobenius e a teoria de conexões em fibrados principais e fibrados associados. O teorema principal da dissertação dá condições necessárias e suficientes para que exista uma imersão isométrica local de uma variedade Riemanniana (M, g) em uma variedade Riemanniana $(\overline{M}, \overline{g})$ (não necessariamente com curvatura seccional constante), com segunda forma fundamental e conexão normal prescritas.

Abstract

The goal of this thesis is to generalize the Fundamental Theorem of Isometric Immersions using a suitable version of the Frobenius Theorem and the theory of connections on principal fiber bundles and associated bundles. The main theorem of the thesis gives necessary and sufficient conditions for the existence of a local isometric immersion of a Riemannian manifold (M, g) into a Riemannian manifold $(\overline{M}, \overline{g})$ (not necessarily with constant sectional curvature), with prescribed second fundamental form and normal connection.

Sumário

Introdução vi

Capítulo 1. Variedades Diferenciáveis e o Teorema de Frobenius. 1
1. Introdução 1
2. Variedades Diferenciáveis e Formas Diferenciais 1
3. Ações de Grupos de Lie em Variedades 2
4. Fibrados 4
5. Teorema de Frobenius e Corolários 9

Capítulo 2. Teoria das Conexões 18
1. Introdução 18
2. Conexão em Fibrados Vetoriais 18
3. Conexão em Fibrados Principais 28
4. Conexão em um Fibrado Associado 29

Capítulo 3. Imersões Isométricas em Variedades de Curvatura Constante 34
1. Introdução 34
2. Relacionando Imersões Isométricas com Formas em Fibrados Principais 34
3. Grupos de Isometrias de $\mathbb{R}^n$, S^n e H^n. 39
4. Imersão em $\mathbb{R}^n$ 47
5. Imersão em S^n 51
6. Imersão em H^n 53

Capítulo 4. Imersões Isométricas em Variedades Riemannianas Arbitrárias. 55
1. Introdução. 55
2. O Teorema Fundamental 55

Referências Bibliográficas 58

Introdução

O objetivo desta dissertação é o de fazer uma recapitulação da teoria básica de conexões em fibrados principais e fibrados associados, aplicando tal teoria ao estudo de imersões isométricas de variedades Riemannianas. Em particular, usando uma versão apropriada do Teorema de Frobenius, obtêm-se um resultado que generaliza o Teorema Fundamental das Imersões Isométricas em Espaços de Curvatura Constante (vide [5,6]) e o Teorema de Cartan sobre a determinação da métrica por meio da curvatura (vide [2, Cap. 8]). Explicamos a seguir em linhas gerais alguns aspectos técnicos das idéias centrais da dissertação.

Seja $\pi : \xi \to M$ um fibrado vetorial sobre uma variedade diferenciável M e sejam $\xi^1, \xi^2 \subset \xi$ subfibrados vetoriais de ξ com $\xi = \xi^1 \oplus \xi^2$. Dada uma conexão ∇ em ξ, definimos:

$$\nabla^1_X s_1 = \pi_1(\nabla_X s_1), \quad \alpha_{12}(X, s_1) = \pi_2(\nabla_X s_1),$$
$$\nabla^2_X s_2 = \pi_2(\nabla_X s_2), \quad \alpha_{21}(X, s_2) = \pi_1(\nabla_X s_2),$$

onde X é um campo vetorial diferenciável em M, s_1 é uma seção diferenciável de ξ^1, s_2 é uma seção diferenciável de ξ^2 e $\pi_1 : \xi \to \xi^1$, $\pi_2 : \xi \to \xi^2$ denotam as projeções. É fácil ver que ∇^1 é uma conexão no fibrado vetorial ξ^1 e ∇^2 é uma conexão no fibrado vetorial ξ^2. Além do mais, α_{12} define uma seção diferenciável do fibrado tensorial $TM^* \otimes (\xi^1)^* \otimes \xi^2$ e α_{21} define uma seção diferenciável do fibrado tensorial $TM^* \otimes (\xi^2)^* \otimes \xi^1$, i.e., para todo $x \in M$, $\alpha_{12}(x) : T_xM \times \xi^1_x \to \xi^2_x$ e $\alpha_{21}(x) : T_xM \times \xi^2_x \to \xi^1_x$ são aplicações bilineares. Dizemos que ∇^1, ∇^2, α_{12} e α_{21} são as *componentes* de ∇ relativamente à decomposição $\xi = \xi^1 \oplus \xi^2$. Temos que, dadas conexões ∇^1, ∇^2 em ξ^1 e ξ^2, respectivamente, e dadas seções diferenciáveis α_{12} de $TM^* \otimes (\xi^1)^* \otimes \xi^2$ e α_{21} de $TM^* \otimes (\xi^2)^* \otimes \xi^1$ então existe uma única conexão ∇ em ξ cujas componentes são ∇^1, ∇^2, α_{12} e α_{21}.

Seja agora g uma estrutura Riemanniana em ξ, i.e., g é uma seção diferenciável de $\xi^* \otimes \xi^*$ tal que g_x é um produto interno em ξ_x, para todo $x \in M$. Suponha que os subfibrados ξ^1 e ξ^2 sejam g-ortogonais e denote por g^1, g^2 respectivamente as estruturas Riemannianas em ξ^1

e ξ^2 obtidas por restrição de g. Temos que a estrutura Riemanniana g é ∇-paralela se e somente se g^1 é ∇^1-paralela, g^2 é ∇^2-paralela e os tensores α_{12} e α_{21} são relacionados pela identidade:

$$g^2\big(\alpha_{12}(X, s_1), s_2\big) = -g^1\big(s_1, \alpha_{21}(X, s_2)\big). \tag{1}$$

Obviamente a identidade (1) determina o tensor α_{21} em termos de α_{12}; portanto, uma conexão ∇ tal que g é ∇-paralela fica determinada pelas conexões ∇^1, ∇^2 e pelo tensor α_{12}.

Sejam agora (M, g), $(\overline{M}, \overline{g})$ variedades Riemannianas e $f : M \to \overline{M}$ uma imersão isométrica. Consideramos o fibrado vetorial $f^*(T\overline{M})$ sobre M munido da estrutura Riemanniana $f^*(\overline{g})$ induzida por $\overline{g}$ e pela conexão $f^*\overline{\nabla}$ induzida pela conexão de Levi-Civita $\overline{\nabla}$ de $(\overline{M}, \overline{g})$; obviamente, a estrutura Riemanniana $f^*(\overline{g})$ é paralela com respeito à conexão $f^*\overline{\nabla}$. Identificando T_xM com $\mathrm{d}f_x(T_xM)$ para todo $x \in M$, obtemos uma decomposição em soma direta ortogonal $f^*(T\overline{M}) = TM \oplus f^\perp$, onde $f^\perp$ denota o fibrado normal da imersão isométrica f. As componentes de $f^*\overline{\nabla}$ relativamente à decomposição $f^*(T\overline{M}) = TM \oplus f^\perp$ são a conexão de Levi-Civita ∇ de (M, g), a conexão normal $\nabla^\perp$ da imersão isométrica f e a segunda forma fundamental α da imersão isométrica f, que é uma seção simétrica diferenciável de $TM^* \otimes TM^* \otimes f^\perp$.

Queremos agora responder à seguinte questão: dadas variedades Riemannianas (M, g), $(\overline{M}, \overline{g})$, quando é possível encontrar uma imersão isométrica $f : M \to \overline{M}$ com segunda forma fundamental α e conexão normal $\nabla^\perp$ prescritas? Mais precisamente, dados um fibrado vetorial $\pi : \xi \to M$ com $\dim(\xi) = \dim(\overline{M})$, uma conexão ∇^ξ em ξ, uma estrutura Riemanniana ∇^ξ-paralela g^ξ em ξ e uma seção simétrica diferenciável α_0 de $TM^* \otimes TM^* \otimes \xi$, quando é possível encontrar uma imersão isométrica $f : M \to \overline{M}$ e uma isometria $T : \xi \to f^\perp$ de fibrados vetoriais tal que T relacione a conexão ∇^ξ com a conexão normal $\nabla^\perp$ de f e o tensor α_0 com a segunda forma fundamental α de f? Para responder a essa questão, consideramos o fibrado vetorial $\overline{\xi} = TM \oplus \xi$. Seja $g^{\overline{\xi}}$ a estrutura Riemanniana em $\overline{\xi}$ que coincide com g em TM, coincide com g^ξ em ξ e tal que TM e ξ são $g^{\overline{\xi}}$-ortogonais. Seja $\widehat{\nabla}$ a conexão em $\overline{\xi}$ tal que $g^{\overline{\xi}}$ é $\widehat{\nabla}$-paralela e tal que suas componentes relativas à decomposição $\overline{\xi} = TM \oplus \xi$ são a conexão de Levi-Civita ∇ de (M, g), a conexão ∇^ξ de ξ e o tensor α_0. Dadas uma imersão isométrica $f : M \to \overline{M}$ e uma isometria $T : \xi \to f^\perp$, obtemos uma isometria $S : \overline{\xi} \to f^*(T\overline{M})$ fazendo $S|_{TM} = \mathrm{d}f$ e $S|_\xi = T$; temos que T relaciona ∇^ξ com $\nabla^\perp$ e α_0 com α se e somente se S relaciona a conexão $\widehat{\nabla}$ de $\overline{\xi}$ com a conexão $f^*\overline{\nabla}$ de $f^*(T\overline{M})$. Note também que, se

$f : M \to \overline{M}$ é uma aplicação diferenciável e $S : \overline{\xi} \to f^*(T\overline{M})$ é uma isometria que relaciona $\widehat{\nabla}$ com $f^*\overline{\nabla}$ e tal que $S|_{TM} = \mathrm{d}f$ então f é uma imersão isométrica e $T = S|_{\xi} : \xi \to f^{\perp}$ é uma isometria que relaciona ∇^{ξ} com $\nabla^{\perp}$ e α_0 com α.

Nosso problema agora então é decidir quando é possível encontrar uma aplicação diferenciável $f : M \to \overline{M}$ e uma isometria $S : \overline{\xi} \to f^*(T\overline{M})$ que relaciona $\widehat{\nabla}$ com $f^*\overline{\nabla}$. Obviamente, se $S : \overline{\xi} \to f^*(T\overline{M})$ é uma tal isometria então S também relaciona o tensor de curvatura $\widehat{R}$ de $\widehat{\nabla}$ com o tensor de curvatura $f^*\overline{R}$ de $f^*\overline{\nabla}$; mais explicitamente, temos:

$$(2) \qquad g^{\overline{\xi}}\big(\widehat{R}(X,Y)U,V\big) = \overline{g}\big(\overline{R}(S(X),S(Y))S(U),S(V)\big),$$

para quaisquer campos vetoriais diferenciáveis X, Y em M e quaisquer seções diferenciáveis U, V de $\overline{\xi}$, onde $\overline{R}$ denota o tensor de curvatura de $\overline{\nabla}$. O tensor de curvatura $\widehat{R}$ de $\widehat{\nabla}$ pode ser expresso em termos dos tensores de curvatura R e R^{ξ} de ∇ e ∇^{ξ} e do tensor α_0; explicitamente:

$$\begin{aligned} g^{\overline{\xi}}\big(\widehat{R}(X,Y)Z,T\big) &= g\big(R(X,Y)Z,T\big) + g^{\xi}\big(\alpha_0(Y,T),\alpha_0(X,Z)\big) \\ &\quad - g^{\xi}\big(\alpha_0(X,T),\alpha_0(Y,Z)\big), \\ g^{\overline{\xi}}\big(\widehat{R}(X,Y)Z,N\big) &= g^{\xi}\big((\nabla\alpha)(X,Y,Z) - (\nabla\alpha)(Y,X,Z),N\big), \\ g^{\overline{\xi}}\big(\widehat{R}(X,Y)N,N'\big) &= g^{\xi}\big(R^{\xi}(X,Y)N,N'\big) + g\big([A_{N'},A_N]X,Y\big), \end{aligned}$$

para quaisquer campos vetoriais diferenciáveis X, Y, Z, T em M e quaisquer seções diferenciáveis N, N' de ξ, onde $A_N : TM \to TM$ é o tensor definido por $g\big(A_N(X),Y\big) = g^{\xi}\big(\alpha(X,Y),N\big)$ e $[A_{N'},A_N] = A_{N'}A_N - A_NA_{N'}$.

Levando em conta as fórmulas acima para as várias componentes do tensor $\widehat{R}$, temos que a identidade (2) corresponde às *equações de estrutura de Gauss–Codazzi–Ricci*. Quando $(\overline{M},\overline{g})$ possui curvatura seccional constante e igual a c, a identidade (2) é equivalente a:

$$(3) \qquad g^{\overline{\xi}}\big(\widehat{R}(X,Y)U,V\big) = c\big[g^{\overline{\xi}}(Y,U)g^{\overline{\xi}}(X,V) - g^{\overline{\xi}}(X,U)g^{\overline{\xi}}(Y,V)\big],$$

para quaisquer campos vetoriais diferenciáveis X, Y em M e quaisquer seções diferenciáveis U, V de $\overline{\xi}$. Temos então que (3) é uma condição necessária para a existência de uma imersão isométrica $f : M \to \overline{M}$ e de uma isometria $T : \xi \to f^{\perp}$ que relaciona ∇^{ξ} com $\nabla^{\perp}$ e α_0 com α. O *Teorema Fundamental das Imersões Isométricas* (vide [5,6]) nos diz que a condição (3) também é "localmente suficiente" para a existência de f e T, i.e., se (3) é satisfeita então para todo $x \in M$ existem uma vizinhança aberta $U \subset M$ de x, uma imersão isométrica $f : U \to \overline{M}$ e uma isometria $T : \xi|_U \to f^{\perp}$ que relaciona ∇^{ξ} com $\nabla^{\perp}$ e α_0 com α.

O Teorema Fundamental das Imersões Isométricas será demonstrado no Capítulo 3 nos casos $\overline{M} = \mathbb{R}^n$, $\overline{M} = S^n$ e $\overline{M} = H^n$, utilizando um Corolário do Teorema de Frobenius que dá condições necessárias e suficientes para a existência (local) de uma aplicação $f : M \to G$ a valores num grupo de Lie G tal que $f^*\lambda = \tau$, onde λ denota a *forma de Maurer–Cartan* de G e τ é uma 1-forma em M a valores na álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G (vide Corolário 3). A idéia central da demonstração é a seguinte. Denote por $\mathrm{Ref}_{\mathrm{ort}}(\overline{\xi})$, $\mathrm{Ref}_{\mathrm{ort}}(T\overline{M})$ respectivamente os fibrados principais de referenciais ortonormais dos fibrados vetoriais $\overline{\xi}$ e $T\overline{M}$. Se $\mathfrak{s} : U \to \mathrm{Ref}_{\mathrm{ort}}(\overline{\xi})$ é uma seção diferenciável fixada de $\mathrm{Ref}_{\mathrm{ort}}(\overline{\xi})$ então o problema de encontrar uma aplicação diferenciável $f : U \to \overline{M}$ e uma isometria $S : \overline{\xi}|_U \to f^*(T\overline{M})$ é equivalente ao problema de encontrar uma aplicação $\tilde{f} : U \to \mathrm{Ref}_{\mathrm{ort}}(T\overline{M})$; mais explicitamente, para cada $x \in U$, tomamos $\tilde{f}(x)$ como sendo o referencial ortonormal de $T_{f(x)}\overline{M}$ obtido como imagem do referencial ortonormal $\mathfrak{s}(x)$ de $\overline{\xi}_x$ pela isometria $S_x : \overline{\xi}_x \to T_{f(x)}\overline{M}$. Denote por $\overline{\omega}$ a forma de conexão em $\mathrm{Ref}_{\mathrm{ort}}(T\overline{M})$ correspondente a $\overline{\nabla}$, por $\overline{\theta}$ a forma canônica de $\mathrm{Ref}_{\mathrm{ort}}(T\overline{M})$, por $\widehat{\omega}$ a forma de conexão de $\mathrm{Ref}_{\mathrm{ort}}(\overline{\xi})$ correspondente a $\widehat{\nabla}$ e por $\widehat{\theta}$ a forma canônica de $\mathrm{Ref}_{\mathrm{ort}}(\overline{\xi})$. Mostramos na Seção 2 do Capítulo 3 que a condição $S|_{TM} = \mathrm{d}f$ é equivalente à condição $\tilde{f}^*\overline{\theta} = \mathfrak{s}^*\widehat{\theta}$ e que a condição que S relaciona $\widehat{\nabla}$ com $f^*\overline{\nabla}$ é equivalente à condição $\tilde{f}^*\overline{\omega} = \mathfrak{s}^*\widehat{\omega}$. Nosso problema então se reduz a encontrar uma aplicação diferenciável $\tilde{f} : U \to \mathrm{Ref}_{\mathrm{ort}}(T\overline{M})$ tal que $\tilde{f}^*\lambda = \tau$, onde $\lambda = (\overline{\omega}, \overline{\theta})$ e $\tau = (\mathfrak{s}^*\widehat{\omega}, \mathfrak{s}^*\widehat{\theta})$. Para $\overline{M} = \mathbb{R}^n$, $\overline{M} = S^n$ ou $\overline{M} = H^n$, o fibrado principal $\mathrm{Ref}_{\mathrm{ort}}(T\overline{M})$ possui uma estrutura natural de grupo de Lie e a 1-forma λ identifica-se com a forma de Maurer–Cartan desse grupo de Lie. A demonstração do Teorema Fundamental das Imersões Isométricas agora é obtida usando o Corolário 3.

Consideremos agora novamente o caso geral, onde $(\overline{M}, \overline{g})$ não possui necessariamente curvatura seccional constante. Nesse caso, a identidade (2) nos diz que as conexões $\widehat{\nabla}$ e $\overline{\nabla}$ devem ter a "mesma curvatura"; mais precisamente, para todo $x \in M$, a isometria $S_x : \overline{\xi}_x \to T_{f(x)}\overline{M}$ relaciona a curvatura $\widehat{R}$ de $\widehat{\nabla}$ no ponto x com a curvatura $\overline{R}$ de $\overline{\nabla}$ no ponto $f(x) \in \overline{M}$. Como as aplicações f e S não são conhecidas *a priori*, não sabemos a princípio como comparar as curvaturas $\widehat{R}$ e $\overline{R}$, a menos que $(\overline{M}, \overline{g})$ tenha curvatura seccional constante. Uma idéia para comparar $\widehat{R}$ com $\overline{R}$ sem o conhecimento prévio de f e S aparece no Teorema de Cartan sobre a determinação da métrica por meio da curvatura (vide [2, Cap. 8]). Esse teorema diz essencialmente que

variedades Riemannianas com a mesma dimensão e a "mesma curvatura" são localmente isométricas; no caso que as variedades em questão não possuem curvatura seccional constante, suas curvaturas são comparadas usando transporte paralelo ao longo de geodésicas. Observe que, quando $\dim(M) = \dim(\overline{M})$, o Teorema Fundamental das Imersões Isométricas nos diz que variedades Riemannianas de mesma dimensão e curvaturas seccionais constantes e iguais são localmente isométricas; esse é precisamente o caso particular do Teorema de Cartan sobre a determinação da métrica por meio da curvatura no caso de variedades de curvatura seccional constante.

Nós provamos uma versão do Teorema Fundamental das Imersões Isométricas para variedades Riemannianas arbitrárias (i.e., não necessariamente com curvatura seccional constante) no Capítulo 4 (vide Teorema 7). Tal teorema generaliza o Teorema de Cartan sobre a determinação da métrica por meio da curvatura. A demonstração do Teorema 7 é baseada numa generalização do Teorema de Frobenius cujo enunciado explicamos a seguir.

Considere o seguinte problema. Dadas variedades diferenciáveis M, N, procuramos uma aplicação diferenciável $f : U \to N$ definida num aberto $U \subset M$ satisfazendo a EDP:

$$\mathrm{d}f(x) = F\big(x, f(x)\big), \quad x \in U, \tag{4}$$

onde F é uma seção diferenciável do fibrado $\mathrm{Lin}(TM, TN) \to M \times N$, de modo que para todos $x \in M$, $y \in N$, $F(x,y) : T_xM \to T_yN$ é uma aplicação linear. Seja $\mathcal{D}$ a distribuição em $M \times N$ tal que, para todo $(x,y) \in M \times N$, o subespaço $\mathcal{D}_{(x,y)} \subset T_xM \oplus T_yN$ coincide com o gráfico de $F(x,y)$. O Teorema de Frobenius implica que a distribuição $\mathcal{D}$ é involutiva se e somente se para todos $x_0 \in M$, $y_0 \in N$, a EDP (4) admite uma solução f satisfazendo a condição $f(x_0) = y_0$. Suponha agora que a EDP (4) admite uma solução f satisfazendo a condição $f(x_0) = y_0$ para *algum* par (x_0, y_0), mas não *para todo* par $(x_0, y_0) \in M \times N$. O que isso implica sobre a distribuição $\mathcal{D}$? Isso implica que $\mathcal{D}$ é "involutiva ao longo do gráfico de f"; mais precisamente, a *forma de Levi* de $\mathcal{D}$ (vide Definição 15) deve ser nula nos pontos do gráfico da solução f de (4). Se f não é conhecida *a priori*, em que pontos de $M \times N$ devemos então verificar que a forma de Levi de $\mathcal{D}$ é nula para garantirmos a existência de uma solução f de (4) satisfazendo $f(x_0) = y_0$?

Para respondermos a essa questão, observamos que se $t \mapsto \phi(t)$ é uma curva diferenciável em M e se f é uma solução de (4) então $\psi = f \circ \phi$ é uma curva diferenciável em N satisfazendo a seguinte

EDO:

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}(t) = F\big(\phi(t), \psi(t)\big) \cdot \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}(t).$$

Consideramos então uma família a um parâmetro $(t, \lambda) \mapsto \phi(t, \lambda)$ de curvas diferenciáveis em M, onde o parâmetro λ percorre alguma variedade diferenciável Λ. Para cada $\lambda \in \Lambda$, podemos então considerar uma curva $t \mapsto \psi(t, \lambda)$ em N que é solução da EDO (4), com $\phi(t)$ substituída por $\phi(t, \lambda)$. O nosso Teorema de Frobenius generalizado nos diz essencialmente agora que se a forma de Levi de $\mathcal{D}$ é nula nos pontos da forma $\big(\phi(t, \lambda), \psi(t, \lambda)\big)$ então podemos definir uma solução f de (4) fazendo $f\big(\phi(t, \lambda)\big) = \psi(t, \lambda)$; mais precisamente, o Teorema 1 nos diz que se $\alpha : U \longrightarrow \mathbb{R} \times \Lambda$ é uma aplicação diferenciável definida num aberto $U \subset M$ tal que $\phi \circ \alpha = \mathrm{Id}$ e se para todo $\lambda \in \Lambda$ existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \lambda}(t_0, \lambda) = F\big(\phi(t_0, \lambda), \psi(t_0, \lambda)\big) \circ \frac{\partial \phi}{\partial \lambda}(t_0, \lambda), \tag{5}$$

então $f = \psi \circ \alpha$ é uma solução de (4). Uma situação típica onde podemos aplicar o Teorema 1 é a seguinte. Sejam $x_0 \in M$ e $e : W_0 \longrightarrow W$ um difeomorfismo, onde W_0 é um aberto de $T_{x_0}M$ contendo a origem e W é um aberto de M. Suponha que $e(0) = x_0$. Defina $\Lambda = W_0$ e $\phi(t, \lambda) = e(t\lambda)$. Por exemplo, se (M, g) é uma variedade Riemanniana, podemos tomar e como sendo a aplicação exponencial de (M, g) em x_0 e daí as curvas $t \mapsto \phi(t, \lambda)$ são as *geodésicas radiais* partindo de x_0. Fixado $y_0 \in N$, consideramos para cada $\lambda \in \Lambda$, a solução $t \mapsto \psi(t, \lambda)$ da EDO $\frac{\partial \psi}{\partial t}(t, \lambda) = F\big(\phi(t, \lambda), \psi(t, \lambda)\big) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial t}(t, \lambda)$ satisfazendo a condição inicial $\psi(0, \lambda) = y_0$. Note que, nesse caso, a condição (5) é trivialmente satisfeita com $t_0 = 0$, já que ambos os lados da igualdade se anulam. Definindo $\alpha(x) = \big(1, e^{-1}(x)\big)$, para todo $x \in W$, temos $\phi\big(\alpha(x)\big) = x$; portanto $f(x) = \psi\big(\alpha(x)\big) = \psi\big(1, e^{-1}(x)\big)$ é uma solução de (4) satisfazendo a condição $f(x_0) = y_0$, desde que a forma de Levi de $\mathcal{D}$ se anule nos pontos da forma $\big(\phi(t, \lambda), \psi(t, \lambda)\big)$.

Nossa generalização do Teorema Fundamental das Imersões Isométricas (vide Teorema 7 e Corolários) é obtida então como um Corolário natural do nosso Teorema de Frobenius generalizado (Teorema 1) e das idéias da Seção 2 do Capítulo 3.

CAPíTULO 1

Variedades Diferenciáveis e o Teorema de Frobenius.

1. Introdução

Neste capítulo inicial, esclarecemos as notações e convenções que serão usadas, além de darmos as definições básicas, seguidas de resultados direta ou indiretamente utilizados no desenvolvimento de nossos objetivos principais. Só serão demonstrados os resultados diretamente envolvidos, sendo os demais simplesmente enunciados. A parte chave aqui é a seção que trata do teorema de Frobenius, onde provamos versões que serão essenciais quando provarmos os teoremas de imersões isométricas desta dissertação.

2. Variedades Diferenciáveis e Formas Diferenciais

Aqui serão definidas as notações que usaremos e enunciados alguns resultados básicos que serão usados neste trabalho.

Todas as variedades consideradas (assim como todos os grupos de Lie) serão $\mathcal{C}^\infty$, satisfazendo a propriedade de Haussdorf e satisfazendo o segundo axioma de enumerabilidade.

Seja M uma variedade, denoteremos por $\mathfrak{X}(M)$ conjunto de todos os campos vetoriais $\mathcal{C}^\infty$ definidos na variedade M. Todo intervalo I que considerarmos neste trabalho será centrado em zero.

Nosso objetivo aqui é fazer breves esclarecimentos das convenções algébricas utilizadas nos cálculos futuros. As escolhas aqui feitas influem de maneira determinante na forma de algumas das equações mais importantes deste trabalho, as equações de estrutura de Cartan.

Seja M uma variedade, V_1, V_2, V_3 espaços vetoriais de dimensão finita. Seja ω uma *r-forma* em M a valores em V_1 e seja λ uma *s-forma* em M a valores em V_2, e $B : V_1 \times V_2 \to V_3$ uma aplicação bilinear. O produto exterior (wedge) $\wedge$ de ω por λ (relativamente a B) é a

$r+s$-forma em M a valores em V_3 dada por:

$$(\omega \wedge \lambda)(X_1, ..., X_{r+s}) = \frac{1}{r!s!} \sum_{\sigma \in S^r} (-1)^\sigma B[\omega(X_{\sigma(1)}, ..., X_{\sigma(r)}), \lambda(X_{\sigma(r+1)}, ..., X_{\sigma(r+s)})],$$

Destacamos o seguinte caso. Seja ω uma $1-forma$ numa variedade M a valores numa álgebra de Lie $(\mathfrak{g}, [,])$; o produto $\omega \wedge \omega$ relativamente ao comutador de $\mathfrak{g}$ é dado por:

$$\omega \wedge \omega(X_1, X_2) = [\omega(X_1), \omega(X_2)] - [\omega(X_2), \omega(X_1)], \tag{2.1}$$

usando as propriedades do comutador, temos

$$\omega \wedge \omega(X_1, X_2) = 2[\omega(X_1), \omega(X_2)].$$

PROPOSIÇÃO 1. *Sejam M uma variedade diferenciável, ω uma $1-$ forma em M (possivelmente a valores vetoriais) e $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, então*

$$d\omega(X, Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y]).$$

DEMONSTRAÇÃO. Ver [4, Cap. I]. ∎

3. Ações de Grupos de Lie em Variedades

Esta seção se restringe a introduzir a linguagem e as definições sobre Grupos de Lie que são necessárias à esta dissertação.

Sejam G um grupo de Lie e $g \in G$. A translação $\mathrm{l}_g : G \to G$ à esquerda por g é definida por

$$\mathrm{l}_g(g') = gg', \ g' \in G.$$

Usaremos a seguinte abreviação:

$$gv =: \mathrm{dl}_g(g_0) \cdot v$$

DEFINIÇÃO 1. *Sejam M uma variedade diferenciável C^∞ e seja G um grupo de Lie. Uma* ação à esquerda *de G em M, é uma aplicação $\Phi : G \times M \xrightarrow{C^\infty} M$ tal que:*

(i) $\Phi(1, x) = x, \forall x \in M$,

(ii) $\Phi(g, \Phi(h, x)) = \Phi(gh, x), \forall g, h \in G, \forall x \in M$.

Analogamente, definimos *ação à direita* $\Phi : M \times G \longrightarrow M$. Usualmente, escrevemos simplesmente gx para indicar $\Phi(g, x)$. Para $g \in G$ e $x \in M$, definimos $\beta_x : G \to M$ e $\gamma_g : M \to M$ fazendo

$$\begin{aligned} \beta_x(g) &= gx \\ \gamma_g(x) &= gx. \end{aligned}$$

Para $x \in M$, definimos a *órbita* de x como sendo subconjunto de M dado por

$$G.x = \{g.x | g \in G\}.$$

. Chamamos de grupo de *isotropia* de $x \in M$ ao subgrupo

$$G_x = \{g \in G | g.x = x\}.$$

Uma ação é dita *livre* se, para qualquer $x \in M$ e para qualquer $g \in G$, temos

$$gx = x \Rightarrow g = 1.$$

Uma ação é dita transitiva se, para quaisquers $x, y \in M$, existe $g \in G$ tal que $y = gx$. No caso da ação ser livre, temos, para todo $x \in M$, que G_x é trivial. No caso de da ação ser transitiva, temos, para todo x em M, $Gx = M$.

Sejam G um grupo de Lie e V um espaço vetorial real de dimensão finita. Uma *representação* de G em V é uma ação $\Phi : G \times V \to V$ que é linear na segunda variável. Uma representação de G em V fica unicamente determinada por um homomorfismo C^∞ $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ fazendo $\Phi(g, v) = \rho(g) \cdot v$.

DEFINIÇÃO 2. *Seja G um grupo de Lie que age numa variedade diferenciável M. Seja $X \in \mathfrak{g}$, chamamos de* campo vetorial fundamental *de M induzido por X ao campo de M dado por $X^*(x) = \frac{d}{dt}(\exp tX.x)$.*

Note que $X^*(x) = \mathrm{d}\beta_x(1) \cdot X$

DEFINIÇÃO 3. *A forma de* Maurer-Cartan *λ de um grupo de Lie G é a $1-forma$ em G a valores na álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ definida por:*

$$\lambda_g(v) = d\mathfrak{l}_g(1)^{-1} \cdot v, \ g \in G, \ v \in T_gG,$$

ou, usando a nossa abreviação:

$$\lambda_g(v) = d\mathfrak{l}_g(1)^{-1} \cdot v = d\mathfrak{l}_{g^{-1}}(1) \cdot v = g^{-1}v.$$

Segue da proposição 1 que a forma de Maurer-Cartan satisfaz a equação (chamada equação de Maurer-Cartan):

$$\mathrm{d}\lambda = -\frac{1}{2}(\lambda \wedge \lambda) = -[\lambda(v), \lambda(w)]$$

DEFINIÇÃO 4. *Seja ω uma $k-forma$ a valores em um espaço vetorial de dimensão finita V, definida numa variedade M e $\Phi : G \times M \to M$ uma ação. Dizemos que ω é* G-invariante *se*

$$\gamma_g^* \omega = \omega.$$

Se $\rho : G \to GL(V)$ *for uma representação, dizemos que* ω *é* ρ-pseudo G-invariante *se*

$$\Phi_g^* \omega = \rho(g)^{-1} \circ \omega.$$

4. Fibrados

Para nós um fibrado será sempre um fibrado vetorial ou principal, apesar de que em geral, um fibrado pode ser uma estrutura mais geral (por exemplo, fibrados topológicos). Como uma variedade de dimensão n é um objeto localmente difeomorfo a $\mathbb{R}^n$, um fibrado é uma estrutura localmente difeomorfa a um produto. O cilindro, visto como produto da circunferência por $\mathbb{R}$, é um fibrado que é globalmente um produto, já a faixa de Möbius pode ser vista localmente como resultante do produto da circunferência por $\mathbb{R}$, porém aqui o produto local não pode se estender a um produto global. No último caso, temos a faixa de Möbius F (que é chamada de espaço total), a circunferência S^1 (que é a base), $\mathbb{R}$ (que é a fibra típica) e ainda uma estrutura local de produto (que é chamada de trivialização local). A aplicação $\pi : F \to S^1$ é chamada de projeção do fibrado F.

4.1. Fibrados Vetoriais. O fibrado tangente TM de uma dada variedade M, é um exemplo de fibrado vetorial que aparece diariamente em geometria diferencial. Antes de dar uma definição formal de fibrado vetorial, vamos fazer uma observação ao caso de TM. Como conjunto, temos

$$TM = \bigcup_{x \in M} \{x\} \times T_x M$$

onde $T_x M$ é o espaço tangente ao ponto $x \in M$. Aqui o espaço total é TM, a base é M, a fibra típica é $\mathbb{R}^n$, onde $n = \dim M$.

Sejam M uma variedade, ξ um conjunto, $\pi : \xi \to M$ uma função e ξ_0 um espaço vetorial de dimensão finita. Suponha que para cada $x \in M$ seja dada uma estrutura de espaço vetorial real no conjunto $\xi_x = \pi^{-1}(x)$. Uma *trivialização* de (ξ, M, π, ξ_0) sobre um aberto $U \subset M$ é uma aplicação bijetora $\mu : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times \xi_0$ tal que

- $pr_1 \circ \mu = \pi|_{\pi^{-1}(U)}$, onde pr_1 denota a primeira projeção do produto $U \times \xi_0$.
- para todo $x \in U$ a aplicação $pr_2 \circ \mu|_{\xi_x} : \xi_x \to \xi_0$ é linear.

Sejam $\mu_1 : \pi^{-1}(U_1) \longrightarrow U_1 \times \xi_0$ e $\mu_2 : \pi^{-1}(U_2) \longrightarrow U_2 \times \xi_0$ duas trivializações de (ξ, M, π, ξ_0). Dizemos que μ_1 e μ_2 são trivializações *compatíveis*, se $U_1 \cap U_2 = \varnothing$ ou se a aplicação

$$\mu_2 \circ \mu_1^{-1} : (U_1 \cap U_2) \times \xi_0 \longrightarrow (U_1 \cap U_2) \times \xi_0$$

for um difeomorfismo. Um atlas de trivializações $\mathcal{A}$ é um conjunto de trivializações duas a duas compatíveis $\mu_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times \xi_0$ tais que os U_α cobrem M.

DEFINIÇÃO 5. *Um* fibrado vetorial *sobre uma variedade M é uma quíntupla $(\xi, M, \pi, \xi_0, \mathcal{A})$ onde ξ é um conjunto e M é uma variedade, chamadas, respectivamente, de* espaço total *e* base, *$\pi : \xi \to M$ é uma aplicação chamada de* projeção *e ξ_0 é um espaço vetorial real de dimensão finita chamado de* fibra típica, *e $\mathcal{A}$ é um atlas máximal de trivializações.*

O espaço total ξ admite uma única estrutura de variedade diferenciável tal que as trivializações de $\mathcal{A}$ são difeomorfismos de classe C^∞ definidos em abertos.

Usualmente denotaremos o fibrado vetorial $(\xi, M, \pi, \xi_0, \mathcal{A})$ por $\pi : \xi \to M$. Uma seção de ξ é uma aplicação $s : M \to \xi$ tal que $\pi \circ s$ é a aplicação identidade de M. Denotaremos por $\Gamma(\xi)$ o conjunto de todas as seções diferenciáveis de ξ.

DEFINIÇÃO 6. *Sejam M uma uma variedade diferenciavel e sejam $\pi : \xi \to M$ e $\pi' : \eta \to M$ fibrados vetoriais sobre M. Dizemos que $T : \xi \to \eta$ é um* morfismo de fibrados vetoriais, *se T é uma aplicação de classe C^∞ tal que $\pi' \circ T = \pi$ e tal que, para todo $x \in M$, a aplicação $T_x = T_{|\xi_x} : \xi_x \to \eta_x$ é linear. Dizemos que T é um* isomorfismo de fibrados vetoriais *se T é um morfismo bijetor de fibrados vetoriais.*

DEFINIÇÃO 7. *Sejam M uma variedade e $\pi : \xi \to M$ um fibrado vetorial sobre M. Uma* estrutura Riemanniana *é uma seção diferenciável g do fibrado vetorial $\xi^* \otimes \xi^*$, tal que, para todo ponto x em M, $g_x \in \xi_x^* \otimes \xi_x^*$ é produto escalar em T_xM.*

Uma *Variedade Riemanniana* é uma variedade M onde está definida uma *métrica Riemanniana* g, isto é, para cada ponto x de M, está definida uma forma bilinear simétrica positiva (isto é, um produto escalar) g_x em T_xM. Em outras palavras, uma métrica Riemanniana g é uma estrutura Riemanniana em TM.

DEFINIÇÃO 8. *Seja $f : M \to M'$ uma aplicação C^∞ e seja $\pi : \xi \to M'$ um fibrado vetorial sobre M' chamaremos de* seção ao longo de φ *a uma aplicação $X : M \to \xi$ tal que, temos $\pi \circ X = f$. Se $\xi = TM$, dizemos que $X : M \to TM$ é um* campo vetorial ao longo de f.

Assim fica claro que quando consideramos um campo vetorial X ao longo de uma curva $\gamma : [a, b] \longrightarrow M$, estamos considerando um campo ao longo de uma função. Agora, seja $\pi : \xi \to M$ um fibrado vetorial sobre M com fibra típica ξ_0. Como acima definimos um campo

vetorial ao longo de uma função, vamos definir uma noção análoga para fibrados vetoriais, seria, falando de maneira informal, a noção de "fibrado vetorial ao longo de uma função".

DEFINIÇÃO 9. *Sejam $f : M \to M'$ uma aplicação C^∞ e $\pi : \xi \to M'$ um fibrado vetorial sobre M' com fibra típica ξ_0, chamaremos de* fibrado pull-back *de ξ por f ao fibrado vetorial $f^*\xi$, cuja fibra no ponto $x \in M$ é $\xi_{\varphi(x)}$. Assim, o espaço total deste fibrado é*

$$f^*\xi = \left\{(x, v) : x \in M',\ e\ v \in \xi_{\varphi(x)}\right\},$$

a projeção é $\pi : (x, v) \mapsto x$ e se $\mu : \pi^{-1}(U) \to U \times \xi_0$ é uma trivialização de ξ, então uma trivialização de $f^*\xi$ é dada por

$$f^*\mu : \pi^{-1}\left(f^{-1}(U)\right) \to f^{-1}(U) \times \xi_0,$$

definida por $(x, v) \mapsto (x, \mu^2 v)$.

Dada a aplicação $\chi_f : f^*\xi \to \xi$, definida por $\chi_f(x, v) = v$, sempre identificaremos seções de $f^*\xi$ com seções de ξ ao longo de f. Mais precisamente, se s é seção de $f^*\xi$, $\chi_f \circ s$ é seção de ξ ao longo de f.

4.2. Fibrados Principais. Sejam P um conjunto, M uma Variedade Diferenciável e G um grupo de Lie e considere uma ação livre à direita $\phi : P \times G \to P$. A lembrar, uma ação é dita livre se não possui pontos fixos. Seja $\pi : P \to M$ (chamada de projeção de P sobre M) a aplicação tal que, para todo ponto x de M, $\pi^{-1}(x)$ é uma órbita da ação de G. Para cada $x \in M$, chamaremos à $\pi^{-1}(x) = P_x$ de fibra de P sobre x.

Sendo $U \subset M$ um conjunto aberto, chamaremos de *seção* de P a uma aplicação $\mathfrak{s} : U \subset M \to P$, tal que $\pi \circ \mathfrak{s} = Id_U$.

A estrutura local de produto do fibrado principal P, ou seja, a trivialização, é dada pela seguinte bijeção

$$\begin{array}{rcl} U \times G & \longrightarrow & \pi^{-1}(U), \\ (x, g) & \longmapsto & \mathfrak{s}(x).g. \end{array}$$

Sejam

$$\mathfrak{s} : U \subset M \to P \text{ e } \mathfrak{s}' : V \subset M \to P \tag{4.1}$$

duas seções de P tais que $U \cap V \neq \varnothing$. Chamaremos de *função de transição* entre as seções $\mathfrak{s}$ e $\mathfrak{s}'$ à função $g : U \cap V \to G$, tal que, para todo x em $U \cap V$, temos

$$\mathfrak{s}'(x) = \mathfrak{s}(x).g(x),$$

Sejam $\mathfrak{s}$ e $\mathfrak{s}'$ duas seções dadas como em 4.1. Dizemos que $\mathfrak{s}$ e $\mathfrak{s}'$ são *compatíiveis* se $U \cap V = \varnothing$ ou se a função de transição $g : U \cap V \to G$ é de classe C^∞.

Um atlas de seções é um conjuto de seções compatíveis tais que seus domínios cobrem M.

DEFINIÇÃO 10. *Um* fibrado principal *sobre uma variedade M é uma quíntupla $(P, M, \pi, G, \mathcal{A})$ onde P é um conjunto e M é uma variedade, chamadas, respectivamente, de* espaço total *e* base, *$\pi : P \to M$ é uma aplicação chamada de* projeção, *G é um grupo de Lie e $\mathcal{A}$ é um atlas máximal de seções.*

O espaço total P admite uma única estrutura de variedade diferenciável tal que as trivializações de $\mathcal{A}$ são difeomorfismos de classe C^∞ definidos em abertos.

Sejam M uma variedade de dimensão n, $\pi : \xi \to M$ um fibrado vetorial sobre M e x um ponto de M. Um referencial p de ξ_x é um isomorfismo $p : \mathbb{R}^n \to \xi_x$. Um exemplo de fibrado principal que nos interessa é o fibrado principal de todos os referenciais de ξ que será denotado por $\mathrm{Ref}(\xi)$. Agora, seja dada em M uma estrutura Riemanniana g e em $\pi : \xi \to M$ uma estrutura Riemanniana g^ξ. Um referencial ortonormal de ξ no ponto $x \in M$ é uma isometria $p : \mathbb{R}^n \to \xi_x$. O fibrado principal de referenciais ortonormais de um fibrado vetorial $\pi : \xi \to M$ sobre uma variedade M, denotado por $\mathrm{Ref}_{ort}(\xi)$, será o exemplo de fibrado principal que mais nos interessa.

DEFINIÇÃO 11 (Forma canônica de um fibrado principal de referenciais). *Seja p um ponto do fibrado principal $Ref_{ort}(TM)$ (ou de $Ref(TM)$). Dado um vetor $v \in T_pRef_{ort}(TM)$ (ou $v \in T_pRef(TM)$), definimos a forma canônica θ da seguinte forma.*

$$\theta_p(v) = p^{-1}(d\pi_p(v)),$$

θ é uma $1-$ forma a valores em $\mathbb{R}^n$ onde $n = \dim(M)$.

OBSERVAÇÃO 1. *Aqui observamos que a definição acima não faz sentido para um fibrado principal de referenciais de um fibrado vetorial $\pi : \xi \to M$ sobre M, quando ξ é diferente de TM. Para contornar tal fato, associamos a um morfismo de fibrados vetoriais $i : TM \to \xi$ uma forma canônica θ em $Ref(\xi)$, tal que, se $p \in Ref(\xi)$ e $v \in T_pRef_{ort}(TM)$, temos*

$$\theta_p(v) = p^{-1}(i(d\pi_p(v))).$$

DEFINIÇÃO 12. *Seja $T : \xi \to \eta$ um isomorfismo de fibrados vetoriais. T induz nos fibrados de referenciais $Ref(\xi)$ e $Ref(\eta)$ uma aplicação*

$$\widehat{T} : Ref(\xi) \longrightarrow Ref(\eta)$$

tal que $\widehat{T}(p) = T_x \circ p$, *para todo ponto* x *em* M *e todo referencial* p *em* $Ref(\xi)_x$. *No caso de* T *ser uma isometria, temos*

$$\widehat{T} : Ref_{ort}(\xi) \longrightarrow Ref_{ort}(\eta),$$

induzida em $Ref_{ort}(\xi)$, *tal que* $\widehat{T}(p) = T_x \circ p$, *para todo ponto* x *em* M *e todo referencial* p *em* $Ref_{ort}(\xi)_x$

DEFINIÇÃO 13. *Sejam* $\pi : \xi \to M'$ *um fibrado vetorial sobre uma variedade diferenciável* M' *e* $f : M \to M'$ *uma aplicação diferenciável definida numa variedade diferenciável* M. *Denotamos por* $\widehat{\chi}_f : \mathrm{Ref}_{\mathrm{ort}}(f^*\xi) \to \mathrm{Ref}_{\mathrm{ort}}(\xi)$ *a aplicação induzida por* $\chi_f : f^*\xi \to \xi$.

LEMA 1. *Sejam* $\pi : P \to M$ *fibrado* $G-$*principal,* V *um espaço vetorial real de dimensão finita e* $\rho : G \to GL(V)$ *representação de* G *em* V. *Sejam* τ_1 *e* τ_2 *k-formas em* P *a valores em* V *tais que:*

(1) τ_1 *e* τ_2 *são* G*-pseudo invariantes relativamente a* ρ;
(2) $\tau_1(v_1, \ldots, v_k) = \tau_2(v_1, \ldots, v_k)$ *se pelo menos um dos vetores* $v_1, \ldots, v_k$ *é vertical;*

Seja $\mathfrak{s} : M \to P$ *uma seção. Então*

$$\tau_1 = \tau_2 \Longleftrightarrow \mathfrak{s}^*\tau_1 = \mathfrak{s}^*\tau_2.$$

DEMONSTRAÇÃO. É óbvio que $\tau_1 = \tau_2 \Rightarrow \mathfrak{s}^*\tau_1 = \mathfrak{s}^*\tau_2$. Se $\mathfrak{s}^*\tau_1 = \mathfrak{s}^*\tau_2$, então $\tau_1(\mathfrak{s}(x))$ e $\tau_2(\mathfrak{s}(x))$ coincidem em $\operatorname{Im} d\mathfrak{s}(x)$. Como

$$T_{\mathfrak{s}(x)}P = \operatorname{Im} d\mathfrak{s}(x) \oplus Ver_{\mathfrak{s}(x)}P,$$

então a condição (2) implica $\tau_1(\mathfrak{s}(x)) = \tau_2(\mathfrak{s}(x))$, para todo $x \in M$. Segue da condição (1) que $\tau_1(\mathfrak{s}(x)\, g) = \tau_2(\mathfrak{s}(x)\, g)$, para todo g em G. Logo $\tau_1 = \tau_2$ ∎

4.3. Fibrados Associados. Para começar esta subseção, observamos que consideraremos apenas fibrados vetoriais associados, embora a teoria de fibrados assciados não se restringir a fibrados vetoriais.

Seja $\pi : P \to M$ um fibrado $G - principal$ e ξ_0 um espaço vetorial real de dimensão finita e $\rho : G \to GL(\xi_0)$ uma representação. Considere a ação

$$\Phi : P \times \xi_0 \times G \to P \times \xi_0$$

de G no produto $G \times \xi_0$ dada por $(p, v)\, g = (pg^{-1}, g.v)$, $g \in G$. Chamaremos de *fibrado vetorial associado* a P ao quociente $\xi = P \times \xi_0/G$.

Ou seja, ξ é o conjunto das órbitas da ação $P \times \xi_0 \times G \to P \times \xi_0$.

Denotaremos a classe de equivalência de (p, v) por $[p, v]$. Assim $\pi_\xi : \xi \to M$ é um fibrado vetorial sobre M e o projeção π_ξ leva o ponto $[p, v]$ de ξ no ponto $\pi(p)$ de M.

As trivializações de ξ são dadas da seguinte forma. Considere a seção $\mathfrak{s} : U \subset M \to P$ de P. Esta seção induz uma trivialização de ξ sobre U :

$$\begin{aligned} U \times \xi_0 &\to \xi_{|U}, \\ (m, v) &\mapsto [\mathfrak{s}(m), v]. \end{aligned}$$

Um fibrado vetorial ξ é associado a $\mathrm{Ref}(\xi)$, considerando a representação canônica de $GL(n, \mathbb{R})$ em $\mathbb{R}^n$. De fato identificamos $[p, v]$ com $p(v)$.

5. Teorema de Frobenius e Corolários

O teorema de Frobenius representa uma generalização do teorema de existência e unicidade de equações diferenciais ordinárias, no seguinte sentido. Falando a grosso modo, enquanto no teorema para *EDO* integramos campos vetoriais e obtemos curvas, no caso do teorema de Frobenius integramos distribuições e obtemos variedades.

DEFINIÇÃO 14. *Seja M uma variedade. Chamaremos de* distribuição C^∞ *sobre M a um subfibrado vetorial C^∞ $\mathcal{D} \subset TM$. Para todo $x \in M$, $\mathcal{D}_x$ será a fibra do fibrado vetorial $\mathcal{D}$ sobre o ponto x, isto é, $\mathcal{D}_x = T_xM \cap \mathcal{D}$. Um campo vetorial em M que toma valores em $\mathcal{D}$ é dito horizontal em relação a $\mathcal{D}$ (ou simplesmente $\mathcal{D}$ – horizontal).*

DEFINIÇÃO 15. *Seja $\mathcal{D}$ uma distribuição na variedade M. Chamamos de* forma de Levi *da distribuição $\mathcal{D}$ no ponto x de M à aplicação bilinear*

$$\mathcal{L}_x^{\mathcal{D}} : \mathcal{D}_x \times \mathcal{D}_x \to T_xM/\mathcal{D}_x,$$

definida do seguinte modo. Sejam X e Y campos C^∞ $\mathcal{D}$-horizontais definidos numa vizinhança de x em M, tais que $X(m) = v$ e $Y(m) = w$, então

$$\mathcal{L}_x^{\mathcal{D}}(v, w) = [X, Y](x) + \mathcal{D}_x,$$

onde $[X, Y]$ denota o colchete de Lie.

Agora vamos ver que $[X, Y](x) + \mathcal{D}_x$ não depende da escolha dos campos X e Y, ou seja, que a forma de Levi está bem definida. Vamos definir numa vizinhaça aberta U de x, uma $1 - forma$ C^∞ θ , a valores em $\mathbb{R}^k$ tal que $\ker(\theta_y) = \mathcal{D}_y$, para todo y em U. Considerando dois campos vetoriais numa vizinhança aberta de x temos, pela fórmula de Cartan para derivada exterior

$$\mathrm{d}\theta(X, Y) = X(\theta(Y)) - Y(\theta(X)) - \theta([X, Y]).$$

Se X e Y forem $\mathcal{D}$ – *horizontais*, então a equação acima nos dá

$$\mathrm{d}\theta(X, Y) = -\theta([X, Y]).$$

Pela última fómula, se X' e Y' são campos horizontais que também estendem v e w, temos

$$\theta\left([X,Y]-[X',Y']\right)(x)=\mathrm{d}\theta\left(X\left(x\right),Y\left(x\right)\right)-\mathrm{d}\theta(X'\left(x\right),Y'\left(x\right))=0,$$

ou seja, $[X,Y]-[X',Y']$ está no núcleo de θ, o que, pela definição de θ, implica que $\left([X,Y]-[X',Y']\right)(x)\in\mathcal{D}_x$. Assim provamos que a forma de Levi está bem definida.

Colocando $X\left(x\right)=v$ e $Y\left(x\right)=w$, obtemos a seguinte fórmula

$$\overline{\theta}_x\left(\mathcal{L}_x^{\mathcal{D}}\left(v,w\right)\right)=-\mathrm{d}\theta\left(v,w\right),\ \text{para } v,w\in\mathcal{D}_x, \tag{5.1}$$

onde $\overline{\theta}_x:T_xM/\mathcal{D}_x\longrightarrow\mathbb{R}^k$ denota a aplicação linear induzida por θ_x no espaço quociente.

LEMA 2. *Sejam M uma variedade $\mathcal{C}^\infty$, $\mathcal{D}$ uma distribuição $\mathcal{C}^\infty$ em M. Seja*

$$U\ni(t,s)\mapsto H\left(t,s\right)\in M$$

uma aplicação $\mathcal{C}^\infty$ definida num aberto $U\subset\mathbb{R}^2$. Sejam $I\subset\mathbb{R}$ um intervalo e $s_0\in\mathbb{R}$ tal que

(1) *$I\times\{s_0\}\subset U$ e $\mathcal{L}^{\mathcal{D}}_{H(t,s_0)}=0$, para todo $t\in I$;*
(2) *$\frac{\partial H}{\partial t}\left(t,s\right)\in\mathcal{D}$, para todo $(t,s)\in U$;*
(3) *$\frac{\partial H}{\partial s}\left(t_0,s_0\right)\in\mathcal{D}$, para algum $t_0\in I$.*

Então $\frac{\partial H}{\partial s}\left(t,s_0\right)\in\mathcal{D}$ para todo $t\in I$.

DEMONSTRAÇÃO. O conjunto

$$I'=\left\{t\in I:\frac{\partial H}{\partial s}\left(t,s_0\right)\in\mathcal{D}\right\}$$

é óbviamente fechado em I uma vez que a aplicação $I\ni t\mapsto\frac{\partial H}{\partial s}\left(t,s_0\right)\in TM$ é contínua e $\mathcal{D}$ é um subconjunto fechado de TM. Como I é conexo e $t_0\in I'$, a prova estará completa se mostrarmos que I' é aberto em I. Fixemos t_0 em I'. Definamos, numa vizinhança aberta V de $H\left(t_1,s_0\right)$, uma $1-forma\ \mathcal{C}^\infty$ θ a valores em $\mathbb{R}^k$, tal que a aplicação linear

$$\theta_x:T_xM\longrightarrow\mathbb{R}^k$$

seja sobrejetora e $\ker\left(\theta_x\right)=\mathcal{D}_x$ para todo $x\in V$. Agora escolhemos uma distribuição $\mathcal{D}'$ em V tal que

$$T_xM=\mathcal{D}_x\oplus\mathcal{D}'_x,\ \text{para todo } x \text{ em } V.$$

Então, para cada $x\in V$, θ_x restrita a $\mathcal{D}'_x$ é um isomorfismo sobre $\mathbb{R}^k$. Seja J uma vizinhança conexa de t_1 em I tal que $H\left(t,s_0\right)\in V$,

para todo $t \in J$. Mostraremos a seguir que a aplicação

$$J \ni t \mapsto \theta_{H(t,s_0)}\left(\frac{\partial H}{\partial s}(t, s_0)\right) \in \mathbb{R}^k \tag{5.2}$$

é solução de uma *EDO* linear homogênea. Como:

$$\theta_{H(t_1,s_0)}\left(\frac{\partial H}{\partial s}(t_1, s_0)\right) = 0,$$

daí seguirá que

$$\theta_{H(t,s_0)}\left(\frac{\partial H}{\partial s}(t, s_0)\right) = 0, \text{ para todo } t \in J,$$

ou seja, $J \subset I'$, que equivale a dizer que I' é aberto (além de ser fechado). Assim a prova estará concluida.

Denotaremos a base canônica de $\mathbb{R}^2$ por $\frac{\partial}{\partial s}$ e $\frac{\partial}{\partial t}$. Se aplicarmos a fómula de Cartan para derivada exterior a $1-forma$ $\mathrm{H}^*\theta$, obteremos

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\left(H^*\theta\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial s}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(H^*\theta\right)\left(\frac{\partial}{\partial s}\right) - \frac{\partial}{\partial s}\left(H^*\theta\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \\ - \left(H^*\theta\right)\left(\left[\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial s}\right]\right). \end{aligned}$$

Como $\mathrm{d}(H^*\theta) = H^*\left(\mathrm{d}\theta\right)$ e $\left[\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial s}\right] = 0$, teremos

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\theta_{H(t,s_0)}\left(\frac{\partial H}{\partial t}(t, s_0), \frac{\partial H}{\partial s}(t, s_0)\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\theta_{H(t,s_0)}\left(\frac{\partial H}{\partial s}(t, s_0)\right)\right) \\ - \frac{\partial}{\partial s}|_{s=s_0}\left(\theta_{H(t,s)}\left(\frac{\partial H}{\partial t}(t, s)\right)\right), \end{aligned} \tag{5.3}$$

onde t está em J.

Observe que, como $\frac{\partial H}{\partial t}(t, s)$ está em $\mathcal{D}$, o último termo lado direito de (5.3) se anula. Podemos escrever $\frac{\partial H}{\partial s}(t, s_0) = u_1(t) + u_2(t)$ com $u_1(t)$ em $\mathcal{D}$ e $u_2(t)$ em $\mathcal{D}'$. Como a forma de Levi de $\mathcal{D}$ se anula em pontos da forma $H(t, s_0)$, a equação 5.1 implica que $\mathrm{d}\theta_{H(t,s_0)}(v, w) = 0$ para todo $v, w \in \mathcal{D}_{H(t,s_0)}$. Podemos então substituir $\frac{\partial H}{\partial s}(t, s_0)$ por $u_2(x)$ no lado esquerdo de 5.3. Para todo $t \in J$, consideremos a aplicação linear $L(t) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ definida por:

$$L(t) \cdot z = \theta_{H(t,s_0)}\left(\frac{\partial H}{\partial t}(t, s_0), \sigma_{H(t,s_0)}(z)\right), \; z \in \mathbb{R}^k,$$

onde, para todo $x \in V$, $\sigma_x : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathcal{D}'_x$ denota a inversa do isomarfismo $\theta_x|_{\mathcal{D}'_x} : \mathcal{D}'_x \longrightarrow \mathbb{R}^k$. Observe que

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\theta_{H(t,s_0)}\left(\frac{\partial H}{\partial t}(t,s_0), \frac{\partial H}{\partial s}(t,s_0)\right) &= \mathrm{d}\theta_{H(t,s_0)}\left(\frac{\partial H}{\partial t}(t,s_0), u_2(t)\right) \\ &= L(t)\cdot\theta_{H(t,s_0)}(u_2(t)) \\ &= L(t)\cdot\theta_{H(t,s_0)}\left(\frac{\partial H}{\partial s}(t,s)\right). \end{aligned}$$

A equação 5.3 pode agora ser reescrita como:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\theta_{H(t,s_0)}\left(\frac{\partial H}{\partial s}(t,s_0)\right)\right) = L(t)\cdot\theta_{H(t,s_0)}\left(\frac{\partial H}{\partial s}(t,s)\right), \text{ onde } t \in J.$$

Logo a aplicação 5.2 é a solução de uma *EDO* linear homogênea, como comentamos acima, isto basta para ver que I' é aberto, e, conseqüentemente, igual a I. ∎

Dadas duas variedades $\mathcal{C}^\infty$ M e N, denotaremos por $Lin(TM, TN)$ o fibrado vetorial sobre $M \times N$ que tem como fibra no ponto $(x,y) \in M \times N$ o espaço $Lin(T_xM, T_yN)$ das aplicações lineares de T_xM em T_yN.

TEOREMA 1. *Sejam M e N duas variedades $\mathcal{C}^\infty$ e seja F uma seção do fibrado vetorial $Lin(TM, TN)$ definida num aberto $A \subset M \times N$. Considere a distribuição $gr(F)$ em A, que tem o gráfico da aplicação linear*

$$F(x,y) : T_xM \longrightarrow T_yN$$

como fibra no ponto $(x,y) \in A$. Sejam

$$\begin{aligned} \mathbb{R}\times\Lambda &\supset Z \ni (t,\lambda) \mapsto \phi(t,\lambda) \in M, \\ \mathbb{R}\times\Lambda &\supset Z \ni (t,\lambda) \mapsto \psi(t,\lambda) \in N \end{aligned}$$

aplicações lineares, onde Λ é uma variedade $\mathcal{C}^\infty$ e $Z \subset \mathbb{R}\times\Lambda$ é um subconjunto aberto. Seja $\alpha : V \longrightarrow Z$ uma aplicação $\mathcal{C}^\infty$ definida num aberto $V \subset M$, tal que $\phi(\alpha(x)) = x$, para todo $x \in V$. Assuma que

(1) *$(\phi(t,\lambda), \psi(t,\lambda)) \in A$ e a forma de Levi de $gr(F)$ se anula no ponto $(\phi(t,\lambda), \psi(t,\lambda))$ para todo $(t,\lambda) \in Z$;*
(2) *$\frac{\partial\psi}{\partial t}(t,\lambda) = F(\phi(t,\lambda), \psi(t,\lambda)) \cdot \frac{\partial\phi}{\partial t}(t,\lambda)$, para todo $(t,\lambda) \in Z$;*
(3) *Para cada $(t_1,\lambda) \in Z$ existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $I \times \lambda \subset Z$ e $\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}(t_0,\lambda) = F(\phi(t_0,\lambda), \psi(t_0,\lambda)) \circ \frac{\partial\phi(t_0,\lambda)}{\partial\lambda}$, onde $I \subset \mathbb{R}$ denota o intervalo fechado que tem t_0 e t_1 como extremos.*

Então a aplicação $f = \psi \circ \alpha : V \longrightarrow N$ satisfaz a EDP:

$$df(x) = F(x, f(x)), \; x \in V.$$

DEMONSTRAÇÃO. Inicialmente, provaremos a seguinte igualdade

$$\frac{\partial \psi}{\partial \lambda}(t_1,\lambda)\cdot v = \left[F(\phi(t_1,\lambda),\psi(t_1,\lambda))\circ \frac{\partial \phi(t_1,\lambda)}{\partial \lambda}\right]\cdot v, \tag{5.4}$$

para todo $(t_1,\lambda)\in Z$ e todo $v\in T_\lambda\Lambda$. Fixemos $(t_1,\lambda)\in Z$ e $v\in T_\lambda\Lambda$ e seja t_0 como na condição (3) do enunciado. Seja $\gamma :]-\varepsilon,\varepsilon[\to \Lambda$ uma curva $\mathcal{C}^\infty$ com $\gamma(0)=\lambda$ e $\gamma'(0)=v$. Definamos uma aplicação $H:U\to A\subset M\times N$ do seguinte modo:

$$H(t,s)=(\phi(t,\gamma(s)),\psi(t,\gamma(s))),$$

onde $U\subset\mathbb{R}^2$ é o seguinte conjunto aberto

$$U=\{(t,s)\in\mathbb{R}\times]-\varepsilon,\varepsilon[:(t,\gamma(s))\in Z\}.$$

Obviamente, $I\times\{0\}\subset U$. A condição (2) acima implica que $\frac{\partial H}{\partial t}(t,s)\in gr(F)$ para todo $(t,s)\in U$. Ainda, como

$$\frac{\partial H}{\partial s}(t_0,0)=\left(\frac{\partial\phi}{\partial\lambda}(t_0,\lambda)\cdot v,\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}(t_0,\lambda)\cdot v\right),$$

a condição (3) implica que $\frac{\partial H}{\partial s}(t_0,0)\in gr(F)$. Como a forma de Levi de $gr(F)$ se anula em $H(t,0)$ para todo $t\in I$, do Lema 2 resulta que $\frac{\partial H}{\partial s}(t,0)\in gr(F)$, para todo $t\in I$. Em particular, $\frac{\partial H}{\partial s}(t_1,0)\in gr(f)$, isto é, 5.4 é válida.

Juntas, a condição (2) e a equação 5.4 implicam que

$$\mathrm{d}\psi(t_1,0)=(F(\phi(t_1,\lambda),\psi(t_1,\lambda))\circ \mathrm{d}\phi(t_1,\lambda)),$$

para todo $(t_1,\lambda)\in Z$. Usando essa igualdade e lembrando que, por hipótese, $\phi(\alpha(x))=x,\forall x\in V$, calculamos

$$\begin{aligned}\mathrm{d}f(x) &= \mathrm{d}\psi(\alpha(x))\circ \mathrm{d}\alpha(x)\\ &= F(\phi(\alpha(x)),\psi(\alpha(x)))\circ \mathrm{d}\phi(\alpha(x))\circ \mathrm{d}\alpha(x)\\ &= F(x,f(x))\circ \mathrm{d}(\phi\circ\alpha)(x)\\ &= F(x,f(x)).\end{aligned}$$

Assim a prova está concluida. ∎

COROLÁRIO 1 (Teorema de Frobenius Clássico). *Seja $A\ni(x,y)\mapsto F(x,y)\in Lin(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$ uma aplicação contínua definida num aberto $A\subset\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n$. Suponha que*

$$\frac{\partial F_{kj}(x,y)}{\partial x_i}+\sum_{r=1}^{n}F_{ri}(x,y)\frac{\partial F_{kj}(x,y)}{\partial y_r}=\frac{\partial F_{ki}(x,y)}{\partial x_j}+\sum_{r=1}^{n}F_{rj}(x,y)\frac{\partial F_{kj}(x,y)}{\partial y_r},$$

para todo $(x,y) \in A, i,j = 1,...,m, k = 1,...,n$. *Então, para todo* $(x_0,y_0) \in A$ *existe uma aplicação* C^∞ $f : V \to \mathbb{R}^n$ *definida numa vizinhança aberta de* x_0 *em* $\mathbb{R}^m$ *tal que* $f(x_0) = y_0$, $(x, f(x)) \in A$, *para todo* $x \in V$ *e* f *é uma solução da* EDP :

$$df(x) = F(x, f(x)), \; x \in V.$$

DEMONSTRAÇÃO. Faça $\phi(t,\lambda) = x_0 + t\lambda$, $\Lambda = \mathbb{R}^m$. Com $\psi(0,\lambda) = y_0$, $\psi(t,\lambda)$ é uma solução da EDO na condição (2). Faça $\alpha(x) = \left(\varepsilon, \frac{x-x_0}{\varepsilon}\right)$, onde $\varepsilon > 0$ é suficientemente pequeno para que $\psi(t,\lambda)$ esteja definido para $t = \varepsilon$. ∎

COROLÁRIO 2 (Teorema de Frobenius versão com formas.). *Sejam* M, N *veriedades* C^∞, E *um espaço vetorial real de dimensão finita e* ω^M, ω^N $1-formas$ *a valores em* E, *definidas, respectivamente, em* M *e* N. *Suponha que* $\omega^N(y) : T_yN \to E$ *seja um isomorfismo para todo* $y \in N$. *Sejam*

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times \Lambda \;&\supset\; Z \ni (t,\lambda) \mapsto \phi(t,\lambda) \in M, \\ \mathbb{R} \times \Lambda \;&\supset\; Z \ni (t,\lambda) \mapsto \psi(t,\lambda) \in N \end{aligned}$$

aplicações C^∞, *onde* Λ *é uma variedade* C^∞ *e* $Z \subset \mathbb{R} \times \Lambda$ *é um subconjunto aberto. Seja* $\alpha : V \to Z$ *uma aplicação* C^∞ *definida num aberto* $V \subset M$, *tal que* $\phi(\alpha(x)) = x$, *para todo* $x \in V$. *Assuma que*

(1) *Para cada* $(t,\lambda) \in Z$,

$$F(\phi(t,\lambda), \psi(t,\lambda))^* \left[d\omega^N(\psi(t,\lambda))\right] = d\omega^M(\phi(t,\lambda)),$$

onde $F(x,y) : T_xM \to T_yN$ *é uma aplicação linear definida por*

$$F(x,y) = \omega^N(y)^{-1} \circ \omega^M(x), \tag{5.5}$$

para todos $x \in M, y \in N$;

(2) *Para cada* $(t,\lambda) \in Z$,

$$\omega^N_{\psi(t,\lambda)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}(t,\lambda)\right) = \omega^M_{\phi(t,\lambda)}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}(t,\lambda)\right);$$

(3) *Para cada* $(t_1,\lambda) \in Z$ *existe* $t_0 \in \mathbb{R}$ *tal que* $I \times \{\lambda\} \subset Z$ *e*

$$\omega^N_{\psi(t_0,\lambda)} \circ \frac{\partial\psi}{\partial\lambda}(t_0,\lambda) = \omega^M_{\phi(t_0,\lambda)} \circ \frac{\partial\phi}{\partial\lambda}(t_0,\lambda),$$

onde $I \subset \mathbb{R}$ *denota o intervalo que tem* t_0 *e* t_1 *como extremos.*

Então a aplicação $f = \psi \circ \alpha : V \to N$ *satisfaz a seguinte equação*

$$f^*\omega^N = \omega^M|_V.$$

DEMONSTRAÇÃO. Aplique o Teorema 1 à seção de $\mathrm{Lin}\,(TM, TN)$ dada por F, esta definida em 5.5. observamos que a condição $f^*\omega^N = \omega^M|_V$ é equivalente a EDP $\mathrm{d}f\,(x) = F\,(x, f\,(x))$. Também é claro que as condições (2) e (3) do enunciado deste corolário são equivalentes as condições (2) e (3) do enunciado do teorema. Para completar esta prova, nós mostraremos que a forma de Levi de $gr\,(F)$ se anula em um ponto $(x, y) \in M \times N$ se e somente se

$$F\,(x, y)^* \left[\mathrm{d}\omega^N\,(y)\right] = \mathrm{d}\omega^M\,(x)\,.$$

Considere a $1-forma\ \theta$, a valores em E, definida em $M \times N$ dada por

$$\theta = \pi_2^*\omega^N - \pi_1^*\omega^M,$$

onde π_1 e π_2 denotam as projeções do produto $M \times N$. Assim, para todo $(x, y) \in M \times N$ e todo $(v, w) \in T_xM \oplus T_yM$, temos

$$\theta_{(x,y)}\,(v, w) = \omega_y^N\,(w) - \omega_x^M\,(v)\,.$$

É imediato que a aplicação $\theta_{(x,y)} : T_xM \oplus T_yM \longrightarrow E$ é sobrejetiva e que seu núcleo é igual ao gráfico de $F\,(x, y)$, para todo $(x, y) \in M \times N$. Em particular, a aplicação

$$\overline{\theta}_{(x,y)} : T_xM \oplus T_yM/gr\,(F)_{(x,y)} \longrightarrow E,$$

induzida no espaço quociente é um isomorfismo. Segue de 5.1 que a forma de Levi de $gr\,(f)$ se anula em (x, y) se e somente se $\mathrm{d}\theta_{(x,y)}$ anula $gr\,(F)$. Temos $\mathrm{d}\theta = \pi_2^*(\omega^N) - \pi_1^*(\omega^M)$, i.e.:

$$\mathrm{d}\theta_{(x,y)}\left((v_1, w_1)\,, (v_2, w_2)\right) = \mathrm{d}\omega_y^N\,(w_1, w_2) - \mathrm{d}\omega_x^M\,(v_1, v_2)\,,$$

para todos $(x, y) \in M \times N$, (v_1, w_1), $(v_2, w_2) \in T_xM \oplus T_yM$. Segue que $\mathrm{d}\theta_{(x,y)}$ anula $gr\,(F)$ se e somente se $F\,(x, y)^* \left[\mathrm{d}\omega^N\,(y)\right] = \mathrm{d}\omega^M\,(x)$. ∎

A seguir provamos um corolário do teorema de Frobenius (versão com distribuições, vide [8]) usando uma técnica devida a Élie Cartan, que consiste em determinar uma função à partir de seu gráfico. Este Corolário pode ser encontrado em [3]

COROLÁRIO 3. *Sejam G um grupo de Lie com forma de $Maurer-Cartan$ λ e álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e M uma variedade onde está definida τ, uma $1-forma$ a valores em $\mathfrak{g}$. São equivalentes*

(i) Para todo $m \in M$, existe um aberto $U \subset M$, $m \in U$ e uma função $f : U \overset{C^\infty}{\longrightarrow} G$ tal que $f^*\lambda = \tau_{|U}$.

(ii) Para todos $m \in M$ e $g \in G$, existe um aberto $U \subset M$, $m \in U$ e uma função $f : U \overset{C^\infty}{\longrightarrow} G$ tal que $f\,(m) = g$ e $f^*\lambda = \tau_{|U}$.

(iii) τ satisfaz a equação de Cartan, ista é, $d\tau = \frac{1}{2}\tau \wedge \tau$.

DEMONSTRAÇÃO. $(i) \Rightarrow (ii)$ Dado um par (m, g) e assumindo a validade de (i), vamos provar que existe $f : M \longrightarrow G$ tal que $f(m) = g$ e $f^*\lambda = \tau_{|U}$. Por (i), existe alguma $f' : M \longrightarrow G$ que leva m em algum g' em G, ou seja $f'(m) = g'$. Mas sendo G um grupo de Lie, existe $h \in M$ tal que $hg' = g$. Assim $(l_h \circ f')(m) = g$, e, como λ é invariante a esquerda, segue que $(l_h \circ f')^*\lambda = \tau$.

$(ii) \Rightarrow (i)$ É trivial.

$(ii) \Leftrightarrow (iii)$ Usando a definição de pull-back em (ii), temos, para qualquer $m \in M$,

$$\lambda_{f(m)} \circ df(m) = \tau(m),$$

o que é equivalente a

$$df(m) = \lambda_{f(m)}^{-1} \circ \tau_m, \forall m \in M.$$

A igualdade acima representa condição necessária e suficiente sobre df para que f exista.

Sejam m$\in M$ e $g \in G$. Vamos definir, à partir das *1-formas* τ e λ de nosso enuciado, uma aplicação $F(m, g) \in Lin(T_mM, T_gG)$ da seguinte maneira

$$F(m, g) = \lambda_g^{-1} \circ \tau_m.$$

Desse jeito, criamos uma $\mathcal{D}$ distribuição na variedade $M \times G$, definida por

$$\mathcal{D}_{(m,g)} = Gr\ F(m, g),$$

caso esta distribuição seja integrável, $Gr\ f$ será uma subvariedade integral de $\mathcal{D}$. Sabemos, pelo teorema de Frobenius, que $\mathcal{D}$ será integrável se e somente se for involutiva. Então devemos decidir quando $\mathcal{D}$ será involutiva.

Definimos a $1 - forma\ \sigma : M \times G \longrightarrow \mathfrak{g}$ por

$$\sigma_{(m,g)}(v, w) = \lambda_g(w) - \tau_m(v),$$

e observamos que nossa distribuição $\mathcal{D}$ pode ser escrita da seguinte forma

$$\mathcal{D}_{(m,g)} = \left\{ \left(v, \lambda_g^{-1} \circ \tau_m(v)\right) : v \in T_mM \right\} = \ker \sigma_{(m,g)},$$

ou seja, podemos expressar $\mathcal{D}$ como o núcleo de σ.

Sejam X e Y campos pertencentes a $\mathcal{D}$. Sabemos que

$$d\sigma(X, Y) = X(\sigma(Y)) - Y(\sigma(X)) - \sigma([X, Y]).$$

Pela definição de $\mathcal{D}$ em termos de σ, $X(\sigma(Y)) = Y(\sigma(X)) = 0$ e portanto temos

$$d\sigma(X, Y) = -\sigma([X, Y]).$$

Sejam $v, w \in T_m M$. Façamos:

$$X = \left(v, \lambda_g^{-1} \circ \tau_m(v)\right), \quad Y = \left(w, \lambda_g^{-1} \circ \tau_m(w)\right).$$

Queremos que $\mathcal{D}$ seja involutiva, o que, pelos cálculos acima, é equivalente a $d\sigma$ anular $\mathcal{D}$, ou seja

$$d\sigma\left(\left(v, \lambda_g^{-1} \circ \tau_m(v)\right), \left(w, \lambda_g^{-1} \circ \tau_m(w)\right)\right) = 0,$$

mas pela maneira que definimos σ, é equivalente a

$$d\lambda_g\left(\lambda_g^{-1} \circ \tau_m(v), \lambda_g^{-1} \circ \tau_m(w)\right) - d\tau_m(v, w) = 0.$$

Mas λ é forma de Maurer-Cartan de G e portanto satisfaz a equação de Cartan, ou seja

$$d\lambda = -\frac{1}{2}[\lambda, \lambda],$$

assim temos

$$d\lambda_g\left(\lambda_g^{-1} \circ \tau_m(v), \lambda_g^{-1} \circ \tau_m(w)\right) = -\frac{1}{2}\left[\lambda_g\left(\lambda_g^{-1} \circ \tau_m(v)\right), \lambda_g\left(\lambda_g^{-1} \circ \tau_m(w)\right)\right].$$

Portanto temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left[\lambda_g\left(\lambda_g^{-1} \circ \tau_m(v)\right), \lambda_g\left(\lambda_g^{-1} \circ \tau_m(w)\right)\right] + d\tau_m(v, w) &= 0 \Leftrightarrow \\
\frac{1}{2}\left[\tau_m(v), \tau_m(w)\right] + d\tau_m(v, w) &= 0 \Leftrightarrow \\
d\tau &= -\frac{1}{2}[\tau, \tau]
\end{aligned}$$

∎

CAPíTULO 2

Teoria das Conexões

1. Introdução

O conceito de aceleração (derivadas segundas de "curvas", ou derivadas de campos vetoriais) é nescessário em Ciência. Mas não há, pelo menos de antemão, uma maneira natural (que estenda a noção de derivada covariante de superfícies do $\mathbb{R}^n$) de fazer tais derivadas em uma variedade diferenciável qualquer. Cada conexão representa uma maneira de realizar tal derivação e todas as conexões possíveis representam todas as maneiras.

Utilizaremos neste trabalho duas definições de conexão. A conexão dada através do operador ∇ (conexão em um fibrado vetorial), definido no conjunto dos campos vetoriais de uma variedade, é chamada conexão de Koszul. A outra definição de conexão usada aqui é aquela que se originou do trabalho de Ehresmann e é chamada de conexão em fibrados principais. Este capítulo é fechado com uma seção que apresenta a idéia de fibrado associado e como definir neste uma noção de conexão derivada da conexão do fibrado principal.

2. Conexão em Fibrados Vetoriais

Se temos $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular , $\gamma : [-\epsilon, \epsilon] \longrightarrow S$ curva diferenciável e X um campo vetorial, C^∞, de S ao longo de γ, a noção intuitiva de derivada covariante de X ao longo de γ é a noção da derivada de X, na direção de $\dot{\gamma}$, "vista"do plano tangente $T_{\gamma(t)}M$. Em termos matemáticos, isso é feito derivando-se $X(\gamma(t))$ como um vetor em $\mathbb{R}^3$, obtendo-se assim um vetor em $\mathbb{R}^3$, e em seguida fazendo a projeção ortogonal deste vetor em $T_{\gamma(t)}M$. Porém estamos interessados em calcular derivadas covariantes numa variedade qualquer e, além disto, queremos calcular a derivada covariante de seções de um fibrado vetorial $\pi : \xi \to M$ sobre M e não só de campos de TM. Mas, como já comentamos na introdução, numa variedade diferenciável qualquer, não há uma maneira natural de se executar o processo que acabamos de descrever, a maneira de contornar tal obstáculo é apresentada na definição abaixo.

DEFINIÇÃO 16 (Conexões em Fibrados Vetoriais). *Seja M uma variedade diferenciável C^∞ e seja $\pi : \xi \longrightarrow M$ um vibrado vetorial sobre M, Seja p um ponto de M.Dizemos que uma* conexão *em E é uma aplicação $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(\xi) \longrightarrow \Gamma(\xi)$ tal que:*
$(i)\nabla_X(Y_1 + Y_2) = \nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2$,
$(ii)\nabla_{f_1X_1+f_2X_2}Y = f_1\nabla_{X_1}Y + f_2\nabla_{X_2}Y$,
$(iii)\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$,
Onde $X, X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$, $Y, Y_1, Y_2 \in \Gamma(\xi)$ e $f, f_1, f_2 \in C^\infty(M)$.

Dada uma seção $s \in \Gamma(\xi)$ (onde reforçamos que $\pi : \xi \longrightarrow M$ pode não ser TM) e uma curva $\gamma : [a, b] \longrightarrow M$, queremos definir a derivada covariante de s ao longo de γ. Para tanto, devemos definir o conceito de derivada covariante ao longo de funções, que será definido após as duas próximas definições preliminares.

Agora seja dada uma conexão ∇ no fibrado vetorial $\pi : \xi \longrightarrow M'$ e $f : M \longrightarrow M'$ uma aplicação C^∞. O próximo teorema nos permitirá calcular a derivada a derivada covariante de seções de ξ ao longo de f. Ou seja, é um teorema que define em $f^*\xi$ uma conexão $f^*\nabla$ que corresponde a canonicamente a ∇.

TEOREMA 2. *Sejam $f : M \longrightarrow M'$ uma aplicação C^∞ e $\pi : \xi \longrightarrow M'$ um fibrado vetorial sobre M' com fibra típica ξ_0. Seja ∇ uma conexão no fibrado vetorial ξ. Existe uma única conexão $f^*\nabla$ em $f^*\xi$ tal que, se $s \in \Gamma(\xi)$, $v \in T_xM$, então $(f^*\nabla)_v (s \circ f) = \nabla_{df(v)}s$.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $U \subset M'$ um aberto sobre o qual conseguimos uma base de seções de ξ denotada por $\{s_1, ..., s_c\}$. Então as seções $s_i \circ f$ de $f^*\xi|_{f^{-1}(U)}$ são geradores de $\Gamma\left(f^*\xi|_{f^{-1}(U)}\right)$ como módulo, e sobre estas todos os candidatos a $f^*\nabla$ coincidem. Assim está provada a unicidade. Basta provar a existência no caso em que M' admite globalmente uma base de seções de ξ. Nesse caso, observe que se os s_i formam uma base de seções de ξ, então os $s_i \circ f$ formam uma base de seções de $f^*\xi$, de onde cada $s \in \Gamma(f^*\xi)$ se escreve de modo único como

$$\sum_{i=1}^{c} g_i s_i \circ f,$$

onde as g são funções escalares em M. Daí definimos $f^*\nabla$ pela fórmula

$$(f^*\nabla)_v (s) = \sum_{i=1}^{c} v(g_i)\, s_i(f(x)) + g_i(x)\left(\nabla_{df(v)}s_i\right),$$

onde $x \in M$ e $v \in T_xM$. ∎

DEFINIÇÃO 17. *Sejam $f : M \longrightarrow M'$ uma aplicação C^∞ e $\pi : \xi \longrightarrow M'$ um fibrado vetorial sobre M'. Seja ∇ uma conexão no fibrado*

vetorial ξ. *Sejam* $s \in \Gamma(\xi)$, $v \in T_xM$. *Denotamos por* $T^*\nabla$ *a conexão em* M *dada por* $(T^*\nabla)_v (s \circ T) = \nabla_{T(v)} s$.

DEFINIÇÃO 18. *Sejam* $\gamma : [a,b] \longrightarrow M$ *uma curva* C^∞, $\pi : \xi \to M$ *um fibrado vetorial sobre* M *e* ∇ *uma conexão em* M. *Seja* $X \in \mathfrak{X}(M)$ *um campo vetorial. A derivada covariante de* X *ao longo de* γ, *é dada por* $\frac{DX}{dt} = (\gamma^*\nabla)_1 (X \circ \gamma)$.

Assim temos que cada conexão em M define uma noção diferente de derivação covariante em M. A Definição 16 nos garante que $(\frac{DX}{dt})_\gamma$ tem realmente as propriedades de uma derivada.

DEFINIÇÃO 19. *Seja* $\pi : \xi \to M$ *um fibrado vetorial sobre* M. *Seja* ∇ *uma conexão em* M *e seja* $\gamma : [a,b] \to M$, *uma curva* C^∞ *em* M *e* $X : [a,b] \to \xi$ *seção de* ξ *ao longo de* γ. *Dizemos que* X *é* paralelo *se:*

$$\frac{DX}{dt} = 0.$$

Observamos que a noção de paralelismo em M depende de qual conexão estamos considerando, no sentido de que quando definimos qual conexão usaremos, definimos assim quais são os campos que podemos considerar paralelos.

OBSERVAÇÃO 2. *Podemos associar a uma conexão em* ξ *uma distribuição na variedade* ξ. *Para cada* $u \in \xi$ *consideramos o subconjunto* Hor_u *de* $T_u\xi$ *que consiste de todos os vetores* $X'(0) \in T_u\xi$, *onde* $X : I \to \xi$ *é uma seção paralela de* ξ *ao longo de uma curva* $\gamma : I \to M$ *com* $X(0) = u$. *Os seguintes fatos são fáceis de verificar usando coordenadas locais e uma trivialização local de* ξ:

(1) Hor_u *é um subespaço de* $T_u\xi$, *para todo* $u \in \xi$;
(2) $T_u\xi = Ver_u \oplus Hor_u$, *onde* $Ver_u = \mathrm{d}\pi(u)$ *denota o espaço tangente em* u *à fibra de* ξ *que contém* u;
(3) *se* s *é uma seção local de* ξ *e* $v \in T_xM$, $x \in M$, *então* $\nabla_v s$ *coincide com a projeção em* $Ver_{s(x)}$ *de* $\mathrm{d}s(x) \cdot v$ *relativamente à decomposição* $Ver_{s(x)} \oplus Hor_{s(x)}$.

Se Hor *é uma distribuição na variedade* ξ *satisfazendo a condição (2) acima, não é sempre verdade que a condição (3) define uma conexão* ∇ *em* ξ *correspondente a* Hor *(veja Seção 4 abaixo).*

DEFINIÇÃO 20. *Seja* ∇ *uma conexão em* TM. *Uma curva* $\gamma : [0,1] \to U$, C^∞, *é uma* geodésica *se*

$$\frac{D\dot{\gamma}}{dt} = 0.$$

Assim, γ é uma geodésica se o campo vetorial $\dot{\gamma}$ for paralelo ao longo da curva γ. Portanto, uma geodésica é uma curva, em um certo sentido, com aceleração nula. O fato de uma curva γ ser uma geodésica ou não, depende da conexão que está sendo considerada, isto quer dizer que se γ é geodésica em relação à conexão ∇, pode ser que γ não seja conexão em relação à conexão ∇'.

Seja $\pi : \xi \to M$ um fibrado vetorial sobre M e ∇ uma conexão em ξ. O tensor de curvatura $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(\xi) \to \Gamma(\xi)$ de ∇ é definido por:

$$R(X,Y)\,s = \nabla_X \nabla_Y s - \nabla_Y \nabla_X s - \nabla_{[X,Y]} s,$$

onde X, $Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $s \in \Gamma(\xi)$.

Dado um morfismo $i : TM \to \xi$, definimos o tensor torção $T : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \Gamma(\xi)$ de ∇ associado a i por

$$T(X,Y) = \nabla_X i(Y) - \nabla_Y i(X) - i\big([X,Y]\big).$$

2.1. Variedades Riemannianas. Aqui daremos definições e convenções necessárias para esta dissertação.

No caso de estarmos tratando com uma variedade Riemanniana (M,g), existe, em meio a todas as conexões possíveis, uma conexão privilegiada, como afirma o próximo teorema, a Conexão de Levi-Civita, que é uma conexão compatível com a métrica Riemanniana (isto é, se para toda curva C^∞ γ e para quaiquers X e X' vetores paralelos ao longo de γ, temos $g(X,X')$ =constante) e simétrica (isto é, com torsão nula).

TEOREMA 3. *(Teorema de Levi-Civita). Seja M uma variedade Riemanniana. Existe única conexão em M que é compatível com a métrica de M e é simétrica.*

DEMONSTRAÇÃO. Ver [2, §2-3] ∎

A curvatura seccional de uma variedade Riemanniana M é definida por:

$$K(v,w) = -\frac{\langle R(v,w)\,v, w\rangle}{\|v \wedge w\|^2}$$

onde R denota o tensor de curvatura da conexão de Levi-Civita.

DEFINIÇÃO 21. *Sejam (M,g) e $(\overline{M},\overline{g})$ variedades Riemannianas. Uma imersão isométrica de M em $\overline{M}$ é uma imersão, i.e., uma aplicação $f : M \to \overline{M}$ tal que a sua diferencial df é injetora em todos os pontos de M, que conserva a métrica, isto é, se $x \in M$ e $v_1, v_2 \in T_xM$, temos*

$$g_{f(x)}\left(df_x \cdot v_1, df_x \cdot v_2\right) = g_x\left(v_1, v_2\right).$$

LEMA 3. *Sejam* (M,g) *e* $(\overline{M},\overline{g})$ *variedades Riemannianas e* $f : M \longrightarrow \overline{M}$ *uma imersão isométrica. Seja* $\overline{\nabla}$ *a conexão de Levi-Civita de* $(\overline{M},\overline{g})$. *Então*

$$\nabla_X Y = \pi_{TM}^{\perp}\left(\overline{\nabla}_X Y\right), \; X, Y \in \Gamma(TM)$$

é a conexão de Levi-Civita de TM.

DEMONSTRAÇÃO. É fácil ver que ∇ é simétrica e compatível com g. ∎

2.2. As componentes de uma conexão relativamente a uma soma direta. Seja ξ um fibrado vetorial sobre uma variedade M, e ξ_1,ξ_2 subfibrados vetoriais de ξ tais que $\xi = \xi_1 \oplus \xi_2$. Mostraremos a seguir, como, à partir de uma conexão em ξ, podemos obter as conexões em ξ_1 e em ξ_2, e, reciprocamente, como obter uma conexão em ξ à partir das conexões de ξ_1 e ξ_2 e de tensores que generalizam a ideia de segunda forma fundamental da Geometria Riemanniana Clássica. Informalmente dizendo, mostramos que derivando uma seção de ξ_1 (usando uma conexão de ξ) e projetamdo o resultado em ξ_1, obtemos uma conexão em ξ_1. Por outro lado, derivando uma seção de ξ_1 e projetando o resultado em ξ_2, obteremos um tensor.

Seja ξ um fibrado vetorial sobre uma variedade M, tal que $\xi = \xi_1 \oplus \xi_2$, onde $\xi_1, \xi_2 \subset \xi$ são subfibrados vetoriais de ξ e $\pi_1 : \xi \longrightarrow \xi_1$, $\pi_2 : \xi \longrightarrow \xi_2$ são as projeções.

Seja $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(\xi) \longrightarrow \Gamma(\xi)$ uma conexão em ξ. Existe uma maneira natural de definir uma conexão ∇^1 em ξ_1 (e uma conexâo ∇^2 em ξ_2) à partir de ∇, como explicaremos a seguir.

Seja $X \in \Gamma(TM)$. Se $s \in \Gamma(\xi_1)$, então definimos uma conexão ∇^1em ξ_1 por

$$\left(\nabla_X^1 s\right) = \pi_1\left(\nabla_X s\right). \tag{2.1}$$

Por outro lado, se $s \in \Gamma(\xi_2)$, então definimos uma conexão ∇^2 em ξ_2 por

$$\left(\nabla_X^2 s\right) = \pi_2\left(\nabla_X s\right).$$

É fácil ver que ∇^1 (e também ∇^2) é $\mathcal{C}^\infty(M) - linear$ no primeiro argumento e é $\mathbb{R} - linear$ no segundo. Abaixo verificamos a validade da propriedade derivativa de uma conexão.Sendo $i = 1, 2$, sejam $f : M \xrightarrow{\mathcal{C}^\infty} \mathbb{R}$, e $s \in \Gamma(\xi_i)$.

$\left(\nabla_X^i f s\right) = \pi_i\left(\nabla_X f s\right) = \pi_i\left(X(f)s + f\nabla_X s\right) =$
$\pi_i\left(X(f)s\right) + f\pi_i\left(\nabla_X s\right) = X(f)s + f\nabla_X^i s.$

Consideraremos agora as seguintes aplicações lineares:

(i) $\alpha_{12} : \mathfrak{X}(TM) \times \Gamma(\xi_1) \to \Gamma(\xi_2)$, definida por

$$\alpha_{12}(X, s) = \pi_2(\nabla_X s), \tag{2.2}$$

onde $s \in \Gamma(\xi_1)$.

(ii) $\alpha_{21} : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(\xi_2) \to \Gamma(\xi_1)$, definida por

$$\alpha_{21}(X, s) = \pi_1(\nabla_X s),$$

onde $s \in \Gamma(\xi_2)$.

A verificação a seguir mostra que as aplicações α_{12} e α_{21} são tensores. Se f é uma função de M em $\mathbb{R}$ e $s \in \Gamma(\xi_1)$ temos:

$$\begin{aligned}\alpha_{12}(X, fs) = \pi_2(\nabla_X fs) &= \pi_2(f\nabla_X s + X(f)s) \\ &= \pi_2(f\nabla_X s) + \pi_2(X(f)s) = f\pi_2(\nabla_X s),\end{aligned}$$

uma vez que $\pi_2(X(f)s) = 0$, pois $X(f)s \in \Gamma(\xi_1)$. Quase desnecessário é dizer que a verificação acima se aplica de maneira idêntica a α_{21}.

Os objetos ∇^1, ∇^2, α_{12}, α_{21} são chamados as *componentes* de ∇.

O resultado a seguir mostra que podemos definir uma conexão em ξ à partir das conexões em ξ_1 e ξ_2, e dos tensores α_{12} e α_{21}, em outras palavras, é um resultado recíproco à discussão acima.

TEOREMA 4. *Sejam dados uma conexão ∇^1 em ξ_1, uma conexão ∇^2 em ξ_2 e tensores $\alpha_{12} : \mathfrak{X}(TM) \times \Gamma(\xi_1) \to \Gamma(\xi_2)$ e $\alpha_{21} : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(\xi_2) \to \Gamma(\xi_1)$ então existe uma única conexão ∇ em ξ com componentes ∇^1, ∇^2, α_{12} e α_{21}.*

DEMONSTRAÇÃO. É fácil ver que as definições dadas das componentes implicam que ∇ deve ser dada por

$$\nabla_X s = \nabla^1_X s_1 + \alpha_{21}(X, s_2) + \nabla^2_X s_2 + \alpha_{12}(X, s_1),$$

onde $s_i = \pi_i(s)$, $i = 1, 2$.

Dessa maneira, ∇ é claramente $\mathbb{R}-$*linear* em s e $C^\infty-$*linear* em X. Vamos verificar a validade da propriedade derivativa da definição de uma conexão. Seja $f : M \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}$, então

$\nabla_X fs = \nabla^1_X fs_1 + \alpha_{21}(X, fs_2) + \nabla^2_X fs_2 + \alpha_{12}(X, fs_1) \Rightarrow$

$\nabla_X fs = X(f)s_1 + f\nabla^1_X s_1 + f\alpha_{21}(X, s_2) + X(f)s_2 + f\nabla^2_X s_2 + f\alpha_{12}(X, s_1) \Rightarrow$

$\nabla_X fs = X(f)(s_1 + s_2) + f\nabla_X s.$

Assim está finalizada a prova do teorema ∎

LEMA 4. *Sejam $\pi : \xi \to M$ e $\pi' : \eta \to M$ fibrados vetoriais sobre uma variedade M tais que $\xi = \xi_1 \oplus \xi_2$ e $\eta = \eta_1 \oplus \eta_2$. Seja $T : \xi \to \eta$*

um isomorfismo de fibrados vetoriais tal que $T(\xi_1) = \eta_1$ *e* $T(\xi_2) = \eta_2$. *Sejam*

∇^η *conexão em* η *com correspondentes* ∇^{η_1}, ∇^{η_2}, α^η_{12} *e* α^η_{21};

∇^ξ *conexão em* ξ *com correspondentes* ∇^{ξ_1}, ∇^{ξ_2}, α^ξ_{12} *e* α^ξ_{21}

Então são equivalentes as seguintes condições

(1) $T^*\nabla^\eta = \nabla^\xi$;

(2) $T^*\nabla^{\eta_1} = \nabla^{\xi_1}$, $T^*\nabla^{\eta_2} = \nabla^{\xi_2}$, $\alpha^\eta_{12}(\cdot,\cdot) = T\alpha^\xi_{12}(\cdot,\cdot)$ *e* $\alpha^\eta_{21}(\cdot,\cdot) = T\alpha^\xi_{21}(\cdot,\cdot)$.

DEMONSTRAÇÃO. Decorre imediatamente do Teorema 4. ∎

Vamos agora mostrar como o tensor de curvatura R da conexão ∇ de ξ pode ser expresso em termos dos tensores α_{12} e α_{21}, e dos tensores de curvatura R_1 e R_2 das conexões ∇^1 e ∇^2.

Vamos obter uma fórmula para $\pi_i(R(X,Y)s_j)$ para X,Y$\in \Gamma(TM)$ e $s_j \in \Gamma(\xi_j)$, $i,j = 1,2$.

Seja $s \in \Gamma(\xi_1)$, então temos:

$$\pi_1(R(X,Y)s) = \pi_1\left(\nabla_X\nabla_Y s - \nabla_Y\nabla_X s - \nabla_{[X,Y]}s\right)$$

aqui vale lembrar que $s \in \Gamma(\xi_1)$ implica

$$\nabla_Y s = \nabla^1_Y s + \alpha_{12}(Y,s)$$

e assim teremos

$\pi_1(\nabla_X\nabla_Y s) = \pi_1\left(\nabla_X\nabla^1_Y s + \nabla_X\alpha_{12}(Y,s)\right) =$

$\pi_1(\nabla^1_X\nabla^1_Y s + \alpha_{12}\left(X,\nabla^1_Y s\right) + \nabla^2_X\alpha_{12}(Y,s) + \alpha_{21}(X,\alpha_{12}(Y,s)))$

lembrando que $\nabla^1_Y s \in \Gamma(\xi_1)$ e que $\alpha_{12}(Y,s) \in \Gamma(\xi_2)$ temos

$$\pi_1(\nabla_X\nabla_Y s) = \nabla^1_X\nabla^1_Y s + \alpha_{21}(X,\alpha_{12}(Y,s)).$$

Analogamente temos

$$\pi_1(\nabla_Y\nabla_X s) = \nabla^1_Y\nabla^1_X s + \alpha_{21}(Y,\alpha_{12}(X,s))$$

Temos ainda, sempre com $s \in \Gamma(\xi_1)$,

$$\nabla_{[X,Y]}s = \nabla^1_{[X,Y]}s + \alpha_{12}([X,Y],s),$$

tomando a projeção em ξ_1, temos

$$\pi_1\left(\nabla_{[X,Y]}s\right) = \nabla^1_{[X,Y]}s.$$

Assim temos

$$\begin{aligned}\pi_1(R(X,Y)s) &= \nabla^1_X\nabla^1_Y s - \nabla^1_Y\nabla^1_X s - \nabla^1_{[X,Y]}s + \alpha_{21}(X,\alpha_{12}(Y,s)) \\ &\quad -\alpha_{21}(Y,\alpha_{12}(X,s))\end{aligned}$$

logo

$$\pi_1\left(R\left(X,Y\right)s\right)=R_1\left(X,Y\right)s+\alpha_{21}(X,\alpha_{12}\left(Y,s\right))-\alpha_{21}(Y,\alpha_{12}\left(X,s\right))$$

De maneira análoga, quando $s\in\Gamma\left(\xi_2\right)$, chegamos a

$$\pi_2(R\left(X,Y\right)s)=R_2\left(X,Y\right)s+\alpha_{12}(X,\alpha_{21}\left(Y,s\right))-\alpha_{12}(Y,\alpha_{21}\left(X,s\right))$$

Seja agora $s\in\Gamma\left(\xi_1\right)$, vamos calcular $\pi_2\left(R\left(X,Y\right)s\right)$. Inicialmente temos

$$\pi_2\left(R\left(X,Y\right)s\right)=\pi_2\left(\nabla_X\nabla_Y s-\nabla_Y\nabla_X s-\nabla_{[X,Y]}s\right)$$

Temos novamente

$$\nabla_X\nabla_Y s=\nabla_X^1\nabla_Y^1 s+\alpha_{12}\left(X,\nabla_Y^1 s\right)+\nabla_X^2\alpha_{12}\left(Y,s\right)+\alpha_{21}\left(X,\alpha_{12}\left(Y,s\right)\right),$$

porém agora estamos considerando π_2 a projeção em ξ_2, e como $\nabla_X^1\nabla_Y^1 s$ e $\alpha_{21}\left(X,\alpha_{12}\left(Y,s\right)\right)$ são seções de ξ_1, temos

$$\pi_2\left(\nabla_X\nabla_Y s\right)=\alpha_{12}\left(X,\nabla_Y^1 s\right)+\nabla_X^2\alpha_{12}\left(Y,s\right).$$

De maneira completamente análoga temos

$$\pi_2\left(\nabla_Y\nabla_X s\right)=\alpha_{12}\left(Y,\nabla_X^1 s\right)+\nabla_Y^2\alpha_{12}\left(X,s\right).$$

Observamos que, se s$\in\Gamma\left(\xi_1\right)$, temos:

$$\nabla_{[X,Y]}s=\nabla_{[X,Y]}^1 s+\alpha_{12}\left(\left[X,Y\right],s\right),$$

então, fazendo a projeção em ξ_2, temos

$$\pi_2\left(\nabla_{[X,Y]}s\right)=\alpha_{12}\left(\left[X,Y\right],s\right).$$

Assim,

$$\begin{aligned}\pi_2\left(R\left(X,Y\right)s\right)=\alpha_{12}\left(X,\nabla_Y^1 s\right)+\nabla_X^2\alpha_{12}\left(Y,s\right)-\alpha_{12}\left(Y,\nabla_X^1 s\right)\\ -\nabla_Y^2\alpha_{12}\left(X,s\right)-\alpha_{12}\left(\left[X,Y\right],s\right).\end{aligned}$$

Escolhendo uma conexão arbitrária ∇^{TM} em TM, com torção T, obtemos

$$\pi_2\left(R\left(X,Y\right)s\right)=\left(\nabla\alpha_{12}\right)\left(X,Y,s\right)-\left(\nabla\alpha_{12}\right)\left(Y,X,s\right)+\alpha_{12}\left(T\left(X,Y\right),s\right).$$

Agora, de maneira análoga ao último caso, temos o caso em que $s\in\Gamma\left(\xi_2\right)$ e faremos a projeção de $R\left(X,Y\right)s$ em ξ_1. Temos o seguinte resultado

$$\pi_1\left(R\left(X,Y\right)s\right)=\left(\nabla\alpha_{21}\right)\left(X,Y,s\right)-\left(\nabla\alpha_{21}\right)\left(Y,X,s\right)+\alpha_{21}\left(T\left(X,Y\right),s\right).$$

Acabamos de provar o seguinte

TEOREMA 5. *Seja ∇ uma conexão em ξ com componentes ∇^1, ∇^2, α_{12}, α_{21}, e ∇^{TM} é uma conexão em M com torção T, então:*

(1) *Seja* $s \in \Gamma(\xi_1)$ *então*

$$\pi_1(R(X,Y)s) = R_1(X,Y)s + \alpha_{21}(X, \alpha_{12}(Y,s)) - \alpha_{21}(Y, \alpha_{12}(X,s))$$

(2) *Seja* $s \in \Gamma(\xi_2)$ *então*

$$\pi_2(R(X,Y)s) = R_2(X,Y)s + \alpha_{12}(X, \alpha_{21}(Y,s)) - \alpha_{12}(Y, \alpha_{21}(X,s))$$

(3) *Seja* $s \in \Gamma(\xi_1)$ *então*

$$\pi_2(R(X,Y)s) = (\nabla\alpha_{12})(X,Y,s) - (\nabla\alpha_{12})(Y,X,s) + \alpha_{12}(T(X,Y),s).$$

(4) *Seja* $s \in \Gamma(\xi_2)$ *então*

$$\pi_1(R(X,Y)s) = (\nabla\alpha_{21})(X,Y,s) - (\nabla\alpha_{21})(Y,X,s) + \alpha_{21}(T(X,Y),s).$$

Os resultados acima representam uma generelização das Equações de Estrutura de *Gauss-Codazzi-Ricci*, da geometria diferencial clássica, sendo que (1) e (2) generalizam tanto a equação de Gauss quanto a de Ricci, e (3) e (4) generalizam a equação de Codazzi.

Considere agora uma estrutura Riemanniana g_1 dada em ξ_1 e uma estrutura Riemanniana g_2 dada em ξ_2. Podemos construir em $\xi = \xi_1 \oplus \xi_2$ uma estrutura Riemanniana g, a partir de g_1 e g_2. Pela maneira como definimos ξ, quaisquer que sejam $v_1, v_2 \in \xi_x$, existem $s_1, s_2 \in (\xi_1)_x$ e $r_1, r_2 \in (\xi_2)_x$ tais que $v_1 = (s_1, r_1)$ e $v_2 = (s_2, r_2)$. Então definimos

$$g((s_1,r_1),(s_2,r_2)) = g_1(s_1,s_2) + g_2(r_1,r_2).$$

LEMA 5. *Seja* ξ *um fibrado vetorial, com métrica* g *e conexão* ∇, *sobre* M. *Sejam* ξ_1 *e* ξ_2 *fibrados vetoriais tais que* $\xi = \xi_1 \oplus \xi_2$ *seja uma decomposição ortogonal. Sejam* ∇^1, ∇^2, α_{12}, α_{21} *as componentes de* ∇. *Então,* g *é* $\nabla-$*paralela se e somente se* g_1 *é* $\nabla_1 -$ *paralela,* g_2 *é* $\nabla_2 -$ *paralela e*

$$g_2(\alpha_{12}(X,s_1),s_2) = -g_1(\alpha_{21}(X,s_2),s_1)$$

DEMONSTRAÇÃO. Suponha que g é paralela e vamos mostrar que g_1 e g_2 são paralelas e também que a equação

$$g_2(\alpha_{12}(X,s_1),s_2) = -g_1(\alpha_{21}(X,s_2),s_1)$$

é satisfeita.

Uma vez que, em ξ_1, ∇ coincide com ∇^1, para $r, s \in \Gamma(\xi_1)$, temos

$$Xg(r,s) = g(\nabla_X r, s) + g(r, \nabla_X s) = Xg_1(r,s),$$

ou seja, g_1 é $\nabla^1 -$ *paralela.*

Argumento análogo mostra que g_2 é $\nabla^2 -$ *paralela.*

Seja agora $r \in \Gamma(\xi_1)$, $r \in \Gamma(\xi_2)$. Temos

$Xg(r,s) = g(\nabla_X r, s) + g(r, \nabla_X s)$, porém, $Xg(r,s) = 0$ e

$$\begin{aligned} \nabla_X r &= \nabla_X^1 r + \alpha_{12}(X,r) \text{ e} \\ \nabla_X s &= \nabla_X^2 s + \alpha_{21}(X,s) \end{aligned}$$

Então, finalmente temos

$$g(\alpha_{12}(X,r), s) + g(r, \alpha_{21}(X,s)) = 0.$$

Vamos assumir que g_1 é ∇^1-paralela, g_2 é ∇^2-paralela e que vale $g(\alpha_{12}(X,r), s) + g(r, \alpha_{21}(X,s)) = 0$ e vamos provar que g é $\nabla -$ *paralela*

Uma vez que g é uma aplicação bilinear, é suficiente examinar os três casos a seguir:

(i) $r, s \in \Gamma(\xi_1)$;
(ii) $r, s \in \Gamma(\xi_2)$;
(iii) $r \in \Gamma(\xi_1)$ e $s \in \Gamma(\xi_2)$;

Caso (i) : Como r , $s \in \Gamma(\xi_1)$, este caso se restringe a ξ_1 onde temos $g(r,s) = g_1(r,s)$ e coincidência de ∇ e ∇^1 e portanto temos

$$Xg_1(r,s) = g_1(\nabla_X r, s) + g_1(r, \nabla_X s) = Xg(r,s)$$

Caso (ii) : É um caso totalmente análogo ao caso (i).

Caso (iii) : Como r está em ξ_1 e s está em ξ_2, temos

$$\begin{aligned} g(\nabla_X^1 r, s) &= 0, \\ g(r, \nabla_X^2 s) &= 0, \\ Xg(r,s) &= 0. \end{aligned}$$

Lembrando que

$$\begin{aligned} \nabla_X r &= \nabla_X^1 r + \alpha_{12}(X,r) \text{ e} \\ \nabla_X s &= \nabla_X^2 s + \alpha_{21}(X,s), \end{aligned}$$

temos que

$$g(\alpha_{12}(X,r), s) + g(r, \alpha_{21}(X,s)) = 0 \Rightarrow g(\nabla_X r, s) + g(r, \nabla_X s) = 0$$

Portanto

$$Xg(r,s) = g(\nabla_X r, s) + g(r, \nabla_X s),$$

o que equivale a dizer que g é ∇-paralela. ∎

Sejam agora (M, g), $(\overline{M}, \overline{g})$ variedades Riemannianas e $f : M \to \overline{M}$ uma imersão isométrica. Consideramos o fibrado vetorial $f^*(T\overline{M})$ sobre M munido da estrutura Riemanniana $f^*(\overline{g})$ induzida por $\overline{g}$ e pela conexão $f^*\overline{\nabla}$ induzida pela conexão de Levi-Civita $\overline{\nabla}$ de $(\overline{M}, \overline{g})$; obviamente, a estrutura Riemanniana $f^*(\overline{g})$ é paralela com respeito à

conexão $f^*\overline{\nabla}$. Identificando T_xM com $f_x(T_xM)$ para todo $x \in M$, obtemos uma decomposição em soma direta ortogonal $f^*(T\overline{M}) = TM \oplus f^\perp$, onde $f^\perp$ denota o fibrado normal da imersão isométrica f. As componentes de $f^*\overline{\nabla}$ relativamente à decomposição $f^*(T\overline{M}) = TM \oplus f^\perp$ são a conexão de Levi-Civita ∇ de (M, g) (vide Lema 3), a conexão normal $\nabla^\perp$ da imersão isométrica f e a segunda forma fundamental α da imersão isométrica f, que é uma seção simétrica diferenciável de $TM^* \otimes TM^* \otimes f^\perp$.

3. Conexão em Fibrados Principais

Há uma segunda forma de se ver conexões em uma variedade M. Na seção anterior, vimos que cada conexão em M define um transporte paralelo e que se um vetor V é transportado paralelamente ao longo de uma curva γ, temos que V fica parado em relação à $T_{\gamma(t)}M$. O método apresentato a seguir consiste em fazer todos os transportes paralelos de uma vez, através do transporte paralelo de referenciais

DEFINIÇÃO 22. *Seja P um fibrado $G-$principal e Ver_uP o espaço tangente, no ponto $u \in P$, à fibra que contém u. Uma conexão Γ em um fibrado principal P é uma distribuição Hor, tal que, para cada $u \in P$, temos:*

(i) $T_uP = Ver_u \oplus Hor_u$, para todo $u \in P$;
(ii) $\mathrm{d}\gamma_g(Hor_u) = Hor_{ug}$, para todo $g \in G$;

Se temos uma conexão em P e se $X \in T_uP$, por (i) da definição acima, devemos ter $X = A^* + B$, onde $A^* \in Ver_u$, $B \in Hor_u$. Também sabemos, pelo capítulo anterior, que $A \longmapsto (A^*)_u$, a aplicação $\mathfrak{g} \longrightarrow Ver_u$ que define em P o campo vetorial fundamental associado a $A \in \mathfrak{g}$, é um isomorfismo, para todo u.

DEFINIÇÃO 23. *Seja Hor uma conexão em P e seja A^* o campo vetorial fundamental de P induzido por $A \in \mathfrak{g}$. Seja $X \in T_uM$, onde $X = (A^*)_u + B_u$. A forma de conexão ω associada a Hor é uma 1-forma a valores em $\mathfrak{g}$ tal que $\omega(X) = A$.*

A definição acima deixa claro que $\ker(\omega)_u = Hor_u$ e que $\omega(A^*) = A$, $\forall A \in \mathfrak{g}$.

PROPOSIÇÃO 2. *Seja ω uma forma de conexão em P, então existe uma única conexão Γ em P da qual ω seja sua forma de conexão. Para todo $g \in G$, temos $\gamma_g^*\omega = \mathrm{Ad}_{g^{-1}} \circ \omega$, i.e., ω é pseudo G-invariante relativamente à representação adjunta de G em $\mathfrak{g}$. Além do mais, toda*

1-forma ω em P que seja pseudo G-invariante relativamente à representação adjunta e que satisfaça $\omega(A^*) = A$ é uma forma de conexão em P.

DEMONSTRAÇÃO. Ver [4, Cap. II]. ∎

Como a projeção $\pi : P \to M$ é uma submersão temos que a fibra $P_m = \pi^{-1}(m)$ sobre $m \in M$ é uma subvariedade de P e que para todo $u \in P_m$ seu espaço tangente Ver_u é dado por $\ker\big(\mathrm{d}\pi(u)\big)$. Além do mais, $\mathrm{d}\pi(u)$ induz um isomorfismo de Hor_u sobre T_mM.

DEFINIÇÃO 24. *Se λ é uma $k-forma$ no fibrado principal $\pi : P \to M$, chamaremos de derivada exterior covariante de λ a seguinte $(k+1)-forma$*

$$D\lambda\left(V_1, ..., V_{k+1}\right) = d\lambda\left(hV_1, ..., hV_{k+1}\right),$$

onde hV denota acomponente horizontal de V. A forma de curvatura *de uma conexão Hor é definida por $\Omega = D\omega$. Se P é o fibrado de referenciais (ou de referenciais ortonormais) de um fibrado vetorial ξ então a* forma de torsão *de P relativa a um morfismo $i : TM \to \xi$ (vide Obserção 1) é definida por $\Theta = D\theta$.*

LEMA 6. *A forma de curvatura Ω é dada por:*

$$\Omega = \mathrm{d}\omega + \frac{1}{2}(\omega \wedge \omega),$$

onde o produto $\wedge$ é relativo ao comutador de $\mathfrak{g}$. A forma de torsão Θ é dada por:

$$\Theta = \mathrm{d}\theta + \omega \wedge \theta,$$

onde o produto $\wedge$ é relativo à aplicação bilinear canônica $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

DEMONSTRAÇÃO. Vide [4, Cap. II]. ∎

É fácil ver que a forma de curvatura é pseudo G-invariante relativamente à representação adjunta de G em $\mathfrak{g}$ e que a forma de torsão é pseudo invariante relativamente à representação canônica de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ (ou $\mathrm{O}(n)$) em $\mathbb{R}^n$. Além do mais, tanto Ω como Θ se anulam quando uma de suas entradas é um vetor vertical.

4. Conexão em um Fibrado Associado

Queremos definir uma conexão em nosso fibrado associado. No entanto, não sabemos como fazê-lo diretamente, isto é, definindo um espaço horizontal em ξ, uma vez não é qualquer escolha de espaço horizontal que nos dá uma conexão (veja Observação 2). Para contornar

tal obstáculo, vamos nos referir ao fibrado principal P ao qual ξ é associado. Seja u um ponto de ξ. Chamaremos o espaço tangente à fibra de ξ que contém u de espaço vertical do fibrado ξ no ponto u, e o denotaremos por $Ver_u\xi$, analogamente ao caso em P.

Seja ω forma de conexão em P e seja $p \in P$. Por definição, o espaço horizontal de P em p é dado pelo núcleo de ω no ponto p. Ou seja $Hor_pP = \ker \omega_p$. O espaço horizontal de ξ pode ser definido à partir de Hor_pP da seguinte maneira. Considere a aplicação q definida a seguir

$$\begin{array}{rcl} P \times \xi_0 & \rightarrow & \xi \\ (p, v) & \mapsto & [p, v] \end{array}$$

dado $u \in \xi_m$, sendo $u = [p, v]$, definimos o espaço horizontal de ξ em u como sendo a imagem da soma direta $Hor_pP \oplus 0$ pela (diferencial da) aplicação q, ou seja

$$Hor_u\xi = dq_{(p,v)}\left(Hor_pP \oplus 0\right).$$

Temos que verificar, imediatamente, duas coisas.

(i)que $Hor_u\xi$ esta bem definido, ou seja, se tivermos $u = [p, v] = [p', v']$ deveremos ter

$$dq_{(p,v)}\left(Hor_pP \oplus 0\right) = dq_{(p',v')}\left(Hor_{p'}P \oplus 0\right).$$

(ii)e que de fato $T_u\xi = Hor_p\xi \oplus Ver_p\xi$.

Verificando a condição (i) :

Como $[p, v] = [p', v']$, temos $p' = pg^{-1}$ e $v' = gv$ para algum $g \in G$. Assim

$$dq_{(p',v')}\left(Hor_{p'}P \oplus 0\right) = (dq \circ dg)_{(p,v)}\left(Hor_pP \oplus 0\right).$$

Observemos o diagrama abaixo:

$$\begin{tikzcd} P \times \xi_0 \arrow[dd, "\gamma_g"'] \arrow[dr, "q"] & \\ & \xi \\ P \times \xi_0 \arrow[ur, "q"'] & \end{tikzcd}$$

Diferenciando o diagrama acima, obtemos o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
T_pP \oplus \xi_0 \arrow[dr, "\mathrm{d}q(p,v)"] \arrow[dd, "\mathrm{d}\gamma_g(p,v)"'] & \\
& T_u\xi \\
T_pP \oplus \xi_0 \arrow[ur, "\mathrm{d}q(p',v')"'] &
\end{tikzcd}$$

Que nos diz que $dq_{(p,v)}\left(Hor_pP \oplus 0\right) = (dq \circ dg)_{(p,v)}\left(Hor_pP \oplus 0\right)$. Portanto

$$\begin{aligned} dq_{(p,v)}\left(Hor_pP \oplus 0\right) &= (dq \circ dg)_{(p,v)}\left(Hor_pP \oplus 0\right) \\ &= dq_{(p',v')}\left(Hor_{p'}P \oplus 0\right). \end{aligned}$$

Verificando a condição (ii) :

Observemos que o núcleo da aplicação $dq_{(p,v)}$ é o espaço tangente à órbita de G no ponto (p, v), ou seja

$$\ker dq_{(p,v)} = \{(-X^*(p), Xv) : X \in \mathfrak{g}\}$$

Então, temos

$$T_pP \oplus \xi_0 = \left(Hor_pP \oplus 0\right) \oplus \left(\ker dq_{(p,v)}\right),$$

o que implica que $T_u\xi = Hor_p\xi \oplus Ver_p\xi$.

Relacionamos agora a noção de conexão num fibrado principal com a noção de conexão num fibrado vetorial dada na Seção 2.

LEMA 7. *Seja $\pi : \xi \to M$ um fibrado vetorial e P o seu fibrado* $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$*-principal de referenciais (ou, dada uma estrutura Riemanniana em ξ, podemos tomar também P como sendo seu fibrado* $\mathrm{O}(n)$*-principal de referenciais ortonormais). Seja ω uma forma de conexão em P. A distribuição na variedade ξ descrita acima corresponde a uma conexão em ξ (vide Observação 2). Se $\mathfrak{s} : U \to P$ é uma seção de P e se $z : U \to \mathbb{R}^n$ é uma aplicação diferenciável então a derivada covariante da seção $s = q \circ (\mathfrak{s}, z)$ de ξ numa direção $v \in T_xM$, $x \in U$, é dada por:*

$$\nabla_v s = \mathfrak{s}(x)\big(\mathrm{d}z(x) \cdot v + (\mathfrak{s}^*\omega)_x(v) \cdot z(x)\big).$$

DEMONSTRAÇÃO. Vide [4, Cap. III]. ∎

LEMA 8. *Sejam $\pi : \xi \to M$ e $\pi' : \eta \to M$ fibrados vetoriais sobre a variedade M e seja $T : \xi \to \eta$ um isomorfismo de fibrados vetoriais. Seja $\widehat{T}$:Ref(ξ) $\to$Ref(η) induzida por T. Seja ∇ uma conexão em η e ω a forma de conexão em* $\mathrm{Ref}(\eta)$ *correspondente. Então, $\widehat{T}^*\omega$ é*

uma forma de conexão em Ref(ξ) e $T^*\nabla$ é a correspondente conexão associada em ξ

DEMONSTRAÇÃO. Segue da Proposição 2 e do Lema 7. ∎

LEMA 9. *Sejam $f : N \to M$ uma aplicação, $\pi : \xi \to M$, ω forma de conexão em Ref(ξ) e ∇ conexão associada em ξ. Considere a aplicação canônica $\widehat{\chi}_f$: Ref($f^*\xi$) $\to$Ref(ξ). Então $\widehat{\chi}_f^*\omega$ é uma forma de conexão em Ref($f^*\xi$) e $f^*\nabla$ é a conexão associada em $f^*\xi$.*

DEMONSTRAÇÃO. Segue do Teorema 2 e do Lema 7. ∎

LEMA 10. *Sejam $\pi : \xi \to M$ e $\pi' : \eta \to M$ fibrados vetoriais sobre a variedade M e $T : \xi \to \eta$ um isomorfismo de fibrados vetoriais. Seja $i : TM \to \eta$, morfismo de fibrados vetoriais e seja $\widehat{T}$:Ref(ξ) $\longrightarrow$Ref(η) induzida por T. Seja θ a forma canônica em Ref(η) associada a i. Então $\widehat{T}^*\theta$ é a forma canônica em Ref(ξ) é a forma canônica associada a $T^{-1} \circ i : TM \to \xi$.*

DEMONSTRAÇÃO. Sejam $x \in M$, $p \in \mathrm{Ref}(\xi)_x$ e $v \in T_p\mathrm{Ref}(\xi)$. Então,

$$\left(\widehat{T}^*\theta\right)_p(v) = \theta_{\widehat{T}(p)}\left(\mathrm{d}\widehat{T}_p(v)\right) = \widehat{T}(p)^{-1}\left[i\left(\mathrm{d}\pi_{\widehat{T}(p)}\left(\mathrm{d}\widehat{T}_p(v)\right)\right)\right],$$

aqui observamos que $\pi \circ \widehat{T} = \pi$,assim ficamos com

$$\widehat{T}(p)^{-1}\left[i\left(\mathrm{d}\pi_{\widehat{T}(p)}\left(\mathrm{d}\widehat{T}_p(v)\right)\right)\right] = \widehat{T}(p)^{-1}\left[\mathrm{d}\pi_p(v)\right] =$$

$$(T_x \circ p)^{-1}\left[i\left(\mathrm{d}\pi_p(v)\right)\right] = p^{-1}\left((T_x \circ p)\left[\mathrm{d}\pi_p(v)\right]\right),$$

aqui observamos que o último termo da igualdade acima corresponde a forma canônica associada a $T^{-1} \circ i$. ∎

COROLÁRIO 4. *Sejam $\pi : \xi \to M$ e $\pi' : \eta \to M$ fibrados vetoriais sobre a variedade M, sejam $i : TM \to \eta$, $j : TM \to \xi$ morfismos de fibrados vetoriais e $T : \xi \to \eta$ um isomorfismo de fibrados vetoriais. Sejam $\widehat{T}$:Ref(ξ) $\longrightarrow$Ref(η) induzida por T, θ_i a forma canônica em Ref(η) associada a i e θ_j a forma canônica em Ref(ξ) associada a j. Então $\widehat{T}^*\theta_i = \theta_j$ se e somente se $i = T \circ j$.* ∎

LEMA 11. *Sejam $f : M \to M'$ uma aplicação e $\pi : \xi \to M'$ um fibrado vetorial sobre M'. Sejam $i : TM' \to \xi$ um morfismo de fibrados vetoriais e θ a forma canônica em Ref(ξ) associada a i. Considere a aplicação canônica $\widehat{\chi}_f$: Ref($f^*\xi$) $\to$Ref(ξ). Então $\widehat{\chi}_f^*\theta$ é a forma canônica em* Ref($f^*\xi$) *associada ao morfismo $i \circ \mathrm{d}f$.*

DEMONSTRAÇÃO. Calculamos:

$$\begin{aligned}(\widehat{\chi}_f^*\theta)_p(v) = \theta_p\big(\mathrm{d}\widehat{\chi}_f(p)\cdot v\big) &= p^{-1}\big(i \circ \mathrm{d}\pi(p) \circ \mathrm{d}\widehat{\chi}_f(p)\cdot v\big)\\ &= p^{-1}\big(i \circ \mathrm{d}f \circ \mathrm{d}\pi(p)\cdot v\big),\end{aligned}$$

pois $\pi \circ \widehat{\chi}_f = f \circ \pi$. A última expressão acima nos dá a forma canônica de $\mathrm{Ref}(f^*\xi)$ relativamente ao morfismo $i \circ \mathrm{d}f$. ∎

CAPíTULO 3

Imersões Isométricas em Variedades de Curvatura Constante

1. Introdução

Neste capítulo, aplicamos o estudo da teoria de conexões em fibrados principais e fibrados associados ao estudo de imersões isométricas de variedades Riemannianas em variedades de curvatura constante. O Teorema Fundamental das Imersões Isométricas em Espaços de Curvatura Constante generaliza tanto o tanto Teorema Fundamental das Curvas em $\mathbb{R}^3$ (vide [1, §1-5]) quanto o Teorema Fundamental das Superfícies em $\mathbb{R}^3$ (vide [1, §4-3]) . Na seção 3.2, o problema de imersões isométricas é tratado de uma maneira que não se restringe a imersões em variedades de curvatura constante. Apresentamos no capítulo 4 uma generalização do Teorema Fundamental das Imersões Isométricas em Espaços de Curvatura Constante (vide [5,6]), provada através do uso de um corolário do Teorema de Frobenius (Corolário 3).

O objetivo da seção 3.3 é chamar atenção ao fato de que os fibrados de referenciais ortonormais das variedades de curvatura constante $\mathbb{R}^n$, S^n e H^n são também grupos de Lie (os grupos de isometrias de $\mathbb{R}^n$, S^n e H^n). Este fato possibilita uma maneira simples de provar o Teorema 6. Para tanto, é crucial o fato de que nesses casos, ou seja, nesses grupos de Lie que são também fibrados principais, a forma de *Maurer-Cartan* (pertencente a estrutura de grupo de Lie) é dada pelo par formado pela foma canônica e pela forma de curvatura (formas pertencentes as estruturas de fibrado pricipal de referenciais ortonormais). Esta feliz coincidência não se repete no caso do fibrado de referenciais ortonormais de uma variedade qualquer. Este último caso será tratado no próximo capítulo. Cada uma das três últimas seções deste capítulo trata de um dos três casos particulares do Teorema 6.

2. Relacionando Imersões Isométricas com Formas em Fibrados Principais

Enunciado abaixo o Teorema 6, que é tema central deste capítulo. Apesar do Teorema 6 ser válido somente para imersões isométricas em

variedades de curvatura constante, o conteúdo desta seção também se aplica a imersões isométricas em variedades arbitrárias.

TEOREMA 6 (fundamental das imersões isométricas). *Sejam (M, g) uma variedade Riemanniana, $\pi : \xi \to M$ um fibrado vetorial sobre M, α_0 uma seção diferenciável do fibrado vetorial $TM^* \otimes TM^* \otimes \xi$, g^ξ uma estrutura Riemanniana em ξ, ∇^ξ uma conexão em ξ e $(\overline{M}, \overline{g})$ uma variedade Riemanniana completa e simplesmente conexa com curvatura seccional constante igual a c e $\dim(\overline{M}) = \dim(\xi)$. Suponha que para cada $x \in M$ a aplicação bilinear $\alpha_0(x) : T_xM \times T_xM \to \xi_x$ seja simétrica e que o tensor g^ξ seja paralelo em relação a ∇^ξ. Suponha também que sejam satisfeitas as seguintes condições*

(2.1)
$$g\big(R(X,Y)Z,T\big) + g\big(\alpha_0(Y,T), \alpha_0(X,Z)\big) - g\big(\alpha_0(X,T), \alpha_0(Y,Z)\big) = c\big[g(Y,Z)g(X,T) - g(X,Z)g(Y,T)\big],$$

(2.2)
$$(\nabla\alpha_0)(X,Y,Z) - (\nabla\alpha_0)(Y,X,Z) = 0,$$

(2.3)
$$g^\xi\big(R^\xi(X,Y)s,t\big) + g\big([A_t, A_s]X, Y\big) = 0,$$

para quaisquer campos vetoriais diferenciáveis X, Y, Z, T em M e quaisquer seções diferenciaveis s, t de ξ, onde R denota o tensor de curvatura de (M, g), R^ξ denota o tensor de curvatura de ∇^ξ, A_s é definido pela igualdade:

$$g\left(A_s\left(X\right), Y\right) = g^\xi\left(\alpha_0\left(X, Y\right), s\right)$$

e $[A_s, A_t] = A_sA_t - A_tA_s$. Então, para cada $x \in M$ existem uma imersão isométrica $f : U \to \overline{M}$ definida numa vizinhança aberta U de x em M e um isomorfismo de fibrados vetoriais T entre $\xi|_U$ e o fibrado normal $f^\perp$ da imersão isométrica f de modo que:

(a)para cada $y \in U$, $T_y : \xi_y \to \left(f^\perp\right)_y = \operatorname{Im}\left(df\left(y\right)\right)^\perp$ é uma isometria, onde ξ_y é munido do produto interno g^ξ_y e $\left(f^\perp\right)_y$ é munido do produto escalar induzido por $\overline{g}_{f(y)}$

(b) $T^*\nabla^\perp = \nabla^\xi$. onde $\nabla^\perp$ denota a conexão normal da imersão isométrica f.

(c) $T\left(\alpha_0\left(v, w\right)\right) = \alpha\left(v, w\right)$, para quaisquer $v, w \in T_yM$, $y \in U$, onde α denota a segunda forma fundamental da imersão isométrica f.

Ou seja, estamos interessados em obter uma imersão isométrica $f : U \to \overline{M}$ local de M em $\overline{M}$, de modo que ξ seja isomorfo a $f^\perp$ (fibrado vetorial normal da imersão isométrica f) por um isomorfismo de fibrados vetoriais $T : \xi|_U \to f^\perp$ tal que, de maneira informal, (a) $T_y : \xi_y \to \left(f^\perp\right)_y = \operatorname{Im}\left(df\left(y\right)\right)^\perp$ seja uma isometria para todo y em U;

(b) T preserve conexão; e (c) T leve α_0 na segunda forma fundamental da imersão f. .

Seja $\overline{\xi} = TM \oplus \xi$. Podemos definir uma estrutura Riemanniana $g^{\overline{\xi}}$ em $\overline{\xi}$ dada por

$$g_y^{\overline{\xi}}\left((v,z),(v',z')\right) = g_y\left(v,v'\right) + g_y^{\xi}\left(z,z'\right), \tag{2.4}$$

para todo $y \in M, v, v' \in T_yM, z, z' \in \xi_y$. Pelo Teorema 4, podemos definir em $\overline{\xi}$ uma conexão $\widehat{\nabla}$ tal que, para quaisquer campos vetoriais X, Y em M, temos

$$\widehat{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha_0\left(X,Y\right), \tag{2.5}$$

e para quaisquer seções diferenciáveis s, t de ξ, então

$$\widehat{\nabla}_X s = \nabla_X^{\xi} s - A_s\left(X\right), \tag{2.6}$$

onde A é definido como no enunciado do Teorema 6.

Segue do Lema 5 (da subseção 2.2.2) que $g^{\overline{\xi}}$ é paralelo em relação a conexão $\widehat{\nabla}$.

O tensor de curvatura da conexão $\widehat{\nabla}$ é denotado por $\widehat{R}$, segue do Teorema 5 que $\widehat{R}$ é dado por:

$$\begin{aligned} g^{\overline{\xi}}\big(\widehat{R}(X,Y)Z,T\big) &= g\big(R(X,Y)Z,T\big) + g^{\xi}\big(\alpha_0(Y,T),\alpha_0(X,Z)\big) \\ &\quad - g^{\xi}\big(\alpha_0(X,T),\alpha_0(Y,Z)\big), \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$g^{\overline{\xi}}\big(\widehat{R}(X,Y)Z,s\big) = g^{\xi}\big((\nabla\alpha)(X,Y,Z) - (\nabla\alpha)(Y,X,Z),s\big), \tag{2.8}$$

$$g^{\overline{\xi}}\big(\widehat{R}(X,Y)s,t\big) = g^{\xi}\big(R^{\xi}(X,Y)s,t\big) + g\big([A_t,A_s]X,Y\big), \tag{2.9}$$

onde X, Y, Z, T são campos em TM e s, t são campos em ξ.

LEMA 12. *Sejam, para cada $x \in M$, $f : U \to \overline{M}$ uma imersão isométrica definida numa vizinhança aberta U de x em M e T um isomorfismo de fibrados vetoriais entre $\xi|_U$ e o fibrado normal $f^{\perp}$ da imersão isométrica f que satisfaça as condições (a), (b) e (c) do Teorema 6 acima. Seja $S : \overline{\xi}|_U \to f^*\left(T\overline{M}\right)$ um isomorfismo de fibrados vetorioais tal que $S|_{TM} = df$ e $S|_{\xi} = T|_{\xi}$. Então valem as condições (i) e (ii) dadas abaixo:*

(i) para cada $y \in U$, a aplicação $S|_{\overline{\xi}} : \overline{\xi}_y \to T_y\overline{M}$ é uma isometria, onde $\overline{\xi}_y$é munido do produto escalar $g_y^{\overline{\xi}}$ e $T_y\overline{M}$ é munido do produto escalar $\overline{g}_{f(y)}$;

(ii) o pull-back por S da conexão $f^*\nabla$ de $f^*\left(T\overline{M}\right)$coincide com a conexão $\widehat{\nabla}$ de $\overline{\xi}|_U$.

Reciprocamente, sejam $f : U \to \overline{M}$ uma aplicação diferenciável e $S : \overline{\xi}|_U \to f^*\left(T\overline{M}\right)$ um isomorfismo de fibrados vetoriais satisfazendo (i), (ii) e também

(iii) a restrição de S a T_yM coincide com df_y, para todo $y \in U$.

Seja $T = S|_\xi$. Então T satisfaz as condições (a), (b) e (c) do Teorema 6 acima.

DEMONSTRAÇÃO. Dados f e T satisfazendo as condições (a), (b), (c) e definindo S como no enunciado, a condição (i) está automaticamente satisfeita, uma vez que T e df são isometrias, e que S satisfaz (ii) decorre do Lema 4. Dados f e S satisfazendo as condições (i), (ii), (iii), e definindo T como no enunciado, Como S é uma isometria, T satisfaz a condição (a) e o Lema 4 nos garante que as condições (b) e (c) são satisfeitas por S. ∎

Sejam $U \subset M$ aberto, $S : \overline{\xi}|_U \to f^*\left(T\overline{M}\right)$ um isomorfismo de fibrados vetoriais (satisfazendo condições apresentadas no Lema abaixo) e $\mathfrak{s} : U \to \mathrm{Ref}_{ort}\left(\overline{\xi}\right)$ um referencial ortonormal de $\overline{\xi}$, ou seja, para cada $y \in U$, $S|_{\overline{\xi}} : \overline{\xi}_y \to T_y\overline{M}$ é um isomorfismo e $\mathfrak{s}$ é uma seção diferenciável do fibrado principal $\mathrm{Ref}_{ort}\left(\overline{\xi}\right)$. Para todo $y \in U$, definimos $\widetilde{f} : U \to \mathrm{Ref}_{ort}\left(T\overline{M}\right)$ por $\widetilde{f}(x) = S_x \circ \mathfrak{s}(x)$. Assim poderemos definir $\pi \circ \widetilde{f} = f$ e $T|_{\xi_y} = S|_{\xi_y}$.

Sejam $\overline{\theta}$ e $\overline{\omega}$, respectivamente as formas canônica e de curvatura (associada à conexão de Levi-Civita de $\left(\overline{M}, \overline{g}\right)$) de $\mathrm{Ref}_{ort}\left(T\overline{M}\right)$ e sejam $\widehat{\theta}$ e $\widehat{\omega}$, respectivamente as formas canônica (associada à inclusão $TM \to \overline{\xi}$) e de conexão (associada à conexão $\widehat{\nabla}$ em $\overline{\xi}$) de $\mathrm{Ref}_{ort}\left(\overline{\xi}\right)$. Sejam $U \subset M$ aberto e $\mathfrak{s} : U \to \mathrm{Ref}_{ort}\left(\overline{\xi}\right)$ um referencial ortonormal de $\overline{\xi}$, $\widehat{S} : \mathrm{Ref}_{ort}\left(\overline{\xi}\right)|_U \to \mathrm{Ref}_{ort}\left(f^*T\overline{M}\right)$ aplicação induzida pelo isomorfismo S, e $\widehat{\chi}_f : \mathrm{Ref}_{ort}\left(f^*T\overline{M}\right) \to \mathrm{Ref}_{ort}\left(T\overline{M}\right)$ aplicação induzida pela aplicação canônica de fibrados vetorioais $\chi_f : f^*T\overline{M} \to T\overline{M}$.

Afirmamos que a condição (iii) é equivalente a $\widetilde{f}^*\overline{\theta} = \mathfrak{s}^*\widehat{\theta}$. Este fato é uma conseqüêcia dos Lemas da Seção 4 do Capítulo 2. Olhemos para a seguinte composição

$$U \subset M \xrightarrow{\mathfrak{s}} \mathrm{Ref}_{ort}\left(\overline{\xi}\right) \xrightarrow{\widehat{S}} \mathrm{Ref}_{ort}\left(f^*T\overline{M}\right) \xrightarrow{\widehat{\chi}_f} \mathrm{Ref}_{ort}\left(T\overline{M}\right).$$

De fato, temos

$$\widehat{\chi}_f \circ \widehat{S} \circ \mathfrak{s} = \widetilde{f}, \tag{2.10}$$

uma vez que, para $x \in U \subset M$, $\mathfrak{s}(x)$ é um referencial em $\overline{\xi}_x$, temos $\widehat{S}(\mathfrak{s}(x)) = S_x \circ \mathfrak{s}(x)$ e $\widehat{\chi}_f(\widehat{S}(\mathfrak{s}(x))) = S_x \circ \mathfrak{s}(x) = \widetilde{f}(x)$. Então

$$\widetilde{f}^*\overline{\theta} = \left(\widehat{\chi}_f \circ \widehat{S} \circ \mathfrak{s}\right)^* \overline{\theta} = \mathfrak{s}^*(\widehat{S}^*\left(\widehat{\chi}_f^*\left(\overline{\theta}\right)\right))$$

porém, pelo Lema 11, $\widehat{\chi}_f^*\left(\overline{\theta}\right)$ é a forma canônica em $\mathrm{Ref}_{ort}\left(f^*T\overline{M}\right)$ associada a $\mathrm{d}f$ e pelo Lema 10, $\widehat{S}^*\left(\widehat{\chi}_f^*\left(\overline{\theta}\right)\right)$ é a forma canônica de $\mathrm{Ref}_{ort}\left(\overline{\xi}\right)$ associada a $S^{-1}\circ \mathrm{d}f$. Portanto temos a seguinte igualdade de pull-backs de formas canônicas pela seção $\mathfrak{s}$:

$$\mathfrak{s}^*\left(\widehat{S}^*\left(\widehat{\chi}_f^*\left(\overline{\theta}\right)\right)\right) = \mathfrak{s}^*\widehat{\theta},$$

pelo lema 1, $\widehat{S}^*\left(\widehat{\chi}_f^*\left(\overline{\theta}\right)\right) = \widehat{\theta}$ o que equivale a:

$$S^{-1} \circ df = i : TM \to \overline{\xi},$$

o que se e somente se

$$df = S|_{TM}.$$

Agora, mostraremos que a condição (ii) é equivalente a $\widetilde{f}^*\overline{\omega} = \mathfrak{s}^*\widehat{\omega}$. Novamente começamos com 2.10 acima. Então

$$\widetilde{f}^*\overline{\omega} = \left(\widehat{\chi}_f \circ \widehat{S} \circ \mathfrak{s}\right)^* \overline{\omega} = \mathfrak{s}^*(\widehat{S}^*\left(\widehat{\chi}_f^*\left(\overline{\omega}\right)\right))$$

mas, pelo Lema 9, $\widehat{\chi}_f^*\left(\overline{\omega}\right)$ é a forma de conexão de $f^*\overline{\nabla}$ e pelo Lema 8, $\widehat{S}^*\left(\widehat{\chi}_f^*\left(\overline{\theta}\right)\right)$ é a forma de conexão de $S^*\left(f^*\overline{\nabla}\right)$. Portanto temos a seguinte igualdade de pull-backs de formas de conexão pela seção $\mathfrak{s}$:

$$\mathfrak{s}^*(\widehat{S}^*\left(\widehat{\chi}_f^*\left(\overline{\omega}\right)\right)) = \mathfrak{s}^*\widehat{\omega},$$

novamente pelo lema 1, a igualdade equivale a

$$\widehat{S}^*\left(\widehat{\chi}_f^*\left(\overline{\omega}\right)\right) = \widehat{\omega},$$

o que, finalmente, equivale a

$$S^*\left(f^*\overline{\nabla}\right) = \widehat{\nabla}$$

Para construir tal aplicação $\widetilde{f} : U \to \mathrm{Ref}_{ort}\left(T\overline{M}\right)$, usamos o Corolário 3 no caso em que a curvatura de $\overline{M}$ é constante, este caso será tratado em detalhes (para $\mathbb{R}^n, S^n$ e H^n) nas próximas seções deste capítulo. No caso em $\overline{M}$ não é um espaço de curvatura constante, $\widetilde{f} : U \to \mathrm{Ref}_{ort}\left(T\overline{M}\right)$ é obtida pelo Corolário 2.

3. Grupos de Isometrias de $\mathbb{R}^n$, S^n e H^n.

3.1. Grupo de Isometrias de $\mathbb{R}^n$. Sabemos que o grupo de isometrias de $\mathbb{R}^n$ é $O(n) \times \mathbb{R}^n$. Nesta seção nos dedicaremos a mostrar o seguinte fato:

O conjunto $\mathrm{Ref}_{ort}(T\mathbb{R}^n) = O(n) \times \mathbb{R}^n$ possui duas estruturas distintas:

(i) Estrutura de Grupo de Lie,

(ii) Estrutura de Fibrado $O(n)$-principal sobre $\mathbb{R}^n$: o fibrado dos referênciais ortonormais de $\mathbb{R}^n$

(i) Vamos examinar a estrutura de grupo de Lie de $O(n) \times \mathbb{R}^n$. Aqui consideramos, para $(T,p) \in \mathrm{Ref}_{ort}(T\mathbb{R}^n)$ e $(S,q) \in \mathrm{Ref}_{ort}(T\mathbb{R}^n)$, o produto (semi-direto)

$$(T,p).(S,q) = (TS, Tq + p). \tag{3.1}$$

Podemos denotar os elementos de $\mathrm{Ref}_{ort}(T\mathbb{R}^n)$ matricialmente, com o produto dado em 3.1, como fazemos a seguir.

Identificamos o elemento $(T,p) \in \mathrm{Ref}_{ort}(T\mathbb{R}^n)$ com

$$g = \begin{pmatrix} T & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

onde $T \in O(n), p \in \mathbb{R}^n$.

Assim, podemos identificar $\mathrm{Ref}_{ort}(T\mathbb{R}^n)$ como um subgrupo de Lie de $GL(n+1)$.

O próximo passo é determinar a Álgebra de Lie de $\mathrm{Ref}_{ort}(T\mathbb{R}^n)$ e seu colchete. Para tanto, consideremos uma curva $\gamma : I \xrightarrow{C^\infty} \mathrm{Ref}_{ort}(T\mathbb{R}^n)$, com $\gamma(0) = 1$. Ao efetuarmos a derivada de γ em $t = 0$, cocluiremos que a Álgebra de Lie de $\mathrm{Ref}_{ort}(T\mathbb{R}^n)$ é $\mathfrak{so}(\mathfrak{n}) \times \mathbb{R}^n$, que pode ser identificada, pela forma matricial, com uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(n+1)$, como veremos a seguir. A curva γ é representada da forma

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} T(t) & p(t) \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

onde $t \in I$ e seja

$$\frac{d}{dt}\gamma(t)\,|_{t=0} = V,$$

então existem $A \in \mathfrak{so}(\mathfrak{n})$ e $u \in \mathbb{R}^n$, tais que

$$V = \begin{pmatrix} A & u \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, $V \in \mathfrak{so}(\mathfrak{n}) \times \mathbb{R}^n$.

Dessa forma, o colchete de Lie de $\mathfrak{so}(n) \ltimes \mathbb{R}^n$ é a restrição do comutador de $\mathfrak{so}(n+1)$:

$$\left[\begin{pmatrix} A & u \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} AB - BA & Av - Bu \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Estamos interessados em calcular a forma de Maurer-Cartan λ do grupo de Lie $\mathrm{Ref}_{ort}(T\mathbb{R}^n)$ e mostrar que esta é como descrita na introdução do capítulo.

Sejam $g \in \mathrm{Ref}_{ort}(T\mathbb{R}^n)$ e $V \in \mathfrak{sa}(n) \times \mathbb{R}^n$ com:

$$g = \begin{pmatrix} T & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } V = \begin{pmatrix} X & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Usando o produto de matrizes em $GL(n+1, \mathbb{R})$, a forma de *Maurer–Cartan* de $\mathrm{Ref}_{ort}(T\mathbb{R}^n)$ satisfaz:

$$\lambda_g(gV) = V = \begin{pmatrix} X & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(ii) Olharemos agora para $\mathrm{Ref}_{ort}(T\mathbb{R}^n)$ como um fibrado $\mathrm{O}(n)$-principal (trivial) sobre $\mathbb{R}^n$. Vamos calcular a forma canônica e a forma de conexão de $\mathrm{Ref}_{ort}(T\mathbb{R}^n)$

3.1.1. *Forma Canônica.* A forma canônica $\overline{\theta}$ de $\mathrm{Ref}_{ort}(T\mathbb{R}^n)$ é, para cada ponto $g \in \mathrm{Ref}_{ort}(T\mathbb{R}^n)$, a aplicação linear $\overline{\theta}_g : T_g\mathrm{Ref}_{ort}(T\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}^n$, para $X \in T_g\mathrm{Ref}_{ort}(T\mathbb{R}^n)$. Sejam $g \in \mathrm{Ref}_{ort}(T\mathbb{R}^n)$ e $V \in \mathfrak{sa}(n) \times \mathbb{R}^n$. Então g é da seguinte forma

$$g = \begin{pmatrix} T & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

onde $T \in O(n)$, $p \in \mathbb{R}^n$, e V é dado da seguinte forma

$$V = \begin{pmatrix} X & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

A forma canônica $\overline{\theta}_g$ é dada por

$$\overline{\theta}_g(gV) = T^{-1}(d\pi_g \cdot gV).$$

Então temos finalmente

$$\overline{\theta}_g\left[g\begin{pmatrix} X & x \\ & \end{pmatrix}\right] = T^{-1}\left(d\pi\begin{pmatrix} TX & Tx \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = T^{-1}(Tx) = x.$$

3.1.2. *Forma de Conexão.* Observarmos que $Hor_g\mathrm{Ref}_{ort}(T\mathbb{R}^n) = \{0\}\times\mathbb{R}^n$, pois se considerarmos a aplicação $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathrm{Ref}_{ort}(T\mathbb{R}^n)$ definida por $p \mapsto \begin{pmatrix} T & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, teremos um referencial paralelo em $\mathrm{Ref}_{ort}(T\mathbb{R}^n)$. Por definição, $Ver_g\mathrm{Ref}_{ort}(T\mathbb{R}^n) = T_TO(n)\times\{0\}$. Assim, a forma de conexão $\overline{\omega}$, para cada ponto g de $\mathrm{Ref}_{ort}(T\mathbb{R}^n)$ é a aplicação linear $\overline{\omega}_g$: $T_g\mathrm{Ref}_{ort}(T\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathfrak{so}(\mathfrak{n})\times\mathbb{R}^n$ dada por

$$\begin{aligned} \overline{\omega}_g(A^*_{(g)}) &= A,\ A\in\mathfrak{so}(\mathfrak{n})\times\mathbb{R}^n \\ \overline{\omega}_g(B) &= 0,\ B\in\mathbb{R}^n\ (Hor_g\mathrm{Ref}_{ort}(T\mathbb{R}^n)) \end{aligned}$$

onde A^* é o campo fundamental de $\mathrm{Ref}_{ort}(T\mathbb{R}^n)$ induzido por A. Pela definição de $\overline{\omega}$, se V é um vetor de $\mathfrak{sa}(n)\times\mathbb{R}^n$, então para calcularmos $\overline{\omega}_g(gV)$, projetamos, primeiramente, gV em $Ver_g\mathrm{Ref}_{ort}(T\mathbb{R}^n)$ para depois usarmos o isomorfismo "fundamental" $\mathrm{d}\beta_g(1) : \mathfrak{so}(n) \longrightarrow Ver_g\mathrm{Ref}_{ort}(T\mathbb{R}^n)$ que existe entre $Ver_g\mathrm{Ref}_{ort}(T\mathbb{R}^n)$ e $\mathfrak{so}(n)$. Fazendo a projeção vertical de gV temos

$$(gV)_{ver} = \begin{pmatrix} TX & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

O isomorfismo fundamental $\mathrm{d}\beta_g(1) : \mathfrak{so}(n) \longrightarrow Ver_g\mathrm{Ref}_{ort}(T\mathbb{R}^n)$ é dado por

$$d\beta_g(1)\cdot(A) = \frac{d}{dt}(g.\exp tA)|_{t=0}.$$

Temos $g^{-1}d\beta_g(1)\cdot(A) = g^{-1}\frac{d}{dt}(g.\exp tA)|_{t=o} = \frac{d}{dt}(\exp tA)|_{t=0} = A$, ou seja, acabamos de dar a operação inversa de $\mathrm{d}\beta_g(1)$, o que justifica o seguinte.

Sejam $g = \begin{pmatrix} T & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} X & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{sa}(n)\times\mathbb{R}^n$, então

$$\omega_g\left(g\begin{matrix} X & x \\ 0 & 0 \end{matrix}\right) = X.$$

Assim, podemos juntar as informações de (i) e de (ii) e assim ter uma fórmula para a forma de Maurer-Cartan em termos das formas de conexão e canônicas. Temos, para todo $g \in \mathrm{Ref}_{ort}(T\mathbb{R}^n)$, a seguinte relação

$$\lambda_g = \begin{pmatrix} \overline{\omega}_g & \overline{\theta}_g \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ou

$$\lambda_g = (\overline{\omega}_g, \overline{\theta}_g).$$

3.2. Grupo de Isometrias de $\mathbf{S}^n$. O grupo de isometrias de S^n é $O(n+1)$. Da mesma maneira que acontece com $ref(T\mathbb{R}^n)$, podemos ver o grupo de Lie $O(n+1)$ também como um fibrado $G-$principal, porém agora sobre $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$e sendo $G = O(n)$. Explicitamente, identificamos $g \in O(n+1)$ com o referencial ortonormal $e_2, ..., e_{n+1}$ de S^n no ponto e_1, onde $e_1, ..., e_{n+1}$ denotam as colunas de g.

Identificamos $O(n)$ com o subgrupo de $O(n+1)$ dado por:

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix}, T \in O(n),$$

Temos que a ação de $O(n)$ em $O(n+1)$ coincide com a ação por translação à direita.

A forma de Maurer-Cartan de $O(n+1)$ no ponto g é λ_g tal que, para $X \in \mathfrak{so}(n+1)$, temos

$$\lambda_g(gX) = X.$$

Dado $g \in O(n+1)$ qualquer, determinaremos $Ver_g O(n+1)$ e $Hor_g O(n+1)$, e assim será possível encontrar as formas de conexão e canônica de $O(n+1)$.

Seja $\gamma : I \xrightarrow{C^\infty} O(n+1)$ uma curva tal que

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T(t) \end{pmatrix},$$

onde $T(t) \in O(n)$, e com $\gamma(0) = 1$, ou seja, γ é uma curva contida na fibra de $O(n+1)$ que contém 1. Então, $\frac{d}{dt}\gamma(t)|_{t=0}$ é do tipo $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$, onde $A \in \mathfrak{so}(\mathbf{n})$. Seja $g \in O(n+1)$, então $g\gamma(t)$ é uma curva contida na fibra de $O(n+1)$ que contém g e passando por g em $t = 0$. Então, como $\frac{d}{dt}(g\gamma(t))|_{t=0} = g\frac{d}{dt}(\gamma(t))|_{t=0}$, temos que

$$Ver_g O(n+1) = g \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathfrak{so}(\mathbf{n}) \end{pmatrix}.$$

É hora de determinar $Hor_g O(n+1)$. Seja agora:

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_{n+1}(t))$$

uma curva em S^n e sejam $V_1(t), \ldots, V_n(t)$, onde $V_i = \sum_{j=1}^{n+1} V_i^j e_j$, um referencial ortonormal de S^n paralelo ao longo de γ. A conexão de Levi-Civita de $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é dada pela componente tangencial a S^n da conexão de Levi-Civita de $\mathbb{R}^n$. Logo, pela definição de paralelismo, $V_i'(t)$ deve ser normal a S^n. Assim, devemos ter $V_i'(t)$ paralelo a $\gamma(t)$,

qualquer que seja i, $i \in 1, ..., n+1$. Com $\gamma(0) = (1, 0..., 0)$, podemos observar o seguinte

OBSERVAÇÃO 3. $\left(V_j^i\right)'(0) = 0$, *onde* $1 < i \leq n+1, 1 \leq j \leq n+1$.

Considere a curva Γ em $O(n+1)$ dada por

$$\Gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) & V_1^1(t) & \dots & V_n^1(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \gamma_{n+1}(t) & V_1^{n+1}(t) & \dots & V_n^{n+1}(t) \end{pmatrix},$$

temos

$$\Gamma'(t) = \frac{d}{dt}\Gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) & (V_1^1)'(t) & \dots & (V_n^1)'(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \gamma_{n+1}'(t) & (V_1^{n+1})'(t) & \dots & (V_n^{n+1})'(t) \end{pmatrix},$$

como $V_1, ..., V_n$ é paralelo, temos que o vetor Γ' deve ser horizontal Pela observação 3

$$\Gamma'(0) = \frac{d}{dt}\Gamma(0) = \begin{pmatrix} \gamma_1'(0) & (V_1^1)'(0) & \dots & (V_n^1)'(0) \\ \vdots & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \gamma_{n+1}'(0) & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Logo

$$Hor_1O(n+1) = \begin{pmatrix} 0 & -a_1 & \dots & -a_n \\ a_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -x^t \\ x & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{sa}(n+1),$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$.

Assim, temos para $g \in O(n+1)$,

$$Hor_gO(n+1) = gHor_1O(n+1).$$

O próximo passo é Determinar

(i) forma canônina.

(ii) forma de conexão.

3.2.1. *Forma Canônica.* Sejam $g = (e_1, p) \in O(n+1)$, onde $p = (e_2, ..., e_{n+1})$ e $(e_1, ..., e_{n+1})$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^{n+1}$, daí:

$$\pi(e_1, p) = e_1 \quad \text{e} \quad X \in T_g O(n+1).$$

Pelo que vimos acima, X pode ser representado por

$$X = g\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} + g\begin{pmatrix} 0 & -a^t \\ a & 0 \end{pmatrix},$$

onde $A \in \mathfrak{so}(n), a \in \mathbb{R}^n$, ou seja, $\begin{pmatrix} 0 & -a^t \\ a & A \end{pmatrix} \in \mathfrak{so}(n+1)$.

Temos

$$\theta_g(X) = p^{-1} d\pi_g(X) = p^{-1}\left(g\begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}\right) = a.$$

3.2.2. *Forma de Conexão.* Seja X um vetor tangente a $O(n+1)$ no ponto g como em 3.2.1. A componente vertical de X é dada da seguinte forma

$$X_{ver} = g\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}, A \in \mathfrak{so}(n+1).$$

Como A pertence à álgebra de Lie $\mathfrak{so}(n)$ do grupo de Lie $O(n)$, que age à direita no fibrado principal $O(n+1)$, sabemos que A induz um campo fundamental de vetores sobre $O(n+1)$, pelo chamado isomorfismo fundamental, dado da seguite forma:

$$\frac{d}{dt} g\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp(tA) \end{pmatrix}\Big|_{t=0} = g\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

Assim, vemos que o valor no ponto g do campo fundamental induzido por A coincide com X_{ver}. Portanto,

$$\omega_g(X) = A \in \mathfrak{so}(n)$$

3.2.3. *Forma de Maurer-Cartan.* A forma de Maurer-Cartan de $O(n+1)$ no ponto g é λ_g tal que, para $X \in T_g O(n+1)$, temos

$$\lambda_g(X) = g^{-1} X.$$

De 3.2.1 e 3.2.2 vem

$$\lambda_g = \begin{pmatrix} 0 & -\theta_g^t \\ \theta_g & \omega_g \end{pmatrix}.$$

3.3. Grupo de Isometrias de $\mathbf{H}^n$. Dotando $\mathbb{R}^{n+1}$ com a seguinte forma bilinear $\langle\ ,\ \rangle_L : \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, definida por

$$\langle (x_0, x_1, ..., x_n), (y_0, y_1, ..., y_n) \rangle_L = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - x_0 y_0.$$

H^n é o subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$ composto pelos $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ tais que $\langle x, x \rangle_L = -1$ e $x_0 > 0$. Consideraremos H^n com a métrica induzida por $\langle\ ,\ \rangle_L$. Assim, o espaço tangente a H^n no ponto x será

$$T_x H^n = \left\{ v \in \mathbb{R}^{n+1} | \langle v, x \rangle_L = 0 \right\}.$$

O conjunto das isometrias de H^n é dado pelas restrições a H^n das aplicações lineares $T : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ que preservam $\langle\ ,\ \rangle_L$, ou seja é o conjunto dado por

$$\{ T|_{H^n} : T \in O_+(n,1) \},$$

onde

$$O_+(n,1) = \left\{ T : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1} | \langle Tx, Ty \rangle_L = \langle x, y \rangle_L, \right.$$
$$\left. \forall x, y \in \mathbb{R}, T_{oo} > 0 \right\}.$$

Identificamos $O_+(n,1)$ com o fibrado $O(n) - principal$ de referenciais ortonormais de H^n da seguinte forms: se $(e_0, ...e_n)$ são as colunas de $g \in O_+(n,1)$ então indentificamos g com o referencial ortonormal $(e_1, ...e_{n+1})$ de H^n no ponto $e_0 \in H^n$. Identificando $O(n)$ com o subgrupo de $O_+(n,1)$ dado por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix}, \ T \in O(n),$$

temos que a ação de O(n) em $O_+(n,1)$ coincide com a ação por translação à direita.

Seja $\Gamma : I \xrightarrow{C^\infty} O_+(n,1)$ uma curva tal que $\Gamma(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T(t) \end{pmatrix}$, onde $T(t) \in O(n)$; e com $\Gamma(0) = I$, ou seja, γ é uma curva contida na fibra de $O_+(n,1)$ que contém 1. Então, $\frac{d}{dt}\Gamma(t)|_{t=0}$ é do tipo $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$, onde $A \in \mathfrak{so}(\mathrm{n})$

Assim temos

$$Ver_I O_+(n,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathfrak{so}(n) \end{pmatrix}$$

Seja $g \in O_+(n,1)$, então $g\gamma(t)$ é uma curva contida na fibra de $O_+(n,1)$ que contém g e passando por g em $t = 0$. Então, como $\frac{d}{dt}(g\gamma(t))|_{t=0} = g\frac{d}{dt}(\gamma(t))|_{t=0}$, temos que

$$Ver_g O_+(n,1) = g\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathfrak{so}(\mathfrak{n}) \end{pmatrix}.$$

Vamos determinar $Hor_g O_+(n,1)$. Seja $V(t) = (V_1(t), ..., V_n(t))$ um referêncial paralelo ao longo de uma curva C^∞ $\gamma(t)$ em H^n com $\gamma(0) = 1$. Seja $\Gamma : I \to O_+(n,1)$ a curva dada por:

$$\Gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_0(t) & V_1^0(t) & ... & V_n^0(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \gamma_n(t) & V_1^n(t) & ... & V_n^n(t) \end{pmatrix}, \ onde\ \Gamma(0) = I.$$

Na conexão de Levi-Civita de H^n, a derivada covariante de $V(t)$ ao longo de $\gamma(t)$ é obtida derivando-se V (no sentido usual) em $\mathbb{R}^{n+1}$, e em seguida projetando ($\langle .,. \rangle_L$-ortogonalmente) tal derivada em H^n. Assim, como $V(t)$ é paralelo ao longo de γ, teremos que $V'(t)$ será paralelo a $\gamma(t)$. Isto implica que $\left(V_i^j(0)\right)' = 0$, para todos $i = 2, ...n, j = 1, ...n$. Logo

$$\Gamma'(0) = \frac{d}{dt}\Gamma(t)|_{t=0} = \begin{pmatrix} \gamma_0'(0) & (V_1^0)'(0) & ... & (V_n^0)'(0) \\ \vdots & 0 & & 0 \\ \gamma_n'(0) & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}.$$

Como $V_1, ..., V_n$ é paralelo, Γ' é horizontal, segue que

$$Hor_1 O_+(n,1) = \begin{pmatrix} 0 & v^t \\ v & 0 \end{pmatrix} \subset \mathfrak{so}(n,1), \text{ onde } v \in \mathbb{R}^n.$$

Logo,

$$Hor_g O_+(n,1) = g\begin{pmatrix} 0 & v^t \\ v & 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto, se $X \in T_g O_+(n,1)$, então

$$X = g\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} + g\begin{pmatrix} 0 & v^t \\ v & 0 \end{pmatrix}, \text{ onde } v \in \mathbb{R}^n \text{ e } A \in \mathfrak{so}(n),$$

o que equivale a dizer que $g\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ é a componente vertical de X e $g\begin{pmatrix} 0 & v^t \\ v & 0 \end{pmatrix}$ é a componente horizontal de X.

3.3.1. *Forma Canônica.* Sejam $g \in O_+(n,1)$, com $g = (e_0, p)$, p=$(e_1, ...e_n)$, onde $(e_0, ...e_n)$ é uma base $\langle .,. \rangle_L$-ortonormal de $\mathbb{R}^{n+1}$. Seja $X \in T_g O(n,1)$, com $X = g\begin{pmatrix} 0 & v^t \\ v & A \end{pmatrix}$. Pela definição de θ, temos $\theta_g(X) = p^{-1} d\pi_g(X)$. Logo:

$$\theta_g(X) = v.$$

3.3.2. *Forma de Conexão.* Sendo $X = g\begin{pmatrix} 0 & v^t \\ v & A \end{pmatrix} \in T_g O(n,1)$, temos

$$X_{ver} = g\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}.$$

Como na subseção 3.2.2, o valor em $g \in O_+(n,1)$ de campo fundamental associado a $A \in \mathfrak{so}(n)$ é

$$g\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}.$$

Podemos concluir que

$$\omega_g(X) = A.$$

3.3.3. *Forma de Maurer-Cartan.* De maneira análoga ao caso de S^n, a forma de Maurer-Cartan de $O_+(n,1)$é dada por:

$$\lambda_g = \begin{pmatrix} 0 & \theta_g^t \\ \theta_g & \omega_g \end{pmatrix}.$$

4. Imersão em $\mathbb{R}^n$

Nesta seção trataremos de um dos casos para os quais valem o Teorema 6, o caso em que $c = 0$. Em outras palavras, trataremos da imersão isométrica de uma variedade Riemanniana (M, g) em $\mathbb{R}^n$. Este caso especial do Teorema 6 é chamado, naturalmente, de Teorema Fundamental das imersões isométricas em $\mathbb{R}^n$. Na prova do Teorema Fundamental das imersões isométricas em $\mathbb{R}^n$, é utilizado o Corolário 3.

Sejam dados os seguintes objetos. Uma variedade Riemanniana (M, g) . Um fibrado vetorial $\pi : \xi \to M$, tal que $\dim(\xi_m) = n$. Uma conexão ∇^ξ e uma estrutura Riemanniana g^ξ em ξ, tal que ∇^ξ seja paralela com respeito a g^ξ. Seja α_0 uma seção simétrica de $TM^* \otimes TM^* \otimes \xi$, ou seja, para cada $x \in M$, $\alpha_0(x) : T_xM \times T_xM \longrightarrow \xi_x$ é um tensor simétrico.

Da seção 2, sabemos que são equivalentes as seguintes condições (A) e (B):

(A)Dado $x \in M$ e um aberto $U \subset M$ tal que $x \in U$, existe uma imersão isométrica $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ e um isomorfismo de fibrados vetoriais T entre $\xi_{|U}$ e o fibrado normal $f^{\perp}$ que leva g^{ξ} na métrica euclideana em $f^{\perp}$, ∇^{ξ} na conexão normal $\nabla^{\perp}$ e α_0 na segunda forma fundamental de f.

(B) Os objetos definidos acima satisfazem as equações de *Gauss-Codazzi-Ricci.*

Seja $\overline{\xi} = TM \oplus \xi$. Definimos uma estrutura Riemanniana $g^{\overline{\xi}}$ em $\overline{\xi}$ como em 2.4 da seção 3.2 e uma conexão $\widehat{\nabla}$ em $\overline{\xi}$ como em 2.5 e 2.6 da Seção 3.2.

Sejam $\mathrm{Ref}_{ort}(T\mathbb{R}^n)$ o fibrado de referenciais ortonormais de $T\mathbb{R}^n$ onde

$$\begin{array}{ll} \overline{\omega} & \text{forma de conexão de } \mathrm{Ref}_{ort}(T\mathbb{R}^n), \\ \overline{\theta} & \text{forma cacônica de } \mathrm{Ref}_{ort}(T\mathbb{R}^n), \end{array}$$

e $\mathrm{Ref}_{ort}\left(\overline{\xi}|_U\right)$ o fibrado de referenciais ortonormais de $\overline{\xi}|_U$, onde

$$\begin{array}{l} \widehat{\omega} \text{ forma de conexão de } \mathrm{Ref}_{ort}\left(\overline{\xi}|_U\right), \\ \widehat{\theta} \text{ forma canônica de } \mathrm{Ref}_{ort}\left(\overline{\xi}|_U\right). \end{array}$$

Seja $\mathfrak{s} : U \to \mathrm{Ref}_{ort}\left(\overline{\xi}|_U\right)$ uma seção diferenciável de $\mathrm{Ref}_{ort}\left(\overline{\xi}|_U\right)$. Pelo o que foi discutido na seção 3.2, sabemos que a condição (A) é equivalente a seguinte condição:

(C) $\widetilde{f}^*\left(\overline{\omega}, \overline{\theta}\right) = \left(\mathfrak{s}^*\widehat{\omega}, \mathfrak{s}^*\widehat{\theta}\right)$;

onde $\widetilde{f} : U \subset M \longrightarrow \mathrm{Ref}_{ort}(T\mathbb{R}^n) = O(n) \times \mathbb{R}^n$. O Corolário 3 nos dá a equivalêcia entre a condição (C) e a condição (D) dada a seguir:

(D) $d\left(\mathfrak{s}^*\widehat{\omega}, s^*\widehat{\theta}\right) = -\frac{1}{2}\left(\mathfrak{s}^*\widehat{\omega}, \mathfrak{s}^*\widehat{\theta}\right) \wedge \left(\mathfrak{s}^*\widehat{\omega}, \mathfrak{s}^*\widehat{\theta}\right)$.

A seguir mostramos como a equivalência entre (C) e (D) é dada pelo Corolário 3. Usaremos as notação da seção 2.

O par $\left(\mathfrak{s}^*\widehat{\omega}, \mathfrak{s}^*\widehat{\theta}\right)$ define em M uma $1-forma$ a valores na álgebra de Lie $\mathfrak{so}(n) \times \mathbb{R}^n$.

Como já chamamos à atenção, $\mathrm{Ref}_{ort}(T\mathbb{R}^n)$ é um grupo de Lie e calculamos sua forma de *Maurer-Cartan* que, para $x \in \mathbb{R}^n$, é dada por $\lambda_x = \left(\overline{\omega}_x, \overline{\theta}_x\right)$ e em forma matricial por:

$$\lambda_x = \begin{pmatrix} \overline{\omega}_x & \overline{\theta}_x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Então a condição (i) do Corolário 3 corresponde a condição (C), ou seja, temos uma $1-forma$ em M que coincide com o pull-back por $\widetilde{f}$ da

forma de *Maurer-Cartan* $(\overline{\omega}, \overline{\theta})$ do grupo de Lie $\mathrm{Ref}_{ort}(T\mathbb{R}^n)$. Assim o Corolário 3 garante que $\left(\mathfrak{s}^*\widehat{\omega}, \mathfrak{s}^*\widehat{\theta}\right)$ satisfaz a equação de *Maurer-Cartan*, em outras palavras, (C) é equivalente a (D).

Vamos mostrar que (D) é equivalente a seguinte condição:

(E) $\widehat{\Theta} = 0$ e $\widehat{\Omega} = 0$.

Por 2.1 da seção 1.2, temos

$$\frac{1}{2}\left(\mathfrak{s}^*\widehat{\omega}, \mathfrak{s}^*\widehat{\theta}\right) \wedge \left(\mathfrak{s}^*\widehat{\omega}, \mathfrak{s}^*\widehat{\theta}\right)(u,v) = \left[\left(\mathfrak{s}^*\widehat{\omega}(u), \mathfrak{s}^*\widehat{\theta}(v)\right), \left(\mathfrak{s}^*\widehat{\omega}(u), \mathfrak{s}^*\widehat{\theta}(v)\right)\right].$$

Para calcular o colchete acima, devemos usar o colchete de $\mathfrak{so}(n) \times \mathbb{R}^n$,ou seja, a álgebra de Lie com a qual estamos trabalhando (tal colchete está definido na seção que trata do assunto Grupos de Isometrias). Então:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}&\left(\mathfrak{s}^*\widehat{\omega}, \mathfrak{s}^*\widehat{\theta}\right) \wedge \left(\mathfrak{s}^*\widehat{\omega}, \mathfrak{s}^*\widehat{\theta}\right)(u,v) \\ &= \left[\begin{pmatrix} \mathfrak{s}^*\widehat{\omega}(u) & \mathfrak{s}^*\widehat{\theta}(u) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathfrak{s}^*\widehat{\omega}(v) & \mathfrak{s}^*\widehat{\theta}(v) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}s^*\widehat{\omega} \wedge s^*\widehat{\omega}(u,v) & s^*\widehat{\omega} \wedge s^*\widehat{\theta}(u,v) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Por outro lado, efetuando-se a derivada exterior, temos:

$$d\begin{pmatrix} \mathfrak{s}^*\widehat{\omega} & \mathfrak{s}^*\widehat{\theta} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d\mathfrak{s}^*\widehat{\omega} & d\mathfrak{s}^*\widehat{\theta} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$d\left(\mathfrak{s}^*\widehat{\omega}, \mathfrak{s}^*\widehat{\theta}\right)(u,v) = \left(d\mathfrak{s}^*\widehat{\omega}(u,v), d\mathfrak{s}^*\widehat{\theta}(u,v)\right).$$

Pela condição (iii) do Corolário 3 (que, como vimos, corresponde a (D)), $\left(\widehat{\theta}, \widehat{\omega}\right)$ deve satisfazer a equação de Maurer-Cartan, ou seja, devemos ter:

$$d\left(\mathfrak{s}^*\widehat{\omega}, \mathfrak{s}^*\widehat{\theta}\right) = -\frac{1}{2}\left(\mathfrak{s}^*\widehat{\omega}, \mathfrak{s}^*\widehat{\theta}\right) \wedge \left(\mathfrak{s}^*\widehat{\omega}, \mathfrak{s}^*\widehat{\theta}\right)(u,v),$$

o que equivale a

$$d\left(\mathfrak{s}^*\widehat{\omega}, \mathfrak{s}^*\widehat{\theta}\right) + \frac{1}{2}\left(\mathfrak{s}^*\widehat{\omega}, \mathfrak{s}^*\widehat{\theta}\right) \wedge \left(\mathfrak{s}^*\widehat{\omega}, \mathfrak{s}^*\widehat{\theta}\right) = 0$$

Matricialmente

$$\begin{pmatrix} d\mathfrak{s}^*\widehat{\omega} + \frac{1}{2}\mathfrak{s}^*\widehat{\omega} \wedge \mathfrak{s}^*\widehat{\omega} & d\mathfrak{s}^*\widehat{\theta} + \mathfrak{s}^*\widehat{\omega} \wedge \mathfrak{s}^*\widehat{\theta} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

o que equivale a dizer que

$$\begin{aligned} d\mathfrak{s}^*\widehat{\omega} &= -\frac{1}{2}\mathfrak{s}^*\widehat{\omega}\wedge\mathfrak{s}^*\widehat{\omega}; \\ d\mathfrak{s}^*\widehat{\theta} &= -\mathfrak{s}^*\widehat{\omega}\wedge\mathfrak{s}^*\widehat{\theta} \end{aligned}$$

Assim temos, pelas propiedades de comutação do pull-back

$$\begin{aligned} \mathfrak{s}^*(d\widehat{\omega}) &= -\mathfrak{s}^*(\frac{1}{2}\widehat{\omega}\wedge\widehat{\omega}); \\ \mathfrak{s}^*(d\widehat{\theta}) &= -\mathfrak{s}^*(\widehat{\omega}\wedge\widehat{\theta}), \end{aligned}$$

e isso se e somente se

$$\mathfrak{s}^*\widehat{\Theta} = 0 \text{ e } \mathfrak{s}^*\widehat{\Omega} = 0$$

o que pelo Lema 1, é equivalente a

$$\widehat{\Theta} = 0 \text{ e } \widehat{\Omega} = 0$$

Sejam $\widehat{T}$ e $\widehat{R}$ os tensores de torção e curvatura de $\widehat{\nabla}$. Vamos mostrar que (E) é equivalente a seguinte condição:

(F) $\widehat{T} = 0$ e $\widehat{R} = 0$.

Sejam X^* e Y^* levantamentos para $\mathrm{Ref}_{ort}\left(\overline{\xi}|_U\right)$ dos campos vetoriais X ,$Y \in \mathfrak{X}(M)$ e seja $s \in \Gamma\left(\overline{\xi}\right)$. Sabemos que podemos escrever $\widehat{T}$ e $\widehat{R}$.referindo-nos a $\mathrm{Ref}_{ort}\left(\overline{\xi}|_U\right)$ como se segue:

$$\begin{aligned} \widehat{T}(X,Y) &= p\left(2\widehat{\Theta}(X^*,Y^*)\right), \\ \widehat{R}(X,Y)s &= p\left(2\widehat{\Omega}(X^*,Y^*)\right)(p^{-1}s), \end{aligned}$$

assim, concluímos que, se as formas $\widehat{\Theta}$ e $\widehat{\Omega}$ são nulas, também serão nulos os tensores $\widehat{T}$ e $\widehat{R}$.

É trivial a verificação de que se tivermos nulos os tensores $\widehat{T}$ e $\widehat{R}$, teremos a validade da condição (iii) do Corolário 3 (que corresponde a (D)), pois se os tensores $\widehat{T}$ e $\widehat{R}$ forem nulos, imediatamente serão nulas as formas $\widehat{\Theta}$ e $\widehat{\Omega}$ e portanto $\left(\widehat{\theta},\widehat{\omega}\right)$satisfaz a equação de Cartan.

Podemos ainda verificar que a condição de $\widehat{T}$ e $\widehat{R}$ serem nulos equivale a validade das equações de *Gauss-Codazzi-Ricci*, ou seja, as condições (E) e (B) são equivalentes.

O lado esquerdo da equação 2.7 do enunciado do Teorema 6 é dado por, para X,Y,Z,T em TM, $\mathrm{g}^{\overline{\xi}}(\widehat{R}(X,Y)Z,T)$, que acabamos de mostrar que é nulo, como em nosso caso $c = 0$, a equação de Gauss se verifica. Da mesma forma as equações de Codazzi e de Ricci se verificam, uma vez que que os lados esquerdos de 2.8 e de 2.9 são dados

por, respectivamente, $g^{\bar{\xi}}(\widehat{R}(X,Y)Z,s)$, com X,Y,Z em TM e s em ξ, e $g^{\bar{\xi}}(\widehat{R}(X,Y)t,s)$, com X,Y em TM e s,t em ξ

Acabamos de provar equivalentes as seis seguintes condições:

(A)Dado $x \in M$ e um aberto $U \subset M$ tal que $x \in U$, existe uma imersão isométrica $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ e um isomorfismo de fibrados vetoriais T entre $\xi_{|U}$ e o fibrado normal $f^{\perp}$ que leva g^{ξ} na métrica euclideana em $f^{\perp}$, ∇^{ξ} na conexão normal $\nabla^{\perp}$ e α_0 na segunda forma fundamental de f;

(B) Os objetos definidos acima satisfazem as equações de *Gauss-Codazzi-Ricci,* (2.7), (2.8), (2.9) do enunciado do Teorema 6, com $c = 0$;

(C) $\widetilde{f}^*\left(\overline{\omega},\overline{\theta}\right) = \left(\mathfrak{s}^*\widehat{\omega},\mathfrak{s}^*\widehat{\theta}\right)$;

(D) $d\left(\mathfrak{s}^*\widehat{\omega},s^*\widehat{\theta}\right) = -\frac{1}{2}\left(\mathfrak{s}^*\widehat{\omega},\mathfrak{s}^*\widehat{\theta}\right) \wedge \left(\mathfrak{s}^*\widehat{\omega},\mathfrak{s}^*\widehat{\theta}\right)$;

(E) $\widehat{\Omega} = 0$ e $\widehat{\Theta} = 0$;

(F) $\widehat{T} = 0$ e $\widehat{R} = 0$.

5. Imersão em S^n

Como no caso da imersão isométrica em $\mathbb{R}^n$, podemos provar a equivalência de seis condições (análogas, com algumas adaptações,ao caso em $\mathbb{R}^n$) com

(A') Dado $x \in M$ e um aberto $U \subset M$ tal que $x \in U$, existe uma imersão isométrica $f : U \longrightarrow S^n$ e um isomorfismo de fibrados vetoriais T entre $\xi_{|U}$ e o fibrado normal $f^{\perp}$ que leva g^{ξ} na métrica euclideana em $f^{\perp}$, ∇^{ξ} na conexão normal $\nabla^{\perp}$ e α_0 na segunda forma fundamental de f;

(B') Os objetos definidos acima satisfazem as equações de *Gauss-Codazzi-Ricci,* 2.7, 2.8, 2.9 do enunciado do Teorema 6, com $c = 1$;

(C') $\widetilde{f}^*\left(\overline{\omega},\overline{\theta}\right) = \left(\mathfrak{s}^*\widehat{\omega},\mathfrak{s}^*\widehat{\theta}\right)$;

(D') $d\left(\mathfrak{s}^*\widehat{\omega},s^*\widehat{\theta}\right) = -\frac{1}{2}\left(\mathfrak{s}^*\widehat{\omega},\mathfrak{s}^*\widehat{\theta}\right) \wedge \left(\mathfrak{s}^*\widehat{\omega},\mathfrak{s}^*\widehat{\theta}\right)$, onde o produto wedge é relativo a álgebra de Lie $\mathfrak{so}\,(n+1)$;

(E') $\widehat{\Omega} = \eta_+$ e $\widehat{\Theta} = 0$ onde $\eta_+\,(u,v) = -\widehat{\theta}\,(u)\,\widehat{\theta}\,(v)^t + \widehat{\theta}\,(v)\,\widehat{\theta}\,(u)^t \in \mathfrak{so}\,(n)$;

(F') $\widehat{T} = 0$ e:

$$g^{\bar{\xi}}\left(\widehat{R}\,(X,Y)\,s,t\right) = g^{\bar{\xi}}\,(Y,s)\,g^{\bar{\xi}}\,(X,t) - g^{\bar{\xi}}\,(X,s)\,g^{\bar{\xi}}\,(Y,t)\,.$$

As equivalências são provadas da mesma maneira que no caso anterior, levando em conta as adaptações necessárias.

Sejam $\widehat{\omega}$ e $\widehat{\theta}$, respectivamente, as formas de curvatura e canônica de $\mathrm{Ref}_{ort}\left(\overline{\xi}\right)$. Sejam $\overline{\omega}$ e $\overline{\theta}$ as formas de curvatura e canônica de $\mathrm{Ref}_{ort}\left(TS^n\right)$.

Efetuando-se os calculos para verificar a equivalência entre (C') e (D'), temos

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & -\mathfrak{s}^*\widehat{\theta}\,(u)^t \\ \mathfrak{s}^*\widehat{\theta}\,(u) & \mathfrak{s}^*\widehat{\omega}\,(u) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -\mathfrak{s}^*\widehat{\theta}\,(v)^t \\ \mathfrak{s}^*\widehat{\theta}\,(v) & \mathfrak{s}^*\widehat{\omega}\,(v) \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} \kappa_1 & \kappa_2 \\ \kappa_3 & \kappa_4 \end{pmatrix},$$

onde:

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= -\mathfrak{s}^*\widehat{\theta}\,(u)^t\,\mathfrak{s}^*\widehat{\theta}\,(v) + \mathfrak{s}^*\widehat{\theta}\,(v)^t\,\mathfrak{s}^*\widehat{\theta}\,(u)\,, \\ \kappa_2 &= -\mathfrak{s}^*\widehat{\theta}\,(u)^t\,\mathfrak{s}^*\widehat{\omega}\,(v) + \mathfrak{s}^*\widehat{\theta}\,(v)^t\,\mathfrak{s}^*\widehat{\omega}\,(u)\,, \\ \kappa_3 &= \mathfrak{s}^*\widehat{\omega}\,(u)\,\mathfrak{s}^*\widehat{\theta}\,(v) - \mathfrak{s}^*\widehat{\omega}\,(v)\,\mathfrak{s}^*\widehat{\theta}\,(u)\,, \\ \kappa_4 &= \mathfrak{s}^*\eta_+(u,v) + [\mathfrak{s}^*\widehat{\omega}\,(u)\,,\mathfrak{s}^*\widehat{\omega}\,(v)]. \end{aligned}$$

Mas, observando que $\mathfrak{s}^*\widehat{\theta}\,(u)^t$ é uma matriz $1\times n$ e que $\mathfrak{s}^*\widehat{\theta}\,(u)$ é uma matriz $n\times 1$, temos que $\mathfrak{s}^*\widehat{\theta}(u)^t\mathfrak{s}^*\widehat{\theta}\,(v)$ é uma matriz 1×1, ou seja, é um número e também $\mathfrak{s}^*\widehat{\theta}\,(u)^t\,\mathfrak{s}^*\widehat{\theta}\,(v) = \mathfrak{s}^*\widehat{\theta}\,(v)^t\,\mathfrak{s}^*\widehat{\theta}\,(u)$. Logo, $-\mathfrak{s}^*\widehat{\theta}\,(u)^t\,\mathfrak{s}^*\widehat{\theta}\,(v) + \mathfrak{s}^*\widehat{\theta}\,(v)^t\,\mathfrak{s}^*\widehat{\theta}\,(u) = 0$. Também observamos que -$\mathfrak{s}^*\widehat{\theta}\,(u)\,\mathfrak{s}^*\widehat{\theta}\,(v)^t$ é uma matriz $n\times n$ e -$\mathfrak{s}^*\widehat{\theta}\,(v)\,\mathfrak{s}^*\widehat{\theta}\,(u)^t$ é sua transposta. Portanto -$\mathfrak{s}^*\widehat{\theta}\,(u)\,\mathfrak{s}^*\widehat{\theta}\,(v)^t + \mathfrak{s}^*\widehat{\theta}\,(v)\,(\mathfrak{s}^*\widehat{\theta}\,(u)^t) \in \mathfrak{so}\,(n)$, este fato vai relavelar-se coerente adiante.

Portanto, finalmente temos

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & -\mathfrak{s}^*\widehat{\theta}\,(u)^t \\ \mathfrak{s}^*\widehat{\theta}\,(u) & \mathfrak{s}^*\widehat{\omega}\,(u) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -\mathfrak{s}^*\widehat{\theta}\,(v)^t \\ \mathfrak{s}^*\widehat{\theta}\,(v) & \mathfrak{s}^*\widehat{\omega}\,(v) \end{pmatrix}\right] =$$
$$\begin{pmatrix} 0 & -(\mathfrak{s}^*\widehat{\omega}\,(u)\wedge\mathfrak{s}^*\widehat{\theta}\,(v))^t \\ \mathfrak{s}^*\widehat{\omega}\,(u)\wedge\mathfrak{s}^*\widehat{\theta}\,(v) & \mathfrak{s}^*\eta_+ + [\mathfrak{s}^*\widehat{\omega}\,(u)\,,\mathfrak{s}^*\widehat{\omega}\,(v)] \end{pmatrix}.$$

Por outro lado,

$$d\left(\mathfrak{s}^*\widehat{\omega},\mathfrak{s}^*\widehat{\theta}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -d(\mathfrak{s}^*\widehat{\theta})^t \\ d\left(\mathfrak{s}^*\widehat{\theta}\right) & d\mathfrak{s}^*\widehat{\omega} \end{pmatrix}.$$

Assim $d\left(\mathfrak{s}^*\widehat{\omega},\mathfrak{s}^*\widehat{\theta}\right) + \frac{1}{2}\left(\mathfrak{s}^*\widehat{\omega},\mathfrak{s}^*\widehat{\theta}\right)\wedge\left(\mathfrak{s}^*\widehat{\omega},\mathfrak{s}^*\widehat{\theta}\right) = 0$ se e somente se são satisfeitas as igualdades:

$$\begin{aligned} d\left(\mathfrak{s}^*\widehat{\theta}\right)(u,v) - \mathfrak{s}^*\widehat{\omega}\,(u)\wedge\mathfrak{s}^*\widehat{\theta}\,(v) &= 0, \\ -\mathfrak{s}^*\eta_+ + d\,(\mathfrak{s}^*\widehat{\omega})\,(u,v) - \frac{1}{2}\mathfrak{s}^*\widehat{\omega}\,(u)\wedge\mathfrak{s}^*\widehat{\omega}\,(v) &= 0. \end{aligned}$$

As equações de estrutura de Cartan são as seguintes

$$\begin{aligned} d\left(\mathfrak{s}^*\widehat{\theta}\right)(X,Y) - \mathfrak{s}^*\widehat{\omega}(X) \wedge \mathfrak{s}^*\widehat{\theta}(Y) &= \widehat{\Theta}(X,Y); \\ d\left(\mathfrak{s}^*\widehat{\omega}\right)(X,Y) - \frac{1}{2}\mathfrak{s}^*\widehat{\omega}(X) \wedge \mathfrak{s}^*\widehat{\omega}(Y) &= \widehat{\Omega}(X,Y). \end{aligned}$$

Comparando as últimas equações às equações de estrutura de Cartan, podemos cocluir

$$\begin{aligned} \widehat{\Omega}(u,v) &= \eta_+(u,v); \\ \widehat{\Theta}(u,v) &= 0. \end{aligned}$$

O próximo passo é a interpretação dos resultados acima. Lembramos que o tensor $\widehat{T}$ pode ser expresso, para X e Y tangentes, em termos da forma de torção $\widehat{\Theta}$, ou seja

$$\widehat{T}(X,Y) = g\left(2\widehat{\Theta}(X^*,Y^*)\right),$$

onde g é um ponto de $O(n+1)$ e $X, Y \in TM$ e X^* , Y^* são seus levantamentos horizontais para $O(n+1)$. Assim concluimos que $\widehat{\Theta}(X,Y) = 0$ implica em M ter o tensor de torção nulo. A fórmula $\widehat{\Omega}(X,Y) = \eta_+(X,Y)$ nos diz que M deve ser uma variedade de curvatura (seccional) constante igual a 1. A seguir, justifica-se a última frase.

Seja $x \in M$ e $p = (Z_1, \ldots\ldots, Z_n)$ uma base ortonormal de T_pM, assim $p \in \mathrm{Ref}_{ort}(\xi)$. Sejam $X, Y \in T_pM$ e X^* e Y^* vetores horizontais em $T_p\mathrm{Ref}_{ort}(\xi)$ tais que $d\pi_p(X^*) = X$ e $d\pi_p(Y^*) = Y$. Temos $\widehat{\Omega}(X^*,Y^*) \in \mathfrak{so}(n)$ e $\widehat{\Omega}_p(X,Y)_{ij} = g^{\xi}(\widehat{R}(X,Y)Z_i, Z_j)$. Temos

$$\widehat{\Omega}\left(Z_i^*, Z_j^*\right)_{ij} = -\mathfrak{s}^*\widehat{\theta}\left(Z_i^*\right)_i \mathfrak{s}^*\widehat{\theta}\left(Z_i^*\right)_j^t + \mathfrak{s}^*\widehat{\theta}\left(Z_j^*\right)_i \mathfrak{s}^*\widehat{\theta}\left(Z_i^*\right)_j^t$$

Sabemos que $s^*\widehat{\theta}_p\left(Z_j^*\right)_i = \delta_{ij}$. Portanto

$$\widehat{\Omega}\left(Z_i^*, Z_j^*\right)_{ij} = -1$$

A igualdade acima confirma a que esperávamos, ou seja, para que M admita imersão em S^n, M deve ter curvatura seccional constante igual a 1, considerando nossas convenções.

6. Imersão em H^n

Vamos repetir para o caso da imersão em H^n, o processo seguido nas seções anteriores para os casos das imersões em $\mathbb{R}^n$ e S^n. Como tudo

é muito análogo ao que foi feito na seção anterior, apenas ressaltamos as diferenças. Definimos:

$$\eta_-(u,v) = \widehat{\theta}(u)\,\widehat{\theta}(v)^t - \widehat{\theta}(v)\,\widehat{\theta}(u)^t \in \mathfrak{so}(n).$$

Queremos calcular:

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & \mathfrak{s}^*\widehat{\theta}(X)^t \\ \mathfrak{s}^*\widehat{\theta}(X) & \mathfrak{s}^*\widehat{\omega}(X) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \mathfrak{s}^*\widehat{\theta}(Y)^t \\ \mathfrak{s}^*\widehat{\theta}(Y) & \mathfrak{s}^*\widehat{\omega}(Y) \end{pmatrix}\right].$$

Temos:

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & -\mathfrak{s}^*\widehat{\theta}(u)^t \\ \mathfrak{s}^*\widehat{\theta}(u) & \mathfrak{s}^*\widehat{\omega}(u) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -\mathfrak{s}^*\widehat{\theta}(v)^t \\ \mathfrak{s}^*\widehat{\theta}(v) & \mathfrak{s}^*\widehat{\omega}(v) \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & \kappa_1 \\ \kappa_2 & \kappa_3 \end{pmatrix}$$

onde:

$$\kappa_1 = -(\mathfrak{s}^*\widehat{\omega}(u) \wedge \mathfrak{s}^*\widehat{\theta}(v))^t,$$
$$\kappa_2 = \mathfrak{s}^*\widehat{\omega}(u) \wedge \mathfrak{s}^*\widehat{\theta}(v),$$
$$\kappa_3 = \mathfrak{s}^*\eta_-(u,v) + [\mathfrak{s}^*\widehat{\omega}(u), \mathfrak{s}^*\widehat{\omega}(v)]$$

Por outro lado,

$$d\left(\mathfrak{s}^*\widehat{\omega}, \mathfrak{s}^*\widehat{\theta}\right) = \begin{pmatrix} 0 & d(\mathfrak{s}^*\widehat{\theta})^t \\ d\left(\mathfrak{s}^*\widehat{\theta}\right) & d\mathfrak{s}^*\widehat{\omega} \end{pmatrix}.$$

Assim, a condição $d\left(\mathfrak{s}^*\widehat{\omega}, \mathfrak{s}^*\widehat{\theta}\right) + \frac{1}{2}\left(\mathfrak{s}^*\widehat{\omega}, \mathfrak{s}^*\widehat{\theta}\right) \wedge \left(\mathfrak{s}^*\widehat{\omega}, \mathfrak{s}^*\widehat{\theta}\right) = 0$ é equivalente às seguintes identidades:

$$\begin{aligned} d\left(\mathfrak{s}^*\widehat{\theta}\right)(u,v) - \mathfrak{s}^*\widehat{\omega}(u) \wedge \mathfrak{s}^*\widehat{\theta}(v) &= 0; \\ -\eta_- + d\left(\mathfrak{s}^*\widehat{\omega}\right)(u,v) - \frac{1}{2}\mathfrak{s}^*\widehat{\omega}(u) \wedge \mathfrak{s}^*\widehat{\omega}(v) &= 0. \end{aligned}$$

Comparando as últimas equações às equações de estrutura de Cartan, podemos concluir

$$\begin{aligned} \Omega &= \eta_- \\ \Theta &= 0 \end{aligned}$$

CAPíTULO 4

Imersões Isométricas em Variedades Riemannianas Arbitrárias.

1. Introdução.

O Teorema principal desta dissertação é baseado no Teorema de Frobenius Generalizado (Corolário 2) e possui como corolário o Teorema de Cartan sobre a determinação da métrica por meio da curvatura (vide [2, Cap. 8]), além de generalizar o Teorema Fundamental das Imersões Isométricas.

2. O Teorema Fundamental

Temos aqui uma situação similar àquela do Teorema 6, porém agora estamos interessados em fazer a imersão da variedade Riemanniana (M, g) em uma variedade Riemanniana $\left(\overline{M}, \overline{g}\right)$ arbitrária. Analogamente ao enunciado do Teorema 6, seja (M, g) uma variedade Riemanniana e seja dado sobre M um fibrado vetorial $\pi : \xi \longrightarrow M$. Seja g^{ξ} uma estrutura Riemanniana em ξ e ∇^{ξ} uma conexão em ξ e suponha que o tensor g^{ξ} seja paralelo em relação a ∇^{ξ}. Considere α_0 uma seção diferenciável simétrica do fibrado vetorial $TM^{*} \otimes TM^{*} \otimes \xi$. Seja $\left(\overline{M}, \overline{g}\right)$ uma variedade Riemanniana *arbitrária* com $\dim\left(\overline{M}\right) = \dim(\xi)$ e conexão de Levi-Civita $\overline{\nabla}$. Considere $\overline{\xi} = TM \oplus \xi$ com estrutura Riemanniana $g^{\overline{\xi}}$, definida como em (2.4) da secção 3.2 e sua conexão associada $\widehat{\nabla}$ definida como em (2.5) e (2.6) da Seção 3.2. Sejam $\widehat{R}$ e $\overline{R}$, respectivamente, os tensores de curvatura de $\widehat{\nabla}$ e $\overline{\nabla}$. Seja $\mathfrak{s} : U \subset M \longrightarrow \mathrm{Ref}_{ort}\left(\overline{\xi}\right)$ uma seção diferenciável.

Analogamente ao Corolário 2, Sejam Λ uma variedade e $Z \subset \mathbb{R} \times \Lambda$ um subconjunto aberto e ϕ, ψ, $\overline{\psi}$ aplicações C^{∞}:

$$\begin{aligned}
\mathbb{R} \times \Lambda \ &\supset \ Z \ni (t, \lambda) \mapsto \phi(t, \lambda) \in U \subset M; \\
\mathbb{R} \times \Lambda \ &\supset \ Z \ni (t, \lambda) \mapsto \psi(t, \lambda) \in \overline{M}; \\
\mathbb{R} \times \Lambda \ &\supset \ Z \ni (t, \lambda) \mapsto \overline{\psi}(t, \lambda) \in \mathrm{Ref}_{ort}\left(T\overline{M}\right);
\end{aligned}$$

onde $\pi \circ \overline{\psi} = \psi$. Seja $\alpha : V \longrightarrow Z$ uma aplicação C^{∞} definida num aberto $V \subset M$, tal que $\phi \circ \alpha = \mathrm{Id}$.

Continuando com um espírito análogo ao da Seção 2 do Capítulo 3, defimos $\widetilde{f} : V \subset M \to \mathrm{Ref}(\mathrm{T}\overline{M})$ por $\widetilde{f} = \overline{\psi} \circ \alpha$ e definimos $f : V \to \overline{M}$ por $f = \pi \circ \widetilde{f}$ e um isomorfismo de fibrados vetoriais $S : \overline{\xi}|_V \to f^*\left(T\overline{M}\right)$ por $S_x = \widetilde{f}(x) \circ \mathfrak{s}(x)^{-1}$, $x \in V$. À partir de S, definimos $T : \xi|_V \to f^*\left(T\overline{M}\right)$ fazendo $\mathrm{T}_x = S|_{\xi_x}$, $x \in V$. Seja $L_{(t,\lambda)} : \overline{\xi}_{\phi(t,\lambda)} \to T_{\psi(t,\lambda)}\overline{M}$ um isomorfismo deinido por $L_{(t,\lambda)} = \overline{\psi}(t,\lambda) \circ \mathfrak{s}(\phi(t,\lambda))^{-1}$.

TEOREMA 7. *Considerando as notações introduzidas acima, suponha que*

(1) *Para cada* $(t,\lambda) \in Z$,

$$L_{(t,\lambda)}\left(\widehat{R}(X,Y)\cdot s\right) = \overline{R}\left(L_{(t,\lambda)}(X), L_{(t,\lambda)}(Y)\right)\cdot L(s),.$$

quaisquer que sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ *e* $s \in \overline{\xi}$

(2) *Para cada* $(t,\lambda) \in Z$,

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dt}(t,\lambda) &= L_{(t,\lambda)} \cdot \frac{d\phi}{dt}(t,\lambda); \\ \frac{D\overline{\psi}}{dt}(t,\lambda) &= L_{(t,\lambda)} \cdot \frac{D(\mathfrak{s}\circ\phi)}{dt}(t,\lambda). \end{aligned}$$

(3) *Para cada* $(t_1,\lambda) \in Z$, *existe* $t_0 \in \mathbb{R}$ *tal que* $I \times \{\lambda\} \subset Z$ *e:*

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{d\lambda}(t_0,\lambda) &= L_{(t_0,\lambda)} \cdot \frac{d\phi}{d\lambda}(t_0,\lambda); \\ \frac{D\overline{\psi}}{d\lambda}(t_0,\lambda) &= L_{(t_0,\lambda)} \cdot \frac{D(\mathfrak{s}\circ\phi)}{d\lambda}(t_0,\lambda), \end{aligned}$$

onde $I \subset \mathbb{R}$ *denota o intervalo que tem* t_0 *e* t_1 *como extremos.*

Então $f : V \to \overline{M}$ *é uma imersão isométrica e* $T : \xi|_V \to f^{\perp}$, *onde* $f^{\perp}$ *é o fibrado normal* $f^{\perp}$ *da imersão isométrica* f, *é uma isometria para o qual vale as condições* (*a*), (*b*) *e* (*c*) *do Teorema 6.*

DEMONSTRAÇÃO. Usando as idéias da Seção 2 do Capítulo 3, isso segue diretamente do Corolário 2 com $\omega^N = (\overline{\omega}, \overline{\theta})$ e $\omega^M = (\mathfrak{s}^*\widehat{\omega}, \mathfrak{s}^*\widehat{\theta})$. ∎

Para todo ponto $x \in M$, denotaremos por B_r^x, a bola aberta de T_xM que é centrada em x e tem raio de coprimento r. Podemos escolher $r > 0$ tal que $\exp_x : B_r^x \to \exp_x(B_r^x)$ seja um difeomorfismo.

COROLÁRIO 5 (Teorema de Cartan). *Sejam* (M,g) *e* $\left(\overline{M},\overline{g}\right)$ *variedades Riemannianas tais que* $\dim(M) = \dim\left(\overline{M}\right)$, x_0 *ponto de* M *e* y_0 *ponto de* $\overline{M}$. *Seja* $i : T_{x_0}M \to T_{y_0}\overline{M}$ *uma isometria. Seja* $r > 0$ *tal*

que $\exp_{x_0} : B_r^{x_0} \to V$ *seja um difeomorfismo sobre um aberto* $V \subset M$ *e tal que* $B_r^{y_0}$ *esteja contida no domínio de* $\exp_{y_0}$. *Para cada* $x \in V$ *seja:*

$$f(x) = exp_{y_0}\big(i\big(\exp_{x_0}^{-1}(x)\big)\big),$$

e seja $L_x : T_xM \to T_{f(x)}\overline{M}$ *a isometria definida por:*

$$L_x = \overline{P}_{f(x)} \circ i \circ P_x^{-1},$$

onde $P_x : T_{x_0}M \to T_xM$ *denota o operador de transporte paralelo ao longo da geodésica radial ligando* x_0 *a* x *e* $\overline{P}_{f(x)} : T_{y_0}\overline{M} \to T_{f(x)}\overline{M}$ *denota o operador de transporte paralelo ao longo da geodésica radial ligando* y_0 *a* $f(x)$. *Suponha que o pull-back do tensor* $\overline{R}_{f(x)}$ *por* L_x *seja igual a* R_x, *para todo* $x \in M$. *Então* f *é uma isometria.*

DEMONSTRAÇÃO. Vamos aplicar o Teorema 7 com os seguintes objetos. Tome $\xi = 0$, $\nabla^{\xi} = 0$, $\alpha_0 = 0$, de modo que $\overline{\xi} = TM$. Faça $\Lambda = B_r^{x_0}$ e seja

$$Z = \{(t, \lambda) \in \mathbb{R} \times \Lambda : t\lambda \in B_r^{x_0}\},$$

seja $\phi(t, \lambda) = \exp_{x_0}(t\lambda)$. Seja $\mathfrak{s} : V \to \mathrm{Ref}_{ort}(\overline{\xi}) = \mathrm{Ref}_{ort}(TM)$ uma seção paralela longo de geodésicas radiais. Seja $\psi(t, \lambda) = \exp_{y_0}(t\lambda)$, $\overline{\psi}(t, \lambda)$ é o referencial ortonormal tal que

$$\frac{\overline{\mathrm{D}}}{\mathrm{d}t}\overline{\psi}(t, \lambda) = 0$$

e tal que $\overline{\psi}(0, \lambda) = i \circ \mathfrak{s}(x_0)$. Defina $\alpha : V \to Z$ da seguinte forma:

$$\alpha(x) = \big(1, \exp_{x_0}^{-1}(x)\big).$$

Então $\phi(\alpha(x)) = \phi\big(1, \exp_{x_0}^{-1}(x)\big) = x$. A conclusão segue do Teorema 7. ∎

Referências Bibliográficas

[1] M. P. do Carmo, *Diffferetial Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall, New Jersey, (1976).

[2] M. P. do Carmo. *Geometria Riemanniana*, Rio de Janeiro, Instituto deMatemática Pura e Aplicada, Projeto Euclides (1988).

[3] P. Griffiths, *On Cartan´s Method of Lie Groups and Moving Frames as Applied to Uniqueness and Existence Questions in Differential Geometry*, Duke Math. J. 41 (1974), pgs. 775-814.

[4] S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry,* vol. I, New York, John Wiley & Sons, Inc. (1963).

[5] R. Palais, C. L. Terng, *Critical Point Theory and Submanifold Geometry*, Lecture Notes in Mathematics 1353, Springer-Verlag, Berlin (1988).

[6] K. Tenenblat. *On Isometric Immersions of Riemannian Manifolds*, Bolettim da Soc. Bras. de Mat. vol 2 (1971), pgs 23-36.

[7] J. A. Wolf, *Spaces of constante curvature*, second edition. Departament of Mathematics, University of california, Berkeley, California (1972).

[8] F. W. Warner, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Graduate Texts in Mathematics 94, Springer-Verlag, New York (1983).