# Estrutura de Lie da Cohomologia de Hochschild e uma classe especial de derivações de uma Álgebra

Sônia Maria Fernandes

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR
EM
MATEMÁTICA

Área de Concentração: **Matemática**
Orientador : **Prof. Dr. Eduardo do Nascimento Marcos**

*Durante a elaboração deste trabalho a autora recebeu apoio financeiro da CAPES.*

São Paulo, julho de 2004

# Estrutura de Lie da Cohomologia de Hochschild e uma classe especial de derivações de uma Álgebra

Este exemplar corresponde à redação
final da tese devidamente corregida
e defendida por Sônia Maria Fernandes
e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, julho de 2004.

Banca examinadora:

- Prof. Dr. Eduardo do Nascimento Marcos (IME-USP)
- Prof. Dra. Diane Castonguay (IME-USP)
- Prof. Dr. Edson Ribeiro Álvarez (UFPR)
- Prof. Dr. Antonio Paques (IMECC-UNICAMP)
- Prof. Dr. Antonio José Engler (IMECC-UNICAMP)

a meu pai,
a minha mãe
e a Washington.

# Resumo

Nosso trabalho aborda três assuntos relativos a cohomologia de Hochschild descritos a seguir.

Dado um corpo $k$ e $\Lambda$ uma $k$-álgebra de dimensão finita, mostramos que a cohomologia de Hochschild $H^*(\Lambda, \Lambda)$ com o produto cup é um anel graduado comutativo utilizando o fato do produto cup ser isomorfo ao produto de Yoneda.

Dado $\Lambda = \frac{k\Gamma}{I}$ uma álgebra quadrática de dimensão finita, definimos um colchete em $H^1(\Lambda, \Lambda)$ em termos de relações paralelas. Além disso vimos que os caminhos de $k\Gamma$ induz uma graduação sobre $H^1(\Lambda, \Lambda)$.

Dado $\Lambda$ uma $k$-álgebra de dimensão finita, estudamos a estrutura de Lie do espaço vetorial gerado pelas derivações fundamentais. Mostramos que existe uma relação entre derivação fundamental e um certo recobrimento de Galois definido a partir do grupo fundamental. Mostramos também que para álgebras monomiais, se o corpo $k$ tem característica zero, então o espaço vetorial gerado pelas derivações internas e pelas derivações fundamentais coincide com o conjunto das derivações da álgebra.

# Abstract

The main objective of this thesis is the the study of the following three topics on Hochschild cohomology $H^*(\Lambda, \Lambda)$ of a finite dimensional $k$-algebra $\Lambda$, over a field $k$.

We show that the ring $H^*(\Lambda, \Lambda)$ with cup product is a graded commutative ring, using the fact that the cup product is isomorphic to Yoneda product.

Given $\Lambda = \frac{k\Gamma}{I}$ a finite-dimensional quadratic $k$-algebra, we describe the usual bracket product on $H^1(\Lambda, \Lambda)$ in terms of parallel relations. Moreover we prove that the path of $k\Gamma$ induces a graduation on $H^1(\Lambda, \Lambda)$.

We study the Lie structure of the vector space generated by a class of derivations which we call the fundamental derivations. We establish relations between fundamental derivation and Galois coverings. For fields of characteristic zero, we also show that in a monomial algebra the vector space generated by inner and fundamental derivations is equal to the set of all derivations.

# Introdução

Sejam $k$ um anel comutativo e $\Lambda$ uma $k$-álgebra associativa de dimensão finita. Em 1946, Hochschild definiu os grupos de cohomologia $H^i(\Lambda, \Lambda)$ para $i \geq 0$ . Hoje esses grupos de cohomologia são chamados de grupos de cohomologia de Hochschild.

Para álgebra sobre corpos os grupos de cohomologia de Hochschild podem ser definidos como

$$H^i(\Lambda, \Lambda) = Ext^i_{\Lambda^e}(\Lambda, \Lambda)$$

onde $\Lambda^e$ é a álgebra envolvente $\Lambda \otimes_k \Lambda^{op}$. Esses grupos são invariantes da álgebra por equivalência de Morita (veja [25]) e por equivalência derivada (veja [14]).

O primeiro grupo de cohomologia $H^1(\Lambda, \Lambda)$ é o quociente $\frac{Der(\Lambda)}{Inn(\Lambda)}$ onde os elementos de $Der(\Lambda)$ são chamados de derivações e os elementos de $Inn(\Lambda)$ de derivações internas. O grupo $H^1(\Lambda, \Lambda)$ está intrisecamente relacionado com a caracterização da classe das álgebras simplesmente conexas e sua generalização as álgebras fortemente simplesmente conexas (veja [23]). Esse é um dos motivos pelo qual se estuda o grupo de cohomologia de Hochschild na teoria de representações de álgebra.

O primeiro e o segundo grupos de cohomologia de Hochschild têm interpretação concreta na estrutura algébrica clássica em termos de derivações e extensões. Foi observado por Gerstenhaber em [9] também conexão desses grupos com a geometria algébrica. Por exemplo foi mostrado que as álgebras $\Lambda$ que satisfazem $H^2(\Lambda, \Lambda) = 0$ são rígidas.

Em nosso trabalho abordamos três assuntos que detalhamos brevemente a seguir todos relacionados com a cohomologia de Hochschild.

O primeiro assunto refere-se ao anel $\mathbb{Z}$-graduado $H^*(\Lambda, \Lambda) = \coprod_i H^i(\Lambda, \Lambda)$ com o produto cup. Definindo sobre $H^*(\Lambda, \Lambda)$ um segundo produto chamado produto círculo, Gerstenhaber em [9] prova que existe uma relação entre o produto círculo e o produto cup. Utilizando essa relação chega-se ao resultado que $H^*(\Lambda, \Lambda)$ com o produto cup é um anel graduado comutativo. Provamos esse mesmo resultado utilizando um outro argumento, o fato do produto cup ser isomorfo ao produto de Yoneda.

No segundo assunto descrevemos $H^1(\Lambda, \Lambda)$ em termos de relações paralelas quando $\Lambda$ é uma álgebra quadrática de dimensão finita sobre um corpo. Nossa inspiração foi o artigo [24] onde Strametz estudou a estrutura de álgebra de Lie graduada do primeiro grupo de cohomologia de Hochschild de uma álgebra monomial $\Lambda$ de dimensão finita em termos de caminhos paralelos. Isso permitiu-lhe descrever um critério para a semi(-simplicidade), a solubilidade, a redutibilidade, a comutatividade e a nilpotência no caso em que $\Lambda$ é uma álgebra monomial. Nessa direção, no caso de álgebra quadrática, nós tivemos alguns avanços.

Por último estudamos as derivações fundamentais de uma álgebra de dimensão finita. Seja agora $\Lambda$ uma $k$-álgebra conexa de dimensão finita. O espaço vetorial gerado pelas derivações diagonalizáveis de $Der\,(\Lambda)$ denotado por $SPDer\,(\Lambda)$ é um ideal de Lie de $Der\,(\Lambda)$ desde que $k$ tenha característica zero ou seja algebricamente fechado de característica prima (veja [5]). Em [7] Farkas, Green e Marcos definem uma classe de derivações diagonalizáveis chamadas de derivações fundamentais e mostram uma caracterização dessas derivações. Um fato interessante mostrado no nosso trabalho é que as derivações fundamentais estão relacionadas a um recobrimento de Galois. Isso foi possível utilizando a definição de peso semi-conexo que aparece em [12]. Como o espaço vetorial das derivaçõs fundamentais é um subespaço de $SPDer(\Lambda)$, foi natural se perguntar quando esse subespaço é um ideal de Lie de $Der(\Lambda)$. No caso em que o corpo é de característica zero o espaço vetorial formado pelas derivações fundamentais é um ideal de Lie de $Der(\Lambda)$, mas no caso em que o corpo é de característica prima mesmo que seja algebricamente fechado não é verdade.

Ainda sobre derivação fundamental, no artigo [6] estudou-se as derivações integráveis. O interesse de se estudar essas derivações deve-se ao fato de que uma condição necessária e suficiente para que o grupo de automorfismo da álgebra seja liso é que toda derivação diagonalizável seja integrável. Durante algum tempo acreditamos que toda derivação fundamental era integrável. Essa afirmação revelou-se falsa.

Nosso trabalho é desenvolvido da seguinte forma.

No capítulo 1 apresentamos definições e resultados preliminares necessários para o entendimento do trabalho como por exemplo conceito de álgebras de caminho, quiver, grupo fundamental, grupo de cohomologia de Hochschild e derivação de uma álgebra.

No capítulo 2 vamos apresentar resultados sobre módulos graduados e anel bigraduado que acreditamos serem conhecidos mas que não aparecem na literatura ou que não estão demonstrados explicitamente. Também como já dissemos utilizando o fato de que o produto cup é isomorfo ao produto de Yoneda vamos mostrar, nesse capítulo, que $H^*(\Lambda, \Lambda)$ com o produto cup é um anel graduado comutativo.

No capítulo 3 conseguimos definir para $H^1(\Lambda, \Lambda)$ um colchete em termos de relações paralelas. Utilizando os resultados do capítulo 2 sobre módulos graduados mostramos que os caminhos de $k\Gamma$ introduzem uma graduação sobre $H^1(\Lambda, \Lambda) = \coprod_{i \geq -1} \mathcal{L}_i$. Com isso provamos que $H^1(\Lambda, \Lambda)$ com o colchete definido em termos de relações paralelas é uma álgebra de Lie graduada. Não é possível mostrar que $H^1(\Lambda, \Lambda)$ com o colchete definido em termos de caminhos paralelas é uma álgebra de Lie graduada quando $\Lambda$ é uma álgebra monomial utilizando esse argumento. Demonstramos que $\mathcal{L}_{-1} = 0$ no caso da característica do corpo $k$ ser diferente de dois. Esse fato é interessante pois acreditamos que consiguiremos obter informações tais como a simplicidade, a semi-simplicidade e a solubilidade da álgebra de Lie $H^1(\Lambda, \Lambda)$ estudando apenas $\mathcal{L}_0$ quando o corpo $k$ tem característica diferente de dois.

No capítulo 4 mostramos que existe uma relação entre derivação fundamental e um certo recobrimento de Galois definido a partir do grupo fundamental. Denotamos o subespaço das derivações fundamentais por $SF(\Lambda)$. Mostramos que o espaço vetorial $SF(\Lambda)$ é um ideal de Lie das derivações de uma $k$-álgebra $\Lambda$ de dimensão finita quando o corpo $k$ tem característica zero, e damos um contra-exemplo dessa afirmação para o caso de característica positiva. Mostramos também que para álgebras monomiais, se o corpo $k$ tem característica zero, então o espaço vetorial gerado pelas derivações internas e pelas derivações fundamentais coincide com o conjunto das derivações da álgebra. Por último, nesse capítulo, exibimos um contra-exemplo que mostra que uma derivação fundamental não é necessariamente uma derivação integrável.

# Sumário

# Capítulo 1

# Preliminares

Neste capítulo vamos apresentar definições e resultados básicos que serão utilizados ao longo deste trabalho. A maioria das demonstrações será omitida, mas fornecemos referências de textos onde se pode encontrar essas demonstrações.

## 1.1 Quivers e álgebras de caminhos

Nesta seção introduzimos a noção de quiver e de álgebras de caminhos. Assumimos alguns resultados aqui apresentados, sem explicitar suas demonstrações. Uma exposição detalhada desses resultados pode ser encontrado em [2] e [21].

**Definição 1.1** *Um quiver $\Gamma$ é dado por dois conjuntos finitos $\Gamma_0$ e $\Gamma_1$ e um par de funções $o, t : \Gamma_1 \mapsto \Gamma_0$. Os elementos de $\Gamma_0$ são chamados de vértices de $\Gamma$ enquanto que os elementos de $\Gamma_1$ são chamados de flechas de $\Gamma$. Dada uma flecha $\alpha \in \Gamma_1$, $o(\alpha)$ chama-se origem de $\alpha$ enquanto que $t(\alpha)$ chama-se término de $\alpha$.*

Um caminho $\gamma$ no quiver $\Gamma$ é uma sequência de flechas $\gamma = \alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_l$ com $t(\alpha_i) = o(\alpha_{i-1})$ para todo $2 \leq i \leq l$.

A cada vértice $x \in \Gamma_0$ associamos o símbolo $e_x$, que chamamos de caminho trivial associado a $x$, e definimos $o(e_x) = t(e_x) = x$. Para um caminho não trivial $\gamma$ como acima, denotamos $o(\gamma) = o(\alpha_1)$ e $t(\gamma) = t(\alpha_l)$.

Definimos o comprimento de um caminho $\gamma$ não trivial, que denotamos por $l(\gamma)$, como sendo o número de flechas em $\gamma$, e o comprimento de um caminho trivial $e_x$ é zero por definição.

Um caminho não trivial tal que $o(\gamma) = t(\gamma)$ é chamado ciclo, ciclo orientado ou caminho fechado. Um ciclo $\gamma$ em $\Gamma$ tal que $l(\gamma) = 1$ é chamado simplesmente de laço.

Dizemos que dois caminhos $\gamma_1$ e $\gamma_2$ em $\Gamma$ são paralelos se $o(\gamma_1) = o(\gamma_2)$ e $t(\gamma_1) = t(\gamma_2)$.

Dizemos que um quiver $\Gamma$ é conexo se o grafo subjacente é conexo.

Um subquiver de $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1, o, t)$ é um quiver $\widetilde{\Gamma} = (\widetilde{\Gamma}_0, \widetilde{\Gamma}_1, \widetilde{o}, \widetilde{t})$ onde $\widetilde{\Gamma}_0 \subset \Gamma_0$, $\widetilde{\Gamma}_1 \subset \Gamma_1$ e as restrições de $o$ e $t$ a $\widetilde{\Gamma}_1$ são iguais a $\widetilde{o}$ e $\widetilde{t}$ respectivamente. Um subquiver $\widetilde{\Gamma}$ de $\Gamma$ é dito pleno se dado uma flecha $\alpha : x \mapsto y$ com vértices $x, y \in \widetilde{\Gamma}_0$ então $\alpha \in \widetilde{\Gamma}_1$.

A partir do corpo $k$ e do quiver $\Gamma$ definimos uma álgebra $k\Gamma$. Em primeiro lugar consideramos o conjunto $\mathcal{B}$ formado por todos os caminhos de $\Gamma$, incluídos aí também os caminhos triviais. Considere agora $k\Gamma$ o $k$-espaço vetorial com base $\mathcal{B}$. Para transformarmos $k\Gamma$ em uma álgebra precisamos definir um produto nos elementos da base $\mathcal{B}$. Dados dois caminhos $\gamma = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_l$ e $\delta = \beta_1\beta_2\cdots\beta_n$ em $\Gamma$ definimos

$$\gamma\delta = \begin{cases} \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_l\beta_1\beta_2\cdots\beta_n & \text{se } t(\beta_1) = o(\alpha_l) \\ 0 & \text{se caso contrário} \end{cases}$$

Estendendo por linearidade tal produto a todos elementos, define-se em $k\Gamma$ uma estrutura de $k$-álgebra. Esta álgebra $k\Gamma$ definida como acima é chamada de álgebra de caminhos de $\Gamma$. Note que $k\Gamma$ é uma álgebra associativa com elemento identidade $\sum_{x\in\Gamma_0} e_x$.

**Observação 1.1** *$k\Gamma \simeq \sum_{x,y\in\Gamma_0} e_x k\Gamma e_y$ (como $k\Gamma_0$-bimódulo), onde $e_x k\Gamma e_y$ indica o $k$-espaço vetorial com base nos caminhos de $y$ para $x$ em $\Gamma$.*

Se $\Gamma$ é um quiver finito e $k$ é um corpo, então $k\Gamma$ é uma álgebra básica e hereditária, e tem dimensão finita se e somente se $\Gamma$ não possui ciclos orientados. Além disso, $k\Gamma$ é indecomponível se e somente se $\Gamma$ é um quiver conexo, e o conjunto $\{e_x : x \in \Gamma_0\}$ é um sistema completo de idempotentes ortogonais primitivos de $k\Gamma$.

**Definição 1.2** *Seja $J$ o ideal bilateral de $k\Gamma$ gerado por $\Gamma_1$. Um ideal $I$ de $k\Gamma$ é chamado um ideal admissível se existe um inteiro $n > 0$ tal que $J^n \subset I \subset J^2$.*

**Observação 1.2** *Se $\Gamma$ é um quiver finito sem ciclos orientados, então todo ideal de $k\Gamma$ contido em $J^2$ é admissível.*

Enunciamos, a seguir, o resultado que estabelece a identificação das álgebras básicas e indecomponíveis de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado com quociente de álgebras de caminhos por ideais admissíveis.

**Teorema 1** *(Gabriel) Sejam $k$ um corpo algebricamente fechado e $\Lambda$ uma $k$-álgebra indecomponível, básica de dimensão finita sobre $k$. Então $\Lambda$ é isomorfa a um quociente de uma álgebra de caminhos $\frac{k\Gamma}{I}$, onde $I$ é ideal admissível de $k\Gamma$*

Notamos que o quiver $\Gamma$ obtido no Teorema de Gabriel é único, o mesmo não ocorre com o ideal $I$, que depende do epimorfismo construído. Muitas vezes denotamos o quociente $\frac{k\Gamma}{I}$ por $k(\Gamma, I)$. O par $(\Gamma, I)$ é denominado uma apresentação da álgebra $\Lambda$.

**Definição 1.3** *Dado um quiver $\Gamma$, uma relação $r$ em $\Gamma$ é uma combinação linear de caminhos de comprimento maior ou igual a dois, todos eles com mesma origem e mesmo término.*

Não é difícil provar que se $\Gamma$ é um quiver finito e $I$ é um ideal admissível de $k\Gamma$, então $I$ é finitamente gerado e possui um sistema gerador finito formado por relações em $\Gamma$.

**Definição 1.4** *Um quiver com relações é um par $(\Gamma, I)$, onde $\Gamma$ é um quiver e $I$ é um ideal admissível de $k\Gamma$. A álgebra de caminhos dada por esse quiver com relações é definida como a álgebra $\frac{k\Gamma}{I}$.*

O Teorema de Gabriel afirma então que toda álgebra básica, indecomponível e de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado, é isomorfa a uma álgebra de caminhos dada por um quiver com relações.

Se $\Lambda = \frac{k\Gamma}{I}$ é dada por um quiver finito com relações, então temos que $\Lambda$ é uma álgebra básica de dimensão finita sobre $k$, e é indecomponível se e somente se $\Gamma$ é um quiver finito conexo. Além disso, o conjunto $\{e_x + I : x \in \Gamma_0\}$ é um sistema completo de idempotentes ortogonais primitivos de $\Lambda$, e se $\overline{J}$ é a imagem de $J$ pela projeção canônica $k\Gamma \mapsto \frac{k\Gamma}{I}$, então $\overline{J}$ é isomorfo ao radical de Jacobson de $\Lambda$.

**Definição 1.5** *Sejam $\Gamma$ um quiver finito, $k$ um corpo, e $I$ um ideal bilateral de $k\Gamma$, com $I \subset J^2$. Se $I$ admitir um conjunto gerador $R$ formado por relações em $\Gamma$, então dizemos que o par $(\Gamma, R)$ é um quiver com relações e que a álgebra $\frac{k\Gamma}{<R>} = \frac{k\Gamma}{I}$ é a álgebra de caminhos de $(\Gamma, R)$ sobre $k$.*

**Observação 1.3** *Por abuso de linguagem, referimo-nos indistintamente ao quiver com relações* $(\Gamma, R)$ *ou* $(\Gamma, I)$.

**Definição 1.6** *Dado um quiver com relações* $(\Gamma, I)$, *seja* $\rho = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \gamma_i \in I$ *uma relação em* $\Gamma$, *com* $\lambda_i \in k$, *não nulo, para todo* $i \in \{1, 2, \cdots, m\}$

1. *Se m=1 (ou seja, se* $\rho$ *é um caminho de comprimento maior ou igual a dois em* $\Gamma$*), então dizemos que* $\rho$ *é uma relação zero ou uma relação monomial em* $\Gamma$*;*

2. *Se* $l(\gamma_i) = l(\gamma_j)$, *quaisquer que sejam* $i, j \in \{1, 2, \cdots, m\}$, *então dizemos que* $\rho$ *é uma relação homogênea em* $\Gamma$ *de grau* $l(\gamma_i)$*;*

3. *Dizemos que* $\rho$ *é uma relação minimal em* $\Gamma$ *se* $m \geq 2$ *e não existe subconjunto próprio, não vazio,* $X$ *de* $\{1, 2, \cdots, m\}$ *tal que* $\sum_{j \in X} \lambda_j \gamma_j \in I$. *Ou seja,* $\rho$ *não pode ser escrito como soma de dois elementos de* $I$, *tal que o suporte dos dois elementos são subconjuntos próprios do suporte de* $\rho$*;*

   *Uma outra definição que aparece na literatura veja [18] é*

4. *Dizemos que* $\rho$ *é uma relação fortemente minimal em* $\Gamma$ *se* $m \geq 2$ *e não existe subconjunto próprio, não vazio,* $X$ *de* $\{1, 2, \cdots, m\}$ *tal que* $\sum_{j \in X} b_j \gamma_j \in I$ *com algum* $b_j \neq 0$.

**Observação 1.4** *Segue da definição que toda relação fortemente minimal é uma relação minimal. Porém as definições não são equivalentes como mostra o exemplo a seguir.*

**Exemplo 1.1** *Seja* $\frac{k\Gamma}{\langle R \rangle}$, *onde o quiver* $\Gamma$ *é*

$$\Gamma \quad \begin{tikzcd} & \bullet \arrow[dr, "\alpha_2"] & \\ \bullet \arrow[ur, "\alpha_1"] \arrow[r, "\beta_1"] \arrow[dr, "\omega_1"'] & \bullet \arrow[r, "\beta_2"] & \bullet \\ & \bullet \arrow[ur, "\omega_2"'] & \end{tikzcd}$$

*e* $R = \langle \beta_2\beta_1 - \omega_2\omega_1,\ \alpha_2\alpha_1 - 2\beta_2\beta_1 - \omega_2\omega_1 \rangle$

*O conjunto* $R$ *é formado por relações minimais porém não são fortemente minimais.*

## 1.2 Conceitos básicos de Álgebra de Lie

Nesta seção apresentamos conceitos básicos de álgebras de Lie que podem ser encontrados em [16] e [19].

**Definição 1.7** *Uma álgebra de Lie consiste de um espaço vetorial $\mathcal{G}$ munido de um produto (colchete ou comutador)*

$$[\ ,\ ] : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \mapsto \mathcal{G}$$

*com as seguintes propriedades*

1. *O colchete é uma operação bilinear;*
2. $[x, x] = 0$ *para todo* $x \in \mathcal{G}$*;*
3. $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$ *para todo* $x, y, z \in \mathcal{G}$*.*

*O axioma 3 é chamado de identidade de Jacobi.*

Seja $\mathcal{G}$ uma álgebra de Lie. Uma subálgebra de Lie $\mathcal{G}$ é um subespaço $\mathcal{H}$ de $\mathcal{G}$ que é fechado pelo colchete, isto é $[x, y] \in \mathcal{H}$ se $x, y \in \mathcal{H}$.

**Exemplo 1.2**

1. *Álgebras de Lie provenientes de álgebras associativas. Seja* $\Lambda$ *uma álgebra associativa e em* $\Lambda$ *defina o colchete*

   $[x,\ y] = x\,y - y\,x$ *com* $x, y \in \Lambda$.

2. *Seja* $V$ *um espaço vetorial de dimensão finita* $n$ *sobre um corpo* $k$ *denotamos por* $\mathcal{G}l(V)$ *o espaço das transformações de* $V$ *em* $V$*. Defina sobre* $\mathcal{G}l(V)$ *o seguinte colchete*

   $[x,\ y] = x\,y - y\,x$ *com* $x\,y$ *a operação usual onde* $x, y \in \mathcal{G}l(V)$.

   $\mathcal{G}l(V)$ *com esse colchete tem estrutura de álgebra de Lie.*

   *Podemos identificar* $\mathcal{G}l(V)$ *com o conjunto de todas as matrizes* $n \times n$ *sobre* $k$*. Seja* $E_{i,j}$ *a matriz cuja* $i, j$*-ésima entrada é 1 e as demais são nulas. O conjunto* $\{E_{i,j} : i, j \in \{1, \cdots, n\}\}$ *forma uma base de* $\mathcal{G}l(V)$*.*

**Definição 1.8** *Uma transformação linear* $\Psi : \mathcal{G} \mapsto \mathcal{H}$ *(com* $\mathcal{G}$ *e* $\mathcal{H}$ *álgebras de Lie) é um*

1. *homomorfismo se* $\Psi[x, y] = [\Psi(x), \Psi(y)]$*;*

2. *isomorfismo se é um homomorfismo inversível;*

3. *automorfismo se é um isomorfismo e $\mathcal{G} = \mathcal{H}$.*

*As álgebras de Lie $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ são isomorfas se existe um isomorfismo $\Psi : \mathcal{G} \mapsto \mathcal{H}$.*

**Definição 1.9** *Um subespaço $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ é um ideal de Lie se para todo $y \in \mathcal{H}$ e $x \in \mathcal{G}$ então $[x, y] \in \mathcal{H}$.*

Seja $\Psi : \mathcal{G} \mapsto \mathcal{H}$ um homomorfismo segue que

1. $Ker\Psi$ é um ideal.

2. $Im\Psi$ é uma subálgebra.

**Definição 1.10** *Seja $\mathcal{G}$ uma álgebra de Lie e $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ um ideal. No espaço $\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{H}}$, defina*

$$[\overline{x}, \overline{y}] = \overline{[x, y]}$$

*onde $\overline{x}$ denota a classe $x + \mathcal{H}$.*

A definição do colchete é independente dos representantes $x$ e $y$ e define em $\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{H}}$ uma estrutura de álgebra de Lie. além disso, a projeção canônica

$$\begin{array}{rcl} \pi : \mathcal{G} & \mapsto & \frac{\mathcal{G}}{\mathcal{H}} \\ x & \mapsto & \overline{x} \end{array}$$

é um homomorfismo sobrejetor de álgebras de Lie.

Seja $V$ um espaço vetorial e $\mathcal{G}l(V)$ a álgebra de Lie das transformações lineares de $V$. Seja também $\mathcal{G}$ uma álgebra de Lie (sobre o mesmo corpo de escalares que $V$). Uma representação de $\mathcal{G}$ em $V$ é um homomorfismo $\rho : \mathcal{G} \mapsto \mathcal{G}l(V)$.

Dado um elemento $x$ na álgebra de Lie $\mathcal{G}$, consideremos a transformação linear

$$ad(x) : \mathcal{G} \mapsto \mathcal{G}$$

definida por $ad(x)(y) = [x, y]$. A aplicação

$$\begin{array}{rcl} ad : \mathcal{G} & \mapsto & \mathcal{G}l(\mathcal{G}) \\ x & \mapsto & ad(x) \end{array}$$

define uma representação de $\mathcal{G}$ em $\mathcal{G}$, denominada representação adjunta.

O núcleo da representação adjunta é denominado de centro de $\mathcal{G}$ e é denotado por $\mathcal{Z}(\mathcal{G})$

$$\mathcal{Z}(\mathcal{G}) = \{x \in \mathcal{G} : ad(x)(y) = [x, y] = 0 \text{ para todo } y \in \mathcal{G}\}.$$

**Observação 1.5** *A representação adjunta de uma álgebra abeliana $\mathcal{G}$ é trivial, isto é, para todo $x \in \mathcal{G}$, $ad(x) = 0$.*

Vamos definir uma sequência de ideais da álgebra de Lie $\mathcal{G}$ chamada de série derivada

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^{(0)} &= \mathcal{G} \\ \mathcal{G}^{(1)} &= [\mathcal{G}, \mathcal{G}] \\ \mathcal{G}^{(2)} &= [\mathcal{G}^{(1)}, \mathcal{G}^{(1)}] \\ &\vdots \\ \mathcal{G}^{(i)} &= [\mathcal{G}^{(i-1)}, \mathcal{G}^{(i-1)}] \end{aligned}$$

Dizemos que a álgebra de Lie $\mathcal{G}$ é solúvel se $\mathcal{G}^{(n)} = 0$ para algum $n$.

**Proposição 1.1** *Seja $\mathcal{G}$ uma álgebra de Lie de dimensão finita. Então existe em $\mathcal{G}$ um único ideal solúvel $r \subset \mathcal{G}$ que contém todos os ideais solúveis de $\mathcal{G}$.*

**Definição 1.11** *O ideal $r$ da proposição anterior é chamado de radical solúvel (ou simplesmente radical) de $\mathcal{G}$. Para o radical de $\mathcal{G}$ será utilizada a notação $r(\mathcal{G})$.*

**Observação 1.6** *A álgebra de Lie $\mathcal{G}$ é solúvel se e somente se $r(\mathcal{G}) = \mathcal{G}$.*

**Definição 1.12** *Uma álgebra de Lie $\mathcal{G}$ é semi-simples se $r(\mathcal{G}) = 0$.*

**Definição 1.13** *Uma álgebra de Lie $\mathcal{G}$ é simples se*

1. *os únicos ideais de $\mathcal{G}$ são 0 e $\mathcal{G}$ e*

2. *$dim\mathcal{G} \neq 1$.*

**Observação 1.7** *O que se deseja chamar de simples são as álgebras que não possuem ideais além dos triviais. As álgebras de dimensão um não possuem ideais além dos triviais. Essas não são consideradas simples para que exista compatibilidade entre os conceitos de álgebras simples e semi-simples. Segue da definição que as álgebras de dimensão um não são semi-simples. Porém, as demais álgebras que não possuem ideais próprios são semi-simples.*

**Proposição 1.2** *Seja $x \in \mathcal{G}l(V)$ um endomorfismo nilpotente. Então $ad(x)$ também é nilpotente.*

**Prova.** Dado $x \in \mathcal{G}l(V)$ nilpotente defina

$$\begin{aligned} \lambda_x : \ & V \mapsto V \\ & y \mapsto xy \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \rho_x : \ & V \mapsto V \\ & y \mapsto yx \end{aligned}$$

onde $\lambda_x$ e $\rho_x$ são a translação à esquerda e à direita respectivamente. Essas aplicações são nilpotentes já que $x$ é. Além disso comutam entre si. Portanto $ad(x) = \lambda_x - \rho_x$ é nilpotente. ∎

**Proposição 1.3** *Seja $x \in \mathcal{G}l(V)$ um endomorfismo diagonalizável. Então $ad(x)$ também é diagonalizável.*

**Prova.** Por hipótese $x$ é diagonalizável logo existe uma base $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ de autovetores de $V$ tal que $x(v_i) = a_i v_i$ com $a_i \in k$ para todo $i \in \{1, \cdots, n\}$.

Defina $e_{i,j} \in \mathcal{G}l(V)$ para todo $i, j \in \{1, \cdots, n\}$ da seguinte forma

$$e_{i,j}(v_l) = \delta_{j,l} v_i, \quad l \in \{1, \cdots, n\}.$$

$$\text{com} \quad \delta_{j,l} = \begin{cases} 1 & \text{se } j = l \\ 0 & \text{se } j \neq l. \end{cases}$$

Pode-se verificar que $ad(x)(e_{i,j}) = (a_i - a_j)e_{i,j}$ e que $\{e_{i,j}\}$ forma uma base de $\mathcal{G}l(V)$. Portanto $ad(x)$ é diagonalizável.

∎

## 1.3 Ordem

As definições e resultados que apresentamos a seguir podem ser encontrados em [10] e [13].

Sejam $k$ um corpo e $V$ um $k$-espaço vetorial. Fixemos, para $V$, uma base $\mathcal{B} = \{b_i\}_{i \in \mathcal{I}}$, onde $\mathcal{I}$ é um conjunto de índices. Dizemos que $>$ é uma boa ordem sobre $\mathcal{B}$ se $>$ é uma ordem total sobre $\mathcal{B}$ e se todo subconjunto não vazio de $\mathcal{B}$ tem elemento minimal.

Como $\mathcal{B}$ é uma base de $V$, então para cada $v \in V$, existe uma única família $(\lambda_i)_{i \in \mathcal{I}}$, tal que $v = \sum_{i \in \mathcal{I}} \lambda_i b_i$, onde $\lambda_i = 0$, exceto para um número finito de índices.

Se $v = \sum_{i \in \mathcal{I}} \lambda_i b_i$, dizemos que $b_i$ ocorre em $v$ se $\lambda_i \neq 0$.

**Definição 1.14** *Se $\mathcal{B} = \{b_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ é uma base de um espaço vetorial $V$, com boa ordem $>$ em $\mathcal{B}$, e se $v = \sum_{i \in \mathcal{B}} \lambda_i b_i$ é não nulo, dizemos que $b_i$ é o maior elemento de $v$ se $b_i$ ocorre em $v$ e $b_i \geq b_j$ para todo $b_j$ ocorrendo em $v$.*

Denotamos o maior elemento $b_i$ de $v$ por $Tip(v)$.
Se $X$ é um subconjunto de $V$, definimos

1. $Tip(X) = \{b \in \mathcal{B} : b = Tip(x)$ para algum $0 \neq x \in X\}$;

2. $NonTip(X) = \mathcal{B} - Tip(X)$.

Assim, ambos, $Tip(X)$ e $NonTip(X)$ são subconjuntos de $\mathcal{B}$ e dependem da escolha da boa ordem de $\mathcal{B}$.

Denotamos por $kX$ o espaço vetorial gerado pelo conjunto $X$.

**Teorema 2** *Sejam $V$ um espaço vetorial sobre o corpo $k$ com base $\mathcal{B}$, $>$ uma boa ordem em $\mathcal{B}$ e $W$ um subespaço de $V$. Então*

$$V = W \amalg k(NonTip(W)).$$

**Observação 1.8** *Considerando o teorema anterior, podemos ver que todo vetor não nulo $v \in V$ pode ser escrito unicamente como $w_v + N(v)$, onde $w_v \in W$ e $N(v) \in k(NonTipW)$.*

**Definição 1.15** *$N(v)$ é chamado a forma normal de $v$.*

Agora voltamos nossa atenção para $k$-álgebras. Seja $\Lambda$ uma $k$-álgebra e seja $\mathcal{B}$ uma $k$-base de $\Lambda$. Assumimos que para todo $b_1$, $b_2 \in \mathcal{B}$ temos $b_1 b_2 \in \mathcal{B} \cup \{0\}$. Dizemos que a $k$-base é quasi-multiplicativa.

**Definição 1.16** *Dizemos que $>$ é uma ordem admissível sobre a base quasi-multiplicativa $\mathcal{B}$ se as seguintes propriedades são satisfeitas:*

1. *$>$ é uma boa ordem sobre $\mathcal{B}$;*

2. *Para todo $b_1, b_2, b_3 \in \mathcal{B}$, se $b_1 > b_2$ então $b_3 b_1 > b_3 b_2$ se ambos $b_3 b_1$ e $b_3 b_2$ são não nulos;*

3. *Para todo $b_1, b_2, b_3 \in \mathcal{B}$, se $b_1 > b_2$ então $b_1 b_3 > b_2 b_3$ se ambos $b_1 b_3$ e $b_2 b_3$ são não nulos;*

4. *Para todo $b_1, b_2, b_3, b_4 \in \mathcal{B}$, se $b_1 = b_2 b_3 b_4$ então $b_1 \geq b_3$.*

Um exemplo de uma $k$-álgebra que possui uma $k$-base quasi-multiplicativa com ordem admissível é a álgebra de caminho $k\Gamma$, tendo como base $\mathcal{B}$ o conjunto de todos os caminhos em $\Gamma$, incluindo os vértices, e a ordem comprimento-lexicográfico, isto é, dado as flechas e aos vértices uma ordem arbitrária (ou seja, uma lexicografia), com os vértices menores que as flechas. Se $p$ e $q$ são caminhos de comprimentos maiores que 1, dizemos que $p < q$ se o comprimento de $p$ for menor que o comprimento de $q$ ou se $p = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_r$ e $q = \beta_1\beta_2\cdots\beta_r$, com $\alpha_i$ e $\beta_i \in \Gamma_1$, e para algum $1 \geq i \geq r$, $\alpha_j = \beta_j$ se $j > i$ e $\alpha_i < \beta_i$.

## 1.4 Grupo fundamental

Nesta seção primeiro enunciamos uma descrição *tradicional* do grupo fundamental $\pi_1(\Gamma)$ de um quiver, como em [23]. Depois descrevemos o grupo fundamental de um quiver com relações utilizando o artigo [7]. Essa última descrição define o grupo fundamental de um quiver com relações em termos de geradores e relações.

### 1.4.1 Descrição *tradicional* de $\pi_1(\Gamma)$

Seja $\Gamma$ um quiver finito e conexo. Denotamos por $\Gamma_0$ o conjunto de vértices e por $\Gamma_1$ o conjunto de flechas. Dada uma flecha $\alpha$ de $x$ para $y$ em $\Gamma$, $\alpha^{-1}$ será sua inversa formal, cuja origem é $y$ e cujo término é $x$.

Dados $x$ e $y \in \Gamma_0$, um passeio não trivial em $\Gamma$, de $x$ para $y$, é uma concatenação $\omega = \alpha_1^{\varepsilon(1)}\alpha_2^{\varepsilon(2)}\cdots\alpha_r^{\varepsilon(r)}$, com $r \geq 1$, $\alpha_i \in \Gamma_1$ e $\varepsilon(i) \in \{-1, +1\}$, para cada $i \in \{1, 2, \cdots, r\}$ e tal que $o(\alpha_r^{\varepsilon(r)}) = x$, $t(\alpha_1^{\varepsilon(1)}) = y$ e $t(\alpha_i^{\varepsilon(i)}) = o(\alpha_{i-1}^{\varepsilon(i-1)})$, para todo $i$, com $2 \leq i \leq r$. Convencionamos que o passeio trivial em $x \in \Gamma_0$ é o caminho trivial em $x$ denotado por $e_x$. Dizemos que $\omega$ é um passeio fechado em $\Gamma$ se $o(\omega) = t(\omega)$.

Se $\omega_1$ é um *passeio* em $\Gamma$ de $x$ para $y$ e $\omega_2$ é um passeio em $\Gamma$ de $y$ para $z$, então $\omega_1\omega_2$ é um passeio em $\Gamma$ de $x$ para $z$, denominado o produto dos passeios $\omega_1$ e $\omega_2$. Seja $\Omega(\Gamma)$ o conjunto dos passeios de $\Gamma$. Definimos sobre $\Omega(\Gamma)$ a relação de homotopia $\sim$ como sendo a menor relação de equivalência sobre $\Omega(\Gamma)$ que satisfaz as seguintes condições

1. Para cada flecha $\alpha$ de $\Gamma_1$, $\alpha : x \mapsto y$, tem-se que $\alpha^{-1}\alpha \sim e_x$ e que $\alpha\alpha^{-1} \sim e_y$;

2. Se $\omega, \gamma, \omega_1, \omega_2$ são passeios em $\Gamma$ tais que $\omega \sim \gamma$, então $\omega_1\omega\omega_2 \sim \omega_1\gamma\omega_2$, sempre que tais produtos estiverem definidos.

Vamos denotar por $[\omega]$ a classe de equivalência do passeio $\omega$ em $\frac{\Omega(\Gamma)}{\sim}$.

Seja $v$ um vértice fixo em $\Gamma_0$ e consideremos $\Omega(\Gamma, v)$ o conjunto dos passeios de $\Omega(\Gamma)$ que têm origem e término em $v$. Sobre tal conjunto o produto de passeios sempre está definido e, pela condição 2, podemos considerar o grupo quociente $\frac{\Omega(\Gamma,v)}{\sim}$. Esse grupo é denominado o grupo fundamental de $\Gamma$ com base em $v$ e denotado por $\pi_1(\Gamma, v)$.

Usando a conexidade de $\Gamma$ é fácil ver que a classe de isomorfismo de tal grupo independe do ponto base $v$. Assim vamos denotá-lo por $\pi_1(\Gamma)$ e chamá-lo de grupo fundamental de $\Gamma$.

### 1.4.2 Descrição de $\pi_1(\Gamma, I)$ em termos de geradores e relações.

Veremos agora uma outra descrição do grupo fundamental que usamos neste trabalho.

Seja $v$ um vértice fixado chamado ponto base. O passeio $\gamma_{v,v}$ será o caminho trivial $e_v$ e para cada vértice $x \in \Gamma_0 - \{v\}$ escolhemos um passeio $\gamma_{v,x}$ de $v$ a $x$. O conjunto

$$\gamma = \{\gamma_{v,x} : x \in \Gamma_0\}$$

assim obtido é denominado uma *escolha de dados de parada*. Além disso, se $\omega$ é um passeio de $x$ para $y$ em $\Gamma$, então definimos

$$c_\gamma(\omega) = \gamma_{v,y}^{-1}\, \omega\, \gamma_{v,x}\,,$$

onde $\gamma_{v,y}^{-1}$ denota o passeio de retorno de $y$ para $v$, através do dados de parada $\gamma_{v,y}$.

**Observação 1.9** *Fixada uma escolha de dados de parada $\gamma$ com ponto base $v$, pode-se verificar que*

1. *Se $\omega$ é um passeio fechado de $v$ a $v$ então $c_\gamma(\omega) = \omega$;*

2. *$\pi_1(\Gamma)$ é gerado pelo conjunto $\{[c_\gamma(\alpha)] : \alpha \in \Gamma_1\}$;*

3. *Seja $\gamma_{v,x} = \alpha_1^{\varepsilon(1)}\alpha_2^{\varepsilon(2)}\cdots\alpha_r^{\varepsilon(r)} \in \gamma$, com $r \geq 1$, então $[c_\gamma(\alpha_1)^{\varepsilon(1)}c_\gamma(\alpha_2)^{\varepsilon(2)}\cdots c_\gamma(\alpha_r)^{\varepsilon(r)}] = 1$ em $\pi_1(\Gamma)$.*

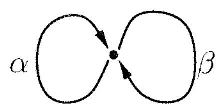
Fixemos dados de parada $\gamma$. Seja $F_\gamma$ o grupo livre gerado pelo conjunto $\{c_\gamma(\alpha) : \alpha \in \Gamma_1\}$ e para cada $\gamma_{v,x} = \alpha_1^{\varepsilon(1)} \alpha_2^{\varepsilon(2)} \cdots \alpha_n^{\varepsilon(n)} \in \gamma$, cm $r \geq 1$, consideremos o elemento $c_\gamma(\alpha_1)^{\varepsilon(1)} c_\gamma(\alpha_2)^{\varepsilon(2)} \cdots c_\gamma(\alpha_n)^{\varepsilon(n)} \in F_\gamma$ que é denominado uma *relação de parada* em $F_\gamma$. Seja $H_\gamma$ o subgrupo normal de $F_\gamma$ gerado pelas relações de parada. Em [7] é mostrado que $\pi_1(\Gamma)$ é isomorfo ao grupo quociente $\frac{F_\gamma}{H_\gamma}$.

Seja $I$ um ideal da álgebra de caminhos $k\Gamma$. Suponhamos que esteja fixado um conjunto de geradores de $I$ e que $\pi_1(\Gamma)$ tenha sido descrito através de dados de parada $\gamma$. Denotamos por $N(R)$ o subgrupo normal de $\pi_1(\Gamma)$ gerado por $c_\gamma(p)c_\gamma(q^{-1})$, com $p$ e $q$ variando sobre todos os caminhos que aparecem com coeficiente não nulo em uma mesma relação minimal não monomial $\rho \in R$. O grupo quociente $\frac{\pi_1(\Gamma)}{N(R)}$ é denominado o grupo fundamental $\pi_1(\Gamma, R)$.

Denotamos o homomorfismo canônico de $\pi_1(\Gamma)$ para $\pi_1(\Gamma, R)$ por $\xi$ (o qual depende de $\gamma$).

No próximo exemplo vemos o que acontece se tomamos $R$, o conjunto gerador de $I$, sendo qualquer e definimos $N(R)$ o subgrupo normal de $\pi_1(\Gamma)$ gerado por $c_\gamma(p)c_\gamma(q^{-1})$, com $p$ e $q$ variando sobre todos os caminhos que aparecem com coeficiente nulo em uma relação não monomial $\rho \in R$.

**Exemplo 1.3** *Sejam $k$ um corpo, $\Gamma$ o quiver*




*e os conjuntos $R_1$ e $R_2$ de relações em $\Gamma$ definidos por*
$R_1 = \{\alpha^2 - \beta^2, \alpha\beta - \beta\alpha\}$ *e*
$R_2 = \{\alpha^2 - \beta^2, \alpha\beta - \alpha(\alpha^2 - \beta^2)\beta - \beta\alpha\}$.

*Pode-se verificar que $R_1$ e $R_2$ geram o mesmo ideal $I$ de $k\Gamma$.*

*Temos que $\pi_1(\Gamma)$ é o grupo livre gerado por $\alpha$ e $\beta$.*

*Por definição, $N(R_1)$ é o subgrupo normal de $\pi_1(\Gamma)$ gerado por $\{\alpha^2\beta^{-2}, \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}\}$ e, portanto, $\pi_1(\Gamma, R_1) = \frac{\pi_1(\Gamma)}{N(R_1)} = \langle \alpha, \beta : \alpha^2 = \beta^2, \alpha\,\beta = \beta\,\alpha \rangle$, que é um grupo abeliano finitamente gerado.*

*Desde que $\alpha\,\beta^{-1} \in \pi_1(\Gamma, R_1)$ é um elemento de ordem dois e $\beta$ possui ordem infinita, temos então que $\pi_1(\Gamma, R_1) \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}$.*

*Por outro lado, $N(R_2)$ é o subgrupo normal de $\pi_1(\Gamma)$ gerado por*
$\{\alpha^2;\ \beta^2;\ \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}\}$ *e, consequentemente,*

$\pi_1(\Gamma, R_2) = \langle \alpha, \beta : \alpha^2 = \beta^2 = 1, \alpha\beta = \beta\alpha\rangle \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

*Portanto* $\pi_1(\Gamma, R_1)$ *não é isomorfo a* $\pi_1(\Gamma, R_2)$.

Em [7] provou-se que o grupo fundamental $\pi_1(\Gamma, R)$ é o mesmo para duas escolhas quaisquer de $R$ nas quais as relações não monomiais são minimais. Nesse caso, esse mesmo grupo é denominado o grupo fundamental de $(\Gamma, I)$ e denotado por $\pi_1(\Gamma, I)$.

Dado um quiver com relações $(\Gamma, I)$, podemos pedir que o conjunto gerador seja formado por relações monomiais e fortemente minimais para que o grupo fundamental seja invariante. Essa afirmação decorre da observação 1.4 e da seguinte proposição.

**Proposição 1.4** *O ideal $I$ pode ser gerado como ideal por relações monomiais e fortemente minimais.*

**Prova.** Suponhamos que $I$ seja gerado pelo conjunto $R_1 = \{s_1, \cdots, s_n\}$ formado por relações monomiais e minimais.

Se $s_1 = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \gamma_i$ não é uma relação fortemente minimal e nem monomial então podemos supor que existe $\sum_{j=1}^{t} b_j \gamma_j$ onde $b_1 = 1$ e $t < m$. Logo $\gamma_1 = -(\sum_{j=2}^{t} b_j \gamma_j)$, substituindo em $s_1$ obtemos

$$r = \sum_{i=2}^{t}(-\lambda_1 b_i + \lambda_i)\gamma_i + \sum_{i=t+1}^{m} \lambda_i \gamma_i$$

pode-se verificar que $R_2 = \{r, \sum_{j=1}^{t} b_j \gamma_j, s_2, \cdots, s_n\}$ gera $I$, se $R_2$ possuir alguma relação que não seja monomial ou não seja fortemente minimal então repetimos o processo anterior. O processo para pois $\Lambda = \frac{k\Gamma}{I}$ é uma álgebra de dimensão finita. E assim temos nossa afirmação demonstrada.

■

## 1.5 Grupos de Cohomologia de Hochschild

Seja $\Lambda$ uma $k$-álgebra associativa de dimensão finita sobre um corpo $k$ e $X$ um $\Lambda$-bimódulo. Note que se $\Lambda^e = \Lambda \otimes_k \Lambda^{op}$ é a álgebra envolvente de $\Lambda$ então um $\Lambda$-bimódulo à esquerda pode ser considerado como um $\Lambda^e$-módulo à esquerda com a ação $(\lambda \otimes_k \mu)x = \lambda\, x\, \mu$ para $\lambda$, $\mu \in \Lambda$ e $x \in \Lambda$. A cohomologia de Hochschild $H^*(\Lambda, X)$ com coeficientes em $X$ é definida como o $k$-espaço vetorial

$$Ext^*_{\Lambda^e}(\Lambda, X).$$

Logo a cohomologia de Hochschild de uma álgebra $\Lambda$ pode ser calculada usando qualquer resolução projetiva de $\Lambda$ sobre a álgebra envolvente $\Lambda^e = \Lambda \otimes_k \Lambda^{op}$. A resolução padrão é dada por

$$\cdots \longrightarrow \Lambda^{\otimes_k^{n+1}} \xrightarrow{d^{n+1}} \Lambda^{\otimes_k^n} \longrightarrow \cdots \xrightarrow{d^0} \Lambda \otimes_k \Lambda \xrightarrow{\varepsilon} \Lambda \longrightarrow 0 \tag{1.1}$$

onde

$$\begin{array}{l} \varepsilon(x_1 \otimes_k x_2) = x_1 x_2 \quad \text{e} \\ d(x_1 \otimes_k \cdots \otimes_k x_n) = \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i+1} x_1 \otimes_k \cdots \otimes_k x_i x_{i+1} \otimes_k \cdots \otimes_k x_n \end{array}$$

para todo $x_1, \cdots, x_n \in \Lambda$.

Aplicando o funtor $Hom_{\Lambda^e}(-, X)$ a resolução projetiva (1.1) e identificando $Hom_{\Lambda^e}(A \otimes_k \Lambda^{\otimes_k^n} \otimes_k \Lambda, X)$ com $Hom_k(\Lambda^{\otimes_k^n}, X)$ obtemos o complexo de cocadeias definido por Hochschild em [15] no ano de 1946 (o qual foi definido para qualquer anel comutativo $k$ e qualquer $k$-álgebra $\Lambda$).

$$0 \longrightarrow \Lambda \xrightarrow{d_0} Hom_k(\Lambda, X) \xrightarrow{d_1} \cdots \longrightarrow Hom_k(\Lambda^{\otimes^i}, X) \xrightarrow{d_i} \cdots \tag{1.2}$$

onde

$$\begin{array}{ll} d_i = 0 \ \text{ para } \ i < 0, & \\ (d_0 x)(a) = ax - xa \ \text{ para } \ i > 0 & \text{e} \\ (d_i f)(x_1 \otimes x_2 \otimes \ldots \otimes x_{i+1}) = & x_1 f(x_2 \otimes \ldots \otimes x_{i+1}) \\ & + \sum_{j=1}^{i} (-1)^j f(x_1 \otimes \ldots x_j x_{j+1} \otimes \ldots \otimes x_{i+1}) + \\ & (-1)^{i+1} f(x_1 \otimes \ldots \otimes x_i) x_{i+1} \end{array}$$

para todo $f \in Hom_k(\Lambda^{\otimes^i}, X)$, $i \in \mathbb{N}$ e $x_1, x_2, \cdots, x_{i+1} \in \Lambda$.

O i-ésimo grupo de cohomologia de Hochschild de $\Lambda$ com coeficientes em $X$ é então definido como

$$H^i(\Lambda, X) = \frac{Ker\, d_i}{Im\, d_{i-1}}.$$

Logo o primeiro grupo de cohomologia $H^1(\Lambda, \Lambda)$ é o quociente $\frac{ker\, d_1}{Im\, d_0}$. O conjunto $ker\, d_1$ será denotado por $Der(\Lambda)$ e seus elementos são chamados de derivações de $\Lambda$. E o conjunto $Im\, d_0$ será denotado por $Inn(\Lambda)$ e seus elementos são chamados de derivações internas. Segue da definição que

$$Der(\Lambda) = \{f \in Hom_k(\Lambda, \Lambda) : f(ab) = af(b) + bf(a) \ \ \forall\, a, b \in \Lambda\} \text{ e}$$

$$Inn(\Lambda) = \{f \in Hom_k(\Lambda, \Lambda) : \exists\, a \in \Lambda \text{ tal que } f(x) = ax - xa \ \forall x \in \Lambda\}$$

Vamos denotar por $C^i(\Lambda, X)$ o $k$-espaço vetorial $Hom_k(\Lambda^{\otimes^i}, X)$ e

$$C^*(\Lambda, X) = \amalg_{i \in \mathbb{N}} C^i(\Lambda, X)$$

o $k$-espaço vetorial de cocadeias de Hochschild com coeficientes em $X$.

## 1.6 A descrição de $H^1(\Lambda, \Lambda)$ em termos de derivações

Nesta seção mostramos que para as álgebras que admitem um conjunto completo de idempotentes primitivos e ortogonais, podemos considerar apenas suas derivações normalizadas. Esses resultados podem ser encontrados em [14].

**Definição 1.17** *Seja $\Lambda$ uma $k$-álgebra que admite um conjunto completo de idempotentes primitivos e ortogonais $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$. Dizemos que uma derivação $D \in Der(\Lambda)$ é uma derivação normalizada de $\Lambda$ se $D(e_i) = 0$, para todo $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$.*

Pode-se verificar que

$$Nor(\Lambda) = \{D \in Der(\Lambda) : \text{ D é uma derivação normalizada de } \Lambda\}$$

é um $k$-espaço vetorial de $Der(\Lambda)$. Esse $k$-espaço é denominado o espaço das derivações normalizadas de $\Lambda$.

**Notação 1.1** *Dado $f \in Inn(\Lambda)$ existe $a \in \Lambda$ tal que $f(x) = ax - xa$, para todo $x \in \Lambda$. Logo faz sentido denotar um elemento de $Inn(\Lambda)$ por $[a, -]$.*

**Lema 1.1** *Seja $\Lambda$ uma $k$-álgebra que admite um conjunto de idempotentes primitivos e ortogonais $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$. Então dado $D \in Der\Lambda$, existe $a \in \Lambda$ tal que $D - [a, -]$ é uma derivação normalizada de $\Lambda$.*

**Prova.** Defina $a = \sum_{i=1}^{n} D(e_i)e_i \in \Lambda$.

Seja $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, temos por um lado que

$$[a\,, e_j] = D(e_j)e_j - e_jD(e_j)e_j - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} e_jD(e_i)e_i.$$

Por outro lado, de $D(e_j) = D(e_j^2) = D(e_j)e_j + e_jD(e_j)$ resulta que $D(e_j)e_j = D(e_j)e_j^2 + e_jD(e_j)e_j$, ou seja, que

$$e_jD(e_j)e_j = 0.$$

Além disso $D(e_j e_i) = e_j D(e_i) + D(e_j)e_i$, logo se $j \neq i$
$e_j D(e_i) = -D(e_j)e_i$ logo

$$e_j D(e_i)e_i = -D(e_j)e_i.$$

Assim

$$[a\,, e_j] = D(e_j)e_j + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} D(e_j)e_i = D(e_j)\sum_{i=1}^{n} e_i = D(e_j).$$

Portanto $(D - [a\,, -])(e_j) = 0$ para todo $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, ou seja, $D - [a, -]$ é uma derivação normalizada. ■

**Proposição 1.5** *Seja $\Lambda$ uma $k$-álgebra que admite um conjunto completo de idempotentes primitivos ortogonais. Então $H^1(\Lambda, \Lambda) = \frac{Nor\Lambda}{Nor(\Lambda) \cap Inn(\Lambda)}$.*

**Prova.** Defina $\varphi = \pi \circ i : Nor(\Lambda) \mapsto H^1(\Lambda, \Lambda)$ onde $i : Nor(\Lambda) \mapsto Der(\Lambda)$ é a inclusão e $\pi : Der(\Lambda) \mapsto H^1(\Lambda, \Lambda)$ é a projeção natural. Claramente $\varphi$ é $k$-morfismo.

Mostremos que $\varphi$ é sobrejetora. Seja $D + Inn(\Lambda) \in H^1(\Lambda, \Lambda)$ com $D \in Der\Lambda$. Segue do Lema anterior que existe $a \in \Lambda$ tal que $D - [a, -] \in Nor(\Lambda)$. Como $[a, -] \in Inn(\Lambda)$ segue que $\varphi$ é sobrejetora. Pode-se mostrar que $Ker\,\varphi = Nor(\Lambda) \cap Inn(\Lambda)$ e assim temos nossa afirmação demonstrada. ■

A próxima proposição mostra que as derivações normalizadas de $k\Gamma$ ficam determinadas por seus valores sobre as flechas de $\Gamma$.

**Proposição 1.6** *Os $k$-espaços vetoriais $Nor(k\Gamma)$ e $\coprod_{\alpha \in \Gamma_1} e_{o(\alpha)}\, k\Gamma\, e_{t(\alpha)}$ são isomorfos.*

**Prova.** Segue diretamente da definição de derivação normalizada que se $D \in Nor(k\Gamma)$ então $D(\alpha) = e_{t(\alpha)}\, \alpha\, e_{o(\alpha)}$, para todo $\alpha \in \Gamma_1$.

Defina

$$\begin{array}{rcl} \Psi : \ Nor(k\Gamma) & \mapsto & \amalg_{\alpha \in \Gamma_1} e_{o(\alpha)} k\Gamma e_{t(\alpha)} \\ D & \mapsto & (D(\alpha))_{\alpha \in \Gamma_1} \end{array}.$$

A aplicação $\Psi$ é claramente um morfismo de $k$-espaço vetorial e injetiva. Mostremos que $\Psi$ é sobrejetora.

Seja $(y_\alpha)_{\alpha \in \Gamma_1} \in \amalg_{\alpha \in \Gamma_1} e_{o(\alpha)} k\Gamma e_{t(\alpha)}$. Defina a seguinte derivação normalizada.

Dado $\varepsilon = \alpha_1 \cdots \alpha_t$ um caminho em $\Gamma$

$$y_\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha}(\varepsilon) = \sum_{i=1}^{t} \alpha_1 \cdots \alpha_{i-1} \left(y_\alpha \, \delta_{\alpha_i\,\alpha}\right) \alpha_{i+1} \cdots \alpha_t$$

onde dados $\alpha, \beta \in \Gamma_1$

$$y_\alpha \, \delta_{\alpha,\beta} = \begin{cases} y_\alpha & \text{se } \alpha = \beta \\ 0 & \text{se } \alpha \neq \beta \end{cases}$$

Consideremos $\sum_{\alpha \in \Gamma_1} y_\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \in Nor(\Lambda)$. Essa derivação é tal que

$$\Psi(\sum_{\alpha \in \Gamma_1} y_\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha}) = (\sum_{\alpha \in \Gamma_1} y_\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha}(\alpha))_{\alpha \in \Gamma_1} = (y_\alpha)_{\alpha \in \Gamma_1}.$$

Portanto $\Psi$ é um isomorfismo de $k$-espaço vetorial ■

# Capítulo 2

# Graduação e estrutura algébrica da cohomologia de Hochschild

Nosso principal objetivo neste capítulo é mostrar que o anel $H^*(\Lambda, \Lambda)$ com o produto cup é um anel graduado comutativo. Para isso vamos utilizar o fato do produto cup ser isomorfo ao produto de Yoneda.

## 2.1 O produto de Yoneda

Sejam $k$ um corpo e $\Lambda$ uma $k$-álgebra de dimensão finita. Vamos denotar por $mod\,\Lambda$ a categoria dos $\Lambda$-módulos à esquerda sobre $\Lambda$. Dados $A$ e $C$ dois módulos em $mod\,\Lambda$, uma n-extensão de $A$ por $C$ é uma sequência exata em mod$\Lambda$ da seguinte forma

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B_1 \longrightarrow B_2 \longrightarrow \cdots B_{n-1} \longrightarrow B_n \longrightarrow C \longrightarrow 0.$$

Dado duas extensões

$$E : 0 \longrightarrow A \longrightarrow B_1 \longrightarrow B_2 \longrightarrow \cdots B_{n-1} \longrightarrow B_n \xrightarrow{f} C \longrightarrow 0$$

uma n-extensão, e

$$E' : 0 \longrightarrow C \xrightarrow{g} B'_1 \longrightarrow B'_2 \longrightarrow \cdots B'_{m-1} \longrightarrow B'_m \longrightarrow C' \longrightarrow 0$$

uma m-extensão, a primeira terminando em $C$ e a segunda começando em $C$ definimos o seguinte produto

$$E \circ E' : 0 \to A \to B_1 \to \cdots B_{n-1} \to B_n \stackrel{gof}{\to} B'_1 \to \cdots B'_{m-1} \to B'_m \to C' \to 0$$

$E \circ E'$ é uma $(m+n)$-extensão. O produto anterior é chamado de produto de Yoneda.

Quando $n = 1$, chamamos uma 1-extensão simplesmente de extensão.

Sejam $E$ e $E'$ duas extensões como abaixo

$$E : 0 \to A \to B \to C \to 0$$

e

$$E' : 0 \to A' \to B' \to C' \to 0$$

um morfismo $\sigma : E \mapsto E'$ entre as extensões é uma tripla $\sigma = (f, g, h)$ de homomorfismo de módulos tal que os diagramas

$$\begin{array}{llll} E : 0 \to & A \to & B \to & C \to 0 \\ \downarrow \sigma & \downarrow f & \downarrow g & \downarrow h \\ E' : 0 \to & A' \to & B' \to & C' \to 0 \end{array}$$

são comutativos. Em particular, se $A = A'$ e $C = C'$, dizemos que duas extensões $E$ e $E'$ de $A$ por $C$ são congruentes se existe um homomorfismo $(1_A, g, 1_C) : E \mapsto E'$ onde $1_A$ e $1_C$ são as aplicações identidades de $A$ e $C$ respectivamente. Utilizando o Lema das 5 segue que $g$ é um isomorfismo. Denotamos por $E \equiv E'$.

Sejam $E : 0 \to A \to B \to C \to 0$ uma extensão e $h : C' \mapsto C$ um homomorfismo de módulos. Então pode-se mostrar usando "pullback" que existe uma extensão $E'$ que começa em $A$ e termina em $C'$ e um morfismo $\sigma = (1_A, g, h) : E' \mapsto E$. O par $(\sigma, E')$ é único a menos de congruência de $E'$.

$$\begin{array}{llll} E' : 0 \to & A \to & ? \to & C' \to 0 \\ \sigma \downarrow & \| & \downarrow g & \downarrow h \\ E : 0 \to & A \to & B \to & C \to 0 \end{array}$$

Denotamos $E' = Eh$ a composição da extensão $E$ e o homomorfismo $h$.

Sejam $E : 0 \to A \to B \to C \to 0$ uma extensão e $f : A \mapsto A'$ um homomorfismo de módulos. Então pode-se mostrar usando "pushout" que existe uma extensão $E'$ que começa com $A'$ e termina em $C$ e um morfismo $\sigma = (f, g, 1_C) : E \mapsto E'$. O par $(\sigma, E')$ é único a menos de congruência de $E'$.

$$\begin{array}{llll} E : 0 \to & A \to & B \to & C \to 0 \\ \sigma \downarrow & \downarrow f & \downarrow g & \| \\ E' : 0 \to & A' \to & ? \to & C \to 0 \end{array}$$

Denotamos $E' = fE$ a composição da extensão $E$ e o homomorfismo $f$.

Suponhamos que uma extensão $E$ termine em algum módulo C com $f : M \mapsto C$ para algum módulo $M$ e a extensão $E'$ comece em M. Em geral não temos

$$(Ef) \circ E' = E \circ (fE')$$

ou seja, "o produto de Yoneda e o produto entre extensão e morfismos não é distributivo", como veremos a seguir.

**Exemplo 2.1** *Sejam*

$$\begin{aligned} E &: 0 \to A \to B \xrightarrow{f} C \to 0 \\ E' &: 0 \to C \xrightarrow{g} D \to F \to 0 \end{aligned}$$

*duas extensões, $M$ um módulo qualquer e $\pi : C \amalg M \mapsto C$ a projeção de soma direta*

$$\begin{tikzcd} E_1 : 0 \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & B \amalg M \arrow[r] \arrow[d] & C \amalg M \arrow[r] \arrow[d, "\pi"] & 0 \\ E : 0 \arrow[r] & A \arrow[r] & B \arrow[r] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} E_1' : 0 \arrow[r] \arrow[d] & C \amalg M \arrow[r] \arrow[d, "\pi"'] & D \amalg M \arrow[r] \arrow[d] & F \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ E' : 0 \arrow[r] & C \arrow[r] & D \arrow[r] & F \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

*Temos então $E_1 = E\pi$ e $E' = \pi E_1'$ a composição*

$$(E\pi) \circ E_1' = E_1 \circ E_1' : 0 \to A \to B \amalg M \xrightarrow{gf \amalg 1} D \amalg M \to F \to 0$$

*não é a mesma que*

$$E \circ (\pi E_1') = E \circ E' : 0 \to A \to B \xrightarrow{gf} D \to F \to 0,$$

*em outras palavras $(E\pi) \circ E_1' \neq E \circ (\pi E_1')$.*

Já definimos congruência para extensões, agora queremos definir para $n$-extensões uma relação de congruência $\equiv$ que seja a que temos para extensão e satisfaça a seguinte propriedade

$$(Ef) \circ E' \equiv E \circ (fE') \tag{2.1}$$

onde as composições envolvidas estão definidas; isto é, $E$ termina em algum módulo C com $f : M \mapsto C$ para algum módulo $M$ e $E'$ começa em M.

Podemos escrever uma $n$-extensão $S$ como a composição de $n$ extensões $E_i$ da forma

$$S = E_n \circ E_{n-1} \circ \cdots \circ E_1;$$

Seja $S'$ uma segunda $n$-extensão com o mesmo começo e término de $S$. A $n$-extensão $S'$ é congruente a $S$ se $S'$ pode ser obtida através de $S$ por um dos três tipos de mudanças

1. Trocando qualquer fator $E_i$ por uma extensão congruente;

2. Se dois fatores sucessivos tem a forma $(Ef) \circ E'$ para algum $E$, $f$ e $E'$ como definidos em (2.1), pode-se trocar por $E \circ (fE')$;

3. Se dois fatores sucessivos tem a forma $E \circ (fE')$ para algum $E$, $f$ e $E'$ como definidos em (2.1), pode-se trocar por $(Ef) \circ E'$.

Voltando ao exemplo 2.1 agora temos $(E\pi) \circ E_1' \equiv E \circ (\pi E_1')$.

**Observação 2.1** *Em [17] prova-se que a relação de equivalência $\equiv$ definida sobre o conjunto das n-extensões é compatível com o produto de Yoneda.*

Consideremos a seguinte resolução projetiva minimal do $\Lambda$-módulo $M$.

$$\longrightarrow P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

Aplicando o funtor $Hom_\Lambda(-, N)$ ao complexo acima identificamos um elemento de $Ext^n(M, N)$ como a classe de $f \in Hom_\Lambda(P_n, N)$ tal que $f\, d_{n+1} = 0$ ( veja [3]).

Queremos ver, a seguir, uma idéia de como se associa uma n-extensão a um elemento do grupo $Ext^n(M, N)$.
Seja $0 \longrightarrow N \longrightarrow B_1 \longrightarrow B_2 \longrightarrow \cdots B_{n-1} \longrightarrow B_n \longrightarrow M \longrightarrow 0$ uma $n$-extensão de $N$ por $M$.

Podemos escrever $M$ como o quociente $M = \frac{F_0}{A_0}$ de um módulo livre $F_0$.

Repetindo o processo podemos escrever $A_0 = \frac{F_1}{A_1}$, $A_1 = \frac{F_2}{A_2}$, $\cdots$ onde $F_1, F_2, \cdots$ são módulos livres, assim conseguimos a sequência exata

$$\longrightarrow F_n \longrightarrow F_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

chamada a *resolução livre de $M$*. O complexo $Hom(F_n, N)$ tem cohomologia $Ext^n(M, N)$.

**Observação 2.2** *O conjunto formado pelas n-extensões módulo a relação de equivalência $\equiv$ é isomorfo a $Ext^n(M, N)$. Podemos então considerar em $Ext^*(M, N) = \amalg_i Ext^i(M, N)$ o produto induzido pelo produto de Yoneda por meio deste isomorfismo (veja [17]).*

Seja $E(M) = Ext^*(M, M)$ nosso objetivo, a princípio, é definir outro produto sobre $E(M)$.

Sejam $f \in Hom_\Lambda(P_n, M)$ e $g \in Hom_\Lambda(P_m, M)$ tal que $f\, d_{n+1} = 0$ e $g\, d_{m+1} = 0$. Consideremos o seguinte diagrama comutativo.

$$\begin{tikzcd}
P_{n+m+1} \arrow[r] \arrow[d, "y_{m+1}"] & P_{n+m} \arrow[r] \arrow[d, "y_m"] & \cdots \arrow[r] & P_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "y_1"] & P_n \arrow[d, "y_0"] \arrow[dr, "f"] & & \\
P_{m+1} \arrow[r] & P_m \arrow[r] \arrow[d, "g"] & \cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r] & P_0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \\
& M & & & & &
\end{tikzcd}$$

As aplicações $y_0, \cdots, y_{m+1}$ são levantamentos de $f$.

Observemos que $g\, y_m \in Hom_\Lambda(P_{n+m}, M)$ e é tal que $g\, y_m\, d_{n+m+1} = 0$, pois $y_m\, d_{n+m+1} = d_{m+1}\, y_{m+1}$ e $g\, d_{m+1} = 0$.

Agora podemos definir sobre $E(M)$ o seguinte produto

$$\overline{f}\,\overline{g} = \overline{g\, y_m}.$$

Assim obtemos que $E(M)$ é uma $k$-álgebra graduada com esse produto e adição usual (veja [11]).

Em [17] prova-se que esse útimo produto definido sobre $E(M)$ coincide com o produto de Yoneda.

## 2.2 Módulos Graduados e anel bigraduado

Nesta seção temos como objetivo apresentar resultados que acreditamos serem conhecidos sobre módulos graduados e anel bigraduado mas que não aparecem na literatura ou não estão demonstrados explicitamente.

Uma álgebra $\Lambda$ é dita graduada ou $\mathbb{N}$-graduada ou ainda positivamente graduado se $\Lambda$ admite uma decomposição como espaço vetorial igual a soma direta de uma família de subespaços $(\Lambda(i))_{i \in \mathbb{N}}$ de $\Lambda$ tal que $\Lambda(i)\Lambda(j) \subset \Lambda(i+j)$ para todo $i, j \in \mathbb{N}$. Um elemento do subespaço $x \in \Lambda(i)$ é dito homogêneo de grau $i$ (notação $gr(x) = i$ ).

Seja $\Lambda$ uma $k$-álgebra graduada, um $\Lambda$-módulo graduado é um módulo $M$ junto com uma família $(M(i))_{i \in \mathbb{Z}}$ de subgrupos de $M$ tal que $M = \amalg_{i \in \mathbb{Z}} M(i)$ e $\Lambda(i)\, M(j) \subset M(i+j)$ para todo $i, j \in \mathbb{Z}$.

Se $M$ e $N$ são módulos graduados, um homomorfismo de módulos graduados é um homomorfismo de módulo $f : M \mapsto N$ tal que $f(M(i)) \subset N(i)$ para todo $i \in \mathbb{Z}$.

**Notação 2.1** *Sejam $M$ e $N$ módulos graduados*

1. $Hom_{gr}(M, N) = \{f : M \mapsto N : f(M(i)) \subset N(i) \text{ para todo } i\}$;

2. $Hom_{gr}(M, N[j]) = Hom_{gr}(M, N)[j]$
$= \{f : M \mapsto N : f(M(i)) \subset N(i + j) \text{ para todo } i\}$.

**Lema 2.1** *[22]Sejam $M$ e $N$ módulos graduados finitamente gerados sobre uma álgebra noetheriana $\Lambda$ então*

$$Hom(M, N) = \amalg_{j\in\mathbb{Z}} Hom_{gr}(M, N)[j].$$

**Lema 2.2** *Seja $\Lambda$ uma álgebra graduada, $M$ um módulo graduado e*

$$\cdots \longrightarrow P_i \xrightarrow{\varphi_i} P_{i-1} \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{\varphi_1} P_0 \xrightarrow{\varphi_0} M \longrightarrow 0$$

*uma resolução projetiva de $M$ onde para todo i, $P_i$ é um módulo projetivo graduado e $\varphi_i$ preserva grau. Então para todo $i$*

$$\begin{array}{rcl} \varphi_i^* : Hom(P_{i-1}, M) & \longmapsto & Hom(P_i, M) \\ f & \longmapsto & f \circ \varphi_i \end{array}$$

*preserva grau.*

**Prova.** Seja $f \in Hom_{gr}(P_{i-1}, M)(t)$ e $x \in P_i(d)$. Como $\varphi_i$ preserva grau segue que $\varphi_i(x) \in P_{i-1}(d)$. Donde $\varphi_i^*(f)(x) = f(\varphi_i(x)) \in M(d + t)$. Assim $\varphi_i^*(Hom(P_{i-1}, M)(t)) \subset Hom(P_i, M)(t)$.

Portanto $\varphi_i^*$ preserva grau para todo $i$. ∎

Utilizando as notações e o resultado do lema anterior segue que $Ext^i(M, M) = \amalg_t Ext^i(M, M)(t)$ onde $Ext^i(M, M)(t)$ é igual ao quociente

$$\frac{Ker\, \varphi_i^*(t)}{Im\, \varphi_{i-1}^*(t)}$$

**Definição 2.1** *Um anel $\Lambda$ é dito $\mathbb{Z}$-graduado se é a soma direta de subgrupos, $\Lambda = \amalg_{m\in\mathbb{Z}} \Lambda(m)$ e $\Lambda(m)\,\Lambda(n) \subset \Lambda(m + n)$, para todo $m, n \in \mathbb{Z}$.*

*Um anel graduado $\Lambda = \amalg_{m\in\mathbb{Z}} \Lambda(m)$ será chamado graduado comutativo se dados elementos $x, y \in \Lambda$ de graus $m, n$ respectivamente,*

$$xy = (-1)^{mn} yx;$$

*e será chamado anti-comutativo se*

$$xy = -(-1)^{mn} yx.$$

**Definição 2.2** *Uma álgebra de Lie graduada $\Lambda$ é uma álgebra graduada com um produto anti-comutativo (usualmente denotado por $[\ ,\ ]$) satisfazendo a identidade de Jacobi graduada, ou seja, dados $x$, $y$, $z$ em $\Lambda$ de graus $m$, $n$, $l$ respectivamente então*

1. $[x, y] = -(-1)^{mn}[y, x]$
2. $(-1)^{ml}[[x, y], z] + (-1)^{nm}[[y, z], x] + (-1)^{ln}[[z, x], y] = 0.$

**Definição 2.3** *Um anel bigraduado consiste de uma família de subgrupos $R^{m,n}$ (onde $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$) tal que $R$ é a soma direta $\amalg_{m,n} R^{m,n}$ e satisfaz que $R^{m_1,n_1}R^{m_2,n_2} \subset R^{m_1+m_2,n_1+n_2}$. Os elementos de $R^{n,m}$ são chamados bihomogêneos de bigrau $(m, n)$.*

**Lema 2.3** *Seja $M$ um módulo graduado e $E(M) = Ext^*(M, M)$ onde a estrutura multiplicativa é dada pelo produto de Yoneda para extensões então $E(M)$ é um anel bigraduado.*

**Prova.** Queremos mostrar que

$$E(M) = \amalg_{(a,b)} Ext^a(M, M)(b)$$

é tal que

$$Ext^{a_1}(M, M)(b_1)Ext^{a_2}(M, M)(b_2) \subset Ext^{a_1+a_2}(M, M)(b_1 + b_2).$$

Sejam $\overline{f} \in Ext^{a_1}(M, M)(b_1)$ , $\overline{g} \in Ext^{a_2}(M, M)(b_2)$ e
$\cdots \longrightarrow P_{a_1} \xrightarrow{d_{a_1}} P_{a_{1-1}} \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$ uma resolução projetiva de $M$ tal que cada $P_i$ é graduado e $d_i$ preserva grau.

Utilizando o lema anterior e a definição do produto de Yoneda obtemos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{lll}
P_{a_1+a_2}(t) \longrightarrow \cdots \longrightarrow & P_{a_1}(t) & \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0(t) \longrightarrow M(t) \longrightarrow 0 \\
\downarrow f_{a_2} & \downarrow f_0 & \quad \overset{f}{\searrow} \\
P_{a_2}(t + b_1) \longrightarrow \cdots \longrightarrow & P_0(t + b_1) & \longrightarrow M(t + b_1) \longrightarrow 0 \\
\downarrow g & & \\
M(t + b_1 + b_2). & &
\end{array}$$

Assim $\overline{fg} \in Ext^{a_1+a_2}(M, M)(b_1 + b_2)$. Portanto $E(M)$ é um anel bigraduado
■

## 2.3 Estrutura algébrica da cohomologia da cohomologia de Hochschild.

Nessa seção verificamos que $H^*(\Lambda, \Lambda)$ tem estrutura de anel $\mathbb{Z}$-graduado com o produto cup. Além disso definimos em $H^*(\Lambda, \Lambda)$ um segundo produto chamado de produto círculo, com o qual $H^*(\Lambda, \Lambda)$ tem estrutura de anel de Lie graduado. Esses resultados podem ser encontrados em [8].

Por último apresentamos uma outra demonstração de que o produto cup é graduado comutativo utilizando o fato de que o produto cup é isomorfo ao produto de Yoneda.

Em $C^*(\Lambda, \Lambda)$ temos um produto chamado produto cup

$$\smile: C^m(\Lambda, \Lambda) \otimes C^n(\Lambda, \Lambda) \mapsto C^{m+n}(\Lambda, \Lambda)$$

definido por

$$f \smile g(x_1 \otimes \cdots \otimes x_{m+n}) = f(x_1 \otimes \ldots \otimes x_m) g(x_{m+1} \otimes \ldots \otimes x_{m+n})$$

para todo $(x_1 \otimes \cdots \otimes x_{m+n}) \in \Lambda^{\otimes^{m+n}}$.

**Proposição 2.1** *Sejam $f \in C^m(\Lambda, \Lambda)$, $g \in C^n(\Lambda, \Lambda)$ e $h \in C^p(\Lambda, \Lambda)$*

1. $(f \smile g) \smile h = f \smile (g \smile h)$;
2. $f \smile 1 = f = 1 \smile f$ *onde* 1 *é a unidade de* $\Lambda$;
3. $d(f \smile g) = (df) \smile g + (-1)^m f \smile (dg)$;

*Onde $d$ é a diferencial do complexo $C^*(\Lambda, \Lambda)$.*

Decorre das propriedades 1. e 2. acima que $C^*(\Lambda, \Lambda)$ com o produto cup é um anel associativo com unidade graduado pelos inteiros. E é uma consequência da propriedade 3. que o produto cup induz um produto sobre a cohomologia de Hochschild.

Descrevemos agora uma estrutura que foi introduzida por M. Gerstenhaber em [8] e que induz em $H^*(\Lambda, \Lambda)$ uma estrutura de álgebra de Lie graduada.

Para $f \in C^m(\Lambda, \Lambda)$ e $g \in C^n(\Lambda, \Lambda)$ $(m \geq 1, n \geq 0)$ e para todo $i \in \{1 \cdots, m\}$ existe um produto parcial onde

$$f \circ_i g \in C^{m+n-1}(\Lambda, \Lambda)$$

definido da seguinte forma

$$\begin{aligned} f \circ_i g \quad & (x_1 \otimes_k \cdots \otimes_k x_{m+n-1}) \\ & = f(x_1 \otimes_k \cdots \otimes_k x_{i-1} \otimes_k g(x_i \otimes_k \cdots \otimes_k x_{i+n-1}) \otimes_k x_{i+n} \otimes_k \cdots \otimes_k x_{m+n-1}) \end{aligned}$$

para todo $x_1, \cdots, x_{m+n-1} \in \Lambda$.

O produto círculo é então definido como a soma alternada

$$f \circ g = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{(i-1)(n-1)} f \circ_i g.$$

Essa definição é estendida para a 0-cocadeia colocando $f \circ g = 0$ se $m = 0$

Como vimos o produto cup induz um produto sobre a cohomologia de Hochschild. Mas o produto círculo não passa diretamente para um produto na cohomologia.

Usando essas definições obtemos sobre $C^*(\Lambda, \Lambda)$ o seguinte colchete com respeito ao produto círculo

$$[f, g]^{\circ} = f \circ g - (-1)^{(n-1)(m-1)} g \circ f$$

com $f \in C^m(\Lambda, \Lambda)$ e $g \in C^n(\Lambda, \Lambda)$.

**Proposição 2.2** *Sejam $f \in C^m(\Lambda, \Lambda)$ e $g \in C^n(\Lambda, \Lambda)$ segue que*

1. $[f, g] = -(-1)^{(n-1)(m-1)}[g, f]$
2. *Dado $h \in C^l(\Lambda, \Lambda)$,*

   $(-1)^{(n-1)(l-1)}[[f, g], h] + (-1)^{(m-1)(n-1)}[[g, h], f] + (-1)^{(l-1)(m-1)}[[h, f], g] = 0.$

O próximo resultado conecta o diferencial $d$ de $C^*(\Lambda, \Lambda)$ com o produto círculo e o produto cup.

**Teorema 3** *Sejam $f \in C^m(\Lambda, \Lambda)$ e $g \in C^n(\Lambda, \Lambda)$ segue que*

$$d(f \circ g) = (-1)^n (df) \circ g + f \circ (dg) + (-1)^n (g \smile f - (-1)^{mn} f \smile g).$$

**Corolário 2.1** *O anel $H^*(\Lambda, \Lambda)$ com o produto cup é um anel graduado comutativo, com a graduação dada pela dimensão, isto é, se $\overline{f} \in H^m(\Lambda, \Lambda)$, $\overline{g} \in H^n(\Lambda, \Lambda)$, então*

$$\overline{f} \smile \overline{g} = (-1)^{mn} \overline{g} \smile \overline{f}.$$

A seguir vamos ver um exemplo do cálculo do colchete $[\ ,\ ]^\circ$ em um $H^*(\Lambda, \Lambda)$.

**Exemplo 2.2** *Seja* $\Lambda = \frac{k[x]}{\langle x^2 \rangle}$ *com car* $k \neq 2$

$$0 \longrightarrow \Lambda \xrightarrow{d} Hom_k(\Lambda, \Lambda) \xrightarrow{d} Hom_k(\Lambda^{\otimes^2}, \Lambda) \longrightarrow \cdots$$

$H^0(\Lambda, \Lambda) = \langle 1, x \rangle$
$H^1(\Lambda, \Lambda) = \langle f \rangle$ *onde* $f(a + bx) = bx$
$H^2(\Lambda, \Lambda) = \langle g \rangle$ *onde* $g((a + bx) \otimes (c + dx)) = bd$

*Pode-se mostrar que*

$$H^*(\Lambda, \Lambda) = H^0(\Lambda, \Lambda) \amalg H^1(\Lambda, \Lambda) \amalg H^2(\Lambda, \Lambda)$$

$$[g,\ 1]^\circ\,(a + bx) = g(1 \otimes (a + bx)) + g((a + bx) \otimes 1) = 0$$

$$[g,\ x]^\circ\,(a + bx) = g(x \otimes (a + bx)) + g((a + bx) \otimes x) = 2b$$

$$\begin{aligned}[g,\ f]^\circ\,((a + bx) \otimes (c + dx)) &= g \circ f((a + bx) \otimes (c + dx)) \\ &\quad - f \circ g((a + bx) \otimes (c + dx))\end{aligned}$$

$$= g(f(a+bx) \otimes (c+dx)) - g((a+bx \otimes f(c+dx)) - fg((a+bx) \otimes (c+dx)) = 0$$

**Observação 2.3** *Utilizando o teorema anterior podemos verificar que o colchete* $[\ ,\ ]^\circ$ *muni o anel* $H^*(\Lambda,\ \Lambda)$ *de uma estrutura de álgebra de Lie graduada (se* $\overline{f} \in H^n(\Lambda, \Lambda)$ *então o grau de* $\overline{f}$ *é* $n - 1$*).*

**Corolário 2.2** *O primeiro grupo de cohomologia de Hochschild* $H^1(\Lambda, \Lambda)$ *é uma álgebra de Lie com o colchete induzido pelo colchete de Lie usual de* $Hom_k(\Lambda, \Lambda)$

$$[f, g] = f \circ g - g \circ f$$

*onde* $f, g \in Hom_k(\Lambda, \Lambda)$. *As derivações formam uma subálgebra de Lie de* $Hom(\Lambda, \Lambda)$ *e as derivações internas formam um ideal de Lie de* $Der(\Lambda)$.

**Prova.** Para demonstrar o corolário basta mostrarmos que as derivações internas formam um ideal de Lie de $Der(\Lambda)$. Sejam $[x,\ -] \in Inn(\Lambda)$ , $D \in Der(\Lambda)$ e $y \in \Lambda$.

$$\begin{aligned}[D, [x,\ -]](y) &= D[x, -](y) - [x,\ -]D(y) \\ &= D(xy - yx) - xD(y) + D(y)x \\ &= xD(y) + D(x)y - yD(x) - D(y)x - xD(y) + D(y)x \\ &= D(x)y - yD(x) = [D(x), -](y).\end{aligned}$$

Assim $[D(x), -] \in Inn(\Lambda)$, e portanto $Inn(\Lambda)$ é um ideal de Lie de $Der(\Lambda)$ ■

Na primeira seção deste capítulo definimos o produto de Yoneda que muni a cohomologia de Hochschild $H^*(\Lambda, \Lambda)$ de uma estrutura de anel. Em [9] Gerstenhaber prova que esse produto é isomorfo ao produto cup. Assim $H^*(\Lambda, \Lambda)$ tem um estrutura de anel $\mathbb{Z}$-graduado. No próximo resultado demostramos que o produto cup é graduado comutativo, mas usando agora o fato do produto cup ser isomorfo ao produto de Yoneda.

**Teorema 4** *O produto cup definido sobre $H^*(\Lambda, \Lambda)$ é graduado comutativo.*

**Prova.** Sejam $f \in Hom_{\Lambda^e}(\Lambda^{\otimes^{n+2}}, \Lambda)$ e $g \in Hom_{\Lambda^e}(\Lambda^{\otimes^{m+2}}, \Lambda)$ tais que $fd = 0$ e $gd = 0$.

Seja também $\cdots \longrightarrow \Lambda^{\otimes^3} \longrightarrow \Lambda^{\otimes^2} \longrightarrow \Lambda \longrightarrow 0$ a resolução projetiva padrão de $\Lambda$ como $\Lambda$-bimódulo.

A seguir vamos calcular o produto de Yoneda de $f$ com $g$ definindo dois levantamentos distintos de $f$ e depois utilizamos o fato do resultado desse produto independer dos levantamentos.

Consideremos o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
\Lambda^{\otimes^{n+m+2}} \arrow[r] \arrow[d, "z_m"', "y_m"] & \Lambda^{\otimes^{n+m+1}} \arrow[r] \arrow[d, "z_{m-1}"', "y_{m-1}"] & \cdots \arrow[r] & \Lambda^{\otimes^{n+3}} \arrow[r] \arrow[d, "z_1"', "y_1"] & \Lambda^{\otimes^{n+2}} \arrow[d, "z_0"', "y_0"] \arrow[dr, "f"] & & \\
\Lambda^{\otimes^{m+2}} \arrow[r] \arrow[d, "g"] & \Lambda^{\otimes^{m+1}} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \Lambda^{\otimes^{3}} \arrow[r, "d"] & \Lambda^{\otimes^{2}} \arrow[r] & \Lambda \arrow[r] & 0 \\
\Lambda & & & & & &
\end{tikzcd}$$

com

$$y_t(1 \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_{n+t} \otimes 1) = (1 \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_t \otimes f(1 \otimes x_{t+1} \otimes \cdots \otimes x_{n+t} \otimes 1)),$$

$$z_t(1 \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_{n+t} \otimes 1) = (-1)^{nt}(f(1 \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \otimes 1) \otimes x_{n+1} \otimes \cdots \otimes x_{n+t} \otimes 1)).$$

Primeiro mostremos que $y_{t-1}\, d = d\, y_t$, ou seja, que $y_t$ é levantamento de $f$ para todo $t$.

$$
\begin{aligned}
&y_{t-1}\, d(1 \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_{n+t} \otimes 1) \\
&= (x_1 \otimes \cdots \otimes x_t \otimes f(1 \otimes x_{t+1} \otimes \cdots \otimes x_{n+t} \otimes 1)) \\
&+ \textstyle\sum_{i=1}^{t-1} (-1)^i (1 \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_i x_{i+1} \otimes \cdots \otimes x_t \otimes f(1 \otimes x_{t+1} \otimes \cdots \otimes x_{n+t} \otimes 1)) \\
&+ \textstyle\sum_{i=t}^{n+t} (-1)^i (1 \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_{t-1} \otimes f(1 \otimes x_t \otimes \cdots \otimes x_i x_{i+1} \otimes \cdots \otimes x_{n+t} \otimes 1))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (x_1 \otimes \cdots \otimes x_t \otimes f(1 \otimes x_{t+1} \otimes \cdots \otimes x_{n+t} \otimes 1)) \\
&+ \textstyle\sum_{i=1}^{t-1} (-1)^i (1 \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_i x_{i+1} \otimes \cdots \otimes x_t \otimes f(1 \otimes x_{t+1} \otimes \cdots \otimes x_{n+t} \otimes 1)) \\
&+ (-1)^{t+1} (1 \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_{t-1} \otimes fd(1 \otimes x_t \otimes \cdots \otimes x_{n+t} \otimes 1)) \\
&- (-1)^{t+1} (1 \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_{t-1} \otimes f(x_t \otimes \cdots \otimes x_{n+t} \otimes 1))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (x_1 \otimes \cdots \otimes x_t \otimes f(1 \otimes x_{t+1} \otimes \cdots \otimes x_{n+t} \otimes 1)) \\
&+ \textstyle\sum_{i=1}^{t-1} (-1)^i (1 \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_i x_{i+1} \otimes \cdots \otimes x_t \otimes f(1 \otimes x_{t+1} \otimes \cdots \otimes x_{n+t} \otimes 1)) \\
&+ (-1)^t (1 \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_{t-1} \otimes f(x_t \otimes \cdots \otimes x_{n+t} \otimes 1))
\end{aligned}
$$

$$= d\,(1 \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_t \otimes f(1 \otimes x_{t+1} \otimes \cdots \otimes x_{n+t} \otimes 1))$$

$$= d\ y_t (1 \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_{n+t} \otimes 1)$$

$$
\begin{aligned}
g\, y_m (1 \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_{n+m} \otimes 1) &= g(1 \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_m \otimes f(1 \otimes x_{m+1} \otimes \cdots \otimes x_{n+m} \otimes 1)) \\
&= g(1 \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_m \otimes 1) f(1 \otimes x_{m+1} \otimes \cdots \otimes x_{n+m} \otimes 1)).
\end{aligned}
$$

Assim temos $g \circ y_m = g \smile f$ ( onde $\circ$ denota o produto de Yoneda).

Agora vamos verificar que $z_{t-1}\, d = d\, z_t$, ou seja, que $z_t$ também é levantamento de $f$ para todo $t$.

$$(-1)^{n(t-1)}\ z_{t-1}\ d(1 \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_{n+t} \otimes 1)$$

$$= (f(x_1 \otimes \cdots \otimes x_{n+1} \otimes 1) \otimes x_{n+2} \otimes \cdots \otimes x_{n+t} \otimes 1)$$
$$+ \textstyle\sum_{i=1}^{n} (-1)^i (f(1 \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_i x_{i+1} \otimes \cdots \otimes x_{n+1} \otimes 1) \otimes x_{n+2} \otimes \cdots \otimes x_{n+t} \otimes 1)$$
$$+ \textstyle\sum_{i=n+1}^{n+t} (-1)^i (f(1 \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \otimes 1) \otimes x_{n+1} \otimes \cdots \otimes x_i x_{i+1} \otimes \cdots \otimes x_{n+t} \otimes 1)$$

$$= (f\, d(1 \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_{n+1} \otimes 1) \otimes x_{n+2} \otimes \cdots \otimes x_{n+t} \otimes 1)$$
$$-(-1)^{n+1} (f(1 \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_{n+1}) x_{n+2} \otimes \cdots \otimes x_{n+t} \otimes 1))$$
$$+ \textstyle\sum_{i=n+1}^{n+t} (-1)^i (f(1 \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \otimes 1) \otimes x_{n+1} \otimes \cdots \otimes x_i x_{i+1} \otimes \cdots \otimes x_{n+t} \otimes 1)$$

$$= (-1)^n (f(1 \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_{n+1}) x_{n+2} \otimes \cdots \otimes x_{n+t} \otimes 1))$$
$$+ \textstyle\sum_{i=n+1}^{n+t} (-1)^i (f(1 \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \otimes 1) \otimes x_{n+1} \otimes \cdots \otimes x_i x_{i+1} \otimes \cdots \otimes x_{n+t} \otimes 1)$$

$$= (-1)^n d(f(1 \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \otimes 1) \otimes x_{n+1} \otimes \cdots \otimes x_{n+t} \otimes 1)$$

$$= (-1)^{(n)(t-1)}\ d\ z_t\, f(1 \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_{n+t} \otimes 1)$$

$$g\, z_m(1 \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_{n+m} \otimes 1) = (-1)^{nm}\, g\, (f(1 \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \otimes 1) \otimes x_{n+1} \otimes x_{n+m} \otimes 1)$$

$$= (-1)^{nm}\, f(1 \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \otimes 1) g(1 \otimes x_{n+1} \otimes \cdots \otimes x_{n+m} \otimes 1)).$$

E assim temos $g \circ z_m = (-1)^{nm} f \smile g$.

Como o resultado do produto independe dos levantamentos segue que

$$g \smile f = (-1)^{nm} f \smile g$$

■

# Capítulo 3

# A Álgebra de Lie do primeiro grupo de cohomologia de uma álgebra quadrática

No artigo [24] estudou-se a estrutura de álgebra de Lie graduada do primeiro grupo de cohomologia de Hochschild de uma álgebra monomial $\Lambda$ de dimensão finita, em termos de caminhos paralelos. Mostramos neste capítulo que é possível descrever um colchete de Lie para $H^1(\Lambda, \Lambda)$ em termos de relações paralelas quando $\Lambda$ é uma $k$-álgebra quadrática de dimensão finita.

Denotamos por $\Lambda$ uma álgebra quadrática de dimensão finita sobre um corpo $k$, ou seja, $\Lambda$ é uma álgebra sobre $k$ de dimensão finita isomorfa a um quociente de álgebra de caminho da forma $\frac{k\Gamma}{I}$ onde $I$ é um ideal bilateral gerado pelo conjunto $R = \{f_1, \cdots, f_n\}$ tal que cada $f_i$ é uma combinação linear de caminhos em $\Gamma$ de comprimento 2. Assumimos que as relações não monomiais de $R$ são minimais.

Também dado um conjunto $S$, $kS$ denota o $k$-espaço vetorial com base $S$.

Tendo em vista a definição dos grupos de cohomologia por meio do funtor $Ext$, uma forma de se calcular esses grupos é através de um resolução projetiva de $\Lambda$ como $\Lambda$-bimódulo. Aplicando o funtor $Hom_{\Lambda^e}(-, \Lambda)$ a uma tal resolução e calculando os grupos de cohomologia do complexo resultante, obtém-se os grupos $H^i(\Lambda, \Lambda)$.

Na seção 1 usamos duas resoluções projetivas minimais ($\Lambda$-bimódulo) de uma álgebra quadrática e comparando essas duas conseguimos definir um colchete para $H^1(\Lambda, \Lambda)$ em termos de relações paralelas.

Vemos na seção 2 que o comprimento dos caminhos de $k\Gamma$ introduz uma graduação sobre $H^1(\Lambda, \Lambda) = \amalg_{i \geq -1} \mathcal{L}_i$. Vemos que no caso de álgebra quadrática basta pedirmos que característica seja diferente de dois para que

$\mathcal{L}_{-1} = 0$. Como consequência podemos verificar propriedades como a simplicidade, a semi-simplicidade e a solubilidade da álgebra de Lie $H^1(\Lambda, \Lambda)$ estudando $\mathcal{L}_0$ no caso em que característica de $k$ é diferente de dois.

## 3.1 Resolução projetiva e colchete de Lie

Vimos no capítulo 1 que os grupos de cohomologia de Hochschild são definidos como $H^*(\Lambda, \Lambda) = Ext^*_{\Lambda^e}(\Lambda, \Lambda)$ onde $\Lambda^e = \Lambda \otimes_k \Lambda^{op}$ é a álgebra envolvente de $\Lambda$. Utilizando a resolução padrão o complexo de Hochschild é dada por:

$$0 \longrightarrow \Lambda \xrightarrow{d_0} Hom_k(\Lambda, \Lambda) \xrightarrow{d_1} \cdots \longrightarrow Hom_k(\Lambda^{\otimes^i}, \Lambda) \xrightarrow{d_i} \cdots \tag{3.1}$$

onde

$$\begin{array}{ll} d_i = 0 \ \text{ para } i < 0, & \\ (d_0 x)(a) = ax - xa \qquad \text{e} & \\ (d_i f)(x_1 \otimes x_2 \otimes \ldots \otimes x_{i+1}) = & x_1 f(x_2 \otimes \ldots \otimes x_{i+1}) \\ & + \sum_{j=1}^{i} (-1)^j f(x_1 \otimes \ldots \otimes x_j x_{j+1} \otimes \ldots \otimes x_{i+1}) \\ & +(-1)^{i+1} f(x_1 \otimes \ldots \otimes x_i) x_{i+1} \\ & \qquad\qquad \text{com } i > 0. \end{array}$$

Vamos utilizar uma outra resolução projetiva da álgebra quadrática $\Lambda$ sobre $\Lambda^e$ cuja parte que nos interessa é da forma

$$\cdots \longrightarrow \Lambda \otimes_E kR \otimes_E \Lambda \xrightarrow{\delta_1} \Lambda \otimes_E k\Gamma_1 \otimes_E \Lambda \xrightarrow{\delta_0} \Lambda \otimes_E \Lambda \xrightarrow{\pi} \Lambda \longrightarrow 0 \tag{3.2}$$

onde $E = k\Gamma_0$ e os morfismos de $\Lambda$ -bimódulos são dados por

$$\begin{array}{l} \pi(\gamma \otimes_E \mu) = \gamma\mu \\ \delta_0(\gamma \otimes_E \alpha \otimes_E \mu) = \gamma\alpha \otimes_E \mu - \gamma \otimes_E \alpha\mu \\ \delta_1(\gamma \otimes_E \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i \beta_i \otimes_E \mu) = \sum_{i=1}^n \lambda_i (\gamma\alpha_i \otimes_E \beta_i \otimes_E \mu + \gamma \otimes_E \alpha_i \otimes_E \beta_i \mu) \end{array}$$

com $\gamma, \mu \in \Lambda$ , $\alpha \in \Gamma_1$ e $\sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i \beta_i \in R$.

**Lema 3.1** *Seja $M$ um $E$-bimódulo e $T$ um $\Lambda$- bimódulo. Então o espaço vetorial $Hom_{\Lambda^e}(\Lambda \otimes_E M \otimes_E \Lambda, T)$ é isomorfo a $Hom_{E^e}(M, T)$.*

**Prova.** Defina os seguintes morfismos lineares:

$$\begin{array}{rcl} \varphi : Hom_{\Lambda^e}(\Lambda \otimes_E M \otimes_E \Lambda, T) & \longmapsto & Hom_{E^e}(M, T) \\ f & \longmapsto & \begin{array}{rcl} M & \mapsto & T \\ m & \mapsto & f(1_\Lambda \otimes_E m \otimes_E 1_\Lambda) \end{array} \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcl} \varphi^\star : Hom_{E^e}(M,T) & \longmapsto & Hom_{\Lambda^e}(\Lambda \otimes_E M \otimes_E \Lambda, T) \\ g & \longmapsto & \begin{array}{rcl} \Lambda \otimes_E M \otimes_E \Lambda & \mapsto & T \\ \gamma \otimes_E m \otimes_E \mu & \mapsto & \gamma g(m)\mu. \end{array} \end{array}$$

Sejam $f \in Hom_{\Lambda^e}(\Lambda \otimes_E M \otimes_E \Lambda, T)$ e $\gamma \otimes_E m \otimes_E \mu \in \Lambda \otimes_E M \otimes_E \Lambda$,

$\varphi^\star \circ \varphi(f)(\gamma \otimes_E m \otimes_E \mu) = \gamma\varphi(f)(m)\mu = \gamma f(1 \otimes m \otimes 1)\mu = f(\gamma \otimes m \otimes \mu)$.

A última igualdade decorre do fato de $f$ ser um morfismo de $\Lambda^e$-módulo.

Sejam $g \in Hom_{E^e}(M,T)$ e $m \in M$,

$\varphi \circ \varphi^\star(g)(m) = \varphi^\star(g)(1 \otimes m \otimes 1) = g(m)$.

Portanto os morfismos $\varphi$ e $\varphi^\star$ acima são o inverso um do outro. ■

Seja $\frac{k\Gamma}{I}$ uma álgebra monomial de dimensão finita e $Z$ um conjunto minimal gerador de $I$, isto é, subcaminhos próprios de $Z$ não podem estar em $Z$. Se tomarmos $B$ como o conjunto formado pelos elementos de $k\Gamma$ que não estão em $I$ então é imediato que a álgebra monomial e $kB$ são isomorfos como $E$-bimódulo. Tal isomorfimo foi essencial para o artigo [24]. No caso de álgebra quadrática de dimensão finita não é tão imediato. Usamos as notações do capítulo 1 para definirmos tal $B$ no próximo resultado.

Fixamos daqui em diante uma ordem admissível em $k\Gamma$.

**Proposição 3.1** *Seja $\Lambda \simeq \frac{k\Gamma}{I}$ uma álgebra quadrática e $B = NonTip(I)$ então $\Lambda$ e $kB$ são $E$-bimódulos isomorfos.*

**Prova.** Segue do teorema 2 que $k\Gamma = I \coprod k(NonTip(I))$ como espaço vetorial, logo dado $a \in k\Gamma$ então $a = w_a + N(a)$ onde $w_a \in I$ e $N(a) \in kB$. Logo faz sentido definir os seguintes morfismos de $E$-bimódulos.

$$\begin{array}{rcl} \phi : \Lambda & \longmapsto & kB \\ \overline{a} & \longmapsto & N(a) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \phi^* : kB & \longmapsto & \Lambda \\ b & \longmapsto & \overline{b} \end{array}$$

Os morfismos $\phi$ e $\phi^*$ são inversos um do outro e assim $\Lambda$ e $kB$ são $E$-bimódulos isomorfos. ■

**Proposição 3.2** *Aplicando o funtor $Hom_{\Lambda^e}(-,\Lambda)$ a resolução projetiva (3.2) o início do complexo resultante é equivalente ao seguinte complexo*

$$0 \longrightarrow Hom_{E^e}(k\Gamma_0, \Lambda) \xrightarrow{\delta_0^\bullet} Hom_{E^e}(k\Gamma_1, \Lambda) \xrightarrow{\delta_1^\bullet} Hom_{E^e}(kR, \Lambda) \longrightarrow \ldots \quad (3.3)$$

*onde os morfimos $\delta_0^\bullet$ e $\delta_1{}^\bullet$ são dados por:*

$$(\delta_0^\bullet f)(\alpha) = \alpha\; f\,(s(\alpha)) - f\,(t(\alpha))\;\alpha$$
$$e$$
$$(\delta_1^\bullet g)(\textstyle\sum_{i=1}^n \lambda_i\,\alpha_i\,\beta_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(\,\alpha_i\, g(\beta_i) + g(\alpha_i)\,\beta_i\,)$$

*com $f \in Hom_{E^e}(k\Gamma_0, \Lambda)$, $\alpha \in \Gamma_1$, $g \in Hom_{E^e}(k\Gamma_1, \Lambda)$ e $\sum_{i=1}^n \lambda_i\alpha_i\beta_i \in R$.*

**Prova.** Aplicando o funtor $Hom_{\Lambda^e}(-, \Lambda)$ a resolução projetiva (3.2) obtemos o complexo

$$0 \rightarrow Hom_{\Lambda^e}(\Lambda \otimes_k k\Gamma_0 \otimes_k \Lambda, \Lambda) \xrightarrow{\overline{\delta}_0} Hom_{\Lambda^e}(\Lambda \otimes_k k\Gamma_1 \otimes_k \Lambda, \Lambda) \xrightarrow{\overline{\delta}_1} Hom_{\Lambda^e}(\Lambda \otimes_k kR \otimes_k \Lambda, \Lambda) \longrightarrow$$

com $\overline{\delta}_0$ e $\overline{\delta}_1$ são os morfismos naturais.

Agora utilizando o lema 3.1 vamos determinar os morfimos $\delta_0^\bullet$ e $\delta_1^\bullet$.

Sejam $f \in Hom_{E^e}(k\Gamma_0, \Lambda)$ e $\alpha \in \Gamma_1$

$$\begin{aligned}
\delta_0^\bullet(f)(\alpha) &= \varphi^*\;\overline{\delta}_0\;\varphi\,(f)(\alpha)\\
&= \varphi^*\;\overline{\delta}_0\; f\,(1 \otimes \alpha \otimes 1)\\
&= \varphi^*\; f\,(\alpha \otimes 1 \otimes 1 - 1 \otimes 1 \otimes \alpha))\\
&= \alpha\, f(1) - f(1)\,\alpha.
\end{aligned}$$

Sejam $g \in Hom_{E^e}(k\Gamma_1, \Lambda)$ e $\sum_{i=1}^n \lambda_i\alpha_i\beta_i \in R$

$$\begin{aligned}
\delta_1^\bullet(g)(\textstyle\sum_{i=1}^n \lambda_i\alpha_i\beta_i) &= \varphi^*\;\overline{\delta}_1\;\varphi\,(g)(\textstyle\sum_{i=1}^n \lambda_i\alpha_i\beta_i)\\
&= \varphi^*\;\overline{\delta}_1\; g\,(1 \otimes \textstyle\sum_{i=1}^n \lambda_i\alpha_i\beta_i \otimes 1)\\
&= \varphi^*\; g\,(\,\lambda_i\,(\textstyle\sum_{i=1}^n(\alpha_i \otimes \beta_i \otimes 1 - 1 \otimes \alpha_i \otimes \beta_i)))\\
&= \textstyle\sum_{i=1}^n \lambda_i\,(\,\alpha_i\; g(\beta_i) + g(\alpha_i)\;\beta_i\,)
\end{aligned}$$

■

**Proposição 3.3** *O início do complexo (3.3) é equivalente ao seguinte complexo*

$$0 \longrightarrow Hom_{E^e}(k\Gamma_0, k\,B) \xrightarrow{\delta_0^*} Hom_{E^e}(k\Gamma_1, k\,B) \xrightarrow{\delta_1^*} Hom_{E^e}(k\,R, k\,B) \longrightarrow \ldots \tag{3.4}$$

*onde os morfimos $\delta_0^*$ e $\delta_1^*$ são dados por:*

$$(\delta_0^* f)(\alpha) = N(\alpha\, f(o(\alpha)) - f(t(\alpha)\,\alpha))$$
$$e$$
$$(\delta_1^* g)(\textstyle\sum_{i=1}^n \lambda_i\,\alpha_i\,\beta_i) = N(\sum_{i=1}^n\; \lambda_i\,(\,\alpha_i\; g(\beta_i) + g(\alpha_i)\,\beta_i\,))$$

*com $f \in Hom_{E^e}(k\Gamma_0, \Lambda)$, $\alpha \in \Gamma_1$, $g \in Hom_{E^e}(k\Gamma_1, \Lambda)$ e $\sum_{i=1}^n \lambda_i\,\alpha_i\,\beta_i \in R$.*

**Prova.** O resultado decorre diretamente da proposição 3.1 ■

**Definição 3.1** *Sejam* $\varepsilon = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varepsilon_i$ *e* $\gamma = \sum_{j=1}^{m} \overline{\lambda}_j \gamma_j$ *relações de* $\Gamma$. *Dizemos que* $\varepsilon$ *e* $\gamma$ *são relações paralelas se* $o(\varepsilon_1) = o(\gamma_1)$ *e* $t(\varepsilon_1) = t(\gamma_1)$.

*Se* $X$ *e* $Y$ *são conjuntos formados por relações de* $\Gamma$, *o conjunto* $X//Y$ *de relações paralelas é formado por* $(\varepsilon, \gamma) \in X \times Y$ *tal que* $\varepsilon$ *e* $\gamma$ *são paralelas.*

**Lema 3.2** *Sejam* $X$ *e* $Y$ *subconjuntos linearmente independentes de* $\Gamma$ *formados por relações e* $kX$ *e* $kY$ *os correspondentes* $E$*-bimódulos. Então, os espaços vetoriais* $k(X//Y)$ *e* $Hom_{E^e}(kX, kY)$ *são isomorfos.*

**Prova.** Defina:

$$\begin{array}{rcl} \phi : k(X//Y) & \longmapsto & Hom_{E^e}(kX, kY) \\ (\varepsilon, \gamma) & \longmapsto & x \mapsto \gamma\, \delta_{\varepsilon, x} \end{array}$$

onde

$$\gamma\, \delta_{\varepsilon, x} = \begin{cases} \gamma & \text{se } \varepsilon = x \\ 0 & \text{se } \varepsilon \neq x \end{cases}$$

Sejam $f \in Hom_{E^e}(kX, KY)$ e $\varepsilon = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varepsilon_i \in kX$

Como f é um morfismo de $E$-bimódulo temos

$$f(\varepsilon) = f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i t(\varepsilon_i)\varepsilon_i o(\varepsilon_i)) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i t(\varepsilon_i) f(\varepsilon_i) o(\varepsilon_i) = t(\varepsilon)(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(\varepsilon_i)) o(\varepsilon).$$

Logo a imagem de $\varepsilon$ por $f$ é uma relação paralela a $\varepsilon$. Podemos então definir o seguinte morfismo

$$\begin{array}{rcl} \phi^* : Hom_{E^e}(kX, kY) & \longmapsto & k(X//Y) \\ f & \longmapsto & \sum_{(\varepsilon,\gamma) \in X//Y} \lambda_{\varepsilon\gamma}(\varepsilon, \gamma). \end{array}$$

Pode-se mostrar que $\phi$ e $\phi^*$ são morfismos inversos um do outro. ■

**Notação 3.1** *Sejam* $\alpha \in \Gamma_1$ *e* $\gamma$ *uma relação paralela a* $\alpha$. *Denotamos por* $\gamma \frac{\partial}{\partial \alpha}$ *a seguinte derivação normalizada*

$$\gamma \frac{\partial}{\partial \alpha}(\beta) = \gamma \delta_{\alpha, \beta} = \begin{cases} \gamma & se\ \alpha = \beta \\ 0 & se\ \alpha \neq \beta \end{cases}$$

**Observação 3.1** *Dado um caminho* $\varepsilon = \alpha_1 \cdots \alpha_t$ *em* $\Gamma$ *e* $(\alpha, \gamma) \in \Gamma_1//B$ *temos*

$$\gamma \frac{\partial}{\partial \alpha}(\varepsilon) = \sum_{i=1}^{t} \alpha_1 \cdots \alpha_{i-1}(\gamma \delta_{\alpha_i, \alpha})\alpha_{i+1} \cdots \alpha_t.$$

**Proposição 3.4** *O início do complexo (3.4) pode ser caracterizado da seguinte forma*

$$0 \longrightarrow k(\Gamma_0//B) \xrightarrow{\Psi_0} k(\Gamma_1//B) \xrightarrow{\Psi_1} k(R//B) \longrightarrow \cdots \qquad (3.5)$$

*onde as aplicações são dadas por:*

$$\Psi_0(e, \gamma) = \sum_{\alpha \in \Gamma_1 e} (\alpha, N(\alpha\gamma)) - \sum_{\alpha \in e\Gamma_1} (\alpha, N(\gamma\alpha))$$

$$\Psi_1(\alpha, \gamma) = \sum_{r \in R} (r, N(\gamma \frac{\partial}{\partial \alpha} r))$$

**Prova.** Utilizando o lema 3.2 obtemos o complexo (3.5) com $\Psi_0 = \phi^* \ \delta_0^* \ \phi$ e $\Psi_1 = \phi^* \ \delta_1^* \ \phi$ é equivalente a (3.3). Vejamos como são esses morfismos. Seja $\alpha \in \Gamma_1$

$$\begin{aligned} \delta_0^* \, \phi(e, \gamma)\,(\alpha) = &\ N\ (\alpha\ \phi\,(e, \gamma)\,(o(\alpha)) - \phi\,(e, \gamma)\,(t(\alpha))\,\alpha) \\ &= N(\alpha\,\gamma\,\delta_{e,\,o(\alpha)} - \gamma\,\alpha\,\delta_{e,\,t(\alpha)}). \end{aligned}$$

Donde $\Psi_0\,(e, \gamma) = \sum_{\alpha \in \Gamma_1 e} (\alpha, N(\alpha\,\gamma)) - \sum_{\alpha \in e\,\Gamma_1} (\alpha, N(\gamma\,\alpha))$

Agora seja $(c, \gamma) \in \Gamma_1//B$ e $r = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\,\alpha_i\,\beta_i \in R$

$$\begin{aligned} \delta_1^* \, \phi(c, \gamma)\,(r) &= N(\textstyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\,(\alpha_i\,\phi(c, \gamma)\,(\beta_i) + \phi\,(c, \gamma)\,(\alpha_i)\,b_i)) \\ &= N(\textstyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\,(\alpha_i\,\gamma\,\delta_{c,\beta_i} + \gamma\,\delta_{c,\alpha_i}\,\beta_i)) \\ &= N(\gamma \tfrac{\partial}{\partial c} r) \end{aligned}$$

Donde $\Psi_1(\alpha, \gamma) = \sum_{r \in R} (r, N(\gamma\,\frac{\partial}{\partial \alpha}\,r))$

Portanto o complexo (3.4) é equivalente ao complexo (3.5). ■

**Teorema 5** *O colchete*

$$[(\alpha,\gamma),(\beta,\varepsilon)] = (\beta, N(\gamma\frac{\partial}{\partial\alpha}(\varepsilon))) - (\alpha, N(\varepsilon\frac{\partial}{\partial\beta}(\gamma)))$$

*para todo* $(\alpha,\gamma),(\beta,\varepsilon) \in \Gamma_1//B$ *induz uma estrutura de álgebra de Lie sobre* $\frac{Ker\,\Psi_1}{Im\,\Psi_0}$ *tal que* $H^1(\Lambda,\Lambda)$ *e* $\frac{Ker\,\Psi_1}{Im\,\Psi_0}$ *são isomorfas como álgebras de Lie.*

**Prova.** Dada a álgebra quadrática $\Lambda$ temos a resolução projetiva padrão (1.1) (definida no capítulo 1) e a resolução projetiva minimal (3.2) de $\Lambda$ como $\Lambda^e$-módulo. Vamos definir morfismos de $\Lambda$-bimódulo entre os primeiros termos de (1.1) e (3.2) como segue

$$\begin{array}{lllll}
(1.1) & \cdots\longrightarrow & \Lambda\otimes_k\Lambda\otimes_k\Lambda\longrightarrow & \Lambda\otimes_k\Lambda\longrightarrow & \Lambda \quad\longrightarrow 0\\
\theta\uparrow\downarrow\omega & & \theta_1\uparrow\downarrow\omega_1 & \theta_0\uparrow\downarrow\omega_0 & \downarrow id\\
(3.2) & \cdots\longrightarrow & \Lambda\otimes_E k\Gamma_1\otimes_E\Lambda\longrightarrow & \Lambda\otimes_E\Lambda\longrightarrow & \Lambda \quad\longrightarrow 0
\end{array}$$

$\theta_0(\gamma\otimes_E\mu) = \gamma\otimes_k\mu$,
$\theta_1(\gamma\otimes_E\alpha\otimes_E\mu) = \gamma\otimes_k\alpha\otimes_k\mu$,
$\omega_0(\gamma\otimes_k\mu) = \gamma\otimes_E\mu$,
$\omega_1(\gamma\otimes_k\alpha_1\cdots\alpha_n\otimes_k\mu) = \sum_{i=1}^{n}\gamma\alpha_1\cdots\alpha_{i-1}\otimes_E\alpha_i\otimes_E\alpha_{i+1}\cdots\alpha_n\mu$, com $\gamma,\mu\in\Lambda$, $\alpha,\alpha_1,\cdots,\alpha_n\in\Gamma_1$ e $\alpha_1\cdots\alpha_n\in B$.

Como $\omega$ e $\theta$ são aplicações entre resoluções projetivas de uma mesma álgebra segue que $\omega\,\theta$ é homotópica a $id_{(1.1)}$ e $\theta\,\omega$ é homotópica a $id_{(3.2)}$.

Disso decorre que $Hom_{\Lambda^e}(\omega,\Lambda)\ Hom_{\Lambda^e}(\theta,\Lambda)$ é homotópica a $id_{Hom_{\Lambda^e}((1.1),\Lambda)}$ e $Hom_{\Lambda^e}(\theta,\Lambda)\ Hom_{\Lambda^e}(\omega,\Lambda)$ é homotópica a $id_{Hom_{\Lambda^e}((3.3),\Lambda)}$. Utilizando os isomorfismos anteriores e as aplicações $\omega_1$ e $\theta_1$ temos

$$\begin{array}{rcl}
\overline{\omega_1}: k(\Gamma_1//B) & \longmapsto & Hom_k(\Lambda,\Lambda)\\
(\alpha,\gamma) & \longmapsto & \begin{array}{ccc}\Lambda & \mapsto & \Lambda\\ \varepsilon & \mapsto & \gamma\frac{\partial}{\partial\alpha}(\varepsilon)\end{array}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
\overline{\theta_1}: Hom_k(\Lambda,\Lambda) & \longmapsto & k(\Gamma_1//B)\\
\begin{array}{ccc} f:\Lambda & \mapsto & \Lambda\\ \varepsilon & \mapsto & \sum\lambda_\varepsilon\,\mu_\varepsilon\end{array} & \longmapsto & \sum_{\alpha\in\Gamma_1}\lambda_\alpha(\alpha, N(\mu_\alpha)).
\end{array}$$

Como $\overline{\omega_1}\circ\overline{\theta_1}$ é homotópica a $id$ e $\overline{\theta_1}\circ\overline{\omega_1} = id$ segue que os grupos de cohomologia são isomorfos, ou seja, $\frac{Ker\,d_1}{Im\,d_0}\simeq\frac{Ker\Psi_1}{Im\Psi_0}$ como k-espaços vetoriais.

Assim podemos transferir a estrutura de álgebra de Lie de $\frac{Ker\,d_1}{Im\,d_0}$ para $\frac{Ker\,\Psi_1}{Im\,\Psi_0}$ da seguinte forma.

Defina sobre $k(\Gamma_1//B)$ o seguinte colchete:

$$[(\alpha,\gamma),(\beta,\varepsilon)] := \overline{\theta_1}([\overline{\omega_1}(\alpha,\gamma),\overline{\omega_1}(\beta,\varepsilon)]).$$

Vamos assumir a seguinte afirmação que será demonstrada a seguir

**Afirmação** $\overline{\theta_1}([\overline{\omega_1}(\alpha,\gamma),\overline{\omega_1}(\beta,\varepsilon)]) = (\beta, N(\gamma\frac{\partial}{\partial\alpha}(\varepsilon))) - (\alpha, N(\varepsilon\frac{\partial}{\partial\beta}(\gamma)))$.

Como $\overline{\omega}$ e $\overline{\theta}$ são aplicações entre complexos, concluímos do fato de $Ker\, d_1 = Der(\Lambda)$ ser uma subalgebra de Lie de $Hom_k(\Lambda,\Lambda)$, que $Ker\,\Psi_1$ é uma subalgebra de $k(\Gamma_1//B)$.

Da mesma forma deduzimos que $Im\,\Psi_0 = Der(\Lambda)$ é um ideal de Lie de $Ker\,\Psi_1$. Por construção a álgebra de Lie quociente $\frac{Ker\,\Psi_1}{Im\,\Psi_0}$ é isomorfa a álgebra de Lie $\frac{Ker\,d_1}{Im\,d_0}$. Para terminarmos a demostração do teorema falta apenas demonstrarmos a afirmação que faremos a seguir.

Utilizando as notações anteriores temos

$$\overline{\theta_1}([\overline{\omega_1}(\alpha,\gamma),\overline{\omega_1}(\beta,\varepsilon)]) = \overline{\theta_1}(\overline{\omega_1}(\alpha,\gamma)\circ\overline{\omega_1}(\beta,\varepsilon) - \overline{\omega_1}(\beta,\varepsilon)\circ\overline{\omega_1}(\alpha,\gamma)).$$

Pela definição de $\overline{\theta_1}$ precisamos calcular somente a imagem das flechas segundo $(\overline{\omega_1}(\alpha,\gamma)\circ\overline{\omega_1}(\beta,\varepsilon) - \overline{\omega_1}(\beta,\varepsilon)\circ\overline{\omega_1}(\alpha,\gamma))$. Seja $c\in\Gamma_1$ então

$$f := (\overline{\omega_1}(\alpha,\gamma)\circ\overline{\omega_1}(\beta,\varepsilon) - \overline{\omega_1}(\beta,\varepsilon)\circ\overline{\omega_1}(\alpha,\gamma))(c) =$$

$$\overline{\omega_1}(\alpha,\gamma)(\varepsilon\frac{\partial}{\partial\beta}(c)) - \overline{\omega_1}(\beta,\varepsilon)(\gamma\frac{\partial}{\partial\alpha}(c)) =$$

$$\overline{\omega_1}(\alpha,\gamma)(\varepsilon\,\delta_{c\beta}) - \overline{\omega_1}(\beta,\varepsilon)(\gamma\,\delta_{c,\alpha}) =$$

$$\gamma\,\frac{\partial}{\partial\alpha}(\varepsilon\,\delta_{c,\beta}) - \varepsilon\,\frac{\partial}{\partial\beta}(\gamma\delta_{c,\alpha}).$$

Logo

$$f(\alpha) = -\varepsilon\,\tfrac{\partial}{\partial\beta}(\gamma),\quad f(\beta) = \gamma\,\tfrac{\partial}{\partial\alpha}(\varepsilon),\quad e\ \ f(c) = 0, \forall\, c\in\Gamma_1 - \{\alpha,\beta\}$$

Portanto $\overline{\theta_1}(f) = (\beta, N(\gamma\frac{\partial}{\partial\alpha}(\varepsilon))) - (\alpha, N(\varepsilon\frac{\partial}{\partial\beta}(\gamma)))$ ∎

## 3.2 A Álgebra de Lie graduada $H^1(\Lambda, \Lambda)$

A álgebra quadrática $\Lambda \simeq \frac{k\Gamma}{I}$ tem estrutura de álgebra graduada com a graduação induzida de $k\Gamma$ dada pelo comprimento dos caminhos já que $I$ é homogêneo com respeito a essa graduação ($gr(\gamma) = l(\gamma)$).

Lembremos a segunda resolução projetiva de $\Lambda$ com $\Lambda$-bimódulo que usamos na seção anterior

$$\cdots \longrightarrow \Lambda \otimes_E kR \otimes_E \Lambda \xrightarrow{\delta_1} \Lambda \otimes_E k\Gamma_1 \otimes_E \Lambda \xrightarrow{\delta_0} \Lambda \otimes_E \Lambda \xrightarrow{\pi} \Lambda \longrightarrow 0$$

$\pi(\gamma \otimes_E \mu) = \gamma\mu$
$\delta_0(\gamma \otimes_E \alpha \otimes_E \mu) = \gamma\alpha \otimes_E \mu - \gamma \otimes_E \alpha\mu$
$\delta_1(\gamma \otimes_E \sum_{i=1}^n \lambda_i\alpha_i\beta_i \otimes_E \mu) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(\gamma\alpha_i \otimes_E \beta_i \otimes_E \mu + \gamma \otimes_E \alpha_i \otimes_E \beta_i\mu)$
onde $\gamma, \mu \in \Lambda$ , $\alpha \in \Gamma_1$ e $\sum_{i=1}^n \lambda_i\alpha_i\beta_i \in R$.

Para facilitar a notação seja
$P_0 = \Lambda \otimes_E k\Gamma_0 \otimes_E \Lambda$,
$P_1 = \Lambda \otimes_E k\Gamma_1 \otimes_E \Lambda$ e
$P_2 = \Lambda \otimes_E kR \otimes_E \Lambda$.

Podemos escrever
$P_0 = \coprod_i P_0(i)$, $P_1 = \coprod_i P_1(i)$ e $P_2 = \coprod_i P_2(i)$
com $P_j(i) = \{a \otimes_E b \otimes_E c \in P_j : l(a) + l(b) + l(c) = i\}$ para $j \in \{0, 1, 2\}$.

Assim $P_0$, $P_1$, $P_2$ são módulos graduados. Podemos verificar que $\delta_0$ e $\delta_1$ preservam os comprimentos dos caminhos logo preservam a graduação.

Seja $B_i = B \cap \Gamma_i$ onde $\Gamma_i$ são caminhos de comprimento $i$. Com as graduações definidas anteriormente e utilizando os resultados da seção 2 do capítulo 2 segue que

$$k(\Gamma_0//B) = \coprod_i k(\Gamma_0//B_i) \text{ onde } k(\Gamma_0//B_i) = \{(v, \gamma) : l(\gamma) = i\}$$

$$k(\Gamma_1//B) = \coprod_i k(\Gamma_1//B_{i+1}) \text{ onde } k(\Gamma_1//B_{i+1}) = \{(\alpha, \gamma) : l(\gamma) - 1 = i\}$$

$$k(R//B) = \coprod_i k(R//B_{i+2}) \text{ onde } k(R//B_{i+2}) = \{(r, \gamma) : l(\gamma) - 2 = i\}.$$

Logo $k(\Gamma_0//B)$, $k(\Gamma_1//B)$ e $k(R//B)$ são graduados com a graduação induzida da resolução projetiva de $\Lambda$ como $\Lambda$-bimódulo.

**Proposição 3.5** *Os morfismos*

$$\Psi_0 : k(\Gamma_0//B) \mapsto k(\Gamma_1//B) \quad e \quad \Psi_1 : k(\Gamma_1//B) \mapsto k(R//B)$$

*definidos na proposição (3.4) preservam a graduação acima.*

**Prova.** Primeiro precisamos observar que dado um elemento homogêneo não nulo $\varepsilon$ de $\Lambda$ temos $gr(N(\varepsilon)) = gr(\varepsilon)$.

Se $\varepsilon \notin Tip(I)$ então $N(\varepsilon) = \varepsilon$.

Se $\varepsilon \in Tip(I)$ então existe $r = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\alpha_i\beta_i \in I$ tal que $\varepsilon = \lambda_j\alpha_j\beta_j$ para algum $j \in \{i, \cdots n\}$ assim

$$N(\varepsilon) = -\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} \lambda_i\alpha_i\beta_i$$

Donde $gr(N(\varepsilon)) = gr(\varepsilon) = 2$.

Seja $(e, \varepsilon) \in k(\Gamma_0//B)$ segue que

$$\begin{aligned} gr(\Psi_0(e,\varepsilon)) &= gr(\textstyle\sum_{\alpha\in\Gamma_1 e}(\alpha, N(\alpha\,\varepsilon)) - \sum_{\alpha\in e\Gamma_1}(\alpha, N(\varepsilon\,\alpha))) \\ &= gr(e,\varepsilon) = gr(\varepsilon). \end{aligned}$$

Seja $(\alpha, \varepsilon) \in k(\Gamma_1//B)$ segue que

$$gr(\Psi_1(\alpha,\varepsilon)) = gr(\sum_{r\in R}(r, N(\varepsilon\frac{\partial}{\partial\alpha}r))) = gr(\alpha,\varepsilon) = gr(\varepsilon) - 1.$$

Portanto os morfismos $\Psi_0$ e $\Psi_1$ preservam a graduação ■

Observemos que dados $(\alpha,\gamma) \in \Gamma_1//B_i$ e $(\beta,\varepsilon) \in \Gamma_1//B_j$ então

$$[(\alpha,\gamma),(\beta,\varepsilon)] = (\beta, N(\gamma\frac{\partial}{\partial\alpha}(\varepsilon))) - (\alpha, N(\gamma\frac{\partial}{\partial\beta}(\varepsilon))) \in k(\Gamma_1//B_{i+j-1})$$

Como $gr(\alpha,\varepsilon) = i-1$, $gr(\beta,\varepsilon) = j-1$ e vimos que $gr[(\alpha,\varepsilon),(\beta,\varepsilon)] = i+j-2$ segue que $k(\Gamma_1//B)$ é uma álgebra de Lie graduada.

Portanto a álgebra de Lie $H^1(\Lambda, \Lambda) = \frac{Ker\Psi_1}{Im\Psi_0}$ também é graduada pelos inteiros como segue

$$\mathcal{L}_{-1} = k(\Gamma_1//\Gamma_0) \cap ker\Psi_1$$

$$\mathcal{L}_0 = \frac{k(\Gamma_1//\Gamma_1) \cap ker\Psi_1}{\langle \sum_{\alpha\in\Gamma_1 e}(\alpha,\alpha) - \sum_{\alpha\in e\Gamma_1}(\alpha,\alpha) : e \in \Gamma_0\rangle}$$

$$\vdots$$

$$\mathcal{L}_i = \frac{k(\Gamma_1//B_{i+1}) \cap ker\Psi_1}{\langle \sum_{\substack{\alpha\in\Gamma_1 e \\ \gamma\alpha\in B}}(\alpha,\gamma\alpha) - \sum_{\substack{\alpha\in e\Gamma_1 \\ \alpha\gamma\in B}}(\alpha,\alpha\gamma) : (e,\gamma) \in \Gamma_0//\Gamma_i\rangle}.$$

Assim obtemos

$$H^1(\Lambda, \Lambda) = \coprod_{i\geq -1} \mathcal{L}_i$$

com $[\mathcal{L}_i, \mathcal{L}_j] \subset \mathcal{L}_{i+j}$ para todo $i, j \geq -1$.

**Exemplo 3.1** *Sejam $\Gamma$ o quiver*

$$\begin{tikzcd} u \arrow[loop left, "a"] \arrow[r, shift left, "x"] & v \arrow[l, shift left, "y"] \end{tikzcd}$$

$R = \{a^2 - yx, xy, xa, ay\}$, $\Lambda = \frac{k\Gamma}{\langle R\rangle}$ *e car* $k \neq 2$.

*Vamos ordenar as flechas de $\Gamma$ da seguinte forma $y < x < a$.*

*Temos $Tip\, R = \{a^2, xy, xa, ay\}$ e $B = NonTipR$. Logo*

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}_{-1} = 0, \\ &\mathcal{L}_0 = \langle \tfrac{1}{2}(a,a) + (x,x)\rangle, \\ &\mathcal{L}_1 = \langle (a, yx)\rangle \text{ e} \\ &\mathcal{L}_i = 0 \text{ para todo } i > 1 \end{aligned}$$

*Assim $H^1(\Lambda, \Lambda) = k(\frac{1}{2}(a,a) + (x,x) \amalg k(a, yx)$.*

*Portanto $H^1(\Lambda, \Lambda)$ é uma álgebra de Lie de dimensão 2.*

*Observemos que no caso da álgebra monomial $(a,a) \in Ker\Psi_1$ para todo $a \in \Gamma_1$ (veja [24]) o que não é o caso aqui pois por exemplo $(x,x) \notin Ker\Psi_1$ pois*

$x\frac{\partial}{\partial x}(a^2 - yx) = -yx \in B$.

**Exemplo 3.2** *Seja $\Lambda$ a álgebra definida no exemplo anterior. Vamos escolher uma outra ordenação das flechas de $\Gamma$ digamos $a < x < y$.*

*Temos então $TipR = \{-yx, xy, xa, ay\}$ e $B = NonTipR$. Logo*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0 &= \langle \tfrac{1}{2}(a, a) + (x, x)\rangle \\ \mathcal{L}_1 &= \langle (a, a^2)\rangle \ e \\ \mathcal{L}_i &= 0 \ para\ todo\ i > 1.\end{aligned}$$

*Assim $H^1(\Lambda, \Lambda) = k(\frac{1}{2}(a, a) + (x, x)) \amalg k(a, a^2)$.*

**Lema 3.3** *$\mathcal{L}_{-1} = 0$ se e somente se para todo $(\alpha, e) \in \Gamma_1//\Gamma_0$ existe $r \in R$ tal que $e\frac{\partial}{\partial\alpha}(r) \neq 0$*

**Prova.** Vimos que $\Psi_1(\alpha, e) = \sum_{r\in R}(r, e\frac{\partial}{\partial\alpha}(r)))$ para todo laço $(\alpha, e) \in \Gamma_1//\Gamma_0$.

Sabemos que $(\alpha, e) \in Ker\Psi_1$ e somente se e $e\frac{\partial}{\partial\alpha}(r) = 0$ para todo $r \in R$. Daí segue nossa afirmação. ■

**Proposição 3.6** *Seja $\Lambda$ um $k$-álgebra quadrática tal que $car\, k \neq 2$ então $\mathcal{L}_{-1} = 0$.*

**Prova.** Se $\Gamma$ não tem laço então segue do lema anterior que $\mathcal{L}_{-1} = 0$. Suponhamos que $\Gamma$ tenha laço, ou seja, existe $(a, e) \in \Gamma_1//\Gamma_0$.

Se $a^2 \in R$ então

$$e\frac{\partial}{\partial a}(a^2) = 2a \neq 0,$$

pois a $car\, k \neq 2$. Portanto $\mathcal{L}_{-1} = 0$.

Se $a^2 \notin R$ então vamos mostrar que existe $\sum_i \lambda_i\alpha_i\beta_i \in R$ tal que $a^2 - \sum_i \lambda_i\alpha_i\beta_i \in R$.

Do fato de $R$ ter dimensão finita segue que existe $n$ tal que $a^n \in R$ e $a^{n-1} \notin R$, logo

$$a^n = \sum_j f_j h_j g_j$$

onde $h_j \in R$ e $f_j$ e $g_j \in k\Gamma$. Vamos escolher uma ordenação tal que $a$ seja o maior elemento. Assim

$$Tip(\sum_j f_j h_j g_j) = a^n.$$

Logo existe $j$ tal que $f_j h_j g_j = a^n$.

Como $h_j \in R$ segue que $h_j = \sum_i \lambda_i\alpha_i\beta_i$ onde $\alpha_i, \beta_i \in \Gamma_1$,

$$Tip(f_j h_j g_j) = Tip(\sum_i f_j \lambda_i \alpha_i \beta_i g_j) = a^n$$

logo existe $t$ tal que $\alpha_t \beta_t = a^2$. Assim $a^2 - \sum_{i \neq t} \lambda_i \alpha_i \beta_i \in R$ e temos

$$e\frac{\partial}{\partial a}(a^2 - \sum_{i \neq t} \lambda_i \alpha_i \beta_i) = 2a - e\frac{\partial}{\partial a}(\sum_{i \neq t} \lambda_i \alpha_i \beta_i) \neq 0$$

Portanto em qualquer caso $\mathcal{L}_{-1} = 0$. ■

O ideal $\coprod_{i \geq 1} \mathcal{L}_i$ é um ideal solúvel de $H^1(\Lambda, \Lambda)$ pois $H^1(\Lambda, \Lambda)$ é de dimensão finita. Pode-se verificar que $\mathcal{L}_0$ é uma subálgebra de Lie de $H^1(\Lambda, \Lambda)$. Vimos que se a característica de $k$ é diferente de dois então $\mathcal{L}_{-1} = 0$, logo

$$Rad\, H^1(\Lambda, \Lambda) = Rad\, \mathcal{L}_0 \coprod (\amalg_{i \geq 1} \mathcal{L}_i) \quad e$$

$$\frac{H^1(\Lambda, \Lambda)}{Rad\, H^1(\Lambda, \Lambda)} = \frac{\mathcal{L}_0}{Rad\, \mathcal{L}_0}$$

onde $Rad\, H^1(\Lambda, \Lambda)$ (respectivamente $Rad\, \mathcal{L}_0$) denota o radical de $H^1(\Lambda, \Lambda)$ (respectivamente $\mathcal{L}_0$).

Logo uma consequência da proposição 3.6 é que podemos obter muitas informações tais como a simplicidade, semi-simplidade e a solubilidade da álgebra de Lie $H^1(\Lambda, \Lambda)$ estudando apenas $\mathcal{L}_0$ quando o corpo $k$ tem característica diferente de dois.

# Capítulo 4

# Derivação fundamental de uma álgebra de dimensão finita

Nosso objetivo nesse capítulo é estudar a estrutura do espaço vetorial das derivações fundamentais.

Seja $\Lambda$ uma $k$-álgebra conexa de dimensão finita sobre um corpo k. É sabido que o espaço vetorial gerado pelas derivações diagonalizáveis de $Der(\Lambda)$ denotado por $SPDer(\Lambda)$ é um ideal de Lie de $Der(\Lambda)$ desde que $k$ tenha característica zero ou seja algebricamente fechado de característica prima (veja [5]). Também já vimos que o espaço vetorial gerado pelas derivações internas é um ideal de Lie de $Der(\Lambda)$.

Assem e De la Peña em [1] demonstraram para álgebras triangulares os seguintes fatos

• Seja $(\Gamma, I)$ uma apresentação da álgebra $\Lambda$ e $\pi_1(\Gamma, I)$ o grupo fundamental, a aplicação

$$\begin{array}{rcl} Hom(\pi_1(\Gamma, I), k^+) & \longmapsto & Der(\frac{k\Gamma}{I}) \\ \Psi & \longmapsto & D_\Psi \end{array}$$

é injetiva (onde $k^+$ denota o grupo aditivo do corpo $k$ ).

• A aplicação induzida de $Hom(\pi_1(\Gamma, I), k^+)$ para $H^1(\frac{k\Gamma}{I})$ é injetiva.

Em [7] Farkas, Green e Marcos mostraram esses mesmos resultados para álgebras de dimensão finita em geral. Para fazer a demonstração do último resultado foi essencial a propriedade de que para quaisquer dois vértices $x$ e $y$ existe um passeio $\gamma_{xy} : \alpha_1^{\varepsilon(1)} \ldots \alpha_t^{\varepsilon(t)}$ tal que $\sum_j \varepsilon(j)\lambda_j = 0$ (onde $D(\alpha_j) = \lambda_j \alpha_j$ com $j \in \{1, \cdots, t\}$). Esse fato originou a caracterização de algumas derivações diagonalizáveis que são chamadas de derivações fundamentais. Denotamos o subespaço das derivações fundamentais por $SF(\Lambda)$.

Na seção 1 vamos definir peso e derivação fundamental. Demonstramos os resultados de Assem e De la Peña para álgebras de dimensão finita como realizado em [7].

Na seção 2 mostramos que existe uma relação entre derivação fundamental e um certo recobrimento de Galois definido a partir do grupo fundamental.

Na seção 3 mostramos que o espaço vetorial $SF(\Lambda)$ é um ideal de Lie das derivações de uma $k$-álgebra $\Lambda$ de dimensão finita quando o corpo $k$ tem característica zero.

Na seção 4 estudamos as derivações fundamentais sobre uma $k$-álgebra monomial de dimensão finita. Mostramos também, nesta seção, que para álgebras monomiais se o corpo $k$ tem característica zero então o espaço vetorial gerado pelas derivações internas e pelas derivações fundamentais coincide com o conjunto das derivações da álgebra.

Na seção 5 mostramos através de um contra-exemplo que uma derivação fundamental não é necessariamente uma derivação integrável.

## 4.1 Derivação fundamental

Nesta seção usamos a descrição de grupo fundamental bem como as notações que estão no capítulo 1 da seção 1.4 deste trabalho.

Supomos sempre que $I$ é um ideal admissível de $k\Gamma$. O seguinte teorema é uma generalização do Teorema de Assem e de la Peña [1]. Essa generalização aparece em [7].

**Teorema 6** *Seja $\gamma$ uma escolha de dados de parada com ponto base $v$ para um quiver conexo $\Gamma$. Então a aplicação*

$$\begin{array}{rcl} \theta : Hom(\pi_1(\Gamma, I), k^+) & \longmapsto & SPDer(\frac{k\Gamma}{I}) \\ \Psi & \longmapsto & D_{\Psi,\gamma} : \alpha \mapsto \Psi[\gamma_{v\,o(\alpha)}\, \alpha\, \gamma^{-1}_{v\,t(\alpha)}]\, \alpha \end{array}$$

*é injetiva e $D_{\Psi,\gamma}$ é diagonalizável (onde $k^+$ denota o grupo aditivo do corpo $k$ ).*

**Prova.** Segue diretamente da definição da aplicação $\theta$ que $D_{\Psi,\gamma}$ é diagonalizável. Agora precisamos verificar que $\theta$ é injetora.

Suponhamos que $\Psi \in Hom(\pi_1(\Gamma, I), k^+)$ seja tal que $D_{\Psi,\gamma}$ é um morfismo nulo em $SPDer(\frac{k\Gamma}{I})$, ou seja,

$$D_{\Psi,\gamma}(\alpha) = \Psi[\gamma_{v\,o(\alpha)}\, \alpha\, \gamma^{-1}_{v\,t(\alpha)}]\, \alpha \in I \text{ para todo } \alpha \in \Gamma_1$$

Ora, I é um ideal admissível logo $\Psi[\gamma_{v\,o(\alpha)}\, \alpha\, \gamma^{-1}_{v\,t(\alpha)}] = 0$ para todo $\alpha \in \Gamma_1$.

Já vimos que $\pi_1(\Gamma, I)$ é gerado por $\{c_\gamma(\alpha) : \alpha \in \Gamma_1\}$. Disso decorre que $\Psi$ é uma aplicação nula. Portanto $\theta$ é injetora. ∎

**Teorema 7** *Suponhamos que $\chi \in Hom(\pi_1(\Gamma, I), k^+)$ e fixemos uma escolha de dados de parada $\gamma$ para $\pi_1(\Gamma)$. Se ao associarmos a derivação $D_\chi$ sobre $\frac{k\Gamma}{I}$ ela é interna então $\chi = 0$. Logo a função induzida $Hom(\pi_1(\Gamma, I), k^+)$ para $H^1(\frac{k\Gamma}{I})$ é injetiva.*

**Prova.** Seja $\Lambda = \frac{k\Gamma}{I}$, podemos escrever $\Lambda = \Lambda_0 + rad(\Lambda)$ onde $\Lambda_0$ é a subálgebra gerada pelo conjunto $\Gamma_0$

Sejam $s = \sum_{x\in\Gamma_0} \lambda_x e_x \in \Gamma_0$ e $\overline{\omega} \in \Gamma$ a imagem de um caminho $\omega$ em $\Gamma$ do vértice $x$ para o vértice $y$ então

$$ad(s)(\overline{\omega}) = (\lambda_x - \lambda_y)\overline{\omega}$$

Logo $ad(s)$ é diagonalizável e as classes de caminhos são autovalores. Suponhamos que $\chi \in Hom(\pi_1(\Gamma, I), k^+)$ e $D_\chi = ad(b)$ para algum $b \in \Lambda$.

Seja $b = s + n$ com $s \in \Lambda_0$ e $n \in rad(\Lambda)$.

A imagem $\overline{\omega}$ de todo caminho é um autovetor para $D_\chi$ correspondendo ao autovalor $\chi \circ \xi(c(\omega))$ onde $\xi$ é o homomorfismo canônico de $\pi_1(\Gamma)$ para $\pi_1(\Gamma, I)$.

Logo $ad(b) - ad(s)$ é diagonalizável e $ad(n)$ é nilpotente segue que

$$D_\chi = ad(s)$$

Sejam $x \in \Gamma_0$ e $\alpha_1^{\varepsilon(1)}\alpha_2^{\varepsilon(2)}\cdots\alpha_t^{\varepsilon(t)} \in \gamma$ um passeio de $v$ a $x$ então

$$\chi \circ \xi(c(\alpha_1^{\varepsilon(1)}\alpha_2^{\varepsilon(2)}\cdots\alpha_t^{\varepsilon(t)})) = \lambda_v - \lambda_x$$

Por outro lado, $(\chi \circ \xi)(1) = 0$ logo $\lambda_v = \lambda_x$ para todo $u \in \Gamma_0$. Assim

$$s = \lambda_v(\sum_{x\in\Gamma_0} e_x) = \lambda_v 1$$

Portanto $D_\chi = 0$ ∎

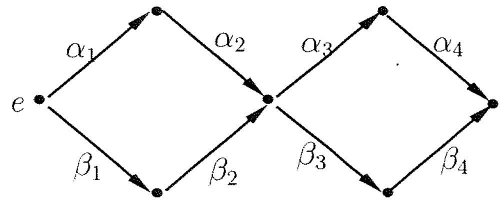
**Definição 4.1** *Dizemos que $D \in Der(\Lambda)$ é uma derivação fundamental se existe uma apresentação $(\Gamma, I)$ de $\Lambda$ e uma escolha de dados de parada $\gamma$ junto com algum $\Psi \in Hom(\pi_1(\Gamma, I), k^+)$ tal que*

$$D = D_{\Psi\gamma}.$$

**Observação 4.1** *Se $D$ é fundamental então:*

1. *$D$ é uma derivação diagonalizável.*
2. *Existe uma apresentação de $\Lambda$ onde as classes dos caminhos são autovetores para $D$. Como consequência $D(rad(\Lambda)) \subset rad(\Lambda)$.*

**Exemplo 4.1** *Seja* $\Lambda = \frac{k\Gamma}{I}$ *com car* $k = 2$, *onde* $\Gamma$ *é o quiver*



*e* $I$ *é o ideal gerado por* $R = \{\alpha_4\alpha_3\alpha_2\alpha_1 - \beta_4\beta_3\beta_2\beta_1, \beta_4\beta_3\alpha_2\alpha_1 - \alpha_4\alpha_3\beta_2\beta_1\}$. *Vamos fixar a seguinte escolha de dados de parada*

$$\gamma = \{e, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2\alpha_1, \alpha_3\alpha_2\alpha_1, \alpha_4\alpha_3\alpha_2\alpha_1, \beta_3\beta_2\beta_1\}.$$

$\pi_1(\Gamma, I) = \langle(\alpha_2\alpha_1)^{-1}\beta_2\beta_1\rangle \simeq \mathbb{Z}_2$

$c_\gamma(\beta_2) = c_\gamma(\beta_3) = (\alpha_2\alpha_1)^{-1}\beta_2\beta_1$
$c_\gamma(\alpha_i) = c_\gamma(\beta_j) = 0$ *para todo* $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ *e* $j \in \{1, 4\}$
*Logo* $\beta_2\frac{\partial}{\partial\beta_2} + \beta_3\frac{\partial}{\partial\beta_3}$ *é uma derivação fundamental de* $Der(\Lambda)$.

Suponhamos que $\Gamma$ é um quiver finito e $H$ um grupo com elemento identidade $e$. Uma aplicação peso para $\Gamma$ com valores em $H$ é uma aplicação $W$ que leva $\Gamma_1$ em $H$. Podemos estender $W$ multiplicativamente definindo que os vértices tem peso $e \in H$ e $W(\alpha_1^{\varepsilon(1)} \ldots \alpha_t^{\varepsilon(t)}) = W(\alpha_1)^{\varepsilon(1)} \ldots W(\alpha_t)^{\varepsilon(t)}$ para todo passeio $\alpha_1^{\varepsilon(1)} \ldots \alpha_t^{\varepsilon(t)}$de $\Gamma$.

A função peso induz uma $H$-graduação sobre $k\Gamma$. Dizemos que o ideal $I$ de $k\Gamma$ é homogêneo para $W$ se o é com respeito a essa graduação. Para tal ideal, o peso induz uma graduação sobre $\frac{k\Gamma}{I}$. No caso de grupo fundamental, consideremos o peso com valores em $\pi_1(\Gamma, I)$ tal que leva $\alpha \in \Gamma_1$ para $\xi(c_\gamma\alpha)$ (veja [12]). Assim uma escolha de dados de parada $\gamma$ induz uma $\pi_1(\Gamma, I)$-graduação sobre $\frac{k\Gamma}{I}$ e então temos o seguinte resultado.

**Corolário 4.1** *A álgebra* $\Lambda = \frac{k\Gamma}{I}$ *é sempre graduada pelo seu grupo fundamental* $\pi_1(\Gamma, I)$.

Daqui em diante dado um peso $W$ denotamos por $H$ o subgrupo gerado pelo conjunto $\{W(\alpha) : \alpha \in \Gamma_1\}$ chamado grupo gerado pelos pesos.

**Lema 4.1** *Seja* $W : \Gamma_1 \mapsto H$ *um peso e* $I$ *um ideal homogêneo de* $k\Gamma$. *Suponhamos que dado um vértice fixo* $v$ *e qualquer outro vértice* $x$ *existe um passeio*

$$\gamma_{v,x} = \alpha_1^{\varepsilon(1)}\alpha_2^{\varepsilon(2)} \cdots \alpha_t^{\varepsilon(t)}$$

*de $v$ para $x$ tal que $W(\alpha_1)^{\varepsilon(1)}W(\alpha_2)^{\varepsilon(2)}\cdots W(\alpha_t)^{\varepsilon(t)} = 1$ em $H$.*

*Então existe um homomorfismo $\theta : \pi_1(\Gamma, I) \mapsto H$ tal que*

$$(\theta \circ \xi)(c_\gamma(\alpha)) = W(\alpha) \ \textit{para todo} \ \alpha \in \Gamma_1.$$

**Prova.** Já vimos que $\pi_1(\Gamma)$ é isomorfo ao quociente do grupo livre $\{c_\gamma(\alpha) : \alpha \in \Gamma_1\}$ por $\{c_\gamma(\gamma_{x,y}) : x, y \in \Gamma_0$ e $x \neq y\}$.

Logo $W$ induz um homomorfismo $\theta : \pi_1(\Gamma) \mapsto H$ tal que

$$\theta(c_\gamma(\alpha)) = W(\alpha) \text{ para todo } \alpha \in \Gamma_1.$$

Suponhamos que $\rho$ é gerador de $I$ formado por relações minimais.

Afirmamos que $\rho$ é homogêneo pois se $r \in \rho$ podemos escrever $r = \sum_h r_h$ onde cada $r_h$ é uma combinação de caminhos com peso $h$. Pela homogeneidade de $I$ cada $r_h$ pertence a $I$. Porém o suporte de $r_h$ é um subconjunto do suporte de $r$. Logo $r = r_h$ para algum $h$.

Por hipótese se $p$ e $q$ são caminhos no suporte de algum $r$ em $\rho$ então $W(p) = W(q)$. Portanto $\theta$ é a identidade sobre $N(\rho)$. Podemos então concluir que $\theta$ se fatora através de $\pi_1(\Gamma, I)$

■

Agora vamos enunciar e demonstrar um teorema que aparece em [7] que caracteriza as derivações fundamentais. Usamos algumas vezes neste trabalho essa caracterização.

**Teorema 8** *Assuma que $I$ é um ideal admissível de $k\Gamma$. Suponha que*

1. *$D$ é uma derivação diagonalizável de $\frac{k\Gamma}{I}$ tal que a classe dos vértices são anulados por $D$ e as classes das flechas são autovetores, isto é para cada flecha $\alpha$ em $\Gamma$ existe um escalar $\omega(\overline{\alpha})$ tal que $D(\overline{\alpha}) = \omega(\overline{\alpha})\overline{\alpha}$;*

2. *Existe um vértice $v$ tal que para todo outro vértice $x$ existe um passeio*

$$\gamma_{v,x} : \alpha_1^{\varepsilon(1)} \ldots \alpha_t^{\varepsilon(t)}$$

*de $v$ para $x$ com $\sum_j \varepsilon(j)\omega(\alpha_j) = 0$.*

*Então existe algum $\Psi \in Hom(\pi_1(\Gamma, I), k^+)$ com $D = D_{\Psi,\gamma}$, para $\gamma = \{\gamma_{v,x}\}$. Isto é, $D$ é uma derivação fundamental.*

**Prova.** Vamos aplicar o lema anterior com $H = k^+$.

Defina $W : \Gamma_1 \mapsto k^+$ com $W(\alpha) = \omega(\overline{\alpha})$ para todo $\alpha \in \Gamma_1$.

A aplicação $W$ está bem definida pois $I$ é um ideal admissível assim diferentes flechas não podem ter a mesma imagem em $\frac{k\Gamma}{I}$.

Estendendo $W$ multiplicativamente obtemos uma $k^+$-graduação para $k\Gamma$. Segue do lema anterior que existe $\Psi : \pi_1(\Gamma, I)) \mapsto k^+$ tal que

$$(\Psi \circ \xi)(c_\gamma(\alpha)) = \omega(\overline{\alpha})\overline{\alpha} = D(\overline{\alpha}) \text{ para todo } \alpha \in \Gamma_1.$$

Portanto $D = D_{\Psi,\gamma}$ já que coincidem nas flechas e vértices e esses elementos geram $\frac{k\Gamma}{I}$ como álgebra. ■

## 4.2 Recobrimento de Galois e Derivação Fundamental

Nesta seção vamos exibir uma relação entre recobrimento de Galois e derivação fundamental.

As definições e resultados que enunciamos a seguir de recobrimento de grafos podem ser encontradas em [12] e [20].

**Definição 4.2** *Um grafo é um par consistindo de um espaço Hausdorff $X$ e um subspaço $X^0$ (chamado de conjunto de vértices ) tal que as seguintes condições são satisfeitas*

1. *$X^0$ é um subespaço fechado discreto de $X$. Os pontos de $X^0$ são chamados de vértices;*

2. *$X - X^0$ é a união disjunta de subconjuntos abertos $e_i$, onde cada $e_i$ é homeomorfo a um intervalo da linha real;*

3. *Para cada $e_i$, o subconjunto $\overline{e}_i - e_i$ de $X^0$ consiste de um ou dois pontos. Se $\overline{e}_i - e_i$ consiste de dois pontos então o par $(\overline{e}_i, e_i)$ é homeomorfo $([0,1],(0,1))$; se $\overline{e}_i - e_i$ consiste de um ponto , então o par $(\overline{e}_i, e_i)$ é homeomorfo ao par $(S^1, S^1 - \{1\})$, onde $S^1$ é o círculo unitário no plano;*

4. *Um subconjunto $A \subset X$ é fechado (aberto) se e somente se $A \cap \overline{e}_i$ é fechado (aberto) para todo $e_i$.*

**Observação 4.2** *A condição 4 acima é automaticamente satisfeita se o número de elementos de $X^0$ é finito, que é o que consideramos sempre neste trabalho.*

Seja $\Gamma$ um grafo localmente finito e dirigido, o qual chamamos de quiver (como é usual em teoria de representações). Quando vemos $\Gamma$ como espaço topológico, assumimos que temos um mergulho fixado de $\Gamma$ em $\mathbb{R}^3$, tal que com esse mergulho, $\Gamma$ satisfaz os axiomas de grafo.

Sejam $\Gamma$ e $\widetilde{\Gamma}$ dois quivers e $F : \widetilde{\Gamma} \mapsto \Gamma$ um *recobrimento* no sentido topológico (veja [12], capítulos 5 e 6). Segue que

1. Se $\varepsilon$ é um caminho em $\widetilde{\Gamma}$ então $F(\varepsilon)$ é um caminho em $\Gamma$;

2. Se $t = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varepsilon_i$ é uma combinação $k$-linear de caminhos em $\widetilde{\Gamma}$ então $F(t) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i F(\varepsilon_i)$ é uma combinação $k$-linear de caminhos em $\Gamma$.

Seja $L : \Gamma_0 \mapsto \widetilde{\Gamma}_0$ tal que $L(v) \in F^{-1}(v)$. Chamamos $L$ de *levantamento*. Pela unicidade de levantamentos de caminhos segue que se $\varepsilon$ é um caminho (possivelmente um passeio) com origem $u$ e término $v$ em $\Gamma_0$, então denotamos por $L(\varepsilon)$ o único caminho em $\widetilde{\Gamma}_0$ com origem $L(u)$ tal que $F(L(\varepsilon)) = \varepsilon$. Note que em geral $L(\varepsilon)$ não termina em $L(v)$ (veja [20]). Se $t = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varepsilon_i$ é uma combinação $k$-linear de caminhos em $\Gamma_0$, $L(t)$ denota $L(t) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i L(\varepsilon_i)$.

Se $F : \widetilde{\Gamma} \mapsto \Gamma$ é um recobrimento e $\widetilde{v} \in \widetilde{\Gamma}_0$, seja $\pi_1(\widetilde{\Gamma}, \widetilde{v})$ o grupo fundamental de $\widetilde{\Gamma}$ e $F_* : \pi_1(\widetilde{\Gamma}, \widetilde{v}) \mapsto \pi_1(\Gamma, F(\widetilde{v}))$ a aplicação induzida por $F$ (veja [20], capítulo 2). Dizemos que $F : \widetilde{\Gamma} \mapsto \Gamma$ é um *recobrimento regular* se $F_*(\pi_1(\widetilde{\Gamma}, \widetilde{v}))$ é um subgrupo normal de $\pi_1(\Gamma, F(\widetilde{v}))$.

Lembremos que um quiver com relação $(\Gamma, R)$ é um par formado por um quiver e um conjunto de relações $R$ em $k\Gamma$. Dado $(\Gamma, R)$ e $(\Gamma', R')$ dois quivers com relações, um morfismo $F$ entre eles é um morfismo de quivers tal que se $r = \sum \lambda_i \gamma_i \in R$ é uma relação então $F(r) = \sum \lambda_i F(\gamma_i) \in R'$. Utilizando esse fato podemos definir a categoria de quivers com relações.

Se $t = \sum_{j=1}^{m} \mu_{i_j} p_{i_j} \in k\Gamma$ e $u, v \in \Gamma_0$ definimos a $(u,v)$-*componente de* $t$ como $c_{u,v}(t) = \sum_{j=1}^{l} \mu_{i_j} p_{i_j}$, onde $p_{i_j}$ é um subconjunto do conjunto dos caminhos de $t$, que começam em $u$ e terminam em $v$. Em outras palavras $c_{u,v}(t) = utv$.

Dados $(\widetilde{\Gamma}, \widetilde{R})$ e $(\Gamma, R)$ quivers com relações e um morfismo $F : (\widetilde{\Gamma}, \widetilde{R}) \mapsto (\Gamma, R)$, então $F$ é um recobrimento de Galois se $F : \widetilde{\Gamma} \mapsto \Gamma$ é um recobrimento regular de gráficos tal que

1. $\widetilde{R} = \{L(t) : L : \Gamma_0 \mapsto \Gamma_0 \text{ é um levantamento e } t \in R\}$;

2. Se $t \in \widetilde{R}$ e $u, v \in \Gamma_0$ então existem $\widetilde{u}, \widetilde{v}$ tal que $F(c_{\widetilde{u},\widetilde{v}}(t)) = c_{u,v}(F(t))$.

**Definição 4.3** *Sejam $\Gamma$ um quiver finito, $H$ um grupo e $W$ uma aplicação peso então o peso $W$ é semi-conexo se para todo $x$ e $y \in \Gamma_0$ e para todo $h \in H$ existe um passeio $p$ de $x$ a $y$ tal que $W(p) = h$ (veja [12]).*

Agora tendo a definição de recobrimento de Galois e de peso semi-conexo podemos mostrar a relação entre recobrimento de Galois e derivação fundamental.

É comum na teoria de representações considerar as álgebras de caminhos $k\Gamma$ como uma categoria onde os objetos são os vértices e os morfismos entre dois vértices $x$ e $y$ é o espaço vetorial gerado pelos caminhos de $x$ a $y$ que denotamos por $\Gamma(x,y)$. A composição entre os morfismos é definida como o produto entre os caminhos.

Dada uma álgebra $\Lambda = \frac{k\Gamma}{I}$ e um peso associado $W : \Gamma_1 \mapsto H$ podemos definir a $k$-categoria $k\widetilde{\Gamma}$ cujos objetos são os elementos de

$$\widetilde{\Gamma}_0 = \Gamma_0 \times H = \{(x,h) = x^h : (x,h) \in \Gamma_0 \times H\}$$

e o conjunto de morfismo é

$$\widetilde{\Gamma}_1(x^h, y^g) = \{\omega^h : \omega \in \Gamma(x,y) \text{ e } W(\omega) = gh^{-1}\}.$$

Seja $F : k\widetilde{\Gamma} \mapsto k\Gamma$ um morfismo entre categorias definido por $F(x^h) = x$ e

$$\begin{array}{rcl} F : \widetilde{\Gamma}_1(x^h, y^g) & \mapsto & \Gamma(x,y) \\ \omega^h & \mapsto & \omega \end{array}$$

Essa noção é a de recobrimento e coincide com *Smash product*. Esta noção foi generalizada para $k$-categorias pequenas (veja [4]).

**Teorema 9** *Utilizando as notações anteriores então o peso $W$ é semi-conexo se e somente se $F : (\widetilde{\Gamma}, \widetilde{I}) \mapsto (\Gamma, I)$ é um recobrimento de Galois. Onde $\widetilde{I} = \{\sum \lambda_\gamma \gamma \in k\widetilde{\Gamma} : \sum \lambda_\gamma F(\gamma) \in I\}$.*

**Prova.** ($\Leftarrow$) Seja $h \in H$ e $u, v \in \Gamma_0$. Como $\Gamma$ é um quiver conexo segue da definição do quiver $\widetilde{\Gamma}$ que ele é conexo. Logo dados $u^e$ e $v^h \in \widetilde{\Gamma}_0$ existe um passeio $\varepsilon^e$ de $u^e$ a $v^h$. Portanto $\varepsilon$ é um passeio de $u$ a $v$ tal que $W(\varepsilon) = h$, donde $W$ é semiconexo.

($\Rightarrow$)Sejam $u^{h_1}$ e $v^{h_2} \in \widetilde{\Gamma}_0$, por hipótese $W$ é semiconexo logo existe um passeio $p$ em $\Gamma$ tal que $W(p) = h_2 h_1^{-1} \in H$. Donde $p^{h_1}$ é um passeio de $u^{h_1}$ a $v^{h_2}$ e assim o quiver $\widetilde{\Gamma}$ é conexo.

Segue também da construção de $\widetilde{\Gamma}$ que se $v^h$ é um vértice em $\widetilde{\Gamma}$ e $p$ é um passeio qualquer em $\Gamma$ com origem em $v$ então existe um único caminho com origem em $v^h$ tal que $F(p^h) = p$.

Dessas considerações segue que $F : \widetilde{\Gamma} \mapsto \Gamma$ é um recobrimento.

Como $I$ é um ideal homogêneo com respeito a $W$, na verdade para mostrarmos que $F$ é um recobrimento de Galois falta apenas verificarmos que dado $v^h \in \widetilde{\Gamma}$, $F_*(\pi_1(\widetilde{\Gamma}, v^h)$ é um subgrupo normal de $\pi_1(\Gamma, v)$. Mas isso decorre do fato de que se $p$ é um passeio fechado em $\Gamma$, então cada levantamento é fechado se e somente se $W(p) = e$. ∎

Nosso próximo resultado mostra uma relação entre recobrimento de Galois e derivação fundamental.

**Teorema 10** *Seja $D$ uma derivação normalizada diagonalizável de $Der(\Lambda)$ dada por um peso $W$, ou seja, existe uma apresentação de $\Lambda$ tal que $D(\alpha) = W(\alpha)\,\alpha$ para todo $\alpha \in \Gamma_1$. A derivação $D$ é fundamental se e somente $W$ é semi-conexo.*

**Prova.**
($\Leftarrow$) Como $W$ é o peso associado a $D$ segue que $D(\alpha) = W(\alpha)\alpha$ para todo $\alpha \in \Gamma_1$, ou seja, as classes de flechas são autovetores. Fixando um vértice $x$, como $W$ é semi-conexo, para qualquer outro vértice $y$ existe um passeio $p$ tal que $W(p) = e$. Segue do Teorema 8 que $D$ é fundamental.

($\Rightarrow$)Devemos mostrar que para todo $x, y \in \Gamma_0$ e para todo $h \in H$ existe um passeio $p$ de $x$ a $y$ tal que $W(p) = h$. Já que $D$ é fundamental fixando um vértice $v$ podemos escolher dados de parada digamos

$$\gamma = \{\gamma_{v,w} | w \in \Gamma_1\}$$

Como $h \in H$ existe um passeio $g = \alpha_1^{\epsilon(1)} \dots \alpha_t^{\epsilon(t)}$ tal que $\sum \epsilon(i) W(\alpha_i) = h$

Tome

$$p = \gamma_{v,y}\, \gamma_{v,t(g)}^{-1}\, g\, \gamma_{v,o(g)}\, \gamma_{v,x}^{-1}$$

Portanto $W(p) = W(g) = h$ donde concluímos que $W$ é semi-conexo. ∎

**Corolário 4.2** *Seja $D \in Der(\Lambda)$ uma derivação fundamental não nula associada a apresentação $\Lambda = \frac{k\Gamma}{I}$ então para todo $x \in \Gamma_0$ existe $\gamma_{x,x} = \alpha_1^{\epsilon(1)} \dots \alpha_t^{\epsilon(t)}$ tal que:*

$$\sum \epsilon(i) W(\alpha_i) \neq e.$$

**Corolário 4.3** *Seja $D$ uma derivação diagonalizável de $Der(\Lambda)$ dada por um peso. Utilizando as notações anteriores segue que $D$ é fundamental se e somente se $\widetilde{\Gamma}$ é conexo.*

A seguir veremos uma aplicação do corolário (4.3).

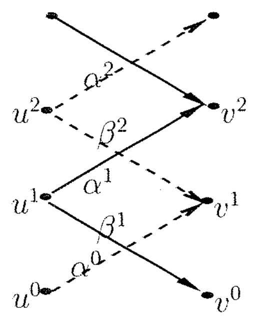
**Exemplo 4.2** *Sejam*

$$\Gamma : u \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} v$$

$\Lambda = k\Gamma$ *e* $D \in Der\Lambda$ *dada por* $D(\alpha) = \alpha$ *e* $D(\beta) = -\beta$.

*Como pode ser visto abaixo o quiver $\widetilde{\Gamma}$ é desconexo donde a derivação $D$ não é fundamental.*

$\widetilde{\Gamma}$ :




Na próxima proposição vemos uma condição natural para que uma derivação diagonalizável esteja associada a um peso.

**Proposição 4.1** *Seja $D$ uma derivação diagonalizável normalizada de $Der(\Lambda)$. As seguintes afirmações são equivalentes.*

1. *Existem um quiver $\Gamma$, um epimorfismo de álgebra $\pi : k\Gamma \longmapsto \Lambda$ e um peso $W : \Gamma_1 \mapsto H$ tais que $\pi(e)$ são os idempotentes de $\Lambda$ para todo $e \in \Gamma_0$ e $D(\pi(\omega)) = W(\omega)\pi(\omega)$ para todo $\omega \in \Gamma_1$;*

2. *$D(rad(\Lambda)) \subset rad(\Lambda)$.*

**Prova.** Demonstramos somente que $2 \Rightarrow 1$ pois a outra implicação é clara.

Como $D$ é diagonalizável podemos escrever $\Lambda = \Lambda_0 \amalg \Lambda_1$, onde $\Lambda_0$ é o autoespaço associado ao autovalor 0 e $\Lambda_1$ é a soma dos autoespaços associados aos autovalores não nulos.

**Afirmação** $\Lambda_1 \subset rad\Lambda$.

Seja $\alpha$ um autovetor associado a um autovalor $\lambda \neq 0$, ou seja, $D(\alpha) = \lambda\alpha$.

$\Lambda = E \amalg rad(\Lambda)$, logo $\alpha = \lambda_1 v + \omega$ onde $v \in E$, $\lambda \in k$ e $\omega \in rad(\Lambda)$,

$$D(\alpha) = D(\omega) = \lambda\alpha = \lambda\lambda_1 v + \lambda\omega.$$

Como $D(rad(\Lambda)) \subset rad(\Lambda)$ segue $\lambda_1 = 0$ e assim $\alpha \in rad(\Lambda)$. Isso prova a afirmação.

Seja $x \in rad(\Lambda)$ então $x = x_0 + x_1$ onde $x_0 \in \Lambda_0$ e $x_1 \in \Lambda_1$. Como $\Lambda_1 \subset rad\Lambda$ segue que $x_0 \in rad\Lambda$ e podemos fazer a restrição de $D$ a $rad(\Lambda)$ o qual denotaremos por $D|_{rad(\Lambda)}$ que é diagonalizável.

Seja $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_t\}$ uma base de autovetores de $D|_{rad(\Lambda)}$ (ou seja, $D(\alpha_i) = \lambda_i\alpha_i$ para todo $i \in \{1, \cdots, n\}$)

É claro que o conjunto $\{\overline{\alpha_1}, \ldots, \overline{\alpha_t}\}$ de classes módulo $rad^2\Lambda$ de $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_t\}$ é um conjunto gerador de $\frac{rad(\Lambda}{)}rad^2(\Lambda)$. Reordenando os elementos se necessário podemos supor que $\{\overline{\alpha_1}, \ldots, \overline{\alpha_l}\}$ é uma base de $\frac{rad(\Lambda)}{rad^2(\Lambda)}$.

Logo existe um quiver $\Gamma$ e um epimorfismo $\pi : k\Gamma \longmapsto \Lambda$ tal que as imagens das flechas formam o conjunto $\{\overline{\alpha_1}, \ldots, \overline{\alpha_l}\}$ e daí decorre nossa proposição. ■

**Corolário 4.4** *Seja $D$ uma derivação diagonalizável normalizada de $Der(\Lambda)$ com $car\, k = 0$ então $D$ está associada a um peso.*

**Prova.** Seja $\alpha$ um autovetor associado a um autovalor $\lambda \neq 0$, ou seja, $D(\alpha) = \lambda\,\alpha$. Logo $\alpha$ comuta com $D(\alpha)$ donde se conclui que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$D(\alpha^n) = n\alpha^{n-1}D(\alpha) = n\lambda\alpha^n$$

Logo $\alpha^n$ é autovetor associado a $n\lambda$. Observe que todos $n\lambda$ são distintos para distintos $n$. Como a álgebra é de dimensão finita e $car\, k = 0$ temos $\alpha^n = 0$ para algum $n$. Portanto $\alpha$ é nilpotente e assim $\alpha \in rad\Lambda$.

Assim provamos que $D(rad(\Lambda)) \subset rad(\Lambda)$, segue da proposição 4.1 nossa afirmação.

■

Vemos no próximo exemplo que o corolário 4.4 não é válido se o corpo $k$ tem característica positiva.

**Exemplo 4.3** *Seja* $\Lambda = \frac{k[x]}{(x^2)}$, *com* $car\, k = 2$, *e* $D(x) = x + 1$.

*Pode-se verificar que $D$ é uma derivação normalizada diagonalizável porém não está associada a um peso já que $D(rad(\Lambda))$ não está contido em $rad(\Lambda)$.*

## 4.3 Estrutura de Lie do espaço das Derivações Fundamentais

O próximo lema é essencial para mostrarmos que no caso de $car\, k = 0$ o espaço vetorial $SF(\Lambda)$ é um ideal de Lie de $Der(\Lambda)$.

**Lema 4.2** *[5] Seja $\Lambda$ uma $k$-álgebra de dimensão finita tal que $car\, k = 0$. Se $D$ e $E \in Der\Lambda$ satisfaz $[D, E] = \mu E$ para um escalar não nulo $\mu$ e $E$ é nilpotente então*

$$\exp(\frac{1}{\mu}E)^{-1} D \exp(\frac{1}{\mu}E) = D + E.$$

**Prova.** Pela fórmula de Leibnitz

$$\sum_{j=0}^{i-1} E^j\, [D, E]\, E^{i-j-1} = [D,\, E^i].$$

Como $[D, E] = \mu\, E$ segue que cada parcela à esquerda da igualdade acima é igual a $\mu\, E$, donde $[D, E^i] = i\, \mu E^i$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

Seja $f(X) = \lambda_0 + \lambda_1 X + \cdots + \lambda_n X^n$ um polinômio qualquer de $k[X]$. Utilizando o parágrafo anterior segue que

$$[D, f(\frac{1}{\mu}E)] = \sum_{i=0}^{n} \frac{\lambda_i}{\mu^i}[D, E^i] = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\mu^{i-1}} E^i = f'(\frac{1}{\mu}E)E$$

A nilpotência de $E$ implica que $exp(E)$ pode ser visto como um polinômio, logo

$$[D, exp(\frac{1}{\mu}E)] = exp(\frac{1}{\mu}E)E$$

isto é $D\, exp(\frac{1}{\mu}E) - exp(\frac{1}{\mu}E)D = exp(\frac{1}{\mu}E)E$. Como $exp(\frac{1}{\mu}E)$ é inversível podemos concluir que

$$\exp(\frac{1}{\mu}E)^{-1} D \exp(\frac{1}{\mu}E) = D + E$$

■

**Teorema 11** *Seja $\Lambda$ uma $k$-álgebra de dimensão finita tal que a característica de $k$ seja zero. Então $SF(\Lambda)$ é um ideal de Lie de $Der\Lambda$.*

**Prova.** Basta provarmos que se $D$ é uma derivação fundamental então $[D, E] \in SF(\Lambda)$ para todo $E \in Der\Lambda$.

Como $D$ é uma derivação diagonalizável segue que $ad\, D$ também é diagonalizável. Assim podemos escrever $E = \sum_\mu E(\mu)$ onde $E(\mu)$ é autovetor para $adD$ correspondendo ao autovalor $\mu$. Então

$$[D, E] = \sum_\mu \mu E(\mu).$$

Vejamos que $E(\mu)$ é nilpotente se $\mu \neq 0$. Seja $\alpha \in rad\Lambda$, como $\Lambda$ é uma álgebra de dimensão finita podemos tomar $n \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha^n = 0$ e $\alpha^{n-1} \neq 0$.

Se $E(\mu)(\alpha) = 1$ então $E(\mu)(\alpha^n) = n\alpha^{n-1} = 0$ o que é uma contradição.

Assim se $\alpha \in rad\,\Lambda$ segue que $E(\mu)^n(\alpha) \in rad^n\,\Lambda$. Portanto $E(\mu)$ é nilpotente já que $\Lambda$ é uma álgebra de dimensão finita.

Aplicando o lema anterior concluímos que $D + E(\mu) = P^{-1}\,D\,P$ onde

$$P = \exp(\frac{1}{\mu}E(\mu)).$$

Seja $\alpha$ um autovetor de $D$ associado ao autovalor $\lambda_\alpha$ segue que

$$P^{-1}D\,P(P^{-1}\alpha) = P^{-1}D(\alpha) = \lambda_\alpha P^{-1}(\alpha).$$

Logo $P^{-1}(\alpha)$ é autovetor de $P^{-1}DP$ associado também ao autovalor $\lambda_\alpha$.

Nosso próximo passo é mostrar que $D + E(\mu)$ é fundamental para todo $\mu \neq 0$. Pois se tal afirmação for correta teremos

$$\mu E(\mu) = \mu(\,(D + E(\mu)) - D) \in SF(\Lambda).$$

Donde $[D, E] = \sum_\mu \mu\, E(\mu) \in SF(\Lambda)$, ou seja, $SF(\Lambda)$ é um ideal de Lie de $Der\Lambda$.

Mostremos que $D + E(\mu)$ é fundamental para todo $\mu \neq 0$. Como já dissemos segue do fato de $D$ ser fundamental que existe uma apresentação $(\Gamma, I)$ de $\Lambda$ tal que dado um vértice $x$ para qualquer outro vértices $y$ existe um passeio

$$\gamma_{x\,y} : \alpha_1^{\varepsilon(1)} \ldots \alpha_t^{\varepsilon(t)} \text{ tal que}$$
$$\sum_j \varepsilon(j) W(\alpha_j) = e \tag{4.1}$$

Definamos $I^\star = \{P^{-1}(r) \,:\, r \in I\}$ e $\Gamma^\star = (\Gamma_0^\star, \Gamma_1^\star)$ onde
$\Gamma_0^\star = \{P^{-1}(v) : v \in \Gamma_0\}$ e
$\Gamma_1^\star = \{P^{-1}(\alpha) \,:\, \alpha \in \Gamma_1\}$.
Segue da definição de $P$ que $\frac{k\Gamma}{I} \simeq \frac{k\Gamma^\star}{I^\star}$.

Tomando a apresentação $(\Gamma^\star, I^\star)$ vamos fixar o vértice $x^* \in \Gamma_0^*$ e tomando um outro vértice $y^*$ temos que existe $x, y \in \Gamma_0$ tal que $P^{-1}(x) = x^*$ e $P^{-1}(y) = y^*$. Segue de (4.1) que existe o passeio

$$P^{-1}(\gamma_{xy}) = P^{-1}(\alpha_1)^{\varepsilon(1)} \dots P^{-1}(\alpha_t)^{\varepsilon(t)}$$

de $x^*$ a $y^*$ tal que

$$\sum_j \varepsilon(j) W(P^{-1}(\alpha_j)) = \sum_j \varepsilon(j) W(\alpha_j) = e.$$

Assim a derivação $D+E(\mu)$ é fundamental para todo $\mu \neq 0$. Portanto $SF(\Lambda)$ é um ideal de $Der(\Lambda)$. ∎

**Observação 4.3** *Como já dissemos o espaço vetorial gerado pelas derivações diagonalizáveis de* $Der\Lambda$ *chamado de* $SPDer\Lambda$ *é um ideal de Lie de* $Der\Lambda$ *no caso de* $k$ *ter característica zero ou ser algebricamente fechado de característica prima. A pergunta natural que surge então é : O espaço vetorial* $SF(\Lambda)$ *é um ideal de Lie de* $Der(\Lambda)$ *se a característica do corpo é positiva ? Isso não é verdade damos o exemplo abaixo.*

**Exemplo 4.4** *Seja* $\Lambda = \frac{k[x]}{\langle x^2 \rangle}$, *onde característica do corpo* $k$ *é dois.*

*Tome* $D$ *e* $E \in Der(\Lambda)$ *definidas por*

$D(x) = x$ *e* $E(x) = 1$

*A derivação* $D$ *é fundamental e* $[D, E](x) = 1$.

*Portanto* $[D, E]$ *não é uma derivação fundamental já que não leva* $rad(\Lambda)$ *em* $rad(\Lambda)$.

## 4.4 Derivação fundamental de álgebra monomial

Lembremos que o conjunto das derivações internas é um ideal de Lie de $Der(\Lambda)$. Vamos denotar por $SF(\Lambda)$ o espaço vetorial gerado pelas derivações internas e fundamentais.

No próximo resultado mostramos que se $D$ é uma derivação normalizada de $Der(\Lambda)$ associada a um peso então $D \in \overline{SF(\Lambda)}$.

**Teorema 12** *Seja $\Lambda = \frac{k\Gamma}{I}$ uma $k$-álgebra monomial de dimensão finita e $D$ uma derivação que se anula nas imagens de vértices e tal que as imagens de flechas são autovetores então $D \in \overline{SF(\Lambda)}$*

**Prova.** Por hipótese $D(\alpha) = \lambda_\alpha \alpha$ para todo $\alpha \in \Gamma_1$ e $\lambda_\alpha \in k$. Como $\Lambda$ é monomial $\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}$ é um elemento de $Der\Lambda$ para todo $\alpha \in \Gamma_1$. Segue que

$$D = \sum_{\alpha\in\Gamma_1} \lambda_\alpha \alpha \frac{\partial}{\partial\alpha}.$$

Mostremos que $\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}$ é uma derivação fundamental ou interna para todo elemento de $\Gamma_1$.

1. $\alpha$ pertence a um circuito (não necessariamente orientado)

    (a) $\alpha$ é um laço
    Suponhamos que $\alpha$ comece e termine no vértice $v$. Dado qualquer outro vértice $x$ diferente de $v$ é sempre possível conseguir um passeio $\varepsilon$ de $v$ a $x$ tal que não passe por $\alpha$ ou $\alpha^{-1}$ e assim $\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}(\varepsilon) = 0$. Se tomarmos o passeio $\alpha\alpha^{-1}$ do vértice $x$ ao vértice $x$ o peso deste passeio também é nulo, segue do teorema 8 que nesse caso $\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}$ é uma derivação fundamental.

    (b) Suponhamos que $\alpha$ não é um laço e que $\alpha$ faça parte do circuito

    $$v_1 \xrightarrow{\alpha} v_2 \xrightarrow{\alpha_2} \cdots \longrightarrow v_t \xrightarrow{\alpha_t} v_1$$

    Fixemos o vértice $v_1$, o passeio $\gamma_{v_1v_i} = \alpha_t^{-1}\cdots\alpha_i^{-1}$ é tal que $\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}(\gamma_{v_1v_i}) = 0$ para todo $i \in \{2,\cdots,t\}$.
    Dado um vértice $x$ tal que $x \notin \{v_1,\cdots,v_t\}$ também é sempre possível conseguir um passeio $\varepsilon$ de $v_1$ a $x$ tal que não passe por $\alpha$ e assim $\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}(\varepsilon) = 0$. Segue do teorema 8 que $\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}$ é fundamental.

2. $\alpha$ não pertence a um circuito.
    Defina o seguinte conjunto

    $\Gamma_{o(\alpha)} = \{v \in \Gamma_0 :$ existe um passeio ligando $v$ a $o(\alpha)$ sem passar por $\alpha\}$.

    $\Gamma_{o(\alpha)}$ é um subquiver pleno de $\Gamma$.

Seja $[\sum_{v\in\Gamma_{o(\alpha)}} v, -]$

Se $\beta$ é uma flecha que começa no vértice $v_1$ e termina no vértice $v_2$ com $v_1 \neq v_2$ e ambos são diferentes de $o(\alpha)$ então

$[\sum_{v\in\Gamma_{o(\alpha)}} v, \beta] = [v_1 + v_2, \beta] = 0.$

Se $\beta$ é uma flecha que começa e termina no vértice $v_1$ então também temos

$[\sum_{v\in\Gamma_{o(\alpha)}} v, \beta] = [v_1, \beta] = 0.$

Por último $[\sum_{v\in\Gamma_{o(\alpha)}} v,\ \alpha] = [o(\alpha),\ \alpha] = \alpha.$

Assim $[\sum_{v\in\Gamma_{o(\alpha)}} v, -] = \alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}$ pois coincidem nos vértices e nas flechas. Segue que neste caso $\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}$ é uma derivação interna.

Portanto em qualquer caso $\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}$ é uma derivação fundamental ou interna para todo elemento de $\Gamma_1$.

■

Daqui para frente $k$ sempre denotará um corpo de característica zero. Seja $\Lambda$ uma álgebra positivamente graduada de dimensão finita tal que

$$\Lambda = \Lambda_0 \amalg \Lambda_1 \amalg \cdots \amalg \Lambda_t$$

com $\Lambda_0 = ke_1 \amalg \cdots \amalg ke_n$ com $e_j$ sendo idempotente ortogonal para todo $j \in \{1, \cdots, n\}$ e $\Lambda$ gerado como álgebra por $\Lambda_0$ e $\Lambda_1$.

Denotamos por $\mathcal{W}$ a álgebra de Lie das derivações de $\Lambda$ que se anulam sobre $\Lambda_0$.

A derivação de Euler associada com a graduação é definida por

$$E(x) = mx \text{ para todo } x \in \Lambda_m.$$

Como $E$ é diagonalizável segue que $ad\,E$ também é diagonalizável, isto é , existe uma base de derivações $D_1, \cdots, D_t$ de $Der(\Lambda)$ tal que $[E, D_i] = \mu_i\, D_i$ com $\mu_i \in k$ para todo $i \in \{1, \cdots, t\}$. O conjunto $\mathcal{W}_\lambda$ será o autoespaço para $ad\,E$ correspondendo ao autovalor $\lambda$.

**Lema 4.3** *Com as notações anteriores temos*

$$\mathcal{W} = \mathcal{W}_{-1} \amalg \mathcal{W}_0 \amalg \cdots \amalg \mathcal{W}_{t-1}$$

*com* $\mathcal{W}_i(\Lambda_j) \subset \Lambda_{i+j}$ *e* $[\mathcal{W}_i, \mathcal{W}_j] \subset \mathcal{W}_{i+j}$

**Prova.** Seja $x \in \Lambda_m$ e $D \in \mathcal{W}_\lambda$ então:

$$ED(x) = [E, D](x) + DE(x) = (\lambda + m)D(x) \tag{4.2}$$

Por hipótese um elemento de $\Lambda$ tem grau no mínimo 0 e no máximo $t$ donde $D(x)$ é uma combinação $k$-linear de elementos de grau no mínimo $m-1$ e no máximo $m+t-1$. Segue dessa consideração e de (4.2) que

$$\mathcal{W} = \mathcal{W}_{-1} \amalg \mathcal{W}_0 \amalg \cdots \amalg \mathcal{W}_{t-1}.$$

Para mostrarmos que $\mathcal{W}_i(\Lambda_j) \subset \Lambda_{i+j}$ basta usarmos (4.2).

Agora vamos mostrar a última afirmação. Sejam $D_i \in \mathcal{W}_i$ e $D_j \in \mathcal{W}_j$ aplicando a identidade de Jacobi obtemos

$$[E, [D_i, D_j]] = -[D_i, [D_j, E] - [D_j, [E, D_i]] = (\lambda_i + \lambda_j)[D_i, D_j]$$

E assim temos o lema demonstrado ∎

**Lema 4.4** *[5] Com as notações anteriores $\mathcal{W}_{-1} = 0$.*

**Prova.** Como $1 = e_1 + \cdots + e_n$ temos $\Lambda_1 = \sum_{i,j} e_i \Lambda e_j$. Logo basta mostrarmos que $D(x) = 0$ para $D \in \mathcal{W}_{-1}$ e $0 \neq x \in e_i \Lambda_1 e_j$.

Por hipótese $D$ se anula sobre os idempotentes disto segue que

$$D(x) = D(e_i x e_j) = e_i D(x) e_j \tag{4.3}$$

Seja $x \in \Lambda_1$, como $D \in \mathcal{W}_{-1}$ temos $D(x) \in \Lambda_0$. Desse fato e de (4.3) segue que se $i \neq j$ então $D(x) = 0$.

Agora basta verificarmos o caso $i = j$. Nesse caso $D(x) = ke_i$ e $x = e_i x e_i$. Assim os elementos $D(x)$ e $x$ comutam. Como a álgebra é de dimensão finita segue que existe um inteiro $m$ tal que $x^m = 0$ e $x^{m-1} \neq 0$ e assim

$$0 = D(x^m) = m\, x^{m-1}\, D(x)$$

Donde $D(x) = 0$ já que $car\, k = 0$. Como $\Lambda_1$ gera $\Lambda$ podemos concluir que $D = 0$. ∎

Vamos considerar daqui para frente $\Lambda = \frac{k\Gamma}{I}$, onde a graduação de $\Lambda$ é a induzida de $k\Gamma$ dada pelo comprimento dos caminhos.

**Lema 4.5** *Seja $D \in \mathcal{W}$ fundamental. Se $D = A + B$ com $A \in \mathcal{W}_0$ e $B \in \sum_{j \geq 1} \mathcal{W}_j$ então $A$ é fundamental.*

**Prova.** Como $D$ é fundamental existe uma apresentação $(\Gamma, I)$ de $\Lambda$ tal que $D(\alpha) = \lambda_\alpha \alpha$ para todo $\alpha \in \Gamma_1$ onde $\lambda_\alpha \in k$. Logo $A(\alpha) = \lambda_\alpha \alpha$ para todo $\alpha \in \Gamma_1$ já que $D = A + B$ e $B \in \sum_{j \geq 1} \mathcal{W}_j$.

Assim o peso associado a derivação $D$ é o mesmo associado a derivação $A$. Segue do Teorema 8 que $A$ é fundamental. ■

**Notação 4.1** *Seja $\mathcal{M}$ um subconjunto de $Der(\Lambda)$. Denotamos por $\overline{SF(\mathcal{M})}$ o espaço vetorial gerado pelas derivações internas e fundamentais de $\mathcal{M}$.*

**Lema 4.6** *Usando as notações anteriores segue que*

$$\overline{SF(\mathcal{W})} = \overline{SF(\mathcal{W}_0)} \amalg \mathcal{W}_1 \amalg \cdots \amalg \mathcal{W}_{t-1}$$

**Prova.** Seja $D \in \mathcal{W}_j$ com $j \neq 0$. Como a derivação de Euler $E$ é igual a $\sum_{\alpha \in \Gamma_1} \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha}$ segue do Teorema 12 que $E \in \overline{SF(\mathcal{W})}$.

Aplicando o Teorema 11 e o fato de $Inn(\Lambda)$ ser um ideal de Lie de $\mathcal{W}$ temos que $\frac{1}{j}[E, D] = D \in \overline{SF(\mathcal{W})}$.

Falta então mostrarmos que $\overline{SF(\mathcal{W})} \bigcap \mathcal{W}_0 \subset \overline{SF(\mathcal{W}_0)}$ já que a outra inclusão decorre do fato de que se uma derivação é fundamental ou interna sobre $\Lambda_1$ então será fundamental ou interna respectivamente quando estendida a $\Lambda$.

Seja $B \in \mathcal{W}_0 \bigcap \overline{SF(\mathcal{W})}$ então $B = \sum_i (A_i + D_i)$ com $A_i + D_i$ sendo uma derivação fundamental ou interna em $\mathcal{W}$ para todo $i$ com $A_i \in \mathcal{W}_0$ e $D_i \in \sum_{j \geq 1} \mathcal{W}_j$ donde

$$B = \sum_i A_i$$

Se $A_i + D_i$ é fundamental segue do teorema anterior que $A_i$ é fundamental.

Se $A_i + D_i$ é interna então existe $s = s_0 + s_1 + \cdots + s_n \in \Lambda$ com $s_i \in \Lambda_i$, para todo $i \in \{1, \cdots, n\}$ tal que

$$(A_i + D_i)(x) = xs - sx, \quad \text{para todo } x \in \Lambda$$

Seja $x \in \Lambda_j$ então

$$(A_i + D_i)(x) = (xs_0 - s_0x) + (xs_1 - s_1x) + \cdots + (xs_n - s_nx)$$

Como $\mathcal{W}_0(\Lambda_j) \subset \Lambda_j$ temos $A_i(x) = xs_0 - s_0x$. Assim se $A_i + D_i$ é interna segue que $A_i$ é interna.

Podemos então concluir que $\overline{SF(\mathcal{W}_0)} = \overline{SF(\mathcal{W})} \bigcap \mathcal{W}_0$. Portanto temos o lema demonstrado. ■

**Lema 4.7** *[5] Seja $\frac{k\Gamma}{I}$ uma álgebra monomial de dimensão finita. Então o conjunto $\{\beta\frac{\partial}{\partial\alpha} : \alpha,\ \beta \in \Gamma_1$ e $\beta\frac{\partial}{\partial\alpha}(I) \subset I\}$ gera $\mathcal{W}_0$ como espaço vetorial.*

**Prova.** Suponhamos que $\Gamma_1 = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$. Seja $D \in \mathcal{W}_0$, como $\mathcal{W}_i(\Lambda_j) \subset \Lambda_{i+j}$ segue que $D(\alpha_i) = \sum_j \lambda_{i,j}\alpha_{i,j}$ com $\alpha_{i,j} \in \Gamma_1$, donde podemos denotar a derivação $D$ da seguinte forma

$$D = \sum_{i,j} \lambda_{i,j}\ \alpha_{i,j}\frac{\partial}{\partial\alpha_i}.$$

Agora devemos mostrar que se $\beta\frac{\partial}{\partial\alpha}$ é uma parcela da derivação $D$ de $\mathcal{W}_0$ então $\beta\frac{\partial}{\partial\alpha}(I) \subset I$.

Seja $\omega \in I$, se $\alpha = \beta$ então $\beta\frac{\partial}{\partial\alpha}(\omega)$ é zero ou é um múltiplo de $\omega$ e assim $\beta\frac{\partial}{\partial\alpha}(\omega) \in I$. Então basta mostrarmos para o caso $\alpha \neq \beta$.

Se $\beta\frac{\partial}{\partial\alpha}(\omega) \neq 0$, como $I$ é monomial, existe alguma parcela de $\beta\frac{\partial}{\partial\alpha}(\omega)$ igual a alguma parcela de $\varepsilon\frac{\partial}{\partial\gamma}(\omega)$, onde a derivação $\varepsilon\frac{\partial}{\partial\gamma}$ é uma parcela de $D$, ou seja,

se $\omega = \omega_1 \cdots \omega_n$ então existe $i, j \in \{1, \cdots, n\}$ com $w_i = \alpha$ e $w_j = \gamma$ tal que

$$\omega_1 \cdots \omega_{i-1}\,\beta\,\omega_{i+1} \cdots \omega_{j-1}\,\gamma\,\omega_{j+1} \cdots \omega_n = \omega_1 \cdots \omega_{i-1}\,\alpha\,\omega_{i+1} \cdots \omega_{j-1}\,\varepsilon\,\omega_{j+1} \cdots \omega_n \quad (4.4)$$

onde o lado esquerdo da igualdade é uma parcela de $\beta\frac{\partial}{\partial\alpha}$ e o lado direito é uma parcela de $\varepsilon\frac{\partial}{\partial\gamma}$.

Como $\alpha \neq \beta$ e $I$ é monomial segue que $i = j$ e assim $\alpha = \gamma$. Voltando a (4.4) segue que

$$\omega_1 \cdots \omega_{i-1}\,\beta\,\omega_{i+1} \cdots \omega_n = \omega_1 \cdots \omega_{i-1}\varepsilon\,\omega_{i+1} \cdots \omega_n$$

Outra vez pelo fato de $I$ ser monomial segue que $\beta = \varepsilon$.

Logo todas as parcelas de $D$ se anulam nos elementos de $I$. Portanto $\{\beta\frac{\partial}{\partial\alpha} : \alpha,\ \beta \in \Gamma_1$ e $\beta\frac{\partial}{\partial\alpha}(I) \subset I\}$ gera $\mathcal{W}_0$ ■

Agora estamos em condições de provar o seguinte Teorema.

**Teorema 13** *Seja $\frac{k\Gamma}{I}$ uma álgebra monomial de dimensão finita com car $k = 0$. Então $\overline{SF(\mathcal{W})} = \mathcal{W}$*

**Prova.** Utilizando o Lema 4.6 para mostrarmos nossa afirmação basta verificarmos que $\overline{SF(\mathcal{W}_0)} = \mathcal{W}_0$.

As derivações da forma $\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha} \in \mathcal{W}_0$, para todo $\alpha \in \Gamma_1$, já que dado $\omega \in I$, $\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}(\omega)$ ou é zero ou é um múltiplo de $\omega$. Por esse motivo e pelo Lema 4.7 $\mathcal{W}_0$ é gerado por todas as derivações da forma $\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}$ e algumas derivações da forma $\beta\frac{\partial}{\partial\alpha}$:

Segue do Teorema 12 que $\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha} \in \overline{SF(\mathcal{W}_0)}$ para todo $\alpha \in \Gamma_1$. Desse fato, do Teorema 11 e de que $Inn(\Lambda)$ é um ideal de Lie de $Der(\Lambda)$ temos

$$[\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}, \beta\frac{\partial}{\partial\alpha}] = \beta\frac{\partial}{\partial\alpha} \in \overline{SF(\mathcal{W})}$$

Portanto $\overline{SF(\mathcal{W})} = \mathcal{W}$ ■

## 4.5 Derivação Integrável

Seja $\Lambda$ uma $k$-álgebra associativa de dimensão finita ($\Lambda \simeq \frac{k\Gamma}{I}$). No artigo [6] Farkas, Geiss e Marcos mostraram que o grupo do esquema de automorfismos é liso se e somente se toda derivação de $\Lambda$ é integrável. Além disso deram uma condição suficiente para que uma derivação diagonalizável seja integrável. Esse fato e alguns outros que aparecem nesse artigo nos levaram a questionar se toda derivação fundamental é integrável. Nosso objetivo nessa seção é responder negativamente essa pergunta exibindo um contra-exemplo. Antes disso vamos enunciar algumas definições que aparecem em [6].

**Definição 4.4** *Dizemos que $D \in Der(\Lambda)$ é integrável se existe uma sequência de endomorfismos lineares de $\Lambda$ digamos $D^{(0)} = I$, $D^{(1)}$, $D^{(2)}, \cdots$ com*

$$D^{(n)}(a\,b) = \sum_{i+j=n} D^{(i)}(a)D^{(j)}(b)$$

*para todo $a, b \in \Lambda$ e $n \geq 0$ tal que $D^{(1)} = D$.*

**Definição 4.5** *Uma aplicação de $k$-álgebra $\delta : \Lambda \mapsto \Lambda[[t]]$ é uma derivação de ordem superior de $\Lambda$ se para todo $x \in \Lambda$, o termo constante da série de potências $\delta(x)$, é simplesmente $x$.*

**Observação 4.4**

1. *As derivações de ordem superior de $\Lambda$ estão em correspondência biunívoca com os $k[[t]]$-automorfismos de $\Lambda[[t]]$ que preservam o termo constante;*

2. *Podemos definir derivação de ordem superior como uma seqüência de endomorfismos lineares de* $\Lambda$ *digamos* $D^{(0)} = I$, $D^{(1)}$, $D^{(2)}, \cdots$ *tal que*

$$D^{(n)}(a\,b) = \sum_{i+j=n} D^{(i)}(a)D^{(j)}(b)$$

*para todo* $a, b \in \Lambda$ *e* $n \geq 0$;

Pode-se mostrar que o termo $D^{(1)}$ de uma derivação de ordem superior é sempre uma derivação. Dizemos que uma derivação $D \in Der(\Lambda)$ é integrável se existe uma derivação de ordem superior $D^{(0)} = I$, $D^{(1)}$, $D^{(2)}, \cdots$ tal que $D^{(1)} = D$.

**Proposição 4.2** *Seja* $D$ *uma derivação normalizada integrável então* $D^{(n)}(v) = v\,D^{(n)}(v)\,v$ *para todo* $v \in \Gamma_0$ *e* $n \geq 1$.

**Prova.** Vamos mostrar a proposição utilizando indução finita sobre $n$.

Se $n = 2$ e $v \in \Gamma_0$ temos

$$D^{(2)}(v) = D^{(2)}(v^2) = v\,D^{(2)}(v) + D(v)\,D(v) + D^{(2)}(v).$$

Como $D(v) = 0$ para todo $v \in \Gamma_0$ pois $D$ é normalizada temos

$$D^{(2)}(v) = v\,D^{(n)}(v)\,v.$$

Suponhamos que $D^{(n)}(v) = v\,D^{(n)}(v)\,v$ para $n \leq m-1$. Vejamos o que ocorre com $D^{(m)}(v)$ se é não nulo.

$$D^{(m)}(v) = D^{(m)}(v^2) = v\,D^{(m)}(v) + D^{(m)}(v)\,v + \sum_{\substack{i+j=m \\ i,j>0}} D^{(i)}(v)D^{(j)}(v) \tag{4.5}$$

Por hipótese de indução $\sum_{\substack{i+j=m \\ i,j>0}} D^{(i)}(v)D^{(j)}(v)$ começa e termina em $v$. Decorre da equação 4.5 nossa afirmação. ∎

**Proposição 4.3** *Seja* $D$ *uma derivação normalizada integrável então para todo* $v \in \Gamma_0$ *e* $n > 0$ *temos* $D^{(n)}(v) = 0$ .

**Prova.** Por hipótese existe uma sequência de endomorfismos lineares $D^{(0)} = I$, $D^{(1)}$, $D^{(2)}, \cdots$ tal que $D^{(1)} = D$.

Suponhamos que $n$ seja o menor inteiro tal que $D^{(n)}(v) \neq 0$. Temos

$$(v + D^{(n)}(v)t^n + \cdots)^2 = v + D^{(n)}(v)t^n + \cdots$$

Logo $v\,D^{(n)}(v) + D^{(n)}(v)\,v = D^{(n)}(v)$, mas pela proposição 4.2 segue que $2\,D^{(n)}(v) = D^{(n)}(v)$. Portanto $D^{(n)}(v) = 0$ para todo $n \geq 1$ ∎

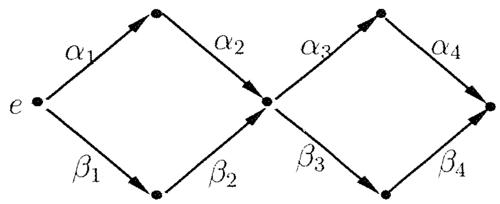
**Proposição 4.4** *Seja $D$ uma derivação normalizada integrável então $D^{(n)}(x) = t(x)\,D^{(n)}(x)\,o(x)$ para todo caminho não nulo $x$ com $n \geq 1$.*

**Prova.** Aplicando a proposição 4.3 obtemos

$$\begin{aligned} D^{(n)}(x) &= D^{(n)}(t(x)\,x\,o(x)) = \textstyle\sum_{i+j=n} D^{(i)}(t(x))\,D^{(j)}(x\,o(x)) = t(x)\,D^{(n)}(x\,o(x)) \\ &= t(x)\,\textstyle\sum_{i+j=n} D^{(i)}(x)\,D^{(j)}(o(x)) = t(x)\,D^{(n)}(x)\,o(x) \end{aligned}$$

Assim temos $D^{(n)}(x) = t(x)\,D^{(n)}(x)\,o(x)$ para todo caminho não nulo $x$ com $n \geq 1$ ■

Vamos voltar ao exemplo 4.1, seja $\Lambda = \frac{k\Gamma}{I}$ com $car\,k = 2$, onde $\Gamma$ é o quiver




e $I$ é o ideal gerado por $R = \{\alpha_4\alpha_3\alpha_2\alpha_1 - \beta_4\beta_3\beta_2\beta_1, \beta_4\beta_3\alpha_2\alpha_1 - \alpha_4\alpha_3\beta_2\beta_1\}$.

Já observamos que $D = \beta_2 \frac{\partial}{\partial\beta_2} + \beta_3 \frac{\partial}{\partial\beta_3}$ é uma derivação fundamental de $Der(\Lambda)$. Suponhamos que $D$ seja uma derivação integrável então em particular existe $D^{(2)}$ e esse endomorfismo linear é tal que

$$\begin{cases} D^{(2)}(\alpha_4\alpha_3\alpha_2\alpha_1) = D^{(2)}(\beta_4\beta_3\beta_2\beta_1) \quad \text{e} \\ \\ D^{(2)}(\beta_4\beta_3\alpha_2\alpha_1) = D^{(2)}(\alpha_4\alpha_3\beta_2\beta_1) \end{cases} \tag{4.6}$$

Utilizando a definição de $D^{(2)}$ segue que

$$\begin{cases} D^{(2)}(\alpha_4\alpha_3\alpha_2\alpha_1) = & D^{(2)}(\alpha_4)\,\alpha_3\alpha_2\alpha_1 + \alpha_4\,D^{(2)}(\alpha_3)\,\alpha_2\alpha_1 + \alpha_4\alpha_3\,D^{(2)}(\alpha_2)\,\alpha_1 + \\ & \alpha_4\alpha_3\alpha_2\,D^{(2)}(\alpha_1) \\ \\ D^{(2)}(\beta_4\beta_3\beta_2\beta_1) = & D^{(2)}(\beta_4)\,\beta_3\beta_2\beta_1 + \beta_4\,D^{(2)}(\beta_3)\,\beta_2\beta_1 + \beta_4\beta_3\,D^{(2)}(\beta_2)\,\beta_1 + \\ & \beta_4\beta_3\beta_2\,D^{(2)}(\beta_1) + \beta_4\beta_3\beta_2\beta_1 \\ \\ D^{(2)}(\beta_4\beta_3\alpha_2\alpha_1) = & D^{(2)}(\beta_4)\,\beta_3\alpha_2\alpha_1 + \beta_4\,D^{(2)}(\beta_3)\,\alpha_2\alpha_1 + \beta_4\beta_3\,D^{(2)}(\alpha_2)\,\alpha_1 + \\ & \beta_4\beta_3\alpha_2\,D^{(2)}(\alpha_1) \\ \\ D^{(2)}(\alpha_4\alpha_3\beta_2\beta_1) = & D^{(2)}(\alpha_4)\,\alpha_3\beta_2\beta_1 + \alpha_4\,D^{(2)}(\alpha_3)\beta_2\beta_1 + \alpha_4\alpha_3\,D^{(2)}(\beta_2)\,\beta_1 + \\ & \alpha_4\alpha_3\beta_2\,D^{(2)}(\beta_1) \end{cases} \tag{4.7}$$

Aplicando outra vez a proposição 4.4 podemos supor que $D^{(2)}(\alpha_i) = a_i\alpha_i$ e $D^{(2)}(\beta_i) = b_i\beta_i$ para todo $i \in \{1, \cdots, 4\}$ e $a_i, b_i \in k$.

Obtemos o seguinte sistema de 4.6 e 4.7

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{4} a_i = \sum_{i=1}^{4} b_i + 1 \\ \sum_{i=1}^{4} a_i = \sum_{i=1}^{4} b_i \end{cases}$$

Como o sistema não tem solução segue que não existe $D^{(2)}$. Portanto $D$ é um exemplo de uma derivação fundamental que não é integrável.

# Referências Bibliográficas


[1] I. Assem and J. A. de la Peña. The fundamental groups of a triangular algebra. *Comm. in algebra*, 24(1):187–208, 1996.

[2] I. Assem, D. Simpson, and A. Skrowronski. Elementos of representation theory of associative algebras. *pre-print.*

[3] M. Auslander, I. Reiten and S. O. Smalø. Representation theory of Artin algebras . *Cambridge University Press*, 1995.

[4] Claude Cibils and Eduardo N. Marcos. Skew category, Galois covering and smash of category over a ring. *pre-print.*

[5] Daniel R. Farkas, Christof Geiss, Edward L. Green, and Eduardo N. Marcos. Diagonalizable derivations of finite-dimensional algebras I. *Israel Journal of Mathematics*, (117):157–181, 2000.

[6] Daniel R. Farkas,Christof Geiss, and Eduardo N. Marcos. Smooth Automorphism Group Schemes. *Lecture Notes in Pure and Appl. Math.*, (224):31–38,1999.

[7] Daniel R. Farkas, Edward L. Green, and Eduardo N. Marcos. Diagonalizable derivations of finite-dimensional algebras II. *Pacific journal of mathematics*, 196(2), 2000.

[8] M. Gerstenhaber. The cohomology struture associative ring. *Annals of Mathematics*, 78(2):267–288, 1963.

[9] M. Gerstenhaber. On the deformations of rings and algebras. *Annals of Mathematics*, 79(2):59–103, 1964.

[10] E. L. Green. Em noncommutative Gröbner bases and projectives resolutions. *In Michler and Schneider, eds, Proceedings of the Euroconference Computational Methods for Representations of Groups and Algebras*, 173:29–60, 1999.

[11] E. L. Green and D. Zacharia. The cohomology ring of a monomial algebra. *Manuscripta Mathematica*, 85:11–23, 1994.

[12] Edward L. Green. Graphs with relations, coverings and group-graded algebras. *Transactions of the American Mathematical society*, 279(1), 1983.

[13] E. L. Green. Multiplicative bases, Gröbner bases, and right Gröbner bases. *J. Symbolic Computation*, 29, 2000.

[14] D. Happel. Hochschild cohomology of finite dimensional algebras. *Springer Lecture Notes*, 1404:108–126, 1984.

[15] G. Hochschild. On the cohomology groups of an associative algebra. *Annals of Mathematics*, 46:58–67, 1946.

[16] J. E. Humphreys. *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*. GTM 9. Springer Verlag, 1980.

[17] S. Mac Lane. *Homology*. Springer-Verlag. 1963.

[18] A. T. T. Lopes. *Sobre o primeiro grupo de cohomologia de Hochschild de uma álgebra*. Tese IME-USP, 2002.

[19] Luíz A. B. San Martin. *Álgebras de Lie*. Editora da Unicamp, 1999.

[20] William S. Massey. Algebraic topology: an introduction. *Harcourt, Brace & World, New york*, 1967.

[21] H. Merklen and A. Jones. Representações de álgebras, métodos diagramáticos. *Publicações do IME-USP, SP.*

[22] C. Nastasescu and F. Van Oystaeyen. Graded Ring Theory. *Nort-Holland Publishing Company, 1982.*

[23] A. Skrowronski. Simply connected algebras and Hochschild cohomologies. *Canadian Math. Soc., Conference Proceedings*, 14:431–447, 1993.

[24] C. Strametz. The Lie algebra structure on the first Hochschild cohomology group of a monomial algebra. *Comptes Rendus Mathematique*, 9:733–738, 2002.

[25] C. A. Weibel An introduction to homological algebra. *Cambridge University Press*,1997.