Bases de Gelfand-Tsetlin para álgebras de Lie clássicas

Norberto de Jesús Tabárez Ramírez

DISSERTAÇÃO APRESENTADA AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
MESTRE EM CIÊNCIAS

Área de Concentração: Matemática
Orientador: Prof. Dr. Vyacheslav Futorny

Durante a elaboração deste trabalho o autor
recebeu apoio financeiro da CAPES e CNPq.

- São Paulo, Julho de 2007 -

Bases de Gelfand-Tsetlin para álgebras de Lie clássicas

Este exemplar corresponde à redação final da dissertacão devidamente corrigida e defendida por Norberto de Jesús Tabárez Ramírez e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, Julho de 2007

Comissão julgadora:

- Prof. Dr. Vyacheslav Futorny (orientador) IME - USP
- Prof. Dr. Luiz Antonio Peresi IME - USP
- Prof. Dr. Sergiy Ovsienko UNIV. KIEV

Dedico este trabalho a:

Fabiola e Eloisa minhas mães

Fernando e Mariluz meus irmãos

David a nova alegria da familia

as pessoas que amo

Agradecimentos

Agradeço primeiramente meu orientador, professor Vyacheslav Futorny, pela confiança, compreensão, dedicação, paciência e amizade, além da orientação que de uma maneira clara e objetiva sempre me direcionou por um bom desenvolvimento desse trabalho.

A toda minha familia pelo carinho, apoio e motivação, orgulhosos em todas as minhas escolhas e certamente são corresponsáveis pelas minhas conquistas.

A meus amigos Anderson, Cristina e Alexandre, que corrigiram alguns dos meus muitos erros de português.

A Oscar pela colaboração com os muitos comandos do Latex.

A "las muchachas" e em geral aos meus amigos da pos-graduação do IME pela convivência nestes três anos.

A todos os professores e funcionários do IME - USP que, direta ou indiretamente, tenham colaborado na realização deste trabalho.

Aos participantes da comissão jugadora, pelos valiosos aportes e sugestões.

Resumo

Neste Trabalho estudamos as representações das álgebras de Lie clássicas de dimensão finita sobre o corpo dos números complexos. Mais precisamente, estudamos as bases do tipo Gelfand-Tsetlin das álgebras de Lie clássicas de dimensão finita, para isto, usamos as álgebras de Mickelsson-Zhelobenko, o Yangian e suas aplicações.

Abstract

In this work we study the finite-dimensional representations of classical Lie algebras over the field of complex numbers. More exactly, we study the bases of the Gelfand-Tsetlin type of the finite-dimensional classical Lie algebras, for this, we use the Mickelsson-Zhelobenko algebras, the Yangian and its aplications.

Sumário

Introdução **3**

1 Álgebras de Lie complexas de dimensão finita **9**

1.1 Conceitos básicos 9

1.2 Representações e módulos 14

1.3 Representações de dimensão finita de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ 16

1.4 A álgebra envolvente universal $\mathbf{U}(\mathcal{G})$ de uma álgebra de Lie $\mathcal{G}$ 19

1.5 Pesos e vetores máximos 22

2 A teoria da álgebra de Mickelsson **28**

2.1 A álgebra $F(\mathcal{G})$ 28

2.2 Os elementos $p(t)$ e o projetor extremo 35

2.3 A álgebra de Mickelsson 46

3 Bases de Gelfand-Tsetlin para representações de $\mathcal{G}l_n$ **52**

3.1 Construção da base: "Lowering and raising operators" 60

3.2 A álgebra de Mickelsson - Zhelobenko $Z(\mathcal{G}l_n, \mathcal{G}l_{n-1})$ 63

4 Bases de peso para representações de $\mathfrak{o}_n$ e $\mathfrak{sp}_{2n}$ **74**

4.1 Raising and lowering operators 75

4.2 Regras de ramificação, padrões e vetores da base 79

4.3 Yangians e suas representações 85

4.4 Ação do Yangian sobre o espaço de multiplicidades 99

4.5 Cômputo dos elementos da matriz 104

5 Bases de Gelfand-Tsetlin para as representações de $\mathfrak{o}_N$ 108

5.1 Lowering operators para a redução $\mathfrak{o}_{2n+1} \downarrow \mathfrak{o}_{2n}$ 109

5.2 Lowering operators para a redução $\mathfrak{o}_{2n} \downarrow \mathfrak{o}_{2n-1}$ 111

5.3 Vetores da base 112

Introdução

A teoria das álgebras de Lie semi-simples e suas representações estão no coração da Matemática moderna. Ela tem numerosas conexões com outras áreas da Matemática e da Física. As álgebras de Lie simples sobre o corpo dos números complexos foram classificadas nos trabalhos de Cartan e Killing durante a década de 30 do século pasado. Existem quatro séries infinitas A_n, B_n, C_n, D_n as quais são chamadas de álgebras de Lie clássicas e cinco álgebras de Lie excepcionais E_6, E_7, E_8, F_4, G_2. A estrutura destas álgebras de Lie é descrita em termos de certos conjuntos finitos de vetores em um espaço euclidiano chamados de **sistemas de raízes**. Devido ao teorema da redutibilidade completa de Weyl, a teoria de representações de dimensão finita das álgebras de Lie semi-simples está reduzida ao estudo de representações irredutíveis. Os irredutíveis são parametrizados por seus **pesos máximos**. Os caracteres e dimensões são explicitamente conhecidos pela **fórmula de Weyl.** Mais detalhes da exposição da teoria podem ser encontrados nos livros de Dixmier [Di], Humphreys [Hu], entre outros.

Não obstante, a fórmula de Weyl para a dimensão não usa nenhuma construção explícita das representações. Tais construções permaneceram desconhecidas até 1950 quando Gelfand e Tsetlin[1] publicaram dois pequenos artigos [GT1] e [GT2] (em russo) onde eles solucionaram o problema para a álgebra de Lie linear geral (tipo A_n) e as álgebras de Lie ortogonais (tipos B_n e D_n), respectivamente.

Em 1963, Baird e Biedenharn [BB] usaram os cálculos dos **padrões de Young** para derivar as fórmulas de Gelfand-Tsetlin[2].

Um ano antes, em 1962, Zhelobenko publicou um trabalho independente [Zh1] onde derivou

[1] Alguns autores e tradutores escrevem seu nome em ingles como Zetlin, Tzetlin, Cetlin, ou Tseitlin.

[2] Uma indicação da demonstração das fórmulas de [GT1] está contida no pé da página no artigo de Gelfand e Graev (1965).

as **regras da ramificação** para todas as álgebras de Lie clássicas. Em sua abordagem, as representações são realizadas no espaço de polinômios satisfazendo o "sistema indicador" de equações diferenciais. Ele apresentou um método para construir os **lowering operators** e derivou as fórmulas dos elementos da matriz para o caso da álgebra de Lie linear geral $\mathcal{G}l_n$. Uma forma "infinitesimal" explícita para os *lowering operators* como elementos da álgebra envolvente foi encontrada por Nagel e Moshinsky [NM] em 1964 e independentemente por Hou Pei-yu [Hou] em 1966. Um trabalho posterior de Zhelobenko a partir dos resultados de [Zh1] e que também contém uma derivação das fórmulas de Gelfand-Tsetlin alternativa às de Baird e Biedenharn se encontra no seu livro [Zh2] o qual contém as contas detalhadas.

O trabalho de Nagel e Moshinsky foi estendido às álgebras de Lie ortogonais $\mathfrak{o}_n$ por Pang e Hecht [PH] e Wong [Wo], que produziram expressões infinitesimais explícitas para os *lowering operators* e deram uma derivação das fórmulas de Gelfand-Tsetlin [GT2].

Durante a metade do século passado desde o trabalho de Gelfand e Tsetlin muitas abordagens diferentes foram desenvolvidas para construir as bases das representações das álgebras de Lie clássicas. Novas representações dos *lowering operators* e novas demonstrações das fórmulas de Gelfand-Tsetlin foram descobertas por vários autores. Em particular o **projetor extremo** descoberto por Asherova, Smirnov e Tolstoy [AST1], [AST2] e [AST3] tornou-se um instrumento poderoso na teoria de representações de álgebras de Lie simples. Ele representa um papel essencial na teoria das **álgebras de Mickelsson** desenvolvida por Zhelobenko as quais têm uma imensa gama de aplicações desde as regras de ramificação a problemas de redução, até a classificação dos módulos de Harish-Chandra.

Em geral, não são conhecidas fórmulas explícitas para os elementos da matriz dos geradores em tais bases a não ser as bases do tipo de Gelfand-Tsetlin. É sabido que, para a base canônica, os elementos da matriz dos geradores *standard* são inteiros não negativos.

Agora discutiremos a idéia principal a qual leva à construção das bases de Gelfand-Tsetlin. O primeiro é considerar uma álgebra de Lie clássica dada, não somente como um objeto senão como parte de uma cadeia de subálgebras com uma inclusão natural. Ilustramos esta idéia usando representações dos grupos simétricos G_n como um exemplo. Considere a cadeia de subgrupos

$$G_1 \subset G_2 \subset \ldots \subset G_n, \tag{1}$$

onde o subgrupo G_k de G_{k+1} consiste de todas as permutações as quais deixam fixo o índice $k+1$ do conjunto $\{1, 2, \ldots, k+1\}$. As representações irredutíveis do grupo G_n são indexados por partições λ de n. A partição $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_l)$ com $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_l$ é representada graficamente como um **diagrama de Young** o qual consiste de um conjunto de caixas alinhadas à esquerda tais que a linha superior contém λ_1 caixas, a segunda linha λ_2 caixas, etc. Denotemos por $V(\lambda)$ a representação irredutível de G_n correspondente à partição λ. Um dos resultados centrais da teoria de representações de grupos simétricos é a seguinte regra de ramificação a qual descreve a restrição de $V(\lambda)$ ao subgrupo G_{n-1}:

$$V(\lambda)\,|_{G_{n-1}} = \bigoplus_{\mu} V'(\mu)$$

somando sobre todas as partições μ cujo diagrama de Young é obtido do diagrama de λ removendo uma caixa. Aqui $V'(\mu)$ denota a representação irredutível de G_{n-1} correspondente à partição μ. Assim, a restrição de $V(\lambda)$ a G_{n-1} é livre de multiplicidade, isto é, contém cada representação irredutível de G_{n-1} no máximo uma vez. Isto torna possível obter uma parametrização natural dos vetores da base em $V(\lambda)$ tomando suas restrições nos subgrupos posteriores da cadeia (1). Isto é, os vetores da base serão parametrizados pelas seqüências de partições

$$\lambda^{(1)} \longrightarrow \lambda^{(2)} \longrightarrow \ldots \longrightarrow \lambda^{(n)} = \lambda,$$

onde $\lambda^{(k)}$ é obtido de $\lambda^{(k+1)}$ removendo uma caixa. Equivalentemente, cada seqüência deste tipo pode ser considerada como um **tabuleiro standard da forma** λ o qual é obtido ao escrever os números $1, 2, \ldots, n$ em cada caixa de λ de tal forma que os números crescem ao longo das linhas e decrescem nas colunas. Em particular, a dimensão de $V(\lambda)$ é igual ao número de tabuleiros *standard* de forma λ. Existe uma única representação irredutível do grupo trivial G_1 e portanto o procedimento define os vetores da base até um fator escalar. A base correspondente é chamada de **Base de Young**. O grupo simétrico G_n é gerado pelas transposições adjacentes $s_i = (i, i+1)$. A construção da representação $V(\lambda)$ pode ser completada derivando as fórmulas explícitas para a ação dos elementos s_i na base, os quais são também devidas a A. Young. Esta realização de $V(\lambda)$ é usualmente chamada de **forma ortogonal (ou seminormal) de Young**. Os detalhes podem ser encontrados em James e Kerber [JK] e Sagan [Sa].

Um método bastante similar pode ser aplicado às representações das álgebras de Lie clássicas. Considere a álgebra de Lie linear geral $\mathcal{G}l_n$ a qual consiste das matrizes complexas $n \times n$ com o comutador (colchete) usual de matrizes. A cadeia (1) é agora substituída por

$$\mathcal{G}l_1 \subset \mathcal{G}l_2 \subset \ldots \subset \mathcal{G}l_n,$$

com as inclusões naturais $\mathcal{G}l_k \subset \mathcal{G}l_{k+1}$. A álgebra de Lie ortogonal $\mathfrak{o}_n$ pode ser considerada como uma subálgebra de $\mathcal{G}l_n$ a qual consiste das matrizes anti-simétricas. De novo temos a cadeia natural

$$\mathfrak{o}_2 \subset \mathfrak{o}_3 \subset \ldots \subset \mathfrak{o}_n. \tag{2}$$

Ambas restrições $\mathcal{G}l_n \downarrow \mathcal{G}l_{n-1}$ e $\mathfrak{o}_n \downarrow \mathfrak{o}_{n-1}$ são livres de multiplicidades de modo que a aplicação do argumento o qual usamos para a cadeia (1) produz os vetores da base na representação irredutível de $\mathcal{G}l_n$ ou $\mathfrak{o}_n$. Com uma normalização apropriada estas são precisamente as bases de Gelfand-Tsetlin dadas em [GT1] e [GT2]. No lugar dos tabuleiros *standard* os vetores da base são parametrizados por objetos combinatoriais chamados **padrões de Gelfand-Tsetlin**.

Não obstante, esta abordagem não serve para as álgebras de Lie simpléticas $\mathfrak{sp}_{2n}$, já que a restrição $\mathfrak{sp}_{2n} \downarrow \mathfrak{sp}_{2n-2}$ não é livre de multiplicidades. As multiplicidades são dadas pela regra de ramificação de Zhelobenko [Zh1] as quais foram mais tarde redescobertas por Hegerfeldt [He][3]. Várias tentativas para resolver este problema foram feitas por vários autores. A idéia natural é introduzir uma álgebra de Lie intermediária "$\mathfrak{sp}_{2n-1}$" e tentar restringir uma representação irredutível de $\mathfrak{sp}_{2n}$ primeiro a esta subálgebra e depois a $\mathfrak{sp}_{2n-2}$ com a esperança de conseguir uma gama simples nas duas restrições. Tais subálgebras intermediárias e suas representações foram estudadas por Gelfand-Zelevinsky [GZ], Proctor [Pr], Shtepin [Sh]. A desvantagem desta abordagem está no fato que a álgebra de Lie $\mathfrak{sp}_{2n-1}$ não é redutível e portanto a restrição de uma representação irredutível de $\mathfrak{sp}_{2n}$ a $\mathfrak{sp}_{2n-1}$ não é completamente redutível.

Outra idéia é usar a restrição $\mathcal{G}l_{2n} \downarrow \mathfrak{sp}_{2n}$. Gould e Kalnins [GK] construiram uma base para as representações das álgebras de Lie simpléticas parametrizada por um conjunto dos padrões de Gelfand-Tsetlin sobre $\mathcal{G}l_{2n}$. Algumas fórmulas dos elementos da matriz são derivadas usando a ação em $\mathcal{G}l_{2n}$. Uma observação similar foi feita independentemente por Kirillov [Ki] e Proctor

[3] Alguns autores ocidentais se referem ao resultado de Hegerfeld como a derivação original da regra.

[Pr]. Uma descrição dos padrões de Gelfand-Tsetlin para $\mathfrak{sp}_{2n}$ e $\mathfrak{o}_n$ pode ser obtida considerando-os como pontos fixos de involuções dos padrões de Gelfand-Tsetlin para a álgebra de Lie $\mathcal{G}l_N$ correspondente.

Os *lowering operators* no caso simplético foram dados por Mickelsson [Mi1]. A aplicação de monômios ordenados nos *lowering operators* no vetor máximo produz uma base da representação. Contudo, a ação dos geradores da álgebra de Lie nesta base não parecem computáveis. O motivo é o fato que, diferente dos casos $\mathcal{G}l_n$ e $\mathfrak{o}_N$, os *lowering operators* não comutam de modo que a base depende da ordem escolhida. Uma "simetria oculta"(cf. Cherednik [Ch]) se faz necessária para fazer uma escolha natural de uma combinação apropriada dos *lowering operators*. Novas idéias, as quais permitem construir bases do tipo Gelfand-Tsetlin para qualquer representação irredutível de dimensão finita de $\mathfrak{sp}_{2n}$, vêm da teoria das **álgebras envolventes quantizadas**. Esta é uma parte da teoria de **grupos quânticos** originada desde os trabalhos de [Dr1], [Dr2] e [Ji]. Uma classe particular de álgebras envolventes quantizadas chamadas de Yangians twisted introduzidos por Olshanski [Ol] desempenham o papel das simetrias ocultas para a construção das bases. Mais detalhes da exposição das propriedades destas álgebras e suas origens, encontram-se no livro [ChP1] e nos artigos [Mo5] e [MNO]. Para cada álgebra de Lie clássica relacionamos o Yangian $Y(N) = Y(\mathcal{G}l_N)$, ou o Yangian twisted $Y^{\pm}(N)$ como segue

$$\begin{pmatrix} \text{tipo } A_n & \text{tipo } B_n & \text{tipo } C_n & \text{tipo } D_n \\ Y(n+1) & Y^{+}(2n+1) & Y^{-}(2n) & Y^{+}(2n). \end{pmatrix}$$

A álgebra $Y(N)$ foi introduzida no trabalho de Faddeev [TF]. Olshanski [Ol] introduziu o Yangian twisted em relação com a construção de centralizadores. Em particular, ele determinou o seguinte fato, o qual exerce um papel importante na construção das bases. Dadas representações irredutíveis $V(\lambda)$ e $V'(\mu)$ de $\mathfrak{sp}_{2n}$ e $\mathfrak{sp}_{2n-2}$, respectivamente, existe uma ação natural irredutível da álgebra $Y^{-}(2)$ sobre o espaço $Hom_{\mathfrak{sp}_{2n-2}}(V'(\mu), V(\lambda))$. O espaço de homomorfismos é isomórfico ao subespaço $V(\lambda)^{+}_{\mu}$ de $V(\lambda)$ o qual é gerado pelos vetores máximos de peso μ para a subálgebra $\mathfrak{sp}_{2n-2}$. Representações irredutíveis de dimensão finita dos Yangians twisted foram classificadas em [Mo1]. Em particular, é mostrado que a representação $V(\lambda)^{+}_{\mu}$ de $Y^{-}(2)$ pode ser estendida ao Yangian $Y(2)$. Outra demonstração deste fato foi dada recentemente por [Na]. A álgebra $Y(2)$ e suas representações são bem estudadas, veja [ChP2].

Uma grande classe de representações $Y(2)$ admitem bases do tipo Gelfand-Tsetlin associadas com a inclusão $Y(1) \subset Y(2)$; veja [Mo6]. Isto permite conseguir uma base natural no espaço $V(\lambda)_{\mu}^{+}$ e então por indução conseguir uma base do espaço inteiro $V(\lambda)$. Além disto, é possível obter fórmulas explícitas para a ação dos geradores da álgebra de Lie simplética nesta base. Esta construção junto com o trabalho de Gelfand e Tsetlin fornecem realizações explícitas de todas as representações irredutíveis de dimensão finita das álgebras de Lie clássicas.

Capítulo 1

Álgebras de Lie complexas de dimensão finita

As Álgebras de Lie são estruturas algébricas de ocorrência muito freqüente em diversas áreas da Matemática, a ponto de tornarem-se tema indispensável na formação de bons especialistas. Seu estudo serve de base para muitas teorias avançadas, por exemplo, as Álgebras de Hopf e os Grupos Quânticos. Além disso, são objetos de interesse e de estudo, revelando ainda muitos problemas em aberto.

O objetivo deste capítulo é apresentar as principais idéias da Teoria das Álgebras de Lie, sobretudo o estudo das representações, os módulos, pesos e vetores máximos para as álgebras semi-simples de dimensão finita, e discutiremos detalhadamente o caso das representações de $\mathfrak{sl}(2)$. Também estudaremos a álgebra envolvente universal de uma álgebra de Lie qualquer.

1.1 Conceitos básicos

Definição 1 *Uma* ***álgebra de Lie*** $\mathcal{G}$ *sobre* $\mathbb{C}$ *é um espaço vetorial que possui uma aplicação bilinear* $[,] : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$ *chamada de* **colchete de Lie**, *que satisfaz as seguintes condições:*

1. $[x, x] = 0$ *para todo* $x \in \mathcal{G}$ ***(anti-simetria)***,

2. $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$ *para todo* $x, y, z \in \mathcal{G}$ ***(identidade de Jacobi)***.

Definição 2 *Uma* ***subálgebra*** $\mathcal{H}$ *de uma álgebra de Lie* $\mathcal{G}$ *é um subespaço vetorial* $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$ *tal que ele próprio é uma álgebra de Lie com a operação induzida de* $\mathcal{G}$.

Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$. O conjunto $End(V)$, das transformações lineares de V em V, relativo a composição de operações é um anel.

Definindo-se a operação $[X, Y] := XY - YX$ para os elementos de $End(V)$, o anel torna-se uma álgebra de Lie sobre $\mathbb{C}$. Para distinguir a nova estrutura algébrica, $End(V)$ é denotado por $\mathcal{G}l(V)$ (**álgebra linear geral**). Quando V é um espaço vetorial de dimensão n para as manipulações algébricas é conveniente utilizar a identificação entre $\mathcal{G}l(V)$ e o espaço das matrizes $n \times n$ sobre $\mathbb{C}$ e neste caso a álgebra será denotada por $\mathcal{G}l_n(\mathbb{C})$, ou simplesmente por $\mathcal{G}l_n$. A dimensão de $\mathcal{G}l_n$ é n^2.

Apresentamos a seguir quatro famílias de álgebras de Lie (subálgebras de $\mathcal{G}l_n(\mathbb{C})$) que estão em estreita relação com os respectivos grupos de Lie clássicos e cujo estudo tornou-se consagrado. Elas são:

1. Seja V um espaço vetorial de dimensão $n+1$. Consideremos o subconjunto

$$\mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C}) := \{X \in \mathcal{G}l_{n+1}(\mathbb{C}) \mid tr(X) = 0\}.$$

   $\mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C})$ é uma subálgebra de $\mathcal{G}l_{n+1}$ chamada **álgebra linear especial ou de tipo** A_n. A dimensão de $\mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C})$ é $(n+1)^2 - 1$.

2. Se V um espaço vetorial de dimensão $2n$. Consideremos o subconjunto

$$\mathfrak{o}_{2n}(\mathbb{C}) := \{X \in \mathcal{G}l_{2n}(\mathbb{C}) \mid SX = -X^t S\}$$

   onde $S = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$ e I_n é a matriz identidade de $n \times n$. $\mathfrak{o}_{2n}(\mathbb{C})$ é uma subálgebra de $\mathcal{G}l_{2n}$, chamada **álgebra ortogonal do tipo** D_n. $\dim \mathfrak{o}_{2n}(\mathbb{C}) = 2n^2 - n$.

3. Se $\dim V = 2n+1$, consideramos

$$\mathfrak{o}_{2n+1}(\mathbb{C}) := \{X \in \mathcal{G}l_{2n+1}(\mathbb{C}) \mid SX = -X^t S\}$$

onde $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & I_n & 0 \end{pmatrix}$ e I_n é a matriz identidade de $n \times n$. $\mathfrak{o}_{2n+1}(\mathbb{C})$ é uma subálgebra de $\mathcal{G}l_{2n+1}$, chamada **álgebra ortogonal do tipo** B_n. Sua dimensão é $2n^2 + n$.

4. Se $\dim V = 2n$, consideremos

$$\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C}) := \{X \in \mathcal{G}l_{2n}(\mathbb{C}) \mid SX = -X^t S\}$$

onde $S = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$ e I_n é a matriz identidade de $n \times n$. $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C})$ é uma subálgebra de $\mathcal{G}l_{2n}$, chamada **álgebra simplética do tipo** C_n. Temos que $\dim \mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C}) = 2n^2 + n$.

As quatro álgebras definidas acima são denominadas **álgebras de Lie clássicas**. Há ainda outras subálgebras de $\mathcal{G}l_n(\mathbb{C})$ que são igualmente importantes. Temos

$$\mathcal{T}_n(\mathbb{C}) := \{(x_{ij}) \in \mathcal{G}l_n(\mathbb{C}) \mid x_{ij} = 0 \text{ se } i > j\}$$

a álgebra das matrizes triangulares superiores,

$$\mathcal{N}_n(\mathbb{C}) := \{(x_{ij}) \in \mathcal{G}l_n(\mathbb{C}) \mid x_{ij} = 0 \text{ se } i \geq j\}$$

das matrizes triangulares estritamente superiores, e

$$\mathcal{D}_n(\mathbb{C}) := \{(x_{ij}) \in \mathcal{G}l_n(\mathbb{C}) \mid x_{ij} = 0 \text{ se } i \neq j\}$$

das matrizes diagonais, entre muitas outras.

Definição 3 *Um* ***ideal*** $\mathcal{I}$ *de uma álgebra de Lie* $\mathcal{G}$ *é uma subálgebra com a propriedade* $[\mathcal{G}, \mathcal{I}] \subseteq \mathcal{I}$.

Um exemplo de um ideal de uma álgebra de Lie $\mathcal{G}$ é o **centro** de $\mathcal{G}$, definido pelo conjunto

$$\mathcal{Z}(\mathcal{G}) := \{x \in \mathcal{G} \mid [x, \mathcal{G}] = 0\}.$$

Outro exemplo de ideal é a **álgebra derivada** $\mathcal{G}'$, a qual é definida como o conjunto de todas as combinações lineares finitas dos colchetes de $\mathcal{G}$, isto é,

$$\mathcal{G}' := [\mathcal{G}, \mathcal{G}] = \{\sum [x_i, y_i] \mid x_i, y_i \in \mathcal{G}\}.$$

Definição 4 *Uma* ***série derivada*** *é uma seqüência decrescente de ideais de uma álgebra de Lie $\mathcal{G}$ definida por recorrência da seguinte forma:*

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^{(1)} &:= \mathcal{G}' = [\mathcal{G}, \mathcal{G}], \\ \mathcal{G}^{(i)} &:= \left[\mathcal{G}^{(i-1)}, \mathcal{G}^{(i-1)}\right] \quad (\textit{para } i \geq 2). \end{aligned}$$

Definição 5 *Uma* ***série central descendente*** *é uma seqüência decrescente de ideais de uma álgebra de Lie $\mathcal{G}$ definida por recorrência da seguinte forma:*

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^{1} &:= \mathcal{G}' = [\mathcal{G}, \mathcal{G}], \\ \mathcal{G}^{i} &:= \left[\mathcal{G}, \mathcal{G}^{i-1}\right] \quad (\textit{para } i \geq 2). \end{aligned}$$

Definição 6 *Uma álgebra de Lie é* ***solúvel*** *se sua série derivada estaciona, isto é, existe um N natural tal que*

$$\mathcal{G}^{(N)} = 0.$$

Definição 7 *Uma álgebra de Lie é* ***nilpotente*** *se sua série central descendente estaciona, isto é, existe um N natural tal que*

$$\mathcal{G}^{N} = 0.$$

Observação 8 *A nilpotência implica solubilidade pois $\mathcal{G}^{(i)} \subseteq \mathcal{G}^{i}$, mas a recíproca nem sempre é verdadeira. Uma álgebra é solúvel se, e somente se, sua álgebra derivada é nilpotente.*

Definição 9 *O* ***radical rad***$(\mathcal{G})$ *da álgebra de Lie $\mathcal{G}$ é o ideal solúvel maximal.*

$\mathcal{G}$ é solúvel se, e somente se, é igual ao seu radical.

Definição 10 *Uma álgebra de Lie $\mathcal{G}$ é* ***semi-simples*** *se não possui ideais solúveis.*

Observação 11 *$\mathcal{G}$ é semi-simples se $\mathcal{G} \neq 0$ e $rad(\mathcal{G}) = 0$.*

Definição 12 *O **centralizador** de um subconjunto K de uma álgebra de Lie $\mathcal{G}$ é a seguinte subálgebra:*

$$\mathcal{C}_{\mathcal{G}}(K) := \{x \in \mathcal{G} \mid [x, K] = 0\}.$$

Definição 13 *O **normalizador** de uma subálgebra $\mathcal{H}$ de uma álgebra de Lie $\mathcal{G}$ é a seguinte subálgebra:*

$$\mathcal{N}_{\mathcal{G}}(\mathcal{H}) := \{x \in \mathcal{G} \mid [x, \mathcal{H}] \subseteq \mathcal{H}\}.$$

Para uma álgebra de Lie $\mathcal{G}$, construímos a **álgebra quociente** $\mathcal{G}/\mathcal{I}$ de $\mathcal{G}$ por um ideal $\mathcal{I}$ de maneira análoga a dos anéis quocientes. O espaço vetorial $\mathcal{G}/\mathcal{I}$ é simplesmente o quociente do espaço vetorial $\mathcal{G}$ pelo subespaço $\mathcal{I}$, munido da operação colchete, a qual é definida naturalmente em $\mathcal{G}/\mathcal{I}$ por

$$[x + \mathcal{I}, y + \mathcal{I}] = [x, y] + \mathcal{I}, \quad \text{para todo } x, y \in \mathcal{G}.$$

Verifica-se facilmente que a operação em $\mathcal{G}/\mathcal{I}$ está bem definida.

Definição 14 *Um **homomorfismo** entre duas álgebras de Lie $\mathcal{G}$ e $\widetilde{\mathcal{G}}$ é uma aplicação linear $\rho : \mathcal{G} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{G}}$ que satisfaz:*

$$\rho([x, y]) = [\rho(x), \rho(y)] \qquad \textit{para todo } x, y \in \mathcal{G}.$$

*O **núcleo** de um homomorfismo ρ é o subconjunto $\ker \rho := \{x \in \mathcal{G} \mid \rho(x) = 0\}$. Dizemos que um homomorfismo de álgebras de Lie é **monomorfismo** se $\ker \rho = 0$, **epimorfismo** se $\operatorname{Im} \rho = \widetilde{\mathcal{G}}$, **isomorfismo** se ambas as condições se verificarem, e, **automorfismo** se é um isomorfismo de $\mathcal{G}$ em $\mathcal{G}$.*

Definição 15 *Uma **derivação** d de uma álgebra de Lie $\mathcal{G}$ é uma aplicação linear que satisfaz a regra de Leibniz:*

$$d([x, y]) = [x, d(y)] + [d(x), y] \qquad \textit{para todo } x, y \in \mathcal{G}.$$

Definição 16 *Uma álgebra de Lie $\mathcal{G}$ é **abeliana** se sua álgebra derivada é zero, isto é, $\mathcal{G}' = [\mathcal{G}, \mathcal{G}] = 0$.*

Observação 17 *Uma álgebra de Lie é abeliana se* $\mathcal{Z}(\mathcal{G}) = \mathcal{G}$.

Definição 18 *Uma álgebra de Lie* $\mathcal{G}$*, de dimensão diferente de um, é* ***simples*** *se não é abeliana e seus únicos ideais são* (0) *e* $\mathcal{G}$.

Observação 19 *Se* $\mathcal{G}$ *é uma álgebra de Lie simples então* $\mathcal{G} = \mathcal{G}'$ *e* $\mathcal{Z}(\mathcal{G}) = (0)$.

Definição 20 *Uma* ***subálgebra de Cartan*** $\mathcal{H}$ *de uma álgebra de Lie* $\mathcal{G}$ *é uma subálgebra nilpotente que é igual ao seu normalizador em* $\mathcal{G}$.

Definição 21 *Uma* ***subálgebra de Borel*** $\mathcal{B}$ *de uma álgebra de Lie* $\mathcal{G}$ *é uma subálgebra solúvel maximal.*

1.2 Representações e módulos

Definição 22 *Uma* ***representação*** ρ *de uma álgebra de Lie* $\mathcal{G}$ *é um homomorfismo de* $\mathcal{G}$ *na álgebra linear geral de um espaço vetorial* V*, isto é,*

$$\rho : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}l(V)$$

tal que

$$\rho([x,y]) = \rho(x) \circ \rho(y) - \rho(y) \circ \rho(x)$$

para todo $x, y \in \mathcal{G}$.

Como uma álgebra de Lie é um espaço vetorial, pode-se considerar uma representação de $\mathcal{G}$ em $\mathcal{G}l(\mathcal{G})$, tal representação é chamada **representação adjunta**,

$$\mathrm{ad} : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}l(\mathcal{G})$$

tal que

$$\mathrm{ad}x(y) := [x,y] \qquad \text{para todo } x, y \in \mathcal{G}.$$

Observação 23 *Devido à identidade de Jacobi, a aplicação* $\mathrm{ad}x$ *é uma derivação para todo* $x \in \mathcal{G}$.

De fato,

$$adx\left([y,z]\right) = [x,[y,z]] = -\left[y,[z,x]\right] - \left[z,[x,y]\right] = \left[y, adx\left(z\right)\right] + \left[adx\left(y\right), z\right].$$

Definição 24 *Seja $\mathcal{G}$ uma álgebra de Lie. Um espaço vetorial V, munido de uma operação $\mathcal{G} \times V \longrightarrow V$ dada por $(x,v) \longrightarrow x \cdot v$ é chamado $\mathcal{G}-$**módulo** se satisfaz as seguintes condições:*

1. $(ax + by) \cdot v = a\left(x \cdot v\right) + b\left(y \cdot v\right),$
2. $x \cdot (av + bw) = a\left(x \cdot v\right) + b\left(x \cdot w\right),$
3. $[x,y] \cdot v = xy \cdot v - yx \cdot v,$

para todo $x, y \in \mathcal{G}$, $u, v \in V$, e $a, b \in \mathbb{C}$.

A representação $\rho : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}l\left(V\right)$ pode ser vista como um $\mathcal{G}-$módulo via ação $x \cdot v := \rho\left(x\right)\left(v\right)$, reciprocamente, dado um $\mathcal{G}-$módulo V, e definindo $\rho\left(x\right)\left(v\right) := x \cdot v$ as propriedades $1-3$ definem uma representação $\rho : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}l\left(V\right)$. Assim é equivalente usar a linguagem de módulos e a linguagem de representações.

Definição 25 *Uma aplicação linear $\varphi : V \longrightarrow W$ entre os $\mathcal{G}-$módulos V e W é um **homomorfismo de $\mathcal{G}-$módulos** se o seguinte diagrama é comutativo:*

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\varphi} & W \\ x \downarrow & & \downarrow x \\ V & \xrightarrow{\varphi} & W \end{array}$$

ou equivalentemente, se $\varphi\left(x \cdot v\right) = x \cdot \varphi\left(v\right)$, para todo $x \in \mathcal{G}$ e todo $v \in V$. Neste caso, também dizemos que φ é uma aplicação $\mathcal{G}-$linear.

*Um subespaço W de um $\mathcal{G}-$módulo V é um $\mathcal{G}-$**submódulo** de V se for estável sob a ação de $\mathcal{G}$ sobre V, ou seja, se satisfizer a condição*

$$\{x \cdot w \mid x \in \mathcal{G} \text{ e } w \in W\} \subset W.$$

Definição 26 *Um $\mathcal{G}-$módulo $V \neq 0$ que admite apenas os $\mathcal{G}-$submódulos triviais 0 e V é **irredutível**.*

Se um $\mathcal{G}-$módulo arbitrário V se escreve como soma direta de $\mathcal{G}-$submódulos irredutíveis então V é ***completamente redutível****, ou equivalentemente, V é completamente redutível se cada submódulo W de V admite um complemento (um $\mathcal{G}-$submódulo W') tal que $V = W \bigoplus W'$.*

Lema 27 *Seja $\rho : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}l(V)$ uma representação de uma álgebra de Lie semi-simples. Então $\rho(\mathcal{G}) \subset \mathfrak{sl}(V)$. Em particular, $\mathcal{G}$ age trivialmente sobre qualquer $\mathcal{G}-$módulo de dimensão um.*

Demonstração. Veja [Hu, Seção 6.3]. ■

Teorema 28 ***(Weyl)*** *Se $\mathcal{G}$ é uma álgebra de Lie semi-simples e V é um $\mathcal{G}-$módulo de dimensão finita, então V é completamente redutível.*

Demonstração. Veja [Hu, Seção 6.3]. ■

1.3 Representações de dimensão finita de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$

As representações da álgebra de Lie $\mathcal{G} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ constituem o caso mais simples da teoria de representações de álgebras de Lie. Determinaremos todas as representações de dimensão finita de $\mathcal{G}$. Escolhemos uma base de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ como segue:

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esta base satisfaz as relações de comutação:

$$[h, x] = 2x, \qquad [x, y] = h, \qquad [h, y] = -2y.$$

Seja V um $\mathcal{G}-$módulo irredutível de dimensão finita. É fácil provar que h age diagonalmente sobre V de modo que temos a decomposição

$$V = \bigoplus_{\lambda} V_\lambda$$

onde a soma se dá sobre todos os autovalores λ distintos do endomorfismo h de V. Notemos que esta é uma soma finita.

Um subespaço $V_\lambda \neq \phi$ é chamado um **espaço de peso** de V e o correspondente número complexo λ é chamado um **peso**.

A esta altura, surge uma indagação natural a respeito do modo como x e y agem sobre os diversos espaços V_λ. Isto pode ser analisado através da relação $[x, y] \cdot v = xy \cdot v - yx \cdot v$. Para todo $v \in V_\lambda$, temos

$$h \cdot (x \cdot v) = x \cdot (h \cdot v) + [h, x] \cdot v = x \cdot \lambda v + 2x \cdot v = (\lambda + 2)\, x \cdot v$$

onde $x \cdot v$ é um autovetor de h associado ao autovalor $\lambda + 2$, assim $x \cdot v \in V_{\lambda+2}$. Um raciocínio análogo nos permite ver que $y \cdot v \in V_{\lambda-2}$.

Como V é de dimensão finita, podemos encontrar um λ maximal no sentido que λ seja um peso para V, e $\lambda + 2$ não seja peso. Esse λ é chamado de **peso máximo**.

Seja v_0 um vetor diferente de zero no espaço de peso V_λ. Sejam

$$v_{-1} := 0, \qquad v_k := \frac{1}{k} y \cdot v_{k-1} = \frac{1}{k!} y^k \cdot v_0 \qquad \text{para } k \in \mathbb{Z}, k \geq 0. \tag{1.1}$$

Afirmamos que para $k \geq 0$,

$$\begin{array}{lrcl} (i) & h \cdot v_k & = & (\lambda - 2k)\, v_k \\ (ii) & y \cdot v_k & = & (k+1)\, v_{k+1} \\ (iii) & x \cdot v_k & = & (\lambda - k + 1)\, v_{k-1} \end{array}$$

As relações (i) e (ii) são imediatas. Vamos provar (iii), para isso usaremos indução matemática sobre k. O caso $k = 0$ é óbvio. Assumiremos que $k > 0$. Da hipótese de indução temos

$$\begin{aligned} x \cdot v_k &= \frac{1}{k} x \cdot y \cdot v_{k-1} = \frac{1}{k} \left([x, y] \cdot v_{k-1} + y \cdot x \cdot v_{k-1}\right) \\ &= \frac{1}{k} \left(h \cdot v_{k-1} + (\lambda - k + 2)\, y \cdot v_{k-2}\right) \\ &= \frac{1}{k} \left((\lambda - 2k + 2)\, v_{k-1} + (k-1)(\lambda - k + 2)\, v_{k-1}\right) \\ &= (\lambda - k + 1)\, v_{k-1}. \end{aligned}$$

Isto prova que (iii) é verdadeiro para todo inteiro não negativo k.

Assim da afirmação anterior temos que o subespaço gerado por $\{v_0, y \cdot v_0, y^2 \cdot v_0, \ldots\}$ é um subespaço invariante de V. Pela irredutibilidade de V, temos que V coincide com dito subespaço.

Segue-se de (i) que os v_k's diferentes de zero são linearmente independentes. Assim $v_k \neq 0$ para um número finito de k's, pois V é de dimensão finita. Seja n o menor inteiro para o qual $v_n \neq 0$ e $v_{n+1} = 0$, logo de (1.1) $v_{n+i} = 0$ para todo $i \geq 1$. Assim n também é o maior inteiro para o qual $v_n \neq 0$ e $v_{n+1} = 0$. Portanto o conjunto

$$\{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$$

é uma base para V. Além disto, cada espaço de peso é de dimensão 1.

Agora, seja $k = n + 1$, então na equação (iii) temos a seguinte identidade

$$x \cdot v_{n+1} = (\lambda - n)\, v_n.$$

As condições $v_n \neq 0$ e $v_{n+1} = 0$ implicam que $\lambda = n$.

Assim concluímos que o peso máximo λ é um inteiro não-negativo.

Em resumo, temos:

Teorema 29 *Seja V uma representação irredutível de dimensão finita de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Então o peso máximo de V é um inteiro não negativo n e V é a soma direta dos espaços de peso*

$$V = V_n \bigoplus V_{n-2} \bigoplus \cdots \bigoplus V_{-n+2} \bigoplus V_{-n},$$

com cada espaço de peso de dimensão 1. Em particular, $\dim V = n + 1$.

Exemplo 30 *Seja V uma representação irredutível de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ com peso máximo λ.*

1. *Se o peso máximo λ é igual a 0, então V é isomórfico à representação trivial de dimensão 1.*

2. *Se o peso máximo λé igual a 1, então V é isomórfico à representação natural sobre $\mathbb{C}^2$.*

3. *Se o peso máximo λ é igual a 2, então V é isomórfico à representação adjunta de $\mathcal{G}$ sobre $\mathcal{G}$.*

1.4 A álgebra envolvente universal $\mathbf{U}(\mathcal{G})$ de uma álgebra de Lie $\mathcal{G}$

Vamos associar a cada álgebra de Lie uma álgebra associativa $\mathbf{U}(\mathcal{G})$ com unidade 1, que seja o mais "livre" possível, sujeita às relações de comutação de $\mathcal{G}$. Esta é denominada a álgebra envolvente universal de $\mathcal{G}$ e tem papel fundamental na teoria de representações das álgebras de Lie. Como se sabe, o produto tensorial de duas álgebras de Lie $\mathcal{G}$ e $\mathcal{G}'$ não é necessariamente uma álgebra de Lie. Contudo, o produto tensorial de suas respectivas álgebras envolventes universais $\mathbf{U}(\mathcal{G})$ e $\mathbf{U}(\mathcal{G}')$ é uma álgebra envolvente universal, a saber, $\mathbf{U}(\mathcal{G} \bigoplus \mathcal{G}')$, a qual contém $\mathcal{G}$ e $\mathcal{G}'$ (veremos que toda álgebra de Lie está contida em sua álgebra envolvente universal). Assim, a teoria geral das representações das álgebras de Lie se reduz à teoria das representações de álgebras associativas.

Definição 31 *A **álgebra envolvente universal de** $\mathcal{G}$ é um par $(\mathbf{U}(\mathcal{G}), i)$ consistindo de uma álgebra associativa com unidade $\mathbf{U}(\mathcal{G})$ e de uma aplicação linear $i : \mathcal{G} \longrightarrow \mathbf{U}(\mathcal{G})$, satisfazendo:*

1. *A condição*
$$i([x,y]) = i(x)\, i(y) - i(y)\, i(x), \tag{1.2}$$
para todo $x, y \in \mathcal{G}$;

2. *A seguinte propriedade universal: Para todo par (A, j) consistindo de uma álgebra associativa com unidade A e de uma aplicação linear $j : \mathcal{G} \longrightarrow A$ satisfazendo (1.2), existe um único homomorfismo de álgebras $\varphi : \mathbf{U}(\mathcal{G}) \longrightarrow A$ tal que $\varphi \circ i = j$.*

É fácil verificar que um objeto definido por meio de propriedade universal é único, a menos de isomorfismo. Porém, precisamos construir um exemplo concreto a fim de garantir a existência desse objeto. É o que faremos a seguir.

Consideremos para dois espaços vetoriais V e W sobre $\mathbb{C}$ o produto cartesiano

$$V \times W := \{(v, w) \mid v \in V,\ w \in W\},$$

e o subespaço de $V \times W$

$$I := \left\langle \begin{array}{c} (v_1 + v_2, w) - (v_1, w) - (v_2, w)\,; (v, w_1 + w_2) - (v, w_1) - (v, w_2)\,; \\ (\alpha v, w) - (v, \alpha w) \end{array} \right\rangle$$

para $v, v_1, v_2 \in V$, $w, w_1, w_2 \in W$, e $\alpha \in \mathbb{C}$. Então,

$$V \bigotimes W := (V \times W) \diagup I$$

é o **produto tensorial** entre V e W.

Pode-se generalizar esta construção para n espaços vetoriais e considerando o caso particular em que os espaços vetoriais são todos iguais, define-se

$$T^n(V) = \begin{cases} \mathbb{C} & \text{se } n = 0 \\ V & \text{se } n = 1 \\ \underbrace{V \bigotimes \cdots \bigotimes V}_{n \text{ vezes}} & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

Agora considerando a soma direta dos produtos tensoriais de V,

$$T(V) := \mathbb{C} \bigoplus V \bigoplus T^2(V) \bigoplus \cdots \bigoplus T^n(V) \bigoplus \cdots = \bigoplus_{i=0}^{\infty} T^i(V),$$

com produto associativo definido para os geradores homogêneos de $T(V)$

$$(v_1 \bigotimes \ldots \bigotimes v_n)(w_1 \bigotimes \ldots \bigotimes w_m) := (v_1 \bigotimes \ldots \bigotimes v_n \bigotimes w_1 \bigotimes \ldots \bigotimes w_m) \in T^{n+m}(V)$$

$T(V)$ é uma álgebra associativa com unidade 1 e é chamada de álgebra tensorial de V.

Seja J o ideal (bilateral) de $T(V)$ gerado por todos os elementos da forma $x \bigotimes y - y \bigotimes x - [x, y]$, para $x, y \in \mathcal{G}$. Definimos $\mathbf{U}(\mathcal{G}) = T(\mathcal{G}) \diagup J$ e seja $\pi : T(\mathcal{G}) \longrightarrow \mathbf{U}(\mathcal{G})$ a projeção canônica. Observamos que J não contém os escalares $T^0(V) = \mathbb{C}$, logo π leva $\mathbb{C}$ isomorficamente em $\mathbf{U}(\mathcal{G})$. Surpreendentemente, π também leva $\mathcal{G}$ isomorficamente em $\mathbf{U}(\mathcal{G})$. Veremos isto mais adiante no teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt (PBW).

Definindo $i : \mathcal{G} \longrightarrow \mathbf{U}(\mathcal{G})$ como a restrição de π a $T^1(\mathcal{G}) = \mathcal{G}$, afirmamos que o par $(\mathbf{U}(\mathcal{G}), i)$ é uma álgebra envolvente universal de $\mathcal{G}$. Com efeito, seja (A, j) conforme a definição. A propriedade universal de $T(\mathcal{G})$ nos fornece um homomorfismo de álgebras $\varphi' : T(\mathcal{G}) \longrightarrow \mathcal{G}$ tal que $\varphi' \circ i' = j$ onde $i' = \mathcal{G} \longrightarrow T(\mathcal{G})$ é a inclusão natural. Devido a propriedade (1.2) satisfeita por j, temos

$$\begin{aligned} \varphi'(x \otimes y - y \otimes x - [x, y]) &= \varphi'(x)\varphi'(y) - \varphi'(y)\varphi'(x) - \varphi'([x, y]) \\ &= j(x)j(y) - j(y)j(x) - j([x, y]) = 0, \end{aligned}$$

logo $J \subset \ker \varphi'$. Pelo teorema fundamental de isomorfismo, há um único homomorfismo de álgebras $\varphi : \mathbf{U}(\mathcal{G}) = T(\mathcal{G}) / J \longrightarrow A$ tal que $\varphi \circ \pi = \varphi'$ provando a afirmação.■

Vamos tornar mais evidente a estrutura da álgebra $\mathbf{U}(\mathcal{G})$, mostrando que esta contém uma imagem isomorfa de $\mathcal{G}$ e encontrando explicitamente uma base.

Teorema 32 *(PBW) Uma base de $\mathbf{U}(\mathcal{G})$ pode ser escolhida como segue. Se $\{x_1, \ldots, x_n\}$ é uma base de $\mathcal{G}$, então o conjunto de elementos*

$$x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n}, \quad i_r \geq 0, \quad i_r \in \mathbb{Z}$$

formam uma base de $\mathbf{U}(\mathcal{G})$.

Demonstração. Veja [Hu, Seção 17.4]. ■

Se $\mathcal{G}$ é abeliana temos que $x_i x_j = x_j x_i$ e $\mathbf{U}(\mathcal{G})$ é isomorfa à álgebra polinomial de n geradores $(\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n])$. Em geral temos $x_i x_j - x_j x_i = [x_i, x_j]$ em $\mathbf{U}(\mathcal{G})$, assim, $\mathbf{U}(\mathcal{G})$ é uma classe de álgebra polinomial não comutativa.

A álgebra envolvente universal $\mathbf{U}(\mathcal{G})$, é importante para nós, pois tem a mesma teoria de representações de $\mathcal{G}$. Se V é um $\mathcal{G}-$módulo, então V pode ser considerado como um módulo para o anel $\mathbf{U}(\mathcal{G})$. Vejamos isto. Primeiro consideremos V como um $T(\mathcal{G})-$módulo na forma natural. Como $[x, y]v = x(yv) - y(xv)$ para $x, y \in \mathcal{G}$ e $v \in V$, temos que

$$(x \otimes y - y \otimes x - [x, y])v = 0$$

para todo $v \in V$. Assim os elementos da forma $x \bigotimes y - y \bigotimes x - [x, y]$ pertencem ao kernel de V. Assim o kernel é um ideal bilateral de $T(\mathcal{G})$ que contém J, de onde os elementos de J agem trivialmente em V e V pode ser considerado como um $\mathbf{U}(\mathcal{G})$ −módulo.

Reciprocamente, cada $\mathbf{U}(\mathcal{G})$ −módulo V, pode ser visto como um $\mathcal{G}$−módulo usando a aplicação

$$\mathcal{G} \longrightarrow T^1(\mathcal{G}) \longrightarrow T(\mathcal{G}) \longrightarrow \mathbf{U}(\mathcal{G}).$$

Esta aplicação é injetora pelo teorema de PBW. Assim $\mathcal{G}$ pode ser considerado como um subespaço de $\mathbf{U}(\mathcal{G})$.

1.5 Pesos e vetores máximos

Definição 33 *Sejam V um $\mathcal{G}$−módulo de dimensão finita e $\mathcal{H}$ uma subálgebra de Cartan de $\mathcal{G}$. Consideremos o seguinte subespaço de V, para $\lambda \in \mathcal{H}^*$:*

$$V_\lambda := \{v \in V \mid h \cdot v = \lambda(h)\, v, \quad \forall h \in \mathcal{H}\}.$$

Se $V_\lambda \neq \{0\}$, então V_λ é chamado ***espaço de peso*** *e λ um* ***peso*** *de V (mais precisamente, um "peso de $\mathcal{H}$ sobre V").*

Diz-se que V admite uma **decomposição em espaços de pesos** se

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \Delta} V_\lambda,$$

onde Δ denota o conjunto de todos os pesos de V.

Definição 34 *Como $\mathcal{G}$ é um $\mathcal{G}$−módulo via a representação adjunta, em relação a subálgebra de Cartan $\mathcal{H}$ de $\mathcal{G}$, os pesos são chamados de* ***raízes*** *e $\mathcal{G}$ pode ser decomposta em* ***espaços de raízes***

$$\mathcal{G}_\alpha = \{x \in \mathcal{G} \mid [h, x] = \alpha(h)\, x, \quad \forall h \in \mathcal{H}\},$$

e

$$\mathcal{G} = \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathcal{G}_\alpha,$$

onde $\mathcal{G}_0 = \mathcal{H}$. Neste caso, o conjunto Δ é chamado ***sistema de raízes****.*

É bem conhecido que Δ gera $\mathcal{H}^*$, assim podemos escolher uma base $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ de $\mathcal{H}^*$ composta unicamente de raízes.

Definição 35 *Um subconjunto Π de Δ é uma* ***base*** *se satisfazer as condições:*

1. *Π é uma base no sentido usual (como espaço vetorial);*
2. *Cada raiz β pode ser escrita como combinação linear finita $\sum_{\alpha\in\Pi} k_\alpha \alpha$, com coeficientes inteiros k_α todos não-negativos ou todos não-positivos.*

Se todos os k_α são não-negativos, as raízes são chamadas de ***positivas*** *e são denotadas por Δ^+, caso contrário, são chamadas de raízes* ***negativas*** *e são denotadas por Δ^-.*

As raízes de Π são chamadas **simples**.

Notação 36 *Denotamos por $\mathcal{G}^+ = \bigoplus_{\alpha\in\Delta^+} \mathcal{G}_\alpha$ e $\mathcal{G}^- = \bigoplus_{\alpha\in\Delta^-} \mathcal{G}_\alpha$.*

Definição 37 *Seja $\mathcal{G}$ uma álgebra de Lie sobre $\mathbb{C}$, não necessariamente de dimensão finita. Uma* ***decomposição triangular*** *de $\mathcal{G}$ consiste de uma subálgebra abeliana $\mathcal{H} \neq (0)$ e de duas subálgebras $\mathcal{G}^+$ e $\mathcal{G}^-$ tal que:*

1. $\mathcal{G} = \mathcal{G}^- \bigoplus \mathcal{H} \bigoplus \mathcal{G}^+$;
2. *$\mathcal{G}^+ \neq (0)$, $[\mathcal{H}, \mathcal{G}^+] \subset \mathcal{G}^+$ e $\mathcal{G}^+$ admite uma decomposição em espaços de peso relativo a $\mathcal{H}$ (sobre a representação adjunta) com peso $\alpha \neq 0$ pertencendo ao subgrupo aditivo livre $Q_+ \subset \mathcal{H}^*$;*
3. *Existe uma anti-involução σ (isto é, anti-homomorfismo de período 2) sobre $\mathcal{G}$ tal que*

$$\begin{aligned} \sigma\left(\mathcal{G}^+\right) &= \mathcal{G}^-, \\ \sigma \mid_{\mathcal{H}} &= id_{\mathcal{H}}; \end{aligned}$$

4. *Existe uma base* $\{\alpha_j\}_{j\in J}$ *de* Q_+ *consistindo de elementos linearmente independentes de* $\mathcal{H}^*$. *Em particular,* Q_+ *consiste de todas as somas finitas não-nulas da forma*

$$\sum_{j\in J} m_j\alpha_j,$$

para $m_j \in \mathbb{N}$.

Lema 38 *Seja* V *um* $\mathcal{G}-$*módulo arbitrário. Então:*

1. *Para todos* $\alpha \in \Delta$ *e* $\lambda \in \mathcal{H}^*$, $\mathcal{G}_\alpha \cdot V_\lambda \subset V_{\alpha+\lambda}$.

2. *A soma* $V' = \sum_{\lambda\in\mathcal{H}^*} V_\lambda$ *é direta e* V' *é um* $\mathcal{G}-$*submódulo de* V.

3. *Se* $\dim V < \infty$, *então* $V = V'$.

Demonstração. Veja [Hu, Seção 20.1]. ■

Definição 39 *Um peso* $\lambda \in \mathcal{H}^*$ *é chamado* ***peso máximo*** *de* V, *se* $\mathcal{G}^+ \cdot V_\lambda = 0$.

Se λ *é um peso máximo e* $v \in V_\lambda$, $v \neq 0$ *então* v *é chamado de* ***vetor máximo*** *ou* ***primitivo*** *de* V.

Definição 40 *Um* $\mathcal{G}-$*módulo* V *é chamado* ***módulo de peso máximo*** λ *se:*

1. V *tem um peso máximo* λ *e*

2. *Existe um* $v \in V_\lambda$ *tal que* $V = \mathbf{U}(\mathcal{G})\, v$.

Observação 41 1. *Se* $\mathcal{G} = \mathcal{H} \bigoplus \sum_{\alpha\in\Delta} \mathcal{G}_\alpha$, *então* $\mathcal{H}$ *é diagonalizável em* $\mathbf{U}(\mathcal{G})$, *e daí* $\mathbf{U}(\mathcal{G}) = \bigoplus_{\mu\in\mathcal{H}^*} \mathbf{U}(\mathcal{G})_\mu$, *com*

$$\mathbf{U}(\mathcal{G})_\mu = \{v \in \mathbf{U}(\mathcal{G}) \mid h \cdot v = \mu(h)\, v, \quad \forall h \in \mathcal{H}\}$$

(ação adjunta).

2. $\mathbf{U}(\mathcal{G})_\delta \cdot \mathbf{U}(\mathcal{G})_\varepsilon \subset \mathbf{U}(\mathcal{G})_{\delta+\varepsilon}$, *isto é,* $\mathbf{U}(\mathcal{G})$ *é* $\mathcal{H}^*-$*graduada.*

3. $\mathbf{U}(\mathcal{G})_\mu V_\varepsilon \subset V_{\mu+\varepsilon}$.

Teorema 42 *Seja V um $\mathcal{G}-$módulo de peso máximo λ, com vetor máximo $v \in V_\lambda$, então:*

1. *Se $\mu \in \mathcal{H}^*$ é um peso, então $\mu = \lambda - \sum_{\alpha \in \Delta^+} m_\alpha \alpha$ com todos os $m_\alpha \in \mathbb{Z}_+$.*

2. $\dim V_\lambda = 1$.

3. *$V = \mathbf{U}(\mathcal{G}^-) v$, para todo $v \in V_\lambda$, $v \neq 0$.*

Demonstração. Veja [Hu, Seção 20.2]. ■

Corolário 43 *Seja V como no Teorema. Suponha além disto que V é um $\mathcal{G}-$módulo irredutível. Então v é o único vetor maximal de V, a menos de um múltiplo escalar.*

O seguinte teorema mostra que para cada $\lambda \in \mathcal{H}^*$, existe um único $\mathcal{G}-$módulo de peso máximo λ, a menos de isomorfismos, o qual pode ser de dimensão infinita.

Teorema 44 1. *Sejam V e W dois $\mathcal{G}-$módulos de peso máximo λ. Se V e W são irredutíveis, então eles são isomorfos.*

2. *Se $\lambda \in \mathcal{H}^*$, então existe um $\mathcal{G}-$módulo irredutível $V(\lambda)$, de peso máximo λ.*

Demonstração. Veja [Hu, Seção 20.3]. ■

Seja $\lambda \in \mathcal{H}^*$ um peso máximo e seja $J(\lambda)$ o ideal à esquerda de $\mathbf{U}(\mathcal{G})$ gerado pelos elementos $x_\alpha \in \mathcal{G}_\alpha$, $\alpha \in \Delta^+$ e $h_i - \lambda(h_i) 1$, para $i = 1, \ldots, n$. Isto é,

$$J(\lambda) = \sum_{\alpha \in \Delta} \mathbf{U}(\mathcal{G}) x_\alpha + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{U}(\mathcal{G}) (h_i - \lambda(h_i) 1).$$

Seja $M(\lambda) = \mathbf{U}(\mathcal{G}) / J(\lambda)$. Então $M(\lambda)$ é um $\mathbf{U}(\mathcal{G})-$módulo, chamado **módulo de Verma** determinado por λ.

Observação 45 *Para todo $\lambda \in \mathcal{H}^*$ temos:*

1. *Existe um único módulo de Verma $M(\lambda)$.*

2. *$M(\lambda)$ é um módulo de peso, isto é, $M(\lambda) = \bigoplus_{\mu \in \mathcal{H}^*} M(\lambda)_\mu$.*

3. *$M(\lambda) = \mathbf{U}(\mathcal{G}^-) v$ como $\mathbf{U}(\mathcal{G}^-)-$módulo.*

4. *$M(\lambda)$ tem um único submódulo máximal $N(\lambda)$, e daí, tem um único quociente irredutível $L(\lambda) = M(\lambda)/N(\lambda)$.*

5. *$M(\lambda) \simeq M(\mu)$ se, e somente se, $\lambda = \mu$ e $L(\lambda) \simeq L(\mu)$ se e somente se $\lambda = \mu$.*

Definição 46 *O módulo $L(\lambda) = M(\lambda)/N(\lambda)$ é chamado* ***módulo irredutível de peso máximo*** *λ.*

Para completar a classificação dos módulos irredutíveis $L(\lambda)$ de $\mathbf{U}(\mathcal{G})$, falta descrever para quais $\lambda \in \mathcal{H}^*$, $L(\lambda)$ tem dimensão finita e determinar sua dimensão.

Teorema 47 *Seja $\lambda \in \mathcal{H}^*$, então: $\dim L(\lambda) < \infty$ se, e somente se, $\lambda(h_\alpha) \in \mathbb{Z}_+$ para todo $\alpha \in \Pi$.*

Demonstração. Veja [Hu, Seções 21.1 e 21.2]. ■

Teorema 48 ***(Fórmula da dimensão de Weyl)*** *Seja $L(\lambda)$ uma representação irredutível de dimensão finita de uma álgebra de Lie simples $\mathcal{G}$ com peso máximo λ. Então*

$$\dim L(\lambda) = \prod_{\alpha \in \Delta^+} \frac{\langle \lambda + \delta, \alpha \rangle}{\langle \delta, \alpha \rangle}$$

onde $\langle x, y \rangle =$ traço $(ad(x)\, ad(y))$ e δ é a semi-soma das raízes positivas.

Demonstração. Veja [Hu, Seção 24.3]. ■

O peso máximo λ pode ser descrito na seguinte forma. Sejam $\omega_i \in \mathcal{H}^*$ tais que

$$\begin{aligned} \omega_i(h_i) &= 1 \\ \omega_i(h_j) &= 0, \quad \text{para} \quad j \neq i. \end{aligned}$$

Os elementos $\omega_1, \ldots, \omega_n$ de $\mathcal{H}^*$ definidos desta forma constituem uma outra base de $\mathcal{H}^*$ e são chamados **pesos fundamentais**. Logo

$$\lambda = m_1\omega_1 + \cdots + m_n\omega_n$$

De onde $\lambda(h_i) = m_i\omega_i(h_i) = m_i$. Assim temos que

$$\lambda = \lambda(h_1)\omega_1 + \cdots + \lambda(h_n)\omega_n.$$

Disto temos o seguinte corolário da fórmula da dimensão de Weyl, o qual será mais útil na hora dos cálculos das dimensões.

Corolário 49 *Sejam* $\lambda = m_1\omega_1 + \cdots + m_n\omega_n$ *e* $\alpha \in \Delta^+$ *tal que* $\alpha = \sum_{i=1}^{n} k_i\alpha i$. *Então*

$$\dim L(\lambda) = \prod_{\alpha\in\Delta^+} \frac{\sum_{i=1}^{n} k_i\omega_i(m_i+1)}{\sum_{i=1}^{n} k_i\omega_i}.$$

Exemplo 50 *1. Se* $\mathcal{G}$ *é do tipo* A_1*, seja* $\lambda = m_1\omega_1$*. Então temos só uma raiz positiva* α_1 *e daí*

$$\dim L(\lambda) = m_1 + 1.$$

2. Se $\mathcal{G}$ *é do tipo* A_2*, seja* $\lambda = m_1\omega_1 + m_2\omega_2$*. Aqui temos*

$$\dim L(\lambda) = \frac{(m_1+1)(m_2+1)(m_1+m_2+2)}{2}.$$

3. Se $\mathcal{G}$ *é do tipo* B_2*, temos*

$$\dim L(\lambda) = \frac{(m_1+1)(m_2+1)(m_1+m_2+2)(2m_1+m_2+3)}{6}.$$

Capítulo 2

A teoria da álgebra de Mickelsson

2.1 A álgebra $F(\mathcal{G})$

Seja $\mathcal{G}$ uma álgebra de Lie redutível de dimensão finita sobre $\mathbb{C}$. A álgebra envolvente universal $\mathbf{U}(\mathcal{G})$ não contém nenhum projetor (seção 2.2) exceto 0 e 1. Não obstante, existe um número de projetores Hermitianos em uma certa extensão $F(\mathcal{G})$ da álgebra $\mathbf{U}(\mathcal{G})$. O propósito desta seção é descrever a álgebra envolvente associativa da álgebra $\mathcal{G}$, a qual é dita extensão de $\mathbf{U}(\mathcal{G})$.

Fixemos a subálgebra de Cartan $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ e a decomposição triangular

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}^- \bigoplus \mathcal{H} \bigoplus \mathcal{G}^+.$$

As subálgebras $\mathcal{G}^-$ e $\mathcal{G}^+$ são geradas, respectivamente, pelos vetores associados às raízes negativas e positivas $e_{-\alpha}$ e e_α, com α percorrendo o conjunto de raízes positivas Δ^+ de $\mathcal{G}$ em relação a $\mathcal{H}$. Seja $R(\mathcal{H})$ o corpo de frações da álgebra comutativa $\mathbf{U}(\mathcal{H})$ e consideremos a extensão $\mathbf{U}'(\mathcal{G})$ de $\mathbf{U}(\mathcal{G})$ definida por

$$\mathbf{U}'(\mathcal{G}) := \mathbf{U}(\mathcal{G}) \bigotimes_{\mathbf{U}(\mathcal{H})} R(\mathcal{H}). \tag{2.1}$$

Observação 51 *1. Pelo Teorema de PBW, $\mathbf{U}(\mathcal{G})$ é um $\mathbf{U}(\mathcal{H})$ −módulo com uma base formada pelos monômios*

$$e(k,r) = e_{-\alpha_1}^{k_1} \cdots e_{-\alpha_m}^{k_m} e_{\alpha_m}^{r_m} \cdots e_{\alpha_1}^{r_1}. \tag{2.2}$$

Estes mesmos monômios formam uma base de $\mathbf{U}'(\mathcal{G})$ *sobre o corpo* $R(\mathcal{H})$. *Em outras palavras, cada* $x \in \mathbf{U}'(\mathcal{G})$ *pode ser expresso de forma única como*

$$x = \sum_{k,r} x(k,r)\, e(k,r), \tag{2.3}$$

com os coeficientes $x(k,r) \in R(\mathcal{H})$. *Em particular, chamamos* $x_0 = x(0,0)$ *o* ***termo livre*** *do elemento de (2.3).*

2. *Cada monômio (2.2) é pesado em relação à* $\mathcal{H}$ *com peso*

$$\mu = (r_1 - k_1)\alpha_1 + \cdots + (r_m - k_m)\alpha_m.$$

em relação à ação adjunta da álgebra $\mathcal{H}$ *em* $\mathbf{U}'(\mathcal{G})$. *Assim*

$$\mathbf{U}'(\mathcal{G}) = \bigoplus_{\mu \in \mathcal{H}^*} \mathbf{U}'_\mu(\mathcal{G}),$$

onde $\mathbf{U}'_\mu(\mathcal{G})$ *é gerado (sobre* $R(\mathcal{H})$*) pelos monômios (2.2) com peso fixo* μ.

Seja $J' = \mathbf{U}'(\mathcal{G})\,\mathcal{G}^+$ o ideal à esquerda de $\mathbf{U}'(\mathcal{G})$ gerado por $\mathcal{G}^+$. Seu normalizador NormJ' é uma subálgebra de $\mathbf{U}'(\mathcal{G})$ definido por

$$\mathrm{Norm}J' := \left\{u \in \mathbf{U}'(\mathcal{G}) \mid J'u \subset J'\right\}.$$

Observação 52 *J' é um ideal bilateral de NormJ'.*

Consideremos o espaço vetorial

$$M(\mathcal{G}) := \mathbf{U}'(\mathcal{G})/J'.$$

Temos que $\mathbf{U}'(\mathcal{G}) = R(\mathcal{H})\,\mathbf{U}(\mathcal{G}^-) \bigoplus J'$, de onde segue

$$M(\mathcal{G}) = \mathbf{U}'(\mathcal{G})/J' \simeq R(\mathcal{H})\,\mathbf{U}(\mathcal{G}^-) = \mathbf{U}(\mathcal{G}^-)\,R(\mathcal{H}).$$

A graduação por pesos de $\mathbf{U}'(\mathcal{G})$ induz a graduação em $M(\mathcal{G}) = \bigoplus_{\nu \in \mathcal{H}^*} M_\nu(\mathcal{G})$ onde

$M_\nu(\mathcal{G}) = \mathbf{U}'_\nu(\mathcal{G})/J' \simeq R(\mathcal{H})\,\mathbf{U}_\nu(\mathcal{G}^-)$.

Definição 53 *Introduzimos a notação $F_\mu(\mathcal{G})$ para o espaço vetorial de todas as séries formais (sobre $R(\mathcal{H})$) de monômios (2.2) com peso fixo μ. E definimos*

$$F(\mathcal{G}) := \bigoplus_\mu F_\mu(\mathcal{G}).$$

De acordo com esta definição, cada elemento $f \in F(\mathcal{G})$, é uma soma finita de elementos de peso $f_\mu \in F_\mu(\mathcal{G})$.

Observação 54 *$F(\mathcal{G})$ é um $R(\mathcal{H})-$bimódulo e $F_0(\mathcal{G})$ é uma álgebra sobre $R(\mathcal{H})$.*

Observe que os elementos $f \in F(\mathcal{G})$ agem como operadores de multiplicação à esquerda em $M(\mathcal{G})$.

Além disso, se $x \in M(\mathcal{G})$ temos que $e(k,r)\,x = 0$ para valores suficientemente grandes de k e r. Assim cada elemento $f \in F(\mathcal{G})$ pode ser associado a um operador (séries finitas) f' no espaço $M(\mathcal{G})$.

Considerando $M(\mathcal{G})$ como um $R(\mathcal{H})-$módulo à direita temos que a ação de f' comuta com a ação de $R(\mathcal{H})$, ou seja, f' é um elemento da álgebra $E'(\mathcal{G}) = End_{R(\mathcal{H})}M(\mathcal{G})$. Isto é,

$$E'(\mathcal{G}) := \left\{f' \in EndM(\mathcal{G}) \mid f' \circ h = h \circ f',\ \forall h \in R(\mathcal{H})\right\},$$

definimos

$$E_\mu(\mathcal{G}) := \left\{a \in E'(\mathcal{G}) \mid [\tau(h)\,x, a] = \mu(h)\,a,\ \forall h \in \mathcal{H}\right\},$$

onde

$$\begin{array}{rccccccc} \tau: & \mathcal{H} & \longrightarrow & EndM(\mathcal{G},\mathcal{L}) & & & & \\ & y & \longmapsto & \tau(y): & M(\mathcal{G},\mathcal{L}) & \longrightarrow & M(\mathcal{G},\mathcal{L}) \\ & & & & x & \longmapsto & \tau(y)(x) := yx \end{array}$$

Definição 55 *Dizemos que um endomorfismo $a \in E'(\mathcal{G})$ é finito se a é uma combinação linear finita de elementos de $E_\mu(\mathcal{G})$, isto é, a é finito se*

$$a = \sum_\mu a_\mu,$$

onde $a_\mu \in E_\mu(\mathcal{G})$.

Denotamos por $E(\mathcal{G}) := \bigoplus_\mu E_\mu(\mathcal{G})$ a álgebra dos endomorfismos finitos $a \in E'(\mathcal{G})$. Esta decomposição determina uma graduação da álgebra $E(\mathcal{G})$.

Observação 56 *1.* $E_\mu(\mathcal{G}) M_\nu(\mathcal{G}) \subset M_{\mu+\nu}(\mathcal{G})$.

De fato, se $a \in E_\mu(\mathcal{G})$ *e* $m \in M_\nu(\mathcal{G})$, *então*

$$[\tau(h)x, a] = \mu(h)a \quad e \quad [h, m] = \nu(h)m, \quad \forall h \in \mathcal{H},$$

respectivamente. Vejamos que $am \in M_{\mu+\nu}(\mathcal{G})$, *isto é, mostremos que* $[h, am] = (\mu+\nu)(h)am$. *De fato, seja* $h \in \mathcal{H}$, *logo*

$$[h, am] = [h, a]m + a[h, m] = \mu(h)am + a\nu(h)m = (\mu+\nu)(h)am.$$

2. Da observação anterior temos a seguinte definição equivalente para $E_\mu(\mathcal{G})$.

$$E_\mu(\mathcal{G}) = \left\{a \in E'(\mathcal{G}) \mid aM_\nu(\mathcal{H}) \subset M_{\mu+\nu}(\mathcal{G}),\ \nu \geq 0\right\}.$$

Consideremos em $\mathbf{U}'(\mathcal{G})$ a involução linear $x \mapsto x'$ definida sobre os geradores por

$$e'_\alpha = e_{-\alpha}, \qquad \alpha \in \Delta^+ \tag{2.4}$$

e a condição adicional $h' = h$, para todo $h \in \mathcal{H}$. Se $\mathcal{G}$ é semi-simples, a última condição é satisfeita automaticamente, pois os elementos $h_\alpha = [e_\alpha, e_{-\alpha}]$ geram $\mathcal{H}$.

Definição 57 *Para cada par de elementos* $x, y \in \mathbf{U}'(\mathcal{G})$, *define-se a* ***Forma de Shapovalov*** *como* $A(x, y) := (y'x)_0$, *onde* $x \mapsto x'$ *é a involução linear definida acima.*

Proposição 58 *1. Esta forma é bilinear e simétrica sobre* $R(\mathcal{H})$.

2. A forma A *é não-degenerada no* $\mathbf{U}(\mathcal{G}^-)$.

Demonstração. [Zh5]. ■

Observação 59 *A forma A é não-degenerada em $M(\mathcal{G})$, pois $M(\mathcal{G}) \simeq \mathbf{U}(\mathcal{G}^-) R(\mathcal{H})$.*

Assim como a involução (2.4), estudaremos também a involução Hermitiana $x \mapsto x^*$ da álgebra $\mathbf{U}'(\mathcal{G})$, definida sobre os geradores por

$$e_\alpha^* := e_{-\alpha}, \qquad \alpha \in \Delta^+ \tag{2.5}$$

e a condição adicional $h^* = h$ para os elementos de uma base fixa da álgebra $\mathcal{H}$ (incluindo os elementos h_α, para $\alpha \in \Delta^+$).

A forma de Shapovalov pode ser estendida à involução Hermitiana, definindo $A(x, y) := (y^* x)_0$.

Além disto, se V é um $\mathcal{G}-$módulo de dimensão finita, então V possui um produto escalar $\langle \circ, \circ \rangle$ em relação ao qual a involução (2.5) coincide com o conjugado Hermitiano, isto é, $\langle x\eta, \zeta \rangle = \langle \eta, x^* \zeta \rangle$, para todo $x \in \mathbf{U}(\mathcal{G})$ e todos $\eta, \zeta \in V$.

Depois estenderemos as involuções (2.4) e (2.5) para $F(\mathcal{G})$.

Teorema 60 *$F(\mathcal{G})$ é uma álgebra em relação à multiplicação de séries formais e a aplicação $\tau(f) = f'$ determina um isomorfismo de álgebras de $F(\mathcal{G})$ em $E(\mathcal{G})$, além disso, $F_\mu(\mathcal{G}) \simeq E_\mu(\mathcal{G})$, $\forall \mu \in \mathcal{H}^*$.*

Demonstração. Primeiro provaremos que a aplicação $\tau(f) = f'$ determina um isomorfismo de $F(\mathcal{G})$ em $E(\mathcal{G})$ como espaços vetoriais.

Da definição de $E_\mu(\mathcal{G})$, segue que se $f \in F_\mu(\mathcal{G})$ então $f' \in E_\mu(\mathcal{G})$. Assim é suficiente provar que $F_\mu(\mathcal{G}) \simeq E_\mu(\mathcal{G})$.

Como $M(\mathcal{G}) = \mathbf{U}(\mathcal{G}^-) R(\mathcal{H})$, podemos identificar $\mathbf{U}(\mathcal{G}^-)$ com um subespaço de $M(\mathcal{G})$. Fixemos em $M(\mathcal{G})$ uma base de pesos de monômios $u_i = e(k_i, 0)$, onde $i = 0, 1, \ldots$, com os pesos ν_i tais que $0 = \nu_0 > \nu_1 > \cdots$. Escrevemos o operador $x \in E'(\mathcal{G})$ em forma matricial como

$$x u_k = \sum_i u_i t_{ik}, \tag{2.6}$$

com coeficientes $t_{ik} \in R(\mathcal{H})$. A inclusão $x \in E_\mu(\mathcal{G})$ é equivalente ao fato que os coeficientes t_{ik} são diferentes de zero somente para $\nu_i = \nu_k + \mu$. Por outro lado, observemos que cada elemento

$f \in F(\mathcal{G})$ pode ser escrito unicamente na forma

$$f = \sum_{i,j} u_i c_{ij} u_j^*, \tag{2.7}$$

com coeficientes $c_{ij} \in R(\mathcal{H})$. A inclusão $f \in F_\mu(\mathcal{G})$ é equivalente ao fato que os coeficientes c_{ij} são diferentes de zero somente para $\nu_i = \nu_j + \mu$. Multiplicando (2.7) por u_k, vemos que $u_j^* u_k = 0$ em $M(\mathcal{G})$ para $\nu_j > \nu_k$. De onde

$$f' u_k = \sum_{\nu_j \leq \nu_k} u_i c_{ij} u_j^* u_k. \tag{2.8}$$

Assumindo $\nu_j = \nu_k$, encontramos que

$$u_j^* u_k = \left(u_j^* u_k\right)_0 = A(u_k, u_j) = \beta_{jk} \in \mathbf{U}(\mathcal{H}) \tag{2.9}$$

(congruente modJ', isto é, igualdade em $M(\mathcal{G})$).

Agora organizamos os pesos não-negativos em ordem crescente: $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots$ Seja M^λ a filtração correspondente de $M(\mathcal{G})$, isto é, M^λ é a soma direta de $M_\nu(\mathcal{G})$, para $0 \leq -\nu \leq \lambda$. Seja

$$E_\mu^\lambda = \left\{x \in E_\mu(\mathcal{G}) \mid xM^\lambda = 0\right\}. \tag{2.10}$$

Temos que, de acordo com (2.8), $f' \in E_\mu^\lambda$ com a condição adicional

$$c_{ij} = 0, \quad \text{para} \quad -\nu_j \leq \lambda. \tag{2.11}$$

Se fixamos $x \in E_\mu^\lambda$ e analisamos a equação $x = f'$ sobre $M^{\lambda'}$, onde λ' é o sucessor imediato de λ (isto é, $\lambda' = \lambda_{k+1}$ onde $\lambda = \lambda_k$). Impondo a condição adicional (2.11), de acordo com (2.6), (2.8) e (2.9) esta equação toma a forma

$$t_{ik} = \sum_j c_{ij} \beta_{jk}. \tag{2.12}$$

Como a forma de Shapovalov é não-degenerada, isto é, a matriz (β_{jk}) é não singular, e assim a equação (2.12) tem uma única solução sobre o corpo $R(\mathcal{H})$, portanto temos que $x - f' \in E_\mu^\lambda$.

Agora fixemos um elemento arbitrário $x \in E_\mu(\mathcal{G})$. Aplicando indutivamente a construção anterior, obtemos uma seqüência de elementos $f_k \in F_\mu(\mathcal{G})$, onde $k = 0, 1, \ldots$, tal que

$$\left(x - f_0' - f_1' - \ldots - f_k'\right) M^{\lambda_k} = 0. \tag{2.13}$$

Além disto, cada elemento f_k é a soma para $\lambda \geq \lambda_k$ de termos f_k^λ, onde a componente f^λ da série (2.7) é definida como a soma dos termos para $\nu_j = \lambda$. Fazendo

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=k}^{\infty} f_k^{\lambda_i} = \sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{i} f_k^{\lambda_i}\right). \tag{2.14}$$

Como cada soma entre os parênteses é finita (e igual a f^{λ_i}) a série (2.14) é um elemento do espaço $F_\mu(\mathcal{G})$. Observemos também que $f_{k+p}' \in E_\mu^{\lambda k}$ para $p \geq 1$. De onde (2.13) pode-se escrever na forma $x = f'$ sobre $M(\mathcal{G})$.

Assim dado $f' \in E_\mu(\mathcal{G})$ existe um $f \in F_\mu(\mathcal{G})$ tal que $\tau(f) = f'$, isto é, τ é sobrejetora.

De (2.12) e o fato da forma de Shapovalov ser não-degenerada temos que $t_{ik} = 0$ se, e somente se, $c_{ij} = 0$ para todo j e daí τ é injetora.

Portanto $F_\mu(\mathcal{G}) \simeq E_\mu(\mathcal{G})$, $\forall \mu \in \mathcal{H}^*$, e daí $F(\mathcal{G}) \simeq E(\mathcal{G})$.

Antes de provar que τ é um homomorfismo vejamos que $F(\mathcal{G})$ é uma álgebra.

Para $f_1, f_2 \in F(\mathcal{G})$, determinamos $f \in F(\mathcal{G})$ a partir da igualdade $f' = f_1' f_2'$. Analisando esta igualdade sobre os elementos $\xi \in M(\mathcal{G})$ vemos que $f = f_1 f_2$ é o produto das séries formais f_1, f_2. Assim temos que $F(\mathcal{G})$ é uma álgebra.

Além disso, a equação inicial $f' = f_1' f_2'$ mostra que a aplicação τ é um homomorfismo e isto completa a prova. ■

Corolário 61 *1. $F_0(\mathcal{G})$ é uma subálgebra de $F(\mathcal{G})$.*

2. $F_\mu(\mathcal{G})$ é um $F_0(\mathcal{G})$ −bimódulo.

3. $F_\mu(\mathcal{G}) = F_0(\mathcal{G})\,\mathbf{U}_\mu(\mathcal{G}) = \mathbf{U}_\mu(\mathcal{G})\,F_0(\mathcal{G})$.

4. A álgebra $F(\mathcal{G})$ está equipada com uma involução Hermitiana (automorfismo, antilinear

e involutivo) definida por

$$e_\alpha^* = e_{-\alpha}, \qquad \alpha \in \Delta^+. \text{ (Involução de Chevalley)}$$

Teorema 62 *O elemento* 1 *é o único elemento de* $M(\mathcal{G})$, *a menos de um fator de* $R(\mathcal{H})$, *satisfazendo as equações*

$$e_\alpha u = 0 \quad \text{para todo} \quad \alpha \in \Delta^+. \tag{2.15}$$

Demonstração. Claramente $e_\alpha 1 = 0$. Como $M(\mathcal{G}) \simeq \mathbf{U}(\mathcal{G}^-) R(\mathcal{H})$, é suficiente examinar os elementos $u \in \mathbf{U}_\mu(\mathcal{G}^-)$. A equação (2.15), neste caso significa que $e_\alpha u \in \mathbf{U}(\mathcal{G})\mathcal{G}^+$. Logo $e_\alpha u\xi = 0$, onde ξ é o vetor máximo do $\mathcal{G}-$módulo irredutível arbitrário de dimensão finita. Se $u \neq 0$, esta igualdade implica que $u\xi = 0$ e portanto $u \in \mathbf{U}(\mathcal{G})\mathcal{G}^+$. Por último observando que $\mathbf{U}(\mathcal{G}^-) \cap \mathbf{U}(\mathcal{G})\mathcal{G}^+ = 0$, temos que $u = 0$. ■

Observação 63 *Observe que* $M(\mathcal{G})$ *é um* $\mathbf{U}'(\mathcal{G})-$*módulo cíclico gerado pelo vetor máximo* $1 \in M(\mathcal{G})$.

2.2 Os elementos $p(t)$ e o projetor extremo

Antes de examinar os projetores extremos, estudaremos uma grande família de elementos da álgebra $F(\mathcal{G})$.

A partir daqui, os vetores e_α serão assumidos normalizados no sentido que

$$[e_\alpha, e_{-\alpha}] = h_\alpha, \qquad \alpha(h_\alpha) = 2, \qquad \text{para todo} \quad \alpha \in \Delta^+. \tag{2.16}$$

Para cada $\alpha \in \Delta^+$ e cada $t \in \mathbb{C}$, seja

$$p_\alpha(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} e_{-\alpha}^n e_\alpha^n f_{\alpha,n}^{-1}(t), \tag{2.17}$$

onde

$$f_{\alpha,0}(t) = 1, \text{ e } f_{\alpha,n}(t) = \prod_{j=1}^{n} (h_\alpha + t + j). \tag{2.18}$$

Observação 64 *É claro que* $p_\alpha(t) \in F_0(\mathcal{G})$ *e também que* $p_\alpha(t)^* = p_\alpha(t)$, *para* $t \in \mathbb{R}$.

Os elementos $e_{-\alpha}^{k}e_{\alpha}^{k}$ são de peso zero (em relação a $\mathcal{H}$).

As seguintes propriedades são de verificação imediata e serão usadas nos próximos Teoremas.

Propriedades

1. (a) $h_\alpha e_\alpha = e_\alpha (h_\alpha + 2)$.

   (b) $f_{\alpha,n}(t-2)\, e_\alpha = e_\alpha f_{\alpha,n}(t)$ e daí $f_{\alpha,n}^{-1}(t-2)\, e_\alpha = e_\alpha f_{\alpha,n}^{-1}(t)$.

   (c) $f_{\alpha,n}(t)\, e_{-\alpha} = e_{-\alpha} f_{\alpha,n}(t-2)$ e daí $f_{\alpha,n}^{-1}(t)\, e_{-\alpha} = e_{-\alpha} f_{\alpha,n}^{-1}(t-2)$.

   (d) $f_{\alpha,n+1}(t) = (h_\alpha + t + n + 1)\, f_{\alpha,n}(t) = (h_\alpha + t + 1)\, f_{\alpha,n}(t+1)$.

2. Para todo $\alpha \in \Delta^+$,

   (a) $\left[e_\alpha, e_{-\alpha}^{n}\right] = n(h_\alpha + n - 1)\, e_{-\alpha}^{n-1}$.

   (b) $\left[e_{-\alpha}, e_{\alpha}^{n}\right] = n(h_\alpha - n + 1)\, e_{\alpha}^{n-1}$.

Teorema 65 *Para todo $t \in \mathbb{C}$, temos que*

$$e_\alpha p_\alpha(t) = (t-1)\, p_\alpha(t-1)\, e_\alpha f_{\alpha,1}^{-1}(t). \tag{2.19}$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
e_\alpha p_\alpha(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} e_\alpha e_{-\alpha}^{n} e_\alpha^{n} f_{\alpha,n}^{-1}(t) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(e_{-\alpha}^{n} e_\alpha + n(h_\alpha + n - 1)\, e_{-\alpha}^{n-1}\right) e_\alpha^{n} f_{\alpha,n}^{-1}(t) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(e_{-\alpha}^{n} e_\alpha + n(h_\alpha + n - 1)\, e_{-\alpha}^{n-1}\right) e_\alpha^{n-1} f_{\alpha,n}^{-1}(t-2)\, e_\alpha
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} e_{-\alpha}^{n} e_\alpha^{n} f_{\alpha,n}^{-1}(t-2)\, e_\alpha \\
&\quad \underbrace{+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} n(h_\alpha + n - 1)\, e_{-\alpha}^{n-1} e_\alpha^{n-1} f_{\alpha,n}^{-1}(t-2)\, e_\alpha}_{\star}
\end{aligned}$$

agora

$$
\begin{aligned}
\bigstar &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} n\left(h_\alpha + n - 1\right) e_{-\alpha}^{n-1} e_\alpha^{n-1} f_{\alpha,n}^{-1}\left(t-2\right) e_\alpha \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \left(h_\alpha + n\right) e_{-\alpha}^{n} e_\alpha^{n} f_{\alpha,n+1}^{-1}\left(t-2\right) e_\alpha \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\left(h_\alpha + n\right)}{\left(h_\alpha + t - 1\right)} e_{-\alpha}^{n} e_\alpha^{n} f_{\alpha,n}^{-1}\left(t-1\right) e_\alpha
\end{aligned}
$$

substituindo em $\bigstar$ temos

$$
\begin{aligned}
e_\alpha p_\alpha\left(t\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} e_{-\alpha}^{n} e_\alpha^{n} \left(f_{\alpha,n}^{-1}\left(t-2\right) - \frac{\left(h_\alpha + n\right)}{\left(h_\alpha + t - 1\right)} f_{\alpha,n}^{-1}\left(t-1\right) \right) e_\alpha \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} e_{-\alpha}^{n} e_\alpha^{n} \left(\frac{\left(h_\alpha + t + n - 1\right)}{\left(h_\alpha + t - 1\right)} f_{\alpha,n}^{-1}\left(t-1\right) - \frac{\left(h_\alpha + n\right)}{\left(h_\alpha + t - 1\right)} f_{\alpha,n}^{-1}\left(t-1\right) \right) e_\alpha \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} e_{-\alpha}^{n} e_\alpha^{n} \frac{\left(t-1\right)}{\left(h_\alpha + t - 1\right)} f_{\alpha,n}^{-1}\left(t-1\right) e_\alpha \\
&= \left(t-1\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} e_{-\alpha}^{n} e_\alpha^{n} f_{\alpha,n}^{-1}\left(t-1\right) f_{\alpha,1}^{-1}\left(t-2\right) e_\alpha \\
&= \left(t-1\right) p_\alpha\left(t-1\right) e_\alpha f_{\alpha,1}^{-1}\left(t\right).
\end{aligned}
$$

■

Corolário 66 *O conjugado de (2.19) é a igualdade*

$$
p_\alpha\left(t\right) e_{-\alpha} = \left(t-1\right) f_{\alpha,1}^{-1}\left(t\right) e_{-\alpha} p_\alpha\left(t-1\right).
$$

Corolário 67 *O elemento $p_\alpha = p_\alpha\left(1\right)$ satisfaz a equação*

$$
e_\alpha p_\alpha = p_\alpha e_{-\alpha} = 0.
$$

Corolário 68 *O elemento p_α é um projetor Hermitiano da álgebra $F_0\left(\mathcal{G}\right)$:*

$$
p_\alpha^2 = p_\alpha \text{ e } p_\alpha^* = p_\alpha.
$$

Demonstração. Temos que

$$p_\alpha^2 = p_\alpha \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} e_{-\alpha}^n e_\alpha^n f_{\alpha,n}^{-1}(1) \right) = p_\alpha \left(\frac{(-1)^0}{0!} e_{-\alpha}^0 e_\alpha^0 f_{\alpha,0}^{-1}(1) \right) = p_\alpha$$

onde a segunda igualdade é conseqüência do corolário anterior, pois $p_\alpha e_{-\alpha} = 0$, isto é, $p_\alpha e_{-\alpha}^n = 0$ para $n \neq 0$.

A prova da outra igualdade é análoga. ■

Definição 69 *Um ordenamento das raízes positivas de uma álgebra de Lie é chamado* ***normal*** *se qualquer raiz composta está entre suas componentes. Por exemplo, existem exatamente dois ordenamentos normais para o sistema de raízes de tipo B_2,*

$$\Delta^+ = \{\alpha, \alpha+\beta, \alpha+2\beta, \beta\} \quad e \quad \Delta^+ = \{\beta, \alpha+2\beta, \alpha+\beta, \alpha\},$$

onde α e β são raízes simples.

Observação 70 *1. Para cada ordem normal $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, a ordem inversa $\alpha_m, \ldots, \alpha_1$ também é normal.*

2. Para cada sistema Δ^+, existe um ordenamento normal (mas não é único).

Fixemos uma ordem normal $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ no sistema Δ^+. No lugar da base de $\mathbf{U}(\mathcal{G})$ formada pelos monômios (2.2), consideremos os monômios

$$\epsilon(k,r) = e_{-\alpha_1}^{k_1} e_{\alpha_1}^{r_1} \cdots e_{-\alpha_m}^{k_m} e_{\alpha_m}^{r_m}. \tag{2.20}$$

Cada elemento $f \in F(\mathcal{G})$ será escrito na forma de uma série como

$$f = \sum_{k,r} \epsilon(k,r) f(k,r), \tag{2.21}$$

com coeficientes $f(k,r) \in R(\mathcal{H})$. A expansão (2.21) é chamada a **forma normal** do elemento f. O coeficiente $f_0 = f(0,0)$ é chamado o **termo livre** do elemento f.

Seja $|k| = k_1 + \cdots + k_m$ e seja E_n o gerado pelos monômios (2.2) (sobre $\mathbb{C}$) para $|k| + |r| \leq n$ onde $n = 0, 1, \ldots$

Proposição 71 *Os monômios $\epsilon(k,r)$ são expressos recursivamente em termos dos elementos da base (2.2), com coeficientes em $\mathbb{C}$, tais que*

$$\epsilon(k,r) \cong e(k,r) \bmod E_{n-1}, \quad \textit{onde} \quad |k|+|r|=n. \tag{2.22}$$

Além disso, o termo livre do elemento $f \in \mathbf{U}(\mathcal{G})$ em relação à base (2.20), coincide com o termo livre deste elemento em relação à base (2.2).

Demonstração. De fato (2.22) é uma conseqüência das relações de comutação na álgebra $\mathcal{G}$, mas os coeficientes em (2.22) podem ser polinômios nas variáveis h_α com coeficientes racionais, isto é, $\beta(h_{\alpha_i})\epsilon(k,r) = q(h_{\alpha_j})e(k,r)$. Nosso próximo passo é provar que os coeficientes são constantes.

Para cada $j=1,\ldots,m$, seja a_j (respectivamente b_j) a álgebra de Lie com base $e_{\alpha_i},\ldots,e_{\alpha_j}$ (respectivamente $e_{-\alpha_{i+1}},\ldots,e_{-\alpha_m}$).

Do fato que a ordem é normal, segue-se que $a_j \bigoplus b_j$ é uma álgebra de Lie. Pelo Teorema de P.B.W. na álgebra $a_j \bigoplus b_j$ concluímos que

$$\mathbf{U}(a_j)\,\mathbf{U}(b_j) = \mathbf{U}(b_j)\,\mathbf{U}(a_j)\,, \text{ para } j=1,\cdots,m. \tag{2.23}$$

Sejam $\epsilon_i = e_{-\alpha_i}^{k_i} e_{\alpha_i}^{r_i}$, para $i=1,\cdots,j$, logo de (2.23) cada $\epsilon_i \in \mathbf{U}(\mathcal{G}^-)\,\mathbf{U}(\mathcal{G}^j)$, por indução sobre j, temos

$$\epsilon_1 \cdots \epsilon_j \in \mathbf{U}(\mathcal{G}^-)\,\mathbf{U}(\mathcal{G}^j) \text{ para } j=1,\cdots,m.$$

Em particular para $j=m$ temos que $\epsilon(k,r) \in \mathbf{U}(\mathcal{G}^-)\,\mathbf{U}(\mathcal{G}^+)$ e portanto se decompõe numa combinação linear de monômios $e(k,r)$, os quais formam uma base $\mathbf{U}(\mathcal{G}^-)\,\mathbf{U}(\mathcal{G}^j)$, de onde os coeficientes são constantes. ■

Agora procedemos à construção principal desta seção.

Para cada $\alpha \in \Delta^+$ e para cada $\lambda \in \mathcal{H}^*$, seja $\lambda_\alpha = \lambda(h_\alpha)$. Fixemos uma ordem normal no sistema Δ^+ e para cada $t \in \mathcal{H}^*$ seja

$$p(t) = p_{\alpha_1}(t_1)\cdots p_{\alpha_m}(t_m)\,, \tag{2.24}$$

onde $t_i = t_{\alpha_i}$ para $i = 1, \ldots, m$.

Observamos que $p(t) \in F_0(\mathcal{G})$ para todo $t \in \mathcal{H}^*$.

Teorema 72 *Se $t = \rho \in \mathcal{H}^*$ (onde ρ é a semi-soma das raízes positivas de $\mathcal{G}$), então para todo $\alpha \in \Pi$ verifica-se a seguinte igualdade*

$$e_\alpha p(t) = p(t) e_{-\alpha} = 0, \quad \textit{para} \quad t_\alpha = 1.$$

Demonstração. Somente daremos a prova para as álgebras de Lie de posto 1 e 2. A demonstração do caso geral pode ser encontrada em [AST3] ou em [Zh6].

Escreveremos de forma abreviada $p_{\alpha_i} = p_{\alpha_i}(t_{\alpha_i})$.

1. **Para a álgebra $\mathcal{G} = \mathbf{A}_1$**

   O Teorema coincide com o Corolário 67 onde o vetor $t = \alpha_1 \in \mathcal{H}^*$ com α_1 a única raiz do sistema Δ^+.

2. **Para a álgebra $\mathcal{G} = \mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_1$**

   Temos $\Pi = \{\alpha, \beta\} = \Delta^+$, $p = p_\alpha p_\beta$ e $t_\alpha = t_\beta = 1$.

   (a) $e_\alpha p_\alpha p_\beta = e_\alpha p_\alpha(1) p_\beta(1) = 0$ pelo Corolário 67.

   (b) $e_\beta p_\alpha p_\beta \overset{\text{pois } \alpha+\beta \text{ não é raiz}}{=} p_\alpha e_\beta p_\beta = 0$, similar parte anterior.

3. **Para a álgebra $\mathcal{G} = \mathbf{A}_2$**

   Temos que $\Pi = \{\alpha, \beta\}$, $\Delta^+ = \{\alpha, \gamma, \beta\}$, com $\gamma = \alpha + \beta$ e que $p = p_\alpha p_\gamma p_\beta$, com $t_\alpha = t_\beta = 1$, e $t_\gamma = 2$.

   As seguintes propriedades são de verificação imediata para esta álgebra.

$$\begin{aligned}
e_\beta h_\alpha &= (h_\alpha + 1) e_\beta \text{ e daí } e_\beta f_{\alpha,n}^{-1}(t) = f_{\alpha,n}^{-1}(t+1) e_\beta, \\
e_\gamma h_\alpha &= (h_\alpha + 1) e_\gamma \text{ e daí } e_\gamma f_{\alpha,n}^{-1}(t) = f_{\alpha,n}^{-1}(t+1) e_\gamma, \\
e_\beta h_\gamma &= (h_\gamma - 1) e_\beta \text{ e daí } e_\beta f_{\gamma,n}^{-1}(t) = f_{\gamma,n}^{-1}(t-1) e_\beta, \\
[e_\beta, e_\alpha^n] &= -n e_\alpha^{n-1} e_\gamma, \quad [e_\beta, e_{-\gamma}^n] = n e_{-\alpha} e_{-\gamma}^{n-1}, \\
[e_{-\alpha}, e_\gamma^n] &= n e_\gamma^{n-1} e_\beta, \quad [e_\beta, e_{-\alpha}] = [e_\beta, e_\gamma] = 0.
\end{aligned}$$

(a) $e_\alpha p_\alpha p_\gamma p_\beta = e_\alpha p_\alpha (1) p_\gamma (2) p_\beta (1) = 0$, pelo Corolário 67.

(b) Para $e_\beta p_\alpha p_\gamma p_\beta$.

i. Primeiro vejamos que

$$e_\beta p_\alpha (1) = p_\alpha (2) e_\beta + e_{-\alpha} p_\alpha (1) (h_\alpha + 3)^{-1} e_\gamma.$$

De fato

$$\begin{aligned}
e_\beta p_\alpha &= e_\beta p_\alpha (1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} e_\beta e_{-\alpha}^n e_\alpha^n f_{\alpha,n}^{-1} (1) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} e_{-\alpha}^n e_\alpha^n e_\beta f_{\alpha,n}^{-1} (1) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} e_{-\alpha}^n [e_\beta, e_\alpha^n] f_{\alpha,n}^{-1} (1) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} e_{-\alpha}^n e_\alpha^n f_{\alpha,n}^{-1} (2) e_\beta + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} n e_{-\alpha}^n e_\alpha^{n-1} e_\gamma f_{\alpha,n}^{-1} (1) \\
&= p_\alpha (2) e_\beta + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n-1)!} e_{-\alpha}^n e_\alpha^{n-1} f_{\alpha,n}^{-1} (2) e_\gamma \\
&= p_\alpha (2) e_\beta + e_{-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} e_{-\alpha}^n e_\alpha^n f_{\alpha,n+1}^{-1} (2) e_\gamma \\
&= p_\alpha (2) e_\beta + e_{-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} e_{-\alpha}^n e_\alpha^n f_{\alpha,n}^{-1} (2) (h_\alpha + n + 3)^{-1} e_\gamma \\
&= p_\alpha (2) e_\beta + e_{-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} e_{-\alpha}^n e_\alpha^n f_{\alpha,n}^{-1} (1) \frac{(h_\alpha + 3)^{-1} (h_\alpha + n + 3)}{(h_\alpha + n + 3)} e_\gamma \\
&= p_\alpha (2) e_\beta + e_{-\alpha} p_\alpha (1) (h_\alpha + 3)^{-1} e_\gamma.
\end{aligned}$$

ii. Agora vejamos que o acontece com

$$\left(p_\alpha (2) e_\beta + e_{-\alpha} p_\alpha (1) (h_\alpha + 3)^{-1} e_\gamma \right) p_\gamma (2).$$

Temos que

$$\left(p_\alpha (2) e_\beta + e_{-\alpha} p_\alpha (1) (h_\alpha + 3)^{-1} e_\gamma \right) p_\gamma (2) = p_\alpha (2) e_\beta p_\gamma (2).$$

Mostremos que

$$e_\beta p_\gamma(2) = p_\gamma(1)\, e_\beta - e_{-\alpha} p_\gamma(1)\,(h_\gamma + 3)^{-1}\, e_\gamma.$$

De fato

$$\begin{aligned}
e_\beta p_\gamma(2) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} e_\beta e_{-\gamma}^n e_\gamma^n f_{\gamma,n}^{-1}(2) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} e_{-\gamma}^n e_\gamma^n e_\beta f_{\gamma,n}^{-1}(2) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left[e_\beta, e_{-\gamma}^n\right] e_\gamma^n f_{\gamma,n}^{-1}(2) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} e_{-\gamma}^n e_\gamma^n f_{\gamma,n}^{-1}(1)\, e_\beta + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} n e_{-\alpha} e_{-\gamma}^{n-1} e_\gamma^n f_{\gamma,n}^{-1}(2) \\
&= p_\gamma(1)\, e_\beta + \underbrace{e_{-\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)!} e_{-\gamma}^{n-1} e_\gamma^{n-1} f_{\gamma,n}^{-1}(2)\, e_\gamma}_{\bigstar}
\end{aligned}$$

Agora

$$\begin{aligned}
\bigstar &= -e_{-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} e_{-\gamma}^n e_\gamma^n f_{\gamma,n+1}^{-1}(2)\, e_\gamma \\
&= -e_{-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} e_{-\gamma}^n e_\gamma^n f_{\gamma,n}^{-1}(2)\,(h_\gamma + n + 3)^{-1}\, e_\gamma \\
&= -e_{-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} e_{-\gamma}^n e_\gamma^n f_{\gamma,n}^{-1}(1)\, \frac{(h_\gamma + 3)^{-1}(h_\gamma + n + 3)}{(h_\gamma + n + 3)} e_\gamma
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -e_{-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} e_{-\gamma}^n e_\gamma^n f_{\gamma,n}^{-1}(1)\,(h_\gamma + 3)^{-1}\, e_\gamma \\
&= -e_{-\alpha} p_\gamma(1)\,(h_\gamma + 3)^{-1}\, e_\gamma \\
&= -e_{-\alpha} p_\gamma(1)\, e_\gamma\,(h_\gamma + 1)^{-1} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Logo $e_\beta p_\gamma(2) = p_\gamma(1)\, e_\beta$.

Logo de (i) e (ii) temos que

$$\begin{aligned} e_\beta p_\alpha(1)\, p_\gamma(2)\, p_\beta(1) &= \left(p_\alpha(2)\, e_\beta + e_{-\alpha} p_\alpha(1)\,(h_\alpha+3)^{-1} e_\gamma\right) p_\gamma(2)\, p_\beta(1) \\ &= p_\alpha(2)\, e_\beta p_\gamma(2)\, p_\beta(1) \\ &= p_\alpha(2)\, p_\gamma(1)\, e_\beta p_\beta(1) \\ &= 0. \end{aligned}$$

4. **Para o caso $\mathcal{G}=\mathbf{B}_2$**

Temos que $\Pi = \{\alpha,\beta\}$, $\Delta^+ = \{\alpha,\gamma,\delta,\beta\}$ com $\gamma = \alpha+\beta$, $\delta = \alpha+2\beta$, temos que $p = p_\alpha p_\gamma p_\delta p_\beta$, com $t_\alpha = t_\beta = 1$, $t_\gamma = 3$ e $t_\delta = 2$.

As seguintes propriedades são de verificação imediata para esta álgebra.

$$\begin{aligned} e_\beta h_\gamma &= h_\gamma e_\beta,\ \ h_\gamma e_{-\alpha} = e_{-\alpha}(h_\gamma - 2),\ \ e_\beta h_\delta = (h_\delta - 1)\, e_\beta, \\ h_\delta e_{-\gamma} &= e_{-\gamma}(h_\delta - 1),\ \ \left[e_\beta, e_{-\gamma}^n\right] = 2n e_{-\alpha} e_{-\gamma}^{n-1}, \\ \left[e_\beta, e_\gamma^n\right] &= 2n e_\gamma^{n-1} e_\delta,\ \ \left[e_\beta, e_{-\delta}^n\right] = n e_{-\gamma} e_{-\delta}^{n-1}. \end{aligned}$$

(a) $e_\alpha p_\alpha p_\gamma p_\delta p_\beta = e_\alpha p_\alpha(1)\, p_\gamma(3)\, p_\delta(2)\, p_\beta(1) = 0$, pelo corolário 67.

(b) Para $e_\beta p_\alpha p_\gamma p_\delta p_\beta$.

i. Da parte (i) de $3\,(b)$ na álgebra A_2 temos que

$$e_\beta p_\alpha(1) = p_\alpha(2)\, e_\beta + e_{-\alpha} p_\alpha(1)\,(h_\alpha+3)^{-1} e_\gamma.$$

ii. Usando as fórmulas de comutação, de forma análoga aos casos anteriores, verifica-se que

$$e_\beta p_\gamma(3) = p_\gamma(3)\, e_\beta - 2 e_{-\alpha} p_\gamma(1)\, e_\gamma (h_\gamma+3)^{-1} - \underbrace{2 e_\gamma p_\gamma(1)\,(h_\delta+1)^{-1} e_\delta}_{=0}$$

e que

$$e_\beta p_\delta(2) = p_\delta(1)\, e_\beta + e_{-\gamma} p_\delta(1)\, e_\delta (h_\delta+2)^{-1}.$$

Voltando a equação inicial, temos

$$e_\beta p_\alpha(1)\, p_\gamma(3)\, p_\delta(2)\, p_\beta(1) =$$

$$\begin{aligned}
&= \left(p_\alpha(2)\, e_\beta + e_{-\alpha} p_\alpha(1)\,(h_\alpha+3)^{-1} e_\gamma\right) p_\gamma(3)\, p_\delta(2)\, p_\beta(1)\\
&= p_\alpha(2)\, e_\beta p_\gamma(3)\, p_\delta(2)\, p_\beta(1)\\
&= p_\alpha(2)\left(p_\gamma(3)\, e_\beta - 2e_{-\alpha} p_\gamma(1)\, e_\gamma\,(h_\gamma+3)^{-1}\right) p_\delta(2)\, p_\beta(1)\\
&= p_\alpha(2)\, p_\gamma(3)\left(p_\delta(1)\, e_\beta + e_{-\gamma} p_\delta(1)\, e_\delta\,(h_\delta+2)^{-1}\right) p_\beta(1)\\
&= 0.
\end{aligned}$$

5. **Para o caso $\mathcal{G}=\mathbf{G}_2$**

   Temos $\Pi = \{\alpha_1, \alpha_6\}$, $\Delta^+ = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}$ com $\alpha_2 = \alpha_1 + \alpha_6$, $\alpha_3 = 2\alpha_1 + 3\alpha_6$, $\alpha_4 = \alpha_1 + 2\alpha_6$, $\alpha_5 = \alpha_1 + 3\alpha_6$ e temos que $p = p_{\alpha_1} p_{\alpha_2} p_{\alpha_3} p_{\alpha_4} p_{\alpha_5} p_{\alpha_6}$ com $t_{\alpha_i} = 1, 4, 3, 5, 2, 1$, respectivamente.

   As contas são análogas aos casos anteriores e dispendiosas, por isso não as faremos aqui.

Assim para as álgebras de Lie de posto 1 e 2 temos que $e_\alpha p(t) = 0$, para todo $\alpha \in \Pi$. A prova de $p(t)\, e_{-\alpha} = 0$, para todo $\alpha \in \Pi$ é análoga. ■

Teorema 73 *O elemento $p = p(\rho)$ (onde ρ é a semi-soma das raízes positivas) é o único elemento de $F(\mathcal{G})$, a menos de um fator de $R(\mathcal{H})$, que satisfaz as equações*

$$e_\alpha p(t) = p(t)\, e_{-\alpha} = 0 \quad \textit{para todo} \quad \alpha \in \Pi. \tag{2.25}$$

Em particular, p não depende da escolha da ordem normal em Δ^+ e é um projetor Hermitiano em $F_0(\mathcal{G})$, isto é,

$$p^2 = p, \quad e \quad p^* = p. \tag{2.26}$$

Demonstração. A existência de uma solução para (2.25) é conseqüência do Teorema anterior.

Para a unicidade, seja $f \in F(\mathcal{G})$ satisfazendo (2.25), então pelo Teorema 62 $fM(\mathcal{G}) \subset R(\mathcal{H}) \cdot 1$ e $f\mathcal{G}^- M(\mathcal{G}) = 0$. Como $M(\mathcal{G}) = \mathbf{U}(\mathcal{G}^-) R(\mathcal{H})$ então

$$M(\mathcal{G}) = \mathcal{G}^- M(\mathcal{G}) \bigoplus R(\mathcal{H}) \cdot 1. \tag{2.27}$$

Também temos que $f \cdot 1 = f_0 \cdot 1$, onde f_0 é o termo livre do elemento f. Em particular, $p \cdot 1 = 1$. Assumindo $f_0 = 1$, temos que $(f - p) M(\mathcal{G}) = 0$ e pelo Teorema 60 segue que $f = p$.

Assumindo, em particular que $f = p^2$ e $f = p^*$ obtemos (2.26) e o Teorema é provado. ■

Observação 74 *A formulação do Teorema anterior pode ser modificada se consideramos somente os elementos $f \in F_0(\mathcal{G})$. Neste caso, as duas componentes de (2.27) são invariantes em relação a f. A condição $e_\alpha f = 0$, para todo $\alpha \in \Pi$, isto é, $fM(\mathcal{G}) \subset R(\mathcal{H}) \cdot 1$, é equivalente neste caso a $f\mathcal{G}^- M(\mathcal{G}) = 0$, isto é, $fe_{-\alpha} = 0$, para todo $\alpha \in \Pi$. De onde obtemos o seguinte corolário.*

Corolário 75 *O elemento $p = p(\rho)$ é o único elemento de $F_0(\mathcal{G})$, a menos de um fator de $R(\mathcal{H})$, que satisfaz as equações $e_\alpha f = 0$, para todo $\alpha \in \Pi$ (ou as equações $fe_{-\alpha} = 0$, para todo $\alpha \in \Pi$).*

Definição 76 *O elemento $p(\rho)$ é chamado o* ***projetor extremo*** *da álgebra $\mathcal{G}$ (em relação a Δ^+). No lugar de $p(\rho)$ as vezes usa-se o símbolo $p(\mathcal{G})$ para indicar a dependência da álgebra $\mathcal{G}$, isto é,*

$$p = p(\rho) = p_{\alpha_1} \cdots p_{\alpha_m},$$

onde $\alpha \in \Delta^+$ e

$$p_\alpha := 1 + \sum_{k=1}^{\infty} e_{-\alpha}^k e_\alpha^k \frac{(-1)^k}{k!\,(h_\alpha + \rho(h_\alpha) + 1) \cdots (h_\alpha + \rho(h_\alpha) + k)}, \tag{2.28}$$

onde h_α é definido em (2.16) e ρ é a semi-soma das raízes positivas.

Observação 77 *A condição de simetria do operador $p = p(\rho)$ é uma relação de comutação não trivial entre os operadores $p_\alpha = p_\alpha(\rho_\alpha)$ para $\alpha \in \Delta^+$. Escrevemos de forma explícita estas*

relações para as álgebras de Lie semi-simples de posto 2.

$$\begin{array}{ll} A_1 \bigoplus A_1 & p_\alpha p_\beta = p_\beta p_\alpha \\ A_2 & p_\alpha p_{\alpha+\beta} p_\beta = p_\beta p_{\alpha+\beta} p_\alpha \\ B_2 & p_\alpha p_{\alpha+\beta} p_{\alpha+2\beta} p_\beta = p_\beta p_{\alpha+2\beta} p_{\alpha+\beta} p_\alpha \\ G_2 & p_\alpha p_{\alpha+\beta} p_{2\alpha+3\beta} p_{\alpha+2\beta} p_{\alpha+3\beta} p_\beta = p_\beta p_{\alpha+3\beta} p_{\alpha+2\beta} p_{2\alpha+3\beta} p_{\alpha+\beta} p_\alpha . \end{array} \tag{2.29}$$

As demonstrações destas equações (2.29) podem ser encontradas em [AST3] ou [Zh6].

2.3 A álgebra de Mickelsson

Sejam $\mathcal{G}$ uma álgebra de Lie arbitrária sobre $\mathbb{C}$ e $\mathcal{L}$ uma subálgebra redutível em $\mathcal{G}$ (isto quer dizer que $\mathcal{G}$ é um $\mathcal{L}-$módulo redutível em relação à ação adjunta de $\mathcal{L}$ em $\mathcal{G}$). Em particular, $\mathcal{L}$ é redutível. Daí,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^- \bigoplus \mathcal{H} \bigoplus \mathcal{L}^+,$$

onde $\mathcal{H}$ é a subálgebra de Cartan de $\mathcal{L}$ e as subálgebras $\mathcal{L}^-$ e $\mathcal{L}^+$ são geradas, respectivamente, pelos vetores associados às raízes negativas e positivas $e_{-\alpha}$ e e_α, com α percorrendo o conjunto de raízes positivas Δ^+ de $\mathcal{L}$ em relação a $\mathcal{H}$.

Temos também que

$$\mathcal{G} = \mathcal{L} \bigoplus \mathcal{G}',$$

onde $\mathcal{G}'$ é o $\mathcal{L}-$módulo complementar (determinado em vista da redutibilidade de $\mathcal{L}$ em $\mathcal{G}$).

Seja $J := \mathbf{U}(\mathcal{G})\,\mathcal{L}^+$ o ideal à esquerda de $\mathbf{U}(\mathcal{G})$ gerado por $\mathcal{L}^+$. Seu normalizador Norm$J$ é uma subálgebra de $\mathbf{U}(\mathcal{G})$ definida por

$$\mathrm{Norm}J := \{u \in \mathbf{U}(\mathcal{G}) \mid Ju \subset J\}.$$

Observação 78 *J é um ideal bilateral de Norm$J$.*

Definição 79 *A **álgebra de Mickelsson**[1] $S(\mathcal{G},\mathcal{L})$ é definida como o quociente*

$$S(\mathcal{G},\mathcal{L}) := NormJ/J.$$

Seja $R(\mathcal{H})$ o corpo de frações da álgebra comutativa $\mathbf{U}(\mathcal{H})$. Consideremos a extensão $\mathbf{U}'(\mathcal{G})$ da álgebra envolvente universal $\mathbf{U}(\mathcal{G})$ definida por

$$\mathbf{U}'(\mathcal{G}) := \mathbf{U}(\mathcal{G}) \bigotimes_{\mathbf{U}(\mathcal{H})} R(\mathcal{H}).$$

Seja $J' = \mathbf{U}'(\mathcal{G})\mathcal{L}^+$ o ideal à esquerda de $\mathbf{U}'(\mathcal{G})$ gerado por $\mathcal{L}^+$. Exatamente como acontece com o ideal J, J' é um ideal bilateral do normalizador NormJ', onde

$$\text{norm}J' := \left\{u \in \mathbf{U}'(\mathcal{G}) \mid J'u \subset J'\right\}.$$

Definição 80 *A **álgebra de Mickelsson-Zhelobenko**[2] $Z(\mathcal{G},\mathcal{L})$ é definida como o quociente*

$$Z(\mathcal{G},\mathcal{L}) := NormJ'/J'.$$

Observação 81 *1. $Z(\mathcal{G},\mathcal{L})$ é uma extensão da álgebra de Mickelsson $S(\mathcal{G},\mathcal{L})$,*

$$Z(\mathcal{G},\mathcal{L}) = S(\mathcal{G},\mathcal{L}) \bigotimes_{\mathbf{U}(\mathcal{H})} R(\mathcal{H}).$$

2. Uma definição equivalente da álgebra $Z(\mathcal{G},\mathcal{L})$ pode ser dada usando o espaço quociente

$$M(\mathcal{G},\mathcal{L}) := \mathbf{U}'(\mathcal{G})/J'.$$

Proposição 82 *A álgebra de Mickelsson-Zhelobenko $Z(\mathcal{G},\mathcal{L})$ coincide com o subespaço dos*

[1] *Mickelsson [Mi2] e Van de Homberg [Ho] estudaram esta álgebra com os nomes de "step algebras" ou $S-$álgebras*

[2] *Zhelobenko algumas vezes usou os nomes de $Z-$álgebras ou álgebras de Mickelsson estendidas.*

vetores máximos associados a $\mathcal{L}$ em $M(\mathcal{G},\mathcal{L})$, isto é,

$$Z(\mathcal{G},\mathcal{L}) = M(\mathcal{G},\mathcal{L})^{+},$$

onde

$$M(\mathcal{G},\mathcal{L})^{+} := \{v \in M(\mathcal{G},\mathcal{L}) \mid \mathcal{L}^{+}v = 0\}.$$

Demonstração. Sabe-se que $Z(\mathcal{G},\mathcal{L}) \subset M(\mathcal{G},\mathcal{L})$, pois $J' \subset \mathrm{Norm}J' \subset \mathbf{U}'(\mathcal{G})$ e portanto

$$Z(\mathcal{G},\mathcal{L}) = \mathrm{Norm}J'/J' \subset \mathbf{U}'(\mathcal{G})/J' = M(\mathcal{G},\mathcal{L}).$$

Seja $z \in Z(\mathcal{G},\mathcal{L})$, logo $z = x + J'$ com $x \in \mathrm{Norm}J'$ e provemos que $\mathcal{L}^{+}z = 0$. Seja $w \in \mathcal{L}^{+}$, logo $wz = w(x + J') = wx + wJ'$, mas $w \in J'$ $(w = 1w)$ e $x \in \mathrm{Norm}J'$ então $wx \in J'$ e assim $wz \in J'$. Portanto $wz = 0 \bmod J'$, para todo $w \in \mathcal{L}^{+}$ e assim $z \in M(\mathcal{G},\mathcal{L})^{+}$.

Por outro lado, se $z \in M(\mathcal{G},\mathcal{L})^{+}$ então $z \in M(\mathcal{G},\mathcal{L})$ e $wz = 0$, para todo $w \in \mathcal{L}^{+}$. Como $z \in M(\mathcal{G},\mathcal{L})$, $z = x + J'$ com $x \in \mathbf{U}'(\mathcal{G})$ e $0 = wz = w(x + J')$, logo $wx \in J'$, isto é, $J'x \subset J'$ (pois $w = 1w \in J'$) de onde $x \in \mathrm{Norm}J'$, portanto $z \in \mathrm{Norm}J'/J' = Z(\mathcal{G},\mathcal{L})$. ■

Observemos que a álgebra $F(\mathcal{L})$ age naturalmente no $M(\mathcal{G},\mathcal{L})$ (como fx é uma série finita para $f \in F(\mathcal{L})$, $x \in M(\mathcal{G},\mathcal{L})$).

Teorema 83 *Se $p(\mathcal{L})$ é o projetor extremo da álgebra $\mathcal{L}$, então*

$$Z(\mathcal{G},\mathcal{L}) = p(\mathcal{L})\, M(\mathcal{G},\mathcal{L}).$$

Demonstração. A inclusão $p(\mathcal{L})\, M(\mathcal{G},\mathcal{L}) \subset Z(\mathcal{G},\mathcal{L})$ é conseqüência do Teorema 73, pois cada elemento do tipo $x = py$ $(p = p(\mathcal{L}))$ satisfaz as equações $e_\alpha x = 0$ para $\alpha \in \Delta^{+}$.

Para a inclusão contrária, seja $x \in Z(\mathcal{G},\mathcal{L})$, isto é, $e_\alpha x = 0$, para todo $\alpha \in \Delta^{+}$. Escrevendo cada cofator p_α na forma de uma série de potências $e^{n}_{-\alpha}e^{n}_{\alpha}$, temos que $px = p_0 x = x$, e o Teorema está provado. ■

Fixemos uma base de pesos $e_1, \ldots, e_n$ (em relação à ação adjunta de $\mathcal{H}$) do módulo complementar $\mathcal{G}'$ e seja $\mathbf{U}(\mathcal{G}')$ gerada pelos monômios

$$e(\mathcal{L}) = e_1^{k_1} \cdots e_n^{k_n}. \tag{2.30}$$

Pelo Teorema de PBW,

$$\mathbf{U}(\mathcal{G}) = \mathbf{U}(\mathcal{G}')\,\mathbf{U}(\mathcal{H}) \bigoplus N(\mathcal{G},\mathcal{L}),$$

onde

$$N(\mathcal{G},\mathcal{L}) = \mathcal{L}^{-}\mathbf{U}(\mathcal{G}) + \mathbf{U}(\mathcal{G})\,\mathcal{L}^{+}.$$

Considerando a extensão sobre $R(\mathcal{H})$, obtemos uma igualdade análoga em $\mathbf{U}'(\mathcal{G})$

$$\mathbf{U}'(\mathcal{G}) = \mathbf{U}'(\mathcal{G}') \bigoplus N'(\mathcal{G},\mathcal{L}), \tag{2.31}$$

onde $\mathbf{U}'(\mathcal{G}')$ é gerado pelos monômios (2.30) sobre o corpo $R(\mathcal{H})$ e é assumido que

$$N'(\mathcal{G},\mathcal{L}) = \mathcal{L}^{-}\mathbf{U}'(\mathcal{G}) + \mathbf{U}'(\mathcal{G})\,\mathcal{L}^{+}.$$

Como a segunda componente de (2.31) contém $\mathbf{U}'(\mathcal{G})\,\mathcal{L}^{+}$, podemos pensar $\mathbf{U}'(\mathcal{G}')$ como um subespaço de $M(\mathcal{G},\mathcal{L})$.

Teorema 84 *O operador $p(\mathcal{L})$ em $M(\mathcal{G},\mathcal{L})$ é um operador projeção sobre $Z(\mathcal{G},\mathcal{L})$, com núcleo*

$$N_0(\mathcal{G},\mathcal{L}) = N'(\mathcal{G},\mathcal{L}) \big/ \mathbf{U}'(\mathcal{G})\,\mathcal{L}^{+}. \tag{2.32}$$

A aplicação $x \longmapsto px$ determina um isomorfismo de espaços vetoriais entre $\mathbf{U}'(\mathcal{G}')$ e $Z(\mathcal{G},\mathcal{L})$. Em particular,

$$Z(\mathcal{G},\mathcal{L}) = p(\mathcal{L})\,\mathbf{U}'(\mathcal{G}). \tag{2.33}$$

Demonstração. Analisando a aplicação $x \longmapsto px$ no espaço $\mathbf{U}'(\mathcal{G})$ módulo $\mathbf{U}'(\mathcal{G})\,\mathcal{L}^{+}$, temos que

$$pN'(\mathcal{G},\mathcal{L}) = p\left(\mathcal{L}^{-}\mathbf{U}'(\mathcal{G}) + \mathbf{U}'(\mathcal{G})\,\mathcal{L}^{+}\right) = p\left(\mathcal{L}^{-}\mathbf{U}'(\mathcal{G})\right) = 0,$$

a última igualdade pois $pe_{-\alpha} = 0$ para todo $\alpha \in \Delta^{+}$ e disto segue (2.33).

Por outro lado, escrevendo cada cofator p_α na forma de uma série de potências $e_{-\alpha}^{n}e_{\alpha}^{n}$, temos que $px = x + y$, para cada $x \in \mathbf{U}'(\mathcal{G})$, logo $y \in \mathcal{L}^{-}\mathbf{U}'(\mathcal{G})$. A condição $px = 0$ implica que $x = -y \in N'(\mathcal{G},\mathcal{L})$, de onde o kernel do operador p coincide com $N'(\mathcal{G},\mathcal{L})$.

Em particular, $px = 0$ para $x \in \mathbf{U}'(\mathcal{G})$ é possível somente para $x = 0$ por (2.31). Assim completamos a demonstração do Teorema. ■

Corolário 85 *Temos a seguinte igualdade*

$$M(\mathcal{G}, \mathcal{L}) = Z(\mathcal{G}, \mathcal{L}) \bigoplus N_0(\mathcal{G}, \mathcal{L}).$$

Teorema 86 *A identidade e os elementos*

$$z_i = pe_i, \qquad i = 1, ..., n$$

são geradores da álgebra de Mickelsson-Zhelobenko $Z(\mathcal{G}, \mathcal{L})$. Além disso, os monômios

$$z(\mathcal{L}) = z_1^{k_1} \cdots z_n^{k_n}, \qquad k_i \in \mathbb{Z}_+,$$

formam uma base de $Z(\mathcal{G}, \mathcal{L})$.

Demonstração. Este é uma conseqüência do Teorema 83 e do Corolário anterior. ■

Observação 87 *Considerando $Z(\mathcal{G}, \mathcal{L})$ como um $R(\mathcal{H})$ −módulo à direita, é possível introduzir os elementos normalizados*

$$s_i = z_i \pi_i, \qquad \pi_i \in \mathbf{U}(\mathcal{H})$$

multiplicando z_i por seu denominador à direita π_i. Portanto os $s_i's$ podem ser vistos como elementos da álgebra de Mickelsson $S(\mathcal{G}, \mathcal{L})$.

Para formular o Teorema final desta seção, para qualquer $\mathcal{G}-$módulo V seja

$$V^+ = \{v \in V \mid \mathcal{L}^+ v = 0\}.$$

Teorema 88 *Seja $V = \mathbf{U}(\mathcal{G})v$ um $\mathbf{U}(\mathcal{G})$ −módulo gerado por um elemento $v \in V^+$. Então o subespaço V^+ é linearmente gerado pelos elementos*

$$s_1^{k_1} \cdots s_n^{k_n} v, \qquad k_i \in \mathbb{Z}_+.$$

Demonstração. Observamos que V^+ é invariante em relação ao norm$J$, porém o ideal $J = \mathbf{U}(\mathcal{G})\,\mathcal{L}^+$ o anula. Seja $v \in V^+$ então $pv = v$, de onde $v \in Z(\mathcal{G}, \mathcal{L})\,V^+$ e multiplicando por seu denominador à direita π_i, temos que $v \in S(\mathcal{G}, \mathcal{L})\,V^+$ e o Teorema está provado. ■

Capítulo 3

Bases de Gelfand-Tsetlin para representações de $\mathcal{G}l_n$

Seja E_{ij}, $i,j = 1,2,...,n$ a base canônica da álgebra de Lie linear geral $\mathcal{G}l_n$ sobre o corpo dos números complexos. A subálgebra $\mathcal{G}l_{n-1}$ é gerada pelos elementos da base E_{ij} com $i,j = 1,...,n-1$. Denote por $\mathcal{H} = \mathcal{H}_n$ a subálgebra de Cartan diagonal em $\mathcal{G}l_n$. Os elementos $E_{11},...,E_{nn}$ formam uma base de $\mathcal{H}$.

Existe uma correspondência bijetora entre as representações irredutíveis de dimensão finita de $\mathcal{G}l_n$ e as $n-$uplas de números complexos $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ tais que

$$\lambda_i - \lambda_{i+1} \in \mathbb{Z}_+ \quad \text{para} \quad i = 1,...,n-1. \tag{3.1}$$

Cada uma destas $n-$uplas é chamada **peso máximo** da representação correspondente, a qual se denota por $L(\lambda)$. Este peso máximo contém um único vetor ξ, a menos de um múltiplo escalar, diferente de zero (o **vetor máximo**) tal que $E_{ii}\xi = \lambda_i\xi$, para $i = 1, \ldots, n$ e $E_{ij}\xi = 0$, para $1 \leq i < j \leq n$.

Exemplo 89 *1. O peso máximo $\lambda = (1,0,-1)$ corresponde à representação adjunta de*

$L(\lambda) = \mathcal{G}l_3$ *sobre* $\mathcal{G}l_3$

$$\begin{array}{rcl} ad: \ \mathcal{G}l_3 & \longrightarrow & End(\mathcal{G}l_3) \\ x & \longrightarrow & adx: \ \begin{array}{ccc} \mathcal{G}l_3 & \longrightarrow & \mathcal{G}l_3 \\ y & \longrightarrow & adx(y) = [x,y] \end{array} \end{array}$$

e tem como vetor máximo

$$\begin{aligned} \xi &= (\alpha_1, 0, \alpha_3, 0, \alpha_1, 0, 0, 0, \alpha_1)^t \\ &= \alpha_1 (E_{11} + E_{22} + E_{33}) + \alpha_3 E_{13} = \alpha_1 I_3 + \alpha_3 E_{13}. \end{aligned}$$

2. *O peso máximo* $\lambda = (1,0,0)$ *corresponde à representação canônica de* $L(\lambda) = \mathbb{C}^3$ *sobre* $\mathcal{G}l_3$

$$\begin{array}{rcl} \rho: \ \mathcal{G}l_3 & \longrightarrow & End(\mathbb{C}^3) \\ x & \longrightarrow & \rho x: \ \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^3 & \longrightarrow & \mathbb{C}^3 \\ y & \longrightarrow & \rho x(y) = x.y \end{array} \end{array}$$

e tem como vetor máximo $\xi = (\alpha_1, 0, 0)$.

O seguinte Teorema é conhecido como a regra de ramificação para a redução $\mathcal{G}l_n \downarrow \mathcal{G}l_{n-1}$.

Teorema 90 *A restrição de* $L(\lambda)$ *à subálgebra* $\mathcal{G}l_{n-1}$ *é isomorfa a soma direta das representações irredutíveis não equivalentes duas a duas, isto é,*

$$L(\lambda)\,|_{\mathcal{G}l_{n-1}} \cong \bigoplus_{\mu} L'(\mu),$$

somando sobre os pesos máximos que satisfazem as condições intermediárias

$$\lambda_i - \mu_i \in \mathbb{Z}_+ \quad e \quad \mu_i - \lambda_{i-1} \in \mathbb{Z}_+. \tag{3.2}$$

A regra pode ser atribuída a I. Schur, pois foi ele o primeiro a descobrir a importância teórica das representações em uma classe particular de polinômios simétricos os quais levam seu nome. Sem perda de generalidade pode-se considerar λ como uma partição: Pode-se tomar a composição de $L(\lambda)$ com um automorfismo apropriado de $\mathbf{U}(\mathcal{G}l_n)$ o qual leva E_{ij} em $E_{ij} + \delta_{ij} a$

para algum $a \in \mathbb{C}$. O caráter de $L(\lambda)$ considerado como um Gl_n-módulo é o polinômio de Schur $s_\lambda(x)$, $x = (x_1, \cdots, x_n)$ definido por

$$s_\lambda(x) := tr(g, L(\lambda)),$$

onde $x_1, ..., x_n$ são os valores próprios de $g \in Gl_n$. O polinômio de Schur é simétrico em cada componente x_i e pode ser dado pela fórmula combinatorial explícita

$$s_\lambda(x) = \sum_T x^T, \tag{3.3}$$

somando sobre os tabuleiros semi-standard T da forma λ (observação 91) onde x^T é o monômio contendo x_i, com a potência igual ao número de ocorrências de i em T; veja por exemplo [Ma, Capítulo 1] ou [Sa, Capítulo 4] para mais detalhes. Para descobrir o que ocorre quando $L(\lambda)$ é restringido a Gl_{n-1} precisa-se pôr $x_n = 1$ na fórmula (3.3). O lado direito, então é escrito como a soma dos polinômios de Schur $s_\mu(x_1, \ldots, x_{n-1})$, com μ satisfazendo (3.2).

Por outro lado, a liberdade de multiplicidade da redução $\mathcal{G}l_n \downarrow \mathcal{G}l_{n-1}$ pode ser explicada pelo fato que o espaço vetorial $Hom(L'(\mu), L(\lambda))$ possui uma representação irredutível natural do centralizador $\mathbf{U}(\mathcal{G}l_n)^{\mathcal{G}l_{n-1}}$; veja, por exemplo, [Di, Seção 9.1]. Porém, o centralizador é uma álgebra comutativa e portanto, se o espaço dos homomorfismos é diferente de zero então ele deve ser de dimensão um.

A regra da ramificação está implícita nas fórmulas de Gelfand e Tsetlin [GT1] e a demonstração baseada sobre uma realização explícita das representações de Gl_n foi dada por Zhelobenko [Zh1].

A demonstração do Teorema 90, utilizando a teoria moderna das álgebras de Mickelsson seguindo Zhelobenko [Zh5], será feita na seção 3.2. Outras duas provas podem ser encontradas em Goodman and Wallach [GW, Capítulos 8 e 12].

Aplicações consecutivas da regra da ramificação às subálgebras da cadeia

$$\mathcal{G}l_1 \subset \mathcal{G}l_2 \subset \cdots \subset \mathcal{G}l_{n-1} \subset \mathcal{G}l_n,$$

proporcionam uma parametrização dos vetores da base em $L(\lambda)$ pelos objetos combinatoriais

chamados **padrões de Gelfand-Tsetlin.** Tal padrão Λ (associado com λ) é um arranjo de vetores fila

$$\begin{array}{ccccccccc}
\lambda_{n1} & & \lambda_{n2} & & \cdots & & \lambda_{n,n-1} & & \lambda_{nn} \\
 & \lambda_{n-1,1} & & & \cdots & & & \lambda_{n-1,n-1} & \\
 & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \\
 & & & \lambda_{21} & & \lambda_{22} & & & \\
 & & & & \lambda_{11} & & & &
\end{array}$$

onde a fila superior coincide com λ e tem-se as seguintes condições:

$$\lambda_{ki} - \lambda_{k-1,i} \in \mathbb{Z}_+, \qquad \lambda_{k-1,i} - \lambda_{k,i+1} \in \mathbb{Z}_+, \qquad i = 1, ..., k-1, \tag{3.4}$$

para cada $k = 2, ..., n$.

Observação 91 *Se o peso máximo λ é uma partição então existe uma bijeção natural entre os padrões associados com λ e os $\lambda-$tabuleiros semi-standard com entradas em $\{1, ..., n\}$. Assim, o padrão pode ser visto como uma seqüência de partições*

$$\lambda^{(1)} \subset \lambda^{(2)} \subset \cdots \subset \lambda^{(n)} = \lambda,$$

com $\lambda^{(k)} = (\lambda_{k1}, \cdots, \lambda_{kk})$. As condições (3.4) significam que o "skew diagram" $\lambda^{(k)}/\lambda^{(k-1)}$ é um "strip" horizontal, isto quer dizer, que ao sobrepor o diagrama de $\lambda^{(k-1)}$ no diagrama de $\lambda^{(k)}$ em cada linha fica um e só um quadrado livre; veja, por exemplo, Macdonald [Ma, Capítulo 1].

A base de Gelfand-Tsetlin de $L(\lambda)$ é dada pelo seguinte Teorema.

Teorema 92 *Seja $l_{ki} = \lambda_{ki} - i + 1$, então existe uma base $\{\xi_\Lambda\}$ em $L(\lambda)$ parametrizada por*

todos os padrões Λ tal que a ação dos geradores de $\mathcal{G}l_n$ é dada pelas fórmulas

$$E_{kk}\xi_\Lambda = \left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_{ki} - \sum_{i=1}^{k-1}\lambda_{k-1,i}\right)\xi_\Lambda, \tag{3.5}$$

$$E_{k,k+1}\xi_\Lambda = -\sum_{i=1}^{k}\frac{(l_{ki}-l_{k+1,1})\cdots(l_{ki}-l_{k+1,k+1})}{(l_{ki}-l_{k1})\cdots\wedge\cdots(l_{ki}-l_{kk})}\xi_{\Lambda+\delta_{ki}}, \tag{3.6}$$

$$E_{k+1,k}\xi_\Lambda = \sum_{i=1}^{k}\frac{(l_{ki}-l_{k-1,1})\cdots(l_{ki}-l_{k-1,k-1})}{(l_{ki}-l_{k1})\cdots\wedge\cdots(l_{ki}-l_{kk})}\xi_{\Lambda-\delta_{ki}}. \tag{3.7}$$

Os arranjos são obtidos a partir de Λ substituindo λ_{ki} por $\lambda_{ki}\pm 1$. Se o arranjo Λ não é um padrão convencionamos $\xi_\Lambda = 0$; o símbolo $\wedge$ indica que o fator zero no denominador é omitido.

Exemplo 93 *Do exemplo (1) temos $\lambda = (1,0,-1)$. O padrão de Gelfand-Tsetlin Λ associado é*

$$\xi_\Lambda = \begin{array}{ccccc} 1 & & 0 & & -1 \\ & 1 & & 0 & \\ & & 1 & & \end{array}$$

aplicando o Teorema 92, temos

$$E_{11}\xi_\Lambda = 1\xi_\Lambda, \quad E_{22}\xi_\Lambda = 0\xi_\Lambda = 0, \quad E_{33}\xi_\Lambda = -1\xi_\Lambda$$

$$E_{12}\xi_\Lambda = (0)\,(2)\,\xi_{\Lambda+\delta_{11}} = 0$$

$$E_{23}\xi_\Lambda = \frac{(0)\,(2)\,(4)}{2}\xi_{\Lambda+\delta_{21}} - \frac{(-2)\,(0)\,(2)}{-2}\xi_{\Lambda+\delta_{22}} = 0$$

$$E_{21}\xi_\Lambda = \xi_{\Lambda-\delta_{11}} = \begin{array}{ccccc} 1 & & 0 & & -1 \\ & 1 & & 0 & \\ & & 0 & & \end{array} = \xi_\Lambda^{(2)}$$

$$E_{32}\xi_\Lambda = \frac{0}{2}\xi_{\Lambda-\delta_{21}} + \frac{-2}{-2}\xi_{\Lambda-\delta_{22}} = \begin{matrix} 1 & 0 & -1 \\ & 1 & -1 \\ & & 1 \end{matrix} = \xi_\Lambda^{(3)}$$

$$E_{21}\xi_\Lambda^{(2)} = \xi_{\Lambda-\delta_{11}}^{(2)} = \begin{matrix} 1 & 0 & -1 \\ & 1 & 0 \\ & & -1 \end{matrix} \quad \textit{não é padrão}$$

$$E_{32}\xi_\Lambda^{(2)} = \frac{1}{2}\xi_{\Lambda-\delta_{21}}^{(2)} + \frac{-1}{-2}\xi_{\Lambda-\delta_{22}}^{(2)} = \underbrace{\frac{1}{2}\begin{matrix} 1 & 0 & -1 \\ & 0 & 0 \\ & & 0 \end{matrix}}_{\xi_\Lambda^{(4)}} + \underbrace{\frac{1}{2}\begin{matrix} 1 & 0 & -1 \\ & 1 & -1 \\ & & 0 \end{matrix}}_{\xi_\Lambda^{(5)}} = \frac{1}{2}\xi_\Lambda^{(4)} + \frac{1}{2}\xi_\Lambda^{(5)}$$

$$E_{21}\xi_\Lambda^{(3)} = \xi_{\Lambda-\delta_{11}}^{(3)} = \begin{matrix} 1 & 0 & -1 \\ & 1 & -1 \\ & & 0 \end{matrix} = \xi_\Lambda^{(5)}$$

$$E_{32}\xi_\Lambda^{(3)} = \frac{0}{3}\xi_{\Lambda-\delta_{21}}^{(3)} + \frac{-3}{-3}\xi_{\Lambda-\delta_{22}}^{(3)} = \begin{matrix} 1 & 0 & -1 \\ & 1 & -2 \\ & & 1 \end{matrix} \quad \textit{não é padrão}$$

$$E_{21}\xi_\Lambda^{(4)} = \xi_{\Lambda-\delta_{11}}^{(4)} = \begin{matrix} 1 & 0 & -1 \\ & 0 & 0 \\ & & -1 \end{matrix} \quad \textit{não é padrão}$$

$$E_{32}\xi_\Lambda^{(4)} = \frac{0}{1}\xi_{\Lambda-\delta_{21}}^{(4)} + \frac{-1}{-1}\xi_{\Lambda-\delta_{22}}^{(4)} = \begin{matrix} 1 & 0 & -1 \\ & 0 & -1 \\ & & 0 \end{matrix} = \xi_\Lambda^{(6)}$$

$$E_{21}\xi_{\Lambda}^{(5)} = \xi_{\Lambda-\delta_{11}}^{(5)} = \begin{array}{ccc} 1 & 0 & -1 \\ & 1 & -1 \\ & -1 & \end{array} = \xi_{\Lambda}^{(7)}$$

$$E_{32}\xi_{\Lambda}^{(5)} = \frac{1}{3}\xi_{\Lambda-\delta_{21}}^{(5)} + \frac{-2}{-3}\xi_{\Lambda-\delta_{22}}^{(5)} = \frac{1}{3}\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 0 & -1 \\ & 0 & -1 \\ & 0 & \end{array}}_{\xi_{\Lambda}^{(6)}} + \frac{2}{3}\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 0 & -1 \\ & 1 & -1 \\ & 0 & \end{array}}_{\textit{não é padrão}} = \frac{1}{3}\xi_{\Lambda}^{(6)}$$

$$E_{21}\xi_{\Lambda}^{(6)} = \xi_{\Lambda-\delta_{11}}^{(6)} = \begin{array}{ccc} 1 & 0 & -1 \\ & 0 & -1 \\ & -1 & \end{array} = \xi_{\Lambda}^{(8)}$$

$$E_{32}\xi_{\Lambda}^{(6)} = \frac{0}{2}\xi_{\Lambda-\delta_{21}}^{(6)} + \frac{-2}{-2}\xi_{\Lambda-\delta_{22}}^{(6)} = \begin{array}{ccc} 1 & 0 & -1 \\ & 0 & -2 \\ & 0 & \end{array} \quad \textit{não é padrão}$$

$$E_{21}\xi_{\Lambda}^{(7)} = \xi_{\Lambda-\delta_{11}}^{(7)} = \begin{array}{ccc} 1 & 0 & -1 \\ & 1 & -1 \\ & -2 & \end{array} \quad \textit{não é padrão}$$

$$E_{32}\xi_{\Lambda}^{(7)} = \frac{2}{3}\xi_{\Lambda-\delta_{21}}^{(7)} + \frac{-1}{-3}\xi_{\Lambda-\delta_{22}}^{(7)} = \frac{2}{3}\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 0 & -1 \\ & 0 & -1 \\ & -1 & \end{array}}_{\xi_{\Lambda}^{(8)}} + \frac{1}{3}\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 0 & -1 \\ & 1 & -2 \\ & -1 & \end{array}}_{\textit{não é padrão}} = \frac{2}{3}\xi_{\Lambda}^{(8)}$$

$$E_{21}\xi_{\Lambda}^{(8)} = \xi_{\Lambda-\delta_{11}}^{(8)} = \begin{array}{ccc} 1 & 0 & -1 \\ & 0 & -1 \\ & -2 & \end{array} \quad \textit{não é padrão}$$

$$E_{32}\xi_{\Lambda}^{(8)} = \frac{0}{2}\xi_{\Lambda-\delta_{21}}^{(8)} + \frac{-2}{-2}\xi_{\Lambda-\delta_{22}}^{(8)} = \begin{matrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & & -2 \\ & -1 & \end{matrix} \quad \textit{não é padrão}$$

A construção dos vetores da base é dada no Teorema 97. A demonstração das fórmulas (3.5)−(3.7) é dada na seção 3.2.

O espaço vetorial $L(\lambda)$ está equipado com um produto interno contravariante $\langle , \rangle$ e ele é unicamente determinado pelas condições

$$\langle \xi, \xi \rangle = 1 \quad \text{e} \quad \langle E_{ij}\eta, \zeta \rangle = \langle \eta, E_{ji}\zeta \rangle ,$$

para quaisquer vetores $\eta, \zeta \in L(\lambda)$ e quaisquer índices i, j. Em outras palavras, para o operador adjunto de E_{ij} em relação ao produto interno temos $(E_{ij})^* = E_{ji}$.

Proposição 94 *A base $\{\xi_\Lambda\}$ é ortogonal em relação ao produto interno $\langle , \rangle$, além disso, tem-se*

$$\langle \xi_\Lambda, \xi_\Lambda \rangle = \prod_{k=2}^{n} \prod_{1 \le i \le j < k} \frac{(l_{ki} - l_{k-1,j})!}{(l_{k-1,i} - l_{k-1,j})!} \prod_{1 \le i < j \le k} \frac{(l_{ki} - l_{kj} - 1)!}{(l_{k-1,i} - l_{kj} - 1)!},$$

onde $l_{ki} = \lambda_{ki} - i + 1$.

As fórmulas do Teorema 92 podem, portanto ser reescritas na base ortonormal

$$\zeta_\Lambda = \xi_\Lambda / \|\xi_\Lambda\| , \qquad \|\xi_\Lambda\|^2 = \langle \xi_\Lambda, \xi_\Lambda \rangle . \tag{3.8}$$

Elas foram apresentadas nesta forma no trabalho original por Gelfand-Tsetlin [GT1]. A demonstração desta proposição será feita na seção 3.2.

3.1 Construção da base: "Lowering and raising operators"

Para cada $i = 1, ..., n-1$ introduza os seguintes elementos da álgebra universal envolvente $\mathbf{U}(\mathcal{G}l_n)$

$$z_{in} \ : = \sum_{i>i_1>...>i_s\geq 1} E_{ii_1}E_{i_1i_2}\cdots E_{i_{s-1},i_s}E_{i_sn}(h_i - h_{j_1})\cdots(h_i - h_{j_r}), \tag{3.9}$$

$$z_{ni} \ : = \sum_{i<i_1<...<i_s<n} E_{i_1i}E_{i_2i_1}\cdots E_{i_s,i_{s-1}}E_{ni_s}(h_i - h_{j_1})\cdots(h_i - h_{j_r}), \tag{3.10}$$

onde s percorre os inteiros não-negativos, $h_i = E_{ii} - i + 1$ e $\{j_1, ..., j_r\}$ é o subconjunto complementar a $\{i_1, ..., i_s\}$ no conjunto $\{1, ..., i-1\}$ ou $\{i+1, ..., n-1\}$, respectivamente. Por exemplo,

$$z_{13} = E_{13}, \qquad z_{23} = E_{23}(h_2 - h_1) + E_{21}E_{13}, \tag{3.11}$$

$$z_{32} = E_{32}, \qquad z_{31} = E_{31}(h_1 - h_2) + E_{21}E_{32}. \tag{3.12}$$

Considere agora uma representação irredutível $L(\lambda)$, de dimensão finita, de $\mathcal{G}l_n$ com peso máximo $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$ e vetor máximo ξ. Denote por $L(\lambda)^+$ o subespaço dos vetores máximos sobre $\mathcal{G}l_{n-1}$ no $L(\lambda)$, isto é,

$$L(\lambda)^+ := \{\eta \in L(\lambda) \mid E_{ij}\eta = 0, \qquad 1 \leq i < j < n\}.$$

Dado um peso $\mu = (\mu_1, \cdots, \mu_{n-1})$ em $\mathcal{G}l_{n-1}$ denote por $L(\lambda)^+_\mu$ o correspondente subespaço de peso em $L(\lambda)^+$:

$$L(\lambda)^+_\mu := \{\eta \in L(\lambda)^+ \mid E_{ii}\eta = \mu_i\eta, \qquad i = 1, ..., n-1\}.$$

A principal propriedade dos elementos z_{ni} e z_{in} é descrita pelo seguinte Lema.

Lema 95 *Seja $\eta \in L(\lambda)^+_\mu$. Então para quaisquer $i = 1, ..., n-1$ tem-se*

$$z_{in}\eta \in L(\lambda)^+_{\mu+\delta_i} \qquad e \qquad z_{ni}\eta \in L(\lambda)^+_{\mu-\delta_i},$$

onde o peso $\mu \pm \delta_i$ é obtido a partir μ substituindo μ_i com $\mu_i \pm 1$.

Este resultado permite considerar os elementos z_{ni} e z_{in} como operadores no espaço $L(\lambda)^+$. Eles são chamados **"lowering and raising operators"**, respectivamente. Pela regra da ramificação (Teorema 90) o espaço $L(\lambda)^+_\mu$ é de dimensão um quando se verificam as condições (3.2) e é zero no caso contrário. O seguinte Lema será provado na seção 3.2.

Lema 96 *Suponha que μ satisfaz as condições intermediárias (3.2). Então o vetor*

$$\xi_\mu = z_{n1}^{\lambda_1-\mu_1} \cdots z_{n,n-1}^{\lambda_{n-1}-\mu_{n-1}} \xi,$$

é diferente de zero. Além disso, o espaço $L(\lambda)^+_\mu$ é gerado por ξ_μ.

O $\mathbf{U}(\mathcal{G}l_{n-1})$ −espaço gerado de cada vetor diferente de zero ξ_μ é um $\mathcal{G}l_{n-1}$-módulo isomorfo a $L'(\mu)$. Iterando a construção dos vetores ξ_μ para cada par de álgebras de Lie $\mathcal{G}l_{k-1} \subset \mathcal{G}l_k$ consegue-se uma base do espaço inteiro $L(\lambda)$.

Teorema 97 *Os vetores da base $\{\xi_\Lambda\}$ no Teorema 92 podem ser dados pela fórmula*

$$\xi_\Lambda = \overrightarrow{\prod_{k=2,\ldots,n}} \left(z_{k1}^{\lambda_{k1}-\lambda_{k-1,1}} \ldots z_{k,k-1}^{\lambda_{k,k-1}-\lambda_{k-1,k-1}} \right) \xi, \tag{3.13}$$

onde os fatores no produto são ordenados de acordo com o crescimento dos índices.

Exemplo 98 *Continuando com o exemplo (1) temos que*

$$\begin{aligned} L(\lambda)^+ &= \{\eta \in \mathcal{G}l_3 \mid E_{ij}\eta = 0, \qquad 1 \leq i < j < 3\} \\ &= \{\eta \in \mathcal{G}l_3 \mid E_{12}\eta = 0\} = \{E_{12}, E_{13}, E_{32}, E_{33}\}. \end{aligned}$$

Os pesos $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ em $\mathcal{G}l_2$, são $\mu^1 = (1,0)$, $\mu^2 = (1,-1)$, $\mu^3 = (0,0)$, e $\mu^4 = (0,-1)$. Vamos obter os $L(\lambda)^+_{\mu^k}$ para $k = 1, 2, , 3, 4$.

Para μ^1 temos que

$$\begin{aligned} E_{13} &\in L(\lambda)^+_{\mu^1}, \text{ pois } E_{11}E_{13} = E_{13} = \mu_1^1 E_{13} \text{ e } E_{22}E_{13} = 0 = \mu_2^1 E_{13}, \\ E_{12} &\notin L(\lambda)^+_{\mu^1}, \text{ pois } E_{22}E_{12} = -E_{12} \neq \mu_2^1 E_{13}, \text{ analogamente} \\ E_{32} &\notin L(\lambda)^+_{\mu^1} \text{ e } E_{33} \notin L(\lambda)^+_{\mu^1} \end{aligned}$$

Assim $L(\lambda)^{+}_{\mu^1}$ *é de dimensão* 1, *é gerado por* E_{13}.

De forma análoga se verifica que $L(\lambda)^{+}_{\mu^2}$ *é gerado por* E_{12}, $L(\lambda)^{+}_{\mu^3}$ *é gerado por* E_{33}, *e* $L(\lambda)^{+}_{\mu^4}$ *é gerado por* E_{32}.

Além disso, para $\mu^1 = (1,0)$ *vejamos que* $z_{3i}E_{13} \in L(\lambda)^{+}_{\mu^1-\delta_i}$ *para* $i = 1,2$

De fato,

$$z_{31}E_{31} = (E_{31}(h_1 - h_2) + E_{21}E_{32})E_{13} = E_{31}(E_{11} - E_{22} + 1)E_{13} - E_{21}E_{12} = E_{33},$$

mas $\mu^1 - \delta_1 = (0,0) = \mu^3$ *e* $E_{33} \in L(\lambda)^{+}_{\mu^3}$, *analogamente* $z_{32}E_{31} = E_{32}E_{13} = -E_{12}$ *o qual pertence a* $L(\lambda)^{+}_{\mu^2}$ *e* $\mu^1 - \delta_2 = (1,-1) = \mu^2$.

Por último, iterando a construção temos para $\mathcal{G}l_2 \subset \mathcal{G}l_3$ *os pesos* μ^1, μ^2, μ^3, μ^4. *Agora para* $\mathcal{G}l_1 \subset \mathcal{G}l_2$ *consideremos cada* μ^i.

Para $\mu^1 = (1,0)$ *temos os pesos* $\nu^1 = 1$, *e* $\nu^2 = 0$, *assim temos os padrões*

$$\Lambda_1 = \begin{array}{ccccc} 1 & & 0 & & -1 \\ & 1 & & 0 & \\ & & 1 & & \end{array} \quad e \quad \Lambda_2 = \begin{array}{ccc} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ & 0 & \end{array}$$

Para $\mu^2 = (1,-1)$ *temos os pesos* $\nu^1 = 1$, $\nu^2 = 0$, *e* $\nu^3 = -1$, *assim temos os padrões*

$$\Lambda_3 = \begin{array}{ccccc} 1 & & 0 & & -1 \\ & 1 & & -1 & \\ & & 1 & & \end{array}, \quad \Lambda_4 = \begin{array}{ccc} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ & 0 & \end{array} \quad e \quad \Lambda_5 = \begin{array}{ccc} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ & -1 & \end{array}$$

Para $\mu^3 = (0,0)$ *temos o peso* $\nu^1 = 0$, *assim temos o padrão*

$$\Lambda_6 = \begin{array}{ccccc} 1 & & 0 & & -1 \\ & 0 & & 0 & \\ & & 0 & & \end{array}$$

Para $\mu^4 = (0, -1)$ *temos os pesos* $\nu^1 = 0$, *e* $\nu^2 = -1$, *assim temos os padrões*

$$\Lambda_7 = \begin{array}{ccc} 1 & 0 & -1 \\ & 0 & -1 \\ & & 0 \end{array} \quad ,e\ \Lambda_8 = \begin{array}{ccc} 1 & 0 & -1 \\ & 0 & -1 \\ & & -1 \end{array}$$

Aplicando o Teorema (97): Para Λ_1 *temos*

$$\begin{aligned} \xi_{\Lambda_1} &= z_{21}^{1-1} z_{31}^{1-1} z_{32}^{0-0} \xi = \xi = E_{13} \\ \xi_{\Lambda_2} &= z_{21}^{1-0} z_{31}^{1-1} z_{32}^{0-0} \xi = z_{31}\xi = E_{33} \\ \xi_{\Lambda_3} &= z_{21}^{1-1} z_{31}^{1-1} z_{32}^{0-(-1)} \xi = z_{32}\xi = -E_{12} \\ &\vdots \end{aligned}$$

assim obtemos a base.

3.2 A álgebra de Mickelsson - Zhelobenko $Z(\mathcal{G}l_n, \mathcal{G}l_{n-1})$

Para quaisquer inteiro positivo m considere a álgebra de Lie linear geral $\mathcal{G}l_m$. As raízes positivas de $\mathcal{G}l_m$ com relação à subálgebra de Cartan diagonal $\mathcal{H}$ (com a escolha *standard* do sistema de raízes positivas) são enumeradas naturalmente pelos pares (i, j) com $1 \leq i < j \leq m$. De acordo com a teoria geral apresentada na seção 2.2, para cada par se introduz a série formal $p_{ij} \in F(\mathcal{G}l_m)$ dada por

$$p_{ij} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (E_{ji})^k (E_{ij})^k \frac{(-1)^k}{k!\,(h_i - h_j + 1)\ldots(h_i - h_j + k)},$$

onde, como antes, $h_i = E_{ii} - i + 1$. Então se define o elemento $p = p_m$ por

$$p = \prod_{i<j} p_{ij},$$

onde o produto é tomado em uma ordem normal nos pares (i, j). Pelo Teorema 65,

$$E_{ij}p = pE_{ji} = 0, \quad \text{para} \quad 1 \leq i < j \leq m. \tag{3.14}$$

Agora, seja $m = n-1$. Pelo Teorema 86, os monômios ordenados nos elementos E_{nn}, pE_{in} e pE_{ni}, com $i = 1, ..., n-1$, formam uma base de $Z(\mathcal{G}l_n, \mathcal{G}l_{n-1})$ como um $R(\mathcal{H})$-módulo tanto à esquerda como à direita. Estes elementos podem ser dados explicitamente por

$$\begin{aligned} pE_{in} &= \sum_{i>i_1>\ldots>i_s\geq 1} E_{ii_1}E_{i_1i_2}\cdots E_{i_{s-1}i_s}E_{i_sn}\frac{1}{(h_i-h_{i_1})\cdots(h_i-h_{i_s})}, \\ pE_{ni} &= \sum_{i<i_1<\ldots<i_s<n} E_{i_1i}E_{i_2i_1}\cdots E_{i_si_{s-1}}E_{ni_s}\frac{1}{(h_i-h_{i_1})\cdots(h_i-h_{i_s})}, \end{aligned} \tag{3.15}$$

onde $s = 0, 1, \ldots$. Por exemplo,

$$\begin{aligned} pE_{13} &= E_{13}, \quad pE_{23} = E_{23} + E_{21}E_{13}\frac{1}{(h_2-h_1)}, \\ pE_{32} &= E_{32}, \quad pE_{31} = E_{31} + E_{21}E_{32}\frac{1}{(h_1-h_2)}. \end{aligned}$$

Na verdade, com uma escolha de uma ordem normal apropriada sobre as raízes positivas, pode-se escrever

$$pE_{in} = p_{1i}\cdots p_{i-1,i}E_{in} \quad \text{e} \quad pE_{ni} = p_{i,i+1}\cdots p_{i,n-1}E_{ni}.$$

Os *lowering and raising operators* introduzidos na seção 3.1 coincidem com os geradores normalizados:

$$\begin{aligned} z_{in} &= pE_{in}(h_i-h_{i-1})\cdots(h_i-h_1), \\ z_{ni} &= pE_{ni}(h_i-h_{i+1})\cdots(h_i-h_{n-1}), \end{aligned} \tag{3.16}$$

os quais pertencem à álgebra de Mickelsson $S(\mathcal{G}l_n, \mathcal{G}l_{n-1})$.

Demonstração do Lema 95

Seja $\eta \in L(\lambda)^+_\mu$, logo $\eta \in L(\lambda)$, $E_{jk}\eta = 0$ para $j < k$ e $E_{jj}\eta = \mu_j\eta$, para todo j. Vejamos

que $z_{ni}\eta \in L(\lambda)^{+}_{\mu-\delta_i}$, isto é,

$$\begin{array}{lll} (i) & z_{ni}\eta \in L(\lambda) & \text{para } 1 \leq i \leq n-1 \\ (ii) & E_{jk}z_{ni}\eta = 0 & \text{para } j < k \\ (iii) & E_{jj}z_{ni}\eta = \left(\mu_j - \delta_{ij}\right) z_{ni}\eta & \text{para todo } 1 \leq j \leq n-1. \end{array}$$

A parte (i) é clara, pelo fato que $\eta \in L(\lambda)$.

Para a parte (ii), seja $j < k$, então temos que

$$E_{jk}z_{ni}\eta = E_{jk}pE_{ni}\left(h_i - h_{i+1}\right)\cdots\left(h_i - h_{n-1}\right)\eta = 0,$$

a primeira igualdade é dada por (3.16) e a segunda por (3.14).

Por último, para provar (iii) precisamos provar que

$$\begin{array}{lll} (a) & E_{ii}z_{ni}\eta = \left(\mu_j - 1\right) z_{ni}\eta & \\ (b) & E_{jj}z_{ni}\eta = \mu_j z_{ni}\eta, & \text{para } i \neq j. \end{array}$$

Lembrando (3.10), provaremos (iii) por indução sobre s.

Para $s = 1$, temos $z_{ni} = E_{i_1 i}E_{ni_1}H$, onde $H \in R(\mathcal{H})$ e $i < i_1 < n$

Temos que

$$\left[E_{jj}, E_{i_1 i}E_{ni_1}\right] = \left[E_{jj}, E_{i_1 i}\right]E_{ni_1} + E_{i_1 i}\left[E_{jj}, E_{ni_1}\right] = \begin{cases} -E_{i_1 i}E_{ni_1} & \text{se } j = i \\ 0 & \text{se } j \neq i \end{cases}.$$

Logo, para $j = i$, temos

$$\begin{aligned} E_{ii}z_{ni}\eta &= E_{ii}E_{i_1 i}E_{ni_1}H\eta = E_{i_1 i}E_{ni_1}E_{ii}H\eta + \left[E_{ii}, E_{i_1 i}E_{ni_1}\right]H\eta \\ &= E_{i_1 i}E_{ni_1}H\mu_i\eta - E_{i_1 i}E_{ni_1}H\mu_i\eta \\ &= \left(\mu_i - 1\right)E_{i_1 i}E_{ni_1}H\eta = \left(\mu_j - 1\right)z_{ni}\eta \end{aligned}$$

Para $j \neq i$, temos

$$E_{jj}z_{ni}\eta = z_{ni}E_{jj}\eta + \left[E_{jj}, z_{ni}\right]\eta = z_{ni}E_{jj}\eta = z_{ni}\mu_j\eta = \mu_j z_{ni}\eta.$$

Assim provamos o Lema para $s = 1$.

Suponhamos, por hipótese de indução que o resultado seja válido para $s = k-1$ e provemos para $s = k$.

A demonstração é análoga usando o fato que a adjunta é uma derivação, isto é,

$$\begin{aligned} & \left[E_{jj}, E_{i_1 i} E_{i_2 i_1} \cdots E_{i_k i_{k-1}} E_{n i_k}\right] \\ = & \left[E_{jj}, E_{i_1 i} E_{i_2 i_1} \cdots E_{i_k i_{k-1}}\right] E_{n i_k} + E_{i_1 i} E_{i_2 i_1} \cdots E_{i_k i_{k-1}} \left[E_{jj}, E_{n i_k}\right] \end{aligned}$$

e a hipótese de indução. ■

Definição 99 *Considere a matriz $n \times n$, E, cuja ij-ésima entrada é E_{ij} e seja u uma variável formal. O* ***determinante de Capelli*** $\boldsymbol{C}(u)$ *é um polinômio com coeficientes na álgebra universal envolvente* $\mathbf{U}(gl_n)$*, definido por*

$$\boldsymbol{C}(u) = \sum_{\sigma \in G_n} sgn\sigma . (u+E)_{\sigma(1),1} \cdots (u+E-n+1)_{\sigma(n),n} . \tag{3.17}$$

É conhecido que todos os seus coeficientes pertencem ao centro de $\mathbf{U}(\mathcal{G}l_n)$ e geram o mesmo; veja por exemplo, Howe-Umeda [HU]. Este também se obtém das propriedades do **determinante Quântico** do Yangian para a álgebra de Lie $\mathcal{G}l_n$; veja por exemplo, [MNO]. Portanto estes coeficientes agem em $L(\lambda)$ como escalares os quais podem ser encontrados aplicando $\boldsymbol{C}(u)$ ao vetor máximo ξ:

$$\boldsymbol{C}(u) \mid_{L(\lambda)} = (u+l_1) \cdots (u+l_n), \qquad l_i = \lambda_i - i + 1. \tag{3.18}$$

Por outro lado, o centro de $\mathbf{U}(gl_n)$ é uma subágebra do normalizador Norm J. Queremos conservar a mesma notação para a imagem de $\boldsymbol{C}(u)$ na álgebra de Mickelsson-Zhelobenko $Z(\mathcal{G}l_n, \mathcal{G}l_{n-1})$. Para conseguir expressões explícitas dos coeficientes de $\boldsymbol{C}(u)$ em termos dos *lowering and raising operators,* consideramos $\boldsymbol{C}(u)$ módulo o ideal J' e aplicamos a projeção p. Um cálculo direto fornece as duas fórmulas alternativas

$$\boldsymbol{C}(u) = (u+E_{nn}) \prod_{i=1}^{n-1} (u+h_i-1) - \sum_{i=1}^{n-1} z_{in} z_{ni} \prod_{j=1,\, j\neq i}^{n-1} \frac{u+h_j-1}{h_i-h_j}, \tag{3.19}$$

e

$$C(u) = \prod_{i=1}^{n}(u+h_i) - \sum_{i=1}^{n-1} z_{ni}z_{in} \prod_{j=1,\, j\neq i}^{n-1} \frac{u+h_j}{h_i-h_j}. \tag{3.20}$$

Aqui damos uma verificação para $n=3$. Seja $E = \begin{pmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{pmatrix}$.

Da equação (3.17) temos

$$\begin{aligned}
& C(u) \\
= \; & (u+E)_{11}(u+E-1)_{22}(u+E-2)_{33} - (u+E)_{11}(u+E-1)_{32}(u+E-2)_{23} \\
& -(u+E)_{21}(u+E-1)_{12}(u+E-2)_{33} - (u+E)_{31}(u+E-1)_{22}(u+E-2)_{13} \\
& +(u+E)_{21}(u+E-1)_{32}(u+E-2)_{13} + (u+E)_{31}(u+E-1)_{12}(u+E-2)_{23} \\
= \; & (u+E_{11})(u+E_{22}-1)(u+E_{33}-2) - (u+E_{11})E_{32}E_{23} - E_{21}E_{12}(u+E_{33}-2) \\
& -E_{31}(u+E_{22}-1)E_{13} + E_{21}E_{32}E_{13} + E_{31}E_{12}E_{23} \\
= \; & (u+E_{11})(u+E_{22}-1)(u+E_{33}-2) - (u+E_{11})E_{32}E_{23} - E_{31}(u+E_{22}-1)E_{13}
\end{aligned}$$

Os fatores $E_{21}E_{12}(u+E_{33}-2)$, $E_{21}E_{32}E_{13}$ e $E_{31}E_{12}E_{23}$ são zero, pois como estamos na álgebra de Mickelsson-Zhelobenko E_{21} qualquer coisa e qualquer coisa vezes E_{12} são zeros.

Da equação (3.20) temos

$$\begin{aligned}
C(u) &= \prod_{i=1}^{3}(u+h_i) - \sum_{i=1}^{2} z_{3i}z_{i3} \prod_{j=1,\, j\neq i}^{2} \frac{u+h_j}{h_i-h_j} \\
&= (u+h_1)(u+h_2)(u+h_3) - z_{31}z_{13}\frac{u+h_2}{h_1-h_2} - z_{32}z_{23}\frac{u+h_1}{h_2-h_1}.
\end{aligned}$$

Sabemos que $h_i = E_{ii} - i + 1$ e de (3.11) e (3.12) que

$$\begin{aligned}
z_{13} &= E_{13}, \qquad z_{23} = E_{23}(h_2-h_1) + E_{21}E_{13}, \\
z_{32} &= E_{32}, \qquad z_{31} = E_{31}(h_1-h_2) + E_{21}E_{32}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{C}(u) &= (u+E_{11})(u+E_{22}-1)(u+E_{33}-2) \\
&\quad -\left(E_{31}(E_{11}-E_{22}+1)+E_{21}E_{32}\right)E_{13}\frac{u+E_{22}-1}{E_{11}-E_{22}+1} \\
&\quad -E_{32}\left(E_{23}(E_{22}-E_{11}-1)+E_{21}E_{13}\right)\frac{u+E_{11}}{E_{22}-E_{11}-1} \\
&= (u+E_{11})(u+E_{22}-1)(u+E_{33}-2) \\
&\quad -E_{31}E_{13}(u+E_{22}-1)-E_{32}E_{23}(u+E_{11}) \\
&= (u+E_{11})(u+E_{22}-1)(u+E_{33}-2) \\
&\quad -E_{31}(u+E_{22}-1)E_{13}-(u+E_{11})E_{32}E_{23}
\end{aligned}$$

De onde temos a igualdade entre (3.17) e (3.20).

A igualdade entre (3.17) e (3.19) se verifica de forma análoga.

Proposição 100 *Os lowering and raising operators satisfazem as seguintes relações*

$$z_{ni}z_{nj} = z_{nj}z_{ni} \quad \textit{para todo } i,j, \tag{3.21}$$

$$z_{in}z_{nj} = z_{nj}z_{in} \quad \textit{para } i \neq j, \tag{3.22}$$

e

$$z_{in}z_{ni} = \prod_{j=1,\ j\neq 1}^{n}(h_i-h_j-1)+\sum_{j=1}^{n-1}z_{nj}z_{jn}\prod_{k=1,\ k\neq j}^{n-1}\frac{h_i-h_k-1}{h_j-h_k}. \tag{3.23}$$

Demonstração. Primeiro vejamos que para $i<j$.

$$pE_{ni}pE_{nj} = pE_{ni}E_{nj} \text{ e } \quad pE_{nj}pE_{ni} = pE_{ni}E_{nj}\frac{h_i-h_j+1}{h_i-h_j}.$$

De fato, de (3.15)

$$pE_{ni}pE_{nj} = pE_{ni}\sum_{j<j_1<\ldots<j_s<n}E_{j_1j}E_{j_2j_1}\cdots E_{j_sj_{s-1}}E_{nj_s}\frac{1}{(h_j-h_{j_1})\cdots(h_j-h_{j_s})},$$

como $i < j < j_1 < ... < j_s < n$ então E_{ni} comuta com $E_{j_k j_l}$ para todo k e l, donde segue que

$$\begin{aligned} pE_{ni}pE_{nj} &= p \sum_{j<j_1<\ldots<j_s<n} E_{j_1 j} E_{j_2 j_1} \cdots E_{j_s j_{s-1}} E_{n j_s} \frac{1}{(h_j - h_{j_1}) \cdots (h_j - h_{j_s})} E_{ni} \\ &= p^2 E_{nj} E_{ni} = pE_{nj} E_{ni} = pE_{ni} E_{nj} \end{aligned}$$

As últimas igualdades decorrem do fato que $p^2 = p$ e E_{ni} e E_{nj} comutam. A outra prova é análoga.

Agora vamos provar (3.21). Sem perda de generalidade vamos supor que $i < j$, logo

$$\begin{aligned} z_{ni} z_{nj} &= pE_{ni} (h_i - h_{i+1}) \cdots (h_i - h_{n-1}) pE_{nj} (h_j - h_{j+1}) \cdots (h_j - h_{n-1}) \\ & pE_{ni} pE_{nj} (h_i - h_{i+1}) \cdots (h_i - h_{n-1}) (h_j - h_{j+1}) \cdots (h_j - h_{n-1}) \\ & pE_{ni} E_{nj} (h_i - h_{i+1}) \cdots (h_i - h_{n-1}) (h_j - h_{j+1}) \cdots (h_j - h_{n-1}) . \end{aligned} \tag{3.24}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} z_{nj} z_{ni} &= pE_{nj} (h_j - h_{j+1}) \cdots (h_j - h_{n-1}) pE_{ni} (h_i - h_{i+1}) \cdots (h_i - h_{n-1}) \\ & pE_{nj} pE_{ni} (h_j - h_{j+1}) \cdots (h_j - h_{n-1}) (h_i - h_{i+1}) \cdots (h_i - h_{n-1}) \\ & pE_{ni} E_{nj} (h_i - h_{i+1}) \cdots (h_i - h_{n-1}) (h_j - h_{j+1}) \cdots (h_j - h_{n-1}) . \end{aligned} \tag{3.25}$$

De (3.24) e (3.25) segue-se a igualdade para $i < j$ e a prova para $j < i$ é análoga.

A demonstração de (3.22) é similar.

A relação "larga"(3.23) pode ser verificada de forma análoga, mas com cálculos diretos mais complicados. Damos uma prova diferente baseada nas propriedades do determinante de Capelli $\boldsymbol{C}(u)$.

As fórmulas (3.19) e (3.20) mostram que $\boldsymbol{C}(u)$ pode ser estimado como uma interpolação polinomial para os produtos $z_{in} z_{ni}$ e $z_{ni} z_{in}$, isto é, para $i = 1, \ldots, n-1$ temos

$$\boldsymbol{C}(-h_i + 1) = (-1)^{n-1} z_{in} z_{ni} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{C}(-h_i) = (-1)^{n-1} z_{ni} z_{in}. \tag{3.26}$$

De fato, da equação (3.19) em $-h_k+1$, temos

$$\begin{aligned} \boldsymbol{C}(-h_k+1) &= (-h_k+1+E_{nn})\prod_{i=1}^{n-1}(h_i-h_k)-\sum_{i=1}^{n-1} z_{in}z_{ni}\prod_{j=1,\, j\neq i}^{n-1}\frac{h_j-h_k}{h_i-h_j} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{se } k\neq i \\ -z_{in}z_{ni}(-1)^{n-2}=(-1)^{n-1}z_{in}z_{ni} & \text{se } k=i \end{cases}, \end{aligned}$$

logo para todo $i=1,\ldots,n-1$, $\boldsymbol{C}(-h_k+1)=(-1)^{n-1}z_{in}z_{ni}$. Computando $\boldsymbol{C}(-h_i)$ em (3.20) obtemos a outra igualdade de (3.26).

Fazendo $u=-h_k+1$ em (3.20) obtemos

$$\boldsymbol{C}(-h_k+1)=\prod_{i=1}^{n}(h_i-h_k+1)-\sum_{i=1}^{n-1} z_{ni}z_{in}\prod_{j=1,\, j\neq i}^{n-1}\frac{h_j-h_k+1}{h_i-h_j}. \tag{3.27}$$

Igualando os valores de (3.26) e (3.27)

$$(-1)^{n-1}z_{kn}z_{nk}=\prod_{i=1}^{n}(h_i-h_k+1)-\sum_{i=1}^{n-1} z_{ni}z_{in}\prod_{j=1,\, j\neq i}^{n-1}\frac{h_j-h_k+1}{h_i-h_j}$$

de onde conseguimos (3.23). ■

Note que a relação inversa a (3.23) pode ser obtida comparando os valores de (3.19) e (3.20) em $u=-h_i$.

Demonstrações da regra da ramificação (Teorema 90) e as fórmulas para os elementos da base de $L(\lambda)^+$ (Lema 96).

O módulo $L(\lambda)$ é gerado pelo vetor máximo ξ e tem-se que

$$z_{in}\xi=0, \qquad i=1,\ldots,n-1.$$

Assim, pelo Teorema 88, o espaço vetorial $L(\lambda)^+$ é gerado pelos elementos

$$z_{n1}^{k_1}\cdots z_{n,n-1}^{k_{n-1}}\xi, \qquad k_i\in\mathbb{Z}_+.$$

Seja $\mu_i = \lambda_i - k_i$ para $1 \leq i \leq n-1$ e denotemos o vetor anterior por ξ_μ, isto é,

$$\xi_\mu = z_{n1}^{\lambda_1 - \mu_1} \cdots z_{n,n-1}^{\lambda_{n-1} - \mu_{n-1}} \xi.$$

Agora é suficiente mostrar que o vetor ξ_μ é diferente de zero se, e somente se, se verificam as condições intermediárias (3.2). A independência linear dos vetores ξ_μ segue do fato que seus pesos são distintos. Se $\xi_\mu \neq 0$ então usando as relações (3.21) conclui-se que cada vetor $z_{ni}^{\lambda_i - \mu_i} \xi$ é diferente de zero. Por outro lado, $z_{ni}^{k_i} \xi$ é um $\mathcal{G}l_n$−vetor máximo do peso obtido de $(\lambda_1, ..., \lambda_{n-1})$ ao substituir λ_i por $\lambda_i - k_i$. Portanto, se $k_i \geq \lambda_i - \lambda_{i+1} + 1$ então as condições (3.1) são violadas para este peso o que implica $z_{ni}^{k_i} \xi = 0$. Assim, $\lambda_i - \mu_i \leq \lambda_i - \lambda_{i+1}$ para cada i e μ que satisfaz (3.2).

Para a demonstração da expressão inversa usa-se o seguinte Lema o qual também é usado para a demonstração do Teorema 92.

Lema 101 *Para cada $i = 1, ..., n-1$, tem-se que*

$$z_{in} \xi_\mu = -(m_i - l_1) \cdots (m_i - l_n) \xi_{\mu + \delta_i}, \tag{3.28}$$

onde

$$m_i = \mu_i - i + 1, \qquad l_i = \lambda_i - i + 1$$

e é assumido que $\xi_{\mu+\delta_i} = 0$, se $\lambda_i = \mu_i$.

Demonstração. A relação (3.22) implica que se $\lambda_i = \mu_i$ então $z_{in}\xi_\mu = 0$ o que está de acordo com (3.28). Agora seja $\lambda_i - \mu_i \geq 1$. Usando (3.21) e (3.26) obtém-se

$$z_{in}\xi_\mu = z_{in} z_{ni} \xi_{\mu+\delta_i} = (-1)^{n-1} \mathcal{C}(-h_i + 1) \xi_{\mu+\delta_i} = (-1)^{n-1} \mathcal{C}(-m_i) \xi_{\mu+\delta_i}.$$

A relação (3.28) segue de (3.18) e da centralidade de $\mathcal{C}(u)$. ■

Se as condições intermediárias (3.2) se verificam, então pelo Lema anterior, aplicando os operadores apropriados z_{in} repetidamente ao vetor ξ_μ pode-se obter o vetor máximo ξ com um coeficiente diferente de zero e assim $\xi_\mu \neq 0$. ■

Demonstração da Proposição 94

Provou-se que os vetores ξ_Λ definidos em (3.13) formam uma base da representação $L(\lambda)$. A ortogonalidade dos vetores base (Proposição 94) segue do fato que os operadores pE_{ni} e pE_{in} são adjuntos entre si em relação à restrição do produto interno $\langle , \rangle$ ao subespaço $L(\lambda)^+$. Portanto para o operador adjunto a z_{ni} tem-se

$$z_{ni}^* = z_{in} \frac{(h_i - h_{i+1} - 1) \cdots (h_i - h_{n-1} - 1)}{(h_i - h_1)(h_i - h_{i-1})},$$

e a Proposição é deduzida do Lema 101 por indução. ■

Demonstração das Fórmulas (3.5)−(3.7) do Teorema (92)

Primeiro, desde que $E_{nn} z_{ni} = z_{ni}(E_{nn} + 1)$ para qualquer i, tem-se

$$E_{nn}\xi_\mu = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i - \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i \right) \xi_\mu,$$

o qual implica (3.5).

Para provar (3.6) é suficiente calcular $E_{n-1,n}\xi_{\mu\nu}$, onde

$$\xi_{\mu\nu} = z_{n-1,1}^{\mu_1 - \nu_1} \cdots z_{n-1,n-2}^{\mu_{n-2} - \nu_{n-2}} \xi_\mu,$$

e os ν_i's satisfazem as condições intermediárias

$$\mu_i - \nu_i \in \mathbb{Z}_+ \quad \text{e} \quad \nu_i - \mu_{i+1} \in \mathbb{Z}_+, \quad \text{para } i = 1, ..., n-2.$$

Desde que $E_{n-1,n}$ comuta com $z_{n-1,i}$,

$$E_{n-1,n}\xi_{\mu\nu} = z_{n-1,1}^{\mu_1 - \nu_1} \cdots z_{n-1,n-2}^{\mu_{n-2} - \nu_{n-2}} E_{n-1,n}\xi_\mu.$$

O seguinte Lema é conseqüência das fórmulas explícitas para os *lowering and raising operators* (3.9) e (3.10).

Lema 102 *Em* $\mathbf{U}'(\mathcal{G}l_n)$ *módulo o ideal* J', *tem-se a seguinte relação:*

$$E_{n-1,n} = \sum_{i=1}^{n-1} z_{n-1,i} z_{in} \frac{1}{(h_i - h_1) \cdots \wedge_i \cdots (h_i - h_{n-1})},$$

onde $z_{n-1,n-1} = 1$.

Dos Lemas 101 e 102 tem-se

$$E_{n-1,n}\xi_{\mu\nu} = -\sum_{i=1}^{n-1} \frac{(m_i - l_1)\cdots(m_i - l_n)}{(m_i - m_1)\cdots\wedge_i\cdots(m_i - m_{n-1})}\xi_{\mu+\delta_i,\nu}, \tag{3.29}$$

o qual prova (3.6). Para provar (3.7) usa-se a Proposição 94. A relação (3.29) implica que

$$E_{n,n-1}\xi_{\mu\nu} = \sum_{i=1}^{n-1} c_i(\mu,\nu)\,\xi_{\mu-\delta_i,\nu},$$

para alguns coeficientes $c_i(\mu,\nu)$. Aplicamos o operador $z_{j,n-1}$ a ambos lados desta relação. Desde que $z_{j,n-1}$ comuta com $E_{n,n-1}$ obtém-se, do Lema 101, a relação de recorrência para $c_i(\mu,\nu)$. Se $\mu_j - \nu_j \geq 1$, então

$$c_i(\mu,\nu+\delta_j) = c_i(\mu,\nu)\,\frac{m_i - \gamma_j - 1}{mi - \gamma_j},$$

onde $\gamma_j = \nu_j - j + 1$. A demonstração é concluída por indução. Os valores iniciais de $c_i(\mu,\nu)$ são encontrados aplicando a relação

$$E_{n,n-1}z_{n-1,i} = z_{ni}\frac{1}{h_i - h_{n-1}} + z_{n-1,i}E_{n,n-1}\frac{h_i - h_{n-1} - 1}{h_i - h_{n-1}},$$

ao vetor ξ_μ e levando em conta que $E_{n,n-1} = z_{n,n-1}$. Realizando os cálculos obtém-se

$$E_{n,n-1}\xi_{\mu\nu} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(m_i - \gamma_1)\cdots(m_i - \gamma_{n-2})}{(m_i - m_1)\cdots\wedge_i\cdots(m_i - m_{n-1})}\xi_{\mu-\delta_i,\nu},$$

e assim provamos (3.7). ■

Capítulo 4

Bases de peso para representações de $\mathfrak{o}_n$ e $\mathfrak{sp}_{2n}$

Seja $\mathcal{G}_n$ uma álgebra de Lie complexa simples de tipo B, C ou D, de posto n, isto é,

$$\mathcal{G}_n = \mathfrak{o}_{2n+1},\ \mathfrak{sp}_{2n},\ \text{ou}\ \mathfrak{o}_{2n}, \tag{4.1}$$

respectivamente. Denotemos por $V(\lambda)$ a representação irredutível de dimensão finita de $\mathcal{G}_n$ com peso máximo λ. A restrição de $V(\lambda)$ à subálgebra $\mathcal{G}_{n-1}$ em geral não é livre de multiplicidade. Isto significa que se $V'(\mu)$ é a representação irredutível de dimensão finita de $\mathcal{G}_{n-1}$ com peso máximo μ, então o espaço

$$Hom_{\mathcal{G}_{n-1}}\left(V'(\mu), V(\lambda)\right), \tag{4.2}$$

não é necessariamente de dimensão 1. Para construir uma base de $V(\lambda)$ associada com a cadeia de subálgebras

$$\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2 \subset \cdots \subset \mathcal{G}_n,$$

precisamos construir uma base do espaço (4.2) o qual é isomorfo ao subespaço $V(\lambda)_\mu^+$ dos vetores máximos sobre $\mathcal{G}l_{n-1}$ de peso μ em $V(\lambda)$. O subespaço $V(\lambda)_\mu^+$ possui uma estrutura natural de uma representação do centralizador $C_n = \mathbf{U}(\mathcal{G}_n)^{\mathcal{G}_{n-1}}$ de $\mathcal{G}_{n-1}$ na álgebra envolvente

universal $\mathbf{U}(\mathcal{G}_n)$. Olshanski [Ol] provou que existem homomorfismos naturais

$$C_1 \longleftarrow C_2 \longleftarrow \cdots \longleftarrow C_n \longleftarrow C_{n+1} \longleftarrow \cdots .$$

O limite projetivo desta cadeia é uma extensão do Yangian twisted $Y^+(2)$ ou $Y^-(2)$, nos casos ortogonal e simplético, respectivamente. Veja [Ol], [MNO] e [MO] para a definição e propriedades dos Yangian twisted. Em particular, existe um homomorfismo das álgebras $Y^{\pm}(2) \longrightarrow C_n$ o qual equipa o espaço $V(\lambda)^+_\mu$ com uma estrutura de $Y^{\pm}(2)$-módulo. Pelo resultado de [Mo1], a representação $V(\lambda)^+_\mu$ pode ser estendida a uma álgebra maior, o Yangian $Y(2)$. Isto é um fato crucial que nos permite construir uma base natural em cada espaço $V(\lambda)^+_\mu$. Nos casos C e D, o $Y(2)$-módulo $V(\lambda)^+_\mu$ é irredutível e no caso B é soma direta de 2 submódulos irredutíveis. Isto não leva, porém, a maiores diferenças nas construções e as fórmulas finais são similares nos 3 casos.

Os cálculos dos geradores de $\mathcal{G}_n$ são baseados nas relações entre o Yangian twisted $Y^{\pm}(2)$ e a álgebra de Mickelsson-Zhelobenko $Z(\mathcal{G}_n, \mathcal{G}_{n-1})$, veja a seção 2. Construímos um homomorfismo de álgebras $Y^{\pm}(2) \longrightarrow Z(\mathcal{G}_n, \mathcal{G}_{n-1})$ o qual nos permite expressar os geradores do Yangian twisted como operadores no $V(\lambda)^+_\mu$, nos termos dos *lowering and raising operators.*

4.1 Raising and lowering operators

Quando for possível consideramos os 3 casos (4.1) simultaneamente, exceto quando se fale o contrário. As filas e colunas das matrizes $2n \times 2n$ serão enumeradas pelos índices $-n, \cdots, -1, 1, \cdots, n$. O índice 0 será usualmente omitido no caso formal. Para $-n \leq i, j \leq n$, seja

$$F_{ij} = E_{ij} - \theta_{ij} E_{-j,-i}, \tag{4.3}$$

onde os E_{ij} são as matrizes *standard* unitárias e

$$\theta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{no caso ortogonal} \\ \operatorname{sgn} i \operatorname{sgn} j, & \text{no caso simplético.} \end{cases} \tag{4.4}$$

As matrizes F_{ij} geram a álgebra de Lie $\mathcal{G}_n$. A subálgebra $\mathcal{G}_{n-1}$ é gerada pelos elementos

(4.3) com os índices i, j percorrendo no conjunto $\{-n+1, \cdots n-1\}$. Denote por $\mathcal{H} = \mathcal{H}_n$ a subálgebra diagonal de Cartan no $\mathcal{G}_n$. Os elementos $F_{11}, \cdots, F_{nn}$ são uma base de $\mathcal{H}$.

As representações de dimensão finita de $\mathcal{G}_n$ estão em correspondência $1-1$ com as n-uplas $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$, onde os números λ_i satisfazem as condições

$$\lambda_i - \lambda_{i+1} \in \mathbb{Z}_+, \quad \text{para} \quad i = 1, \cdots, n-1 \tag{4.5}$$

e

$$\begin{aligned} -2\lambda_1 &\in \mathbb{Z}_+, \quad \text{para} \quad \mathcal{G}_n = \mathfrak{o}_{2n+1}, \\ -\lambda_1 &\in \mathbb{Z}_+, \quad \text{para} \quad \mathcal{G}_n = \mathfrak{sp}_{2n}, \\ -\lambda_1 - \lambda_2 &\in \mathbb{Z}_+, \quad \text{para} \quad \mathcal{G}_n = \mathfrak{o}_{2n}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Cada uma dessas n-uplas é chamada **peso máximo** da representação correspondente, a qual denotamos por $V(\lambda)$ e contém um único, a menos de um fator constante, vetor diferente de zero ξ (o **vetor máximo**) tal que

$$\begin{aligned} F_{ii}\xi &= \lambda_i \xi, \quad \text{para} \quad i = 1, \cdots, n, \\ F_{ij}\xi &= 0, \quad \text{para} \quad -n \leq i < j \leq n. \end{aligned}$$

Denote por $V(\lambda)^+$ o subespaço dos vetores máximos em $V(\lambda)$ sobre $\mathcal{G}_{n-1}$:

$$V(\lambda)^+ = \{\eta \in V(\lambda) \mid F_{ij}\eta = 0, \ -n < i < j < n\}.$$

Dado um peso $\mu = (\mu_1, \cdots, \mu_{n-1})$ sobre $\mathcal{G}_{n-1}$ denotamos por $V(\lambda)^+_\mu$ o subespaço de peso correspondente no $V(\lambda)^+$:

$$V(\lambda)^+_\mu = \left\{\eta \in V(\lambda)^+ \mid F_{ii}\eta = \mu_i \eta, \ i = 1, \cdots, n-1\right\}.$$

Considere a álgebra de Mickelsson-Zhelobenko $Z(\mathcal{G}_n, \mathcal{G}_{n-1})$ introduzida na seção 2. Seja

$p = p_{n-1}$ o projetor extremo para a álgebra de Lie $\mathcal{G}_{n-1}$. Ele satisfaz as condições

$$F_{ij}p = pF_{ji} = 0, \quad \text{para} \quad -n < i < j < n.$$

Pelo Teorema 86, os elementos

$$F_{nn}, \quad pF_{ia}, \quad a = -n, n, \quad i = -n+1, \cdots, n-1, \tag{4.7}$$

são geradores de $Z(\mathcal{G}_n, \mathcal{G}_{n-1})$, no caso ortogonal. No caso simplético, a álgebra $Z(\mathcal{G}_n, \mathcal{G}_{n-1})$ é gerada pelos elementos (4.7) junto com $F_{n,-n}$ e $F_{-n,n}$.

Para escrever as fórmulas explícitas dos geradores, introduz-se os números ρ_i, onde $i = 1, \cdots, n$, por

$$\rho_i = \begin{cases} -i + 1/2, & \text{para} \quad \mathcal{G}_n = \mathfrak{o}_{2n+1}, \\ -i, & \text{para} \quad \mathcal{G}_n = \mathfrak{sp}_{2n}, \\ -i+1, & \text{para} \quad \mathcal{G}_n = \mathfrak{o}_{2n}. \end{cases}$$

Os números $-\rho_i$ são as coordenadas da semi-soma das raízes positivas em relação à subálgebra de Borel triangular superior. Seja agora

$$f_i = F_{ii} + \rho_i, \qquad f_{-i} = -f_i,$$

para $i = 1, \cdots, n$. Ainda, no caso de o_{2n+1}, consideremos também $f_0 = -1/2$. Os geradores pF_{ia} podem ser dados por uma expressão uniforme em todos os 3 casos. Seja $a \in \{-n, n\}$ e $i \in \{-n+1, \cdots, n-1\}$, então, tem-se módulo o ideal J',

$$pF_{ia} = F_{ia} + \sum_{i > i_1 > \ldots > i_s > -n} F_{ii_1} F_{i_1 i_2} \cdots F_{i_{s-1} i_s} F_{i_s a} \frac{1}{(f_i - f_{i_1}) \cdots (f_i - f_{i_s})}, \tag{4.8}$$

somando sobre os $s \geq 1$. Será conveniente trabalhar com geradores normalizados de $Z(\mathcal{G}_n, \mathcal{G}_{n-1})$. Seja

$$z_{ia} = pF_{ia} \left(f_i - f_{i-1}\right) \cdots \widehat{(f_i - f_{-i})} \cdots \left(f_i - f_{-n+1}\right),$$

no caso D, onde o chapéu indica que o fator é omitido, caso ocorra. Serão usados também os

elementos z_{ai} definidos por

$$z_{ai} = (-1)^{n-i} z_{-i,-a} \quad \text{e} \quad z_{ai} = (-1)^{n-i} sgna \cdot z_{-i,-a},$$

nos casos ortogonal e simplético, respectivamente. Os elementos z_{ia} satisfazem algumas relações quadráticas, por exemplo, temos para todo $a, b \in \{-n, n\}$ e $i + j \neq 0$,

$$z_{ia} z_{jb} + z_{ja} z_{ib} (f_i - f_j - 1) = z_{ib} z_{ja} (f_i - f_j). \tag{4.9}$$

Assim, z_{ia} e z_{ja} comutam para $i + j \neq 0$. Também, z_{ia} e z_{ib} comutam para $i \neq 0$ e todos os valores de a e b.

Os elementos z_{ia} agem naturalmente no espaço $V(\lambda)^+$ por *raising* ou *lowering* os pesos. Tem-se para $i = 1, \cdots, n-1$;

$$z_{ia} : V(\lambda)^+_\mu \longrightarrow V(\lambda)^+_{\mu+\delta_i}, \quad z_{ai} : V(\lambda)^+_\mu \longrightarrow V(\lambda)^+_{\mu-\delta_i},$$

onde $\mu \pm \delta_i$ é obtido a partir de μ, substituindo μ_i por $\mu_i \pm 1$. No caso B, os operadores z_{0a} preservam cada subespaço $V(\lambda)^+_\mu$.

Precisa-se do seguinte elemento o qual pode ser verificado que pertence ao normalizador Norm$\mathcal{J}$, e assim pode ser considerado como um elemento da álgebra $Z(\mathcal{G}_n, \mathcal{G}_{n-1})$:

$$z_{n,-n} = \sum_{n > i_1 > \ldots > i_s > -n} F_{ni_1} F_{i_1 i_2} \cdots F_{i_s,-n} (f_n - f_{j_1}) \cdots (f_n - f_{i_k}),$$

nos casos B, C, e

$$z_{n,-n} = \sum_{n > i_1 > \ldots > i_s > -n} F_{ni_1} F_{i_1 i_2} \cdots F_{i_s,-n} \frac{(f_n - f_{j_1}) \cdots (f_n - f_{i_k})}{2 f_n},$$

no caso D, onde $s = 0, 1, \cdots$ e $\{j_1, \cdots, j_k\}$ é o complemento ao subconjunto $\{i_1, \cdots, i_s\}$ no conjunto $\{-n+1, \cdots, n-1\}$. O próximo resultado é a recíproca do Lema 102 e é crucial nos cálculos dos elementos da matriz dos geradores nas bases.

Lema 103 *Para $a \in \{-n, n\}$ temos*

$$F_{n-1,a} = \sum_{i=-n+1}^{n-1} z_{n-1,i} z_{ia} \frac{1}{(f_i - f_{-n+1}) \cdots \wedge_i \cdots (f_i - f_{n-1})},$$

nos casos B, C e

$$F_{n-1,a} = \sum_{i=-n+1}^{n-1} z_{n-1,i} z_{ia} \frac{1}{(f_i - f_{-n+1}) \cdots \wedge_{-i,i} \cdots (f_i - f_{n-1})},$$

no caso D, onde $z_{n-1,n-1} = 1$ e as igualdades são consideradas no $\mathbf{U}'(\mathcal{G}l_n)$ módulo o ideal J'. O símbolo $\wedge$ indica que o índice foi omitido.

Para escrever os vetores da base, introduz-se a interpolação de polinômios $Z_{n,-n}(u)$ com coeficientes na álgebra de Mickelsson-Zhelobenko $Z(\mathcal{G}_n, \mathcal{G}_{n-1})$, por

$$Z_{n,-n}(u) = \sum_{i=1}^{n} z_{ni} z_{i,-n} \prod_{i=1, j \neq i}^{n} \frac{u^2 - g_j^2}{g_i^2 - g_j^2}, \tag{4.10}$$

nos casos B, C e

$$Z_{n,-n}(u) = \sum_{i=1}^{n-1} z_{ni} z_{i,-n} \prod_{i=1, j \neq i}^{n-1} \frac{u^2 - g_j^2}{g_i^2 - g_j^2}, \tag{4.11}$$

no caso D, onde $g_i = f_i + 1/2$. De acordo com isso, tem-se

$$Z_{n,-n}(g_i) = z_{ni} z_{i,-n} \tag{4.12}$$

e quando u é aplicado em $\mathbf{U}(\mathcal{H})$, os coeficientes do polinômo $Z_{n,-n}(u)$ são escritos à esquerda das potências de u, como aparece nas fórmulas (4.10) e (4.11).

4.2 Regras de ramificação, padrões e vetores da base

A restrição de $V(\lambda)$ à subálgebra $\mathcal{G}_{n-1}$ é dada por

$$V(\lambda)\,|_{\mathcal{G}_{n-1}} \simeq \bigoplus_{\mu} c(\mu)\, V'(\mu),$$

onde $V'(\mu)$ é a representação irredutível de dimensão finita de $\mathcal{G}_{n-1}$ com o peso máximo μ. A multiplicidade $c(\mu)$ coincide com a dimensão do espaço $V(\lambda)^+_\mu$ e o valor exato é encontrado pela regra da ramificação de Zhelobenko [Zh1]. Aqui os formularemos separadamente para cada caso, recordando as condições (4.5) e (4.6) sobre o peso máximo λ. Nas fórmulas usaremos a notação

$$l_i = \lambda_i + \rho_i + 1/2, \qquad \gamma_i = \nu_i + \rho_i + 1/2,$$

onde os ν_i são os parâmetros.

Uma parametrização dos vetores da base em $V(\lambda)$ é obtida aplicando as regras da ramificação a suas subseqüentes restrições às subálgebras da cadeia

$$\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2 \subset \cdots \subset \mathcal{G}_{n-1} \subset \mathcal{G}_n.$$

Isto nos leva à definição dos padrões de Gelfand-Tsetlin para os tipos B, C e D.

Então encontram-se fórmulas para os vetores da base da representação $V(\lambda)$. Usando a notação

$$l_{ki} = \lambda_{ki} + \rho_i + 1/2, \qquad l'_{ki} = \lambda'_{ki} + \rho_i + 1/2,$$

onde os λ_{ki} e λ'_{ki} são as entradas dos padrões que definiremos a seguir.

Caso tipo B. A multiplicidade $c(\mu)$ é igual ao número de $n-$uplas $(\nu'_1, \nu_2, \cdots, \nu_n)$ satisfazendo as desigualdades

$$\begin{aligned} -\lambda_1 &\geq \nu'_1 \geq \lambda_1 \geq \nu_2 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \nu_{n-1} \geq \lambda_{n-1} \geq \nu_n \geq \lambda_n, \\ -\mu_1 &\geq \nu'_1 \geq \mu_1 \geq \nu_2 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \nu_{n-1} \geq \mu_{n-1} \geq \nu_n, \end{aligned}$$

com ν'_1 e todos os ν_i sendo simultaneamente inteiros ou metade de inteiros, o mesmo que os λ_i. Equivalentemente, $c(\mu)$ é igual ao número de $(n+1)-$uplas $\nu = (\sigma, \nu_1, \cdots, \nu_n)$, com as entradas dadas por

$$(\sigma, \nu_1) = \begin{cases} (0, \nu'_1), & \text{se } \nu'_1 \leq 0 \\ (1, -\nu'_1), & \text{se } \nu'_1 > 0 \end{cases}.$$

Lema 104 *Os vetores*

$$\xi_\nu = z_{n0}^{\sigma} \prod_{i=1}^{n-1} z_{ni}^{\nu_i-\mu_i} z_{i,-n}^{\nu_i-\lambda_i} \cdot \prod_{k=l_n}^{\gamma_n-1} Z_{n,-n}(k)\,\xi,$$

formam uma base do espaço $V(\lambda)_\mu^+$.

Define-se um **padrão tipo B,** Λ, associado com λ como o arranjo da forma

$$\begin{array}{ccccccccc}
\sigma_n & & \lambda_{n1} & & \lambda_{n2} & & \cdots & & \lambda_{nn} \\
& \lambda'_{n1} & & \lambda'_{n2} & & \cdots & & \lambda'_{nn} & \\
\sigma_{n-1} & & \lambda_{n-1,1} & & \cdots & & \lambda_{n-1,n-1} & & \\
& \lambda'_{n-1,1} & & \cdots & & \lambda'_{n-1,n-1} & & & \\
\cdots & & \cdots & & \cdots & & & & \\
\sigma_1 & & \lambda_{11} & & & & & & \\
& \lambda'_{11} & & & & & & &
\end{array}$$

tal que $\lambda = (\lambda_{n1}, \cdots, \lambda_{nn})$, cada σ_k é 0 ou 1 e as outras entradas são todas números inteiros não-positivos ou metade de inteiros não-positivos, o mesmo que os λ_i, e verificam-se as desigualdades:

$$\lambda'_{k1} \geq \lambda_{k1} \geq \lambda'_{k2} \geq \lambda_{k2} \geq \cdots \geq \lambda'_{k,k-1} \geq \lambda_{k,k-1} \geq \lambda'_{kk} \geq \lambda_{kk},$$

para $k = 1, ..., n$ e

$$\lambda'_{k1} \geq \lambda_{k-1,1} \geq \lambda'_{k2} \geq \lambda_{k-1,2} \geq \cdots \geq \lambda'_{k,k-1} \geq \lambda_{k-1,k-1} \geq \lambda'_{kk},$$

para $k = 2, ..., n$. Ainda, no caso dos inteiros λ_i, a condição

$$\lambda'_{k1} \leq -1, \quad \text{se} \quad \sigma_k = 1,$$

deve-se verificar para todo $k = 1, ..., n$.

Teorema 105 *Os vetores*

$$\xi_\Lambda = \overrightarrow{\prod_{k=1,\ldots,n}} \left(z_{k0}^{\sigma_k} \cdot \prod_{i=1}^{k-1} z_{ki}^{\lambda'_{ki}-\lambda_{k-1,i}} z_{i,-k}^{\lambda'_{ki}-\lambda_{ki}} \cdot \prod_{j=l_{kk}}^{l'_{kk}-1} Z_{k,-k}(j) \right) \xi,$$

parametrizados pelos padrões Λ formam uma base da representação $V(\lambda)$.

Caso tipo C. A multiplicidade $c(\mu)$ é igual ao número de $n-$uplas de inteiros $\nu = (\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n)$, satisfazendo as desigualdades

$$\begin{aligned} 0 &\geq \nu_1 \geq \lambda_1 \geq \nu_2 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \nu_{n-1} \geq \lambda_{n-1} \geq \nu_n \geq \lambda_n, \\ 0 &\geq \nu_1 \geq \mu_1 \geq \nu_2 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \nu_{n-1} \geq \mu_{n-1} \geq \nu_n. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Lema 106 *Os vetores*

$$\xi_\nu = \prod_{i=1}^{n-1} z_{ni}^{\nu_i-\mu_i} z_{i,-n}^{\nu_i-\lambda_i} \cdot \prod_{k=l_n}^{\gamma_n-1} Z_{n,-n}(k)\, \xi,$$

formam uma base do espaço $V(\lambda)_\mu^+$.

Define-se um **padrão tipo C,** Λ, associado com λ, como o arranjo da forma

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & \lambda_{n1} & & \lambda_{n2} & & \cdots & & \lambda_{nn} \\
\lambda'_{n,1} & & \lambda'_{n,2} & & \cdots & & \lambda'_{n,n} & \\
 & \lambda_{n-1,1} & & \cdots & & \lambda_{n-1,n-1} & & \\
\lambda'_{n-1,1} & & \cdots & & \lambda'_{n-1,n-1} & & & \\
 & \cdots & & \cdots & & & & \\
 & \lambda_{1,1} & & & & & & \\
\lambda'_{11} & & & & & & &
\end{array}
$$

tal que $\lambda = (\lambda_{n1}, ..., \lambda_{nn})$, as outras entradas são todas números inteiros não-positivos, e verificam-se as seguintes desigualdades

$$0 \geq \lambda'_{k1} \geq \lambda_{k1} \geq \lambda'_{k,2} \geq \lambda_{k2} \geq \cdots \geq \lambda'_{k,k-1} \geq \lambda_{k,k-1} \geq \lambda'_{k,k} \geq \lambda_{kk},$$

para $k = 1, ..., n$ e

$$0 \geq \lambda'_{k1} \geq \lambda_{k-1,1} \geq \lambda'_{k,2} \geq \lambda_{k-1,2} \geq \cdots \geq \lambda'_{k,k-1} \geq \lambda_{k-1,k-1} \geq \lambda'_{k,k},$$

para $k = 2, ..., n$.

Teorema 107 *Os vetores*

$$\xi_\Lambda = \overrightarrow{\prod_{k=1,\cdots,n}} \left(\prod_{i=1}^{k-1} z_{ki}^{\lambda'_{k,i}-\lambda_{k-1,i}} z_{i,-k}^{\lambda'_{k,i}-\lambda_{ki}} \cdot \prod_{j=l_{kk}}^{l'_{k,k}-1} Z_{k,-k}(j) \right) \xi,$$

parametrizados pelos padrões Λ *formam uma base da restrição* $V(\lambda)$.

Caso tipo D. A multiplicidade $c(\mu)$ é igual ao número de $(n-1)$ −uplas $\nu = (\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_{n-1})$, satisfazendo as desigualdades

$$\begin{aligned} -|\lambda_1| &\geq \nu_1 \geq \lambda_2 \geq \nu_2 \geq \lambda_3 \geq \cdots \geq \lambda_{n-1} \geq \nu_{n-1} \geq \lambda_n, \\ -|\mu_1| &\geq \nu_1 \geq \mu_2 \geq \nu_2 \geq \mu_3 \geq \cdots \geq \mu_{n-1} \geq \nu_{n-1}, \end{aligned}$$

com todos os ν_i sendo simultaneamente números inteiros ou metade de inteiros, o mesmo que os λ_i. Seja $\nu_0 = \max\{\lambda_1, \mu_1\}$.

Lema 108 *Os vetores*

$$\xi_\nu = \prod_{i=1}^{n-1} z_{ni}^{\nu_{i-1}-\mu_i} z_{i,-n}^{\nu_{i-1}-\lambda_i} \cdot \prod_{k=l_n}^{\gamma_{n-1}-2} Z_{n,-n}(k)\,\xi,$$

formam uma base do espaço $V(\lambda)_\mu^+$.

Define-se um **padrão tipo D,** Λ, associado com λ como o arranjo da forma

$$\begin{array}{ccccccccc}
\lambda_{n1} & & \lambda_{n2} & & \cdots & & \cdots & & \lambda_{nn} \\
& \lambda'_{n-1,1} & & \cdots & & & & \lambda'_{n-1,n-1} & \\
\lambda_{n-1,1} & & \cdots & & & & \lambda_{n-1,n-1} & & \\
& \cdots & & & \cdots & & & & \\
\lambda_{21} & & \lambda_{22} & & & & & & \\
& \lambda'_{11} & & & & & & & \\
\lambda_{11} & & & & & & & &
\end{array}$$

tal que $\lambda = (\lambda_{n1} \cdots, \lambda_{nn})$, as outras entradas são todas números inteiros não-positivos ou

metade de inteiros não-positivos, o mesmo que os λ_i, e verificam-se as seguintes desigualdades

$$\begin{aligned} -|\lambda_{k1}| &\geq \lambda'_{k-1,1} \geq \lambda_{k2} \geq \lambda'_{k-1,2} \geq \cdots \geq \lambda_{k,k-1} \geq \lambda'_{k-1,k-1} \geq \lambda_{kk}, \\ -|\lambda_{k-1,1}| &\geq \lambda'_{k-1,1} \geq \lambda_{k-1,2} \geq \lambda'_{k-1,2} \geq \cdots \geq \lambda_{k-1,k-1} \geq \lambda'_{k-1,k-1}, \end{aligned}$$

para $k = 2, ..., n$. Seja $\lambda'_{k-1,0} = \max\{\lambda_{k,1}\lambda_{k-1,1}\}$.

Teorema 109 *Os vetores*

$$\xi_\Lambda = \overrightarrow{\prod_{k=2,\cdots,n}} \left(\prod_{i=1}^{k-1} z_{ki}^{\lambda'_{k-1,i-1}-\lambda_{k-1,i}} z_{i,-k}^{\lambda'_{k-1,i-1}-\lambda_{ki}} \cdot \prod_{j=l_{kk}}^{l'_{k-1,k-1}-2} Z_{k,-k}(j) \right) \xi,$$

parametrizados pelos padrões Λ formam uma base da representação $V(\lambda)$.

As demonstrações dos Teoremas 105, 107 e 109 serão apresentadas nas próximas duas seções. Estas são baseadas na aplicação da teoria de representações de **Yangian twisted**. Claramente, devido às regras da ramificação, é suficiente construir uma base no espaço de multiplicidade $V(\lambda)^+_\mu$.

4.3 Yangians e suas representações

Consideremos a álgebra linear geral $\mathcal{G}l_n$ com a base canônica E_{ij}, $i, j = 1, \ldots, n$. Seja a matriz $n \times n$, E, tal que a $ij-$ésima entrada é E_{ij}. Os traços das potências da matriz E

$$g_s = trE^s, \qquad s = 1, 2, \ldots$$

são elementos centrais da álgebra envolvente universal $\mathbf{U}(\mathcal{G}l_n)$ conhecidos como os **invariantes de Gelfand**. Além disto, os primeiros n são algebricamente independentes e geram o centro. Uma demonstração da centralidade de g_s é deduzida a partir da seguinte relação na álgebra envolvente

$$[E_{ij}, (E^s)_{kl}] = \delta_{kj}(E^s)_{il} - \delta_{il}(E^s)_{kj}. \tag{4.14}$$

É de admirar-se ao ver que uma fórmula mais geral existe para o comutador dos elementos das matrizes das potências de E. Ela é uma generalização de (4.14) e pode ser verificada por

indução:

$$\left[\left(E^{r+1}\right)_{ij},\left(E^{s}\right)_{kl}\right]-\left[\left(E^{r}\right)_{ij},\left(E^{s+1}\right)_{kl}\right]=\left(E^{r}\right)_{kj}\left(E^{s}\right)_{il}-\left(E^{s}\right)_{kj}\left(E^{r}\right)_{il},$$

onde $r,s\geq 0$ e $E^{0}=1$ é a matriz identidade. Podemos axiomatizar estas relações introduzindo a seguinte definição.

Definição 110 *O* ***Yangian*** *para $\mathcal{G}l_n$ é uma álgebra associativa complexa com uma quantidade enumerável de geradores $t_{ij}^{(1)},t_{ij}^{(2)},\ldots$ onde $1\leq i,j\leq n$, que satisfazem as relações*

$$\left[t_{ij}^{(r+1)},t_{kl}^{(s)}\right]-\left[t_{ij}^{(r)},t_{kl}^{(s+1)}\right]=t_{kj}^{(r)}t_{il}^{(s)}-t_{kj}^{(s)}t_{il}^{(r)}, \tag{4.15}$$

onde $r,s\geq 0$ e $t_{ij}^{(0)}=\delta_{ij}$. Esta álgebra é denotada por $Y\left(\mathcal{G}l_n\right)$ ou $Y\left(n\right)$.

Introduzindo as séries geradoras,

$$t_{ij}\left(u\right)=\delta_{ij}+t_{ij}^{(1)}u^{-1}+t_{ij}^{(2)}u^{-2}+\cdots\in Y\left(n\right)\left[\left[u^{-1}\right]\right].$$

podemos escrever (4.15) na forma

$$\left(u-v\right)\left[t_{ij}\left(u\right),t_{kl}\left(v\right)\right]=t_{kj}\left(u\right)t_{il}\left(v\right)-t_{kj}\left(v\right)t_{il}\left(u\right).$$

Para este trabalho somente precisamos o Yangian $Y\left(2\right)$ para a álgebra de Lie $\mathcal{G}l_2$. No que segue será conveniente usar os índices $-n,n$ para enumerar as filas e colunas das matrizes 2×2. O Yangian $Y\left(2\right)$ é a álgebra associativa complexa com os geradores $t_{ab}^{(1)},t_{ab}^{(2)},\ldots$, onde $a,b\in\{-n,n\}$ e que satisfazem as relações

$$\left[t_{ab}^{(r+1)},t_{cd}^{(s)}\right]-\left[t_{ab}^{(r)},t_{cd}^{(s+1)}\right]=t_{cb}^{(r)}t_{ad}^{(s)}-t_{cb}^{(s)}t_{ad}^{(r)}, \tag{4.16}$$

onde $r,s\geq 0$ e $t_{ij}^{(0)}=\delta_{ij}$. Ou equivalentemente,

$$\left(u-v\right)\left[t_{ab}\left(u\right),t_{cd}\left(v\right)\right]=t_{cb}\left(u\right)t_{ad}\left(v\right)-t_{cb}\left(v\right)t_{ad}\left(u\right), \tag{4.17}$$

onde

$$t_{ab}(u) = \delta_{ab} + t_{ab}^{(1)} u^{-1} + t_{ab}^{(2)} u^{-2} + \cdots \in Y(2)\left[\left[u^{-1}\right]\right].$$

Introduzimos as séries $s_{ab}(u)$, $a, b \in \{-n, n\}$ por

$$s_{ab}(u) = \theta_{nb} t_{an}(u)\, t_{-b,-n}(-u) + \theta_{-n,b} t_{a,-n}(u)\, t_{-b,n}(-u), \tag{4.18}$$

com θ_{ij} definido em (4.4). Escrevemos

$$s_{ab}(u) = \delta_{ab} + s_{ab}^{(1)} u^{-1} + s_{ab}^{(2)} u^{-2} + \cdots.$$

O **Yangian Twisted** $Y^{\pm}(2)$ é definido como a subálgebra de $Y(2)$ gerada pelos elementos $s_{ab}^{(1)}, s_{ab}^{(2)}, \ldots$, onde $a, b \in \{-n, n\}$. Também, $Y^{\pm}(2)$ pode ser visto como uma álgebra abstrata com geradores $s_{ab}^{(r)}$ e definido as relações lineares e quadráticas as quais têm a seguinte forma

$$\begin{aligned} & \left(u^2 - v^2\right)\left[s_{ab}(u), s_{cd}(v)\right] \\ = \; & (u+v)\left(s_{cb}(u)\, s_{ad}(v) - s_{cb}(v)\, s_{ad}(u)\right) \\ & -(u-v)\left(\theta_{c,-b} s_{a,-c}(u)\, s_{-b,d}(v) - \theta_{a,-d} s_{c,-a}(v)\, s_{-d,b}(u)\right) \\ & +\theta_{a,-b}\left(s_{c,-a}(u)\, s_{-b,d}(v) - s_{c,-a}(v)\, s_{-b,d}(u)\right), \end{aligned} \tag{4.19}$$

e

$$\theta_{ab} s_{-b,-a}(-u) = s_{ab}(u) \pm \frac{s_{ab}(u) - s_{ab}(-u)}{2u}. \tag{4.20}$$

Sempre que o sinal duplo $\pm$ ou $\mp$ ocorre, o sinal superior corresponde ao caso ortogonal e o sinal inferior ao caso simplético. Em particular, tem-se a relação

$$\left[s_{n,-n}(u), s_{n,-n}(v)\right] = 0.$$

O Yangian é uma álgebra de Hopf com o co-produto

$$\Delta\left(t_{ab}(u)\right) = t_{an}(u) \otimes t_{nb}(u) + t_{a,-n}(u) \otimes t_{-n,b}(u). \tag{4.21}$$

O Yangian twisted $Y^{\pm}(2)$ é um co-ideal à esquerda no $Y(2)$ com

$$\Delta(s_{ab}(u)) = \sum_{c,d\in\{-n,n\}} \theta_{bd} t_{ac}(u)\, t_{-b,-d}(-u) \otimes s_{cd}(u). \tag{4.22}$$

Definição 111 *Uma representação do Yangian $Y(2)$ é uma representação de* ***peso máximo*** *se é gerada por um vetor diferente de zero η (o vetor máximo) tal que*

$$t_{ii}(u)\,\eta = \lambda_i(u)\,\eta, \qquad \text{para } i = -n, n$$
$$t_{-n,n}(u)\,\eta = 0$$

para certa série formal $\lambda_i(u) \in 1+u^{-1}\mathbb{C}\left[\left[u^{-1}\right]\right]$. O par $(\lambda_{-n}(u), \lambda_n(u))$ é chamado o peso máximo da representação. Dadas quaisquier séries $\lambda_{-n}(u), \lambda_n(u)$ existe uma única, a menos de isomorfismo, representação irredutível de peso máximo de $Y(2)$ com peso máximo $(\lambda_{-n}(u), \lambda_n(u))$ a qual é denotada por $L(\lambda_{-n}(u), \lambda_n(u))$.

Similarmente, a representação do Yangian $Y^{\pm}(2)$ é uma representação de peso máximo se é gerada por um vetor diferente de zero η (o vetor máximo) tal que

$$s_{nn}(u)\,\eta = \mu(u)\,\eta, \qquad \text{para } i = -n, n$$
$$s_{-n,n}(u)\,\eta = 0$$

para certa série formal $\mu(u) \in 1 + u^{-1}\mathbb{C}\left[\left[u^{-1}\right]\right]$. O par $(\lambda_{-n}(u), \lambda_n(u))$ é chamado o peso máximo da representação. Dada série arbitrária $\mu(u)$ existe uma única, a menos de isomorfismo, representação irredutível de peso máximo de $Y^{\pm}(2)$ com peso máximo $\mu(u)$ a qual é denotada por $V(\mu(u))$. Cada representação irredutível de dimensão finita da álgebra $Y^{\pm}(2)$ é isomorfa a um único $V(\mu(u))$.

Dado um par de números complexos (α, β) tal que $\alpha - \beta \in \mathbb{Z}_+$ denota-se por $L(\alpha, \beta)$ a representação irredutível da álgebra $\mathcal{G}l_2$ com peso máximo (α, β) com relação à subálgebra de Borel triangular superior. Então $\dim L(\alpha, \beta) = \alpha - \beta + 1$.

Para considerar $L(\alpha, \beta)$ com uma estrutura de $Y(2)$ −módulo precisamos de um homomorfismo entre as álgebras $Y(2)$ e $\mathbf{U}(\mathcal{G}l_2)$.

Proposição 112 *A aplicação de* $Y(2) \longrightarrow \mathbf{U}(\mathcal{G}l_2)$ *definida por*

$$t_{ab}(u) \longrightarrow \delta_{ab} + E_{ab}u^{-1}, \qquad a, b \in \{-n, n\}, \tag{4.23}$$

define um homomorfismo entre as álgebras $Y(2)$ *e* $\mathbf{U}(\mathcal{G}l_2)$.

Demonstração. Seja A uma álgebra livre associativa gerada pelos elementos $t_{ab}(u)$, com $a, b \in \{-n, n\}$, então podemos definir um homomorfismo

$$\begin{array}{rccc} \Psi: & A & \longrightarrow & \mathbf{U}(\mathcal{G}l_2) \\ & t_{ab}(u) & \longmapsto & \delta_{ab} + E_{ab}u^{-1}, \end{array}$$

ou, em outras palavras, $\Psi\left(t_{ab}^{(0)}\right) = \delta_{ab}$, $\Psi\left(t_{ab}^{(1)}\right) = E_{ab}$ e $\Psi\left(t_{ab}^{(r)}\right) = 0$, para $r > 1$. Vejamos que

$$\Psi\left(\left[t_{ab}^{(r+1)}, t_{cd}^{(s)}\right] - \left[t_{ab}^{(r)}, t_{cd}^{(s+1)}\right] - t_{cb}^{(r)}t_{ad}^{(s)} + t_{cb}^{(s)}t_{ad}^{(r)}\right) = 0,$$

$$\vdots$$

para todo $r, s \geq 0$.

1. Para r ou $s \geq 2$ é trivial.

2. Para $r = s = 1$

$$\begin{aligned} & \Psi\left(\left[t_{ab}^{(2)}, t_{cd}^{(1)}\right] - \left[t_{ab}^{(1)}, t_{cd}^{(2)}\right] - t_{cb}^{(1)}t_{ad}^{(1)} + t_{cb}^{(1)}t_{ad}^{(1)}\right) \\ = \; & \Psi\left(\left[t_{ab}^{(2)}, t_{cd}^{(1)}\right]\right) - \Psi\left(\left[t_{ab}^{(1)}, t_{cd}^{(2)}\right]\right) - \Psi\left(t_{cb}^{(1)}t_{ad}^{(1)} - t_{cb}^{(1)}t_{ad}^{(1)}\right) \\ = \; & 0. \end{aligned}$$

3. Para $r = 1$ e $s = 0$ (ou por simetria $s = 1$ e $r = 0$)

$$\begin{aligned} & \Psi\left(\left[t_{ab}^{(2)}, t_{cd}^{(0)}\right] - \left[t_{ab}^{(1)}, t_{cd}^{(1)}\right] - t_{cb}^{(1)}t_{ad}^{(0)} + t_{cb}^{(0)}t_{ad}^{(1)}\right) \\ = \; & \Psi\left(-\left[t_{ab}^{(1)}, t_{cd}^{(1)}\right] - t_{cb}^{(1)}t_{ad}^{(0)} + t_{cb}^{(0)}t_{ad}^{(1)}\right) \\ = \; & -\left[E_{ab}, E_{cd}\right] - \delta_{ad}E_{cb} + \delta_{cb}E_{ad} \\ = \; & 0. \end{aligned}$$

4. Para $r = s = 0$

$$\begin{aligned}
& \Psi\left(\left[t_{ab}^{(1)}, t_{cd}^{(0)}\right] - \left[t_{ab}^{(0)}, t_{cd}^{(1)}\right] - t_{cb}^{(0)} t_{ad}^{(0)} + t_{cb}^{(0)} t_{ad}^{(0)}\right) \\
= \; & \Psi\left(\left[t_{ab}^{(1)}, t_{cd}^{(0)}\right]\right) - \Psi\left(\left[t_{ab}^{(0)}, t_{cd}^{(1)}\right]\right) \\
= \; & \delta_{cd} E_{ab} - \delta_{cd} E_{ab} - \delta_{ab} E_{cd} + \delta_{ab} E_{cd} \\
= \; & 0.
\end{aligned}$$

Seja $R = \left[t_{ab}^{(r+1)}, t_{cd}^{(s)}\right] - \left[t_{ab}^{(r)}, t_{cd}^{(s+1)}\right] - t_{cb}^{(r)} t_{ad}^{(s)} + t_{cb}^{(s)} t_{ad}^{(r)}$, logo $R \in \ker \Psi$. Consideremos o ideal $I(R)$ gerado por todos os R. Então $I(R) \subset \ker \Psi$ de modo que Ψ induz um homomorfismo $A/I(R) \longrightarrow \mathbf{U}(\mathcal{G}l_2)$, mas $A/I(R) \simeq Y(2)$, concluindo assim a proposição. ■

Corolário 113 *A aplicação de* $Y^{\pm}(2) \longrightarrow \mathbf{U}(\mathcal{G}l_2)$ *definida por*

$$s_{ab}(u) \longrightarrow \delta_{ab} + \frac{F_{ab}}{u - 1/2}, \quad a, b \in \{-n, n\}, \tag{4.24}$$

define um homomorfismo entre as álgebras $Y^{\pm}(2)$ *e* $\mathbf{U}(\mathcal{G}l_2)$.

O co-produto (4.21) permite construir representações de $Y(2)$, da forma

$$L = L(\alpha_1, \beta_1) \bigotimes \cdots \bigotimes L(\alpha_k, \beta_k). \tag{4.25}$$

De (4.21) e (4.23) temos que o produto tensorial

$$\eta = \omega_1 \bigotimes \cdots \bigotimes \omega_k$$

dos vetores máximos ω_i das representações $L(\alpha_i, \beta_i)$ geram um submódulo de peso máximo em L com peso máximo $(\alpha(u), \beta(u))$, onde

$$\begin{aligned}
\alpha(u) &= \left(1 + \alpha_1 u^{-1}\right) \cdots \left(1 + \alpha_k u^{-1}\right), \\
\beta(u) &= \left(1 + \beta_1 u^{-1}\right) \cdots \left(1 + \beta_k u^{-1}\right)
\end{aligned} \tag{4.26}$$

De onde, se a representação L é irredutível então ela é isomorfa a $L(\alpha(u), \beta(u))$.

Qualquer $Y(2)$ −módulo irredutível de dimensão finita é isomorfo a uma representação deste tipo twisted via um automorfismo de $Y(2)$ da forma

$$t_{ab}(u) \longmapsto \left(1 + \varphi_1 u^{-1} + \varphi_2 u^{-2} + \cdots\right) t_{ab}(u), \qquad \varphi_i \in \mathbb{C}.$$

Igualmente, a aplicação

$$s_{ab}(u) \longmapsto c(u)\, s_{ab}(u) \tag{4.27}$$

onde $c(u) = 1 + u^{-2}\mathbb{C}\left[\left[u^{-2}\right]\right]$ é um automorfismo de $Y^{\pm}(2)$

Existe um critério explícito de irredutibilidade para o $Y(2)$ −módulo L. Antes de formular o resultado, com cada $L(\alpha, \beta)$ se associa a seqüência

$$S(\alpha, \beta) = \{\beta, \beta + 1, \cdots, \alpha - 1\} \subset \mathbb{C}.$$

Dizemos que as duas seqüências S_1 e S_2 estão em **posição geral** se

$$\text{ou } S_1 \cup S_2 \text{ não é uma seqüência, ou } S_1 \subseteq S_2 \text{ ou } S_2 \subseteq S_1.$$

Teorema 114 *A representação (4.25) de $Y(2)$ é irredutível se, e somente se, as seqüências $S(\alpha_i, \beta_i)$, $i = 1, \ldots, k$, estão 2 a 2 em posição geral.*

Demonstração. Veja [ChP2] ou [Mo1]. ■

Exemplo 115 *1. Sejam $(\alpha_1, \beta_1) = (4 + 3i, 2 + 3i)$, $(\alpha_2, \beta_2) = (7 + 3i, 3 + 3i)$, logo $S_1(\alpha_1, \beta_1) = \{2 + 3i, 3 + 3i\}$ e $S_2(\alpha_2, \beta_2) = \{3 + 3i, 4 + 3i, 5 + 3i, 6 + 3i\}$, de onde*

$$S_1 \cup S_2 = \{2 + 3i, 3 + 3i, 4 + 3i, 5 + 3i, 6 + 3i\}$$

é uma seqüência, além disto, $S_1 \nsubseteq S_2$ nem $S_2 \nsubseteq S_1$, portanto S_1 e S_2 não estão em posição geral e o $Y(2)$ −módulo $L = L(\alpha_1, \beta_1) \bigotimes L(\alpha_2, \beta_2)$ não é irredutível.

2. Sejam $(\alpha_1, \beta_1) = (4 + 3i, 2 + 3i)$, $(\alpha_2, \beta_2) = (7 + 3i, 6 + 3i)$, logo $S_1(\alpha_1, \beta_1) = \{2 + 3i, 3 + 3i\}$

e $S_2(\alpha_2, \beta_2) = \{6 + 3i\}$, *de onde*

$$S_1 \cup S_2 = \{2 + 3i, 3 + 3i, 6 + 3i\}$$

não é uma seqüência, portanto S_1 *e* S_2 *estão em posição geral e o* $Y(2)-$*módulo* $L = L(\alpha_1, \beta_1) \bigotimes L(\alpha_2, \beta_2)$ *é irredutível.*

De (4.21) e (4.23) temos que os geradores $t_{ab}^{(r)}$ com $r > k$ agem como operadores zero no L. Portanto, os operadores $T_{ab}(u) = u^k t_{ab}(u)$ são polinômios em u:

$$T_{ab}(u) = \delta_{ab} u^k + t_{ab}^{(1)} u^{k-1} + \cdots + t_{ab}^{(k)}. \tag{4.28}$$

Se ξ_i denota o vetor máximo do $\mathcal{G}l_2-$módulo $L(\alpha_i, \beta_i)$, suponhamos que o $Y(2)-$módulo L dado por (4.25) é irredutível e as seqüências $S(\alpha_i, \beta_i)$ são 2 a 2 disjuntas. Seja

$$\eta = \xi_1 \bigotimes \cdots \bigotimes \xi_k. \tag{4.29}$$

Proposição 116 *O vetor* η *é o vetor máximo do* $Y(2)-$*módulo* L*, isto é,* η *é anulado por* $T_{-n,n}(u)$ *e é um autovetor para os operadores* $T_{nn}(u)$ *e* $T_{-n,-n}(u)$*. Explicitamente,*

$$\begin{aligned} T_{-n,n}(u)\,\eta &= 0, \\ T_{-n,-n}(u)\,\eta &= (u + \alpha_1) \cdots (u + \alpha_k)\,\eta, \\ T_{nn}(u)\,\eta &= (u + \beta_1) \cdots (u + \beta_k)\,\eta. \end{aligned} \tag{4.30}$$

Demonstração. De fato, para $k = 2$, temos $L = L(\alpha_1, \beta_1) \bigotimes L(\alpha_2, \beta_2)$ e $\eta = \xi_1 \bigotimes \xi_2$, onde ξ_i é o vetor máximo de $L(\alpha_i, \beta_i)$, para $i = 1, 2$. Logo

$$\begin{aligned} T_{-n,n}(u)\,\eta &= u^2 t_{-n,n}(u)\,\eta \\ &= u^2 \left(t_{-n,n}(u)\,\xi_1 \bigotimes t_{n,n}(u)\,\xi_2 + t_{-n,-n}(u)\,\xi_1 \bigotimes t_{-n,n}(u)\,\xi_2 \right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

onde a segunda igualdade segue pelo co-produto (4.21) e a última pois $t_{-n,n}(u)\,\xi_i = 0$ para $i = 1, 2$.

Agora

$$\begin{aligned}
T_{-n,-n}(u)\,\eta &= u^2 t_{-n,-n}(u)\,\eta \\
&= u^2\left(t_{-n,n}(u)\,\xi_1 \bigotimes t_{n,-n}(u)\,\xi_2 + t_{-n,-n}(u)\,\xi_1 \bigotimes t_{-n-,n}(u)\,\xi_2\right) \\
&= u^2\left(t_{-n,-n}(u)\,\xi_1 \bigotimes t_{-n-,n}(u)\,\xi_2\right) \\
&= u^2\left(\left(1 + E_{-n,-n}u^{-1}\right)\xi_1 \bigotimes \left(1 + E_{-n,-n}u^{-1}\right)\xi_2\right) \\
&= u^2\left(\left(1 + \alpha_1 u^{-1}\right)\xi_1 \bigotimes \left(1 + \alpha_2 u^{-1}\right)\xi_2\right) \\
&= u^2\left(\left(1 + \alpha_1 u^{-1}\right)\left(1 + \alpha_2 u^{-1}\right)\right)\eta \\
&= (u + \alpha_1)(u + \alpha_2)\,\eta.
\end{aligned}$$

A outra igualdade prova-se de forma análoga.

A demonstração para o caso geral é análoga por indução. ■

Seja $\gamma = (\gamma_1, \cdots, \gamma_k)$ uma $k-$upla satisfazendo as condições: Para cada i

$$\alpha_i - \gamma_i \in \mathbb{Z}_+, \qquad \gamma_i - \beta_i \in \mathbb{Z}_+. \tag{4.31}$$

Seja

$$\eta_\gamma = \prod_{i=1}^{k} T_{n,-n}(-\gamma_i + 1)\cdots T_{n,-n}(-\beta_i - 1)\,T_{n,-n}(-\beta_i)\,\eta.$$

O seguinte Teorema fornece uma base do tipo Gelfand-Tsetlin para as representações do Yangian $Y(2)$ associado com a inclusão $Y(1) \subset Y(2)$. Aqui $Y(1)$ é a subálgebra (comutativa) de $Y(2)$ gerada pelos elementos $t_{nn}^{(r)}$, $r \geq 1$.

Teorema 117 *Seja o $Y(2)-$módulo L dado por (4.25), irredutível e as seqüências $S(\alpha_i, \beta_i)$, 2 a 2 disjuntas. Então os vetores η_γ com γ satisfazendo (4.31) formam uma base de L. Ainda,*

os geradores de $Y(2)$ agem nesta base pela regra

$$
\begin{aligned}
T_{nn}(u)\,\eta_\gamma &= (u+\gamma_1)\cdots(u+\gamma_k)\,\eta_\gamma,\\
T_{n,-n}(-\gamma_i)\,\eta_\gamma &= \eta_{\gamma+\delta_i},\\
T_{-n,n}(-\gamma_i)\,\eta_\gamma &= -\prod_{m=1}^{k}(\alpha_m-\gamma_i+1)(\beta_m-\gamma_i)\,\eta_{\gamma-\delta_i},\\
T_{-n,-n}(u)\,\eta_\gamma &= \prod_{i=1}^{k}\frac{(u+\alpha_i+1)(u+\beta_i)}{u+\gamma_i+1}\eta_\gamma\\
&\quad+\prod_{i=1}^{k}\frac{1}{u+\gamma_i+1}T_{-n,n}(u)\,T_{n,-n}(u+1)\,\eta_\gamma.
\end{aligned}
\tag{4.32}
$$

Demonstração. Para a prova das fórmulas anteriores usaremos as relações que definem o Yangian (4.17), junto com o **determinante Quântico**

$$
d(u) = T_{-n,-n}(u+1)\,T_{nn}(u) - T_{n,-n}(u+1)\,T_{-n,n}(u) \tag{4.33}
$$

$$
= T_{-n,-n}(u)\,T_{nn}(u+1) - T_{-n,n}(u)\,T_{n,-n}(u+1)\,. \tag{4.34}
$$

Os coeficientes do determinante Quântico pertencem ao centro de $Y(2)$ (veja, por exemplo [MNO]) assim, $d(u)$ age em L como escalares, os quais podem ser encontrados aplicando (4.33) ao vetor máximo η. De fato,

$$
\begin{aligned}
d(u)\,\eta &= \left(T_{-n,-n}(u+1)\,T_{nn}(u) - T_{n,-n}(u+1)\,T_{-n,n}(u)\right)\eta\\
&= T_{-n,-n}(u+1)\,(u+\beta_1)\cdots(u+\beta_k)\,\eta\\
&= (u+\alpha_1+1)\cdots(u+\alpha_k+1)\,(u+\beta_1)\cdots(u+\beta_k)\,\eta\\
&= \prod_{i=1}^{k}(u+\alpha_i+1)\,(u+\beta_i)\,\eta,
\end{aligned}
$$

por (4.30).

A primeria fórmula é imediata e segue da definição.

Para a segunda fórmula temos

$$\begin{aligned} T_{n,-n}(-\gamma_i)\,\eta_\gamma &= T_{n,-n}(-\gamma_i)\prod_{i=1}^{k} T_{n,-n}(-\gamma_i+1)\cdots T_{n,-n}(-\beta_i-1)\,T_{n,-n}(-\beta_i)\,\eta \\ &= \prod_{i=1}^{k} T_{n,-n}(-\gamma_i)\,T_{n,-n}(-\gamma_i+1)\cdots T_{n,-n}(-\beta_i-1)\,T_{n,-n}(-\beta_i)\,\eta \\ &\quad \eta_{\gamma+\delta_i} \end{aligned}$$

Para a fórmula terceira, de (4.34) temos

$$d(u)\,\eta_{\gamma-\delta_i} = \left(T_{-n,-n}(u)\,T_{nn}(u+1) - T_{-n,n}(u)\,T_{n,-n}(u+1)\right)\eta_{\gamma-\delta_i} \tag{4.35}$$

aplicando em $u=-\gamma_i$ temos que: $T_{n,-n}(-\gamma_i+1)\,\eta_{\gamma-\delta_i} = \eta_\gamma$,

$$\begin{aligned} T_{nn}(-\gamma_i+1)\,\eta_{\gamma-\delta_i} &= (-\gamma_i+1+\gamma_1)\cdots(-\gamma_i+1+\gamma_k)\,\eta_{\gamma-\delta_i} \\ &= 0 \end{aligned}$$

e

$$d(-\gamma_i)\,\eta_{\gamma-\delta_i} = (-\gamma_i+\alpha_1+1)\cdots(-\gamma_i+\alpha_k+1)\,(-\gamma_i+\beta_1)\cdots(-\gamma_i+\beta_k)\,\eta_{\gamma-\delta_i}$$

logo substituindo estos valores em (4.35) temos

$$(-\gamma_i+\alpha_1+1)\cdots(-\gamma_i+\alpha_k+1)\,(-\gamma_i+\beta_1)\cdots(-\gamma_i+\beta_k)\,\eta_{\gamma-\delta_i} = -T_{-n,n}(-\gamma_i)\,\eta_\gamma$$

e daí

$$T_{-n,n}(-\gamma_i)\,\eta_\gamma = -\prod_{m=1}^{k}(\alpha_m-\gamma_i+1)\,(\beta_m-\gamma_i)\,\eta_{\gamma-\delta_i}$$

que é precisamente o que queriamos provar.

Para a última fórmula temos que $T_{nn}(u+1)\,\eta_\gamma = (u+\gamma_1+1)\cdots(u+\gamma_k+1)\,\eta_\gamma$,

$$d(u)\,\eta_\gamma = \prod_{i=1}^{k}(u+\alpha_i+1)\,(u+\beta_i)\,\eta_\gamma,$$

logo de (4.34) temos

$$T_{-n,-n}(u)\,T_{nn}(u+1)\,\eta_\gamma = d(u)\,\eta_\gamma + T_{-n,n}(u)\,T_{n,-n}(u+1)\,\eta_\gamma,$$

de onde

$$(u+\gamma_1+1)\cdots(u+\gamma_k+1)\,T_{-n,-n}(u)\,\eta_\gamma = \prod_{i=1}^{k}(u+\alpha_i+1)(u+\beta_i)\,\eta_\gamma + T_{-n,n}(u)\,T_{n,-n}(u+1)\,\eta_\gamma$$

e daí segue a quarta fórmula.

Os operadores $T_{-n,n}(u)$ e $T_{n,-n}(u)$ são polinômios em u de grau $\leq k-1$, veja (4.28). Portanto, sua ação pode ser obtida de (4.32) usando a fórmula de interpolação de Lagrange, por exemplo para $k=3$ para obter $T_{n,-n}(u)$ temos $\gamma=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$, e sabemos da fórmula dois de (3.19) que $T_{n,-n}(-\gamma_i)=\eta_{\gamma+\delta_i}$ para $i=1,2,3$ logo usando a fórmula de interpolação de Lagrange temos

$$T_{n,-n}(u) = \frac{(-u+\gamma_2)(-u+\gamma_3)}{(-\gamma_1+\gamma_2)(-\gamma_1+\gamma_3)}\eta_{\gamma+\delta_1} + \frac{(-u+\gamma_1)(-u+\gamma_3)}{(-\gamma_2+\gamma_1)(-\gamma_2+\gamma_3)}\eta_{\gamma+\delta_2} + \frac{(-u+\gamma_1)(-u+\gamma_2)}{(-\gamma_3+\gamma_1)(-\gamma_3+\gamma_2)}\eta_{\gamma+\delta_3}$$

que é um polinômio de grau 2. ■

Podemos considerar (4.25) como um módulo sobre o Yangian twisted $Y^-(2)$ obtido por restrição. O critério de irredutibilidade de tal módulo é dado pelo seguinte Teorema.

Teorema 118 *A representação de (4.25) de $Y^-(2)$ é irredutível se, e somente se, cada par de seqüências*

$$S(\alpha_i,\beta_i),\ S(\alpha_j,\beta_j) \quad e \quad S(\alpha_i,\beta_i),\ S(-\beta_j,-\alpha_j)$$

estão em posição geral para todo $i<j$.

Se a representação L de $Y^-(2)$ definida em (4.25) é irredutível, então por (4.18) ela é isomorfa a $V(\mu(u))$ com

$$\mu(u) = \alpha(-u)\,\beta(u),$$

onde $\alpha(u)$ e $\beta(u)$ são dados por (4.26).

As relações definindo (4.17) permitem reescrever a fórmula (4.18), para $s_{n,-n}(u)$, na forma

$$s_{n,-n}(u) = \frac{u+1/2}{u}\left(t_{n,-n}(u)\, t_{nn}(-u) - t_{n,-n}(-u)\, t_{nn}(u)\right).$$

Portanto o operador em L definido por

$$\begin{aligned} S_{n,-n}(u) &= \frac{u^{2k}}{u+1/2} s_{n,-n}(u) \\ &= \frac{u^{2k}}{u}\left(t_{n,-n}(u)\, t_{nn}(-u) - t_{n,-n}(-u)\, t_{nn}(u)\right) \\ &= \frac{(-1)^k}{u}\left(u^k t_{n,-n}(u)\,(-1)^k u^k t_{nn}(-u) - (-1)^k u^k t_{n,-n}(-u)\, u^k t_{nn}(u)\right) \\ &= \frac{(-1)^k}{u}\left(T_{n,-n}(u)\, T_{nn}(-u) - T_{n,-n}(-u)\, T_{nn}(u)\right), \end{aligned} \tag{4.36}$$

é um polinômio par em u de grau $\leq 2k-2$.

Observação 119 *Das relações na definição do Yangian twisted temos que*

$$[S_{n,-n}(u), S_{n,-n}(v)] = 0.$$

A ação de $S_{n,-n}(u)$ na base de L apresentada no Teorema 117 é dada por

$$S_{n,-n}(u)\,\eta_\gamma = 2\prod_{a=1, a\neq i}^{k}(-\gamma_i - \gamma_a)\,\eta_{\gamma+\delta_i}, \qquad i = 1, \ldots, k.$$

Temos provado o seguinte Corolário.

Corolário 120 *Suponha que o $Y^-(2)$ −módulo L é irredutível e que temos*

$$S(\alpha_i, \beta_i) \cap S(\alpha_j, \beta_j) = \phi \quad e \quad S(\alpha_i, \beta_i) \cap S(-\beta_j, -\alpha_j) = \phi,$$

para todo $i < j$. Então os vetores

$$\xi_\gamma = \prod_{i=1}^{k} S_{n,-n}(\gamma_i - 1)\cdots S_{n,-n}(\beta_i + 1)\, S_{n,-n}(\beta_i)\,\eta,$$

com γ satisfazendo (4.31) formam uma base de L.

Vamos para o Yangian twisted ortogonal $Y^{+}(2)$. Para qualquer $\delta \in \mathbb{C}$ denote por $W(\delta)$ a representação de dimensão 1, de $Y^{+}(2)$, gerada por um vetor w tal que

$$s_{nn}(u)\,w = \frac{u+\delta}{u+1/2}w, \qquad s_{-n,-n}(u)\,w = \frac{u-\delta+1}{u+1/2}w$$

e $s_{a,-a}(u)\,w = 0$ para $a = -n, n$. Por (4.22) podemos considerar o produto tensorial $L \bigotimes W(\delta)$ como uma representação de $Y^{+}(2)$. As representações $Y^{+}(2)$ deste tipo e as representações de $Y^{-}(2)$ de tipo (4.25) cobrem todas as representações irredutíveis de dimensão finta de $Y^{\pm}(2)$ [Mo1].

O seguinte resultado é um análogo ao Teorema 118.

Teorema 121 *A representação $L \bigotimes W(\delta)$ de $Y^{+}(2)$ é irredutível se, e somente se, para cada par de seqüências*

$$S(\alpha_i, \beta_i)\,,\ S(\alpha_j, \beta_j) \qquad e \qquad S(\alpha_i, \beta_i)\,,\ S(-\beta_j, -\alpha_j)$$

estão em posição geral para todo $i < j$ e nenhuma das seqüências $S(\alpha_i, \beta_i)$ ou $S(-\beta_i, -\alpha_i)$ contém $-\delta$.

Usando o isomorfismo de espaços vetoriais

$$L \bigotimes W(\delta) \longrightarrow L, \qquad v \bigotimes w \longmapsto v, \qquad v \in L \tag{4.37}$$

podemos considerar L como um $Y^{+}(2)$ −módulo. Portanto, usando a relação (4.17) e a fórmula do co-produto (4.22) podemos escrever $s_{n,-n}(u)$ como um operador em L, na forma

$$s_{n,-n}(u) = \frac{u-\delta}{u} t_{n,-n}(u)\, t_{nn}(-u) + \frac{u+\delta}{u} t_{n,-n}(-u)\, t_{nn}(u)\,.$$

De onde o operador em L definido por

$$\begin{aligned} S_{n,-n}(u) &= u^{2k} s_{n,-n}(u) \\ &= \frac{(-1)^k}{u}\left((u-\delta)\, T_{n,-n}(u)\, T_{nn}(-u) + (u+\delta)\, T_{n,-n}(-u)\, T_{nn}(u)\right) \end{aligned} \tag{4.38}$$

é um polinômio par em u, de grau $\leq 2k-2$. Sua ação na base de L vem do Teorema 117 e é dada por

$$S_{n,-n}(\gamma_i)\,\eta_\gamma = 2(-\delta-\gamma_i)\prod_{a=1,a\neq i}^{k}(-\gamma_i-\gamma_a)\,\eta_{\gamma+\delta_i}, \qquad i=1,\ldots,k.$$

Temos provado assim o seguinte Corolário.

Corolário 122 *Suponha que o $Y^+(2)-$módulo $L\bigotimes W(\delta)$ é irredutível e que*

$$S(\alpha_i,\beta_i)\cap S(\alpha_j,\beta_j)=\phi \quad e \quad S(\alpha_i,\beta_i)\cap S(-\beta_j,-\alpha_j)=\phi,$$

para todo $i<j$. Então os vetores

$$\xi_\gamma = \prod_{i=1}^{k} S_{n,-n}(\gamma_i-1)\cdots S_{n,-n}(\beta_i+1)\,S_{n,-n}(\beta_i)\,\eta,$$

com γ satisfazendo (4.31) formam uma base de L.

4.4 Ação do Yangian sobre o espaço de multiplicidades

Agora construímos um homomorfismo de álgebras $Y^{\pm}(2)\longrightarrow Z(\mathcal{G}_n,\mathcal{G}_{n-1})$ e depois o usamos para definir uma ação de $Y^{\pm}(2)$ sobre o espaço de multiplicidade $V(\lambda)^+_\mu$.

Para $a,b\in\{-n,n\}$ e um parâmetro complexo u introduzimos os elementos $Z_{ab}(u)$ da álgebra de Mickelsson-Zhelobenko $Z(\mathcal{G}_n,\mathcal{G}_{n-1})$ por

$$Z_{ab}(u) = -\left(\delta_{ab}\left(u+\rho_n+\frac{1}{2}\right)+F_{ab}\right)\prod_{i=-n+1}^{n-1}(u+g_i)+\sum_{i=-n+1}^{n-1} z_{ai}z_{ib}\prod_{j=-n+1,j\neq i}^{n-1}\frac{u+g_j}{g_i-g_j}, \tag{4.39}$$

no caso B,

$$Z_{ab}(u) = \left(\delta_{ab}\left(u+\rho_n+\frac{1}{2}\right)+F_{ab}\right)\prod_{i=-n+1}^{n-1}(u+g_i)-\sum_{i=-n+1}^{n-1} z_{ai}z_{ib}\prod_{j=-n+1,j\neq i}^{n-1}\frac{u+g_j}{g_i-g_j}, \tag{4.40}$$

no caso C e

$$Z_{ab}(u) = -\left(\left(\delta_{ab}\left(u+\rho_n+\frac{1}{2}\right)+F_{ab}\right)\prod_{i=-n+1}^{n-1}(u+g_i)\right)\frac{1}{2u+1} \tag{4.41}$$

$$+\left(\sum_{i=-n+1}^{n-1} z_{ai}z_{ib}(u+g_{-i})\prod_{j=-n+1,j\neq\pm i}^{n-1}\frac{u+g_j}{g_i-g_j}\right)\frac{1}{2u+1}, \tag{4.42}$$

no caso D, onde $g_i = f_i+1/2$ para todo i. Em particular, pode ser verificado que cada $Z_{n,-n}(u)$ coincide com a correspondente interpolação polinomial dada em (4.10) ou (4.11).

Consideremos agora os três casos separadamente. Assumiremos que $\mu_n = -\infty$ na seguinte notação.

Caso tipo B.

Teorema 123 *(i) A aplicação*

$$s_{ab}(u) \mapsto -u^{-2n}Z_{ab}(u), \qquad a,b\in\{-n,n\} \tag{4.43}$$

define um homomorfismo de álgebras $Y^+(2) \longrightarrow Z(\mathcal{G}_n,\mathcal{G}_{n-1})$.

(ii) O $Y^+(2)-$*módulo* $V(\lambda)^+_\mu$ *definido via o homomorfismo (4.43), é isomorfo à soma direta de dois submódulos irredutíveis,* $V(\lambda)^+_\mu \simeq U\bigoplus U'$, *onde*

$$\begin{aligned} U &= L(0,\beta_1)\bigotimes L(\alpha_2,\beta_2)\bigotimes\cdots\bigotimes L(\alpha_n,\beta_n)\bigotimes W(1/2), \\ U' &= L(-1,\beta_1)\bigotimes L(\alpha_2,\beta_2)\bigotimes\cdots\bigotimes L(\alpha_n,\beta_n)\bigotimes W(1/2), \end{aligned}$$

se os λ_i *são inteiros (é suposto que* $U'=\{0\}$ *se* $\beta_1=0$*), ou*

$$\begin{aligned} U &= L(-1/2,\beta_1)\bigotimes L(\alpha_2,\beta_2)\bigotimes\cdots\bigotimes L(\alpha_n,\beta_n)\bigotimes W(0), \\ U' &= L(-1/2,\beta_1)\bigotimes L(\alpha_2,\beta_2)\bigotimes\cdots\bigotimes L(\alpha_n,\beta_n)\bigotimes W(1), \end{aligned}$$

se os λ_i *são semi-inteiros e a seguinte notação é usada*

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \min\{\lambda_{i-1},\mu_{i-1}\}-i+1 \qquad & i=2,\ldots,n, \\ \beta_i &= \min\{\lambda_i,\mu_i\}-i+1 \qquad & i=1,\ldots,n. \end{aligned}$$

Caso tipo C.

Teorema 124 *(i) A aplicação*

$$s_{ab}(u) \mapsto (u+1/2)\, u^{-2n} Z_{ab}(u)\,, \qquad a,b \in \{-n,n\} \tag{4.44}$$

define um homomorfismo de álgebras $Y^-(2) \longrightarrow Z(\mathcal{G}_n, \mathcal{G}_{n-1})$.

(ii) O $Y^-(2)$*−módulo* $V(\lambda)^+_\mu$ *definido via o homomorfismo (4.44) é irredutível e isomorfo ao produto tensorial*

$$L(\alpha_1,\beta_1) \bigotimes \cdots \bigotimes L(\alpha_n,\beta_n)\,,$$

onde $\alpha_1 = 1/2$ *e*

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \min\{\lambda_{i-1},\mu_{i-1}\} - i + 1/2 && i = 2,\ldots,n, \\ \beta_i &= \min\{\lambda_i,\mu_i\} - i + 1/2 && i = 1,\ldots,n. \end{aligned}$$

Caso tipo D.

Teorema 125 *(i) A aplicação*

$$s_{ab}(u) \mapsto -2u^{-2n+2} Z_{ab}(u)\,, \qquad a,b \in \{-n,n\} \tag{4.45}$$

define um homomorfismo de álgebras $Y^+(2) \longrightarrow Z(\mathcal{G}_n, \mathcal{G}_{n-1})$.

(ii) O $Y^+(2)$*−módulo* $V(\lambda)^+_\mu$ *definido via o homomorfismo (4.45) é irredutível e isomorfo ao produto tensorial*

$$L(\alpha_1,\beta_1) \bigotimes \cdots \bigotimes L(\alpha_{n-1},\beta_{n-1}) \bigotimes W(-\alpha_0)\,,$$

onde $\alpha_1 = \min\{-|\lambda_1|, -|\mu_1|\} - 1/2$, $\alpha_0 = \alpha_1 + |\lambda_1 + \mu_1|$,

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \min\{\lambda_i,\mu_i\} - i + 1/2 && i = 2,\ldots,n-1, \\ \beta_i &= \min\{\lambda_{i+1},\mu_{i+1}\} - i + 1/2 && i = 1,\ldots,n-1. \end{aligned}$$

Demonstração. Da parte *(i)* dos Teoremas 123−125.

Uma das possíveis formas de provar a afirmação é verificar diretamente que as relações (4.19) e (4.20) são satisfeitas com os $s_{ab}(u)$ respectivamente subsitituidos por $Z_{ab}(u)$. Aqui é necessario usar as relações quadráticas na álgebra de Mickelsson-Zhelobenko $Z(\mathcal{G}_n, \mathcal{G}_{n-1})$. Além das relações (4.9); veja [Zh6].

Alternativamente, podemos seguir a abordagem de [Mo2, Seção 5] e construímos primeiro um homomorfismo de $Y^{\pm}(2)$ no centralizador C_n de $\mathcal{G}_{n-1}$ em $\mathbf{U}(\mathcal{G}_n)$ e depois calculamos a imagem dos elementos do centralizador na álgebra $Z(\mathcal{G}_n, \mathcal{G}_{n-1})$. Por último usamos a composição de homomorfismos

$$Y^{\pm}(2) \longrightarrow C_n \longrightarrow Z(\mathcal{G}_n, \mathcal{G}_{n-1}),$$

Para o primeiro homomorfismo, seja a matriz $2n \times 2n$, $F = (F_{ij})$ tal que a $ij-$ésima entrada é o elemento $F_{ij} \in \mathcal{G}_n$ e seja

$$F(u) = 1 + \frac{F}{u \pm 1/2}$$

Denotemos por $\widehat{F}(u)$ a imagem da co-matriz de Sklyanin $\widehat{S}(u)$ [Mo1, Seção 2]. A aplicação

$$s_{ab}(u) \longmapsto c(u)\,\widehat{F}(-u+n-1)_{ab}, \quad a, b \in \{-n, n\},$$

onde

$$c(u) = \prod_{k=1}^{n-1}\left(1 - (k-1/2)^2 u^{-2}\right)$$

define um homomorfismo de $Y^{\pm}(2)$ ao centralizador C_n de $\mathcal{G}_{n-1}$ em $\mathbf{U}(\mathcal{G}_n)$ [Mo1, Proposição 2.1], ou [MNO].

Para o segundo homomorfismo temos que C_n é uma subálgebra do normalizador NormJ' (seção 2) a projeção natural de C_n em $Z(\mathcal{G}_n, \mathcal{G}_{n-1})$ é homomorfimso.

Da composição dos homomorfismos anteriores temos o homomorfismo $Y^{\pm}(2) \longrightarrow Z(\mathcal{G}_n, \mathcal{G}_{n-1})$, obtendo assim a parte (i) dos Teoremas.

Dos resultados de [Mo1], cada representação irredutível de dimensão finita do Yangian twisted é uma representação de peso máximo. Ela contém um único vetor, a menos de um fator constante, o qual é anulado por $s_{-n,n}(u)$ e o qual é um vetor próprio de $s_{nn}(u)$. O correspondente valor próprio (o peso máximo) determina unicamente a representação. Os vetores em $V(\lambda)^{+}_{\mu}$ anulados por $s_{-n,n}(u)$ podem ser construídos explicitamente usando os *lowering operators*. Um

destes vetores é dado por

$$\xi_\mu = \prod_{i=1}^{n-1} \left(z_{ni}^{\max\{\lambda_i,\mu_i\}-\mu_i} z_{i,-n}^{\max\{\lambda_i,\mu_i\}-\lambda_i} \right) \xi,$$

onde ξ é o vetor máximo de $V(\lambda)$. Este é o único vetor nos casos C, D, porém no caso B existe outro vetor dado por

$$\xi'_\mu = z_{n0}\xi_\mu.$$

Computando os valores próprios destes vetores concluímos que eles coincidem, respectivamente, com os valores próprios do produto tensorial dos vetores máximos dos módulos $L(\alpha_i, \beta_i)$, veja (4.29). ■

Observação 126 *Os Teoremas 123–125 podem ser provados sem usar as regras da ramificações para as reduções $\mathfrak{sp}_{2n} \downarrow \mathfrak{sp}_{2n-2}$ e $\mathfrak{o}_N \downarrow \mathfrak{o}_{N-2}$. Portanto, as multiplicidades das reduções podem ser encontradas computando a dimensão do espaço $V(\lambda)^+_\mu$. Por exemplo, no caso simplético, o Teorema 124 fornece*

$$c(\mu) = \prod_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i + 1)$$

o qual, de fato, coincide com o valor dado pela regra da ramificação para o tipo C; veja seção 4.2.

Fixemos λ e μ, e deixemos ν percorrendo os valores determinados pelas regras das ramificações, veja 4.2. Usando os homomorfismos dos Teoremas 123–125 de (4.36) e (4.38) cocluimos que os elementos $S_{n,-n}(u)$ agem na representação $V(\lambda)^+_\mu$ como os operadores $-Z_{n,-n}(u)$, $Z_{n,-n}(u)$ ou $-2Z_{n,-n}(u)$ nos casos B, C ou D, respectivamente. Assim, pelos corolários 120 e 122, os seguintes vetores ξ_ν formam uma base do espaço $V(\lambda)^+_\mu$, onde

$$\xi_\nu = z_{n0}^{\sigma} \prod_{i=1}^{n} Z_{n,-n}(\gamma_i - 1) \cdots Z_{n,-n}(\beta_i + 1) Z_{n,-n}(\beta_i) \xi_\mu$$

no caso B,

$$\xi_\nu = \prod_{i=1}^{n} Z_{n,-n}(\gamma_i - 1) \cdots Z_{n,-n}(\beta_i + 1) Z_{n,-n}(\beta_i) \xi_\mu \tag{4.46}$$

no caso C e

$$\xi_\nu = \prod_{i=1}^{n-1} Z_{n,-n}(\gamma_i - 1) \cdots Z_{n,-n}(\beta_i + 1) Z_{n,-n}(\beta_i) \xi_\mu$$

no caso D. Aplicando as propriedades de interpolação dos polinômios $Z_{n,-n}(u)$ obtemos as fórmulas da forma dadas nos Lemas 104, 106 e 108, respectivamente. Daí obtemos os Teoremas 105, 107 e 109.

4.5 Cômputo dos elementos da matriz

Sem dar todas as fórmulas explicitamente desejamos mostrar como os elementos da matriz dos geradores de $\mathcal{G}_n$ na base ξ_ν dada pelos Teoremas 105, 107 e 109 podem ser calculados. Os detalhes podem ser encontrados nos artigos [Mo2], [Mo3] e [Mo4].

Escolhamos os seguintes geradores

$$F_{k-1,-k}, \quad F_{k-1,k}, \quad k = 1, \ldots, n$$

no caso B,

$$F_{k-1,-k}, \quad k = 2, \ldots, n, \quad \text{e} \quad F_{-k,k}, \quad F_{k,-k}, \quad k = 1, \ldots, n$$

no caso C e

$$F_{k-1,-k}, \quad F_{k-1,k}, \quad k = 2, \ldots, n, \quad \text{e} \quad F_{21}, \quad F_{-2,1}$$

no caso D.

No caso simplético os elementos $F_{kk}, F_{k,-k}, F_{-k,k}$ comutam com a subálgebra $\mathcal{G}_{k-1}$ em $\mathbf{U}(\mathcal{G}_k)$. Portanto, estes operadores preservam o subespaço dos vetores máximos em $V(\lambda)$ sobre $\mathcal{G}_{k-1}$. Assim, é suficiente computar a ação destes operadores com $k = n$ na base $\{\xi_\nu\}$ do espaço $V(\lambda)^+_\mu$; veja Lema 106. Para F_{nn} obtemos imediatamente que

$$F_{nn}\xi_\nu = \left(2\sum_{i=1}^{n} \nu_i - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i - \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i\right) \xi_\nu.$$

Além disto, por (4.46)

$$Z_{n,-n}(\gamma_i)\,\xi_\nu = \xi_{\nu+\delta_i}, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Contudo, $Z_{n,-n}(u)$ é um polinômio em u^2 de grau $n-1$, com o coeficiente máximo $F_{n,-n}$. Aplicando a fórmula de interpolação de Lagrange com os pontos de interpolação γ_i, $i = 1, \ldots, n$, obtemos

$$Z_{n,-n}(u)\,\xi_\nu = \sum_{i=1}^{n} \prod_{a=1, a\neq i}^{n} \frac{u^2 - \gamma_a^2}{\gamma_i^2 - \gamma_a^2} \xi_{\nu+\delta_i}.$$

Considerando o coeficiente de u^{2n-2} obtemos

$$F_{n,-n}\xi_\nu = \sum_{i=1}^{n} \prod_{a=1, a\neq i}^{n} \frac{1}{\gamma_i^2 - \gamma_a^2} \xi_{\nu+\delta_i}. \tag{4.47}$$

A ação de $F_{-n,n}$ é encontrada de forma similar usando o Teorema 117.

No caso ortogonal a ação de F_{nn} é encontrada da mesma forma. Contudo, os elementos $F_{n,-n}$ e $F_{-n,n}$ são zero. Desejamos usar os elementos de segunda ordem da álgebra envolvente universal em vez deles. Estes são dados por

$$\Phi_{-a,a} = \frac{1}{2} \sum_{i=-n+1}^{n-1} F_{-a,i} F_{ia},$$

com $a \in \{-n, n\}$. Os elementos $\Phi_{-a,a}$ comutam com a subálgebra $\mathcal{G}_{n-1}$, de tal forma, que como no caso simplético, eles preservam o espaço $V(\lambda)_\mu^+$ e sua ação na base $\{\xi_\nu\}$ é dada por fórmulas similares às de $F_{-a,a}$.

O cálculo dos elementos da matriz dos geradores $F_{k-1,-k}$ é similar em todos os três casos. Assumamos que $k = n$. O operador $F_{n-1,-n}$ preserva o subespaço dos vetores máximos em $V(\lambda)$ sobre $\mathcal{G}_{n-2}$. Consideremos o caso simplético como exemplo. Suponha que μ' é um peso máximo fixo sobre $\mathcal{G}_{n-2}$, ν' é uma $(n-1)$ −upla de inteiros tais que as desigualdades (4.13) são satisfeitas com λ, ν, μ substituídos respectivamente por μ, ν', μ' e com $\gamma_i' = \nu_i' + \rho_i + 1/2$. É suficiente determinar a ação de $F_{n-1,-n}$ sobre os vetores base da forma

$$\xi_{\nu\mu\nu'} = X_{\mu\nu'}\xi_{\nu\mu},$$

onde $\xi_{\nu\mu} = \xi_\nu$ e $X_{\mu\nu'}$ denota o operador

$$X_{\mu\nu'} = \prod_{i=1}^{n-2} z_{n-1,i}^{\nu_i'-\mu_i'} z_{n-1,-i}^{\nu_i'-\mu_i} \cdot \prod_{a=m_{n-1}}^{\gamma_{n-1}'-1} Z_{n-1,-n+1}(a),$$

onde temos usado a notação $m_i = \mu_i + \rho_i + 1/2$. O operador $F_{n-1,-n}$ permuta com os elementos $z_{n-1,i}$ e $Z_{n-1,-n+1}(u)$. De onde, podemos escrever

$$F_{n-1,-n}\xi_{\nu\mu\nu'} = X_{\mu\nu'} F_{n-1,-n}\xi_{\nu\mu}.$$

Agora aplicamos o Lema 103. Resta apenas calcular $z_{ni}\xi_{\nu\mu}$ e $X_{\mu\nu'} z_{n-1,-i}$. Usando as relações entre os elementos da álgebra de Mickelsson-Zhelobenko $Z(\mathcal{G}_n, \mathcal{G}_{n-1})$ dada em (4.9), encontramos que

$$z_{ni}\xi_{\nu\mu} = \xi_{\nu,\mu-\delta_i},$$

se $i > 0$. Por outro lado, se $i = -j$ com j positivo, escrevemos

$$z_{n,-j}\xi_{\nu\mu} = z_{n,-j} z_{nj} \xi_{\nu,\mu+\delta_j} = Z_{n,-n}(m_j)\, \xi_{\nu,\mu+\delta_j}, \tag{4.48}$$

onde usamos as propriedades de interpolação (4.12) dos polinômios $Z_{n,-n}(u)$. Finalmente, usamos a expressão (4.46) dos vetores da base e o Teorema 117 para apresentar (4.48) como uma combinação linear dos vetores da base. O mesmo argumento aplica-se ao cálculo de $X_{\mu\nu'} z_{n-1,-i}$.

As fórmulas finais para os elementos da matriz dos geradores $F_{n-1,-n}$ em todos os três casos são dadas por expressões multiplicativas nas entradas dos padrões as quais expõem alguma similaridade às fórmulas do Teorema 92.

No caso ortogonal também precisamos encontrar a ação dos geradores $F_{n-1,n}$. A diferença ao caso dos geradores $F_{n-1,-n}$, os correspondentes elementos da matriz serão dados por certas combinações de expressões multiplicativas as quais parecem não assumir a forma de um produto. Existem duas formas alternativas de calcular estas combinações as quais apresentamos a seguir. Primeiro, como nos cálculos anteriores, podemos escrever

$$F_{n-1,n}\xi_{\nu\mu\nu'} = X_{\mu\nu'} F_{n-1,n}\xi_{\nu\mu}.$$

Aplicando novamente o Lema 103, vamos ao cálculo de $z_{in}\xi_{\nu\mu}$. Esta vez a propriedade de interpolação de $Z_{-n,-n}(u)$ (veja (4.39) e (4.41)) escrevemos, por exemplo, para $i > 0$

$$z_{in}\xi_{\nu\mu} = z_{in}z_{ni}\xi_{\nu,\mu+\delta_i} = z_{-n,-i}z_{-i,-n}\xi_{\nu,\mu+\delta_i} = Z_{-n,-n}(m_i)\,\xi_{\nu,\mu+\delta_i}.$$

Agora, como $Z_{-n,-n}(u)$ é a imagem de $S_{-n,-n}(u)$ pelo homomorfismo $Y^+(2) \longrightarrow Z(\mathcal{G}_n, \mathcal{G}_{n-1})$, podemos expressar este operador em termos dos operadores Yangians $T_{ab}(u)$ e então aplicamos o Teorema 117 para computar sua ação.

Alternativamente, os geradores $F_{n-1,n}$ podem ser escritos módulo o ideal J' de $\mathbf{U}'(\mathcal{G}_n)$ como

$$F_{n-1,n} = \Phi_{n-1,-n}(2)\,\Phi_{-n,n} - \Phi_{-n,n}\Phi_{n-1,-n}(0), \tag{4.49}$$

onde

$$\Phi_{n-1,-n}(u) = \sum_{i=-n+1}^{n-1} z_{n-1,i}z_{i,-n} \prod_{a=-n+1,a\neq i}^{n-1} \frac{1}{f_i - f_a} \cdot \frac{1}{u + f_i + F_{nn}} \tag{4.50}$$

no caso B e

$$\Phi_{n-1,-n}(u) = \sum_{i=-n+1}^{n-1} z_{n-1,i}z_{i,-n} \prod_{a=-n+1,a\neq \pm i}^{n-1} \frac{1}{f_i - f_a} \cdot \frac{1}{u + f_i + F_{nn}}, \tag{4.51}$$

no caso D. A ação de $\Phi_{n-1,-n}(u)$ é encontrada exatamente como a de $F_{n-1,n}$ e os elementos da matriz tem uma forma multiplicativa similar. Note, não obstante, que a fórmula (4.49), considerada como uma igualdade de operadores agindo em $V(\lambda)^+$, é válida unicamente quando os denominadores de (4.50) ou (4.51) não se anulam. Portanto, para usar (4.49), primeiro consideramos $V(\lambda)$ com entradas "genéricas"de λ e computamos os elementos da matriz de $F_{n-1,n}$ como funções nas entradas dos padrões Λ.

Capítulo 5

Bases de Gelfand-Tsetlin para as representações de $\mathfrak{o}_N$

Nesta seção damos a construção das bases propostas originalmente por Gelfand e Tsetlin em [GT2]. Ela é baseada no fato que a restrição $\mathfrak{o}_N \downarrow \mathfrak{o}_{N-1}$ é livre de multiplicidade. Isto torna a construção similar ao caso $\mathcal{G}l_n$. Aplicaremos o método geral das álgebras de Mickelsson apresentado na seção 2. Em particular, a correspondente regra da ramificação pode ser derivada a partir do Teorema 88; veja seção 3.2.

Será conveniente trocar a notação para os elementos da álgebra de Lie ortogonal $\mathfrak{o}_N$ usada na seção 4. Agora usamos a enumeração standard das linhas e colunas das matrizes $N \times N$ pelos números $\{1, \ldots, N\}$. Definimos a involução deste conjunto de índices fazendo $i' = N - i + 1$. A álgebra de Lie $\mathfrak{o}_N$ é gerada pelos elementos

$$F_{ij} = E_{ij} - E_{j'i'}, \qquad i, j = 1, \ldots, N. \tag{5.1}$$

Conservamos a notação $\mathcal{G}_n$ para $\mathfrak{o}_N$, com $N = 2n + 1$ ou $N = 2n$.

As representações irredutíveis de dimensão finita de $\mathcal{G}_n$ estão agora parametrizadas pelas $n-$uplas $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, onde os números λ_i satisfazem as condições

$$\lambda_i - \lambda_{i+1} \in \mathbb{Z}_+ \quad \text{para} \quad i = 1, \ldots n-1, \tag{5.2}$$

e

$$
\begin{aligned}
2\lambda_n &\in \mathbb{Z}_+ \quad \text{para} \quad \mathcal{G}_n = \mathfrak{o}_{2n+1}, \\
\lambda_{n-1} + \lambda_n &\in \mathbb{Z}_+ \quad \text{para} \quad \mathcal{G}_n = \mathfrak{o}_{2n}.
\end{aligned} \tag{5.3}
$$

Cada uma destas $n-$uplas λ é chamada **peso máximo** da representação correspondente a qual denotamos por $V(\lambda)$. Ele contém um único, a menos de um fator constante, vetor diferente de zero ξ (o vetor máximo) tal que

$$
\begin{aligned}
F_{ii}\xi &= \lambda_i \xi \quad \text{para} \quad i = 1, \ldots, n, \\
F_{ii}\xi &= = 0 \quad \text{para} \quad 1 \leq i < j \leq N.
\end{aligned}
$$

5.1 Lowering operators para a redução $\mathfrak{o}_{2n+1} \downarrow \mathfrak{o}_{2n}$

Tomando $N = 2n+1$ na definição (5.1), consideramos $\mathfrak{o}_{2n}$ como a subálgebra de $\mathfrak{o}_{2n+1}$ gerada pelos elementos (5.1) com $i, j \neq n+1$. De acordo com a regra da ramificação, a restrição de $V(\lambda)$ à subálgebra $\mathfrak{o}_{2n}$ é dada por

$$
V(\lambda)\,|_{\mathfrak{o}_{2n}} \simeq \bigoplus_{\mu} V'(\mu),
$$

onde $V'(\mu)$ é a representação de dimensão finita de $\mathfrak{o}_{2n}$ com peso máximo μ e a soma é tomada sobre os pesos μ que satisfazem as desigualdades

$$
\lambda_1 \geq \mu_1 \geq \lambda_2 \geq \mu_2 \geq \ldots \geq \lambda_{n-1} \geq \mu_{n-1} \geq \lambda_n \geq |\mu_n|, \tag{5.4}
$$

com todos os μ_i sendo simultaneamente inteiros ou semi-inteiros o mesmo que os λ_i.

Os elementos $F_{n+1,i}$ geram sobre $\mathfrak{o}_{2n}$ o complementar invariante de $\mathfrak{o}_{2n}$ em $\mathfrak{o}_{2n+1}$. Portanto da teoria geral da seção 2, a álgebra de Mickelsson-Zhelobenko $Z(\mathfrak{o}_{2n+1}, \mathfrak{o}_{2n})$ é gerada pelos elementos

$$
pF_{n+1,i}, \quad i = 1, \ldots, n, n', \ldots, 1', \tag{5.5}
$$

onde p é o projetor extremo para a álgebra de Lie $\mathfrak{o}_{2n}$. Seja $\{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n\}$ a base de $\mathcal{H}^*$, dual

da base $\{F_{11}, \ldots, F_{nn}\}$, da subálgebra de Cartan $\mathcal{H}$ de $\mathfrak{o}_{2n}$. Seja $\epsilon_{i'} = -\epsilon_i$ para $i = 1, \ldots, n$. Denotemos por p_{ij} o elemento p_α dado por (2.28) para as raízes positivas $\alpha = \epsilon_i - \epsilon_j$. Escolhendo uma ordem normal apropriada sobre as raízes positivas, para qualquer $i = 1, \ldots, n$, podemos escrever os elementos (5.5) na forma

$$pF_{n+1,i} = p_{i,i+1} \cdots p_{in} p_{in'} \cdots p_{i1'} F_{n+1,i}, \tag{5.6}$$

onde o fator $p_{ii'}$ é omitido no produto. Portanto o denominador à direita desta fração é

$$\pi_i = f_{i,i+1} \cdots f_{in} f_{in'} \cdots f_{i1'},$$

onde

$$f_{ij} = \begin{cases} F_{ii} - F_{jj} + j - i & \text{se} \quad j = 1, \ldots, n \\ F_{ii} - F_{jj} + j - i - 2 & \text{se} \quad j = 1', \ldots, n'. \end{cases}$$

Assim, os elementos $s'_{ni} = pF_{n+1,i}\pi_i$ com $i = 1, \ldots, n$ pertencem à álgebra de Mickelsson $S(\mathfrak{o}_{2n+1}, \mathfrak{o}_{2n})$. Pode-se verificar que eles são dois a dois comutativos.

Denotemos por $V(\lambda)^+$ o subespaço dos vetores máximos sobre $\mathfrak{o}_{2n}$ em $V(\lambda)$. Dado um peso máximo sobre $\mathfrak{o}_{2n}$, $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$, denotamos por $V(\lambda)^+_\mu$ o correspondente subespaço de peso em $V(\lambda)^+$

$$V(\lambda)^+_\mu = \left\{\eta \in V(\lambda)^+ \mid F_{ii}\eta = \mu_i \eta, \quad i = 1, \ldots, n\right\}.$$

Pela regra da ramificação, o espaço $V(\lambda)^+_\mu$ é de dimensão um se a condição (5.4) é satisfeita, e zero em caso contrário.

Teorema 127 *Suponha que se que cumprem as desigualdades (5.4). Então o espaço $V(\lambda)^+_\mu$ é gerado pelo vetor*

$$s'^{\lambda_1 - \mu_1}_{n1} \cdots s'^{\lambda_n - \mu_n}_{nn} \xi.$$

5.2 Lowering operators para a redução $\mathfrak{o}_{2n} \downarrow \mathfrak{o}_{2n-1}$

Tomando $N = 2n$ na definição (5.1), consideramos $\mathfrak{o}_{2n-1}$ como a subálgebra de $\mathfrak{o}_{2n}$ gerada pelos elementos (5.1) com $i, j \neq n, n'$ junto com

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(F_{ni} - F_{n'i}\right), \quad i = 1, \ldots, n-1, (n-1)', \ldots, 1'.$$

De acordo com a regra da ramificação, a restrição de $V(\lambda)$ à subálgebra $\mathfrak{o}_{2n-1}$ é dada por

$$V(\lambda)\,|_{\mathfrak{o}_{2n-1}} \simeq \bigoplus_{\mu} V'(\mu),$$

onde $V'(\mu)$ é a representação de dimensão finita de $\mathfrak{o}_{2n-1}$ com peso máximo μ e a soma é tomada sobre os pesos μ que satisfazem as desigualdades

$$\lambda_1 \geq \mu_1 \geq \lambda_2 \geq \mu_2 \geq \ldots \geq \lambda_{n-1} \geq \mu_{n-1} \geq |\lambda_n|, \tag{5.7}$$

com todos os μ_i sendo simultaneamente inteiros ou semi-inteiros o mesmo que os λ_i.

Os elementos

$$F_{nn}, \quad F'_{ni}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(F_{ni} - F_{n'i}\right), \quad i = 1, \ldots, n-1, (n-1)', \ldots, 1', \tag{5.8}$$

geram sobre $\mathfrak{o}_{2n-1}$ o complementar invariante de $\mathfrak{o}_{2n-1}$ em $\mathfrak{o}_{2n}$. Portanto da teoria geral da seção 2, a álgebra de Mickelsson-Zhelobenko $Z(\mathfrak{o}_{2n}, \mathfrak{o}_{2n-1})$ é gerada pelos elementos

$$pF_{nn}, \quad pF'_{ni}, \quad i = 1, \ldots, n-1, (n-1)', \ldots, 1', \tag{5.9}$$

onde p é o projetor extremo para a álgebra de Lie $\mathfrak{o}_{2n-1}$. Seja $\{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_{n-1}\}$ a base de $\mathcal{H}^*$ dual da base $\{F_{11}, \ldots, F_{n-1,n-1}\}$ da subálgebra de Cartan $\mathcal{H}$ de $\mathfrak{o}_{2n-1}$. Seja $\epsilon_{i'} = -\epsilon_i$ para $i = 1, \ldots, n-1$. Denotemos por p_{ij} e p_i os elementos p_α dados por (2.28) para as raízes positivas $\alpha = \epsilon_i - \epsilon_j$ e $\alpha = \epsilon_i$, respectivamente. Escolhendo uma ordem normal apropriada sobre as raízes positivas, para qualquer $i = 1, \ldots, n-1$, podemos escrever os elementos (5.9)

na forma

$$pF'_{ni} = p_{i,i+1} \cdots p_{i,n-1} p_{i,(n-1)'} \cdots p_{i1'} F'_{ni}, \tag{5.10}$$

onde o fator $p_{ii'}$ é omitido no produto. Portanto o denominador à direita desta fração é

$$\pi_i = f_{i,i+1} \cdots f_{i,n-1} f_{i,(n-1)'} \cdots f_{i1'},$$

onde

$$f_{ij} = \begin{cases} F_{ii} - F_{jj} + j - i & \text{se} \quad j = 1, \ldots, n-1 \\ F_{ii} - F_{jj} + j - i - 2 & \text{se} \quad j = 1', \ldots, (n-1)'. \end{cases}$$

e $f_i = f'_i - 1 = 2(F_{ii} + n - i)$. Assim, os elementos $s_{ni} = pF'_{ni}\pi_i$ com $i = 1, \ldots, n-1$ pertencem à álgebra de Mickelsson $S(\mathfrak{o}_{2n}, \mathfrak{o}_{2n-1})$. Pode-se verificar que eles são dois a dois comutativos.

Denotemos por $V(\lambda)^+$ o subespaço dos vetores máximos sobre $\mathfrak{o}_{2n-1}$ em $V(\lambda)$. Dado um peso máximo sobre $\mathfrak{o}_{2n-1}$, $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_{n-1})$, denotamos por $V(\lambda)^+_\mu$ o correspondente subespaço de peso em $V(\lambda)^+$

$$V(\lambda)^+_\mu = \{\eta \in V(\lambda)^+ \mid F_{ii}\eta = \mu_i \eta, \quad i = 1, \ldots, n-1\}.$$

Pela regra da ramificação, o espaço $V(\lambda)^+_\mu$ é de dimensão um se a condição (5.7) é satisfeita, e zero em caso contrario.

Teorema 128 *Suponha que valem as desigualdades (5.7). Então o espaço $V(\lambda)^+_\mu$ é gerado pelo vetor*

$$s_{n1}^{\lambda_1 - \mu_1} \cdots s_{n,n-1}^{\lambda_{n-1} - \mu_{n-1}} \xi.$$

5.3 Vetores da base

A representação $V(\lambda)$ da álgebra de Lie $\mathcal{G}_n = \mathfrak{o}_{2n+1}$ ou $\mathfrak{o}_{2n}$ está equipada com um produto interno contravariante, o qual, é unicamente determinado pelas condições

$$\langle \xi, \xi \rangle = 1 \quad \text{e} \quad \langle F_{ij} u, v \rangle = \langle u, F_{ji} v \rangle,$$

para todos $u, v \in V(\lambda)$ e qualquer índices i, j.

Combinando os Teoremas 127 e 128 podemos construir outra base para cada representação $V(\lambda)$ de $\mathcal{G}_n$; veja Seção 4.2.

Caso tipo B

Precisamos modificar a definição do padrão Λ tipo B introduzido na seção 4.2. Aqui Λ é um arranjo da forma

$$\begin{array}{ccccccccc}
\lambda_{n1} & & \lambda_{n2} & & \cdots & & \lambda_{nn} & & \\
& \lambda'_{n1} & & \lambda'_{n2} & & \cdots & & \lambda'_{nn} & \\
& & \lambda_{n-1,1} & & \cdots & & \lambda_{n-1,n-1} & & \\
& & & \lambda'_{n-1,1} & & \cdots & & \lambda'_{n-1,n-1} & \\
& & & & \cdots & & \cdots & & \\
& & & & & & \lambda_{11} & & \\
& & & & & & & \lambda'_{11} &
\end{array}$$

tal que $\lambda = (\lambda_{n1}, \ldots, \lambda_{nn})$, as outras entradas são todas inteiros ou semi-inteiros o mesmo que os λ_i, e valem as seguintes desigualdades

$$\lambda_{k1} \geq \lambda'_{k1} \geq \lambda_{k2} \geq \lambda'_{k2} \geq \ldots \geq \lambda'_{k,k-1} \geq \lambda_{kk} \geq \left|\lambda'_{kk}\right|,$$

para $k = 1, \ldots, n$, e

$$\lambda'_{k1} \geq \lambda_{k-1,1} \geq \lambda'_{k2} \geq \lambda_{k-1,2} \geq \ldots \geq \lambda'_{k,k-1} \geq \lambda_{k-1,k-1} \geq \left|\lambda'_{kk}\right|,$$

para $k = 2, \ldots, n$.

Teorema 129 *Os vetores*

$$\eta_\Lambda = s_{11}'^{\lambda_{11}-\lambda'_{11}} \overrightarrow{\prod_{k=2,\ldots,n}} \left(s_{k1}'^{\lambda_{k1}-\lambda'_{k1}} \ldots s_{kk}'^{\lambda_{kk}-\lambda'_{kk}} s_{k1}^{\lambda'_{k1}-\lambda_{k-1,1}} \ldots s_{k,k-1}^{\lambda'_{k,k-1}-\lambda_{k-1,k-1}} \right) \xi$$

parametrizados pelos padrões Λ formam uma base ortogonal da representação $V(\lambda)$.

Caso tipo D

Aqui definimos o padrão Λ tipo D como o arranjo da forma

$$\begin{array}{ccccccc}
\lambda_{n1} & & \lambda_{n2} & & \cdots & & \lambda_{nn} \\
 & \lambda'_{n-1,1} & & \cdots & & \lambda'_{n-1,n-1} & \\
 & & \lambda_{n-1,1} & & \cdots & & \lambda_{n-1,n-1} \\
 & & & \ddots & & \ddots & \\
 & & & & \cdots & & \cdots \\
 & & & & & \lambda'_{11} & \\
 & & & & & & \lambda_{11}
\end{array}$$

tal que $\lambda = (\lambda_{n1}, \ldots, \lambda_{nn})$, as outras entradas são todas inteiros ou semi-inteiros o mesmo que os λ_i, e valem as seguintes desigualdades

$$\lambda_{k1} \geq \lambda'_{k-1,1} \geq \lambda_{k2} \geq \lambda'_{k-1,2} \geq \ldots \geq \lambda_{k,k-1} \geq \lambda'_{k-1,k-1} \geq |\lambda_{kk}|,$$

para $k = 2, \ldots, n$, e

$$\lambda'_{k1} \geq \lambda_{k,1} \geq \lambda'_{k2} \geq \lambda_{k,2} \geq \ldots \geq \lambda_{k,k-1} \geq \lambda'_{kk} \geq |\lambda_{kk}|,$$

para $k = 1, \ldots, n-1$.

Teorema 130 *Os vetores*

$$\eta_\Lambda = \overrightarrow{\prod_{k=1,\ldots,n-1}} \left(s_{k+1,1}^{\lambda_{k+1,1}-\lambda'_{k1}} \ldots s_{k+1,k}^{\lambda_{k+1,k}-\lambda'_{kk}} s_{k1}'^{\lambda'_{k1}-\lambda_{k1}} \ldots s_{kk}'^{\lambda'_{kk}-\lambda_{kk}} \right) \xi,$$

parametrizados pelos padrões Λ, *formam uma base ortogonal da representação* $V(\lambda)$.

As normas dos vetores da base η_Λ podem ser obtidas de forma explícita. As fórmulas para os elementos da matriz dos geradores da álgebra de Lie $\mathfrak{o}_N$ no artigo original de Gelfand e Tsetlin [GT2], são dados na base ortonormal

$$\zeta_\Lambda = \eta_\Lambda / \|\eta_\Lambda\|, \qquad \|\eta_\Lambda\|^2 = \langle \eta_\Lambda, \eta_\Lambda \rangle .$$

Referências Bibliográficas

[AST1] R. M. Asherova, Yu. F. Smirnov and V. N. Tolstoy, Projection operators for simple Lie groups, Theor. Math. Phys. **8** (1971), 813-825.

[AST2] R. M. Asherova, Yu. F. Smirnov and V. N. Tolstoy, Projection operators for simple Lie groups. II. General scheme for constructing lowering operators. The groups $SU(n)$, Theor. Math. Phys. **15** (1973), 392-401.

[AST3] R. M. Asherova, Yu. F. Smirnov and V. N. Tolstoy, Description of a certain class of projection operators for complex semisimple Lie algebras, Math. Notes **26**, no. 1-2, 499-504 (1979).

[BB] G. E. Baird and L. C. Biedenharn, On the representations of the semisimple Lie groups. II, J. Math. Phys. **4** (1963), 1449-1466.

[ChP1] V. Chari and A. Pressley, A guide to quantum groups, Cambridge university Press, 1994.

[ChP2] V. Chari and A. Pressley, Yangians and R-matrices, L´Enseign. Math. **36** (1990), 267-302.

[Ch] I. V. Cherednik, Quantum groups as hidden symmetries of classic representation theory, in: "Differential Geometric Methods in Physics"(A. I. Solomon, Ed), World Scientific, Singapore, 1989, 47-54.

[Di] J. Dixmier, Algèbres Enveloppantes, Gauthier-Villars, Paris, 1974.

[Dr1] V. G. Drinfeld, Hopf algebras and the quantum Yang-Baxter equation, Soviet math. Dokl. **32** (1985), 254-258.

[Dr2] V. G. Drinfeld, Quantum groups, in: "Proc. Int. Congress Math. ,Berkeley, 1986", AMS, Providence RI,1987, 798-820.

[GT1] I. M. Gelfand and M. L. Tsetlin, Finite-dimensional representations of the group of unimodular matrices, Dokl. Akad. Nauk SSSR **71** (1950), 825-828 (Russian). English transl. in: I. M. Gelfand, "Collected papers". Vol II, Berlin: Springer-Verlag 1988,.653-656.

[GT2] I. M. Gelfand and M. L. Tsetlin, Finite-dimensional representations of groups of orthogonal matrices, Dokl. Akad. Nauk SSSR **71** (1950), 1017-1020 (Russian). English transl. in: I. M. Gelfand, "Collected papers". Vol II, Berlin: Springer-Verlag 1988, 657-661.

[GZ] I. M. Gelfand and A. Zelevinsky, Models of representations of classical groups and their hidden symmetries, Funct. Anal. Appl. **18** (1984), 183-198.

[GW] R. Goodman and N. R. Wallach, Representations and invariants of the classical groups, Cambridge University Press, 1998.

[Go] M. D. Gould, Representation theory of the symplectic groups. I, J. Math. Phys. **30** (1989), 1205-1218.

[GK] M. D. Gould and E. G. Kalnins, A projection-based solution to the $Sp(2n)$ state labeling problem, J. Math. Phys. **26** (1985), 1446-1457.

[He] G. C. Hegerfeldt, Branching theorem for the symplectic groups, J. Math. Phys. **8** (1967), 1195-1196.

[Ho] A. van den Hombergh, A note on Mickelsson's step algebra, Indag. Math. **37** (1975), 42-47.

[Hou] Hou Pei-yu, Orthonormal bases and infinitesimal operators of the irreducible representations of group U_n, Scientia Sinica **15** (1966), 763-772.

[HU] R. Howe and T. Umeda, The capelli identity, the double commutant theorem, and multiplicity-free actions, Math. Ann. **290** (1991), 569-619.

[Hu] J. E. Humphreys, Introduction to Lie algebras and Representation Theory, Graduate texts in Mathematics **9**, Springer, New York, 1972.

[JK] G. James and A. Kerber, the representation theory of the symmetric group, Addison-Wesley, 1981.

[Ji] M. Jimbo, A q-difference analogue of $\mathbf{U}(\mathcal{G})$ and the Yang-Baxter equation, Lett. Math. Phys. **10** (1985), 63-69.

[Ki] A. A. Kirillov, A remark on the Gelfand-Tsetlin patterns for symplectic groups, J. Geom. Phys. **5** (1988), 473-482.

[Ma] I. G. Macdonald, Symmetric functions and Hall polynomials, Oxford University Press, 2nd edition 1995.

[Mi1] J. Mickelsson, Lowering operators and the sympletic group, Rep. Math. Phys. **3** (1972), 193-199.

[Mi2] J. Mickelsson, Step algebras of semi-simple subalgebras of Lie algebras, Rep. Math. Phys. **4** (1973), 307-318.

[Mo1] A. I. Molev, Finite-dimensional irreducible representations of twisted Yangians, J. Math. Phys. **39** (1998), 5559-5600.

[Mo2] A. I. Molev, A basis for representations of symplectic Lie algebras, Comm. Math. Phys. **201** (1999), 591-618.

[Mo3] A. I. Molev, A weight basis for representations of even orthogonal Lie algebras, in: "Combinatorial Methods in Representation Theory", Adv. Studies in Pure Math., **28** (2000), 223-242.

[Mo4] A. I. Molev, Weight bases of Gelfand-Tsetlin type for representations of classical Lie algebras, J. Phys. A: Math. Gen., **33** (2000), 4143-4168.

[Mo5] A. I. Molev, Yangians and their applications, in: "Handbook of algebra", Vol. 3, (M. Hazewinkel, Ed.), Elsevier, to appear.

[Mo6] A. I. Molev, Gelfand-Tsetlin basis for representations of Yangians, Lett. Math. Phys. **30** (1994), 53-60.

[MNO] A. I. Molev, M. Nazarov and G. Olshanski, Yangians and classical Lie algebras, Russian Math. Surveys **51**:2 (1996), 205-282.

[MO] A. I. Molev and G. Olshanski, Centralizer construction for twisted Yangians, Selecta Math., N. S., **6** (2000), 269-317.

[NM] J. G. Nagel and M. Moshinsky, Operators that lower or raise the irreducible vector spaces of U_{n-1} contained in an irreducible vector espace of U_n. J. Math. Phys. **6** (1965), 682-694.

[Na] M. Nazarov, Representations of twisted Yangians associated with skew Young diagrams, preprint math.RT/0207115.

[Ol] G. Olshanski, Twisted Yangians and infinite-dimensional classical Lie algebras, in: "Quantum Groups"(P. P. Kulish, Ed), Lecture Notes in Math. **1510**, Springer, Berlin-Heidelberg, 1992, 103-120.

[PH] S. C. Pang and K. T. Hecht, Lowering and raising operators for the orthogonal group in the chain $O(n) \supset O(n-1) \supset \cdots$, and their graphs. J. Math. Phys. **8** (1967), 1233-1251.

[Pr] R. Proctor, Odd symplectic groups, Invent. Math. **92** (1988), 307-332.

[Sa] B. E. Sagan, The symmetric group. Representations, combinatorial algorithms, and symmetric functions, 2nd edition, Grad. Texts in Math., **203**, Springer-Verlag, New York, 2001.

[Sh] V. V. Shtepin, Intermediate Lie algebras and their finite-dimensional representations, Russian Akad. Sci. Izv. Math. **43** (1994), 559-579.

[TF] L. A. Takhtajan and L. D. Faddeev, Quantum inverse scattering method and the Heisenberg XYZ-model, Russian Math. Surv. **34** (1979), 11-68.

[Wo] M. K. F. Wong, Representations of the orthogonal group. I. Lowering and raising operators for the orthogonal group and matrix elements of the generators. J. Math. Phys. **8** (1967), 1899-1911.

[Zh1] D. P. Zhelobenko, The classical groups. Spectral analysis of their finite-dimensional representations, Russ. Math. Surv. **17** (1962), 1-94.

[Zh2] D. P. Zhelobenko, Compact Lie groups and their representations, Transl. of Math. Monographs **40** AMS, Providence RI, 1973.

[Zh3] D. P. Zhelobenko, S-algebras and Verma modules over reductive Lie algebras, Soviet. Math. Dokl. **28** (1983), 696-700.

[Zh4] D. P. Zhelobenko, Z-algebras over reductive Lie algebras, Soviet. Math. Dokl. **28** (1983), 777-781.

[Zh5] D. P. Zhelobenko, Representations of reductive Lie algebras, VO "Nauka", Moscow, 1994 (Russian).

[Zh6] D. P. Zhelobenko, An introduction to the theory of S-algebras over reductive Lie algebras, in: "Representations of Lie groups and related topics"(A. M. Vershik and D. P. Zhelobenko, Eds), Adv. Studies in Contemp. Math. **7**, New York, Gordon and Breach Science Publishers 1990, 155-221.