Folheações umbílicas com complementar integrável e um limitante inferior topológico para o volume de campos de vetores

Robson Martins de Mesquita

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENCÃO DO TÍTULO DE DOUTOR
EM
CIÊNCIAS

Área de concentração: Matemática
Orientador: Prof. Dr. Fabiano Gustavo Braga Brito

Durante a elaboração deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES

São Paulo, julho de 2007

Folheações umbílicas com complementar integrável e um limitante inferior topológico para o volume de campos de vetores

Este exemplar corresponde à redação final

da tese devidamente corrigida e defendida

por Robson Martins de Mesquita

e aprovada pela Comissão Julgadora

São Paulo, julho de 2007

BANCA EXAMINADORA:

- Dr. Fabiano Gustavo Braga Brito (orientador) - IME/USP
- Dr. André de Oliveira Gomes (co-orientador) - IME/USP
- Dr. Antônio Gervásio Colares - UFC
- Dr. Luis Amâncio Machado de Sousa Júnior - UNIRIO
- Dr. Sebastião Carneiro de Almeida - UFC

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho à toda minha família, por seu apoio incondicional para que eu conseguisse tornar meu doutoramento uma realidade. Em especial, o dedico a meus pais, Sebastião Mesquita e Marizete Martins, meus irmãos Raimisson e Ronísie, meu padrasto Altair Primo e minha madrasta Joana Custódio.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, desejo agradecer ao meu orientador, professor Fabiano Brito, por me ter acompanhado com disposição, dedicação e interesse tão formidáveis; Seu apoio, na forma de um sólido domínio matemático, ou na de um ombro humilde e amigo, foram cruciais para a consecução deste trabalho e exemplos pessoais a serem imitados.

Agradeço também ao meu coorientador, professor André Gomes, pela solicitude e atenção.

À professora Rosa Chaves, sempre tão amiga, dedicada e disposta a orientar e a aconselhar.

Aos membros da Comissão Julgadora, especialmente aos professores Antônio G. Colares e Sebastião C. Almeida, pela atenção e pelos conselhos procedentes gentilmente a mim dispensados.

Aos grandes amigos que fiz, que, cada um à sua maneira, honraram-me com sua amizade: Antônio Zeña e sua esposa Josefa, Antônio Ronaldo, Carla Costa, Dami Baz, David Dias, Dewar Chavez e sua esposa Janeth, Janeth Soares, Plácido Júnior, Angélica, Reginaldo Braz, Simone Santana, Walter Aloisio, Wellington Cedro e Wellington Faria.

Ao Paulo da tesouraria e Osvaldo da seção de fotocópias do bloco A, à Elizabeth da biblioteca, ao Marcos da seção de audiovisual, ao Pinho, Rose, Alessandra e Marilúcia da CPG, à Joelma, Sueli e Diego da secretaria de graduação, à Patrícia da secretaria da Biomatemática e à Rosário, secretária da Diretoria.

À Universidade de São Paulo por oferecer a

seus alunos uma estrutura tão grandiosa.

Sumário

Introdução ix

1 Resultados conhecidos 1

1.1 Introdução 1

1.2 teoria geométrica das folheações 1

1.3 Volume de campos de vetores 11

2 Folheações umbílicas com fibrados normais integráveis 15

2.1 Introdução 15

2.2 Notações e preliminares 15

2.2.1 Subvariedades mínimas e subvariedades umbílicas 16

2.2.2 O teorema de Frobenius 17

2.3 Motivação 18

2.4 Resultados principais 22

2.4.1 Demonstração do lema 2.9 23

2.4.2 Demonstração do teorema 2.7 26

2.4.3 Demonstração do teorema 2.8 28

3 Uma limitação inferior topológica para o volume de campos de vetores 29

3.1 Introdução 29

3.2 Preliminares 30

3.2.1 A métrica de Sasaki 30

3.2.1.1 Introdução 30

3.2.1.2 A variedade G(q,M) 30

3.2.1.3 O fibrado tangente $\tilde{\pi} : TG(q, M) \to G(q, M)$ . . 31

3.2.2 Volume de campos de vetores 34

3.2.2.1 Introdução 34

3.2.2.2 O cálculo de $vol(X)$ 35

3.3 Resultados principais 39

3.3.1 notações 40

3.3.2 mudança de métrica 42

3.3.3 demonstração do teorema 43

3.3.4 Um corolário topológico 54

Referências 55

Resumo

Estudamos as propriedades de um acoplamento de folheações mutuamente ortogonais com dimensões complementares.

Também revisitamos o problema de encontrar limitantes inferiores para o volume de campo de vetores unitário em uma variedade riemanniana fechada submetida a vínculos topológicos.

Abstract

We study the geometric properties of a couple of mutually orthogonal foliations with complementary dimensions.

We also revisit the problem of finding lower bounds for the volume of a unit vector field in a closed riemannian manifold submitted to topological constraints.

Introdução

Este trabalho é dividido claramente em duas partes distintas. A Primeira trata sobre propriedades geométrico-topológicas das folheações e a segunda sobre o problema de minimização dos funcionais volume de campos de vetores.

Um típico problema a ser investigado no que diz respeito a análise das propriedades geométrico-topológicas das folheações, seria o de encontrar obstruções topológicas para a existência de folheações com propriedades geométricas prescritas em espaços de geometria fixada.

Encaramos os resultados da primeira parte deste nosso trabalho como um ponto de partida para o estudo de questões mais complexas, como aquele de responder à seguinte pergunta: "Existem folheações de esferas de dimensão ímpar por folhas compactas com complementar integrável?" Nosso primeiro teorema, no segundo capítulo, dá uma resposta negativa para o caso em que as folhas são esféricas. Seria interessante, por exemplo, estender tal resultado para o caso em que as folheações tenham complementar integrável e tais que as folhas possuam propriedades geométricas menos rígidas que umbilicidade (por exemplo, folheações onde todas as folhas sejam subvariedades mínimas).

No que concerne ao estudo sobre minimização dos funcionais volume de campos de vetores, noção esta introduzida por H. Gluck e W. Ziller em 1986, é interessante observar que é conhecido ([GZ],[B2]) que, sobre S^3, tal mínimo é atingido pelos campos de Hopf e que tais campos são pontos críticos instáveis para o funcional volume de esferas $(2k+1)$-dimensionais para $k \geqslant 2$ ([J],[BGm]), e que, de fato, o problema de minimização do volume de campos de vetores sobre tais esferas continua em aberto.

No primeiro capítulo é feito um apanhado histórico dos desenvolvimentos teóricos que julgamos serem os mais relevantes para a linha de pesquisa em que estivemos envolvidos e são também apresentadas algumas questões que nos motivaram a iniciar pesquisas sobre tais assuntos.

No segundo capítulo são apresentados, depois de algumas noções preliminares, os enunciados e respectivas demonstrações de nossos resultados na teoria de folheações.

No último capítulo é apresentada, com pormenores, a maneira como é calculado o volume de um campo de vetores sobre uma variedade riemanniana fechada, a partir da definição introduzida em [GZ], com uso da métrica de Sazaki, e, em seguida, é demonstrado o resultado principal do capítulo, que é o estabelecimento de um limitante inferior que depende da curvatura de Lipschitz-Killing da variedade, provado anteriormente por F.Brito e P.Chacón em [BC], para o caso em que a variedade em questão é 5-dimensional.

Capítulo 1

Resultados conhecidos

1.1 Introdução

Neste capítulo são apresentados resultados conhecidos sobre teoria geométrica das folheações, na segunda seção, e sobre volume de campos de vetores na seguinte. Trata-se, em linhas gerais, de um "overview" das linhas de pesquisa sobre as quais nos debruçamos nos últimos dois anos, aproximadamente.

1.2 teoria geométrica das folheações

O estudo das folheações do ponto de vista da geometria das subvariedades consiste em estabelecer relações geométrico-topológicas entre um padrão geométrico pré-fixado de folhas e a classe riemanniana do espaço folheado.

Nesta linha de pesquisa, talvez o resultado mais importante obtido até agora para folheações de codimensão 1 seja aquele demonstrado por Dennis Sullivan em [SU]:

Teorema 1.1 *Seja M uma variedade riemanniana fechada e $\mathfrak{F}$ uma folheação de codimensão 1, mínima, de classe C^2. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *Todas as folhas de $\mathfrak{F}$ são hipersuperfícies mínimas de M;*

2. *Por cada folha fechada de $\mathfrak{F}$ passa necessariamente uma curva transversal γ, de classe C^1, fechada, que é transversal a $\mathfrak{F}$;*

Uma consequência deste fantástico resultado é que a esfera S^3 não admite métrica na qual exista uma folheação de codimensão 1 onde todas as folhas sejam hipersuperfícies mínimas.

No capítulo 2 daremos detalhes sobre a demonstração deste fato fazendo utilização do teorema de Sullivan, acima, do teorema de Novikov e continuidade de uma função apropriada. Tal argumento nos foi apresentado por F.Brito. De agora em diante, as folheações em que todas as folhas sejam subvariedades mínimas do espaço folheado serão denominadas folheações geometricamente mínimas, ou, para simplificar, folheações g-mínimas. Em 1970 André Haefliger, em [Ha], demonstrou o seguintes resultados

Teorema 1.2 *Seja $\mathfrak{F}$ uma folheação sobre uma variedade fechada M de dimensão $n+p$, as folhas sendo subvariedades de dimensão p e codimensão q de classe C^∞. Sobre M existe uma métrica riemanniana tal que as folhas de $\mathfrak{F}$ são subvariedades mínimas se e somente se, para um representante H do pseudo-grupo de holonomia agindo sobre uma variedade de dimensão q,*

N, existe uma função positiva de classe C^∞ com suporte compacto, que é estritamente positiva sobre um conjunto intersectando cada órbita de H, e que satisfaz $df = 0$ em $\Omega_c^1(N/H)$.

$\Omega_c^p(N)$ denota o espaço vetorial das p-formas suaves sobre N com suporte compacto, $\Omega_c^p(N/H)$ o quociente de $\Omega_c^p(N)$ pelo subespaço vetorial gerado pelos elementos da forma $\alpha - h^*\alpha$, $h \in H$ e α é uma p-forma com suporte compacto na imagem de h. Como consequência, seguem os seguintes corolários.

Corolário 1.3 *A existência de uma métrica riemanniana para a qual as folhas são g-mínimas depende somente do pseudo-grupo de holonomia de $\mathfrak{F}$.*

Corolário 1.4 *Se existe um representante H para o pseudo-grupo de holonomia agindo sobre uma variedade fechada N, então existe um métrica para a qual as folhas são subvariedades mínimas da variedade ambiente.*

Em particular, se as folhas de $\mathfrak{F}$ são todas compactas, então suas folhas são subvariedades mínimas se e somente se $\mathfrak{F}$ é estável.

Apesar da simplicidade do enunciado, a forma operacional deste resultado pode-se mostrar muito complicada. Isto porque o conhecimento das propriedades do pseudo-grupo de holonomia das folhas de $\mathfrak{F}$ pode ser um problema mais difícil que o original. Também no caso de folheações g-mínimas com fibrado normal integrável, verifica-se que a forma volume da folheação é relativamente fechada.Tal propriedade é mais precisamente enunciada no próximo teorema.

Teorema 1.5 *(critério de Rummler-Sullivan) Seja g_0 um produto escalar suave definido em $T\mathfrak{F}$. Tal produto escalar é induzido por uma métrica riemanniana g de M, para a qual $\mathfrak{F}$ é g-mínima, se e somente se a p-forma volume ω_0 sobre as folhas, definida por g_0 (e a orientação) é a restrição para as folhas de uma p-forma ω sobre M, que é relativamente fechada, ou seja, $d\omega(\xi_1, \ldots, \xi_{p+1}) = 0$, se os primeiros p campos de vetores ξ_i são tangentes às folhas.*

O critério acima é desenvolvido em [R] e em [SU]. Uma demonstração bem simplificada dele é apresentado em [Ha]. Percebe-se desde logo que a integrabilidade do fibrado normal da folheação em questão é crucial. Na verdade, sem esta hipótese o problema de classificação das folheações g-mínimas é intratável, no sentido de abundância, já no caso onde o espaço ambiente possui curvatura (seccional) constante positiva. Por exemplo, se $M = S^3$ é equipado com a métrica usual induzida do $\mathbb{R}^4$, a "esfera redonda", Herman Gluck e Frank Warner provaram em [GW] o seguinte resultado:

Teorema 1.6 *Uma subvariedade de $\widetilde{G}^2(\mathbb{R}^4) \cong S^2 \times S^2$ corresponde a uma fibração F de S^3 por grandes círculos orientados se, e somente se, ela é o gráfico de uma aplicação que diminui distâncias que vai de um fator S^2 a outro.*

Aqui $\widetilde{G}^2(\mathbb{R}^4)$ denota o grassmanniano dos 2-planos orientados do $\mathbb{R}^4$.

Observação 1 *Duas quaisquer destas folhas que venham de aplicações distintas que diminuem distâncias fornecem folheações por grandes círculos que não são congruentes.*

Ainda no caso unidimensional, podemos ter uma idéia da amplitude do espaço de todas as possíveis fibrações de S^3 por grandes círculos na seguinte consequência do teorema anterior.

Corolário 1.7 *O espaço de todas as fibrações de S^3 é um retrato por deformação a um subespaço das fibrações de Hopf (que têm complementar não integrável), e, consequentemente, tem o mesmo tipo homotópico de um par de 2-esferas disjuntas.*

Para folheações de dimensões superiores, de esferas por grandes esferas, o problema de classificação permanece sem solução ainda no nível topológico [GWY]. Voltaremos a este assunto rapidamente no 2º capítulo.

Em 1984, F. Brito demonstrou, em [B], o seguinte resultado para folheações g-mínimas de codimensão 2 com fibrado normal integrável.

Teorema 1.8 *Seja M^{n+2} uma variedade riemanniana fechada, orientada, de dimensão $(n+2)$, e $\mathfrak{F}_1$ uma folheação g-mínima C^∞ de codimensão 2 de M. Suponha que a distribuição normal de $\mathfrak{F}_1$, digamos $\mathfrak{F}_2$, seja C^∞ e integrável e que ambas sejam orientáveis.*

1. *Se $Ricc(M) > 0$, então $\varepsilon(\mathfrak{F}_2) \neq 0$.*

2. *Se* $Ricc(M) \geqslant 0$ *então* $\mathfrak{F}_1$ *é totalmente geodésica ou* $\varepsilon(\mathfrak{F}_2) \neq 0$ *(ambas podendo ocorrer simultaneamente).*

3. *Se* M *tem curvatura seccional não negativa, então* $\varepsilon(\mathfrak{F}_2) \neq 0$ *ou* $\mathfrak{F}_1$ *e* $\mathfrak{F}_2$ *são totalmente geodésicas (ambas podem ocorrer simultaneamente).*

onde $\varepsilon(\mathfrak{F}_2)$ denota a classe de Euler de $\mathfrak{F}_2$ e $Ricc(M)$ é o tensor de Ricci de M.

Pode-se mostrar, por exemplo, que em $S^3 \times S^3$ existem folheações g-mínimas de codimensão 2; Porém, nenhuma delas possui fibrado normal integrável, pelo fato de que $H^2(S^3 \times S^3, \mathbb{Z}) = 0$.

A hipótese de integrabilidade do fibrado normal de $\mathfrak{F}$ é fundamental. Isto fica mais claro tendo em vista o seguinte resultado devido a Ryoichi Takagi e Shinsuke Yorozu em [TY]. No enunciado do teorema abaixo, será denotado por G um n-dimensional grupo de Lie com álgebra de Lie associada $\mathfrak{g}$, consistindo de todos os campos de vetores sobre G invariantes pela ação do grupo à esquerda, por $\mathfrak{h}$ uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$, $\langle , \rangle$ denotará uma métrica riemanniana invariante à esquerda sobre G, $(G, \langle , \rangle, \mathfrak{F}(\mathfrak{h}))$ a variedade riemanniana folheada considerada, e, finalmente,

$$I(G, \langle , \rangle, \mathfrak{F}(\mathfrak{h})) = \max_{\{e_i\} \in NB(\mathfrak{h})} \sum_i r(e_i),$$

onde $NB(\mathfrak{h})$ denota o conjunto de todas as bases ortonormais $\{e_i\}$ para $\mathfrak{h}$.

Teorema 1.9 *Considere* $(G, \langle,\rangle, \mathfrak{F}(\mathfrak{h}))$ *uma variedade riemanniana folheada, com uma métrica riemanniana invariante à esquerda e* $Ad(H)$*-invariante,* $\langle,\rangle$*,e uma folheação* $\mathfrak{F}(\mathfrak{h})$ *de codimensão* $p = n - q$ *e* $I(G, \langle,\rangle, \mathfrak{F}(\mathfrak{h}))$ *como acima. Suponha que* $[\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] = \mathfrak{m}$ *e que* $p < I(G, \langle,\rangle, \mathfrak{F}(\mathfrak{h}))$.
Então G *admite uma métrica riemanniana invariante à esquerda* $\overline{\langle,\rangle}$*, satisfazendo ao seguinte:*

1. *A variedade riemanniana folheada* $(G, \langle,\rangle, \mathfrak{F}(\mathfrak{h}))$ *é mínima mas não totalmente geodésica;*

2. *A métrica* $\overline{\langle,\rangle}$ *é métrica tipo-fibrado com respeito a* $\mathfrak{F}(\mathfrak{h})$.

Se, além disso, G *for compacto e semisimples,* $[\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] = \mathfrak{m}$ *e* $p < I(G, \langle,\rangle, \mathfrak{F}(\mathfrak{h}))$ *com respeito a uma métrica riemanniana bi-invariante* $\langle,\rangle$ *sobre* G*, então* G *admite uma métrica riemanniana invariante à esquerda,* $\overline{\langle,\rangle}$*, satisfazendo 1 e 2 e com curvaturas de Ricci positivas em todas as direções.*

Cumpre ressaltar o fato de que $\mathfrak{F}$ ter codimensão 1 implica a integrabilidade de $\mathfrak{F}^{\perp}$; Este caso foi competentemente tratado por [O1]. Nesse trabalho, Gen-Ichi Oshikiri demonstra o

Teorema 1.10 *Seja* $(M, \mathfrak{F}, g, N)$ *uma folheação* g*-mínima orientada de codimensão* 1 *sobre uma variedade riemanniana fechada* M *com curvatura de Ricci não-negativa. Então* N *é um campo de vetores paralelo. Consequentemente, em particular,* $\mathfrak{F}$ *pode ser definida por uma* 1*-forma fechada.*

onde N denota um campo de vetores adaptado a $\mathfrak{F}$, ou seja, é um campo tangente globalmente definido sobre M que é ortogonal às folhas de $\mathfrak{F}$.

Para codimensão arbitrária, porém com a forte hipótese de que o fibrado ortogonal a uma folheação g-mínima seja flat, Oshikiri demonstra, entre outras coisas, em [O2], o seguinte.

Teorema 1.11 *Seja $(M, \mathfrak{F}, g)$ uma folheação g-mínima de uma variedade riemanniana fechada, conexa, com curvatura de Ricci não negativa. Assuma que $\mathfrak{F}^{\perp}$, a distribuição ortogonal a $\mathfrak{F}$, seja integrável e que sua conexão normal seja flat. Então (M, g) é localmente um produto riemanniano de uma folha de $\mathfrak{F}$ por uma de $\mathfrak{F}^{\perp}$.*

Seguindo a linha de pesquisa em que se tem interesse em saber quando uma variedade folheada é um produto riemanniano, Kinetsu Abe, em [A], demonstrou os seguintes resultados

Teorema 1.12 *Seja M um espaço localmente simétrico completo com uma folheação totalmente geodésica $\mathfrak{F}$ tal que $\mathfrak{F}^{\perp}$ é integrável. Assuma que $(K_{ij})_{ij}$ tenha traço não-negativo para cada direção normal. Então M é localmente um produto riemanniano. Se M for simplesmente conexo, o produto riemanniano é global.*

Como consequência imediata, Abe apresenta também o seguinte resultado, que trata do caso em que $\mathfrak{F}$ é unidimensional:

Corolário 1.13 *Seja M um espaço localmente simétrico, completo, com curvatura de Ricci não-negativa. Se existe uma folheação totalmente geodésica unidimensional $\mathfrak{F}$, tal que $\mathfrak{F}^{\perp}$ seja integrável, então M é localmente um produto riemanniano. Se M for simplesmente conexo, então ele é o produto riemanniano de $\mathbb{R}$ por um espaço localmente simétrico.*

Em 1986, F. Brito e P. Walczack, em [BW], apresentaram resultados nessa linha de pesquisa sem a hipótese de simetria local do espaço folheado. Também é apresentado nesse trabalho, uma recíproca do resultado de Oshikiri, [O1], no sentido de que, com a hipótese de total geodesibilidade da folheação normal, se conclui que a folheação é totalmente geodésica. Mais precisamente, temos:

Teorema 1.14 *Sejam $\mathfrak{F}$ e $\mathfrak{F}^{\perp}$ duas folheações ortogonais de dimensões complementares sobre uma variedade riemanniana completa M. Se as seguintes condições são verificadas:*

1. *$\mathfrak{F}^{\perp}$ é totalmente geodésica;*

2. *$\sum_i R(h, e_i, e_i, h) \geqslant 0$, onde h é o vetor curvatura média de $\mathfrak{F}$, $\{e_1, \ldots, e_n\}$ um referencial ortonormal adaptado a $\mathfrak{F}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, e R é o tensor curvatura de M.*

3. *Se $p \in M$ e $h(p) = 0$ então as matrizes (K_{ij}^{α}) têm traço não-negativo para todo α, as matrizes sendo definidas para $1 \leqslant i, j \leqslant n$, por*

   $K_{ij}^{\alpha} = R(e_\alpha, e_i, e_i, e_\alpha)$, $R(e_C, e_D, e_B, e_A) :=< R(e_C, e_D)e_B, e_A >:= R_{ABCD}$,

e_α um vetor unitário tangente a $\mathfrak{F}$ e R é o tensor curvatura de M.

Então $\mathfrak{F}$ é totalmente geodésica. Consequentemente, M é localmente um produto riemanniano das folhas de $\mathfrak{F}$ e de $\mathfrak{F}^\perp$.

Corolário 1.15 *Seja M uma variedade riemanniana completa munida de um par de folheações ortogonais de dimensões complementares, $\mathfrak{F}$ e $\mathfrak{F}^\perp$, tal que $\mathfrak{F}^\perp$ seja totalmente geodésica. Assuma, além disso, que a matriz (K_{ij}^α) tenha traço não-negativo para cada direção e_α tangente a $\mathfrak{F}^\perp$ em cada ponto de M. Então $\mathfrak{F}$ também é totalmente geodésica e M é localmente um produto riemanniano das folhas de $\mathfrak{F}$ e de $\mathfrak{F}^\perp$.*

Corolário 1.16 *Seja M uma variedade riemanniana completa de curvatura de Ricci não-negativa. Se $\mathfrak{F}$ é uma folheação de codimensão 1 sobre M e o fluxo normal de $\mathfrak{F}$, digamos $\mathfrak{F}^\perp$, é geodésico, então $\mathfrak{F}$ é totalmente geodésica, $\mathfrak{F}^\perp$ é paralelo e M é localmente um produto riemanniano das folhas de $\mathfrak{F}$ e de $\mathfrak{F}^\perp$.*

1.3 Volume de campos de vetores

Seja (M^n, g) uma variedade riemanniana fechada n-dimensional e X um campo de vetores suave sobre M. A métrica g induz uma métrica natural sobre o fibrado tangente TM, usualmente chamada métrica de Sazaki. O volume de X é definido como o volume da seção $X : M \to TM$ (veja [GZ]). Uma expressão do volume de X em termos da conexão de Levi-Civita ∇ de (M, g) é:

$$\begin{aligned} vol(X) &= \int_M \sqrt{\det(Id + (\nabla X)^*(\nabla X))}\nu = \\ &= \int_M (1 + \sum_{a=1}^{n} ||\nabla_{e_a} X||^2 + \sum_{a<b} ||\nabla_{e_a} X \wedge \nabla_{e_b} X||^2 + \cdots + \\ &\qquad + \cdots + \sum_{a_1 < \cdots < a_{n-1}} ||\nabla_{e_{a_1}} X \wedge \ldots \nabla_{e_{a_{n-1}}} X||^2)^{\frac{1}{2}} \nu \end{aligned}$$

O problema geral que se propõe é o de minimizar o funcional volume numa dada variedade riemanniana fechada com característica de Euler identicamente nula (esta última condição é imposta para garantir a existência de campos de vetores unitários globalmente definidos).

O primeiro resultado importante nesta direção foi obtido por H.Gluck e W.Ziller em 1986, que provaram que em S^3, esfera unitária tridimensional, os campos unitários que minimizam o volume são os campos tangentes a uma fibração de Hopf e não outros. A técnica utilizada naquele artigo foi o de calibração geométrica e faz uso de uma classificação de campos tangentes total-

mente geodésicos de S^3. Tal técnica é apresentada e desenvolvida por H.Gluck e F.Warner em 1983 (veja [GW]).

Fazendo uso de uma argumentação muito mais simples, F. Brito demonstra, em 2000, a minimalidade (mas não a unicidade) do volume dos campos de Hopf de S^3, em ([B2]).

No caso das esferas de dimensão $2k+1$, com $k \geqslant 2$, o problema de minimização do volume de campos tangentes permanece em aberto.

Em [J], D. Johnson mostrou que, em S^5, os campos de Hopf são "pontos"críticos instáveis do funcional volume, e, portanto, a possibilidade de extensão, mesmo local, do teorema de Gluck e Ziller foi totalmente descartado.

Em [BGm], O. Gil-Medrano e V. Borreli estenderam o resultdo de Johnson para todas as dimensões ímpares e para campos com norma constante, não necessariamente unitários, com uma surpreendente condição para estabilidade que leva em conta o comprimento dos vetores do campo.

Em [BCN], F. Brito, P. Chacón e A. Naveira exibem limitantes inferiores não triviais para o volume de um campo de vetores unitário em termos das $2i$-ésimas curvaturas médias da distribuição ortogonal a X. Para espaços com curvaturas (seccionais) constantes, esta estimativa foi mais precisamente assim enunciada:

Teorema 1.17 *Seja X um campo de vetores unitário sobre M^{2k+1}, a qual tem curvatura seccional constante c. Se $k \geqslant 1$,*

$$vol(X) \geqslant \sum_{i=0}^{k} \frac{\binom{k}{i}^2 \|c\|^i}{\binom{2k}{2i}} vol(M). \tag{1.1}$$

Além disso, quando $k > 1$ a igualdade é verificada se e somente se X tem fluxo geodésico e a distribuição ortogonal a X é integrável com folhas umbílicas.

Em S^{2k+1}, os únicos campos de vetores que atingem este limitante inferior são campos com duas singularidades antipodais. O campo de vetores radial V_R, que é tangente a todas as geodésicas minimizantes de um dado ponto fixado, tem exatamente o volume dado pela expressão do lado direito da equação 1.1. Quando $c = 1$,

$$vol(V_R) \approx \sqrt{\pi k} vol(S^{2k+1}),$$

que é muito menor que o volume do campo de Hopf, exceto para S^3, onde ambos os campos têm o mesmo volume.

Finalmente, mencionamos o artigo de F. Brito e P. Chacón, [BC], onde, considerando apenas dimensão 5, é provado o seguinte teorema, que relaciona a geometria com a topologia de campos de vetores arbitrários, de comprimento constante. Na realidade, tal teorema é válido para variedades fechadas de qualquer dimensão ímpar, como conjecturado em [BC]. Uma demonstração deste fato será apresentado no terceiro capítulo.

Eis, pois, o teorema.

Teorema 1.18 *Considere M uma variedade riemanniana compacta de dimensão 5, $r > 0$ e X um campo de vetores sobre M, tal que $\|X\| = \frac{1}{\sqrt{r}}$. Suponha também que θ_5 denota a forma dual unitária de X e $\mathcal{R}^2 = \sum_{1 \leqslant i,j,k,l \leqslant 4} R_{ijkl}^2$, onde R_{ijkl} são as componentes do tensor curvatura de M. Se $r \geqslant \frac{2\sqrt{16}}{12}\mathcal{R}$, então*

$$vol(X) \geqslant \frac{(2\pi)^2}{3r^2} \left\| \int_M \chi(X^\perp) \wedge \theta_5 \right\|. \tag{1.2}$$

$\chi(X^\perp)$ denota a classe de Euler do subfibrado ortogonal a X.

Capítulo 2

Folheações umbílicas com fibrados normais integráveis

2.1 Introdução

Neste capítulo damos uma caracterização de fluxos normais a um certo tipo de folheação e também de folheações sobre variedades riemannianas completas satisfazendo algumas condições de positividade para o tensor curvatura das folhas ou para a curvatura do espaço ambiente. Em todo este capítulo, o termo "folheações umbílicas" designará as folheações cujas folhas são subvariedades totalmente umbílicas da variedade folheada. Os resultados aqui expostos estendem parcialmente aqueles obtidos por [BW] que trata do caso em que $\mathfrak{F}^{\perp}$ é totalmente geodésica.

2.2 Notações e preliminares

Suporemos conhecidas as principais definições e propriedades da teoria das folheações, tais como a definição de folheações transversais de uma dada variedade riemanniana, a de vetor curvatura média de uma folheação, etc.

2.2.1 Subvariedades mínimas e subvariedades umbílicas

Dada uma imersão isométrica $f : M^n \to \overline{M}^{n+p}$, definimos o *vetor curvatura média* $H(x)$ de f em $x \in M$ como

$$H(x) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha(X_i, X_j),$$

onde α é a segunda forma fundamental de f, e $X_1, \ldots, X_n \in T_xM$ é um referencial ortonormal. Observando que $H(x) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{p} (\text{traço} A_{\xi_j})\xi_j$ para qualquer conjunto de vetores ortonormais $\xi_1, \ldots, \xi_p \in T_xM^{\perp}$, conclui-se facilmente que $H(x)$ não depende do referencial tangente.

Dizemos que a imersão isométrica f é *mínima* em $x \in M$, quando $H(x) = 0$ e que f é uma *imersão mínima* quando ela é mínima em todos os pontos de M. Um subcaso de especial interesse ocorre quando a segunda forma fundamental se anula em $x \in M$. Neste caso, dizemos que f é totalmente geodésica em x. Quando f é totalmente geodésica em todo pondo de M, diz-se que f é uma *imersão totalmente geodésica.* Neste caso, é interessante o fato de que as geodésicas de M são as geodésicas de $\overline{M}$ que estão inteiramente contidas em M.

Uma imersão isométrica $f : M^n \to \overline{M}^{n+p}$ é dita ser *umbílica* em $x \in M$, quando $A_\xi = \lambda_\xi I$ para qualquer $\xi \in T_xM^{\perp}$, onde $\lambda_\xi \in \mathbb{R}$ e I é o endomorfismo identidade de $T_xM^{\perp}$. f é uma *imersão umbílica* quando ela é umbílica em todo ponto de M. As seguintes afirmações são equivalentes:

(i) f é umbílica em $x \in M$.

(ii) $A_\xi = \langle H(x), \xi \rangle I$, $\xi \in T_x M^\perp$.

(iii) $\alpha(X, Y) = \langle X, Y \rangle H(x)$, $X, Y \in T_x M$.

2.2.2 O teorema de Frobenius

Antes de enunciar o teorema, fixemos algumas notações. Um campo de k-planos numa variedade M é uma aplicação P que associa a cada ponto $q \in M$, um subespaço vetorial de dimensão k de $T_q M$. Dado um campo de k-planos P em M, dizemos que o campo de vetores X é tangente a P se $X(q) \in P(q)$ para todo q no domínio de X. Um campo de k-planos P de classe $C^r (r \geqslant 1)$, é chamado *involutivo* se, dados X e Y campos de classe C^1 tangentes a P, então $[X, Y]$ é tangente a P. Dizemos que P é *completamente integrável* se existe uma folheação $\mathfrak{F}$ de dimensão k e classe C^r tal que $T\mathfrak{F} = P$, onde $T\mathfrak{F}$ é o campo de planos tangentes a $\mathfrak{F}$. Um fato elementar, mas, relevante, é dado pela seguinte proposição.

Proposição 2.1 *Toda folheação $\mathfrak{F}$ de dimensão k e classe C^r, $r \geqslant 1$, em M, define um campo de k-planos de classe C^{r-1} em M, o qual será denotado por $T\mathfrak{F}$.*

Em particular, se M não admite campos contínuos de k-planos, então M não possui folheação de dimensão k. Por exemplo, a esfera S^5 não possui campos de 2-planos contínuos (veja [S], pp 142); Logo, não existem folheações

de dimensão 2 de S^5. Uma pergunta natural é a seguinte. Dado um campo de k-planos P em M, sob que condições existe uma folheação $\mathfrak{F}$ de dimensão k tal que, para todo $q \in M$, $T_q\mathfrak{F} = P(q)$? Esta pergunta é respondida pelo teorema de Frobenius, o qual é enunciado, sem demonstração, a seguir.

Teorema 2.1 *Seja P um campo de k-planos de classe $C^r (r \geqslant 1)$ definido em M. Então P é completamente integrável se e somente se é involutivo. Além disso, se alguma destas condições se verificar, a folheação tangente a P é única.*

Observação 2 *Como consequência, as matrizes da segunda forma fundamental associada a P, para cada direção normal, são simétricas se, e somente se, P for completamente integrável.*

2.3 Motivação

No capítulo anterior salientamos o fato, observado em [GWY], de que folheações de esferas de dimensões superiores a três, por grandes esferas, são tão abundantes que o problema de classificação de tais folheações, ainda em nível topológico, permanece em aberto. Um problema teoricamente mais trabalhável seria o de classificar as folheações compactas com fibrado normal integrável das esferas S^{2k+1}. Um primeiro caso a ser considerado, por exemplo, seria aquele em que as folhas são difeomorfas a S^l, $l < 2k$. Para dar uma idéia desse tipo de problema, voltemos ao caso tridimensional ($k = 1$).

O seguinte teorema, enunciado sem demonstração, é devido a Novikov [No], e é considerado um dos mais profundos e belos da teoria das folheações.

Teorema 2.2 *Toda folheação de classe C^2 e codimensão um de uma variedade compacta de dimensão três, com grupo fundamental finito, possui uma folha compacta.*

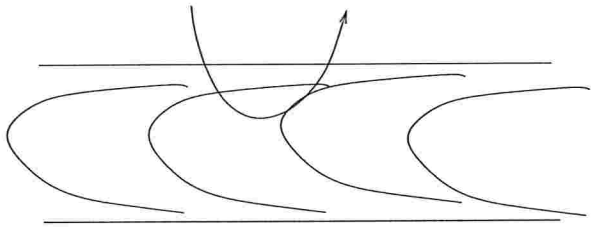
Em particular, toda folheação de classe C^2 e codimensão um da esfera S^3 possui uma folha compacta homeomorfa a T^2.

De posse do teorema de Novikov, estamos em condições de dar uma demonstração simples de uma interessante consequência do teorema (1.1).

Corolário 2.3 *(ao teorema de Sullivan) Seja M^3 uma variedade riemanniana fechada de dimensão 3 com grupo fundamental finito, e considere, além disso, que $\mathfrak{F}$ seja uma folheação de codimensão um de M^3. Então não existe métrica em M^3 que torne $\mathfrak{F}$ uma folheação g-mínima.*

Demonstração:

Devido ao Teorema de Novikov, $\mathfrak{F}$ possui uma componente de Reeb, ou seja, $\mathfrak{F}$ possui uma folha tórica T_2, bordo de $D_2 \times S^1 \subset M^3$, folheado por uma folheação de Reeb.



Considere $\varphi(t) = \vec{v}\ (t) \cdot \gamma'(t)$, onde $\vec{v} \perp \mathfrak{F}$ e γ' é o vetor tangente da curva fechada γ transversal a $\mathfrak{F}$. Pelo Teorema do Valor Intermediário, existe um ponto de tangência de γ com $\mathfrak{F}$. ■

Em particular,

Corolário 2.4 *Seja $\mathfrak{F}$ uma folheação de codimensão 1 na esfera topológica tridimensional S^3. Não existe em S^3 métrica nem estrutura diferenciável tais que $\mathfrak{F}$ seja g-mínima.*

Popularmente, diz-se que S^3 não comporta métricas para as quais existam folheações por superfícies mínimas.

Equivalentemente, o resultado acima afirma que em S^3 não existem folheações por curvas fechadas (em particular, círculos) com complementar integrável. Uma questão interessante que permanece em aberto é a seguinte: "Existem folheações de dimensão 1 de S^5 por curvas fechadas e com complementar integrável"? O que se sabe por enquanto, é que o argumento acima, de fazer uso do teorema de Novikov, não faz sentido, uma vez que tal teorema não é verificado para quaisquer folheações de codimensão 1 e de classe C^1 em variedades fechadas, C^∞ e de dimensões superiores a três, como foi mostrado por P. Schweitzer em [Sch]. Mais precisamente, ele mostrou o seguinte teorema.

Teorema 2.5 *Seja M uma variedade fechada suave (C^∞) de dimensão $n \geqslant 4$, com uma folheação C^∞ de codimensão 1, F_0. Então M tem uma folheação de codimensão um, F_1, sem folhas compactas, localmente definida por uma 1-forma diferencial de classe C^1, tal que todas as folhas são subvariedades de classe C^∞ de M. Além disso, F_1 pode ser escolhida C^1-concordante a F_0 (Γ_1^1-estruturas de Haefliger correspondentes são homotópicas) e tal que seus campos de planos tangentes TF_0 e TF_1 sejam homotópicos como subfibrados do fibrado tangente TM.*

Em vista do teorema de Thurston, sobre a existência de folheações de codimensão um ([Th]), tem-se o seguinte corolário.

Corolário 2.6 *Qualquer variedade conexa, fechada e suave de dimensão $n \geqslant 4$, com característica de Euler nula, tem uma folheação de codimensão 1, sem folhas compactas, localmene definida por uma 1-forma diferencial C^1 com todas as folhas suaves. Uma tal folheação existe em qualquer classe de homotopia de campos de planos tangentes e quaisquer Γ_1^1-estruturas de Haefliger.*

Observação 3 *: Schweitzer alerta para o fato de que sua construção é de classe C^1 mas não pode ser de classe C^2.*

Em tais variedades, para o caso de codimensão maior que 2 existem construções locais de folheações de classe C^r, $0 \leqslant r \leqslant \infty$, sem nenhuma folha compacta (veja [Sch2]).

2.4 Resultados principais

Teorema 2.7 *Considere $\mathfrak{F}$ e $\mathfrak{F}^{\perp}$ duas folheações ortogonais (transversais) de dimensões complementares sobre uma variedade riemanniana com curvatura seccional constante c, $\mathfrak{F}^{\perp}$ umbílica. Se $c \geqslant 0$ e existe uma folha de $\mathfrak{F}$,compacta, que contenha o conjunto $A = \{x \in M/\ x$ é ponto crítico de $\lambda\}$, então $\mathfrak{F}$ é totalmente geodésica e, consequentemente, M é localmente um produto riemanniano de folhas de $\mathfrak{F}$ por folhas de $\mathfrak{F}^{\perp}$.*

Teorema 2.8 *Sejam $\mathfrak{F}$ e $\mathfrak{F}^{\perp}$ duas folheações ortogonais (transversais) de dimensões complementares sobre uma variedade riemanniana completa M. Se as seguintes condições são verificadas:*

1. *$\mathfrak{F}^{\perp}$ é totalmente umbílica e $\mathfrak{F}$ é mínima;*

2. *As matrizes (K_{ij}^{α}) têm traço não-negativo para todo α, as matrizes sendo definidas, para $1 \leqslant i, j \leqslant n$, por*

   $K_{ij}^{\alpha} = R(e_{\alpha}, e_i, e_i, e_{\alpha})$, $R(e_C, e_D, e_B, e_A) :=< R(e_C, e_D)e_B, e_A >:= R_{ABCD}$,

   e_{α} um vetor unitário tangente a $\mathfrak{F}$ e R é o tensor curvatura de M,

então $\mathfrak{F}$ é totalmente geodésica. Consequentemente, M é localmente um produto riemanniano de folhas de $\mathfrak{F}$ por folhas de $\mathfrak{F}^{\perp}$.

Antes de procedermos com as demonstrações dos teoremas, estabeleceremos algumas notações e demonstraremos uma equação, em forma de lema, de importância fundamental em nossos argumentos.

Seja $\mathfrak{F}$ uma folheação orientada e transversalmente orientada de codimensão p sobre uma variedade riemanniana M^{n+p}. Escolhemos um campo de referenciais ortonormais adaptados a $\mathfrak{F}$, $\{e_1, e_2, \ldots, e_n, e_{n+1}, \ldots, e_{n+p}\}$, ou seja, os vetores $e_1, \ldots, e_n$ são tangentes às folhas de $\mathfrak{F}$ (e, consequentemente, os vetores restantes $e_{n+1}, \ldots, e_{n+p}$ são normais às folhas de $\mathfrak{F}$). Considere $\{\theta_1, \ldots, \theta_{n+p}\}$, Ω_{AB}, ω_{AB}, $1 \leqslant A, B \leqslant n+p$ o coreferencial, as formas de curvatura e as formas de conexão associadas a este referencial. Em primeiro lugar estabeleceremos a seguinte convenção sobre os valores dos índices:

$$1 \leqslant A, B, C, \ldots, \leqslant n+p\,;\ 1 \leqslant i, j, k, \ldots, \leqslant n\,;\ n+1 \leqslant \alpha, \beta, \gamma, \ldots, \leqslant n+p\,;$$

Quando tais índices aparecerem em somatório, significa que percorrem todo o seu conjunto de definição.

Lema 2.9 :

$$e_1(\lambda) + e_{n+1} < h, e_{n+1} > -S - \lambda^2 = \sum_i R_{in+1n+1i} \tag{2.1}$$

onde λ é uma aplicação $\lambda : T\mathfrak{F} \to \mathbb{R}$ tal que $A_{e_i} = \lambda(e_i)Id$, $A_{e_i} : T\mathfrak{F}^{\perp} \to T\mathfrak{F}^{\perp}$ é o operador de Weingarten de $\mathfrak{F}^{\perp}$, Id o endomorfismo identidade, R o tensor curvatura de M, S e h o quadrado da norma da segunda forma fundamental e o vetor curvatura média de $\mathfrak{F}$, respectivamente.

2.4.1 Demonstração do lema 2.9

As equações de estrutura são dadas por

$$d\theta_A = -\sum_B \omega_{AB} \wedge \omega_B, \qquad d\omega_{AB} = -\sum_C \omega_{AC} \wedge \omega_{CB} + \Omega_{AB}, \tag{2.2}$$

$$\omega_{AB} = \sum_C \Gamma^C_{AB}\theta_C, \quad \Omega_{AB} = \frac{1}{2}\sum_{C,D} K^A_{BCD}\theta_C \wedge \theta_D, \quad K^A_{BCD} = R_{ABCD};$$

Pela segunda equação de (2.2), temos, por um lado, que

$$d\omega_{i\alpha}(e_M, e_N) = \sum_A \left\{\Gamma^N_{iA}\Gamma^M_{A\alpha} - \Gamma^M_{iA}\Gamma^N_{A\alpha}\right\} + R_{i\alpha MN} \tag{2.3}$$

Por outro lado, pela primeira equação de (2.2),

$$\begin{aligned} d\omega_{i\alpha} &= \sum_A \left\{d\Gamma^A_{i\alpha} \wedge \theta_A + \Gamma^A_{i\alpha} d\theta_A\right\} \\ &= \sum_A \left\{\sum_B d\Gamma^A_{i\alpha}(e_B)\theta_B \wedge \theta_A + \sum_{B,C} \Gamma^A_{i\alpha}\Gamma^C_{AB}\theta_B \wedge \theta_C\right\} \\ &= \sum_{B,C} d\Gamma^C_{i\alpha}(e_B)\theta_B \wedge \theta_C + \sum_{A,B,C} \Gamma^A_{i\alpha}\Gamma^C_{AB}\theta_B \wedge \theta_C \\ &= \sum_{B,C} \left\{\left(\Gamma^C_{i\alpha}\right)_B + \sum_A \Gamma^A_{i\alpha}\Gamma^C_{AB}\right\}\theta_B\theta_C\,, \quad \left(\Gamma^C_{AB}\right)_D = d\Gamma^C_{AB}(e_D)\,; \end{aligned}$$

Ou seja,

$$d\omega_{i\alpha}(e_M, e_N) = \left(\Gamma^N_{i\alpha}\right)_M - \left(\Gamma^M_{i\alpha}\right)_N + \sum_A \Gamma_{i\alpha}\{\Gamma^N_{AM} - \Gamma^M_{AN}\} \tag{2.4}$$

Somando-se em i as equações (2.3) e (2.4) com $M = i$, $N = n+1$ e, em seguida, igualando-as, obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{i,A} \left\{\Gamma^{n+1}_{iA}\Gamma^i_{An+1} - \Gamma^i_{iA}\Gamma^{n+1}_{An+1} + R_{in+1n+1i}\right\} = \sum_i \Bigg\{&\left(\Gamma^{n+1}_{in+1}\right)_i - \left(\Gamma^i_{in+1}\right)_{n+1} + \\ &+ \sum_A \Gamma^A_{in+1}\{\Gamma^{n+1}_{Ai} - \Gamma^i_{An+1}\}\Bigg\} \end{aligned} \tag{2.5}$$

Nos pontos em que h e $h^\perp$ são funções que não se anulam, podemos, sem perda de generalidade, supor que o referencial adaptado seja tal, que $e_1 = \frac{h^\perp}{\|h^\perp\|}$, e $e_{n+1} = \frac{h}{\|h\|}$, onde $h(x)$ e $h^\perp(x)$ são os vetores curvatura média de uma folha de $\mathfrak{F}$ e de $\mathfrak{F}^\perp$ respectivamente, que passam por x. Neste caso, teremos que

$$\Gamma^{n+1}_{in+1} = \langle \nabla_{e_{n+1}} e_i, e_{n+1} \rangle = \langle e_i, h^{\perp} \rangle \Rightarrow \left(\Gamma^{n+1}_{in+1}\right)_i = e_i \langle e_i, h^{\perp} \rangle$$

$$\Rightarrow \sum_i \left(\Gamma^{n+1}_{in+1}\right)_i = e_1(\lambda) \tag{2.6}$$

$$\Gamma^{i}_{in+1} = \langle \nabla_{e_i} e_i, e_{n+1} \rangle = -\langle \nabla_{e_i} e_{n+1}, e_i \rangle \Rightarrow \left(\Gamma^{i}_{in+1}\right)_{n+1} = -e_{n+1} \langle \nabla_{e_i} e_{n+1}, e_i \rangle$$

$$\Rightarrow \sum_i \left(\Gamma^{i}_{in+1}\right)_{n+1} = -n e_{n+1} \langle h, e_{n+1} \rangle \tag{2.7}$$

$$\Gamma^{j}_{in+1} = \langle \nabla_{e_j} e_i, e_{n+1} \rangle = -\langle \nabla_{e_j} e_{n+1}, e_i \rangle = -\langle \nabla_{e_i} e_{n+1}, e_j \rangle = \langle \nabla_{e_i} e_j, e_{n+1} \rangle = \Gamma^{i}_{jn+1}$$

$$\Rightarrow \Gamma^{j}_{in+1} = \Gamma^{i}_{jn+1} = -\langle \nabla_{e_j} e_{n+1}, e_i \rangle \tag{2.8}$$

$$\Gamma^{n+1}_{ji} = \langle \nabla_{e_{n+1}} e_j, e_i \rangle = \langle e_i, h^{\perp} \rangle \langle e_{n+1}, e_i \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \Gamma^{n+1}_{ji} = 0 \tag{2.9}$$

$$\Gamma^{\alpha}_{in+1} = \langle \nabla_{e_\alpha} e_i, e_{n+1} \rangle = -\langle e_i, h^{\perp} \rangle \langle e_\alpha, e_{n+1} \rangle$$

$$\Rightarrow \Gamma^{\alpha}_{in+1} = -\langle e_i, h^{\perp} \rangle \langle e_\alpha, e_{n+1} \rangle \tag{2.10}$$

$$\Gamma^{n+1}_{\alpha i} = \langle \nabla_{e_{n+1}} e_\alpha, e_i \rangle - \langle \nabla_{e_{n+1}} e_i, e_\alpha \rangle$$

$$\Rightarrow \Gamma^{n+1}_{\alpha i} = \langle e_i, h^{\perp} \rangle \langle e_\alpha, e_{n+1} \rangle \tag{2.11}$$

$$\Gamma^{i}_{\alpha n+1} = \langle \nabla_{e_i} e_\alpha, e_{n+1} \rangle = -\langle \nabla_{e_i} e_{n+1}, e_\alpha \rangle$$

$$\Rightarrow \Gamma^{i}_{\alpha n+1} = -\langle \nabla_{e_i} e_{n+1}, e_\alpha \rangle \tag{2.12}$$

por (2.6) a (2.12), o lado direito da equação (2.5) pode ser descrito por $e_1(\lambda) + e_{n+1} < h, e_{n+1} > -S - \lambda^2$ enquanto que o lado esquerdo é igual a $\sum_i R_{in+1n+1i}$.

■

2.4.2 Demonstração do teorema 2.7

Para demonstrar o teorema, observemos primeiramente que (2.1) fica

$$e_1(\|h^{\perp}\|) + e_{n+1} < h, e_{n+1} > -S - \|h^{\perp}\|^2 = c. \tag{2.13}$$

Seja L a folha compacta contida no conjunto A. Isto implica que $e_1(\|h^{\perp}\|) = 0$ ao longo de L e, portanto, (2.13) é equivalente a

$$e_{n+1} < h, e_{n+1} > -S - \|h^{\perp}\|^2 = c. \tag{2.14}$$

Suponha que $\gamma : [0, b[\to L$ seja uma curva integral maximal de h, parametrizada pelo comprimento de arco, tal que $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) \neq 0$.

Parametrizando γ pelo comprimento de arco com parâmetro s, vê-se por (2.14) que $\|h\|$ é crescente ao longo da órbita definida por γ e, portanto, γ tem comprimento infinito e s é definido em $[0, \infty)$. Novamente por (2.14),

$$\|h\|'(s) - S - \|h^{\perp}\|^2 = c \qquad \forall s > 0. \tag{2.15}$$

Por outro lado, a desigualdade $(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i)^2 \leqslant n \sum_{i=1}^{n} \lambda^2$ implica que $S \geqslant \frac{\|h\|^2(s)}{n}$. Essa desigualdade em (2.15) implica que, $\forall s > 0$,

$$\|h\|'(s) \geqslant \frac{\|h\|^2(s)}{n}.$$

Considere agora a função $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(s) = -\frac{1}{\|h\|(s)}.$$

Fixando um número estritamente positivo a e aplicando o Teorema do Valor Médio para a função g no intervalo $[a, s]$, obtemos que

$$-\frac{1}{\|h\|(s)}+\frac{1}{\|h\|(a)}=\frac{\|h\|'(c)}{\|h\|^2(c)}(s-a)$$

onde $c \in]a, s[$. Assim, a seguinte desigualdade é verdadeira para todo $s > a$:

$$-\frac{1}{\|h\|(s)}+\frac{1}{\|h\|(a)} \geqslant \frac{1}{n}(s-a),$$

que é uma contradição, pois, o lado direito da desigualdade fica ilimitado quando $s \longrightarrow \infty$, ao passo que o lado esquerdo é sempre limitado. Consequentemente $h = 0$ ao longo de L, e, portanto, $h^{\perp} \equiv 0$ sobre M, por (2.1).

■

Observação 4 *Nos pontos onde h é nulo não há o que ser provado; Naqueles em que $h^{\perp}$ é anulado o teorema acima segue por [BW].*

Corolário 2.10 *Considere $\mathfrak{F}$ e $\mathfrak{F}^{\perp}$ duas folheações ortogonais de dimensões complementares sobre uma variedade riemanniana compacta com curvatura seccional constante não negativa c, $\mathfrak{F}^{\perp}$ umbílica. então $\mathfrak{F}$ é totalmente geodésica e, consequentemente, M é localmente um produto riemanniano de folhas de $\mathfrak{F}$ por folhas de $\mathfrak{F}^{\perp}$.*

2.4.3 Demonstração do teorema 2.8

Pela equação (3.6) do lema (2.1),

$$e_1(\lambda) - S - \lambda^2 = \sum_i R_{in+1n+1i}. \tag{2.16}$$

Portanto, $e_1(\lambda) \geqslant \lambda^2$. Como antes, Suponha que $\gamma : [0, b[\rightarrow L$ seja uma curva integral maximal de h, parametrizada pelo comprimento de arco, tal que $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) \neq 0$. Parametrizando γ pelo comprimento de arco com parâmetro s, vê-se por (2.16), que $\|h\|$ é crescente ao longo da órbita definida por γ, e, portanto, γ tem comprimento infinito e s é definido em $[0, \infty)$.

(2.16) fica, então, equivalente a

$$\lambda'(s) \geqslant \lambda^2, \qquad \forall s > 0.$$

Daí, $\lambda \equiv 0$, o que implica, novamente por (2.16), que $S \equiv 0$. ■

Corolário 2.11 *Sejam $\mathfrak{F}$ e $\mathfrak{F}^{\perp}$ duas folheações ortogonais de dimensões complementares sobre uma variedade riemanniana completa de curvatura de Ricci não negativa, M. Se $\mathfrak{F}^{\perp}$ é umbílica e $\mathfrak{F}$ é g-mínima, então $\mathfrak{F}$ é totalmente geodésica. Consequentemente, M é localmente um produto riemanniano das folhas de $\mathfrak{F}$ pelas correspondentes folhas de $\mathfrak{F}^{\perp}$.*

Corolário 2.12 *Seja M uma variedade riemanniana completa de curvatura de Ricci não negativa. Se $\mathfrak{F}$ é uma folheação g-mínima de codimensão um sobre M, então $\mathfrak{F}$ é totalmente geodésica e, portanto, M é localmente um produto riemanniano de folhas de $\mathfrak{F}$ pelo seu fluxo normal, $\mathfrak{F}^{\perp}$.*

Capítulo 3

Uma limitação inferior topológica para o volume de campos de vetores

3.1 Introdução

Um campo de vetores X sobre uma variedade riemanniana determina uma subvariedade no fibrado tangente. O volume de X é o volume desta subvariedade munida da métrica de Sasaki induzida. Quando M é compacta, o volume é bem definido e, usualmente, este funcional é estudado para campos de vetores de norma unitária.

Para variedades de dimensão ímpar obtemos um resultado explícito que mostra, de certa maneira, como a topologia de um campo de vetores que tem norma constante influencia seu volume. Aplicamos este resultado para o caso de campo de vetores que definem folheações riemannianas com todas as folhas compactas.

Vale ressaltar que em [BC] tais resultados são apresentados para variedades de dimensão 5.

3.2 Preliminares

3.2.1 A métrica de Sasaki

3.2.1.1 Introdução

Nesta seção iremos descrever a métrica de Sasaki, cuja descrição pode ser encontrada, por exemplo, em [C]. Esta métrica talvez seja mais conhecida no fibrado tangente a uma dada variedade riemanniana, mas, de forma análoga, pode ser definida no campo de q-planos tangentes.

3.2.1.2 A variedade G(q,M)

Seja (M^n, g) uma variedade riemanniana compacta e orientada de dimensão $n = p + q$. Denotamos por ∇ a conexão de Levi-Civita de g. Seja $G(q, M)$ a variedade de Grassmann de q-planos orientados tangentes a M definida por:

$$G(q, M) = \bigcup_{x \in M} G(q, M)$$

onde $G(q, T_xM)$ é a grasmanniana de q-planos orientados no espaço euclidiano T_xM.

Descrevemos um ponto de $G(q, T_xM)$ como um multivetor, ou seja, cada $\xi \in G(q, T_xM)$ é identificado com $v_1 \wedge \ldots \wedge v_q$, onde $\{v_a\}_{a=1}^q$ é uma base ortonormal e orientada do q-plano correspondente. Observamos que $v_1 \wedge \ldots \wedge v_q$ pertence à álgebra exterior de grau q de T_xM, $\Lambda^q(T_xM)$;

Em cada $G(q, T_xM)$ é definido um produto escalar induzido da métrica de $\Lambda^q(T_xM)$, que será denotado, por abuso de notação, g.

Daí, se $\xi = v_1 \wedge \ldots \wedge v_q$, $\eta = w_1 \wedge \ldots \wedge w_q \in \Lambda^q T_x M$, teremos que

$$g(\xi, \eta) = \det\big(g(v_i, w_j)_{1 \leq i,j \leq q}\big)$$

Seja $\pi : G(q, M) \longrightarrow M$ a projeção do fibrado. Para uma carta $\big(U, (z^a)\big)$ de M, seja $\big(\pi^{-1}(U), \varphi = (z^a, \xi^{a_1 \cdots a_q})\big)$ uma carta de $G(q, M)$, onde para $x \in U$ e cada um dos elementos da forma $\xi = \sum_{1 \leq a_1 < \cdots < a_q \leq n} \xi^{a_1 \ldots a_q} \frac{\partial}{\partial z^{a_1}}(q) \wedge \ldots \wedge \frac{\partial}{\partial z^{a_q}}(x)$, a aplicação coordenada φ seja dada por

$$\varphi(x, \xi) = \big(z^1(x), \ldots z^n(x), \xi^{1,\ldots,q}, \ldots \xi^{p+1,\ldots,n}\big)$$

Quando não houver perigo de confusão, omitiremos o ponto base $x \in M$ e diremos que ξ pertence a $G(q, M)$, quando, de forma mais precisa, deveríamos mencionar que (x, ξ) pertence a $G(q, M)$.

3.2.1.3 O fibrado tangente $\tilde{\pi} : TG(q, M) \longrightarrow G(q, M)$

Denotamos por $\tilde{\pi} : TG(q, M) \longrightarrow G(q, M)$ a projeção canônica do fibrado tangente a $G(q, M)$ e seja $\big(U, (z^a)\big)$ uma parametrização de M em x. Para um ponto $(x, \xi) \in G(q, M)$ e η um vetor tangente a $G(q, M)$ em (x, ξ), temos:

$$\eta = \sum_{a=1}^{n} X^a \frac{\partial}{\partial z^a}(\xi) + \sum_{1 \leq a_1 < \ldots < a_q \leq n} \eta^{a_1 \cdots a_q} \frac{\partial}{\partial \xi^{a_1 \cdots a_q}}(\xi) \in T_\xi G(q, M), \tag{3.1}$$

onde a carta $\Big(\tilde{U} = \tilde{\pi}^{-1}\big(\tilde{\pi}(U)\big), \psi\Big)$ é dada por

$$\psi(\xi, \eta) = \big(z^1(x), \ldots, z^n(x), \xi^{1,\cdots,q}, \ldots, \xi^{p+1,\cdots,n}, X^1, \ldots, X^n, \eta^{1,\cdots,q}, \ldots, \eta^{p+1,\cdots,n}\big)$$

Define-se o subespaço vertical de $T_\xi G(q, M)$ como $\mathfrak{v}_\xi = ker(d\tilde{\pi})_\xi$. Onde $\mathfrak{v}_\xi$ é o subespaço dos vetores tangentes a ξ que provêm de curvas $\xi(t)$ em $G(q, T_x M)$,

ou seja, de curvas que, para quaisquer valores de t, $\tilde{\pi}(\xi(t)) = \tilde{\pi}(\xi) = x$. Nas coordenadas locais descritas acima, temos que

$$\mathfrak{v}_\xi = T_\xi G(q, T_x M) = \{(z^a, \xi^{a_1 \cdots a_q}, 0, \eta^{a_1, \cdots, a_q})\}.$$

Uma maneira intuitivamente mais natural de se definir um complementar algébrico de $\mathfrak{v}_\xi$ em $T_\xi G(q, M)$ é fazendo uso da conexão de Levi-Civita de M, da maneira seguinte:

Para um vetor η tangente a $(x, \xi) \in G(q, M)$ como em (3.1), considere $\xi(t) = \sum_{1 \leq a_1 < \ldots < a_q \leq n} \xi^{a_1, \cdots, a_q}(t) \frac{\partial}{\partial z^{a_1}}(t) \wedge \ldots \wedge \frac{\partial}{\partial z^{a_q}}(t)$ o transporte paralelo de ξ ao longo da curva integral de $X = \sum_a X^a \frac{\partial}{\partial z^a}$ que passa por x. A condição $\nabla_X \xi(t) \mid_{t=0}$ implica que

$$\sum_{1 \leq a_1 < \ldots < a_q \leq n} (\xi^{a_1 \cdots a_q})\prime(0) \frac{\partial}{\partial z^{a_1}} \wedge \ldots \wedge \frac{\partial}{\partial z^{a_q}} + \xi^{a_1 \cdots a_q} \nabla_X \Big(\frac{\partial}{\partial z^{a_1}} \wedge \ldots \wedge \frac{\partial}{\partial z^{a_q}} \Big) = 0.$$

Dizemos que η é o levantamento horizontal de X em ξ se as coordenadas $\eta^{a_1 \cdots a_q}$ de (3.1) provêm da variação descrita acima, isto é, se $\eta^{a_1 \cdots a_q} = \big(\xi^{a_1 \cdots a_q}\big)\prime\,(t) \mid_{t=0}$.

O subespaço horizontal $\mathfrak{h}_\xi$ de $T_\xi G(q, M)$ é o espaço de todos os levantamentos horizontais dado por

$$\mathfrak{h}_\xi = \Big\{ (z^a, \xi^{a_1, \cdots, a_q}, X^a \eta^{a_1 \cdots, a_q}) \in T_\xi G(q, M) / \\ \sum_{1 \leq a_1 < \ldots < a_q \leq n} \eta^{a_1, \cdots, a_q} \frac{\partial}{\partial z^{a_1}} \wedge \ldots \wedge \frac{\partial}{\partial z^{a_q}} = -\xi^{a_1, \cdots, a_q} \nabla_X \Big(\frac{\partial}{\partial z^{a_1}} \wedge \ldots \wedge \frac{\partial}{\partial z^{a_q}} \Big) \Big\}$$

é imediato verificar que $\mathfrak{h}_\xi \cap \mathfrak{v}_\xi = \{0\}$ e que $T_\xi G(q, M) = \mathfrak{h}_\xi \oplus \mathfrak{v}_\xi$. Um vetor $\eta \in T_\xi G(q, M)$ se decompõe com respeito a esta soma direta do seguinte modo:

$$\eta = \big(z^a, \xi^{a_1, \cdots, a_q}, X^a, \eta^{a_1, \cdots, a_q}\big) = \eta_{\mathfrak{h}} + \eta_{\mathfrak{v}}$$

$$\eta_{\mathfrak{h}} = \sum_{a=1}^{n} X^a \frac{\partial}{\partial z^a} - \sum_{1\leq a_1<\ldots<a_q\leq n} \xi^{a_1,\cdots,a_q} \nabla_X \left(\frac{\partial}{\partial z^{a_1}} \wedge \ldots \wedge \frac{\partial}{\partial z^{a_q}}\right)$$

$$\eta_{\mathfrak{v}} = \sum_{1\leq a_1<\ldots<a_q\leq n} \eta^{a_1\cdots a_q} \frac{\partial}{\partial z^{a_1}} \wedge \ldots \wedge \frac{\partial}{\partial z^{a_q}} + \xi^{a_1\cdots a_q} \nabla_X \left(\frac{\partial}{\partial z^{a_1}} \wedge \ldots \wedge \frac{\partial}{\partial z^{a_q}}\right)$$

Definição 3.1 *Define-se o conector $\mathcal{K}$ da conexão de Levi-Civita ∇ de M, $\mathcal{K} : TG(q, M) \longrightarrow G(q, M)$, como*

$$\mathcal{K}(\xi, \eta) = \sum_{1\leq a_1<\ldots<a_q\leq n} \eta^{a_1\cdots a_q} \frac{\partial}{\partial z^{a_1}} \wedge \ldots \wedge \frac{\partial}{\partial z^{a_q}} + \xi^{a_1\cdots a_q} \nabla_X \left(\frac{\partial}{\partial z^{a_1}} \wedge \ldots \wedge \frac{\partial}{\partial z^{a_q}}\right)$$

Observação 5 *Como foi mencionado antes, o subespaço vertical $\mathfrak{V}$ é o espaço tangente à subvariedade $G(q, T_xM)$; Como tal subvariedade é um espaço vetorial, podemos identificar seu espaço tangente com ele mesmo, ou seja, $\mathfrak{v}_\xi = T_\xi G(q, M) = G(q, T_xM)$. A aplicação $\mathcal{K}$ faz esta identificação natural da componente vertical de η como ponto de $G(q, M)$.*

Temos as seguintes propriedades de $\mathcal{K}$:

Proposição 3.1 *: O conector $\mathcal{K} : TG(q, M) \longrightarrow G(q, M)$ verifica as seguintes propriedades:*

1. $\pi \circ \mathcal{K} = \pi \circ \pi$ *e* $\pi \circ \mathcal{K} = \pi \circ d\pi$

2. *Para $v \in T_xM$ e uma seção $\xi : M \longrightarrow G(q, M)$, temos que $\mathcal{K}(d\xi(v)) = \nabla_v \xi$;*

Definição 3.2 ***Definição da Métrica de Sazaki:*** *Uma vez que, como já vimos,* $T_\xi G(q, M) = \mathfrak{h}_\xi \oplus \mathfrak{v}_\xi$, *faremos uso de* π *e* $\mathcal{K}$ *para tomar a parte horizontal e vertical, respectivamente, e medir, assim, vetores em* $T_\xi G(q, M)$. *Para* $\eta_1, \eta_2 \in T_\xi G(q, M)$ *definimos*

$$g_S(\eta_1, \eta_2) = g(d\pi(\eta_1), d\pi(\eta_2)) + g(\mathcal{K}(\eta_1), \mathcal{K}(\eta_2))$$

g_S define, portanto, uma métrica riemanniana sobre $G(q, M)$ e é chamada de métrica de Sazaki. Observe que g_S converte a projeção $\pi : G(q, M) \to M$ em uma imersão riemanniana, onde o espaço vertical $\mathfrak{v}$ e o horizontal $\mathfrak{h}$ são mutuamente ortogonais.

3.2.2 Volume de campos de vetores

3.2.2.1 Introdução

Nesta seção o volume de um campo de vetores unitário X é apresentado. Para facilitar os cálculos, primeiramente é dada a definição do volume de uma transformação linear, que é, fazendo um abuso de linguagem, o volume da matriz A associada a esta transformação em relação a uma dada base ortonormal. O motivo para essas considerações é a identificação que será feita de A com a matriz da segunda forma fundamental de $X^\perp$.

3.2.2.2 O cálculo de $vol(X)$

Definição 3.3 *O volume de um campo de vetores unitário X, $vol(X)$, numa variedade (M^n, g) compacta e orientada é definido como o n-volume da subvariedade $X : M \to T^1M$ onde em T^1M, espaço tangente unitário, consideramos a métrica de Sazaki g_S.*

Por definição,

$$vol(X) = \int_{X(M)} \nu_{X(M)}(g_S),$$

onde $\nu_{X(M)}(g_S)$ é o pull-back na subvariedade $X(M)$ da forma volume de T^1M com a métrica de Sazaki g_S. Para isto temos que considerar outra métrica em M, (X^*g_S), tal que

$$\int_{X(M)} \nu_{X(M)}(g_S) = \int_M \nu_M(X^*g_S).$$

A métrica X^*g_S e a g estão relacionadas. Considerando a definição de métria de Sazaki dada na seção anterior, para $Y, Z \in TM$,

$$\begin{aligned}
\big(X^*g_S\big)(Y,Z) &= g_S\big(dX(Y), dX(Z)\big) = \\
&= g\Big(\big(d\pi(dX(Y))\big), \big(d\pi(dX(Z))\big)\Big) + g\Big(\mathcal{K}\big(dX(Y)\big), \mathcal{K}\big(dX(Y)\big)\Big) \\
&= g(Y,Z) + g(\nabla_Y X, \nabla_Z X),
\end{aligned}$$

onde π é a projeção do fibrado tangente $\pi : TM \to M$ e $\mathcal{K} : TTM \to TM$ é o conector de ∇. Assim, a mudança de métrica é dada por

$$\nu_M(X^* g_S) = \sqrt{\det(A)}\nu_M(g)$$

onde para um referencial ortonormal de M^n, $\{e_a\}_{a=1}^n$, A é a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 + g(\nabla_{e_1}X, \nabla_{e_1}X) & g(\nabla_{e_1}X, \nabla_{e_2}X) & \cdots & g(\nabla_{e_1}X, \nabla_{e_n}X) \\ g(\nabla_{e_2}X, \nabla_{e_1}X) & 1 + g(\nabla_{e_2}X, \nabla_{e_2}X) & \cdots & g(\nabla_{e_2}X, \nabla_{e_n}X) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g(\nabla_{e_n}X, \nabla_{e_1}X) & \cdots & & 1 + g(\nabla_{e_n}X, \nabla_{e_n}X) \end{pmatrix}.$$

É imediato verificar que

$$\det(A) =$$

$$1+\sum_{a=1}^{n} ||\nabla_{e_a}X||^2+\sum_{a<b} ||\nabla_{e_a}X\wedge\nabla_{e_b}X||^2+\ldots+\sum_{a_1<\cdots<a_{n-1}} ||\nabla_{e_{a_1}}X\wedge\ldots\nabla_{e_{a_{n-1}}}X||^2. \tag{3.2}$$

Observação 6 : *Note que o n-vetor $\nabla_{e_1}X \wedge \ldots \nabla_{e_n}X$ é nulo pois X é unitário: considerando uma base ortonormal tal que $e_n = X$, pois a definição de um tal n-vetor é independente da base ortonormal escolhida, tem-se que*

$$g(\nabla_{e_1}X \wedge \ldots \nabla_{e_n}X,\, e_1 \wedge \ldots \wedge e_{n-1} \wedge X) = \det(g(\nabla_{e_a}X, e_b)),$$

donde a última coluna da matriz $g(\nabla_{e_a}X, e_b)$, $g(\nabla_{e_a}X, X)$, é nula $\forall a$.

Portanto, pela definição (3.3) segue a

Proposição 3.2 *Seja X um campo e vetores unitário em (M^n, g) compacta e orientada. O volume de X é dado pela expressão*

$$\begin{aligned} vol(X) &= \int_M \sqrt{\det(Id + (\nabla X)^*(\nabla X))}\nu = \\ &= \int_M (1 + \sum_{a=1}^{n} ||\nabla_{e_a} X||^2 + \sum_{a<b} ||\nabla_{e_a} X \wedge \nabla_{e_b} X||^2 + \cdots + \\ &\qquad + \cdots + \sum_{a_1<\cdots<a_{n-1}} ||\nabla_{e_{a_1}} X \wedge \ldots \nabla_{e_{a_{n-1}}} X||^2)^{\frac{1}{2}} \nu \quad (3.3) \end{aligned}$$

Pela proposição acima fica evidente o fato de que

$$vol(X) \geq vol(M)$$

E que a igualdade é satisfeita se e somente se X for paralelo.

Definição 3.4 *Seja V^n um espaço vetorial o volume de uma aplicação linear $T : V^n \to V^n$ é, por definição, o volume de seu gráfico, ou seja, se $\varphi : V \to V \times V$ é dada por $\varphi(v) = (v, Tv)$, então*

$$vol(T) = vol(\varphi(V))$$

onde, para o cálculo do volume de $\varphi(V)$ se procede da seguinte maneira. Considere a (única) aplicação

$$\begin{array}{rcl} \varphi_* : V \times \overset{\text{n vezes}}{\cdots} \times V & \longrightarrow & \Lambda^n(V \times V) \\ (v_1, \ldots, v_n) & \mapsto & \varphi(v_1) \wedge \ldots \wedge \varphi(v_n) \end{array}$$

que é n-linear e anti-simétrica. Fazendo uso de um leve abuso de linguagem, devido à correspondência biunívoca $(v_1, \ldots, v_n) \mapsto v_1 \wedge \ldots \wedge v_n$

denotaremos ainda por $\varphi_* : \Lambda^n V \to \Lambda^n(V \times V)$ a aplicação tal que

$$\varphi_*(v_1 \wedge \ldots \wedge v_n) = \varphi(v_1) \wedge \ldots \wedge \varphi(v_n).$$

Por definição, para uma base $\{e_i\}_{i=1}^n$ de V,

$$vol(T) = vol(\varphi(V)) = ||\varphi_*(e_1 \wedge \ldots \wedge e_n)||$$

cuja última expressão é independente da base ortonormal para calculá-lo. Calculemos o valor de $vol(T)$, supondo que a matriz de T na base $\{e_i\}_{i=1}^n$ de V seja $A = (a_{ij})$. Abusando da notação e denotando a base de $V \times V$ por $\{e_i = (e_i, 0), e_{n+1} = (0, e_i)\}_{i=1}^n$, teremos que o n-vetor $\varphi(e_1) \wedge \ldots \wedge \varphi(e_n)$ é dado por:

$$\varphi(e_1) \wedge \ldots \wedge \varphi(e_n) = \left(e_1 + \sum_{i=1}^n a_{i1} e_{n+i}\right) \wedge \ldots \wedge \left(e_n + \sum_{i=1}^n a_{in} e_{n+i}\right).$$

Por outro lado,nos interessa também a expressão do n-vetor $\varphi(e_1) \wedge \ldots \wedge \varphi(e_n)$ na base usual de $\Lambda^n(V \times V)$, $\{e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_n} / 1 \leq i_1 < \ldots < i_n \leq 2n\}$, a qual é

$$\begin{aligned}
\varphi(e_1)\wedge\ldots\wedge\varphi(e_n) &= e_1\wedge\ldots\wedge e_n + \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij} e_1\wedge\ldots\wedge e_{j-1}\wedge e_{n+i}\wedge e_{j+1}\wedge\ldots\wedge e_n + \\
&+ \sum_{\substack{i_1<i_2\\ j_1<j_2}} (a_{i_1j_1}a_{i_2j_2} - a_{i_1j_2}a_{i_2j_1}) e_1\wedge\ldots\wedge e_{j_1-1}\wedge e_{n+i_1}\wedge e_{j_1+1}\wedge\ldots\wedge e_{j_2-1}\wedge e_{n+i_2}\wedge\ldots\wedge e_n + \ldots \\
&+ \ldots + \sum_{\substack{i_1<\cdots<i_{n-1}\\ j_1<\cdots<j_{n-1}}} (-1)^{j_n-1} \det A^{j_1\cdots j_{n-1}}_{i_1\cdots i_{n-1}} e_{j_n}\wedge e_{n+i_1}\wedge\ldots\wedge e_{n+i_{n-1}} + \det(A) e_{n+1}\wedge\ldots\wedge e_{2n}
\end{aligned} \tag{3.4}$$

onde no penúltimo somatório j_n é o único elemento de $\{1, \ldots, n\} \backslash \{j_1, \ldots, j_{n-1}\}$ e $A^{j_1\cdots j_k}_{i_1\cdots i_k}$ é a submatriz de A formada pelas linhas $(i_1, \ldots, i_k)$ e colunas

$(j_1, \ldots, j_k)$. Então, como coeficientes de $\varphi(e_1) \wedge \ldots \wedge \varphi(e_n)$ aparecem todos os determinantes menores de A, além do 1 que acompanha $e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$. Isto significa que para calcular $||\varphi(e_1) \wedge \ldots \wedge \varphi(e_n)||^2$ é suficiente calcular o quadrado de cada um de seus coeficientes. Mais precisamente, temos a seguinte

Proposição 3.3 *Seja T uma aplicação linear e $A = (a_{ij})$ a matriz de T associada a alguma base ortonormal. Então,*

$$vol(T) = \Bigg(1 + \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij}^2 + \sum_{\substack{i_1 < i_2 \\ j_1 < j_2}} \left(\det A_{i_1 i_2}^{j_1 j_2}\right)^2 + \ldots + \\ + \ldots + \sum_{\substack{i_1 < \cdots < i_{n-1} \\ j_1 < \cdots < j_{n-1}}} \left(\det A_{i_1 \cdots i_{n-1}}^{j_1 \cdots j_{n-1}}\right)^2 + (\det A)^2\Bigg)^{\frac{1}{2}} \quad (3.5)$$

De agora em diante nos referiremos ao lado direito da equação (3.5) como o volume da matriz A.

3.3 Resultados principais

Nosso objetivo principal neste capítulo é demonstrar o seguinte teorema

Teorema 3.5 *Seja M uma variedade riemanniana compacta de dimensão $2k+1$ e considere $r > 0$ e X um campo de vetores sobre M tal que $\|X\| = \frac{1}{\sqrt{r}}$. Suponha que θ_{2k+1} denota a forma dual unitária de X e $\mathcal{R}^2 = \sum_{1 \leqslant i,j,k,l \leqslant 2k} R_{ijkl}^2$, onde R_{ijkl} são as componentes do tensor curvatura de M. Se $r \geqslant \frac{1}{2\sqrt{k(2k-1)}}\mathcal{R}$, então*

$$vol(X) \geqslant \frac{(4\pi)^k k!}{r^k (2k)!} \left\| \int_M \chi(X^\perp) \wedge \theta_{2k+1} \right\|. \quad (3.6)$$

$\chi(X^\perp)$ é a classe de Euler do subfibrado ortogonal a X.

3.3.1 notações

Seja (M^n, g) uma variedade riemanniana compacta, sem bordo e de dimensão $n = 2k+1$. Se X é um campo de vetores unitário, escolhemos em cada ponto um referencial local ortonormal adaptado $\{e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}, e_n = X\}$. Denotamos a base dual e as formas de conexão como no capítulo anterior e ∇ a conexão de Levi-Civita.

Considerando um campo de vetores X globalmente definido em M, podemos considerar o subfibrado de TM determinado pelos vetores ortogonais a X em cada ponto de M e tal subfibrado será denotado por $X^{\perp}$. A segunda forma fundamental $\mathcal{H}$ de $X^{\perp}$ é dada por:

$$\mathcal{H} = (h_{ab}), \text{ onde } h_{ab} = g(\nabla_{e_a} e_b, X) \;\; a, b = 1, \ldots, n-1 = 2k$$

Pelo Teorema de Frobenius $\mathcal{H}$ é simétrica se e somente se $X^{\perp}$ é integrável. Pelas equações de estrutura, as formas de curvatura de $X^{\perp}$, digamos $\widetilde{\Omega}_{ab}$, estão relacionadas às formas de curvatura de M pela equação

$$\widetilde{\Omega}_{ab} = \Omega_{ab} + \omega_{a,n} \wedge \omega_{b,n}. \tag{3.7}$$

A definição do Pfaffiano da curvatura do fibrado $2k$-dimensional $X^{\perp}$ é:

$$Pf(\widetilde{\Omega}) = \frac{1}{2^k k!} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_{2k}} \epsilon(\tau) \widetilde{\Omega}_{\tau(1)\tau(2)} \wedge \ldots \wedge \widetilde{\Omega}_{\tau(2k-1)\tau(2k)}, \tag{3.8}$$

onde $\mathfrak{S}_{2k}$ é o grupo de permutações de $2k$ números e $\epsilon(\tau)$ é o sinal de τ. Uma propriedade muito importante do Pfaffiano da curvatura é a igualdade

$$\chi(X^{\perp}) = \frac{1}{(2\pi)^k} Pf(\widetilde{\Omega}) \tag{3.9}$$

onde $\chi(X^{\perp})$ é a classe de Euler de $X^{\perp}$. A norma do tensor curvatura de $X^{\perp}$, $\mathcal{R}$, é dada pela equação

$$\mathcal{R}^2 = \sum_{1 \leqslant a,b,c,d \leqslant 2k} R^2_{abcd} \tag{3.10}$$

onde R_{abcd} são os componentes do tensor curvatura de M. Note que a soma somente envolve índices correspondendo aos vetores normais a X. Usando as propriedades de simetria do tensor de curvatura, podemos expressar $\mathcal{R}$ da seguinte forma, mais conveniente aos nossos propósitos:

$$\mathcal{R}^2 = 4 \sum_{a<b,c<d} R^2_{abcd}.$$

3.3.2 mudança de métrica

O volume de campos de vetores é um funcional que depende fortemente da métrica. Como em [BC], achamos conveniente fazer um pequeno comentário sobre essa dependência, inclusive porque até o momento tal cálculo só tenha sido definido para campos de vetores unitários.

Por exemplo, uma simples mudança por homotetia na métrica de M causa uma mudança não homogênea nos termos que aparecem na equação (2.1). Mais precisamente, se $\|X\| = 1$ em cada ponto e $r > 0$, então $Y = \frac{1}{\sqrt{r}}X$ é um campo de vetores globalmente definido com norma igual a $\frac{1}{\sqrt{r}}$, ou seja, Y é um campo de vetores de norma unitária sobre M munida da métrica $r.g$. Neste caso o volume de Y fica

$$\begin{aligned} vol(Y) = \int_M \Bigg(1 + \frac{1}{r}\sum_{a=1}^{n} \|\nabla_{e_a} X\|^2 + \frac{1}{r^2}\sum_{a_1<a_2} \left\|\nabla_{e_{a_1}} X \wedge \nabla_{e_{a_2}} X\right\|^2 + \\ + \cdots + \frac{1}{r^{2k}} \sum_{a_1<\ldots<a_{2k}} \left\|\nabla_{e_{a_1}} X \wedge \ldots \wedge \nabla_{e_{a_{2k}}} X\right\|^2 \Bigg)^{\frac{1}{2}} \nu \end{aligned} \tag{3.11}$$

Observe que se X é um campo de vetores unitário, o último termo da equação acima, a norma do vetor $\nabla_{e_1} X \wedge \ldots \wedge \nabla_{e_n} X$, se anula (veja 6).

3.3.3 demonstração do teorema

Demonstração: Associado com Y temos o campo de vetores unitário dado por $X = \sqrt{r}Y$. Considere um referencial local $\{e_1, \ldots, e_{2k+1} = X\}$ adaptado a X. Desconsiderando os termos das somas onde $\nabla_X X$ aparece e tendo em vista a observação acima e (2.2),

$$vol(Y) \geqslant \frac{1}{r^k} \int_M \Bigg(r^{2k} + r^{2k-1} \sum_a \|\nabla_{e_a} X\|^2 + r^{2k-2} \sum_{a_1<a_2} \left\|\nabla_{e_{a_1}} X \wedge \nabla_{e_{a_2}} X\right\|^2 +$$
$$+ r^{2k-3} \sum_{a_1<a_2<a_3} \left\|\nabla_{e_{a_1}} X \wedge \nabla_{e_{a_2}} X \nabla_{e_{a_3}} X\right\|^2 + \ldots + \sum_{a_1<\ldots<a_{2k}} \|\nabla_{e_1} X \wedge \ldots \wedge \nabla_{e_{2k}} X\|^2 \Bigg)^{\frac{1}{2}} \nu \tag{3.12}$$

onde todos os índices variam de 1 a 2k.

A primeira soma que aparece no integrando de (2.3) é meramente a soma dos quadrados de todas as entradas da matriz associada com a segunda forma fundamental $\mathcal{H}$. Ou seja,

$$\sum_{a=1}^{2k} \|\nabla_{e_a} X\|^2 = \sum_{a,b=1}^{2k} h_{ab}^2$$

A segunda soma de (2.3) são as somas dos quadrados de todos os menores 2×2 de $\mathcal{H}$ e assim por diante. A última soma é simplesmente o quadrado do determinante de $\mathcal{H}$. Denotaremos de agora em diante por $(\Delta_i)^2$ a soma dos quadrados de todos os menores $i \times i$ de $\mathcal{H}$. Com essa notação, (2.3) fica assim reescrita:

$$vol(Y) \geqslant \frac{1}{r^k} \int_M \left(r^{2k} + r^{2k-1}(\Delta_1)^2 + r^{2k-2}(\Delta_2)^2 + \ldots + r(\Delta_{2k-1})^2 + (\Delta_{2k})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \nu \tag{3.13}$$

Considerando a matriz simétrica $2k \times 2k$ definida por $A = (g(\nabla_{e_a} X, \nabla_{e_b} X))_{ab}$, as funções simétricas elementares de A, $\sigma_i(A)$, são exatamente os termos de Δ_i^2 :

$$det(Id + tA) = \sum_{i=0}^{2k} \sigma_i(A) t^i = \sum_{i=0}^{2k} (\Delta_i)^2 t^i$$

onde $\Delta_0^2 = \sigma_0(A) = 1$.

Como diferentes $\sigma_j(A) := \sigma_j$ são de graus diferentes, é impossível compará-los diretamente; Não obstante, existem desigualdades não-lineares que os relacionam (ver [HLP],pp 52).

Considere

$$p_i = \frac{1}{\binom{2k}{i}} \sigma_i;$$

então,

$$p_i^2 \geqslant p_{i-1} p_{i+1} \qquad i = 1, \ldots, 2k-1, \tag{3.14}$$

onde a igualdade ocorre se e somente se os λ_i forem todos iguais. Como consequência direta de (3.14), segue que, para $2 \leqslant j \leqslant k-2$,

$$p_{j-1}^2 \geqslant p_{j-2} p_j \qquad p_{j+1}^2 \geqslant p_j p_{j+2}. \tag{3.15}$$

Como $p_j \geqslant 0$, pois os λ_i são positivos por hipótese, multiplicando ambos os termos de (3.14) por $p_{j-1} p_{j+1}$ e considerando (3.15), segue que

$$p_{j-1}p_j^2p_{j+1} \geqslant p_{j-1}^2p_{j+1}^2 \geqslant p_{j-2}p_j^2p_{j+2},$$

do qual resulta, simplificando:

$$p_{j-1}p_{j+1} \geqslant p_{j-2}p_{j+2},$$

que, juntamente com (3.14) fornece

$$p_j^2 \geqslant p_{j-2}p_{j+2}.$$

Repetindo o processo acima, prova-se que se j é par e $0 \leqslant s \leqslant \frac{j}{2}$, que

$$p_j^2 \geqslant p_{j-2s}p_{j+2s},$$

ou, equivalentemente, para j par e $s = 0, \ldots, \frac{j}{2}$,

$$\sigma_j^2 \geqslant \frac{\binom{2k}{j}^2}{\binom{2k}{j-2s}\binom{2k}{j+2s}}\sigma_{j-2s}\sigma_{j+2s}.$$

De forma análoga, se j for ímpar conclui-se que para $s = 0, \ldots, \frac{j-1}{2}$,

$$\sigma_j^2 \geqslant \frac{\binom{2k}{j}^2}{\binom{2k}{j-2s-1}\binom{2k}{j+2s+1}}\sigma_{j-2s-1}\sigma_{j+2s+1}.$$

Isto implica, para j par e $s = 0, \ldots, \frac{j}{2}$, que

$$\Delta_j^4 \geqslant \frac{\binom{2k}{j}^2}{\binom{2k}{j-2s}\binom{2k}{j+2s}}\Delta_{j-2s}^2\Delta_{j+2s}^2,$$

mas, desde que cada um dos Δ_i são não-negativos,

$$\Delta_j^2 \geqslant \frac{\binom{2k}{j}}{\sqrt{\binom{2k}{j-2s}\binom{2k}{j+2s}}}\Delta_{j-2s}\Delta_{j+2s}. \tag{3.16}$$

Para o outro caso,

$$\Delta_j^2 \geqslant \frac{\binom{2k}{j}}{\sqrt{\binom{2k}{j-2s-1}\binom{2k}{j+2s+1}}}\Delta_{j-2s-1}\Delta_{j+2s+1}. \tag{3.17}$$

Neste ponto da demonstração precisamos de um resultado preliminar cuja importância ficará clara logo mais adiante e cujo enunciado será feito na forma de lema. O método de demonstração do primeiro item, em linhas gerais, pode ser encontrado em ([BCN]).

Lema 3.6 *Com as mesmas notações adotadas até agora, tem-se que*

(i) *Para cada* $j = 1, \ldots, 2k$,

$$\Delta_j^2 \geqslant \sum_{i=0}^{j} \frac{\binom{k}{i}\binom{k}{j-i}}{\sqrt{\binom{2k}{2i}\binom{2k}{2j-2i}}}\Delta_{2i}\Delta_{2j-2i} \tag{3.18}$$

(ii) *Para cada* $k \geqslant 1$ *e* $0 \leqslant i \leqslant k$, *(i e k inteiros),*

$$\frac{(2k)!}{(2i)!} \geqslant \frac{(4\binom{2k}{2})^{k-i}}{(2k-2i)!} \tag{3.19}$$

Demonstração:

Para a demonstração de (i), consideramos separadamente a paridade de j.

<u>j par</u>:

Para que apareça o coeficiente de $\Delta_{j-2s}\Delta_{j+2s}$ da expressão geral (3.18) usamos (3.16) para obter

$$2\frac{\binom{k}{\frac{j}{2}-s}\binom{k}{\frac{j}{2}+s}}{\binom{2k}{j}}\Delta_j^2 \geqslant 2\frac{\binom{k}{\frac{j}{2}-s}\binom{k}{\frac{j}{2}+s}}{\binom{2k}{j-2s}\binom{2k}{j+2s}}\Delta_{j-2s}\Delta_{j+2s} \tag{3.20}$$

quando $s = 1, \ldots, \frac{j}{2}$, e quando $s = 0$,

$$\frac{\binom{k}{\frac{j}{2}}^2}{\binom{2k}{j}}\Delta_j^2 \geqslant \frac{\binom{k}{\frac{j}{2}}^2}{\binom{2k}{j}^2}\Delta_j^2. \tag{3.21}$$

Para demonstrar (3.18) falta verificar que a soma dos coeficientes de (3.20) para $s = 1, \ldots, \frac{j}{2}$, com o coeficiente de (3.21) dá exatamente 1, ou seja, que

$$2\sum_{s=1}^{\frac{j}{2}} \frac{\binom{k}{\frac{j}{2}-s}\binom{k}{\frac{j}{2}+s}}{\binom{2k}{j}} + \frac{\binom{k}{\frac{j}{2}}^2}{\binom{2k}{j}} = 1.$$

Reordenando o somatório, queremos provar que

$$\binom{2k}{j} = 2\sum_{l=0}^{\frac{j}{2}-1}\binom{k}{l}\binom{k}{j-l} + \binom{k}{\frac{j}{2}}^2 = \sum_{l=0}^{j}\binom{k}{l}\binom{k}{j-l}$$

Que pode ser demonstrada desenvolvendo o produto notável $(1+x)^{2k}$ de duas maneiras equivalentes:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{2k}\binom{2k}{j}x^j &= (1+x)^{2k} = (1+x)^k(1+x)^k = \\
&= \left(\sum_{q_1=0}^{k}\binom{k}{q_1}x^{q_1}\right)\left(\sum_{q_2=0}^{k}\binom{k}{q_2}x^{q_2}\right) = \\
&= \sum_{j=0}^{2k}\sum_{q_1+q_2=j}\binom{k}{q_1}\binom{k}{q_2}x^{q_1+q_2} = \\
&= \sum_{j=0}^{2k}\sum_{l=0}^{j}\binom{k}{l}\binom{k}{j-l}x^j.
\end{aligned}$$

<u>j ímpar</u>:

Basta verificar, de forma análoga ao caso anterior, que

$$2\sum_{s=1}^{\frac{j-1}{2}}\binom{k}{\frac{j}{2}-s-\frac{1}{2}}\binom{k}{\frac{j}{2}+s+\frac{1}{2}} = \binom{2k}{j}$$

e isto demonstra a parte (i) do lema.

Para a parte (ii) consideramos a função $f : [0,\infty) \times [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(k,x) = \frac{(2k)!}{\Gamma(2x+1)} - \frac{(4\binom{2k}{2})^{k-x}}{\Gamma(2k-2x+1)}$$

onde $\Gamma(x)$ é a função restrição da Gama de Euler a $\mathbb{R}$. Calculando sua derivada vemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{(2k)!}{2\Gamma(2x+1)} + \frac{(4\binom{2k}{2})^{k-x}}{(\Gamma(2k-2x+1))^2}\Big[\Gamma(2k-2x+1)\ln\Big(4\binom{2k}{2}\Big)+ \\ + 4\frac{\partial}{\partial x}\Gamma(2k+2x+1)\Big] > 0,$$

o que mostra que para provar (ii) é suficiente fazê-lo para $x = 0$, pois f é crescente com relação à segunda variável, ou seja, basta provarmos que, $\forall k \geqslant 1$,

$$((2k)!)^2 \geqslant \Big(4\binom{2k}{2}\Big)^k \tag{3.22}$$

A prova segue por indução: para $k = 1$, (3.22) se verifica. Supondo (3.22) queremos mostrar que

$$((2k+2)!)^2 \geqslant \Big(4\binom{2k+2}{2}\Big)^{k+1}. \tag{3.23}$$

Como $\binom{2k+2}{2} = \frac{(2k+2)(2k+1)}{2k(2k-1)}\binom{2k}{2}$, segue que (3.23) é equivalente a

$$(2k+2)^2(2k+1)^2((2k)!)^2 \geqslant 4\binom{2k+2}{2}\Big[\frac{(2k+2)(2k+1)}{2k(2k-1)}\Big]^k 4^k\binom{2k}{2}^k \tag{3.24}$$

com $\binom{2k+2}{2} = (k+1)(2k+1)$, utilizando a hipótese de indução fica claro que é suficiente para a prova de (3.24), mostrar que

$$4(k+1)^2(2k+1)^2 \geqslant 4(k+1)(2k+1)\Big[(1+\frac{1}{k})(1+\frac{2}{2k-1})\Big]^k,$$

ou seja,

$$(k+1)(2k+1) \geqslant \left(1+\frac{1}{k}\right)^k \left(1+\frac{2}{2k-1}\right)^k. \tag{3.25}$$

Como é sabido, $a_k = (1+\frac{1}{k})^k$ é uma sequência real positiva crescente limitada superiormente, $a_k < 3$. Disto segue que $(1+\frac{2}{2k-1})^k < 3\sqrt{2} < 6$, o que implica que $b_k = (1+\frac{1}{k})^k(1+\frac{2}{2k-1})^k$ é uma sequência real positiva crescente limitada superiormente, com $b_k < 18$. Por outro lado, $c_k = (k+1)(2k+1)$ é estritamente crescente, $c_k \geqslant 28$ para $k \geqslant 4$, e, portanto, (3.25) é verdadeira para $k \geqslant 4$. Por inspeção direta, verifica-se (3.25) para $1 \leqslant k \leqslant 3$, como queríamos. Isto demonstra (ii) e o lema está demonstrado. ■

Observação 7 *Antes de procedermos com a demonstração, acreditamos que seja útil observar que*

(a) *lembrando que* $\binom{k}{i} = 0$ *se* $i > k$,

$$\left[\sum_{i=0}^{k} \frac{\binom{k}{i}}{\sqrt{\binom{2k}{2i}}} \Delta_{2i} r^{k-i}\right]^2 = \sum_{j=0}^{2k} \sum_{i=0}^{j} \frac{\binom{k}{i}\binom{k}{j-i}}{\sqrt{\binom{2k}{2i}\binom{2k}{2j-2i}}} \Delta_{2i}\Delta_{2j-2i} r^{2k-j}. \tag{3.26}$$

(b) *pela parte (ii) do lema (3.6) obtemos sucessivamente*

$$\begin{aligned}
(2k)! &\geqslant (2i)! \frac{\left(4\binom{2k}{2}\right)^{k-i}}{(2k-2i)!} \\
(2k)!(2k)! &\geqslant (2i)!(2i)! \left(4\binom{2k}{2}\right)^{k-i} \binom{2k}{2i} \\
(2k)! &\geqslant (2i)! \left(2\sqrt{\binom{2k}{2}}\right)^{k-i} \sqrt{\binom{2k}{2i}} \\
\frac{\mathcal{R}^{k-i}}{\left(2\sqrt{\binom{2k}{2}}\right)^{k-i} \sqrt{\binom{2k}{2i}}} &\geqslant \frac{(2i)!}{(2k)!} \mathcal{R}^{k-i}.
\end{aligned}$$

Da última desigualdade segue que se $r \geqslant \frac{\mathcal{R}}{2\sqrt{k(2k-1)}} = \frac{\mathcal{R}}{2\sqrt{\binom{2k}{2}}}$, *então*

$$\frac{r^{k-i}}{2\sqrt{\binom{2k}{2}}} \geqslant \frac{\mathcal{R}^{k-i}}{\left(2\sqrt{\binom{2k}{2}}\right)^{k-i}\sqrt{\binom{2k}{2i}}} \geqslant \frac{(2i)!}{(2k)!}\mathcal{R}^{k-i}. \tag{3.27}$$

Agora, por (3.13), (3.18), (3.26) e (3.27), segue que

$$\begin{aligned} vol(Y) &\geqslant \frac{1}{r^k}\int_M \left(\sum_{j=0}^{2k} \Delta_j^2 r^{2k-j}\right)^{\frac{1}{2}} \nu \geqslant \\ &\geqslant \frac{1}{r^k}\int_M \left(\sum_{j=0}^{2k}\sum_{i=0}^{j} \frac{\binom{k}{i}\binom{k}{j-i}}{\sqrt{\binom{2k}{2i}\binom{2k}{2j-2i}}}\Delta_{2i}\Delta_{2j-2i}r^{2k-j}\right)^{\frac{1}{2}} \nu \geqslant \\ &\geqslant \frac{1}{r^k}\int_M \left(\left[\sum_{i=0}^{k} \frac{\binom{k}{i}}{\sqrt{\binom{2k}{2i}}}\Delta_{2i}r^{k-i}\right]^2\right)^{\frac{1}{2}} \nu \geqslant \\ &\geqslant \frac{1}{r^k}\int_M \left\|\frac{1}{(2k)!}\sum_{i=0}^{k}(2i)!\binom{k}{i}\mathcal{R}^{k-i}\Delta_{2i}\right\| \nu. \end{aligned} \tag{3.28}$$

A última integral é relacionada com o Pfaffiano de $X^{\perp}$ da seguinte maneira.

De (3.7) e (3.8) temos que:

$$\begin{aligned} &2^k(k)!Pf(\widetilde{\Omega}) = \\ &= \sum_{\tau\in\mathfrak{S}_{2k}} \epsilon(\tau)\Big(\Omega_{\tau(1)\tau(2)}+\omega_{\tau(1)2k+1}\wedge\omega_{\tau(2)2k+1}\Big)\wedge\Big(\Omega_{\tau(3)\tau(4)}+\omega_{\tau(3)2k+1}\wedge\omega_{\tau(4)2k+1}\Big)\wedge\ldots\wedge \\ &\qquad \wedge\ldots\wedge\Big(\Omega_{\tau(2k-1)\tau(2k)}+\omega_{\tau(2k-1)2k+1}\wedge\omega_{\tau(2k)2k+1}\Big). \end{aligned}$$

Daí,

$$
\begin{aligned}
2^k(2k)!Pf(\widetilde{\Omega}) = & \sum_{\tau\in\mathfrak{S}_{2k}} \epsilon(\tau)\Omega_{\tau(1)\tau(2)} \wedge \Omega_{\tau(3)\tau(4)} \wedge \ldots \wedge \Omega_{\tau(2k-1)\tau 2k} + \\
& + \binom{k}{1} \sum_{\tau\in\mathfrak{S}_{2k}} \epsilon(\tau)\Omega_{\tau(1)\tau(2)} \wedge \ldots \wedge \Omega_{\tau(2k-3)\tau(2k-2)} \wedge \omega_{\tau(2k-1)2k+1} \wedge \omega_{\tau(2k)2k+1} + \\
& + \binom{k}{2} \sum_{\tau\in\mathfrak{S}_{2k}} \epsilon(\tau)\Omega_{\tau(1)\tau(2)} \wedge \ldots \wedge \Omega_{\tau(2k-5)\tau(2k-4)} \wedge \omega_{\tau(2k-3)2k+1} \wedge \ldots \wedge \omega_{\tau(2k)2k+1} + \\
& \ldots + \binom{k}{i} \sum_{\tau\in\mathfrak{S}_{2k}} \epsilon(\tau)\Omega_{\tau(1)\tau(2)} \wedge \ldots \wedge \Omega_{\tau(2k-(2k-i))\tau(2k-2i)} \wedge \omega_{\tau(2k-2i+1)2k+1} \wedge \ldots \wedge \omega_{\tau(2k)2k+1} \\
& + \ldots + \binom{k}{k} \sum_{\tau\in\mathfrak{S}_{2k}} \epsilon(\tau)\omega_{\tau(1)2k+1} \wedge \ldots \wedge \omega_{\tau(2k)2k+1} \wedge \omega_{\tau(2k-3)2k+1} \wedge \ldots \wedge \omega_{\tau(2k)2k+1}
\end{aligned}
\tag{3.29}
$$

donde

$$
\begin{aligned}
& \sum_{\tau\in\mathfrak{S}_{2k}} \epsilon(\tau)\Omega_{\tau(1)\tau(2)} \wedge \ldots \wedge \Omega_{\tau(2k-(2k-i))\tau(2k-2i)} \wedge \omega_{\tau(2k-2i+1)2k+1} \wedge \ldots \wedge \omega_{\tau(2k)2k+1} \\
= & \, 2^{(k-i)}(2i)! \sum_{a_j<a_{j+1}} \varepsilon(a)\Omega_{a_1a_2} \wedge \ldots \wedge \Omega_{a_{2k-(2i+1)}a_{2k-2i}} \wedge \omega_{a_{2k-2i+1}2k+1} \wedge \ldots \wedge \omega_{a_{2k}2k+1}
\end{aligned}
$$

onde cada a_i percorre os inteiros positivos de 1 a $2k$, e, se $i \neq j$, o par (a_i, a_{i+1}) é não ordenado com respeito a (a_j, a_{j+1}).

Denominando $\binom{k}{i}P_i$ o i-ésimo termo da expressão para o Pfaffiano em (3.29) e avaliando-o na base tangente a $X^{\perp}$, $\{e_1, \ldots, e_{2k}\}$, temos o seguinte aspecto para P_i:

$$
\begin{aligned}
& P_i(e_1, \ldots, e_{2k}) = \\
& 2^{(k-i)}(2i)! \sum_{a_j<a_{j+1}} \sum_{b_l<b_{l+1}} \varepsilon(a)\varepsilon(b)\Omega_{a_1a_2}(e_{b_1}, e_{b_2}) \ldots \Omega_{a_{2k-(2i+1)}a_{2k-2i}}(e_{b_{2k-(2i+1)}}, e_{b_{2k-2i}}) \\
& \qquad \big(\omega_{a_{2k-2i+1}2k+1} \wedge \ldots \wedge \omega_{a_{2k}2k+1}\big)(e_{b_{2k-2i+1}}, \ldots, e_{2k})
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$P_i(e_1,\dots,e_{2k}) =$$

$$2^{(k-i)}(2i)!\sum_{\substack{a_1<a_2\\ b_1<b_2}}\cdots\sum_{\substack{a_{2k-(2i+1)}<a_{2k-2i}\\ b_{2k-(2i+1)}<b_{2k-2i}}}\varepsilon(a)\varepsilon(b)R_{a_1a_2b_1b_2}\dots R_{a_{2k-(2i+1)}a_{2k-2i}b_{2k-(2i+1)}b_{2k-2i}}\cdot$$

$$\cdot\det\begin{pmatrix} h_{a_{2k-2i+1}b_{2k-2i+1}} & \cdots & h_{a_{2k-2i+1}b_{2k}}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ h_{a_{2k}b_{2k-2i+1}} & \cdots & h_{a_{2k}b_{2k}}\end{pmatrix}. \quad (3.30)$$

Pela desigualdade de Schwartz e (3.10),

$$\begin{aligned} P_i(e_1,\dots,e_{2k}) &\leqslant 2^{(k-i)}(2i)!\Big(\sum_{\substack{a_1<a_2\\ b_1<b_2}}R^2_{a_1a_2b_1b_2}\Big)^{\frac12}\cdot\Big(\sum_{\substack{a_3<a_4\\ b_3<b_4}}R^2_{a_3a_4b_3b_4}\Big)^{\frac12}\cdot\\ &\cdot\dots\cdot\Big(\sum_{\substack{a_{2k-(2i+1)}<a_{2k-2i}\\ b_{2k-(2i+1)}<b_{2k-2i}}}R^2_{a_{2k-(2i+1)}a_{2k-2i}b_{2k-(2i+1)}b_{2k-2i}}\Big)^{\frac12}\cdot(\Delta^2_{2i})^{\frac12}\leqslant\\ &\leqslant 2^{(k-i)}(2i)!\underbrace{(\frac14\mathcal{R}^2)^{\frac12}\cdot\dots\cdot(\frac14\mathcal{R}^2)^{\frac12}}_{(k-i)-\text{termos}}\cdot(\Delta^2_{2i})^{\frac12}\\ &\leqslant (2i)!\mathcal{R}^{(k-i)}\Delta_{2i}; \end{aligned} \quad (3.31)$$

logo, por (3.29),

$$Pf(\widetilde{\Omega})(e_1,\dots,e_{2k})\leqslant\frac{(2k!)}{2^kk!}\left(\frac{1}{(2k)!}\sum_{i=0}^{k}(2i)!\binom{k}{i}\mathcal{R}^{(k-i)}\Delta_{2i}\right). \quad (3.32)$$

Finalmente, por esta desigualdade, por (3.28) e (3.9),

$$vol(Y)\geqslant\frac{2^kk!}{(2k)!r^k}\left\|\int_M Pf(\widetilde{\Omega})\wedge\theta_{2k+1}\right\| = \frac{(4\pi)^kk!}{(2k)!r^k}\left\|\int_M\chi(X^\perp)\wedge\theta_{2k+1}\right\|$$

e isto demonstra o teorema. ■

Como em [BC], é válida a seguinte

Observação 8 *:Ao longo da demonstração observa-se que a igualdade em (3.6) ocorre quando:*

(a) *O fluxo do campo é geodésico;*

(b) *Todos os autovalores da matriz simétrica A são iguais;*

(c) *O tensor curvatura satisfaz uma certa condição de proporcionalidade:*

$$R_{a_1a_2b_1b_2} = \lambda R_{a_3a_4b_3b_4}, \text{ onde } a_n < a_{n+1} \text{ e } b_m < b_{m+1} \text{ (por 3.31);}$$

(d)

$$R_{a_1a_2b_1b_2} = \mu \det \begin{pmatrix} h_{a_3b_3} & \cdots & h_{a_3b_{2i+2}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{a_{2i+2}b_3} & \cdots & h_{a_{2i+2}b_{2i+2}} \end{pmatrix}$$

onde $a_n < a_{n+1}$ e $b_m < b_{m+1}$ (veja 3.30).

Em espaços de curvatura seccional constante, as condições são verificadas quando X é geodésico e $X^{\perp}$ é integrável com folhas totalmente umbílicas. Um próximo passo interessante seria o de saber se a igualdade em (3.5) pode ser atingida em outras variedades para algum campo específico.

3.3.4 Um corolário topológico

O limitante inferior para o volume de um campo de vetores dado no teorema (3.5), envolve a classe de Euler do fibrado $X^{\perp}$ e a forma dual do campo unitário X. Quando esta forma é fechada, $X^{\perp}$ será uma folheação riemanniana. Isto significa que o fluxo de X é geodésico e a distribuição $X^{\perp}$ é integrável.

nesta situação, se a folheação definida por $X^{\perp}$ tem uma folha compacta, então todas as folhas são compactas e M é uma fibra sobre $\mathbb{S}^1$ (um círculo de comprimento L), com as fibras sendo as folhas compactas da folheação ([Mo]). Com essas preliminares estamos em condições de enunciar o seguinte

Corolário 3.7 *Seja M uma variedade riemanniana fechada de dimensão $2k+1$ e X um campo de vetores de comprimento constante $\frac{1}{\sqrt{r}}$, tal que sua forma dual é fechada e a folheação ortogonal tem uma folha compacta. Então M é uma fibra sobre um círculo de comprimento L. Se $r \geqslant \frac{1}{2\sqrt{k(2k-1)}}\mathcal{R}$, então*

$$vol(X) \geqslant \frac{(4\pi)^k k! L}{r^k (2k)!} \left\|\chi(X^{\perp})\right\|$$

onde $\chi(X^{\perp})$ é a característica de Euler das folhas de $X^{\perp}$.

Esse corolário dá uma descrição parcial de como a topologia de X influencia seu volume, pelo menos quando a forma dual de X é fechada e $X^{\perp}$ tem todas as folhas compactas. Observamos também que o comprimento constante de Y, o fator $\frac{1}{\sqrt{r}}$, aparece no limitante inferior do teorema (3.5), de tal forma que, se o comprimento de Y é pequeno (isto é, o fluxo é lento), então o limitante inferior para o volume de Y também é pequeno.

Referências Bibliográficas

[A] Abe, K. *Applications of a Riccati type differential equation to riemannian manifolds with totally geodesic distributions.*
Tôhoku Math.J. 25, 415 – 444, 1973.

[B] Brito, F.G.B., *A remark on minimal foliations of codimension two.*
Tôhoku Math.J. 36, 341 – 350, 1984.

[B2] Brito, F.G.B., *Total bending of flows with mean curvature correction.*
Differential Geom. Appl. 12, 157 – 163, $n^{o}2$, 2000.

[BC] Brito, F.G.B., Chacón, P.M., *A topological minorization for the volume of vector fields on* 5*-manifolds.*
Arch. Math. 85, 283 – 292, 2005.

[BCN] Brito, F.G.B., Chacón, P.M., Naveira, A.M.,*On the volume of unit vector fields on spaces of constant sectional curvature.*
Comment. Math. Helv. 79, 300 – 316, $n^{o}2$, 2004.

[BGm] Borreli V., Gil-Medrano O., *A critical radius for unit Hopf vector fields on spheres.*

Math. Ann. 334, 731 – 751, $n^{o}4$, 2006.

[BW] Brito, F.G.B., Walczak, P.G., *Totally geodesic foliations with integrable normal bundles.*

Bol.Soc.Bras.Mat. 17, 41 – 46, 1986.

[C] Chacón, P.M., *Sobre a energia e energia corrigida de campos unitários e distribuições. Volume de campos unitários.*

Ph.D. Thesis, Universidade de São Paulo, Brazil 2000, and Universidad de Valencia, Spain 2001.

[GW] Gluck, H., Warner, F.W., *Great circle fibrations of the three-sphere.*

Duke Math. J. 50, 107 – 132, 1983.

[GWY] Gluck, H., Warner, F.W., Yang, C.T., *Division algebras, fibrations of spheres by great spheres and the topological determination of space by the gross behavior of its geodesics.*

Duke Math. J. 50, 1041 – 1076, 1983.

[GZ] Gluck, H. Ziller, W., *On the volume of a unit vector field on the three-sphere.*

Comment. Math. Helv. 61, 177 – 192, $n^{o}2$, 1986.

[Ha] Haefliger, A. *Some remarks on foliations with minimal leaves.*

J. Diff. Geom. 15, 269 – 284, 1980.

[HLP] Hardy, G., Littlewood, J.E., Pólya, G., *Inequalities.*

Second edition, Cambridge Mathematical Library, 1991.

[J] Johnson, D.L., *Volume of flows*

Proc. Am. Math. Soc. 104, 923 – 931, $n^{\underline{o}}3$, 1988.

[M] Milnor, J.W., Stasheff,J.D. *Characteristic classes.*

Annals of Mathematics studies, Princeton University Press

[Mo] Molino, P., *Riemannian foliations*

Progress in Math., Basel, 1988.

[No] Novikov, S.P., *Topology of foliations.*

Trans. Moscow Math. Soc. 268 – 304, 1965.

[O1] Oshikiri, G., *A remark on minimal foliations.*

Tôhoku Math. J. 33, 133 – 137, 1981.

[O2] Oshikiri, G. *Some remarks on minimal foliations.*

Tôhoku Math. J. 39, 223 – 229, 1987.

[R] Rummler, H., *Quelques notions simples en géometrie riemannienne et leurs applications aux feuilletages compacts.*

Comment. Math. Helv. 54, 224 – 239, 1979.

[Sch] Schweitzer, P.A., *Codimension one foliations without compact leaves.*

Comment. Math. Helv. 70, 171 – 209, 1995.

[Sch2] Schweitzer, P.A., *Counterexamples to the Seifert conjecture and opening closed leaves of foliations.*

Ann. of Math. 100, 386 – 400, 1974.

[S] Steenrod, N., *The topology of fibre bundles.*

Princeton Univ. Press, 1951.

[SU] Sullivan, D. *A homological characterization of foliations consisting of minimal surfaces.*

Comment. Math. Helv. 54, 218 – 223, 1979.

[Th] Thurston, W. *Existence of codimension one foliations.*

Ann. of Math. 104, 249 – 268, 1976.

[TY] Takagi, R., Yorozu, S. *Minimal foliations on Lie groups.*

Tôhoku Math. J. 36, 541 – 554, 1984.