Sobre a topologia de 4-variedades com curvatura não-negativa e simetria contínua

Marco Antonio Mucha Orco

Dissertação apresentada AO Instituto de Matemática e Estatística DA Universidade de São Paulo Para Obtenção do título DE Mestre em Ciências

Área de Concentração: Matemática Orientador: Prof. Dr. Claudio Gorodski

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CNPq

São Paulo, fevereiro de 2008

Sobre a topologia de 4-variedades com curvatura não-negativa e simetria contínua

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Marco Antonio Mucha Orco e aprovada pela Comissão Julgadora.

Banca Examinadora:

- Prof. Dr. Claudio Gorodski (orientador) IME-USP.
- Prof. Dr. Marcos M. Alexandrino IME-USP.
- Prof. Dr. Luis A. Florit IMPA.

iv

and a many section of the section of

a

Aos meus pais Cristina e Francisco

Agradecimentos

Gostaria de agradecer em primeiro lugar a Deus e a minha familia. Também quero agradecer:

Ao prof. Dr. Claudio Gorodski, pelo apoio acadêmico, confiança e paciência.

À banca examinadora, pelas considerações e sugestões.

À Maritza L. Jordan, pelo apoio constante.

Aos professores e amigos Marcos M. Alexandrino, Oscar V. Erazo , Plínio A. Q. Simões e Jorge Sotomayor pelos conselhos.

Aos professores e amigos Agripino Garcia e Edgar Vera na "Universidad Nacional Mayor de San Marcos", pela orientação em Lima.

Ao grupo de Geometria no IME.

Aos membros da Comissão de Admissão e Bolsas, pelo apoio.

Aos amigos da CPG, pelo apoio.

Aos amigos imeanos e meus compatriotas imeanos, pelo apoio.

Resumo

As possíveis diferenças entre variedades com curvatura seccional não-negativa e variedades com curvatura positiva juntamente com o problema de classificar estas variedades são problemas de pesquisa atual. O problema de classificação depende da dimensão, e para dimensões maiores que 3 o problema ainda está em aberto. Não obstante, Hsiang-Kleiner [15] e Kleiner [16] provaram que uma variedade simplesmente conexa e compacta que admite um campo de Killing não trivial (que em nosso contexto é equivalente à existência de uma ação isométrica não trivial de S^1) é homeomorfa a S^4 , ou a $S^2 \times S^2$, ou a $\mathbb{C}P^2$, ou a $\mathbb{C}P^2\#\pm\mathbb{C}P^2$ quando a curvatura é não-negativa, e homeomorfa a S^4 , ou a $\mathbb{C}P^2$ quando a curvatura é positiva. Nosso objetivo neste trabalho é explicar os detalhes geométricos da prova deste resultado, e portanto este será nosso teorema principal. Na prova fazemos uso da classificação topológica de 4-variedades suaves fechadas e simplesmente conexas por meio da forma de interseção [7]. Também apresentamos uma interpretação geométrica para o conceito de formas de interseção e encontramos estas formas para as variedades de acima. Observamos que o teorema principal dá uma classificação completa, já que as variedades de acima admitem métricas que satisfazem as hipóteses correspondentes.

Palavras-chave: 4-Variedade Riemanniana, curvatura não negativa, ação isométrica, formas de interseção.

Abstract

Possible differences between the manifolds with nonnegative sectional curvature and those with positive curvature together with the problem of classifying those manifolds are problems of investigation nowadays. The classification problem depends on the dimension, and in dimension greater than 3 the problem is still open. However Hsiang-Kleiner [15], and Kleiner [16] show that a compact simply connected manifold admitting a nontrivial Killing vector field (which in our context is equivalent to admitting a nontrivial isometric S^1 action) is homeomorphic either to S^4 , or $S^2 \times S^2$, or $\mathbb{C}P^2$, or $\mathbb{C}P^2 \# \pm \mathbb{C}P^2$ when the curvature is nonnegative and homeomorphic either to S^4 , or $\mathbb{C}P^2$ when the curvature is positive. Our objective in this work is to explain the geometrics details of the proof of this result, thus this will be our main theorem. In the proof this result we use the topological classification of compact simply connected smooth 4-manifolds using the intersection forms. We also present a geometric interpretation of the concept of intersection forms and we find these forms for the manifolds listed above. We also show that the main theorem gives a classification of such manifolds since each one of the manifolds listed above admits metrics satisfying the assumptions of theorem.

Keywords: Riemannian 4-manifolds, nonnegative curvature, isometric action, intersection forms.

Sumário

In	trod	ução	1
1	Conceitos preliminares		5
	1.1	Alguns resultados de topologia algébrica	5
	1.2	Alguns resultados de topologia diferencial	8
	1.3	Fibrados	11
2	ОТ	O Teorema de Freedman	
	2.1	Formas integrais	15
	2.2	Forma de interseção	16
	2.3	O Teorema de Freedman	19
3	O t	eorema principal	23
	3.1	Alguns lemas	23
	3.2	O teorema principal	31
4	Var	iedades com curvatura não-negativa	41
	4.1	Métricas com $K \ge 0$ sobre $\mathbb{C}P^n \# \pm \mathbb{C}P^n$	41
	4.2	Simétrias de $\mathbb{C}P^n\#\pm\mathbb{C}P^n$	44
	4.3	Variedades de co-homogeneidade um	45

xiv SUMÁRIO

Referências Bibliográficas 47

Introdução

É frequente nos textos básicos de Geometria Diferencial encontrar relações entre curvatura e topologia. Podemos mencionar, por exemplo, os teoremas clássicos de Gauss-Bonnet, de Hadamard-Cartan, de Myers, de Preissmann, Synge e o teorema da esfera. O primeiro a pesquisar estas relaciones em geral e de modo sistemático foi Heinz Hopf, que em [14] escreveu:

The problem of determining the global structure of a space form from its local metric properties and the connected one of metrizing - in the sense of differential geometry - a given toplogical space, may be worthy of interest for physical reasons.

Hopf estava especialmente motivado pelas seguintes questões:

- (a) Quando a curvatura seccional de uma d-variedade compacta de dimensão par tem sinal constante $\epsilon = \pm 1$, o sinal da sua caracteristica de Euler é igual a $\epsilon^{d/2}$?
- (b) Estender o Teorema de Gauss-Bonnet para dimensões pares.
- (c) A variedade $S^2 \times S^2$ admite uma métrica de curvatura seccional positiva?
- (d) Suponha que uma variedade simplesmente conexa tem curvatura seccional entre 1 e 1ϵ . Podemos inferir que a variedade é uma esfera?

A questão (b) foi resolvida por Allendoerfer e Weil em 1943 e a questão (d) foi resolvida em 1951 por Rauch, um especialista em superficies de Riemann, com $1 - \epsilon$ aproximadamente igual a 3/4. As questões (a) e (c) estão ainda em aberto. Para um melhor entendimento dos problemas de acima ver [2].

Outro problema que envolve relações entre curvatura e topologia é o determinar quais variedades compactas admitem métricas riemannianas com curvatura positiva ou curvatura não-negativa. Este

2 SUMÁRIO

problema tem sendo muito pesquisado ultimamente. Quando a dimensão é 2 pode-se aplicar o Teorema de Gauss-Bonnet para concluir que uma superfície compacta com curvatura não-negativa é difeomorfa a $\mathbb{R}P^2$, ou S^2 , ou T^2 ou a garrafa de Klein, e quando a curvatura é positiva ela é difeomorfa a S^2 ou a $\mathbb{R}P^2$. Em 1982, Hamilton classificou as 3-variedades simplesmente conexas, compactas e com curvatura de Ricci positiva. Estas são difeomorfas a formas espaciais esfericas. A partir de dimensão quatro, o problema está ainda em aberto. Para o caso da curvatura nãonegativa, a principal obstrução é o teorema dos números de Betti de Gromov. A cota original de Gromov sobre a soma dos números de Betti era dependente duplamente exponencial sobre a dimensão. Este resultado foi melhorado por Abresch no ano 1987. Embora existam muitos exemplos de variedades com curvatura não-negativa, todos eles são obtidos de duas construções básicas, além de tomar produtos. Estes exemplos são obtidos por tomar um quociente isométrico de um grupo de Lie compacto munido com uma métrica bi-invariante ou por um procedimento de colagem devido a Cheger [4] e Grove-Ziller [10]. Os últimos exemplos incluem uma classe rica de variedades, e dão origem a curvaturas não negativas sobre algumas 7-esferas exóticas e alguns $\mathbb{R}P^5$ exóticos. No caso de curvatura positiva existem alguns exemplos além dos espaços simétricos de posto um. Todos em dimensão menor que 25. Neste caso temos a classificação de espaços homogêneos simplesmente conexos de curvatura seccional positiva realizado por Berger (1961), Wallach (1972), Aloff-Wallach (1975), Berard Bergery (1976). Nesta classificação, os novos exemplos estão em dimensões 6, 7, 12, 13, 24. Outros exemplos de variedades curvadas positivamente são biquocientes em dimensões 7 e 13 dadas por Eschenburg (1982) e Bazaikin (1996). Em 1991, Grove sugeriu classificar as variedades de curvatura seccional positiva com um grupo "grande" de isometrias. O interessante desta proposta é que quem começa a trabalhar neste problema tem que avaliar o quanto "grande" é o grupo de isometrias. Eventualmente por meio de novas técnicas as hipóteses podem ser enfraquecidas. Talvez se entendemos as variedades positivamente curvadas com um grande grupo de isometrias podemos entender o caso geral. Não obstante, a importancia do programa de Grove é que no processo de enfraquecer as hipóteses deve levar-nos à construção de novos exemplos.

Neste contexto, uma questão natural seria:

Existe uma diferença, ao nível de possíveis variedades, entre curvatura não-negativa e curvatura positiva?

Em 1982, Yau (vide [26], p.670) faz a seguinte observação desconcertante:

No one knows any compact simply connected manifold with non-negative curvature for which one can prove that it does not admit a metric of positive curvature.

SUMÁRIO 3

Mais desconcertante ainda é que a observação de Yau segue sendo verdadeiro.

Para o caso de variedades com curvatura não negativa não compactas temos melhores resultados como nos mostram o Teorema de Gromoll-Meyer (1969) e Cheeger-Gromoll (1972). O primeiro resultado afirma que uma variedade completa não compacta de curvatura seccional positiva e dimensão d é difeomorfa a \mathbb{R}^d , e o último resultado afirma que uma variedade M completa não compacta de curvatura não-negativa sempre admite ao menos uma subvariedade S totalmente geodésica e totalmente convexa, tal que M é difeomorfa ao fibrado normal de S. A subvariedade é chamada uma alma da variedade. Melhor ainda, se todas as curvaturas seccionais em um ponto são positivas então as almas se reduzem a um ponto e logo a variedade é difeomorfa a \mathbb{R}^d . Este resultado foi obtido por Perelman em 1994.

Voltando ao caso compacto, seria interessante determinar as 4-variedades curvadas não negativamente ou curvadas positivamente. Neste caso, os melhores resultados são os teoremas devido a Hsiang-Kleiner [15] e Kleiner [16] em 1989 e 1990, respectivamente. O resultado de Kleiner nunca foi publicado e é o tema central da sua Teses de Doutorado em Berkeley sobre a direção de W. Y. Hsiang. Estes resultados motivaram a proposta de Grove. O Teorema de Hsiang-Kleiner afirma que uma variedades simplesmente conexa, compacta, curvada positivamente e com um grupo de isometrias continuo é homeomorfa a S^4 , ou a $\mathbb{C}P^2$. O Teorema de Kleiner afirma que se mudamos a hipótese no teorema de Hsiang-Kleiner de curvatura positiva por curvatura não-negativa a variedade é homeomorfa a S^4 , ou a $S^2 \times S^2$, ou a $\mathbb{C}P^2$, ou a $\mathbb{C}P^2 \# \pm \mathbb{C}P^2$. Estes teoremas dão uma classificação completa já que cada uma das variedades de acima admite uma métrica satisfazendo as hipóteses correspondentes. Por outro lado, Bott conjeturou que toda variedade curvada não negativamente é racionalmente eliptica (racionalmente eliptica quer dizer que $\pi_*(M) \otimes \mathbb{Q}$ é finito dimensional). Se isto for verdadeiro talvez se possa remover a hipótese sobre o grupo de isometrias no Teorema de Kleiner. Também é interessante saber quando pode-se melhorar a conclusão do teorema de homeomorfo a difeomorfo. Em 1994, Searle e Yang [23] dão outra prova do resultado de Kleiner. Grove e Searle [9] observaram que a prova do Teorema de Hsiang-Kleiner pode ser reescrita em termos de geometria de Allexandrov do espaço órbita M/S^1 . Também existe outra demostração do Teorema de Kleiner dada por Wilking [25] que faz uso de espaços de Alexandrov.

Nesta dissertação, o teorema principal será composto pelos resultados de Kleiner e Hsiang-Kleiner. No Capítulo 1, apresentamos algumas ferramentas de topologia algébrica, topologia diferencial e alguns fatos sobre fibrados suaves. O Teorema de Freedman será apresentado no Capítulo 2. O teorema principal será apresentado no Capítulo 3. Finalmente, no Capítulo 4 damos alguns exemplos de variedades curvadas não negativamente. Aqui também mostramos que o teorema principal dá uma

4 SUMÁRIO

classificação completa. Este último capítulo foi escrito com o ânimo de dar sugestões para pesquisas futuras. Mais informação pode-se encontrar nos artigos [10] e [27].

Capítulo 1

Conceitos preliminares

Others [topological invariants] were discovered by Poincaré
They are all tied up with his homology theory which is perhaps
the most profound an far reaching creation in all topology.

S. Lefschetz

La topologie est précisément la discipline mathématique qui permet la passage du local au global.

R. Thom

Neste capítulo apresentamos as ferramentas de topologia algébrica, topologia diferencial e teoria de fibrados, que serão usadas nesta dissertação. As ferramentas de geometria que logo usaremos são encontradas em [5], [18] e [22].

1.1 Alguns resultados de topologia algébrica

Os invariantes topológicos que usaremos neste trabalho são homologia, cohomologia e grupos de homotopias. O seguinte teorema dos coeficiente universais estabelece relações entre homologia e cohomologia para espaços topológicos em geral.

Teorema 1 ([12] p.195). Para todo $n \in \mathbb{Z}$, existe uma seqüência curta, exata e natural

$$0 \rightarrow Ext(H_{n-1}(X), G) \rightarrow H^n(X, G) \rightarrow Hom(H_n(X), G) \rightarrow 0$$

que cinde porém não naturalmente.

Observação 1. Para os cálculos dos grupos Ext(H,G) e Hom(H,G) podemos usar alguns das seguintes propiedades:

- (a) $Ext(H \oplus H', G) = Ext(H, G) \oplus Ext(H', G)$
- (b) Ext(H,G) = 0, se H é livre.
- (c) $Ext(\mathbb{Z}_n, G) = G/nG$
- (d) $Ext(H,\mathbb{Z})$ é isomorfo ao subgrupo de torsão de H, se H é finitamente generado.
- (e) $Hom(H,\mathbb{Z})$ é isomorfo à parte livre de H, se H é finitamente gerado.

O seguinte teorema responde à pergunta de como podemos calcular o grupo de homologia de um produto cartesiano de dois espaços topológicos a partir da homologia de cada um deles.

Teorema 2 (Fórmula de Künneth, [12] p.274). Para todo $n \in \mathbb{Z}$, existe uma seqüência curta, exata e natural

$$0 \rightarrow \bigoplus_{i=1}^{n} (H_i(X) \otimes H_{n-i}(Y)) \rightarrow H_n(X \times Y) \rightarrow \bigoplus_{i=1}^{n} (Tor(H_i(X), H_{n-i-1}(Y))) \rightarrow 0$$

que cinde porém não naturalmente.

Observação 2. Para os cálculos dos grupos Tor(A, B) podemos usar alguns das seguintes propiedades:

- (a) Tor(A, B) = Tor(B, A)
- (b) $Tor(\bigoplus_i A_i, B) = \bigoplus_i Tor(A_i, B)$.
- (c) Tor(A, B) = 0, se A ou B é livre ou mais geralmente se são livre de torsão.
- (d) Tor(A, B) = Tor(T(A), B), onde T(A) é o subgrupo de torsão de A.
- (e) $Tor(\mathbb{Z}_n, A) = Ker(A \to A, x \mapsto nx).$

Em muitos espaços topológicos X podemos encontrar subespaços topológicos A e B cujos interiores recubram X. Nestos casos podemos encontrar a cohomologia de X a partir das cohomologias de A e B e $A \cap B$. Este resultado é descrito no seguinte teorema.

Teorema 3 (Mayer-Vietoris, [12] p.204). $Seja X = int(A) \cup int(B)$, então existe uma seqüência exata

$$\dots \quad H^n(X) \quad \rightarrow \quad H^n(A) \oplus H^n(B) \quad \rightarrow \quad H^n(A \cap B) \quad \rightarrow \quad H^{n+1}(X) \quad \rightarrow \quad \dots$$

O seguinte resultado de Hurewicz mostra que para espaços topológicos simplesmente conexos, o primeiro grupo de homologia não trivial é isomorfo ao primeiro grupo de homotopia não trivial.

Teorema 4 (Hurewicz, [12] p.366). Se o espaço é (n-1)-conexo com $n \ge 2$, então $H_i(X) = 0$, para 0 < i < n e $\pi_n(X) = H_n(X)$.

Para variedades topológicas fechadas¹ e orientáveis temos uma dualidade entre homologia e cohomologia.

Teorema 5 (Dualidade de Poincaré, [12] p.241). Se M é uma n-variedade fechada orientável com classe fundamental² $[M] \in H_n(M; \mathbb{Z})$, então a aplicação $D: H^k(M; \mathbb{Z}) \longrightarrow H_{n-k}(M; \mathbb{Z})$ definida por $D(\alpha) = [M] \cap \alpha$ é um isomorfismo para todo k.

No caso de variedades suaves os resultados são melhores. Aqui podemos definir grupos de cohomologia como o quociente de formas fechadas e formas exatas. Esta cohomologia é chamada a cohomologia de de Rham, e como é de esperar é isomorfa ao grupo de cohomologia singular com coeficientes nos reais. Melhor ainda, considerando o álgebra graduada dos grupos de cohomologia de de Rham e o álgebra graduada dos grupos de cohomologia singular com coeficientes nos reais, com o produto \cup , então temos um isomorfismo de álgebras entre estas cohomologias.

Teorema 6 (De Rham, [24]). Seja M uma variedade suave. Seja também $t: |K| \longrightarrow M$ uma triangulação de M. Denotemos por $\Omega^*(M)$ e $S^*_{\infty}(M)$ o complexo de de Rham e o complexo de cocadeias singulares suaves³, respectivamente. Então a aplicação $I: \Omega^*(M) \longrightarrow S^*_{\infty}(M)$ definida por $I(\omega)(\sigma) = \int_{\sigma} \omega$, induz um isomorfismo de álgebras $I: H^*_{DR}(M) \longrightarrow H^*(M, \mathbb{R})$.

Além da cohomologia de de Rham existe outra cohomologia para uma variedade suave. Esta se define analogamente à cohomologia de de Rham com a diferenca que unicamente consideramos

¹Uma variedade fechada é uma variedade compacta sem bordo

²Para uma n-variedade M fechada e orientada podemos definir a classe fundamental como um gerador do grupo cíclico $H_n(M,\mathbb{Z})$. Esta também pode ser definida como a classe de homologia singular representada pela soma dos n-simplexos de uma triangulação de M, onde cada simplexo tem a orientação induzida da orientação de M. Esta classe é independente da triangulação.

³Para uma definição deste complexo ver [20] ou [24]

formas com suporte compacto. Para uma variedade M esta cohomologia é denotada por $H_c^*(M)$. Para um estudo de esta cohomologia ver [3]. A versão do teorema 5 usando formas é dado pelo seguinte:

Teorema 7 ([3], p.44). Seja M uma n-variedade fechada e orientável. Então a aplicação

$$\int: H^q(M) \otimes H^{n-q}_c(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$

definida pela integral do produto wedge de dois formas é não degenerada, ou equivalentemente

$$H^q(M) \cong (H_c^{n-q}(M))^*.$$

O teorema anterior nos permite definir a noção de o dual de Poincaré de uma subvariedade orientada e fechada.

Definição 1. Seja S uma k-subvariedade orientada e fechada de uma n-variedade orientada M. Então definimos o dual de Poincaré de S como a classe de cohomologia $[\eta_S] \in H^{n-k}(M)$ definida por

$$\int_{S} \omega = \int_{M} \omega \wedge \eta_{S},$$

para todo $\omega \in H_c^k(M)$.

1.2 Alguns resultados de topologia diferencial

As questões que a topologia diferencial tenta responder são globais. Por exemplo, dadas duas variedades, quando podemos mergulhar uma na outra?. A solução a este problema é feito obtendo-se objetos geométricos invariantes por difeomorfismos que nos permita decidir quando uma variedade pode ser mergulhada na outra e de que forma. Muitos resultados nesta área são baseados ao último no conceito de transversalidade como já nos mostram nas referências [11] e [13]. Este conceito importante é dado a seguir.

Definição 2 (Transversalidade). Seja $f: M \longrightarrow N$ uma aplicação suave. Diremos que f é transversal a uma subvariedade $Z \subseteq N$, se:

$$Im(df_x) + T_{f(x)}Z = T_{f(x)}N \forall x \in f^{-1}(Z)$$

Escreveremos $f \pitchfork Z$ para significar que f é transversal a Z.

Como uma consequência imediata temos o seguinte resultado:

Teorema 8 ([11] p.28). Se $f: M \longrightarrow N$ é transversal a Z^l , então $f^{-1}(Z)$ é uma subvariedade mergulhada de M de codimensão l e $T_x f^{-1}(Z) = (df_x)^{-1}(T_{f(x)}Z)$ para todo $x \in f^{-1}(Z)$.

Em particular, quando f é a inclusão de M em N e $f \pitchfork Z$ (neste caso diremos que M é transversal a Z e escreveremos $M \pitchfork Z$) temos que $f^{-1}(Z) = M \cap Z$.

Corolário 1. Sejam M e Z subvariedades de N. Se M é transversal a Z, então $M \cap Z$ é uma subvariedade de N e:

- (a) $T_x(M \cap Z) = T_xM \cap T_xZ$.
- (b) $cod(M \cap Z) = cod(M) + cod(Z)$.

O seguinte teorema nos mostra que dadas duas subvariedades de uma variedade, podemos perturbar continuamente uma delas de tal jeito que ambas sejam transversais.

Teorema 9 ([11], p.70). Para qualquer aplicação suave $f: M \longrightarrow N$, e qualquer subvariedade Z da variedade N existe uma aplicação suave $g: M \longrightarrow N$ homotopica a f tal que $g \pitchfork Z$.

Sejam $f: M \longrightarrow N$ uma aplicação suave e Z uma subvariedade de N tais que $f \pitchfork Z$. Suponhamos que M e Z são compactas e que dim(M) + dim(Z) = dim(N). Então $f^{-1}(Z)$ é um número finito de pontos. Assim podemos definir outro conceito importante.

Definição 3 (Número de interseção orientado). Para cada $p \in f^{-1}(Z)$ definimos o número de orientação em p como +1 se

$$df_p(T_pM) \oplus T_{f(p)}Z = T_{f(p)}N,$$

como espaços vetorias orientados. Caso contrario, definimos o número de orientação em p como -1. A soma dos números de orientações nos pontos de $f^{-1}(Z)$ é chamado o número de interseção orientado do par (f, Z) e é denotado por I(f, Z).

Como é de esperar, a noção de número de interseção orientado depende somente da classe de homotopia da aplicação. Isto é:

Teorema 10. Aplicações homotópicas sempre têm o mesmo número de interseção orientado.

Agora construímos novas variedades por meio do conceito de soma conexa de variedades. Suponhamos que M e N são variedades com bordo, e que existe um difeomorfismo $f:\partial M\longrightarrow \partial N$. Então $M\cup_f N$ é uma variedade topológica contendo copias naturais de M e N. Identifiquemos M e N com suas imagens em $M\cup_f N$. Fazemos $\partial M=\partial N=V$. Por meio de vizinhanças de V em M e N encontramos um homeomorfismo de uma vizinhança U de V em $M\cup_f N$ sobre $V\times\mathbb{R}$ tomando $x\in V$ a (x,0), e que leva suavemente $U\cap M$ e $U\cap N$ a $V\times[0,\infty)$ e $V\times(-\infty,0]$, respectivamente. Damos a U a estrutura diferenciável induzida por este homeomorfismo. Então $M\cup_f N$ tem uma estrutura diferenciável obtida a partir das estructuras de M, N e U. O seguinte teorema mostra que qualquer estrutura diferenciável sobre $M\cup_f N$ que estende a estructura diferenciável de M e N é única salvo difeomorfismos.

Teorema 11 ([13], p.184). Seja $f: \partial M \longrightarrow \partial N$ um difeomorfismo. Então se α e β são duas estruturas diferenciáveis sobre $W = M \cup_f N$ que induzem a estrutura original sobre M e N, então existe um difeomorfismo $h: W_{\alpha} \longrightarrow W_{\beta}$ tal que $h \mid_{M} = id$.

Em particular, se M e N são n-variedades orientáveis sem bordo e $D_M \subseteq M$, $D_N \subseteq N$ são discos n-dimensionais com as orientações induzidas, e se $f:D_M \longrightarrow D_N$ é um difeomorfismo que inverte orientação, então podemos definir uma variedade $M\#N=(M\setminus D_M)\cup_{\partial f}(N\setminus D_N)$, onde $\partial f=f\mid_{\partial D_M}:D_M\to D_N$. O seguinte teorema implica que a classe de difeomorfismo de M#N independe da função f, desde que f seja um difeomorfismo que inverte a orientação entre n-discos orientados de M e N. A variedade M#N é chamada a soma conexa de M e N.

Teorema 12 ([13], p.185). (a) Se $f, g : \partial M \simeq \partial N$ são difeomorfismos isotópicos, então $M \cup_f N \simeq M \cup_q N$.

(b) Se $f, g: D^n \longrightarrow M$ são mergulhos do n-disco sobre uma n-variedade M conexa e orientável, tal que ambos preservam ou ambos invertem orientação, então f e g são isotópicos.

Usando o procedimento de colagem de variedades temos a seguinte classificação de superfícies compactas orientáveis.

Teorema 13 ([13] p.204). Seja M una superfície conexa compacta orientável sem bordo. Então existe um único inteiro $p \geq 0$ tal que M é uma superfície orientável de género p. O inteiro p é determinado pela formula $\chi(M) = 2 - 2p$. Em particular $\chi(M)$ é par $e \leq 2$.

1.3. FIBRADOS 11

1.3 Fibrados

A teoria de fibrados suaves (especialmente fibrados vetoriais) é uma das mais fortes ligações entre Topologia Diferencial e Topologia Algébrica. Como exemplos de fibrados vetoriais podemos tomar o fibrado tangente e o fibrado normal de uma variedade. Agora definimos esta noção:

Definição 4. Sejam F, E, B variedades suaves e G um grupo de Lie agindo efetivamente sobre F. Diremos que $\pi: E \longrightarrow B$ é um fibrado sobre o espaço base B, com espaço total E, fibra F, e grupo estructural G, se existe uma cobertura por abertos $\{U_{\alpha}\}$ de B e difeomorfismos:

$$\Phi_{\alpha} = (\pi, \phi_{\alpha}) : \pi^{-1}(U_{\alpha}) \longrightarrow U_{\alpha} \times F$$

tais que $\phi_{\alpha} \circ (\phi_{\beta}|_{\pi^{-1}(x)})^{-1} \in G$. A colecção $\{\phi_{\alpha} \circ (\phi_{\beta}|_{\pi^{-1}(x)})^{-1}\}$ é chamado um cociclo.

Definição 5. Sejam ξ e ξ' fibrados com a mesma fibra F e grupo estructural G e mesma base B. Dizemos que ξ e ξ' são isomorfos se existe uma aplicação $F: E_{\xi} \to E_{\xi'}$ tal que:

- (a) F restrita a cada fibra $\pi_{\xi}^{-1}(x)$ é um difeomorfismo sobre a fibra $\pi_{\xi'}^{-1}(x)$.
- (b) Dadas trivializações $\{U_{\alpha}, (\pi_{\xi}, \phi_{\alpha})\}\$ e $\{V_{\beta}, (\pi_{\xi'}, \psi_{\beta})\}\$ de ξ e ξ' respectivamente, a aplicação $\psi_{\beta} \circ F \circ (\phi_{\alpha} \mid_{\pi_{\xi}^{-1}(x)})^{-1} \in G$, para todo $x \in U_{\alpha} \cap V_{\beta}$ e a aplicação $h_{\alpha\beta} : U_{\alpha} \cap V_{\beta} \to G$, $p \mapsto \psi_{\beta} \circ F \circ (\phi_{\alpha} \mid_{\pi_{\xi}^{-1}(x)})^{-1}$ é suave.

A aplicação F é chamada um isomorfismo entre ξ e ξ' .

Definição 6 (Redução do grupo estrutural). ⁴ Dado um fibrado vetorial ξ com cociclo $\{g_{\alpha\beta}\}$, diremos que o grupo estrutural $GL(n,\mathbb{R})$ de E pode ser reduzido a um subgrupo H de $GL(n,\mathbb{R})$ se existe um cociclo equivalente a $\{g_{\alpha\beta}\}$ com valores em H. Em particular se o grupo estrutural de ξ pode ser reduzido a $GL(n,\mathbb{R})^+$, então diremos que ξ é orientável. Diremos que ξ é orientado se temos fixado um cociclo a valores em $GL(n,\mathbb{R})^+$, e a trivialização associada a este cociclo é chamada de orientada.

Uma forma de conexão ω sobre um S^1 -fibrado principal $\xi = \pi : P \longrightarrow M$, é uma 1-forma que é invariante à direita e que restrita a cada fibra é a forma $d\theta$ invariante a esquerda definida por $\int_{S^1} d\theta = 2\pi$. Seja $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ uma trivialização de ξ . Então podemos escrever ω sobre cada $\pi^{-1}(U_\alpha)$

 $^{{}^4}GL(n,\mathbb{R})^+$ denota o conjunto das matrizes não singulares com determinante positivo

12

como

$$\sum_{i} f_i(x) dx_i + d\theta,$$

onde $x_1,...,x_m$ são as coordenadas sobre U_α e $d\theta$ é a 1-forma sobre S^1 dada acima. Logo

$$d\omega = \sum_{i,j} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) dx_j dx_i,$$

em $\pi^{-1}(U_{\alpha})$. Logo podemos definir uma única 2-forma fechada sobre M tal que $\pi^*(\Omega) = d\omega$. Não é difícil ver que a classe $[\Omega] \in H^2_{DR}(M)$ é independente da forma de conexão ω .

Definição 7 (Classe de Euler). Definimos a forma de curvatura do S^1 -fibrado principal $\xi = \pi : P \longrightarrow M$ como a classe $[\Omega] \in H^2(M)$. A classe de Euler real de ξ é definida por $\frac{1}{2\pi}[\Omega]$ e será denotada por $e_{\mathbb{R}}(\xi)$.

O seguinte resultado afirma que a classe de Euler pertence a $H^2(M; \mathbb{Z})$.

Teorema 14 ([20], p.252). A classe de cohomologia $e_{\mathbb{R}}(\xi)$ é uma classe de cohomologia integral, i.e.

$$\int_{\sigma} e_{\mathbb{R}}(\xi) \in \mathbb{Z},$$

para todo 2-simplexo orientado.

O seguinte teorema mostra que as classes de isomorfismos de S^1 -fibrados orientados estão completamente determinados por suas classes de Euler.

Teorema 15 ([20], p.246). Existe uma correspondência biunívoca entre a classes de isomorfismos de S^1 -fibrados orientados sobre M e classes de cohomologia de $H^2(M, \mathbb{Z})$, dado por

$$[\xi] \longmapsto e(\xi) \in H^2(M, \mathbb{Z}).$$

Para fibrados vetoriais existe outra classe de cohomologia chamada cohomologia vertical compacta. Se $E \longrightarrow M$ é um fibrado vetorial, esta cohomologia é denotada por $H_{cv}^*(E)$, e é definida como a cohomologia do complexo $\Omega_{cv}^*(E) = \{$ formas diferenciáveis sobre E cuja restrição a cada fibra tem supporte compacto $\}$. Para fibrados vetoriais orientados de posto n, temos uma classe

1.3. FIBRADOS

 $\Phi \in H^n_{cv}(E)$, chamada a classe de Thom do fibrado, a qual pode ser definida como a classe representada por uma forma em $\Omega^n_{cv}(E)$ cuja restrição a cada fibra F represente um gerador de $H^n_c(F)$. O teorema que se segue dá uma interpretação geométrica da classe de Thom.

Teorema 16 ([3], p.67). Seja S uma subvariedade fechada e orientada da variedade orientada M. Então o dual de Poincaré de S e a classe de Thom do fibrado normal de S podem ser representados pelas mesmas formas.

Analogamente podemos definir a classe de Euler de um S^n -fibrado orientado⁵. Também podemos definir a classe de Euler de um fibrado vetorial orientado E de posto n como a classe de Euler do S^{n-1} -fibrado induzido de E^6 . O seguinte resultado da uma interpretação geométrica da classe de Euler de um fibrado vetorial orientado com base compacta e orientada.

Teorema 17 ([3], p.134). Seja $\pi : E \longrightarrow M$ um fibrado vetorial orientado sobre uma variedade M compacta e orientável. Seja também s uma seção transversal. Então a classe de Euler e(E) é o dual de Poincaré da subvariedade determinada pelo conjunto de zeros de s.

 $^{^5 \}mathrm{Um}\ S^n$ fibrado é um fibrado com fibra S^n

 $^{^6}$ Pode-se provar que a classe de isomorfismo do S^{n-1} -fibrado induzido de E é independente da métrica

 $^{^7\}mathrm{Por}$ uma seção transversal significa uma seção cuja imagem é transversal à seção nula

Capítulo 2

O Teorema de Freedman

Neste capítulo estudamos as relações entre espaços topológicos e formas unimodulares. Na seção 2.1 apresentamos alguns resultados para formas unimodulares. O conceito de forma de interseção será apresentado na seção 2.2. Finalmente, na seção 2.3 estudamos o Teorema de Freedman por meio de alguns exemplos.

2.1 Formas integrais

Nesta seção trabalharemos com formas bilineares do tipo

$$\beta: G \times G \longrightarrow \mathbb{Z}$$

onde G é um grupo abeliano livre e finitamente gerado. Estas formas são chamadas formas integrais. Dada uma base de G, podemos representar estas formas por matrizes cujas entradas pertencem a \mathbb{Z} . Em particular, o determinante de uma forma integral não degenerada é ± 1 . Assim, as formas integrais não degeneradas são chamadas unimodulares. Duas formas integrais sobre G são chamadas equivalentes se existe um autormorfismo de G que preserva formas bilineares. Como no caso de formas bilineares sobre espaços vetorias de dimensão finita, duas formas integrais são equivalentes se e somente as matrizes associadas, digamos A e B, são relacionadas pela relação

$$A = PBP^t, (2.1)$$

onde P é uma matriz não singular. Isto reduz o problema de classificar as formas integrais salvo equivalência ao problema de determinar matrizes relacionadas como acima. Não obstante, o problema

de classificação de formas unimodulares é muito difícil, e depende muito de seu posto. Para um estudo de formas unimodulares ver [19].

Agora damos a noção de paridade para formas.

Definição 8. Uma forma integral β sobre G é par se $\beta(x,x) \equiv 0 \pmod{2}$ para todo $x \in G$. Se β não é par diremos que é ímpar.

Como para formas definidas sobre espaços vetoriais temos as noções de positividade e assinatura.

Definição 9. Seja β uma forma integral sobre G. Diremos que β é definida positiva (negativa) se a forma

$$\mathbb{Q} \otimes \beta : (\mathbb{Q} \otimes G) \times (\mathbb{Q} \otimes G) \longrightarrow \mathbb{Q}$$
$$(r \otimes h, s \otimes g) \longmapsto rs\beta(h, g).$$

para todo $r, s \in \mathbb{Q}$ e todo $h, g \in G$, é definida positiva (negativa, respectivamente). Uma forma unimodular que não é definida positiva nem negativa é chamada indefinida. Definimos a assinatura de β como a assinatura de $\mathbb{Q} \otimes \beta$. Definimos o posto de uma forma unimodular definida sobre G como a dimensão de G.

O seguinte resultado dá uma restrição para formas unimodulares.

Teorema 18. A assinatura de uma forma unimodular é divisível por 8.

As formas unimodulares indefinidas são determinadas, salvo equivalência, por seu posto, assinatura e paridade.

Teorema 19. Se duas formas unimodulares indefinidas têm o mesmo posto, assinatura e paridade, então elas são equivalentes.

2.2 Forma de interseção

Para uma variedade M^{2n} fechada e orientável com classe fundamental [M] temos associada uma forma bilinear

$$Q_M : H^n(M; \mathbb{Z}) \times H^n(M; \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$(\alpha, \beta) \longmapsto \langle \alpha, \beta \cap [M] \rangle = \langle \alpha \cup \beta, [M] \rangle.$$

 Q_M é chamada a forma de interseção de M. No que se segue daremos uma interpretação geométrica a estas formas de interseção.

17

Consideremos o caso n = 1. Sejam $\alpha, \beta \in H^1(M; \mathbb{Z})$, e sejam γ_{α} e γ_{β} representantes dos duais de Poincaré de α e β . Precisamos da seguinte

Proposição 1. Toda classe de homologia em $H_1(M; \mathbb{Z})$, pode ser representada por uma 1-variedade mergulhada compacta orientada.

Demonstração. Seja $x \in H_1(M; \mathbb{Z})$ e $\sum_i k_i \sigma_i$, um cociclo $Z_1(M; \mathbb{Z})$ representando x, onde σ_i é um 1-simplexo orientado de M. Então a curva fechada $\sum_i k_i \sigma_i$ é homotópica módulo bordo (logo homóloga) a uma união de curvas suaves. Cada curva que se auto-irtersecta é homóloga a uma união de curvas suaves simples. Então x é representado por uma união disjunta de curvas suaves simples e orientadas.

Pela proposição anterior podemos supor que γ_{α} e γ_{β} são 1-variedades suaves compactas. Pelo teorema 9 também podemos supor que γ_{α} e γ_{β} são transversais. Tomemos vizinhanças tubulares T_{α} , T_{β} suficientemente pequenas de γ_{α} e γ_{β} , respectivamente, tais que:

- (a) Se $T_{\alpha} \cap T_{\beta} = \bigcup_{i=1}^{m} U_i$ é a decomposição em componentes conexas, então para cada U_i existe um único ponto $p_i \in (\gamma_{\alpha} \cap \gamma_{\beta}) \cap U_i$.
- (b) Cada U_i está contida numa vizinhança coordenada de M com coordenadas orientadas (x, y) e as curvas γ_{α} e γ_{β} são dados por x = 0 e y = 0 em U_i , respectivamente.

Sejam ω_{α} e ω_{β} as classes de Thom de T_{α} e T_{β} . Logo $\omega_{\alpha} \wedge \omega_{\beta}$ tem porte compacto em $\cup_{i}U_{i}$. Em cada U_{i} , temos $\omega_{\alpha} = \pm f(x)dx$ (+ se dx define a orientação de γ_{α} e - caso contrário) e $\omega_{\beta} = \pm f(y)dy$ (+ se dy define a orientação de γ_{β} e - caso contrario), onde f é uma função chapéu com suporte compacto e integral 1. Assim

$$\langle \alpha \cup \beta, [M] \rangle = \int_{M} \omega_{\alpha} \wedge \omega_{\beta}$$

$$= \sum_{X} \pm \int_{M} f(x)f(y)dxdy$$

$$= \sum_{X} \pm 1$$

$$= I(\gamma_{\alpha}, \gamma_{\beta})$$

onde na primeira igualdade estamos usando os teoremas 6 e 16. Isto justifica o nome da forma de

interseção, pelo menos para dimensão um.

Agora vejamos o caso n = 2. Precisamos da seguinte

Proposição 2. Seja M uma 4-variedade suave, fechada e orientada. Então todo elemento de $H_2(M; \mathbb{Z})$ pode ser representado por uma superfície mergulhada.

Demonstração. Pelo teorema 15, para cada $x \in H_2(M; \mathbb{Z})$, existe um único S^1 -fibrado $L_{\alpha} \longrightarrow M$, tal que $e(L_{\alpha}) = x$. Pelo teorema 17 a classe de cohomologia do conjunto de zeros Z de uma seção transversal de L_{α} (que é um ciclo) é dual à classe de Euler $e(L_{\alpha}) = x$. Assim D(x) = [Z]. Como x é arbitrário em $H_2(M; \mathbb{Z})$ a proposição se segue.

Proposição 3. Sejam α , $\beta \in H^2(M; \mathbb{Z})$ e Σ_{α} , $\Sigma_{\beta} \in H_2(M; \mathbb{Z})$ superfícies suaves representando $D(\alpha)$ e $D(\beta)$. Então $Q_M(\alpha, \beta)$ é o número de interseção $I(\Sigma_{\alpha}, \Sigma_{\beta})$.

Demonstração. A prova é essencialmente a mesma que o caso anterior. Pelo teorema 9 e o axioma da homotopia para a cohomologia de Rham, podemos supor que Σ_{α} e Σ_{β} são transversais. Tomemos vizinhanças tubulares T_{α} e T_{β} suficientemente pequenas de Σ_{α} e Σ_{β} respectivamente, tais que:

- (a) Se $T_{\alpha} \cap T_{\beta} = \bigcup_{i=1}^{m} U_i$ é a decomposição em componentes conexas, então para cada i existe um único ponto $p_i \in U_i \cap \Sigma_{\alpha} \cap \Sigma_{\beta}$.
- (b) Cada U_i está contido numa vizinhança coordenada de M, com coordenadas (x, y, u, v) orientadas e as superfícies Σ_{α} e Σ_{β} são dadas por x = y = 0 e u = v = 0 sobre U_i , respectivamente.

Sejam ω_{α} e ω_{β} as classes de Thom de T_{α} e T_{β} . Logo $\omega_{\alpha} \wedge \omega_{\beta}$ tem suporte compacto sobre $\cup_{i}U_{i}$. Em cada U_{i} temos $\omega_{\alpha} = \pm f(x,y)dxdy$ (+ se dxdy é a orientação de Σ_{α} e - caso contrario) e $\omega_{\beta} = \pm f(u,v)dudv$ (+ se dudv é a orientação de Σ_{β} e - caso contrário), onde $f: \mathbb{R}^{2} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma forma com suporte compacto ao redor do origem e com integral igual a 1. Então

$$\langle \alpha \cup \beta, [M] \rangle = \sum_{x} \pm \int_{M} \omega_{\alpha} \wedge \omega_{\beta}$$

$$= \sum_{x} \pm \int_{\mathbb{R}^{4}} f(x, y) f(u, v) dx dy du dv$$

$$= \sum_{x} \pm 1$$

$$= I(\Sigma_{\alpha}, \Sigma_{\beta}).$$

2.3 O Teorema de Freedman

Nosso interesse em formas de interseção é devido ao seguinte Teorema de Freedman.

Teorema 20 ([7] e [8]). Para toda forma integral simétrica unimodular Q existe uma 4-variedade topológica M fechada, simplesmente conexa tal que $Q_M = Q$. Se Q é par, esta variedade é única salvo homeomorfismos. Se Q é ímpar, existem exatamente dois tipos de homeomorfismos diferentes com a forma de interseção dada. No máximo um destes tipos de homeomorfismos admite uma estrutura suave. Assim, as 4-variedades suaves simplesmente conexas são determinadas, salvo homeomorfismos, por suas formas de interseção.

A prova deste teorema envolve ferramentas avançadas de Topologia Algébrica e por razões de tempo e espaço não a apresentamos aqui. Não obstante, nos proporemos a entender o teorema observando alguns espaços com suas formas de interseção. Antes precisamos da seguinte

Proposição 4. Sejam M e N n-variedades fechadas e orientáveis. Então

- (a) $Q_{-M} = -Q_M$.
- (b) $Q_{M\#N} = Q_M \oplus Q_N$.

Demonstração. A parte (a) se segue da igualdade [-M] = -[M]. Provemos a parte (b). Sejam $\alpha, \beta \in H^2(M; \mathbb{Z})$. A inclusão $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$ induz um monomorfismo $H^2(M; \mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(M; \mathbb{R})$. Então podemos considerar α e β como classe de cohomologia de $H^2(M; \mathbb{R})$. Sejam ω e η as 2-formas sobre M # N correspondentes a α e β , respectivamente, por meio do isomorfismo de de Rham. Então

$$\langle \alpha \cup \beta, [M] \rangle = \int_{M \# N} \omega \wedge \eta.$$

Por outro lado, sejam $\{U, V\}$, $\{U, W_1\}$ e $\{V, W_2\}$ coberturas por abertos de M#N, M e N respectivamente e tais que $U \cap V$, $U \cap W_1$ e $V \cap W_2$ sejam do mesmo tipo de homotopia de S^3 , e os abertos W_1 e W_2 sejam difeomorfos a um disco D^4 4-dimensional. Então temos as seguintes seqüências exatas de Mayer-Vietoris

Desde que $H^1_{DR}(S^3) = H^2_{DR}(S^3) = H^2_{DR}(D^4) = 0$, temos os isomorfismos $H^2_{DR}(M\#N) \cong H^2_{DR}(U) \oplus H^2_{DR}(V)$, $H^2_{DR}(M) \cong H^2_{DR}(U)$ e $H^2_{DR}(N) \cong H^2_{DR}(N)$, dados pelas restrições respectivas. Logo $[\omega] = [\omega_1] + [\omega_2]$, $[\eta] = [\eta_1] + [\eta_2]$, onde ω_1 , η_1 são extensões de ω_1 , η_2 a M#N respectivamente, com suporte nas proximidades de \bar{U} , assim podemos pensar que estas formas estão definidas em M. Analogamente para ω_2 , η_2 . Observemos que as formas são fechadas, suas classes de cohomologia não dependem das extensões, e suas correspondientes classes em $H^2(M;\mathbb{R})$ são integrais. Logo

$$\begin{split} \int_{M\#N} \omega \wedge \eta &= \int_{M\#N} \omega_1 \wedge \eta_1 + \omega_2 \wedge \eta_2 + \omega_1 \wedge \eta_2 + \omega_2 \wedge \eta_1 \\ &= \int_{M} \omega_1 \wedge \eta_1 + \int_{N} \omega_2 \wedge \eta_2 + \int_{\overline{U} \cap V} \omega_1 \wedge \eta_2 + \omega_2 \wedge \eta_1. \end{split}$$

Como $U\cap V$ é do mesmo tipo de homotopia de S^3 , o último somando é zero. Logo a proposição se segue. \Box

Exemplo 1. (a) A Esfera S^4 . Como $H^2(S^4; \mathbb{Z}) = 0$, a forma de interseção de S^4 é trivial.

(b) O plano projetivo complexo $\mathbb{C}P^2$. Consideremos $\mathbb{C}P^2 = (\mathbb{C}^3 \setminus \{0\})/\mathbb{C}^*$, onde \mathbb{C}^* age por multiplicação em cada coordenada. Sejam $\{\psi_1, \psi_2, \psi_3\}$ as cartas coordenadas usuais (chamadas afins) em $\mathbb{C}P^2$. Por exemplo ψ_1 é definido como:

$$\psi_1 : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}P^2$$

$$(z_1, z_2) \longmapsto [1, z_1, z_2]$$

A orientação de $\mathbb{C}P^2$ é dado pelas cartas coordenadas afins. Por outro lado, usando cohomologia simplicial podemos ver que a classe de homologia de $H_1 = \{[0, z, w] : (z, w) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}\}$ é um gerador de $H^2(\mathbb{C}^2; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. Definimos $H: H_1 \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}P^2, ([0, z, w]) = (\cos(t\frac{\pi}{2})z, \sin(t\frac{\pi}{2})z, w)$. Se fazemos $H_2 = Im(H(_, 1))$, então H é uma homotopia de H_1 a H_2 e $H_1 \cap H_2 = \{[0, 0, 1]\}$. A orientação sobre H_1 é dada pela identificação natural com $\mathbb{C}P^1$, e ela induz uma orientação sobre H_2 por fazer que o difeomorfismo $H(_, 1)$ preserve orientação. A carta afim $\psi_3: \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}P^2$ dado por $(x, y, u, v) \longmapsto [x + iy, u + iv, 1]$ é um sistema de coorde-

2.3. O TEOREMA DE FREEDMAN

21

nadas orientado de $\mathbb{C}P^2$ ao redor do ponto [0,0,1]. Então $\{\frac{\partial}{\partial u},\frac{\partial}{\partial v}\}$ e $\{\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\}$ são referenciais orientados de $H_1\cap U_3$ e $H_2\cap U_3$, respectivamente. Isto implica que H_1 e H_2 são transversais e o índice de interseção $I(H_1,H_1)=I(H_1,H_2)=1$, já que $\{\frac{\partial}{\partial u},\frac{\partial}{\partial v},\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\}\mid_{[0,0,1]}$ é uma base orientada de $T_{[0,0,1]}\mathbb{C}P^2$. Assim a forma de interseção de $Q_{\mathbb{C}P^2}$ é representada na base $D([H_1])$ pela matriz [1], onde D significa o dual de Poincaré.

- (c) O plano projetivo complexo com a orientação oposta $-\mathbb{C}P^2$. Pela proposição 4 a matriz da forma de interseção é dado por [-1].
- (d) O produto cartesiano $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1 = S^2 \times S^2$. Aqui temos $H_2(S^2 \times S^2; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, e uma base é dada por $\{[S^2 \times \{(1,0,0)\}], [\{(1,0,0)\} \times S^2]\}$. Desde que $S^2 \times \{(1,0,0)\}$ é homotópico a $S^2 \times \{(0,1,0)\}$ em $S^2 \times S^2$, e ambos são disjuntos, temos que $Q_{S^2 \times S^2}([S^2 \times \{(1,0,0)\}], [S^2 \times \{(1,0,0)\}]) = 0$. como $S^2 \times S^2$ tem a orientação produto, temos que $Q_{S^2 \times S^2}([S^2 \times \{(1,0,0)\}], [\{(1,0,0)\} \times S^2]) = 1$. Logo $Q_{S^2 \times S^2}$ é respresentada na base $\{D([S^2 \times \{(1,0,0)\}]), D([\{(1,0,0)\} \times S^2])\}$ pela matriz

$$\left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}\right]$$

.

(e) As somas conexas $\mathbb{C}P^2\#\mathbb{C}P^2$ e $\mathbb{C}P^2\#-\mathbb{C}P^2$. Pela proposição 4, as formas de interseção $\mathbb{C}P^2\#\mathbb{C}P^2$ e $\mathbb{C}P^2\#-\mathbb{C}P^2$ são representadas pelas matrizes

$$\left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right], \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{array}\right],$$

respectivamente.

Observação 3. Salvo sinal e equivalência, não existem outras formas de interseção 1 com posto 10 além das formas dadas no exemplo de anterior.

¹Isto quer dizer formas integrais simétricas e unimodulares.

Capítulo 3

O teorema principal

Para a prova de nosso teorema principal seguimos a prova de Kleiner já que podemos usar unicamente ferramentas básicas de geometria. Na seção 3.1 provamos alguns lemas relativos à geometria das variedades riemannianas com curvatura não-negativa, e outros com adição de alguma simetria contínua. Na seção 3.2 apresentamos e provamos o teorema principal.

3.1 Alguns lemas

Nesta seção fixamos uma n-variedade riemanniana (M,g) conexa, compacta com curvatura nãonegativa e denotaremos por K a curvatura seccional de M.

Lema 1. Sejam $\gamma_i: [0,S] \longrightarrow M, i=1,2$ e $\eta_0: [0,l] \longrightarrow M$ segmentos geodésicos¹. Suponhamos que $\eta_0(0) = \gamma_1(0), \, \eta_0(l) = \gamma_2(0), \, g(\eta_0'(0), \gamma_1'(0)) = g(\eta_0'(l), \gamma_2'(0)) = 0$, e que $dist(\gamma_1, \gamma_2) = L(\eta_0)^2$. Seja $tamb\'{e}m \ X: [0,1] \longrightarrow M$ um campo vetorial paralelo ao longo de η_0 , tal que $X(0) = \gamma_1'(0), X(l) = \gamma_2'(0)$. Então $\eta: [0,S] \times [0,l] \longrightarrow M$, $\eta(s,t) = exp(sX(t))$ é uma imersão isométrica totalmente geodésica plana³.

Demonstração. Seja $I=\{r\in[0,S]: \frac{\partial}{\partial t}\eta$ é um campo paralelo ao longo de $\eta\mid_{[0,r]\times\{t\}}\}$. O conjunto I é não vazio e por continuidade é um intervalo fechado. Provemos que também é aberto. Denotemos por E o fibrado sobre M que tem por fibra em $p\in M$ o Grassmanniano $G(2,T_pM)$. Então E é

 $^{^{1}}$ Isto quer dizer uma geodésica cujo campo velocidade tem comprimento igual a 1.

²Para uma variedade Riemanniana denotaremos a função distância induzida pela métrica por dist.

³Aqui sempre usamos a palavra "plana" para significar curvatura zero

compacto e a função curvatura seccional

$$K: E \longrightarrow \mathbb{R}, \sigma \longmapsto K(\sigma)$$

é continua. Então existe uma cota superior $k_0 > 0$ de K. Como as curvas $\eta \mid_{[0,S] \times \{t\}}$ são geodésicas, o campo vetorial $J_t(s) = \frac{\partial}{\partial t} \eta(s,t)$ ao longo de $\eta \mid_{[0,S] \times \{t\}}$ é um campo de Jacobi. Seja $s_1 \in I$ e denotemos por $\frac{\partial}{\partial t}$ o campo canônico primeira coordenada ao longo de $[0, s_1 + \epsilon] \times \{t\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Então, pelo Teorema de Rauch ([5], p.29)

 $|J_t(s)| \le |\frac{\partial}{\partial t}| = 1$

Logo

$$L(\eta \mid_{\{s\} \times [0,l]}) \le L(\eta_0), \forall s \in [0, s_1 + \epsilon].$$

Por hipótese $dist(\gamma_1, \gamma_2) = L(\eta_0)$, assim

$$L(\eta \mid_{\{s\} \times [0,l]}) = L(\eta_0),$$

$$|J_t(s)| = |\frac{\partial}{\partial t}| = 1.$$

Por outro lado a igualdade no Teorema de Rauch ([5], p.35) é dada somente se

$$g(R(J_t(s), \frac{\partial}{\partial s}\eta)\frac{\partial}{\partial s}\eta, J_t(s)) = 0, \forall t \in [0, l], \forall s \in [0, s_1 + \epsilon].$$

Então

$$|\frac{D}{ds}\frac{\partial}{\partial t}\eta|^{2} = \frac{d}{ds}g(\frac{D}{ds}\frac{\partial}{\partial t}\eta, \frac{\partial}{\partial t}\eta) - g(\frac{D^{2}}{ds^{2}}\frac{\partial}{\partial t}\eta, \frac{\partial}{\partial t}\eta)$$

$$= g(\frac{D^{2}}{ds^{2}}\frac{\partial}{\partial t}\eta, \frac{\partial}{\partial t}\eta)$$

$$= -g(R(\frac{\partial}{\partial s}\eta, \frac{\partial}{\partial t}\eta)\frac{\partial}{\partial s}\eta, \frac{\partial}{\partial t}\eta)$$

$$= 0.$$

Assim J_t é paralelo em $[0, s_1 + \epsilon]$. Isto implica que $[0, s_1 + \epsilon] \subseteq I$, e assim I = [0, S]. Em particular η é uma imersão isométrica. Os fatos J_t paralelo, $\eta \mid_{[0,S] \times \{t\}}$ geodésica, e $\eta \mid_{\{s\} \times [0,t]}$ minimizante

3.1. ALGUNS LEMAS 25

implicam

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}\eta} \frac{\partial}{\partial t} \eta = \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}\eta} \frac{\partial}{\partial s} \eta$$
$$= \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}\eta} \frac{\partial}{\partial t} \eta$$
$$= 0.$$

Assim a segunda forma fundamental II de η é nula, ie. η é totalmente geodesica. Para provar que η tem curvatura zero é suficiente provar que $K(X(t), \eta'_0(t)) = 0$, para todo $t \in [0, l]$. A fórmula da segunda variação da energia aplicada a η , e o fato que X é paralelo implicam

$$\frac{1}{2}E''(0) = I_l(X,X) + g(\frac{D}{ds}\frac{\partial}{\partial s}\eta, \frac{\partial}{\partial t}\eta)(t,0) \mid_{t=0}^l
= \int_0^l (g(\frac{D}{dt}X, \frac{D}{dt}X) + g(R(\frac{d}{dt}\eta, X)\frac{d}{dt}\eta, X))dt
= \int_0^l g(R(\eta'_0, X)\eta'_0, X)dt
\leq 0.$$

Logo $E''(0) \leq 0$. Como $L(\eta_0) = dist(\gamma_1, \gamma_2)$, $K(X(t), \eta'_0(t)) = -g(R(\eta'_0, X)\eta'_0, X) = 0$, para todo $t \in [0, l]$.

Definição 10. Sejam p_i, p_j, p_k pontos diferentes em M. Então definimos

- (a) $Min_{p_i}(p_j) = \{\text{segmentos geodésicos minimizantes de } p_i \text{ a } p_j\}.$
- (b) $Dir_{p_i}(p_i) = \{ \gamma'(0) : \gamma \in Min_{p_i}(p_i) \} \subset S^{n-1}T_{p_i}M.$
- (c) Consideremos o espaço métrico $S^{n-1}T_{p_i}M = \{v \in T_{p_i}M : |v| = 1\}$ com a distância ângulo \angle e definamos $\angle_{p_i}(p_j, p_k) = \angle(Dir_{p_i}(p_j), Dir_{p_i}(p_k))$.

Teorema 21. (a) Se $p_1, p_2, p_3 \in M$, então $\angle_{p_1}(p_2, p_3) + \angle_{p_2}(p_1, p_3) + \angle_{p_3}(p_1, p_2) \ge \pi$

(b) Sejam $\gamma_2 \in Min_{p_1}(p_2), \gamma_3 \in Min_{p_1}(p_3), \ com \ \angle(\gamma'_2(0), \gamma'_3(0)) = \angle_{p_1}(p_2, p_3).$ Se a igualdade em (a) se verifica, então existe uma superficie triangular $\Delta \subseteq M$, mergulhada em M, totalmente geodésica, plana, com lados geodésicos γ_2 , γ_3 e $\eta \in Min_{p_2}(p_3)$.

Demonstração. Como $K \geq 0$, o Teorema de Toponogov dado em [5], p.42, implica que existe um único⁴ triângulo $\widetilde{\Delta} \subseteq \mathbb{R}^2$, com vértices q_i , i=1,2,3, e $dist(p_i,p_j)=dist(q_i,q_j)=l_{i,j}$. Sejam $\gamma_i \in Min_{p_1}(p_i)$, i=2,3, tais que $\angle(\gamma_2'(0),\gamma_3'(0))=\angle_{p_1}(p_2,p_3)$. Usando de novo o Teorema de Toponogov temos $\angle_{p_1}(\gamma_2'(0),\gamma_3'(0))\geq \angle(\overline{q_1q_2},\overline{q_1q_3})$. Analogamente

$$\angle p_i(p_{i+1}, p_{i+2}) \ge \angle (\overline{q_i q_{i+1}}, \overline{q_i q_{i+2}}),$$

onde os índices são tomados módulo 3. Somando estas desigualdades temos (a). Se a igualdade em (a) se verifica, então as últimas desigualdades são todas igualdades. Assim, o corolário do Teorema de Toponogov em [5], p.50, prova (b).

Para terminar esta seção, fixemos uma ação isométrica $G \times M \longrightarrow M$, onde G é um grupo de Lie compacto. Usamos alguns fatos sobre ações de Grupos de Lie dados por exemplo em [6].

Definição 11. Seja $\gamma:[0,l]\longrightarrow M$ um segmento geodésico. Dizemos que γ é:

- (a) G-geodésico, se $g(\gamma'(t), T_{\gamma(t)}G(\gamma(t))) = 0^5$ para todo $t \in [0, l]$.
- (b) G-minimizante, se $L(\gamma) = dist(G(\gamma(0)), G(\gamma(l)))$.

Proposição 5. Seja $\gamma:[0,l]\longrightarrow M$ um segmento geodésico, então:

- (a) Se $g(\gamma'(0), T_{\gamma(0)}G(\gamma(0))) = 0$, então γ é G-geodésico.
- (b) Um segmento G-minimizante é G-geodésico.
- (c) Se γ é G-minimizante, então $G_{\gamma(t)}$ é constante para $t \in (0, l)$.

Definição 12 (Fibrado vertical). Seja $\eta:[0,l]\longrightarrow M$ uma G-geodésica. Definimos o fibrado vertical $Vert_{\eta}^{G}$ ao longo de η como o fibrado com base η cuja fibra em $\eta(t)$ é ⁶

$$Vert_{\eta}^G(t) = \langle T_{\eta(t)}G(\eta(t)), \{X.\eta'(t): X \in \mathfrak{g}_{\eta(t)}\} \rangle$$

para todo $t \in [0, l]$, onde $X.\eta'(t) = \frac{d}{ds} \mid_{s=0} exp(sX).\eta'(t)$.

⁴salvo transformações rígidas

⁵Se $x \in M$, sempre denotaremos por G(x) e G_x a G-órbita em x e o grupo de isotropia em x, respectivamente.

⁶ Aqui sempre denotaremos por \mathfrak{g} e \mathfrak{g}_x as algebras de Lie de G e G_x , respectivamente.

3.1. ALGUNS LEMAS 27

Observação 4. Os subespaços $\langle \eta'(t) \rangle$, $T_{\eta(t)}G(\eta(t))$, $\langle X.\eta'(t) : X \in \mathfrak{g}_{\eta(t)} \rangle$ de $T_{\eta(t)}M$ são ortogonais dois a dois.

Lema 2. O fibrado vetorial $Vert_{\eta}^{G}$ sobre η é suave.

Demonstração. Fixemos $t_0 \in [0, l]$. Os argumentos a seguir são válidos somente para t suficientemente perto de t_0 . Suponhamos primeiro que $\eta(t_0) \in Fix(G, M)$. Então a exponencial dá uma equivalência local entre a ação de G sobre M e a ação isotrópica de G sobre $T_{\eta(t_0)}M$. Por meio desta equivalência temos que η_0 corresponde a uma reta $\tilde{\eta}(t) = t\eta'(t_0)$ em $T_{\eta(t_0)}M$. Seja E(t) o levantamento de $Vert_{\eta}^G(t)$ a $T_{\eta(t_0)}M$. Se t é diferente de t_0 e $X \in \mathfrak{g}_{\eta(t)}$, então X fixa todo η , e assim $X.\eta'(t) = 0$. Logo

$$E(t) = T_{\widetilde{\eta}(t)}G(\widetilde{\eta}(t))$$
$$= \langle X.\widetilde{\eta}(t) : X \in \mathfrak{g} \rangle.$$

Por definição $E(t_0) = \langle X.\eta'(t_0) : X \in \mathfrak{g} \rangle$, e assim E é transporte paralelo de $E(t_0)$ ao longo de $\widetilde{\eta}$. Portanto, $Vert_{\eta}^G$ é suave neste caso. Agora suponhamos que $\eta(t_0) \notin Fix(G,M)$. Sejam $H = G_{\eta(t_0)}$ e W um somando direto complementar do algebra de Lie de H denotado por \mathfrak{h} . Seja \widetilde{W} o fibrado vetorial ao longo de η tendo por fibra em $\eta(t)$

$$\widetilde{W}(t) = \langle X.\eta(t) : X \in W \rangle.$$

Seja $\{\xi_i\}\subseteq \mathfrak{g}$ uma base de W. Então $\{\xi_i.\eta(t_0)\}$ é uma base de $\widetilde{W}(t_0)=T_{\eta(t_0)}G(\eta(t_0))$. Por continuidade e definicão de \widetilde{W} temos que $\{\xi_i.\eta(t)\}$ é uma base de $\widetilde{W}(t)$. Isto implica que \widetilde{W} é suave. Pelo caso anterior temos $Vert_{\eta}^H(t_0)=\langle X.\eta'(t_0):X\in\mathfrak{h}\rangle$. Assim

$$Vert_{\eta}^{G}(t_{0}) = Vert_{\eta}^{H}(t_{0}) \oplus^{\perp} \widetilde{W}(t_{0}),$$

e por continuidade $Vert_{\eta}^{H}(t)$ e $\widetilde{W}(t)$ são linearmente independentes. Como η é G-geodésico e η está dentro de uma fatia ("slice") sobre $\eta(t_{0})$, temos que $G_{\eta(t)} \subseteq G_{\eta(t_{0})}$ e $Vert_{\eta}^{G}(t) = \langle X.\eta(t) : X \in \mathfrak{g} \rangle$. Para $t \neq t_{0}$ temos $Vert_{\eta}^{H}(t) = \langle X.\eta(t) : X \in \mathfrak{h} \rangle$, e assim

$$Vert_{\eta}^{G}(t) = Vert_{\eta}^{H}(t) \oplus \widetilde{W}(t).$$

Isto prova o último caso.

Corolário 2. O fibrado $Hor_{\eta}^G = (Vert_{\eta}^G)^{\perp}$ ao longo de η é suave.

Definição 13. Sejam $\eta:[0,l]\longrightarrow M$ um segmento G-geodésico e $X:[0,l]\longrightarrow TM$ um campo vetorial ao longo de η . Dizemos que X é G-paralelo se X é uma seção suave do fibrado Hor_{η}^{G} , ie. $g(X(t), Vert_{\eta}^{G}(t)) = 0$ e $\nabla_{\eta(t)}X \in Vert_{\eta}^{G}(t)$ para todo $t \in [0, l]$.

Observação 5. Se $X(0) \in Hor_{\eta_0}^G$, então pela suavidade de Hor_{η}^G podemos estender X(0) a um campo G-paralelo ao longo de η_0 .

Denotemos por M^o o conjunto dos pontos de M cujas órbitas são principais. Seja $\pi: M^o \longrightarrow M^o/G$ a projecão canônica. Damos a M^o/G a métrica da submersão riemanniana. Observemos que M^o é aberto de M, logo tem curvatura não-negativa. Por outro lado, temos a fórmula de O'Neill [21]:

$$\widetilde{K}_{\pi(p)}(\widetilde{x},\widetilde{y}) = K_p(x,y) + \frac{3}{4}|[x,y]^{\nu}|^2,$$

onde \widetilde{K} é a curvatura seccional de M^o/G , $x,y\in T_pM^o$ são levantamentos horizontais de $\widetilde{x},\widetilde{y}\in T_{\pi(p)}M^o/G$, respectivamente, e $[x,y]^{\nu}$ é a componente vertical de [X,Y], para extensões X,Y de x,y, respectivamente. Observemos também que $[x,y]^{\nu}$ não depende das extensões X e Y. Aplicando esta fórmula a M^o , temos que M^o/G tem curvatura não-negativa.

Lema 3. Sejam $\gamma_i: [0,S] \longrightarrow M, i=1,2$ e $\eta_0: [0,l] \longrightarrow M$ segmentos G-geodésicos. Suponhamos que $\eta_0((0,l)) \subseteq M^o$, $\eta_0(0) = \gamma_1(0)$, $\eta_0(1) = \gamma_2(0)$, $g(\eta'_0(0), \gamma'_1(0)) = g(\eta'_0(1), \gamma'_2(0)) = 0$, e $dist(G(\gamma_1(s)), G(\gamma_2(s))) \ge L(\eta_0)$ para todo $s \in [0,S]$. Seja também $X: [0,1] \longrightarrow TM$ um campo vetorial e G-paralelo ao longo de η_0 tal que $X(0) = \gamma'_1(0)$, $X(1) = \gamma'_2(0)$. Então $\eta: [0,S] \times [0,l] \longrightarrow M$, $\eta(s,t) = exp(sX(t))$ é uma imersão isométrica totalmente geodésica plana e ortogonal à G-ação, i.e.

$$g(d\eta(Y), T_{\eta(s,t)}G(\eta(s,t))) = 0,$$

para todo $(s,t) \in [0.S] \times [0,l]$, e todo $Y \in T_{(s,t)}[0.S] \times [0,l]$.

Demonstração. Definamos $\widetilde{X}(t) = d\pi(X(t)), \ \widetilde{\eta}_0(t) = \pi(\eta_0(t))$ para $t \in (0, l)$.

Afirmação 1. \widetilde{X} é um campo paralelo ao longo de $\widetilde{\eta_0}$.

Demonstração. Seja $\widetilde{\nabla}$ a conexão de Levi-Civita em M^o/G induzida por $\pi:M^o\longrightarrow M^o/G.$ Usando

3.1. ALGUNS LEMAS 29

o fato que X é horizontal e que $\nabla_{\eta_0}X$ é vertical temos:

$$\widetilde{\nabla}_{\widetilde{\eta}_0(t)}\widetilde{X} = d\pi(\nabla_{\eta_0}X)$$

$$= 0.$$

Isto prova a afirmação.

Denotemos por $\tilde{\eta}$ e $\tilde{\gamma}_i$, as projeções de η , e γ_i , para i=1,2. Então para $\delta \in (0,l/2), s \in [0,S]$, e considerando a distância orbital em M/G temos:

$$dist(\widetilde{\gamma}_{1}, \widetilde{\gamma}_{2}) = dist(\widetilde{\eta} \mid_{\{s\} \times [0, l]} (0), \widetilde{\eta} \mid_{\{s\} \times [0, l]} (l))$$

$$\leq dist(\widetilde{\eta} \mid_{\{s\} \times [0, l]} (0), \widetilde{\eta} \mid_{\{s\} \times [0, l]} (\delta)) + dist(\widetilde{\eta} \mid_{\{s\} \times [0, l]} (\delta), \widetilde{\eta} \mid_{\{s\} \times [0, l]} (l - \delta)) +$$

$$dist(\widetilde{\eta} \mid_{\{s\} \times [0, l]} (l - \delta), \widetilde{\eta} \mid_{\{s\} \times [0, l]} (l))$$

$$\leq L(\eta \mid_{\{s\} \times [0, \delta]}) + L(\widetilde{\eta} \mid_{\{s\} \times [\delta, l - \delta]}) + L(\eta \mid_{\{s\} \times [l - \delta, l]})$$
(3.1)

Agora estimemos cada um dos somandos dados em 3.1. Por aproximação linear temos

$$L(\eta \mid_{\{s\} \times [0,\delta]}) \le L(\eta_0 \mid_{[0,\delta]}) + s \frac{d}{ds} L(\eta \mid_{\{s\} \times [0,\delta]}) \mid_{s=0} + s^2 \delta c_1,$$

onde c_1 é uma constante que depende somente de $[0, S] \times [0, l]$. Pela fórmula da primeira variação do comprimento de arco temos:

$$\frac{d}{ds}L(\eta\mid_{\{s\}\times[0,\delta]})\mid_{s=0} = -\int_0^{\delta} g(X,\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\frac{\partial}{\partial t}\eta_0)dt + g(X(t),\frac{\partial}{\partial t}\eta_0(t))\mid_{t=0}^{\delta}$$
$$= 0.$$

Assim

$$L(\eta \mid_{\{s\} \times [0,\delta]}) \le L(\eta_0 \mid_{[0,\delta]}) + s^2 \delta c_1.$$

Analogamente

$$L(\eta \mid_{\{s\} \times [l-\delta,l]}) \le L(\eta_0 \mid_{[l-\delta,l]}) + s^2 \delta c_2,$$

onde c_2 depende somente de $[0, S] \times [0, l]$. Como $\eta_0 \mid_{[\delta, l-\delta]} \subseteq M^o$, existe um $s_1 \in [0, S]$ tal que $\eta([0, s_1] \times [\delta, l-\delta]) \subseteq M^o$. Assim $\widetilde{\eta} \mid_{[0, S] \times [\delta, l-\delta]}$ é uma variação de $\widetilde{\eta}_0 \mid_{[\delta, l-\delta]}$, com campo variacional paralelo \widetilde{X} . Como η_0 e $\eta \mid_{[0, S] \times \{t\}}$ são geodésicas horizontais, e X é paralelo e horizontal, as fórmulas

das variações do comprimento de arco implicam:

$$\frac{d}{ds}L(\widetilde{\eta}\mid_{\{s\}\times[\delta,l-\delta]})\mid_{s=0} = 0,$$

$$\frac{d^2}{ds^2}L(\widetilde{\eta}\mid_{\{s\}\times[\delta,l-\delta]})\mid_{s=0} = \int_{\delta}^{l-\delta} (g(\widetilde{\nabla}_{\widetilde{\eta}_0}\widetilde{X},\widetilde{\nabla}_{\widetilde{\eta}_0}\widetilde{X}) - g(\widetilde{R}(\widetilde{\eta}'_0,\widetilde{X})\widetilde{X},\widetilde{\eta}'_0))dt +$$

$$+g(\widetilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial s}\widetilde{\eta}}\frac{\partial}{\partial s}\widetilde{\eta},\widetilde{\eta}'_0)(l-\delta) - g(\widetilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial s}\widetilde{\eta}}\frac{\partial}{\partial s}\widetilde{\eta},\widetilde{\eta}'_0)(\delta)$$

$$= -\int_{\delta}^{l-\delta} g(\widetilde{R}(\widetilde{\eta}'_0,\widetilde{X})\widetilde{X},\widetilde{\eta}'_0)dt.$$

Denotamos a última expressão por \widetilde{I}_{δ} . Por aproximação,

$$L(\widetilde{\eta}\mid_{\{s\}\times[\delta,l-\delta]}) = L(\widetilde{\eta}_0\mid_{[\delta,l-\delta]}) + \frac{s^2}{2}(\widetilde{I}_{\delta} + \epsilon_s(\delta)),$$

onde $\lim_{s\to 0} \epsilon_s(\delta) = 0$. Juntando as estimativas anteriores temos

$$dist(\widetilde{\gamma}_1, \widetilde{\gamma}_2) \le L(\widetilde{\eta}_0 \mid_{[0,l]}) + \frac{s^2}{2} (2\delta(c_1 + c_2) + \widetilde{I}_{\delta} + \epsilon_s(\delta)).$$

Usando a hipótese $dist(G(\gamma_1(s)), G(\gamma_2(s))) \ge L(\eta_0)$ temos:

$$L(\widetilde{\eta}_0\mid_{[0,l]}) \leq dist(\widetilde{\gamma}_1(s),\widetilde{\gamma}_2(s)) \leq L(\widetilde{\eta}_0\mid_{[0,l]}) + \frac{s^2}{2}(2\delta(c_1+c_2)+\widetilde{I}_{\delta}+\epsilon_s(\delta)),$$

e assim

$$0 \le 2\delta(c_1 + c_2) + \widetilde{I}_{\delta} + \epsilon_s(\delta).$$

Fazendo $s\to 0$ temos $0\le 2\delta(c_1+c_2)+\widetilde I_\delta$. Como a curvatura $\widetilde K$ em M^o/S é não-negativa, $\widetilde I_\delta$ é não-positiva e não decrescente. Logo

$$\widetilde{I}_{\delta} = 0 \forall \delta \in (0, l/2).$$

Assim $\widetilde{K}(\widetilde{X},\widetilde{\eta}'_0)=0$ em (0,l). Pela fórmula de O'Neill $[X,\eta'_0]^{\nu}=0$ em (0,l). Como $N=\eta([0,s_0]\times [0,l])$ é uma superficie suave, para algum $s_0\in [0,S]$, podemos definir sobre N os campos $\widehat{X}(s,t)=\frac{\partial}{\partial s}exp(sX(t)), \widehat{Y}(s,t)=$ transporte paralelo de Y(t) ao ponto $\eta(s,t)$ ao longo da geodésica $\eta\mid_{[0,S]\times\{t\}}$.

Então $\widehat{X},\,\widehat{Y}$ são extensões suaves de Xe η_0' respectivamente. Assim

$$0 = [X, \eta'_0]^{\nu}(t)$$

= $(\nabla_{\widehat{X}} \widehat{Y})^{\nu} |_{(0,t)} - (\nabla_{\widehat{Y}} \widehat{X})^{\nu} |_{(0,t)}$
= $-(\nabla_{n_0} X)^{\nu}(t)$.

Logo $\nabla_{\eta_0}X(t)$ é horizontal, e assim é igual a zero. Isto prova que X é paralelo. Como $\eta\mid_{\{s\}\times[0,l]}$ é G-minimizante e $\eta\mid_{[0,S]\times\{t\}}$ é G-geodésica, o lema 1 implica que η é uma imersão isométrica totalmente geodésica com curvatura zero e ortogonal à G-ação.

3.2 O teorema principal

Aqui apresentamos o teorema principal:

Teorema 22 ([15] e [16]). Seja M uma 4-variedade riemanniana conexa, compacta, e com curvatura não-negativa. Suponhamos que M admite um campo de Killing não trivial. Então:

- (a) Se M é orientável e tem curvatura positiva, então M é homeomorfa a S^4 , ou $\mathbb{C}P^2$.
- (b) Se M é simplesmente conexa e tem um 2-plano com curvatura zero, então M é homeomorfa a S^4 , ou $\mathbb{C}P^2$, ou $S^2 \times S^2$, ou $\mathbb{C}P^2 \# \pm \mathbb{C}P^2$. Além disso, M tem uma superfície totalmente geodésica plana sempre que seja homeomorfa a $S^2 \times S^2$, ou $\mathbb{C}P^2 \# \pm \mathbb{C}P^2$.

O teorema seguinte reduz a prova do teorema 22.

Teorema 23. Nas hipóteses do teorema 22 temos $\chi(M) \leq 4$. Além disso se a igualdade é verificada então existe uma superfície plana totalmente geodésica em M.

Demonstração do teorema principal usando o teorema 23. Suponhamos que M é orientável e que tem curvatura positiva. O Teorema de Synge mostra que $\pi_1(M) = 0$. O fato que M é conexa e o Teorema de Hurewicz implicam $H^0(M) = \mathbb{Z}$ e $H_1(M) = 0$, e assim por dualidade de Poincaré temos $H_4(M) = \mathbb{Z}$ e $H^3(M) = 0$. Usando o teorema dos coeficientes universais temos $H_3(M) = 0$. Logo $\chi(M) = \sum_{i=0}^4 (-1)^i dim(H_i(M)) = 2 + dim(H_2(M))$. Então o teorema 23 implica

$$dim(H_2(M)) \leq 1.$$

Desde que $H_2(M)$ é livre e finitamente gerado temos $H_2(M) = 0$ ou \mathbb{Z} . Assim a forma de interseção de M é nula ou é representada pela matriz [1]. Por outro lado, $H_2(S^4) = 0$, $H_2(\mathbb{C}P^2) = \mathbb{Z}$, e a forma de interseção de $\mathbb{C}P^2$ é representada pela matriz [1]. Então a parte (a) segue do Teorema de Freedman ([7] ou [8]).

Agora suponhamos que M é simplesmente conexa e que tem um 2-plano com curvatura zero. Pelo teorema 23 $\chi(M) \leq 4$. Analogamente à parte (a) provamos que $\chi(M) = 2 + \dim(H_2(M))$. Assim $\dim(H_2)(M) \leq 2$. Desde que $H_2(M)$ é livre e finitamente gerado, $H_2(M) = 0$, ou \mathbb{Z} , ou $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Por outro lado, as únicas formas de interseção 2-dimensionais (salvo equivalência e sinal) são representadas pelas matrizes

$$\left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right], \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}\right], \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{array}\right].$$

Estas matrizes representam as formas de interseção do espaço $S^2 \times S^2$ e das somas conexas $\mathbb{C}P^2 \# \pm \mathbb{C}P^2$, que são simplesmente conexas. A parte (b) se segue do Teorema de Freedman.

Demostração do teorema 23. Suponhamos que $\chi(M) \geq 4$ e provemos que M tem uma superfície plana totalmente geodésica e que $\chi(M) = 4$. Pelo Teorema de Myers-Steenrod e a compacidade de M, temos que Iso(M) é um grupo de Lie compacto. Por hipótese, M admite uma campo de Killing não trivial, i.e. um homomorfismo suave e não trivial $\mathbb{R} \longrightarrow Iso(M)$. Assim dim(Iso(M)) > 0. Pelo teorema do toro maximal podemos tomar um subgrupo de Lie S^1 de Iso(M). Logo existe uma S^1 -acão isométrica efetiva sobre M. Por um Teorema de Kobayashi [17], $Fix(S^1, M)^7$ é união disjunta de pontos isolados e superfícies conexas e totalmente geodésicas. Além disso $\chi(M) = \chi(Fix(S^1, M))$. Como a característica de Euler de uma superfície conexa compacta é ≤ 2 e $\chi(M) \geq 4$, $Fix(S^1, M)$ contém duas superfícies totalmente geodésicas, ou uma superfície totalmente geodésica e dois pontos isolados, ou quatro pontos isolados. A prova do Teorema termina nas provas dos Teoremas 24, 25, e 26.

Caso 1. Suponhamos que $Fix(S^1, M)$ contém duas superfícies totalmente geodésicas N_1 e N_2 .

Teorema 24. (a) $exp \mid_{D_l \nu N_1} : D_l \nu N_1 \longrightarrow M$ é um difeomorfismo sobre $M \setminus N_2$ 8.

- (b) Existe uma superfície plana totalmente geodésica em M.
- (c) $Fix(S^1, M) = N_1 \sqcup N_2 \ e \ \chi(M) = 4.$

 $^{^7}Fix(S^1,M)$ denota o conjunto de pontos de M fixados por todos os elementos de S^1

 $^{^8}D_l\nu N_1$ denota o subfibrado de νN_1 cuja fibra em $x\in N_1$ é o disco de νN_1 de radio r e com centro no origem

Demonstração. Seja $p \in N_1$ tal que $dist(p,N_2) = dist(N_1,N_2) = l$, e seja $\eta_0 : [0,l] \longrightarrow M$ um segmento minimizante com $\eta_0(0) = p$ e $\eta_0(l) = q \in N_2$. Sendo p e q pontos fixos η_0 é S^1 -minimizante. Como η_0 corta N_1 e N_2 ortogonalmente, e T_pN_1 é S^1 -invariante, então $S^1(\eta_0'(0)) \subseteq \nu_pN_1$. Assim $g(X(0),\eta_0'(0)) = g(X(0),Y_1\eta_0'(0)) = 0$, para todo $X(0) \in T_pN_1$ e Y na algebra de Lie de S^1 (= \mathbb{R}). Logo $X(0) \in Hor_{\eta_0}^{S1}(0)$, e assim X(0) se estende a um campo S^1 -paralelo ao longo de η_0 (vide observação 5). A observação 4 implica que $X(l) \in T_qN_2$. Definamos $\eta(s,t) = exp(sX(t))$, então às geodésicas $s \mapsto \eta(s,0)$ e $s \mapsto \eta(s,l)$ são geodésicas em N_1 e N_2 respectivamente. Pelo lema 3, N_2 é uma imersão isométrica totalmente geodésica plana, ortogonal à S^1 -ação. Isto prova (b). Como S(0) é arbitrário em S(0)0 e sendo S(0)1 completa, temos S(0)2 e S(0)3 para S(0)4 ligam S(0)5 e S(0)5 e S(0)6 arbitrário. Desde que as geodésicas minimizantes S(0)6 para S(0)7 para S(0)8 e S(0)9 e

$$\chi(M) = \chi(Fix(S^1, M))$$

$$= \chi(N_1) + \chi(N_2)$$

$$\leq 4,$$

e portanto $\chi(M) = 4$. Isto prova (c).

Caso 2. Suponhamos que $Fix(S^1, M)$ contém uma superfície totalmente geodésica N e dois pontos isolados $\{p_1, p_2\}$.

Fixemos um segmento minimizante $\gamma:[0,l_1]\longrightarrow M$ tal que $\gamma(0)=p_1,\gamma(l_1)=p_2$, e definamos $N_1=S^1(\gamma)$.

Teorema 25. (a) N_1 é uma superfície suave.

- (b) $exp \mid_{D_l \nu N_1} : D_l \nu N_1 \longrightarrow M \text{ \'e um difeomorfismo sobre } M \setminus N$
- (c) Existe uma superfície plana totalmente geodésica em M.
- (d) $Fix(S^1, M) = \{p_1, p_2\} \sqcup N \ e \ \chi(M) = 4.$

Demonstração. Seja $p \in Im(\gamma)$ tal que $dist(p, N) = dist(Im(\gamma), N) = dist(S^1(\gamma), N) = l$. Suponhamos que $p \in \gamma((0, l_1))$, e seja $\eta_1 : [0, l] \longrightarrow M$ um segmento minimizante de p a $\eta_1(l) \in N$. Como $N \subseteq Fix(S^1, M)$,

$$L(\eta_1) = dist(p, N) = dist(S^1(p), N).$$

Assim $\eta_1 \in S^1$ -minimizante. Como $T_pIm(\gamma) \perp S^1(p), T_p\gamma \subseteq Hor_{\eta_1}^{S^1}(0)$. Então, dado $X(0) \in T_pIm(\gamma)$, este se estende a um campo $X:[0,l] \longrightarrow TM, S^1$ -paralelo ao longo de η_1 . Pela observação 4, $X(l) \in T_{\eta_1(l)}N$. Como N totalmente geodésica, a geodésica $s \longmapsto \eta(s,l)$ é uma geodésica em N. Pelo lema 3, a variação η de η_1 definida por $\eta(s,t) = exp(sX(t))$ para $(s,t) \in [s_1,s_2] \times [0,l]$ é uma imersão isométrica totalmente geodésica plana, onde s_1 e s_2 são o ínfimo e o supremo de $\{s: exp(sX(0)) \in Im(\gamma)\}$, respectivamente. Então

$$dist(\gamma(t), N) = dist(Im(\gamma), N) \forall t \in [0, l_1].$$

Seja $\eta_0: [0, l] \longrightarrow M$ um segmento minimizante tal que $\eta_0(0) = p_1$, $\eta_0(l) \in N$. Então os segmentos geodésicos $g.\eta_0$ de p_1 a η_0 , $h.\gamma$ de p_1 a p_2 , para $g, h \in S^1$ são S^1 -minimizantes, e assim

$$q(q.\eta_0'(0), h.\gamma'(0)) = 0.$$

Logo o espaço vetorial $V:=\langle h.\gamma'(0):h\in S^1\rangle$ é S^1 -invariante e de dimensão 2. Assim $\exp_{p_1}|_{D_{l_1}V}\longrightarrow M$ é um difeomorfismo sobre $N_1\sqcup\{p_2\}$ e $\exp_{p_1}(\overline{D}_{l_1}V)=N_1$. Portanto $N_1\backslash\{p_2\}$ é uma superfície suave. Analogamente se prova que $N_1\backslash\{p_1\}$ é uma superfície suave. Isto prova (a). Seja $X(0)\in T_{p_1}N_1$, então

$$g(X(0), h.\eta'_0(0)) = g(X(0), Y.\eta'_0(0)) = 0, \forall h \in S^1, \forall Y \text{ no algebra de Lie de } S^1.$$

Logo $X(0) \in Hor_{\eta_h\eta_0}^{S^1}(0)$. Seja X a extensão S^1 -paralela de X(0) ao longo de $h.\eta_0$. Então $\eta_h(s,t) = exp(sX(t))$ é uma imersão isométrica totalmente geodésica com curvatura zero, ortogonal à S^1 -ação. Analogamente ao teorema 24 se prova as partes (b), (c), que S^1 age livremente sobre $M \setminus (N \sqcup N_1)$, e $Fix(S^1, M) = \{p_1, p_2\} \sqcup N$. A prova de (d) segue da hipótese $\chi(M) \geq 4$, e de

$$\chi(M) = \chi(Fix(S^1, M))$$

$$= \chi(N) + \chi(p_1) + \chi(p_2)$$

$$\leq 4.$$

Caso 3. Suponhamos que $Fix(S^1, M)$ contém quatro pontos isolados $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$.

Lema 4. Seja $\psi: S^1 \longrightarrow O(4)$ uma representação ortogonal injetora com somandos diretos não triviais, e seja $(S^3(1)/S^1, \widetilde{\angle})$ o espaço métrico quociente sobre a ação de S^1 . Então existe uma aplicação de $(S^3(1)/S^1, \widetilde{\angle})$ em $(S^2(\frac{1}{2}), \frac{1}{2}\angle)$, que não decresce distância.

Demonstração. Existem inteiros k, l tal que a representação ψ é ortogonalmente equivalente a uma representação

$$\psi_{k,l}:S^1\times\mathbb{C}\times\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}\times\mathbb{C}$$

definida por $\psi_{k,l}(\alpha,(z_1,z_2)=\alpha.(z_1,z_2)=(\alpha^kz_1,\alpha^lz_2)$, com mdc(k,l)=1. Tal representação não tem subespaços fixos se, e somente se, k e l são não nulos. Seja \angle a distância ângulo em S^3 , e denotemos o espaço métrico $S^3/\psi_{k,l}$ por $\Sigma_{k,l}$ com a distância orbital $\angle_{k,l}$. Seja também $\widetilde{S}^3(1)=\{(z_1,z_2)\in S^3(1): z_1z_2\neq 0\}$. Então $\widetilde{S}^3(1)$ é $\psi_{k,l}$ -invariante e a ação induzida sobre $\widetilde{S}^3(1)$ tem somente órbitas principais. Denotemos a variedade Riemanniana $\widetilde{S}^3(1)/S^1$ por $\widetilde{\Sigma}_{k,l}$, com a métrica da submersão riemanniana, denotada por $h_{k,l}$. A distância induzida por $h_{k,l}$ é dada pelos comprimentos de segmentos S^1 -minimizantes em $\widetilde{S}^3(1)$, e assim esta é igual a $\angle_{k,l}$ $|\widetilde{\Sigma}_{k,l}|$.

Afirmação 2. Existe um difeomorfismo de $\varphi_{k,l}: \widetilde{\Sigma}_{k,l} \longrightarrow S^1 \times (0,\pi/2)$.

Demonstração. Seja $T^2 = S^1 \times S^1$. Então a ação

$$T^2 \times \widetilde{S}^3(1) \longrightarrow \widetilde{S}^3(1)$$

definida por $(\alpha, \beta).(z_1, z_2) = (\alpha z_1, \beta z_2)$ comuta com $\psi_{k,l}$, e assim induz uma ação

$$S^1 \times S^1 \times \widetilde{\Sigma}_{k,l} \longrightarrow \widetilde{\Sigma}_{k,l}$$

dada por $(\alpha, \beta).[z_1, z_2] = [\alpha z_1, \beta z_2]$. A restricão da última ação ao subgrupo $S^1 \cong S^1 \times \{1\}$ de T^2 é uma ação efetiva de S^1 sobre $\widetilde{\Sigma}_{k,l}$. Neste caso particular podemos tomar quociente, se necessario, e supor que a ação anterior é livre. Seja $\widetilde{\gamma}$ um segmento S^1 -geodésico em $\widetilde{\Sigma}_{k,l}$ tal que $\widetilde{\gamma}(0) = [z_1, z_2]$, então, salvo orientação, $\widetilde{\gamma}$ é a projecão do segmento geodésico horizontal

$$\gamma(t) = (z_1, z_2)\cos(t) + (\frac{|z_2|}{|z_1|}z_1, -\frac{|z_1|}{|z_2|}z_2)\sin(t).$$

Então $\gamma(t) \notin \widetilde{S}^3(1)$ se, e somente se, $\tan t = -\frac{|z_1|}{|z_2|}$ ou $\frac{|z_2|}{|z_1|}$. Assim o intervalo maximal de definição de $\widetilde{\gamma}$ (que é aberto), tem comprimento $\pi/2$. Agora fixemos uma $\widetilde{\gamma}$ como acima, então a ação $S^1 \times \widetilde{\Sigma}_{k,l} \longrightarrow \widetilde{\Sigma}_{k,l}$ restrita a $\widetilde{\gamma}$ induz uma aplicação

$$\varphi_{k,l}: S^1 \times (0,\pi/2) \longrightarrow \widetilde{\Sigma}_{k,l}$$

definida $(\alpha, t) \longmapsto \alpha. \tilde{\gamma}(t)$. Um argumento geral em ações de grupos (γ é uma fatia global e a ação é livre e própria) mostra que $\varphi_{k,l}$ é um difeomorfismo.

Afirmação 3. Se um paralelo em $\widetilde{\Sigma}_{k,l}$ corresponde a uma T^2 -órbita em (z_1, z_2) , então seu comprimento é igual a $\frac{2\pi |z_1||z_2|}{\sqrt{k^2|z_1|^2+l^2|z_2|^2}}$.

Demonstração. A curva $\eta: t \longmapsto (exp(itl|z_2|^2)z_1, exp(-itk|z_1|^2)z_2)$ está na órbita $T^2((z_1, z_2))$, é ortogonal a $\psi_{k,l}$, e se projeta sobre à órbita $S^1([z_1, z_2])$. Suponha que $\eta(t) = e^{i\theta}.\eta(s)$, com $t \neq s$. Então

$$t-s = \frac{2\pi(nk+ml)}{k^2|z_1|^2 + l^2|z_2|^2}.$$

O valor positivo mínimo de t-s é dado quando nk+ml=1 e é

$$S := \frac{2\pi}{k^2|z_1|^2 + l^2|z_2|^2},$$

lembremos mdc(k,l)=1). Logo $\eta:[0,S]\longrightarrow \widetilde{S}^3(1)$ se projeta bijetivamente sobre $S^1([z_1,z_2])$, e assim ambos têm comprimento

$$\int_0^S |\eta'(t)| dt = \int_0^S \sqrt{k^2 |z_1|^4 |z_2|^2 + l^2 |z_2|^4 |z_1|^2}$$
$$= \frac{2\pi |z_1| |z_2|}{\sqrt{k^2 |z_1|^2 + l^2 |z_2|^2}}.$$

Definamos $\widetilde{\Phi}_{k,l} = \varphi_{1,1}^{-1} \circ \varphi_{k,l}$, onde $\varphi_{k,l}$, $\varphi_{1,1}$ são as aplicações dadas na afirmação 2. . De fato, a métrica sobre $\widetilde{\Sigma}_{k,l}$ em coordenadas cilíndricas é dada por $dt^2 + (r_{k,l}(t))^2 d\theta^2$, para alguma função $r_{k,l} > 0$ e pela afirmação 3 $r_{k,l} \leq r_{1,1} \leq c r_{k,l}$, para alguma constante c positiva. Então $\widetilde{\Phi}_{k,l}$ não decresce distância e é Lipschitz. Sendo $\widetilde{\Sigma}_{k,l}$ denso em $\Sigma_{k,l}$, podemos estender $\widetilde{\Phi}_{k,l}$ continuamente

sobre $\Sigma_{k,l}$. Assim temos uma aplicação de $\Sigma_{k,l}$ em $\Sigma_{1,1}$ que não decresce distância. O lema se segue.

Teorema 26. (a) Existe uma superfície triangular plana, totalmente geodésica em M.

(b)
$$Fix(S^1, M) = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}.$$

Demonstração. Seja $(S^3T_{p_i}M, \angle_{p_i})$ a esfera de radio 1 em $T_{p_i}M$ com a distância ângulo \angle_{p_i} . Consideremos a ação

$$\psi_i: S^1 \times S^3 T_{p_i} M \longrightarrow S^3 T_{p_i} M$$

induzida pela ação isotrópica em p_i , e denotemos por (S, \widetilde{Z}_{p_i}) o espaço métrico quociente $S^3T_{p_i}M/S^1$ com distância orbital \widetilde{Z}_{p_i} . O conjunto $Dir_{p_1}(p_j)$ é S^1 -invariante, para cada $2 \leq j \leq 4$. Logo para cada par de inteiros j, k, com $2 \leq j, k \leq 4$,

$$\angle_{p_1}(p_j, p_k) = \angle_{p_1}(Dir_{p_1}(p_j), Dir_{p_1}(p_k))$$
$$= \widetilde{\angle}_{p_1}(\pi_1(Dir_{p_1}(p_j)), \pi_1(Dir_{p_1}(p_k))),$$

onde $\pi_1:S^3T_{p_1}M\longrightarrow S$ é a projecão natural. Seja

$$\varphi: (S, \widetilde{\angle}_{p_1}) \longrightarrow (S^2(\frac{1}{2}), \frac{1}{2} \angle),$$

uma aplicação como no Lema 4. Então para cada inteiro j, $2 \le j \le 4$ definamos

$$D_j = \varphi \circ \pi_1(Dir_{p_1}(p_j)) \subseteq S^2(\frac{1}{2}).$$

Um pouco de trigonometria na esfera $S^2(\frac{1}{2})$ ([1], p.287), mostra que para inteiros distintos j, k, l, $2 \le j, k, l \le 4$:

$$\frac{1}{2} \angle (D_j, D_k) + \frac{1}{2} \angle (D_k, D_l) + \frac{1}{2} \angle (D_l, D_j) \le \pi.$$

Como φ não decresce distância

$$\angle_{p_1}(p_j, p_k) + \angle_{p_1}(p_k, p_l) + \angle_{p_1}(p_l, p_j) \le \pi.$$

Analogamente temos

$$\angle_{p_i}(p_j, p_k) + \angle_{p_i}(p_k, p_l) + \angle_{p_i}(p_l, p_j) \le \pi$$
 (3.2)

para inteiros distintos $1 \le i, j, k, l \le 4$. Logo

$$\sum_{1 \le i, j, k \le 4} \angle_{p_i}(p_j, p_k) \le 4\pi. \tag{3.3}$$

Pelo Teorema 21 temos $\angle_{p_i}(p_j, p_k) + \angle_{p_k}(p_i, p_j) + \angle_{p_j}(p_k, p_i) \ge \pi$, para i, j, k inteiros distintos, $1 \le i, j, k \le 4$. Logo temos as igualdades em 3.2 e 3.3. O teorema 21 implica que existe uma superfície triangular plana totalmente geodésica em M. Isto prova (a). Para provar (b), suponhamos que $Fix(S^1, M)$ contém estritamente $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$. Os dois casos anteriores provam que $Fix(S^1, M)$ não contém superfícies. Assim existe outro ponto isolado $p_5 \in Fix(S^1, M)$.

Afirmação 4. Para cada inteiro $i, 1 \le i \le 5$:

- (a) Os conjuntos $Dir_{p_i}(p_j)$, $j \neq i$, consistem de uma única órbita e estão em dois pares de órbitas mutuamente ortogonais.
- (b) A ação $S^1 \times S^3 T_{p_i} M \longrightarrow S^3 T_{p_i} M$ é equivalente a $\psi_{1,1}$.

Demonstração. Definamos $D_{i,j} = \varphi \circ \pi_i(Dir_{p_i}(p_j))$, onde $\pi_i : S^3T_{p_1}M \longrightarrow S$ é a projeção natural. Sejam i,j,k,l inteiros diferentes com $1 \le i,j,k,l \le 5$. Então 3.2 ainda é válido. Assim

$$\frac{1}{2} \angle (D_{i,j}, D_{i,k}) + \frac{1}{2} \angle (D_{i,k}, D_{i,l}) + \frac{1}{2} \angle (D_{i,l}, D_{i,j}) \ge \pi.$$

Por outro lado em $S^2(\frac{1}{2})$ o perímetro de um triângulo geodésico com lados segmentos geodésicos minimizantes é $\leq \pi$, ([1], p.287), e a igualdade é dada se, e somente se, os vértices do triângulo estão em uma circunferência de radio máximo em $S^2(\frac{1}{2})$. Logo os conjuntos $D_{i,j}$ têm cardinal um e estão em uma circuferência de radio máximo em $S^2(\frac{1}{2})$. Então estes conjuntos consistem de dois pares de pontos antipodais. Assim $S^3T_{p_i}M$ contém pelo menos dois pares de órbitas com distância $\pi/2$. Fixemos i e suponhamos que $\angle_{p_i}(p_j, p_k) = \pi/2$. Então $g(h.v, w) \leq 0$ para $v \in Dir_{p_i}(p_j)$, para $w \in Dir_{p_i}(p_k)$ e todo $h \in S^1$. Por outro lado, sejam dh uma forma de volume invariante a esquerda sobre S^1 , e $v \in T_{p_i}M$. Então, $\int_{S^1} h.vdh \in Fix(S^1, T_{p_i})$ e p_i ponto fixo isolado implicam

$$\int_{S^1} g(h.v, w)dh = g(\int_{S^1} h.vdh, w)$$
$$= 0,$$

para $w \in T_{p_i}M$. Então g(h.v,w) = 0 para todo $h \in S^1$ e as órbitas $Dir_{p_i}(p_j)$, $Dir_{p_i}(p_k)$ são mutuamente ortogonais. Assim a ação ψ_i contém pelo menos dois pares de órbitas mutuamente ortogonais. Isto prova (a) da afirmação. A parte (a) implica que $T_{p_i}M$ contém dois pares de subespaços 2-dimensionais mutuamente ortogonais, $\psi_{k,l}$ -invariantes, irredutíveis. Estes subespaços somente se intersectam no origem. Logo podemos escrever $T_{p_i}M = V_1 \oplus^{\perp} V_2 = W_1 \oplus^{\perp} W_2$, com V_i e W_i ψ_i -invariantes, para i = 1, 2. Podemos supor que V_i é ψ_i -equivalente a W_i , i = 1, 2. Definamos $f: V_1 \oplus^{\perp} V_2 \longrightarrow W_1 \oplus^{\perp} W_2$ linearmente tal que f projeta ortogonalmente V_1 em W_2 e V_2 em W_1 . Pelo lema de Schur V_1 é ψ_i -equivalente a W_2 . Assim V_1 é ψ_i -equivalente a V_2 . Logo $\psi_{k,l}$ é equivalente a $\psi_{1,1}$. Isto prova (b) da afirmação.

Pela afirmação 4 temos que existem i, j, k tais que $\angle_{p_i}(p_j, p_k) = \pi/2$. Sejam $\gamma_j \in Min_{p_i}(p_j)$, $\gamma_k \in Min_{p_i}(p_k)$. Logo

$$\angle p_i(\gamma_i'(0), \gamma_k'(0)) = \pi/2.$$

Pelo teorema 21 existe uma superfície triangular $\Delta \subseteq M$, totalmente geodésica, plana, com lados γ_j , γ_k , e $\eta \in Min_{p_j}(p_k)$. Trocando γ_k por $h.\gamma_k$, $h \in S^1$, temos superfícies triangulares $\Delta_h \subseteq M$ totalmente geodésicas, planas, com lados γ_j , $h\gamma_k$, e $\eta_h \in Min_{p_j}(p_k)$. Segue-se que as superfícies Δ_h , $h \in S^1$ têm bordos (triângulos) congruentes. Assim

$$\angle_{p_j}(-\gamma_j'(l), \eta_h'(0)) = \widetilde{\angle}_{p_j}(S^1(-\gamma_j'(l)), S^1(\eta_h'(0)))$$
$$= \angle_{p_j}(p_i, p_k)$$
$$< \pi/2.$$

Qualquer segmento minimizante em $S^3T_{p_i}M$ entre $-\gamma_j'(l)$ e $\eta_h'(0)$ é horizontal, tem comprimento menor que $\pi/2 = diam(S^2(\frac{1}{2}))$, e é projetado a um único segmento geodésico minimizante $(S^3T_{p_i}M)/S^1$ (isométrico a $S^2(\frac{1}{2})$) entre $S^1(-\gamma_j'(l))$ e $S^1(\eta_h'(0))$. Por unicidade de levantamento horizontal temos que existe um único segmento minimizante entre $-\gamma_j'(l)$ e $\eta_h'(0)$. Assim $h.\eta'(0) = \eta_h'(0) = \eta_h'(0)$, e $\Delta_h = \Delta$, para todo $h \in S^1$. Isto é uma contradição à afirmação 4. Isto prova a parte (b) do teorema.

Capítulo 4

Variedades com curvatura não-negativa

Claramente os espaços S^4 , $S^2 \times S^2$, $\mathbb{C}P^2$, admitem métricas com curvatura não-negativa cujos grupos de isométrias não são discretos. Nosso objectivo neste capítulo é mostrar que os espaços $\mathbb{C}P^n\#\pm\mathbb{C}P^n$ admitem métricas com curvatura não negativa cujos grupos de isometrias não são discretos. Isto será feito nas seções 17 e 4.2. Outros exemplos de variedades curvadas não negativamente podem ser encontrados em na seção 4.3. Este capítulo é baseado nos artigos [4], [10] e [27]. Os poucos exemplos de variedades com curvaturas positiva que não são espaços simétricos podem ser encontrados nos artigos [25] e [27].

4.1 Métricas com $K \ge 0$ sobre $\mathbb{C}P^n \# \pm \mathbb{C}P^n$

Seja (M,g) uma variedade Riemanniana e $S^1 \times M \longrightarrow M$ uma ação isométrica. Seja $p \in M$ fixo e considere a aplicação órbita $S^1 \to S^1(p)$. A métrica induzida por M na órbita $S^1(p) \subseteq M$ induz por pull-back uma métrica g' em S^1 . Desde que S^1 é abeliano e age isometricamente sobre M temos que g' é invariante a esquerda. Assim existe uma constante a > 0, tal que

$$g' = ad\theta^2,$$

onde $d\theta^2$ é a métrica usual sobre S^1 (i.e. com comprimento 2π). Considere a ação $S^1 \times (M \times S^1) \to M \times S^1$, dada por $g(m,h) = (m.g^{-1},gh) = (g.m,gh)^1 m \in M$ e $g \in G$. Denotemos o espaço quociente por $M \times_{S^1} S^1$. Consideremos a variedade Riemanniana $M \times_{S^1} S^1$ com a métrica do quociente induzida da métrica $g + \frac{1}{t}d\theta^2$ sobre $M \times S^1$. O difeomorfismo $M \times_{S^1} S^1 \simeq M$, $[m,h] \mapsto h^{-1}.m$, $m \in M$ e $h \in S^1$, induz por pull-back uma métrica g_t sobre M. O seguinte teorema descreve esta métrica em

¹Por convenção, $m.g^{-1} = g.m.$

termos da métrica g.

Proposição 6. A métrica g_t sobre M é igual a $\frac{1}{1+ta}g$, sobre S^1 -órbitas, e igual a g sobre o complementar ortogonal as óbitas.

Demonstração. Se $T^v_{(m,1)}$ é o espaço vertical em $(m,1)\in M\times S^1,$ então 2

$$\begin{array}{lcl} T^v_{(m,1)} & = & \{X.(m,1): X \in L(S^1)\} \\ \\ & = & \{\frac{d}{dt} \mid_0 (exp(tX)m, exp(tX)): X \in L(S^1)\} \\ \\ & = & \{(X^*_m, X): X \in L(S^1)\} \end{array}$$

Seja $(X_m^*, Y) \in T_{(m,1)}(M \times S^1)$ um vetor horizontal, onde X e $Y \in L(S^1)$. Então, para todo $Z \in L(S^1)$

$$0 = \langle (X_m^*, Y), (Z_m^*, Z) \rangle$$

$$= g(X_m^*, Z_m^*) + \frac{1}{t} d\theta^2(Y, Z)$$

$$= ad\theta^2(X, Z) + frac1td\theta^2(Y, Z)$$

$$= d\theta^2(aX + \frac{1}{t}Y, Z)$$

Assim Y = -atX. Seja agora $(u, Y) \in T_{(m,1)}(M \times S^1)$ um vetor horizontal, onde u é ortogonal à $S^1(m)$. Então, para todo $Z \in L(S^1)$

$$0 = \langle (u, Y), (Z_m^*, Z) \rangle$$
$$= g(u, Z_m^*) + \frac{1}{t} d\theta^2(Y, Z)$$
$$= \frac{1}{t} d\theta^2(Y, Z)$$

Assim Y=0. Isto implica que o espaço horizontal em $(m,1)\in M\times S^1$ é dado por

$$T^h_{(1,H)} = \{(Y_m^*, -atY): Y \in L(S^1)\} \oplus \{(u,0): u \text{ \'e ortogonal a } S^1(m)\}.$$

²Denotaremos por $L(S^1)$ o álgebra de Lie de S^1 , i.e. os reais.

A projeção de $M \times S^1$ sobre $M \times_{S^1} S^1 \simeq M$, é dado por $(m,h) \mapsto h^{-1}m$ e projeta o vetor $(X_m^*,Y) \in T_{(m,1)}M \times S^1$ no vetor $(X-Y)_m^*$. Seja $Y \in L(S^1)$ tal que $d\theta^2Y = 1$. Então $g(Y_m^*,Y_m^*) = a$. O levantamento horizontal de $Y_m^* \in T_{(m,1)}M \times S^1$ é dado por $(\frac{1}{1+at}Y_m^*,\frac{-at}{1+at}Y)$. Assim

$$g_{t}(Y_{m}^{*}, Y_{m}^{*}) = \left| \left(\frac{1}{1+at} Y_{m}^{*}, \frac{-at}{1+at} Y \right) \right|^{2}$$

$$= \left(\frac{1}{1+at} \right)^{2} a + \frac{1}{t} \left(\frac{ta}{1+ta} \right)^{2}$$

$$= \frac{a}{1+at}$$

$$= \frac{1}{1+at} g(Y_{m}^{*}, Y_{m}^{*}).$$

Se $u \in T_m M$ é ortogonal a $S^1(m)$, então (u,0) é o levamento horizontal e tem comprimento ao quadrado igual a g(u,u). A proposição se segue.

Proposição 7. Consideremos a ação isométrica de S^1 sobre S^{2n-1} dada por $z.(z_1,...,z_n)=(zz_1,...,zz_n)$ para todo $z \in S^1$ e $(z_1,...,z_n) \in S^{2n-1}$. Seja $D^2 \subseteq \mathbb{R}^2$ o disco de radio 2 e centro no origem Então existe uma métrica com curvatura não-negativa sobre $S^{2n-1} \times_{S^1} D^2$ tal que uma vizinhança do bordo $\partial(S^{2n-1} \times_{S^1} D^2) \simeq S^{2n-1} \times_{S^1} S^1 \simeq S^{2n-1}$ é isométrico ao produto riemanniano $S^{2n-1} \times I$, onde I é um intervalo.

Demonstração. Sejam T^h e T^v as distribuções horizontais e verticais sobre S^{2n-1} induzidas pela S^1 -ação. Então definamos a métrica $g_a(a>0)$ sobre S^{2n-1} como

$$g_a = g \mid_{T^h} + ag \mid_{T^v},$$

onde g é a metrica usual sobre S^{2n-1} . Desde que as órbitas em S^{2n-1} têm comprimento 2π , na métrica usual, para cada $m \in S^{2n-1}$ o pull-back da métrica induzida por g_a sobre $S^1(m)$ por meio da aplicação órbita $S^1 \to S^1(m)$ é dado por $ad\theta^2$. Escolhemos a>1 suficientemente perto de 1 tal que a curvatura de S^{2n-1} é ainda positiva. Tal a existe pela dependencia contínua da curvatura seccional em função de a. Para D^2 escolhemos a métrica $g_f = d\rho 2 + f(\rho)^2 d\theta^2$. Para que a métrica g_f seja suave no origem exigimos que f'(0) = 1 e $f^{(2k)}(0) = 0$, para todo $k \in \mathbb{N}$, e para que a curvatura seja não-negativa, exigimos que f seja côncava, i.e. $f'' \leq 0$. Então a métrica produto $g_a + g_f$ sobre $S^{2n-1} \times D^2$ induz uma métrica $g_{a,f}$ com curvatura não-negativa sobre $S^{2n-1} \times S^1$ D^2 . Afirmamos que podemos escolher f tal que uma vizinhança da fronteira é isométrica ao produto $S^{2n-1} \times I$. De fato,

a métrica induzida sobre $S^{2n-1} \times_{S^1} D^2$ induz uma métrica sobre $S^{2n-1} \times_{S^1} S^1(\rho)$, onde $S^1(\rho)$ tem a métrica $f(\rho)^2 d\theta^2$. Pela proposição 6 temos que $S^{2n-1} \times_{S^1} S^1(\rho)$ é isométrico a S^{2n-1} com a métrica dada por $\frac{1}{1+\frac{1}{f(\rho)^2}a}g_a=\frac{f(\rho)^2a}{f(\rho)^2+a}g$ sobre S^1 -órbitas, e por g sobre o complementar ortogonal às óbitas. Escolhemos uma f tal que

$$f(\rho)^2 = \frac{a}{a-1}, \forall \rho \in [\rho_0, 1], \rho_0 > 0.$$

Assim $S^{2n-1} \times_{S^1} S^1(\rho)$ é isométrico a S^{2n-1} com a métrica usual, para todo $\rho \geq \rho_0$. Seja $A = x \in D^2$: $\rho_0 \leq |x| \leq 1$. Então

$$S^{2n-1} \times_{S^1} A \simeq S^{2n-1} \times_{S^1} (S^1(\rho_0) \times [\rho_0, 1]), (S^1(\rho) \text{ com a métrica usual de radio } f(\rho_0))$$

 $\simeq (S^{2n-1} \times_{S^1} S^1(\rho)) \times [\rho_0, 1]$
 $\simeq S^{2n-1} \times [t_0, 1], (S^{2n-1} \text{com a métrica usual}).$

A Proposição se segue.

Usando o fato de que $S^{2n-1} \times_{S^1} D^2$ é difeomorfo a $\mathbb{C}P^n \setminus D$ (onde D é uma bola aberta), juntamente com a proposição 7, podemos definir uma métrica sobre $\mathbb{C}P^n \setminus D$ tal que uma vizinhança da fronteira é isométrica a $S^{2n-1} \times I$, onde S^{2n-1} tem a métrica usual. Assim podemos definir uma métrica com curvatura não-negativa sobre os espaços $\mathbb{C}P^n\#\pm\mathbb{C}P^n$. Este resultado é um caso particular do seguinte Teorema de Cheeger.

Teorema 27 (Cheeger [4]). A soma conexa de dois espaços simétricos de posto um admite uma métrica com curvatura seccional não-negativa.

4.2 Simétrias de $\mathbb{C}P^n\# \pm \mathbb{C}P^n$

Proposição 8. Seja G um subgrupo de isometrias de M. Seja K um grupo de Lie que age isométricamente em M, N. Suponhamos que a ação de K comuta com a ação de G e que $K_{n_0} = \{1\}$, para algúm $n_0 \in N$. Então G é um subgrupo de isometrias de Iso $(M \times_K N)$.

Demonstração. Definamos a ação de G em $M \times N$ como g(m,n) = (gm,n). Assim G age isometricamente sobre $M \times N$. Para cada $k \in K$ temos $g(mk-1,kn) = (g(mk^{-1}),kn) = ((gm)k^{-1},kn)$. Logo a ação se projeta a uma ação isometrica $G \times M \to N$, g[m,n] = [gm,n]. Suponhamos que

g[m,n]=[m,n], para todo $[m,n]\in M\times_K N$. Então $(gm,n_0)=(mk^{-1},kn_0)$, onde k que depende de m). Logo k=1. Assim gm=m para todo $m\in M$. Assim m=1. Isto termina a prova.

Agora aplicamos a proposição anterior para encontrar algumas isométrias de $\mathbb{C}P^n\#\pm\mathbb{C}P^n$. O grupo U(n) age sobre S^{2n-1} por multiplicação a esquerda. Esta ação é isométrica, efetiva e comuta com a S^1 -ação de acima. Logo $U(n)\subseteq Iso(S^{2n-1}\times^1_SD^2)$. Por outro lado, lembremos que para construir a soma conexa $S^{2n-1}\times^1_SD^2\#S^{2n-1}\times^1_SD^2$ temos que tomar um difeomorfismo ϕ de D^{2n} que inverte orientação, e logo colar os bordos $\partial S^{2n-1}\times^1_SD^2\simeq S^{2n-1}$ por meio de ϕ . Então, uma condição suficiente para que uma isometria g de $S^{2n-1}\times^1_SD^2$ possa se estender a uma isometria de $\mathbb{C}P^n\#\mathbb{C}P^n$ é que g comute com ϕ . Tomemos ϕ como a restrição da aplicação \mathbb{R} -linear representada por:

$$\left[egin{array}{cc} -1 & 0 \ 0 & I \end{array}
ight]$$

onde I é a matriz identidade $(2n-1)\times(2n-1)$. A ϕ é um difeomorfismo de D^{2n} que inverte orientação. Tomemos o subgrupo $U(n-1)\subseteq U(n)$, onde

$$U(n-1) = \{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} \in U(n) : A \text{ \'e uma matriz unitaria } (n-1) \times (n-1) \}.$$

É claro que os elementos de U(n-1) representados na forma real comutam com ϕ . Assim $U(n-1) \subseteq Iso(\mathbb{C}P^n\#\mathbb{C}P^n)$. O caso de $\mathbb{C}P^n\#-\mathbb{C}P^n$ é muito melhor. Podemos tomar ϕ a identidade e assim $U(n) \subseteq Iso(\mathbb{C}P^n\#-\mathbb{C}P^n)$.

4.3 Variedades de co-homogeneidade um

Definição 14. Seja M uma variedade fechada e conexa. Seja G uma grupo de Lie compacto agindo suavemente sobre M. Diremos que a ação $G \times M \to M$ é de co-homogeneidade um, se o espaço órbita é 1-dimensional. Uma variedade de co-homogeneidade um é uma variedade com uma ação de co-homogeneidade um.

Desde que M/G é uma 1-variedade compacta, $M/G = S^1$ ou um intervalo fechado I. Se $M/G = S^1$, então todas as G-órbitas de M são principais. No caso que M/G = I, então existem duas órbitas singulares correspondentes aos pontos extremos do intervalo I. Consideremos o caso que M/G = I. Fixemos uma métrica riemanniana G-invariante e sobre M e normalizemos esta de tal modo que M/G = [-1,1]. Seja $\pi: M \to M/G = [0,1]$ a projeção natural. Fixemos $x_0 \in \pi-1(0)$ e seja

 $c:[-1,1]\to M$ a geodésica minimizante em M tal que $c(0)=x_0$ e $\pi\circ c=Id_{[-1,1]}$. Sejam também $B_\pm=\pi-1(\pm 1)=G(x_\pm)$, onde $x_\pm=c(\pm 1), K_\pm=G_{x_\pm}$ e $H=G_{x_0}$. Então temos

Proposição 9. Nas condições de acima, existem vizinhanças tubulares $D(B_{-}) = \pi^{-1}([-1,0])$ e $D(B_{+}) = \pi^{-1}([0,1])$ das órbitas singulares tal que M fica determinado pelos grupos de Lie $H \subseteq K \subseteq G$. Melhor ainda, $D(B_{\pm})$ é difeomorfo a $G \times_{K_{\pm}} D^{l_{\pm}+1}$, onde $D^{l_{\pm}+1}$ é um disco unitario normal a B_{\pm} em x_{\pm} , e

$$M = G \times_{K_{-}} D^{l_{-}+1} \cup_{G/H} G \times_{K_{+}} D^{l_{+}+1}, \tag{4.1}$$

onde G/H é identificado com os bordos de $G \times_{K_{-}} D^{l_{-}+1}$ e $G \times_{K_{+}} D^{l_{+}+1}$. Reciprocamente, seja G um grupo de Lie compacto e sejam $H \subseteq K_{\pm} \subseteq G$ subgrupos fechados tal que $K_{\pm}/H = S^{l_{\pm}}$ são esferas. Então $H \subseteq K_{\pm} \subseteq G$ determina uma única G-variedade de cohomogeneidade um dada por 4.1, sobre o qual G age na primeira variável.

Um resultado um pouco mais geral que a proposição 7 é a seguinte

Proposição 10 ([10], [27]). Seja G um grupo de Lie compacto e conexo. Seja também $H \subseteq K \subseteq G$ subgrupos de Lie fechados de G tais que $K/H = S^1 = \partial D^2$. Fixemos uma métrica bi-invariante Q sobre G. Então existe uma métrica G-invariante com curvatura não-negativa sobre o fibrado disco $G \times_K D^2$, tal que uma vizinhança da fronteira $\partial (G \times_K D^2) = G \times_K S^1$ é isométrico a $G/H \times I$ onde I é um intervalo, G/H com a métrica induzida por Q, e $G/H \times I$ com a métrica produto.

As proposições 9 e 10 implicam a seguinte

Teorema 28. Uma G-variedade de co-homogeneidade um com órbitas singulares de codimensão dois admite uma métrica de curvatura não-negativa.

Pode-se aplicar o teorema anterior para construir exemplos interessantes. Ver por exemplo, os artigos [10] e [27].

Corolário 3.

- (a) Dez das 14 esferas exóticas de dimensão 7 (não orientadas) admitem uma métrica com curvatura não-negativa.
- (b) Sobre cada um dos quatro tipos de difeomorfismos (orientados) na classe de homotopia de $\mathbb{R}P^5$ existem infinitas métricas não isométricas com curvatura seccional não-negativa.

Referências Bibliográficas

- [1] M. Berger, Geometry II, Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [2] _____, A panoramic view of riemannian geometry, Springer, 2003.
- [3] R. Bott and L. W. Tu, Differential forms in Algebraic Topology, Springer-Verlag, New York, 1982.
- [4] J. Cheeger, Some examples of manifolds of nonnegative curvature, J. Differential Geom 8 (1973), 623–628.
- [5] J. Cheeger and D.G. Ebin, Comparison theorems in riemannian geometry, North Holland, 1975.
- [6] J.J. Duistermaat and J.A. Kolk, *Lie groups*, Springer, 2000.
- [7] M. Freedman, The topology of four-dimensional manifolds, J. Differential Geom 17 (1982), 357–453.
- [8] Robert E. Gompf and András I. Stipsicz, 4-manifolds and Kirby calculus, Graduates Studies in Mathematics vol 20, 1999.
- [9] K. Grove and C. Searle, *Positively curved manifolds of maximal symmetry rank*, J. Pure Appl. Algebra **91** (1994), 137–142.
- [10] K. Grove and W. Ziller, Curvature and symmetry of Milnor spheres, Annals of Mathematics 152 (2000), pp. 331–367.
- [11] V. Guillemin and A. Pollack, Differential Topology, Prentice Hall, 1974.
- [12] A. Hatcher, Algebraic Topology, Cambridge University Press, 2001.
- [13] M. W. Hirsch, Differential Topology, Springer-Verlag, New York, 1976.
- [14] H. Hopf, Differentialgeometrie und topologische gestalt, Jahrbericht der DMV 41 (1932), 209–229.

- [15] W.Y. Hsiang and B. Kleiner, On the topology of positively curved manifold with symmetry, J. Differential Geom 30 (1989), 615–621.
- [16] B. Kleiner, Riemannian four-manifolds with nonnegative curvature an continuous symmetry, Thesis, Univ. Of California, Berkeley, 1990.
- [17] S. Kobayashi, Fixed points of isometries, Nagoya Math J. 13 (1958), 63–68.
- [18] S. Kobayashi and K. Nomizu, Foundations of differential geometry vol. I e II.
- [19] J. Milnor and D. Husemoller, Symmetric bilinear forms, Springer-Verlag, 1973.
- [20] S. Morita, Geometry of differential forms, American Mathematical Society, translatios of Mathematical Monographs v.201, 2001.
- [21] B. O'Neill, The fundamental equations of a submersion, Michigan Math. J. 13 (1966), 459–469.
- [22] Peter Petersen, Riemannian geometry, Springer, New York, 1998.
- [23] C. Searle and D.G. Yang, On the topology of non-negatively curved 4-manifolds with continuous symmetry, Duke Math. J. 74 (1994), 547–556.
- [24] F. Warner, Foundations of differentiable manifolds and Lie groups, Springer, 1983.
- [25] B. Wilking, Nonnegatively and positively curved manifolds, arXiv:0707.3091, 2007.
- [26] S. Yau, Problem section, Seminar on Differential Geometry, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J. (1982), 669–706.
- [27] W. Ziller, Examples of riemannian manifolds with non-negative sectional curvature, ar-Xiv:math/0701389, 2007.