Métodos geométricos diferenciais generalizados

Joselito de Oliveira

Tese Apresentada
ao
Instituto de Matemática e Estatística
da
Universidade de São Paulo
para
Obtenção do Título
de
Doutor em Ciências

Programa: Matemática
Orientador: Dr. Orlando Stanley Juriaans

Durante a obtenção deste trabalho o autor recebeu afastamento do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Roraima

São Paulo, 18 de fevereiro de 2009

Agradecimentos

Inicialmente, quero agradecer ao Prof. Dr. Orlando Stanley Juriaans pela orientação que me foi concedida, que com humildade soube me ouvir criando assim um ambiente de convívio científico e amizade, desenvolvendo em mim um espírito de independência científica. Aos meus amigos na USP Carlos, Ronaldo, Jocirei, Maryluz, Paola, Alexandre e Cristina. Aos funcionários do IME pela gentilêza no atendimento. Aos professores deste referido instituto, que contribuíram para minha formação acadêmica. A Universidade de São Paulo(USP), que através do Instituto de Matemática e Estatística(IME), me deu a oportunidade de produzir esta tese. Ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Roraima pela minha liberação para que eu pudesse cursar o doutorado em Matemática.

Resumo

Nesta tese apresentaremos a topologia diferencial das $\mathcal{G}$-variedades, como também a teoria geométrica das membranas onde resultados análogos aos teoremas clássicos (veja [Ca1] e [Ca2]), são demonstrados. Um exemplo disto é uma generalização do teorema de Gauss-Bonnet para membranas. As bases teóricas da Topologia Diferencial das $\mathcal{G}$-variedades estão fundamentadas no Cálculo Diferencial de Colombeau, teoria que se encontra em [AFJ1], enquanto que as bases teóricas da geometria das membranas encontram-se em [AFJ2]. Em [AFJ1], foi introduzido o conceito de variedade diferenciável modelado sobre o $\overline{\mathbb{R}}^n$. Exemplos construídos a partir de variedades diferenciáveis foram dados e não se conheciam outros. Aqui, apresentaremos mais exemplos de $\mathcal{G}$-variedades e será também desenvolvido o cálculo diferencial de Colombeau no ambiente das $\mathcal{G}$-variedades. Versões dos teoremas da aplicação inversa e da forma local das imersões serão apresentados neste ambiente. Com relação a geometria das membranas, apresentaremos conceitos importantes, tais como submembrana, curvatura média escalar, curvatura de Gauss-Kronecker e geodésica. Existe também uma versão do teorema de Gauss-Bonnet para membranas. Como aplicação da álgebra de Colombeau, apresentaremos uma revisão crítica contestando os resultados obtidos nos artigos [Kam] e [MN], que tratam da troca de assinaturas cosmológicas, mais precisamente da equação de Klein-Gordon e do tensor energia-momento, respectivamente. Lembramos que troca de assinaturas cosmológica são caracterizadas pela divisão, por uma hiper-superfície com bordo, da variedade espaço-tempo em duas subvariedades, sendo que uma delas é Riemanniana com curvatura constante($K = -1, K = 0, K = 1$) e a outra é Lorentziana. Considerando a métrica de Friedman-Robertson-Walker(FRW) para a variedade espaço-tempo, onde a função de transição é a função lapso, ampliamos o estudo da equação de campo de Klein-Gordon, realizado em [Kam] para o espaço-tempo plano, e demonstramos que não só é impossível de se obter a equação de Klein-Gordon no caso em que a troca de assinatura se dá entre os espaços Euclideano e Lorentziano, mas também entre os espaços Riemannianos com curvatura constante $K = \pm 1$(esfera, espaço hiperbólico) e o espaço Lorentziano. Com relação a [MN] e ainda considerando esta métrica, será provado que não é possível de se obter o tensor energia-momento da hiper-superfície que separa as variedades. Provaremos as afirmações anteriores com base no teorema do valor intemediário para funções generalizadas.

Palavras-chave: Álgebra de Colombeau, $\mathcal{G}$-variedade, membrana, relatividade geral.

Abstract

In this work we present the differential topology of $\mathcal{G}$-manifolds as well as the geometric theory of membranes. We extend known classical theorems (see [Ca1] e ([Ca2]) obtaining a generalized version of the Gauss-Bonnet theorem for membranes. The differential topology theoretical bases of $\mathcal{G}$-manifold are rooted in Colombeau differential calculus, defined in [AFJ1], while the geometry of membranes has its theoretical bases in [AFJ2].

In [AFJ1] was introduced the concept of differential manifold modeled on $\overline{\mathbb{R}}^n$. Only one example was given being other examples unknown. Here we present more examples of $\mathcal{G}$-manifolds and developed a Colombeau differential calculus in the framework of $\mathcal{G}$-manifolds. Generalized versions of the inverse application and of the local form of the immersions are presented in this framework. With regard to geometry of membranes, we present the concepts of sub membrane, scalar curvature, Gauss-Kronecker curvature and geodesic. We also present a version of Gauss-Bonnet's theorem for membranes.

As an algebraic application of Colombeau's Theory, we present a critical revision contesting the results obtained in the papers [Kam] and [MN], dealing with the change of cosmological signatures; more precisely the problem that deals with Klein-Gordon equation and the moment-energy tensor. Recall that change of cosmological signatures are characterized by the division of the space-time manifold, by a hypersurface with boarder, into two submanifold, one of them being Riemanniann with constant curvature ($K = -1, K = 0, K = 1$) and the other is Lorentzian. Considering the Friedman-Robertson-Walker(FRW) metric for the manifold space-time, we study the Klein-Gordon field equation, accomplished in [Kam] for flat space-time, and prove that not only it is impossible to obtain Klein-Gordon's equation in the case in which the signature change occurs between Euclidean and Lorentzian space, but also among Riemanniann spaces with constant curvature $K = \pm 1$(sphere, hyperbolic space) and the Lorentzian space.

With regard to [MN], we prove that it is not possible to obtain a tensor moment-energy for the separating manifold. The proof, of previous affirmations, based on a theorem which states that a function that presents signal change in the generalized context does not have a multiplicative inverse.

Words-key: Algebra of Colombeau, $\mathcal{G}$-manifold, membrane, general relativity.

A Deus, amor e bondade.

O sol vai brilhar de novo...
Catarina Vitória Uchôa de Oliveira.
(minha filha, 2005-)

Sumário

As novas funções generalizadas explicam cálculos heurísticos em física

e

dão um significado para qualquer produto finito de distribuições.

Jean François Colombeau

Lista de Símbolos

As notações abaixo serão utilizadas:

- $\overline{\mathbb{R}}$ denota o anel dos números generalizados.
- $\tilde{x} = cl[(x_\epsilon)] = (x_\epsilon) + \mathcal{N}$ denota um elemento de $\overline{\mathbb{R}}$.
- (x_ϵ) representante de $\tilde{x}$, denotado também por x.
- $\overline{\mathbb{R}}^n := \{(x_1, ..., x_n) : x_i \in \overline{\mathbb{R}}, 1 \leq i \leq n\}$.
- $\mathbb{N}_0$ denota o conjunto dos números naturais incluindo o zero.
- $\mathbb{N}_0^n := \{(x_1, ..., x_n) : x_i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq n\}$
- Ω é um subconjunto aberto do conjunto $\mathbb{R}^n$.
- $K \subset\subset \Omega$ denotará que K é um subconjunto compacto do conjunto Ω.
- Para uma dada função $f : X \to \mathbb{R}$ e $\oslash \neq Y \subset X$, denota-se

$$\|f\| = \sup_{x \in Y} |f(x)|.$$

- $I = (0, 1]$.
- $I_\eta := (0, \eta)$ para $\eta \in I$
- $\partial^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1} x_1 ... \partial^{\alpha_n} x_n}$, onde $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ é o multi-índice e

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i.$$

- $C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ $\mathbb{R}$-módulo das funções $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞.
- $\mathcal{E}(\Omega) = C^\infty(\Omega)^I$ é o anel das funções $u_\epsilon : \Omega \to \mathbb{R}$ e de classe C^∞ $\forall\ \epsilon \in I$.

- $\mathcal{E}_M(\Omega)$ é o subanel das funções moderadas.
- $\mathcal{N}(\Omega)$ é o ideal das funções nulas.
- $\mathcal{G}(\Omega) := \mathcal{E}_M(\Omega)/\mathcal{N}(\Omega)$ é a álgebra de Colombeau.
- $\tilde{f} = cl[(f_\epsilon)] = (f_\epsilon) + \mathcal{N}(\Omega)$ denota um elemento de $\mathcal{G}(\Omega)$
- X_- denota o espaço Riemanniano.
- X_+ denota o espaço-tempo Lorentziano.
- A_- representa a grandeza física relativa a X_-.
- A_+ representa a grandeza física relativa a X_+.
- $[A] = A_+ - A_-$ denota a descontinuidade de uma grandeza física A relativa ao espaço-tempo $X = \Sigma \cup X_- \cup X_+$, onde Σ é uma hipersuperfície bordada.
- $\cong$ denota isomorfismo de módulos.
- $TM = \bigcup_{p\in M}^{\infty} T_pM$ denota o fibrado tangente.
- $\mathfrak{X}(M) = \{X : M \longrightarrow TM : X(p) \in T_pM \;\; \forall p \in M, X \in C^\infty\}$

Introdução

Inicialmente relataremos alguns fatos que contribuiram com o surgimento da álgebra de Colombeau. Em 1954 Laurent Schwartz publicou um artigo intitulado "Sur l'impossibilité de la multiplication des distribution"(veja [Sch1] e [Jur]). Nele encontra-se um teorema que nos mostra a impossibilidade da existência de uma álgebra $(\mathcal{A}(\mathbb{R}), +, \circ)$ associativa, comutativa e tal que:

1. $\mathcal{D}' \hookrightarrow \mathcal{A}(\mathbb{R})$ linearmente e $f(x) = 1\ \forall x \in \mathbb{R}$, é a unidade de $\mathcal{A}(\mathbb{R})$;
2. $(\mathcal{A}, d)$ seja uma álgebra diferencial;
3. o operador d restrito a $\mathcal{D}'$ é a derivada distribucional;
4. $\circ\,|_{\mathcal{C}(\mathbb{R})}\colon \mathcal{C}(\mathbb{R}) \times \mathcal{C}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R})$ é o produto de funções.

Do referido teorema conclui-se que não se pode realizar a operação produto no espaço das distribuições sem que algumas propriedades fundamentais citadas anteriormente sejam preservadas. Exemplos foram construídos posteriormente confirmando o fato (veja [Kun1]). O caminho para solucionar o problema foi, então, procurar uma álgebra em que o espaço das distribuições pudesse ser mergulhada e que fosse associativa, comutativa e diferencial. Assim surgiu a álgebra das funções generalizadas de Colombeau, onde o espaço das distribuições pode ser mergulhado via convolução por funções teste especiais. Para defini-la, temos que considerar as seguintes conjuntos:

Seja Ω um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$. Define-se

- $\mathcal{E}(\Omega) := C^\infty(\Omega)^I$, onde $I := (0,1]$;
- $\mathcal{E}_M(\Omega) := \{(u_\varepsilon)_{\varepsilon\in I} \in \varepsilon(\Omega) : \forall\ K \subset\subset \Omega, \forall\ \alpha \in \mathbb{N}_0^n\ \exists\ p \in \mathbb{N},$ tal que $\sup_{x\in K} |\partial^\alpha u_\varepsilon(x)| = O(\varepsilon^{-p})$ quando $\varepsilon \to 0\}$;
- $\mathcal{N}(\Omega) := \{(u_\varepsilon)_{\varepsilon\in I} \in \varepsilon(\Omega) : \forall\ K \subset\subset \Omega, \forall\ \alpha \in \mathbb{N}_0^n\ \forall\ q \in \mathbb{N},$ temos $\sup_{x\in K} |\partial^\alpha u_\varepsilon(x)| = O(\varepsilon^{q})$ quando $\varepsilon \to 0\}$.

Observa-se que $\mathcal{E}_M(\Omega)$, o espaço de todas as sequências moderadas, é uma álgebra diferencial e é claramente a maior subálgebra de $\mathcal{E}(\Omega)$ em que $\mathcal{N}(\Omega)$ é um ideal diferencial (estável por derivadas parciais).

A álgebra de Colombeau $\mathcal{G}(\Omega)$ é definida como sendo o espaço quociente de $\mathcal{E}_M(\Omega)$ por $\mathcal{N}(\Omega)$, isto é,

$$\mathcal{G}(\Omega) = \mathcal{E}_M(\Omega)/\mathcal{N}(\Omega).$$

Os elementos de $\mathcal{G}(\Omega)$ são, portanto, classes laterais $\tilde{f} = (f_\epsilon)_\epsilon + \mathcal{N}(\Omega)$ denominados de **funções generalizadas de Colombeau.**

A partir de tudo isto conclui-se que, $\mathcal{G}(\Omega)$ é uma álgebra diferencial comutativa, associativa e satisfaz a regra de Leibniz.

Nesta tese apresentaremos as bases teóricas da Topologia Diferencial das $\mathcal{G}$-variedades com fundamentos no Cálculo Diferencial de Colombeau, teoria que se encontra em [AFJ1], bem como a teoria geométrica das membranas, com base no conceito de membrana encontrado em [AFJ2]. Serão apresentados resultados análogos a alguns teoremas clássicos encontrados em [Ca1] e [Ca2], como a generalização do teorema de Gauss-Bonnet para membranas. Como aplicação da álgebra de Colombeau, apresentaremos uma revisão crítica contestando os resultados obtidos nos artigos [Kam] e [MN], que tratam da troca de assinaturas cosmológicas. Lembramos que trocas de assinaturas cosmológicas são caracterizadas pela divisão, por uma hipersuperfície com bordo, da variedade espaço-tempo em duas subvariedades, sendo que uma delas é Riemanniana com curvatura constante($K = -1, K = 0, K = 1$) e a outra é Lorentziana. Inicialmente, considerando a métrica de Friedman-Robertson-Walker(FRW) para a variedade espaço-tempo, estendendemos o estudo da equação de campo de Klein-Gordon, realiazado em [Kam] para o espaço-tempo plano, e demonstramos que não só é impossível de se obter a equação de Klein-Gordon com relação a referida métrica, no caso em que a troca de assinatura se dá entre os espaços Euclideano e Lorentziano, mas também entre os espaços Riemanniano com curvatura constante $K = \pm 1$(esfera, espaço hiperbólico) e o espaço Lorentziano. Com relação ao artigo [MN] será provado que não é possível de se obter o tensor energia-momento da hipersuperfície que separa as variedades com relação a métrica supra citada. Tudo isto se dará com base em um teorema que afirma a não-invertibilidade das funções que apresentam mudança de sinal considerando-se uma determinada hipótese a mais, presente neste contexto. No capítulo 1, abordaremos toda a fundamentação teórica da Álgebra de Colombeau, Geometria Diferencial Generalizada e o Cálculo Diferencial de Colombeau, necessário ao entendimento dos capítulos subsequentes. No capítulo 2, apresentaremos as bases teóricas da Topologia Diferencial de Colombeau. No capítulo 3, apresentaremos uma nova geometria, tendo como ambiente natural as membranas que será denominada de Geometria das Membranas. Iniciaremos o capítulo com uma breve revisão dos conceitos básicos da teoria começando pela definição de pré-membrana, depois são apresentados conceitos importantes, tais como submembrana, curvatura média escalar e curvatura Gaussiana. Uma generalização do teorema de Gauss-Bonnet também é apresentada. Finalmente, no capítulo 4, apresentaremos inicialmente, a extensão do estudo realizado em [Kam], depois os resultados obtidos em [MN]. Em seguida é apresentado um resultado que nos mostra que funções generalizadas da álgebra de Colombeau que trocam de sinal, sob uma determinada condição, não possuem inversa multiplicativa. Ainda no capítulo 4 e usando o referido teorema, concluímos que a equação de Klein-Gordon não existe no ambiente das funções generalizadas se considerada a métrica FRW onde se encontra a função generalizada que muda de sinal. Como exemplo, podemos citar as métricas dadas em [Kam] para a obtenção das trocas de assinaturas. Além disso, as componentes do tensor de Einstein, as igualdades fracas(associação) e consequentemente as equações de Einstein, não fazem sentido considerando esta métrica. Portanto, o tensor energia-momento da hiper-superfície, obtido neste ambiente(veja [MN]), também não existe com relação a métrica FRW.

Na elaboração desta tese foram fundamentais as seguintes referências bibliográficas:

1. [AJ], [AJOS], [AFJ1] e [AFJ2], onde encontramos propriedades algébricas e geométricas dos números e funções generalizadas, bém como a teoria do cálculo diferencial de Colombeau.

2. [AFJ2], aqui é introduzido o conceito de membrana bém como a noção de integração em membranas.

3. [GKOS], [Kun1], [KS2] e [KS1], onde encontramos conceitos e resultados da geometria diferencial no ambiente da álgebra de Colombeau $\mathcal{G}(M)$, sendo M uma variedade diferenciável $\mathcal{C}^{\infty}$.

4. [Kam] e [MN], onde se aborda o tema cosmológico da troca de assinaturas .

Capítulo 1

Conceitos Básicos

Neste capítulo apresentaremos as definições básicas e resultados sobre o anel dos **números generalizados** $\overline{\mathbb{R}}$, a **álgebra das funções generalizadas de Colombeau** $\mathcal{G}(\Omega)$(veja [GKSV], [KS2], [AJ], [AJOS]) e o **cálculo diferencial de Colombeau** (veja [AFJ1]). Vale a pena observar que os resultados aqui apresentados valem também para $\overline{\mathbb{C}}$. Aqui, encontra-se também o conceito de **$\mathcal{G}$-variedades** (veja [AFJ1]). E finalmente, a teoria da geometria semi-Riemanniana generalizada, que pode ser encontrada em [KS2] e em [GKOS]. Tudo isto servirá como suporte teórico para o desenvolvimento desta tese.

1.1 Os números generalizados $\overline{\mathbb{R}}$

Inicialmente apresentaremos algumas definições básicas, necessárias para a apresentação do conceito de números generalizados de Colombeau.

Denotando-se por $\mathbb{R}$ o corpo dos números reais e $I = (0, 1]$, define-se:

- O anel das funções de I em $\mathbb{R}$

$$\mathcal{E}(\mathbb{R}) := \mathbb{R}^I;$$

- O subanel

$$\mathcal{E}_M(\mathbb{R}) := \left\{ x \in \mathcal{E}(\mathbb{R}) : \exists a \in \mathbb{R} \text{ tal que } \lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \frac{|x(\epsilon)|}{\epsilon^a} = 0 \right\};$$

Um elemento de $\mathcal{E}_M(\mathbb{R})$ é denominado de **elemento moderado**.

- O ideal

$$\mathcal{N}(\mathbb{R}) := \left\{ x \in \mathcal{E}_M(\mathbb{R}) : \lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \frac{|x(\epsilon)|}{\epsilon^a} = 0 \ \forall \ a \in \mathbb{R} \right\}.$$

Um elemento de $\mathcal{N}(\mathbb{R})$ é denominado **elemento nulo**.

Prova-se que $\mathcal{E}_M(\mathbb{R})$ é uma $\mathbb{R}$-subálgebra de $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ e que $\mathcal{N}(\mathbb{R})$ é um ideal de $\mathcal{E}_M(\mathbb{R})$.

- O anel dos **números generalizados de Colombeau**, denotado por $\overline{\mathbb{R}}$, é definido pelo espaço quociente de $\mathcal{E}_M(\mathbb{R})$ por $\mathcal{N}(\mathbb{R})$, isto é,

$$\overline{\mathbb{R}} := \mathcal{E}_M(\mathbb{R})/\mathcal{N}(\mathbb{R}).$$

Um elemento de $\overline{\mathbb{R}}$ é denotado por $\tilde{x} := cl[(x_\epsilon)_{\epsilon \in I}] = (x_\epsilon) + \mathcal{N}(\mathbb{R})$, onde (x_ϵ) é o representante que também pode ser denotado por x.

Observa-se que $\overline{\mathbb{R}}$ é uma $\mathbb{R}$-álgebra comutativa.

1.1.1 A topologia de $\overline{\mathbb{R}}$

- Se $x \in \mathcal{E}_M(\mathbb{R})$ define-se

$$A(x) = \left\{ a \in \mathbb{R} : \lim_{\epsilon \to 0} \frac{|x(\epsilon)|}{\epsilon^a} = 0 \right\}.$$

- Define-se a **valorização de** $x \in \mathcal{E}_M(\mathbb{R})$ como sendo

$$V(x) := \sup \left\{ a \in \mathbb{R} : \lim_{\epsilon \to 0} \frac{|x(\epsilon)|}{\epsilon^a} = 0 \right\}$$

.

Observe que:

- $A(x) = \mathbb{R} \Longleftrightarrow x \in \mathcal{N}(\mathbb{R})$;

- $V(x) = \infty \Longleftrightarrow x \in \mathcal{N}(\mathbb{R})$.

Lema 1.1. *Se $x \in \mathcal{E}_M(\mathbb{R})$ e $\tau \in A(x)$, então $]-\infty, \tau] \subset A(x)$. Em particular, $A(x)$ é um intervalo.*

Sendo $A(x)$ um intervalo, existe um $a \in \mathbb{R} \cup \infty$ tal que

$$A(x) = (-\infty, a] \text{ ou } A(x) = (-\infty, a) \text{ e } V(x) = a.$$

Em [AJ] provam-se as seguintes propriedades:

Proposição 1.2. *Dados $x, y \in \mathcal{E}_M(\mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, tem-se:*

1. $V(\lambda x) = V(x)$, *se* $\lambda \neq 0$;
2. $V(xy) \geq V(x) + V(y)$;
3. $V((\epsilon^r)_{\epsilon \in I} x) = r + V(x)$;
4. $V(x + y) \geq inf\,\{V(x), V(y)\}$;
5. $V(x) = +\infty$ *se e só se* $x \in \mathcal{N}(\mathbb{R})$;
6. V *é constante em cada classe de equivalência módulo* $\mathcal{N}(\mathbb{R})$.

A proposição 1.2 nos mostra que a função definida por Scarpalezos,

$$\begin{array}{rccc} D: & \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & (\tilde{x}, \tilde{y}) & \mapsto & exp(-V(x-y)) \end{array}$$

onde x e y são representantes de $\tilde{x}$ e $\tilde{y}$, respectivamente, está bem definida.

Corolário 1.3. *A função D é uma ultramétrica em $\overline{\mathbb{R}}$.*

A topologia resultante de D é chamada a **topologia cortante** sobre $\overline{\mathbb{R}}$ e é denotada por τ_s.

- Dados dois elementos $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$ define-se

$$\|\tilde{x} - \tilde{y}\| := D(\tilde{x}, \tilde{y}).$$

- Se $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, ..., \tilde{x}_n) \in \overline{\mathbb{R}}^n$, define-se

$$\|\tilde{x}\|_n := \max\{\|\tilde{x}_i\| : 1 \leq i \leq n, \text{ onde } \tilde{x}_i \in \bar{\mathbb{R}}\}$$

Definição 1.4. *Se $r \in \mathbb{R}_+^*$ e $\tilde{x}_0 \in \overline{\mathbb{R}}^n$, define-se:*

- $B_r(\tilde{x}_0) = \left\{\tilde{x} \in \overline{\mathbb{R}}^n : \|\tilde{x} - \tilde{x}_0\| < r\right\}$;
- $B_r[\tilde{x}_0] = \left\{\tilde{x} \in \overline{\mathbb{R}}^n : \|\tilde{x} - \tilde{x}_0\| \leq r\right\}$;
- $S_r(\tilde{x}_0) = \left\{\tilde{x} \in \overline{\mathbb{R}}^n : \|\tilde{x} - \tilde{x}_0\| = r\right\}$.

Proposição 1.5. $\|\|$ *tem as seguintes propiedades:*

1. $\|\tilde{x}\| = 0$ *se e somente se* $\tilde{x} = 0$;

2. *se* $\|\tilde{x}\| < \|\tilde{y}\|$ *então* $\|\tilde{x} - \tilde{y}\| = \|\tilde{y}\|$;

3. $\|\lambda\tilde{x}\| = \|\tilde{x}\| \ \forall \ \lambda \in \mathbb{R}$;

4. $\|\tilde{x}.\tilde{y}\| \leq \|\tilde{x}\| . \|\tilde{y}\|$;

5. $\|\tilde{x} + \tilde{y}\| \leq \max\{\|\tilde{x}\|, \|\tilde{y}\|\}$.

Para $r \in \mathbb{R}$, denota-se por α_r a classe $cl[\epsilon \longmapsto \epsilon^r]$ e, portanto, $\alpha_r \in \overline{\mathbb{R}}$.

Proposição 1.6. *O número generalizado* α_r *satisfaz as seguintes propriedades:*

- $\|\alpha_r\| = \epsilon^{-r}$.
- $\|\alpha_{-\log(\|\tilde{x}\|)}\| = \|\tilde{x}\|$.
- $\|\alpha_r\tilde{x}\| = \|\alpha_r\|\|\tilde{x}\|$, *para todo* $\tilde{x} \in \overline{\mathbb{R}}$;
- $\beta_r := \alpha_{\log r}$ *para* $r \in \mathbb{R}_+^*$;
- $\|\beta_s\tilde{x}\| = s\,\|\tilde{x}\|$;
- $\|a\| = 1$ *se* $a \neq 0$.

O próximo resultado é fundamental e nos revela uma das mais importantes propriedades algébricas de $\overline{\mathbb{R}}$, provada por Aragona-Juriaans em [AJ]. O mesmo nos fala a respeito do grupo das unidades de $\overline{\mathbb{R}}$ que é denotado por $Inv(\overline{\mathbb{R}})$.

Teorema 1.7 (Teorema fundamental de $\overline{\mathbb{R}}$). *Seja* $\tilde{x} \in \overline{\mathbb{R}}$ *um elemento qualquer. As seguintes afirmações é verdadeira:*

1. $Inv(\overline{\mathbb{R}})$ *é aberto e denso em* $\overline{\mathbb{R}}$.

2. *Se* $\tilde{x} \notin Inv(\overline{\mathbb{R}})$ *então existe um elemento idempotente* $e \in \overline{\mathbb{R}}$ *tal que* $\tilde{x} \cdot e = 0$. *Em particular, um elemento de* $\overline{\mathbb{R}}$ *ou é uma unidade ou um divisor de zero.*

Este teorema nos fala que o grupo das unidades de $\overline{\mathbb{R}}$ é aberto e denso, e um elemento $\tilde{x} \in \overline{\mathbb{R}}$ é uma unidade ou um divisor de zero. Portanto, $\overline{\mathbb{R}}$ não é domínio de integridade. Além disso, este resultado é extremamente importante se pretendemos estudar a **Topologia Diferencial**, tendo como suporte o **Cálculo Diferencial de Colombeau**, onde $\overline{\mathbb{R}}$, e não um corpo, é a estrutura correspondente.

A **caracterização dos elementos invertíveis de** $\overline{\mathbb{R}}$ é obtida através do seguinte teorema e sua demonstração encontra-se em [AJ].

Teorema 1.8. *Um elemento $\tilde{x} \in \overline{\mathbb{R}}$ é uma unidade, se e somente se, para todo representante x de $\tilde{x}$ existe $a \geq 0$ tal que $|x(\varepsilon)| \geq \varepsilon^a$, para ε suficientemente pequeno.*

Ainda em [AJOS] demonstra-se o seguinte resultado.

Teorema 1.9. *Dado $\tilde{x} \in \bar{\mathbb{R}}$ são equivalentes:*

1. *Todo representante x de $\tilde{x}$ satisfaz a seguinte propriedade:*
   (*) $\forall b > 0\ \exists \eta_b \in I$ tal que $x(\epsilon) \geq -\epsilon^b$, onde $0 < \epsilon < \eta_b$;
2. *Existe um representante x de $\tilde{x}$ satisfazendo a propriedade $(*)$;*
3. *Existe um representante x_* de $\tilde{x}$ tal que $x_*(\epsilon) \geq 0$, $\forall \epsilon \in I$.*

O teorema 1.9 proporciona a seguinte definição.

Definição 1.10. *Um elemento $\tilde{x} \in \bar{\mathbb{R}}$ é dito ser não-negativo, quase-positivo ou q-positivo, se tem um representante satisfazendo uma das condições do teorema 1.9. Isto é denotado por $\tilde{x} \geq 0$. O elemento $\tilde{x} \in \bar{\mathbb{R}}$ é dito não-positivo, ou q-negativo se $-\tilde{x}$ é q-positivo. Se $\tilde{y} \in \overline{\mathbb{R}}$ é outro elemento então escreve-se $\tilde{x} \geq \tilde{y}$ se $\tilde{x} - \tilde{y}$ é q-positivo e $\tilde{x} \leq \tilde{y}$ se $\tilde{y} - \tilde{x}$ é q-positivo.*

1.1.2 Associação em $\overline{\mathbb{R}}$

Definição 1.11. *Dado um elemento $\tilde{x} \in \overline{\mathbb{R}}$, diz-se que $\tilde{x}$ está associado à zero, denotando-se por $\tilde{x} \approx 0$, se existir um representante x de $\tilde{x}$ tal que*

$$\lim_{\epsilon \longrightarrow 0} x(\epsilon) = 0$$

Definição 1.12. *Dados dois elementos $\tilde{x}, \tilde{y} \in \overline{\mathbb{R}}$, $\tilde{x}$ é dito associado à $\tilde{y}$, denotando-se por $\tilde{x} \approx \tilde{y}$, se $\tilde{x} - \tilde{y} \approx 0$. Se existe algum $a \in \mathbb{R}$ com $\tilde{x} \approx a$ então a é chamado número associado ou sombra de $\tilde{x}$.*

Em [AFJ1] a definição de associação em $\overline{\mathbb{R}}$ é extendida para $\overline{\mathbb{R}}^n$ e é anunciada da seguinte forma:

Definição 1.13. *Dois elementos $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, ..., \tilde{x}_n), \tilde{y} = (\tilde{y}_1, ..., \tilde{y}_n) \in \overline{\mathbb{R}}^n$ são ditos associados se e somente se $\tilde{x}_i$ e $\tilde{y}_i$ são associado em $\overline{\mathbb{R}}$ para todo $1 \leq i \leq n$.*

1.2 As funções generalizadas de Colombeau

Aqui será apresentado o conceito de funções generalizadas dado por Colombeau. Porém, antes serão dadas algumas definições que se fazem necessárias. Seja Ω um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$, define-se:

- O anel

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\Omega) := \mathcal{E}(\Omega, \mathbb{R}) := \{u : I \times \Omega \to \mathbb{R} \text{ tal que} \\ u_\epsilon := u(\epsilon, .) \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}) \ \forall \epsilon \in I\};\end{aligned}$$

- O subanel $\mathcal{E}_M(\Omega)$ de $\mathcal{E}(\Omega)$

$$\mathcal{E}_M(\Omega) := \mathcal{E}_M(\Omega, \mathbb{R}) := \{(u_\epsilon)_{\epsilon \in I} \in \mathcal{E}(\Omega) : \forall\, K \subset\subset \Omega, \forall\, \alpha \in \mathbb{N}_0^n \ \exists\ p \in \mathbb{R} \text{ tal que}$$

$$\sup_{x \in K} |\partial^\alpha u_\epsilon(x)| = O(\varepsilon^p) \text{ sempre que } \varepsilon \to 0^+\}.$$

  Portanto, $\mathcal{E}_M(\Omega)$ consiste daquelas funções satisfazendo a condição de moderação chamadas de **funções moderadas em** Ω;

- O ideal

$$\mathcal{N}(\Omega) := \mathcal{N}(\Omega, \mathbb{R}) := \{(u_\epsilon)_{\epsilon \in I} \in \mathcal{E}(\Omega) : \forall\ K \subset\subset \Omega, \forall\ \alpha \in \mathbb{N}_0^n \ \forall\ q \in \mathbb{R},$$

$$\sup_{x \in K} |\partial^\alpha u_\varepsilon(x)| = O(\varepsilon^q) \text{ sempre que } \varepsilon \to 0^+\},$$

  subanel de $\mathcal{E}_M(\Omega)$.

  O ideal $\mathcal{N}(\Omega)$ consiste, portanto, daquelas funções satisfazendo a condição de nulidade exposta no ideal e são denominadas de **funções nulas** em Ω.

- O espaço quociente de $\mathcal{E}_M(\Omega)$ por $\mathcal{N}(\Omega)$, isto é,

$$\mathcal{G}(\Omega) = \mathcal{G}(\Omega, \mathbb{R}) := \mathcal{E}_M(\Omega)/\mathcal{N}(\Omega),$$

é denominado a **álgebra de Colombeau**.

Denotaremos por $\tilde{f} = cl[(f_\epsilon)] = (f_\epsilon) + \mathcal{N}(\Omega)$ um elemento de $\mathcal{G}(\Omega)$, onde (f_ϵ) é um representante da função generalizada $\tilde{f}$ que também pode ser denotado por f.

Observa-se que $\mathcal{E}_M(\Omega)$, o espaço de todas as sequências moderadas, é uma álgebra diferencial. Lembramos que $\mathcal{A}(\Omega)$ é dita **álgebra diferencial** se for uma álgebra e existirem derivações

$$\partial_i : \mathcal{A}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{A}(\Omega), \text{ com } i \in \{i, ..., n\}$$

que sejam funções lineares satisfazendo a regra de Leibniz.

Claramente $\mathcal{E}_M(\Omega)$ é a maior subálgebra de $\mathcal{E}(\Omega)$ em que $\mathcal{N}(\Omega)$ é um ideal diferencial (estável por derivadas parciais). Portanto, $\mathcal{G}(\Omega)$ é uma álgebra diferencial comutativa, associativa e satisfaz a regra de Leibniz. Um elemento de $\mathcal{G}(\Omega)$ é denominado de **função generalizada**.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto e $I_\eta := (0, \eta)$ para algum $\eta \in I$. Defina $\Omega_M := \{(x_\varepsilon) \in \Omega^I : \exists p > 0 \text{ com } |x_\varepsilon| \leq \varepsilon^{-p}, \ \forall \ \varepsilon \in I_\eta\}$ e a seguinte relação de equivalência em Ω_M:

$(x_\varepsilon), (y_\varepsilon) \in \Omega_M$ são equivalentes, ou seja, $(x_\varepsilon) \sim (y_\varepsilon)$, se e somente se, dado qualquer $q > 0$ existe $\eta \in I$ tal que $|x_\varepsilon - y_\varepsilon| \leq \varepsilon^q \ \forall \ \varepsilon \in I_\eta$.

Seja $\tilde{\Omega} := \Omega_M / \sim$, note que se $\Omega = \mathbb{R}$, então $\tilde{\Omega} = \overline{\mathbb{R}}$ e que $\tilde{\mathbb{R}}^n = \overline{\mathbb{R}}^n$.

Definição 1.14. *Um elemento $x \in \tilde{\Omega}$ diz-se* **compactamente suportado** *se tem um representante (x_ε) e se existe um subconjunto compacto K de Ω tal que $x_\varepsilon \in K$ para ε suficientemente pequeno.*

Denota-se o conjunto dos elementos $x \in \tilde{\Omega}$ compactamente suportado por $\tilde{\Omega}_c$. Tais elementos são denominados **pontos generalizados**.

Podemos incluir Ω em $\tilde{\Omega}_c$ pela aplicação $x \in \Omega \rightarrow cl[\epsilon \mapsto x_\varepsilon] \in \tilde{\Omega}_c$, onde $x_\varepsilon = x$ para todo $\varepsilon \in I$. Note que, a imagem de Ω é um subconjunto discreto de $\overline{\mathbb{R}}^n$.

Em [AFJ1] encontra-se o seguinte resultado.

Proposição 1.15. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um subconjunto aberto. Então,* $\tilde{\Omega}_c$ *é um subconjunto aberto em* $\overline{\mathbb{R}}^n$.

Definição 1.16. *Sejam* $\tilde{f} \in \mathcal{G}(\Omega), \tilde{x} \in \tilde{\Omega}_c$ *e* x, f *representantes de* $\tilde{x}$ *e* $\tilde{f}$ *respectivamente. O* **valor pontual generalizado** *de* $\tilde{f}$ *em* $\tilde{x}$ *é definido por*

$$\tilde{f}(\tilde{x}) := cl[\varepsilon \mapsto f(\varepsilon, x_\varepsilon)] \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Este conceito foi introduzido por **Kunzinger-Oberguggenberger**(veja [KO]). O teorema que segue, devido a eles, diz que $\tilde{\Omega}_c$ e não Ω, é o domínio natural de f e sua demonstração encontra-se em [Kun1].

Teorema 1.17. *Se* $\tilde{f} \in \mathcal{G}(\Omega)$, *então* $\tilde{f} = 0$ *se e somente se* $\tilde{f}(\tilde{x}) = 0$ *para todo* $\tilde{x} \in \tilde{\Omega}_c$.

A caracterização de funções generalizadas que possuem inverso multiplicativo é dada pelo teorema seguinte, cuja demonstração encontra-se em [AJOS].

Teorema 1.18. *Sejam* Ω *um subconjunto aberto do* $\mathbb{R}^n$ *e* $\tilde{f} \in \mathcal{G}(\Omega)$. *As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. $\tilde{f} \in Inv(\mathcal{G}(\Omega))$;
2. $\tilde{f}(\xi) \in Inv(\overline{\mathbb{R}})$, $\forall\, \xi \in \tilde{\Omega}_c$.

1.2.1 Associação em $\mathcal{G}(\Omega)$

Em [Kun1] podemos encontrar o conceito de integral para funções generalizadas, que é dado da seguinte forma.

Definição 1.19. *Seja* J *um intervalo aberto de* $\mathbb{R}$, $\tilde{f} \in \mathcal{G}(J)$ *e* $a, b \in J$. *A* **integral generalizada** *é um elemento de* $\overline{\mathbb{R}}$ *definido por*

$$\int_a^b \tilde{f} := cl[\epsilon \mapsto \int_a^b f_\varepsilon(t)dt],$$

onde $\int_a^b f_\varepsilon(t)dt$ *é a integral de Riemann e* (f_ϵ) *é um representante de* $\tilde{f}$.

A próxima definição substitui o conceito de igualdade, possibilitando assim a solução de algumas equações diferenciais parciais no ambiente generalizado.

Definição 1.20. *Uma função generalizada $\tilde{f} \in \mathcal{G}(\Omega)$ é dita associada à zero, denotando-se por $\tilde{f} \approx 0$, se existe um representante (f_ϵ) de $\tilde{f}$ tal que*

$$\lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \int_\Omega f_\epsilon(x)\varphi(x)dx = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

ou seja,

$$f_\epsilon \longrightarrow 0 \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Definição 1.21. *Duas funções generalizadas $\tilde{f}, \tilde{g} \in \mathcal{G}(\Omega)$ são ditas associadas, denotando-se por $\tilde{f} \approx \tilde{g}$, se $\tilde{f} - \tilde{g} \approx 0$.*

A noção de associação também é empregada para obter compatibilidade com o conceito de distribuição, conforme a definição dada a seguir.

Definição 1.22. *Sejam $\tilde{f} \in \mathcal{G}(\Omega)$ e $\omega \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Diz-se que, $\tilde{f}$ admite ω como distribuição associada, denotando-se por $\tilde{f} \approx \omega$, se*

$$\lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \int_\Omega f_\epsilon(x)\varphi(x)dx = \langle \omega, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

A distribuição ω é denominada a **sombra distribucional de** $\tilde{f}$.

Teorema 1.23. *Seja $\iota : \mathcal{D}'(\Omega) \longrightarrow \mathcal{G}(\Omega)$ uma imersão de $\mathcal{D}'(\Omega)$ em $\mathcal{G}(\Omega)$. Então:*

1. *se $f \in C^\infty(\Omega)$ e $\omega \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tem-se que*
$$\iota(f\omega) \approx \iota(f)\iota(\omega);$$
2. *se $f, g \in C(\Omega)$, tem-se que*
$$\iota(fg) \approx \iota(f)\iota(g);$$
3. *se $f \in C(\Omega)$ e $x_0 \in \Omega$, então*
$$f(x_0) \approx \iota(f)(x_0);$$
4. *sejam $g : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$, $g \in C^\infty$ e $f \in C(\Omega_2)$. Então,*
$$\iota(f \circ g) \approx \iota(f) \circ g;$$

5. *seja* $g : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ *um difeomorfismo e* $\omega \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$. *Então,*

$$\iota(g^* \circ \omega) \approx \iota(\omega) \circ g,$$

onde $g^*(\omega)$ *denota o pullback de* ω.

Teorema 1.24. *Sejam* $\tilde{f}, \tilde{g} \in \mathcal{G}(\Omega)$ *e* $\tilde{f} \approx \tilde{g}$. *Então:*

1. $D^\alpha \tilde{f} \approx D^\alpha \tilde{g}$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n$;

2. $\iota(h)\tilde{f} \approx \iota(h)\tilde{g}$, $\forall h \in C^\infty(\Omega)$.

Em [AFJ1] Aragona, Fernandes e Juriaans definem a aplicação

$$k = k_\Omega : \mathcal{G}(\Omega) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}^{\widetilde{\Omega}_c}$$

por $k(\tilde{f})(\tilde{x}) = \tilde{f}(\tilde{x})$ para todo $\tilde{x} \in \widetilde{\Omega}_c$.

Considera-se $\mathcal{G}(\Omega)$ munido com a topologia cortante(veja [Sca1] e [Sca2]), enquanto que $C^\infty(\widetilde{\Omega}_c, \overline{\mathbb{R}})$ possui a topologia da convergência pontual, isto é, $f_n \longrightarrow f$ em $C^\infty(\widetilde{\Omega}_c, \overline{\mathbb{R}})$ se e somente se $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ para todo $x \in \widetilde{\Omega}_c$. A partir disto provam o seguinte resultado.

Teorema 1.25 (Aragona-Fernandes-Juriaans). *Seja* Ω *um subconjunto aberto de* $\mathbb{R}^n$. *Então, com relação ao mergulho* $\kappa : \mathcal{G}(\Omega) \to C^\infty(\widetilde{\Omega}_c, \overline{\mathbb{R}})$ *tem-se que:*

1. κ *é um monomorfismo de* $\overline{\mathbb{R}}$*-álgebras;*

2. *para todo* $\tilde{f} \in \mathcal{G}(\Omega)$ *e para todo* α *multi-índice, tem-se que*

$$\kappa(D^\alpha \tilde{f}) = D^\alpha(\kappa(\tilde{f})).$$

Este é um importante teorema, pois nos mostra que de fato as funções generalizadas podem ser vistas como funções de classe C^∞ possibilitando, assim, tratar a teoria das funções generalizadas como uma teoria do cálculo diferencial. Observe também que todas as irregularidades desaparecem e as distribuições tornam-se funções C^∞.

1.3 O cálculo diferencial de Colombeau

Nesta seção será apresentado o Cálculo Diferencial de Colombeau, desenvolvido por **Aragona, Fernandes e Juriaans** em [AFJ1]. Para tanto, considere o ambiente $\overline{\mathbb{R}}^n$ munido com a topologia produto.

1.3.1 Diferenciação

Definição 1.26. *Seja $U \subset \overline{\mathbb{R}}^n$ um subconjunto aberto, $f : U \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ e $x_0 \in U$. Dizemos que f é diferenciável em x_0 se existe $z_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ tal que*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - z_0(x - x_0)}{\alpha_{-\log(\|x - x_0\|)}} = 0.$$

Neste caso,

$$z_0 = \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{f(x_0 + \alpha_n) - f(x_0)}{\alpha_n}, \tag{1.1}$$

onde $\alpha_n = cl[\epsilon \mapsto \epsilon^n]$.

Note que,

$$\left\| \frac{f(x) - f(x_0) - z_0(x - x_0)}{\alpha_{-\log(\|x - x_0\|)}} \right\| = \frac{\|f(x) - f(x_0) - z_0(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|}. \tag{1.2}$$

A definição 1.26 é uma **generalização da derivada de Fréchet** e de modo análogo ao caso clássico, z_0 é dita a derivada de f no ponto x_0 e é denotada por $Df(x_0)$. Portanto, se f é diferenciável em x_0, então podemos escrever

$$f(x) = f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0) + E(x), \tag{1.3}$$

com

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{E(x)}{\alpha_{-\log\|x - x_0\|}} = 0. \tag{1.4}$$

Com relação a este conceito de derivada, o próximo resultado nos garante que todas as propriedades de derivação clássica do cálculo são satisfeitas.

Teorema 1.27. *Sejam $U \subset \overline{\mathbb{R}}$ um subconjunto aberto e $f, g : U \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ funções diferenciáveis. Então:*

1. *fg é diferenciável e*

$$D(fg) = gD(f) + fD(g)$$

2. *se $f(U)$ está contida no domínio de g, então*

$$D(g \circ f)(x_0) = Dg(f(x_0) \circ Df(x_0)),$$

onde f é diferenciável em $x_0 \in U \subset \overline{\mathbb{R}}$ enquanto que g é diferenciável em $f(x_0) \in V \subset \overline{\mathbb{R}}$, V aberto.

3. *se $g(x) \in Inv(\overline{\mathbb{R}})$ $\forall x \in U$, então tem-se que*

$$D(f/g) = \tfrac{gD(f) - fD(g)}{g^2}.$$

Seja $U \subset \overline{\mathbb{R}}^n$ um subconjunto aberto munido com a topologia produto.

Definição 1.28. *Sejam $f : U \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}, x = (x_1, ..., x_n)$ e $x_0 = (x_{01}, ..., x_{0n})$ elementos de U. Seja $1 \leq i \leq n$ e suponha que existe $a \in \overline{\mathbb{R}}$ tal que*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_{01}, ...x_{0i} + h, ..., x_{0n}) - f(x_{01}, ..., x_{0n}) - a_i h}{\alpha_{-\log\|h\|}} = 0.$$

A **derivada parcial de f em relação a x_i no ponto x_0** *é definida por $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = a_i$.*

Definição 1.29. *Uma aplicação $f : U \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ é dita diferenciável em x_0 se existe $a = (a_1, ..., a_n) \in \overline{\mathbb{R}}^n$ tal que*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \sum_{i=1}^{n} a_i(x_i - x_0)}{\alpha_{-\log\|x - x_0\|}} = 0.$$

Definição 1.30. *Seja $f : U \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ uma aplicação diferenciável em x_0. Defini-se o* **gradiente** *de f como sendo*

$$\nabla f(x_0) = (\tfrac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \tfrac{\partial f}{\partial x_n}).$$

Definição 1.31. *Define-se:*

- *O $\overline{\mathbb{R}}$-módulo das* **funções de classe** C^k *por*

$$C^k(U,\overline{\mathbb{R}}) := \left\{ f : U \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} : \partial^\alpha f \in C(U,\overline{\mathbb{R}}) \ \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \ \text{tal que } 0 \leq |\alpha| \leq k \right\},$$

  onde $k \in \mathbb{N}$;

- *O $\overline{\mathbb{R}}$-módulo das* **funções de classe** C^∞ *por*

$$C^\infty(U,\overline{\mathbb{R}}) := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C^k(U,\overline{\mathbb{R}}).$$

Em [AFJ2] Aragona, Fernandes e Juriaans continuaram a desenvolver o cálculo diferencial de Colombeau e apresentaram os seguintes teoremas, análogos a dos teoremas do cálculo diferencial clássico.

Teorema 1.32. *Sejam U e V subconjuntos abertos de $\overline{\mathbb{R}}^n$, $f : U \longrightarrow V$ uma função com inversa $g : V \longrightarrow U$. Se f é diferenciável em $x_0 \in U$, $\det(Df(x_0)) \in Inv(\overline{\mathbb{R}})$ e g contínua em $y_0 = f(x_0)$, então, g é diferenciável em y_0.*

Consideremos o mergulho $\kappa : \mathcal{G}(\Omega) \to C^\infty(\widetilde{\Omega}_c, \overline{\mathbb{R}})$ e a função

$$(f_1, ..., f_s) \in \mathcal{G}(\Omega)^s \longrightarrow (kf_1, ..., kf_s) \in C^\infty(\widetilde{\Omega}_c, \overline{\mathbb{R}})^s,$$

será também denotada por k.

Teorema 1.33 (Teorema da função inversa). *Seja Ω um subconjunto aberto e convexo de $\overline{\mathbb{R}}^n$, $f \in \mathcal{G}(\Omega)^n$ e $x_0 \in \tilde{\Omega}_c$ tal que $\det(Dk(f)(x_0)) \in Inv(\bar{\mathbb{R}})$. Então, existem U e V subconjuntos abertos de $\overline{\mathbb{R}}^n$ tais que $x_0 \in U$, $(k(f))(x_0) \in V$ e $k(f) : U \longrightarrow V$ é um C^∞-difeomorfismo.*

Teorema 1.34 (Teorema da função implícita). *Seja Ω um subconjunto aberto e convexo de $\overline{\mathbb{R}}^m \times \overline{\mathbb{R}}^s$, $f \in \mathcal{G}(\Omega)^s$ e $(x_0, y_0) \in \widetilde{\Omega}_c$ tal que $k(f)(x_0, y_0) = 0$ e $\det(D_y(k(f))(x_0, y_0)) \in Inv(\overline{\mathbb{R}})$. Então, existem $U \subset \overline{\mathbb{R}}^m$ e $U \subset \overline{\mathbb{R}}^s$ tal que $(x_0, y_0) \in U \times V \subset \widetilde{\Omega}_c$ tal que para todo $x \in U$ existe um único $g(x) \in V$ com $k(f)(x, g(x)) = 0$. Além disso, a função $g : U \longrightarrow V$ é C^∞ e $Dg(x) = [D_y(k(f))(x, g(x))]^{-1}[-D_x(k(f))(x, g(x)]$, para todo $x \in U$.*

1.3.2 Integração

Agora, a partir da função k, definida anteriormente, define-se a integral da seguinte forma:

Seja J um intervalo aberto de $\mathbb{R}$, $\tilde{f} \in \mathcal{G}(J)$ e $\tilde{a}, \tilde{b} \in \tilde{J}_c$, define-se

$$\int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} k(\tilde{f}) = cl[\epsilon \mapsto \int_{a_\epsilon}^{b_\epsilon} f_\epsilon(t)dt],$$

onde $(a_\epsilon), (b_\epsilon)$ e f_ϵ são representantes de $\tilde{a}, \tilde{b}$ e $\tilde{f}$, respectivamente, enquanto que $\int_{b_\epsilon}^{a_\epsilon} f_\varepsilon(t)dt$ é a integral de Riemann.

Proposição 1.35. *Seja J um intervalo aberto de $\mathbb{R}$ e $\tilde{a}, \tilde{b} \in \tilde{J}_c$.*

- *dados $\tilde{f}, \tilde{g} \in \mathcal{G}(J)$, $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$ e $\tilde{c} \in \tilde{J}_c$, então*

$$\int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} k(\tilde{f} + \lambda\tilde{g}) = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} k(\tilde{f}) + \lambda \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} k(\tilde{g});$$

- $\int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} k(\tilde{f}) = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{c}} k(\tilde{f}) + \int_{\tilde{c}}^{\tilde{b}} k(\tilde{f})$
- $\int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} k(\tilde{f}) = \int_{\tilde{b}}^{\tilde{a}} k(\tilde{f})$.

Usando o teorema anterior pode-se demostrar que o análogo do clássico teorema fundamental do cálculo é válido nesta estrutura, cuja demonstração se encontra em [AFJ1].

Teorema 1.36 (Teorema Fundamental do Cálculo Generalizado). *Se J é um intervalo aberto de $\mathbb{R}$, $\tilde{a} \in \tilde{J}_c$, $\tilde{f} \in \mathcal{G}(J)$ e F é a função definida sobre $\tilde{J}_c$ por $F(\tilde{x}) = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{x}} \kappa(\tilde{f})$, então F é uma função diferenciável e*

$$F'(\tilde{x}) = D\Big(\int_{\tilde{a}}^{\tilde{x}} \kappa(\tilde{f})\Big) = \kappa(\tilde{f}).$$

1.4 A $\mathcal{G}$-variedade

Seguindo o mesmo método de obtenção de conceitos e resultados fundamentados em $\overline{\mathbb{R}}^n$, análogos aos de $\mathbb{R}^n$, é introduzido em [AFJ1] o conceito de variedade diferenciável modelados sobre o $\overline{\mathbb{R}}^n$.

Definição 1.37. *Seja X um conjunto. Um atlas generalizado de classe C^∞ e dimensão n sobre X é uma família $\mathcal{A} = \{(U_\lambda, u_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ verificando as seguintes condições:*

1. $\oslash \neq U_\lambda \subset X$, *para cada* $\lambda \in \Lambda$ *e* $X = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$;

2. *para cada* $\lambda \in \Lambda$ *a aplicação* $u_\lambda : U_\lambda \longrightarrow u_\lambda(U_\lambda)$ *é uma aplicação bijetiva de* $U_\lambda \subset X$ *sobre o subconjunto aberto* $u_\lambda(U_\lambda) \subset \overline{\mathbb{R}}^n$ *e para todo par* $\lambda, \mu \in \Lambda$, *o conjunto* $u_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu)$ *é um subconjunto aberto do* $\overline{\mathbb{R}}^n$;

3. *a aplicação* $u_\mu \circ u_\lambda^{-1} : u_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu) \longrightarrow u_\mu(U_\lambda \cap U_\mu)$ *é um difeomorfismo de classe* C^∞ *para cada* $(\lambda, \mu) \in \Lambda \times \Lambda$.

A família $\mathcal{A} = \{(U_\lambda, u_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ pode também ser chamada de **$\mathcal{G}$-estrutura diferenciável.**

Definição 1.38. *Uma variedade diferenciável generalizada(ou $\mathcal{G}$-variedade)de dimensão n e classe C^∞ é um par $(X, \mathcal{A})$, onde X é um conjunto não-vázio e $\mathcal{A}$ é um $\mathcal{G}$-atlas dimensão n e classe C^∞ sobre X.*

Também em [AFJ1] é proposto um roteiro para construção de $\mathcal{G}$-variedades, obtendo-se assim uma infinidade de exemplos. O mesmo consiste em associar a cada variedade diferencial, no sentido clássico, uma $\mathcal{G}$-variedade de mesma dimensão. O referido caminho será apresentado em seguida.

Sejam X um conjunto, $A \neq \oslash$ um subconjunto de X e $\psi : A \longrightarrow \psi(A) \subset \mathbb{R}^n$ uma aplicação bijetiva. Considere o conjunto

$$A_X(\psi) := \left\{(x_\epsilon) \in A^I : cl[(\psi(x_\epsilon))] \in \widetilde{\psi(A)}_c\right\}$$

com a seguinte relação de equivalência:

$$(x_\epsilon) \approx (y_\epsilon) \iff (\psi(x_\epsilon) - \psi(y_\epsilon)) \in (\mathcal{N}(\mathbb{R}))^n.$$

Pode-se considerar, então, o conjunto quociente $A_X(\psi)/\approx$, que é denotado por $A^\circ(\psi)$, isto é,

$$A^\circ(\psi) := A_X(\psi)/\approx.$$

Observe que:

$$cl[(x_\epsilon)] = cl[(y_\epsilon)] \iff cl[(\psi(x_\epsilon))] = cl[(\psi(y_\epsilon))],$$

onde $cl[(x_\epsilon)]$ denota a classe de equivalência de $(x_\epsilon) \in A_X(\psi)$ módulo $\approx$.

O lema seguinte é aplicado na demonstração de um resultado que afirma a existência da $\mathcal{G}$-variedade associada a uma variedade diferenciável clássica.

Lema 1.39. *Sejam X um conjunto, $\oslash \neq A \subset X$ um subconjunto de X e $\psi : A \longrightarrow \psi(A) \subset \mathbb{R}^n$ uma aplicação bijetiva. Então, existe uma aplicação natural $i_{A,\psi} : A \longrightarrow A^\circ(\psi)$ e uma aplicação bijetiva $\psi^\circ : A^\circ(\psi) \longrightarrow \widetilde{\psi(A)}_c$ tornando o seguinte diagrama comutativo*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\psi} & \psi(A) \\ {\scriptstyle i_{A,\psi}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \iota} \\ A^\circ(\psi) & \xrightarrow{\psi^\circ} & \widetilde{\psi(A)}_c \end{array}$$

onde a ι é a imersão natural de $\psi(A)$ em $\widetilde{\psi(A)}_c$.

Teorema 1.40. *Seja $(M, \mathcal{A})$ uma variedade C^∞-diferenciável de dimensão N onde $\mathcal{A} = \{(\mathcal{U}_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$. Então, existem uma $\mathcal{G}$-variedade $M^* := \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \bigcup_\lambda^o(\varphi_\lambda)$ e $\mathcal{A}^* := \{(\bigcup_\lambda^o(\varphi_\lambda), \varphi_\lambda^o)\}_{\lambda\in\Lambda}$ tal que toda aplicação diferenciável definida sobre M induz uma aplicação diferenciável definida sobre M^*.*

1.5 Geometria semi-Riemanniana generalizada

Faremos agora um breve relato do quadro teórico em que se encontra a geometria pseudo-Riemanniana generalizada, necessária para um melhor entendimento do estudo baseado em [Kam] e em [MN], que será apresentado no capítulo 4, referente a troca de assinaturas cosmológica. Nesta teoria encontram-se os conceitos e resultados análogo-clássico, tais como: métrica pseudo-Riemanniana, conexões e tensor curvatura. Além disso, encontra-se o lema fundamental da geometria pseudo-Riemanniana, bem como a noção de geodésica. Tudo isto no ambiente generalizado. Para um maior aprofundamento teórico veja [Kun1], [KS2] e [GKOS].

Seja X uma variedade diferenciável, de Hausdorff e paracompacta, de dimensão n. Denota-se por $\mathcal{P}(X)$ o espaço dos operadores diferenciais lineares sobre X. Define-se:

- $\mathcal{E}(X) = C^\infty(X)^I$, onde $I = (0, 1]$.
- $\mathcal{E}_M(X) = \{(u_\epsilon)_\epsilon \in \mathcal{E} : \forall K \subset\subset X, \forall P \in \mathcal{P}(X) \exists N \in \mathbb{N} :$ $sup_{p\in K} |Pu_\epsilon(p)| = O(\epsilon^{-N}), \text{quando } \epsilon \rightarrow 0\}$.

- $\mathcal{N}(X) = \{(u_\epsilon)_\epsilon \in \mathcal{E}_M(X) : \forall K \subset\subset X, \forall m \in \mathbb{N}_0$
  $sup_{x \in K} |Pu_\epsilon(p)| = O(\epsilon^m), \text{quando } \epsilon \to 0\}$

A álgebra de Colombeau sobre X é definida como o quociente

$$\mathcal{G}(X) = \mathcal{E}_M(X)/\mathcal{N}(X).$$

Os elementos de $\mathcal{G}(X)$ são classes laterais denotadas por

$$\tilde{u} = cl[(u_\epsilon)_\epsilon] = (u_\epsilon)_\epsilon + \mathcal{N}(X).$$

Observa-se que $\mathcal{E}_M(X)$, $\mathcal{N}(X)$ e, portanto, $\mathcal{G}(X)$ podem ser caracterizados localmente, isto é, $\tilde{u} \in \mathcal{G}(X)$ se, e somente se, $\tilde{u}_\alpha = \tilde{u} \circ \phi_\alpha^{-1} \in \mathcal{G}(\phi_\alpha(V_\alpha))$ para toda carta (V_α, ϕ_α) e $\tilde{u}_\alpha \mid_{\phi_\alpha(V_\alpha \cap V_\beta)} = \tilde{u}_\beta \mid_{\phi_\beta(V_\alpha \cap V_\beta)} \circ \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$ para todo α, β com $V_\alpha \cap V_\beta \neq \emptyset$.

Observa-se também que $\mathcal{E}_M(X)$ é uma álgebra diferencial com relação a derivada de Lie, enquanto que $\mathcal{N}(X)$ é um ideal diferencial de $\mathcal{E}_M(X)$. Logo, $\mathcal{E}_M(X)$ e $\mathcal{N}(X)$ são invariantes pela ação de qualquer $P \in \mathcal{P}(X)$. Então, faz sentido a noção da ação de P em $\tilde{u}$, que se dá do seguinte modo: Dados $\tilde{u} \in \mathcal{G}(X)$ e $P \in \mathcal{P}(X)$, então

$$P\tilde{u} := cl[(Pu_\epsilon)_\epsilon],$$

onde $P\tilde{u}$ é um elemento bem definido de $\mathcal{G}(X)$.

Uma rede $(p_\epsilon) \in X^I$ é dita compactamente suportada se existem $K \subset\subset X$ e $\eta \in I$ tal que $p_\epsilon \in K$ $\forall \epsilon \in I_\eta$. O conjunto de tais redes é denotado por X_c.

O espaço $\tilde{X}_c = X_c / \sim$ denota o conjunto das classes de equivalência dos pontos generalizados suportados compactamente $(p_\epsilon) \in X^I$ com respeito a relação de equivalência

$$(p_\epsilon) \sim (q_\epsilon) \iff d_h(p_\epsilon, q_\epsilon) = O(\epsilon^m) \; \forall \; m > 0,$$

onde d_h denota a função distância sobre X induzida pela métrica Riemanniana h.

Para toda função generalizada $\tilde{u}$ e para todo $p \in \tilde{X}_c$

$$\tilde{u}(p) := cl[(u_\epsilon(p_\epsilon))_\epsilon]$$

é um elemento bem definido de $\overline{\mathbb{R}}$. Além disso,

$$\tilde{u} = 0 \quad \text{se e somente se} \quad \tilde{u}(p) = 0 \quad \forall \, p \in \tilde{X}_c.$$

O $\mathcal{G}(X)$-módulo das secções generalizadas de um fibrado vetorial $E \to X$ é definido por

$$\Gamma_{\mathcal{G}}(X,E) := \Gamma_{\mathcal{E}_M}(X,E)/\Gamma_{\mathcal{N}}(X,E),$$

onde:

- $\Gamma_{\mathcal{E}}(X,E) := (\Gamma(X,E))^I$;
- $\Gamma_{\mathcal{E}_M}(X,E) := \{(s_\epsilon)_\epsilon \in \Gamma_{\mathcal{E}}(X,E) \mid \forall\alpha, \forall i = 1,...,n' : ((s^i_\alpha)_\epsilon) \in \mathcal{E}_M(\psi_\alpha(V_\alpha))\}$
- $\Gamma_{\mathcal{N}}(X,E) := \{(s_\epsilon)_\epsilon \in \Gamma_{\mathcal{E}}(X,E) \mid \forall\alpha, \forall i = 1,...,n' : ((s^i_\alpha)_\epsilon) \in \mathcal{N}(\psi_\alpha(V_\alpha))\}$

As secções generalizadas são denotadas por

$$\tilde{s} = cl[(s_\epsilon)_\epsilon] = (s_\epsilon)_\epsilon + \Gamma_{\mathcal{N}}(X,E).$$

Sua expressão local é denotada por $\tilde{s}_\alpha$, onde (V_α, Ψ_α) é dada por $\tilde{s}^i_\alpha = \Psi^i_\alpha \circ \tilde{s} \circ \varphi^i_\alpha$ é a i-ésima componente com respeito a carta fibrado vetorial (V_α, Φ_α).

Uma secção $\tilde{s} \in \Gamma_{\mathcal{G}}(X,E)$ é chamada associada com zero, $\tilde{s} \approx 0$, se todas suas componentes $\tilde{s}^i_\alpha \approx 0$ em $\mathcal{G}(\varphi_\alpha(V_\alpha))$, $\forall\alpha$. Enquanto que $w \in \mathcal{D}'(X,E)$ é uma sombra distribucional de $\tilde{s}$, denotado por $\tilde{s} \approx w$, se $\tilde{s}^i_\alpha \approx w^i_\alpha$ para cada i.

Dado um campo tensorial generalizado $T \in \mathcal{G}^r_s(X) = \Gamma_{\mathcal{G}}(X, T^r_s(X))$, chama-se as n^{r+s} funções generalizadas sobre V_α definidas por

$$T^{\alpha\beta_1...\beta_r}_{\gamma_1...\gamma_s} := T\mid_{V_\alpha}(dx^{\beta_1},...,dx^{\beta_r},\partial_{\gamma_1}...\partial_{\gamma_s})$$

suas componentes com respeito as cartas (V_α, Φ_α).

Um elemento $\tilde{u}$ de $\mathcal{G}(X)$ é dito associado à zero, $\tilde{u} \approx 0$, se

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_X u_\epsilon \mu = 0$$

para toda $\mu \in \Gamma_c(X, vol(X))$ compactamente suportado e um (portanto, todo) representante $(u_\epsilon)_\epsilon$ de $\tilde{u}$. O conjunto $\Gamma_c(X, vol(X))$ denota o espaço das C-seções no fibrado $(vol(X), X, \pi)$ com suporte compacto. Enquanto que, se

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_X u_\epsilon = \langle w, \tilde{u}\rangle$$

para algum $w \in \mathcal{D}'(X)$, então w é chamado a sombra distribucional de $\tilde{u}$ e é denotado por $\tilde{u} \approx w$.

Lembramos que um campo vetrial $\eta : X \longrightarrow TX$ é uma aplicação que associa cada $p \in X$ um vetor tangente $\eta(p) \in T_pX$, onde $TX := \bigcup_{p \in X} T_pX$ é o fibrado tangente. E que

$$\mathfrak{X}(X) = \{\xi : X \longrightarrow TX : \xi(p) \in T_pX \ \forall p \in X, \xi \in C^{\infty}\}$$

indica o conjunto de vetores tangentes e de classe C^{∞}

A derivada de Lie é definida por:

1. $L_\eta f := \eta f$, onde $\eta f = \frac{d}{dt}(f \circ \alpha)(t)$ com $\alpha'(0) = \eta$ e $\alpha(0) = p$;
2. $L_\eta \xi = [\eta, \xi]$, onde $[\eta, \xi] = \eta\xi - \xi\eta$ é o colchete de Lie e $\eta, \xi \in \mathfrak{X}(X)$.

Uma função generalizada $\tilde{u} \in \mathcal{G}(X)$ é dita k-associada com zero, $\tilde{u} \approx_k 0$, onde $1 \leq k \leq \infty$ se para todo $l \leq k$, para todo campo $\xi_1, ..., \xi_l \in \mathfrak{X}(X)$ e um representante(portanto, todo) $(u_\epsilon)_\epsilon$ tem-se que

$$\lim_{\epsilon \to 0} L_{\xi_1} ... L_{\xi_l} u_\epsilon = 0$$

uniformemente sobre conjuntos compactos, onde

$$L_\xi \tilde{u} := cl[(L_\xi u_\epsilon)_\epsilon], \ \xi \in \mathfrak{X}(X)$$

e $L_\xi u_\epsilon = \xi u_\epsilon$ é a derivada clássica de Lie de u_ϵ com respeito à ξ.

E $\tilde{u}$ admite f como função C^k-associado, denotado por $\tilde{u} \approx_k f$, onde $1 \leq k \leq \infty$ se para todo $l \leq k$, para todo campo $\xi_1, ..., \xi_l \in \mathfrak{X}(X)$ e um representante(e portanto todo) $(u_\epsilon)_\epsilon$ tem-se que $L_{\xi_1} ... L_{\xi_l}(u_\epsilon - f) \to 0$ uniformemente sobre conjuntos compactos.

Um $(0,2)$-campo tensorial distribucional $g \in \mathcal{D}'(X)$ é chamado não-degenerado se $g(\xi, \eta) = 0 \ \forall \eta \in \mathfrak{X}(X)$ implica $\xi = 0$ em $\mathfrak{X}(X)$.

Seja $\tilde{g} \in \mathcal{G}^0_2(X)$, as seguintes afirmações são equivalentes:

1. Para cada carta $(V_\alpha, \varphi_\alpha)$ e cada $x \in \left(\widetilde{\varphi_\alpha(V_\alpha)}\right)_c$ a aplicação $\tilde{g}_\alpha(x) : \overline{\mathbb{R}}^n \times \overline{\mathbb{R}}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}^n$ é simétrica e não-degenerada;

2. $\tilde{g}(x) : \mathcal{G}_0^1(X) \times \mathcal{G}_0^1(X) \longrightarrow \mathcal{G}(X)$ é simétrica e $\det(\tilde{g})$ é invertível em $\mathcal{G}(X)$;

3. $\det(\tilde{g})$ é invertível em $\mathcal{G}(X)$ e para cada conjunto $V \subset X$, existe um representante $(g_\epsilon)_\epsilon$ de $\tilde{g}$ e um $\eta \in I$ tal que $g_\epsilon \mid_V$ é uma métrica pseudo-Riemanniana diferenciável para todo $\epsilon \in I_\eta$.

Seja $\tilde{g} \in \mathcal{G}_2^0(X)$ satisfazendo um dos itens anteriores $(1, 2, 3)$, e portanto, todos. Se existe algum $j \in \mathbb{N}_0$ com a propriedade de que para cada subconjunto aberto relativamente compacto V de X existe um representante de $\tilde{g}$ como no item (3) tal que, o índice de cada g_ϵ igual a j, chama-se j o índice de $\tilde{g}$.

Um $(0, 2)$-campo tensorial generalizado $\tilde{g} \in \mathcal{G}_2^0(X)$ é chamado uma métrica (pseudo-)Riemanniana se esta satisfaz uma das condições equivalentes anteriormente relatadas e possui um índice(diferente de zero).

Uma variedade diferenciável X munida de uma métrica (pseudo-)Riemanniana generalizada é denominada de variedade (pseudo-)Riemanniana generalizada. Se o índice de $\tilde{g}$ é igual a 1 ou $n-1$, $(X, \tilde{g})$ ou simplesmente X é chamada de espaço-tempo generalizado.

Seja $\tilde{g} = cl[(g_\epsilon)_\epsilon]$ uma métrica pseudo-Riemanniana generalizada. Então, a métrica inversa $\tilde{g}^{-1} := cl[(g_\epsilon^{-1})_\epsilon]$ é um elemento bem definido de $\mathcal{G}_2^0(X)$. Ela é denotada por $\tilde{g}^{ab}$ e suas componentes por $\tilde{g}^{ij}$, enquanto que as componentes do representante por g_ϵ^{ij}.

A métrica generalizada também é denotada por

$$d\tilde{s}^2 = cl[(ds_\epsilon^2)_\epsilon].$$

Exemplo 1.41. pp-métrica impulsiva *(veja [KS3]):*

$$ds^2 = f(x^i)\delta(u)du^2 - dudv + \textstyle\sum_{i=1}^2 (dx^i)^2,$$

onde $x^i = (x, y)$ denota a coordenadas transversa gerando uma superfície de onda.

A métrica generalizada tem como representante (ds_ϵ^2), onde

$$ds_\epsilon^2 = f(x^i)\rho_\epsilon(u)du^2 - dudv + \textstyle\sum_{i=1}^2 (dx^i)^2, \text{ com } \epsilon \in I.$$

Exemplo 1.42. Métrica Schwarzschild *(veja [SH])*

$$ds^2 = h(r)dt^2 - h(r)^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega^2,$$

onde $h(r) = -1 + \frac{2m}{r}$ *é um elemento de* $L^1_{loc}(\mathbb{R}^3)$ *e* $d\Omega^2 = d\theta^2 + sen^2\theta d\varphi^2$ *com* $\theta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi)$.

A métrica generalizada tem como representante (ds^2_ϵ), *onde*

$$ds^2_\epsilon = h_\epsilon(r)dt^2 - h_\epsilon(r)^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega^2, \text{ com } h_\epsilon(r) = -1 + 2m(\tfrac{1}{r})_\epsilon.$$

Exemplo 1.43. Métrica descontínua *(veja [Kam])*

$$ds^2 = f(t)dt^2 - dx^2,$$

onde $f(t) = H(t) - H(-t)$ *com* H *é a função de Heaviside e* $H(-t) = 1 - H(t)$

A métrica generalizada tem como representante (ds^2_ϵ), *onde*

$$ds^2_\epsilon = (2\int_{-\infty}^{t/\epsilon} \rho(s)ds - 1)dt^2 - dx^2.$$

Uma conexão sobre uma variedade generalizada X é uma aplicação

$$\tilde{\nabla} : \mathcal{G}^1_0(X) \times \mathcal{G}^1_0(X) \longrightarrow \mathcal{G}^1_0(X)$$

satisfazendo:

- $\tilde{\nabla}_\xi \eta$ é $\bar{\mathbb{R}}$-linear em η;
- $\tilde{\nabla}_\xi \eta$ é $\mathcal{G}(X)$-linear em ξ;
- $\tilde{\nabla}_\xi(u\eta) = u\tilde{\nabla}_\xi \eta + \xi(u)\eta, \quad \forall u \in \mathcal{G}(X)$.

A partir daqui utilizaremos a notação de Einstein, isto é, índices repetidos significam somatório.

Seja $(V_\alpha, \varphi_\alpha)$ uma carta sobre X com coordenadas x^i. Os símbolos de Christoffel para esta carta são funções generalizadas $\tilde{\Gamma}^k_{ij} \in \mathcal{G}(V_\alpha)$ dadas por

$$\tilde{\nabla}_{\partial_i}\partial_j = \tilde{\Gamma}^k_{ij}\partial_k, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

O lema Fundamental da Geometria (pseudo-)Riemanniana Generalizado afirma que: se $(X, \tilde{g})$ é uma variedade pseudo-Riemanniana generalizada então, existe uma única conexão generalizada $\tilde{\nabla}$ tal que

- $[\xi, \eta] = \tilde{\nabla}_\xi \eta - \tilde{\nabla}_\eta \xi$;
- $\xi\tilde{g}(\eta, \tau) = \tilde{g}(\tilde{\nabla}_\xi \eta, \tau) + \tilde{g}(\eta, \tilde{\nabla}_\xi \tau) \quad \forall \xi, \eta, \tau \in \mathcal{G}^1_0(X)$.

Neste caso $\tilde{\nabla}$ é denominada de conexão de Levi-Civita generalizada de X e é caracterizada pela fórmula de Koszul

$\tilde{g}(\tilde{\nabla}_\xi \eta, \tau) = \frac{1}{2}\{\xi\tilde{g}(\eta,\tau) + \eta\tilde{g}(\tau,\xi) - \tau\tilde{g}(\xi,\eta) - \tilde{g}(\xi,[\eta,\tau]) + \tilde{g}(\eta,[\tau,\xi]) + \tilde{g}(\tau,[\xi,\eta])\}$

Dada uma carta (V_α, ϕ_α) com coordenadas contínuas , tem-se que para a conexão de Levi-Civita generalizada $\tilde{\nabla}$ de $(X, \tilde{g})$ e $\xi \in \mathcal{G}_0^1(X)$,

$$\tilde{\nabla}_{\partial_i}(\xi^j \partial_j) = (\tfrac{\partial \xi^k}{\partial x^i} + \tilde{\Gamma}^k_{ij}\xi^j)\partial_k.$$

Os símbolos de Christoffel generalizados são dados por

$$\tilde{\Gamma}^k_{ij} = \frac{1}{2}\tilde{g}^{km}(\frac{\partial \tilde{g}_{jm}}{\partial x^i} + \frac{\partial \tilde{g}_{im}}{\partial x^j} - \frac{\partial \tilde{g}_{ij}}{\partial x^m}). \tag{1.5}$$

A ação de uma conexão clássica ∇ sobre campos vetoriais generalizados $\tilde{\xi}, \tilde{\eta}$ é dado por

$$\nabla_{\tilde{\xi}}\tilde{\eta} := cl[(\nabla_{\xi_\epsilon}\eta_\epsilon)_\epsilon],$$

onde $\nabla_{\xi_\epsilon}\eta_\epsilon = (\frac{\partial \xi^k_\epsilon}{\partial x^i} + \Gamma^k_{\epsilon ij}\eta^i_\epsilon \xi^j_\epsilon)\partial_k$.

Lembremos agora o conceito de derivação covariante clássica:

Sejam X uma variedade diferenciável com conexão ∇, $\alpha : [0,1] \to X$ uma curva diferenciável e V um campo vetorial ao longo de α. Se V é induzido por um campo de vetores $Y \in \mathfrak{X}(X)$, isto é, $V(t) = Y(\alpha(t))$, a derivada covariante de V é definida por

$$V'(t) := \nabla_{\alpha'(t)}Y = (\frac{dv^k}{dt} + \Gamma^k_{ij}v^j\frac{dx^i}{dt})\frac{\partial}{\partial x_k}(\alpha(t)).$$

O conceito de derivada covariante induzida de uma métrica generalizada é dada da seguinte forma:

Sejam $(X, \tilde{g})$ uma variedade semi-Riemanniana generalizada, $J \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $\alpha \in \mathcal{G}(J, X)$. Para todo $K \subset\subset X$ existe $\eta \in I$ e $K' \subset\subset X$ tal que $\alpha_\epsilon(K) \subseteq K'$ para todo $\epsilon \in I_\eta$. Então, existe um representante (g_ϵ) de $\tilde{g}$ tal que g_ϵ é uma métrica pseudo-Riemanniana em uma vizinhança de K'. Seja $\tilde{\xi} = cl[(\xi_\epsilon)] \in \mathfrak{X}_{\mathcal{G}}(\alpha)$, a derivada covariante induzida de $\tilde{\xi}$ sobre α com respeito a $\tilde{g}$ é definida por

$$\tilde{\xi}' = cl[(\xi'_\epsilon)_\epsilon],$$

onde $\xi_\epsilon^{'}$ é a derivada covariante induzida de ξ_ϵ sobre α_ϵ, com respeito a métrica g_ϵ.

Valem as seguintes propriedades da derivada covariante induzida de $\tilde{\xi}$ sôbre α com respeito a $\tilde{g}$:

1. $(r\tilde{\xi}_1 + s\tilde{\xi}_2)' = r\tilde{\xi}_1^{'} + r\tilde{\xi}_2^{'}, \quad \forall r, s \in \overline{\mathbb{R}}, \quad \tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2 \in \mathfrak{X}_{\mathcal{G}}(\alpha)$;
2. $(u\tilde{\xi})' = \frac{du}{dt}\tilde{\xi} + u\tilde{\xi}' \quad \forall u \in \mathcal{G}(J), \tilde{\xi} \in \mathfrak{X}_{\mathcal{G}}(\alpha)$;
3. $(\tilde{\xi} \circ \alpha)' = \tilde{\nabla}_{\alpha'(.)}\tilde{\xi}$ em $\mathfrak{X}_{\mathcal{G}}(\alpha), \quad \tilde{\xi} \in \mathcal{G}_0^1(X)$.

Uma geodésica em uma variedade generalizada $(X, \tilde{g})$ é uma curva $\gamma \in \mathcal{G}(J, X)$, onde $J \subset \mathbb{R}$, satisfazendo $\gamma^{''} = 0$.

Seja $(\gamma_\epsilon^{''})$ um representante de $\gamma^{''}$. Fixado ϵ, a forma local de $\gamma_\epsilon^{''}$ é definida por

$$\gamma_\epsilon^{''} = \left(\frac{d^2\gamma_\epsilon^k}{dt^2} + \Gamma_{\epsilon ij}^k \frac{d\gamma_\epsilon^i}{dt}\frac{\gamma_\epsilon^j}{dt}\right)\partial_k.$$

Então, γ é uma geodésica em $(X, \tilde{g})$ se e somente se

$$cl\left[\left(\frac{d^2}{dt^2} + \Gamma_{\epsilon ij}^k \frac{d\gamma_\epsilon^i}{dt}\frac{\gamma_\epsilon^j}{dt}\right)\right] = 0 \quad \text{em } \mathfrak{X}_{\mathcal{G}}(\alpha).$$

Seja $(X, \tilde{g})$ uma variedade pseudo-Riemanniana generalizada. Se $\tilde{g}_{ab} = \sum(g_{ab})$, onde g_{ab} é uma métrica pseudo-Riemanniana diferencial clássica, então, em qualquer carta $\tilde{\Gamma}_{jk}^i = \sigma(\Gamma_{jk}^i)$, onde Γ_{jk}^i denota o símbolo de Christoffel de g, tem-se que

$$\tilde{\nabla}_\xi \eta = \nabla_\xi \eta \quad \forall \xi, \eta \in \mathcal{G}_0^1(X),$$

Seja $(X, \tilde{g})$ uma variedade pseudo-Riemanniana generalizada com conexão de Levi-Civita $\tilde{\nabla}$.

- O tensor curvatura Riemanniana generalizado $\tilde{R}_{abc}^d \in \mathcal{G}_3^1(X)$ é definido por

$$\tilde{R}_{abc}^d := \frac{\partial\tilde{\Gamma}_{ac}^d}{\partial x^b} - \frac{\partial\tilde{\Gamma}_{ab}^d}{\partial x^c} + \tilde{\Gamma}_{ac}^r\tilde{\Gamma}_{rb}^d - \tilde{\Gamma}_{ab}^r\tilde{\Gamma}_{rc}^d \tag{1.6}$$

- O tensor curvatura de Ricci generalizado $\tilde{R}_{ab} \in \mathcal{G}_2^0(X)$ é definido pela contração do tensor de Riemann generalizado

$$\tilde{R}_{ab} := \tilde{R}_{abc}^c = \frac{\partial\tilde{\Gamma}_{ac}^c}{\partial x^b} - \frac{\partial\tilde{\Gamma}_{ab}^c}{\partial x^c} + \tilde{\Gamma}_{ac}^r\tilde{\Gamma}_{rb}^c - \tilde{\Gamma}_{ab}^r\tilde{\Gamma}_{rc}^c. \tag{1.7}$$

- A curvatura escalar generalizada ou (curvatura escalar de Ricci generalizada) $\tilde{R} \in \mathcal{G}(X)$ é definida pela sua contração usual do tensor de Ricci generalizado

$$\tilde{R} := \tilde{g}^{ab}\tilde{R}_{ab}. \tag{1.8}$$

- O tensor de Einstein generalizado $\tilde{G}_{ab} \in \mathcal{G}_2^0(X)$

$$\tilde{G}_{ab} := \tilde{R}_{ab} - \frac{1}{2}\tilde{R}\tilde{g}_{ab}. \tag{1.9}$$

1.6 Membranas

Em [AFJ2], Aragona, Fernandes e Juriaans, baseados na topologia introduzida em [AFJ3] e [AFJ4], apresentaram o conceito de membrana e estenderam a definição de integral dada em [AFJ1] para integral sobre membrana. Nesta seção apresentaremos os conceitos fundamentais da teoria das membranas, necessários na construção da geometria das membranas que será apresentada no capítulo 3.

Iniciaremos o seção com a definição de pré-membrana.

Definição 1.44. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto, denota-se por $\mathcal{P}(\Omega)_M$ a família de subconjuntos (M_ϵ) de Ω tal que*

1. *existem um subconjunto compacto $K \subset \Omega$ e $\eta \in I$ tais que $M_\epsilon \subset K$ para todo $\epsilon \in I_\eta$;*

2. *a função característica de M_ϵ é Lebesgue integrável para todo $\epsilon \in I_\eta$.*

Os elementos de $\mathcal{P}(\Omega)_M$ são denominados de pré-membranas em Ω.

Observação: Note que 1. implica que $\{cl[(x_\epsilon)] : x_\epsilon \in M_\epsilon, \forall \epsilon \in I\} \subset \tilde{\Omega}_c$.

Definição 1.45. *Seja (γ_ϵ) uma família de elementos de $C^1([0,1], \mathbb{R}^n)$. Esta é chamada de história em $\mathbb{R}^n$ ou simplesmente história se:*

1. *$(\gamma_\epsilon([0,1]))$ é uma pré-membrana;*

2. *existem $N \in \mathbb{N}$, $C > 0$ e $\eta \in I$ tais que $|\gamma_\epsilon'(t)| \leq C\epsilon^{-N}$, $\forall \epsilon \in I_\eta$ e $\forall t \in [0,1]$.*

Valem as seguintes definições, análogas aos conceitos clássicos:

Definição 1.46. *Uma história* (γ_ϵ) *é dita:*

1. *fechada se para todo* ϵ *pequeno a curva* γ_ϵ *for fechada, isto é,* $\gamma_\epsilon(0) = \gamma_\epsilon(1)$;

2. *símples se para todo* ϵ *pequeno a curva* γ_ϵ *for símples, isto é,*$\forall\ t_1, t_2 \in (0,1)$, $\gamma_\epsilon(t_1) \neq \gamma_\epsilon(t_2)$;

3. *positivamente(negativamente) orientada se* γ_ϵ *é positivamente(negativamente) orientada para todo* ϵ *pequeno*

Na sequência é definido a seguinte relação de equivalência em $\mathcal{P}(\Omega)_M$;

$(M_\epsilon) \sim (M_\epsilon^{'}) \Longleftrightarrow \exists\ (\psi_\epsilon) \in \mathcal{N}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ tal que a função $\phi : I \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definida por

$$\phi_\epsilon(x) = x + \psi_\epsilon(x),$$

satisfaz

$$\phi_\epsilon(M_\epsilon) = M_\epsilon^{'} \quad \forall \epsilon \in I.$$

Desta relação de equivalência, surge o conceito de membrana, que é dado seguinte forma:

Definição 1.47. *Os elementos do espaço quociente* $\mathcal{P}(\Omega)_M / \sim$ *são chamados de membrana em* $\overline{\mathbb{R}}^n$ *ou simplesmente membrana.*

É observado que:

1. se $(M_\epsilon) \sim (M_\epsilon^{'})$, então

$$\{cl[(x_\epsilon)] : x_\epsilon \in M_\epsilon, \forall \epsilon \in I\} = \{cl[(y_\epsilon)] : y_\epsilon \in M_\epsilon^{'}, \forall \epsilon \in I\}.$$

2. A função $j : \mathcal{P}(\Omega)_M / \sim \longrightarrow \tilde{\Omega}_c$ é definida por

$$j(cl[(M_\epsilon)]) = \{cl[(x_\epsilon)] : x_\epsilon \in M_\epsilon, \forall \epsilon \in I\}.$$

A partir daí usa-se a notação $X = cl[(X_\epsilon)]$ para membranas em $\overline{\mathbb{R}}^n$. O conceito de integral sobre membranas também é dada.

Definição 1.48. *Seja* $f = cl[(f_\epsilon)] \in \mathcal{G}(\Omega)$, $M = cl[(M_\epsilon)]$ *uma membrana em* $\overline{\mathbb{R}}^n$ *e* λ *a medida de Lebesgue sobre* $\mathbb{R}^n$. *O número generalizado*

$$\int_M f := cl[\epsilon \mapsto \int_{M_\epsilon} f_\epsilon d\lambda]$$

é chamada a integral de f *sobre a membrana* M.

Capítulo 2

A Topologia Diferencial de Colombeau

Neste capítulo apresentaremos as bases da **Topologia Diferencial de Colombeau** a partir do **Cálculo Diferencial de Colombeau**, teoria que se encontra em [AFJ1]. Versões dos teoremas da aplicação inversa e da forma local da imersão são apresentadas no contexto das $\mathcal{G}$-variedades.

2.1 A $\mathcal{G}$-variedade revisada

Em [AFJ1] foi introduzido o conceito de variedade diferenciável modelado sobre o $\overline{\mathbb{R}}^n$. Apenas exemplos de $\mathcal{G}$-variedades construidos a partir de variedades diferenciáveis foram apresentados e outros não eram conhecidos. Neste seção apresentaremos mais exemplos de $\mathcal{G}$-variedades e é desenvolvido o cálculo diferencial de Colombeau(veja [AFJ1]) no ambiente das $\mathcal{G}$-variedades. Versões dos teoremas da aplicação inversa e da forma local das imersões serão apresentados neste ambiente.

2.1.1 A topologia em uma $\mathcal{G}$-variedade

A topologia em uma $\mathcal{G}$-variedade m-dimensional $(M, \mathcal{A})$ é induzida pelo $\mathcal{G}$-atlas $\mathcal{A}$ e é definida da seguinte forma: Um subconjunto $A \subset M$ é aberto se, e somente se, para toda carta $\phi_\alpha : U_\alpha \subset M \longrightarrow \phi_\alpha(U_\alpha) \subset \tilde{\Omega}_c^{\phi_\alpha}$ pertencente a $\mathcal{A}$ com $A \cap U_\alpha \neq \emptyset$, tem-se que $\phi_\alpha(A \cap U_\alpha) \subset \tilde{\Omega}_c^{\phi_\alpha}$ é um subconjunto aberto de $\overline{\mathbb{R}}^m$. Lembramos que, $\overline{\mathbb{R}}^m$ e $\overline{\mathbb{R}}$ estão equipados com as topologias produto e cortante τ_s, respectivamente. A topologia de uma $\mathcal{G}$-variedade M será denotada por $\mathcal{T}_{\mathcal{G}M}$.

Na oportunidade definimos $\mathcal{G}$-**variedade topológica** como sendo uma $\mathcal{G}$-variedade onde as cartas são apenas homeomorfismos, isto é, para cada ponto em M existe uma vizinhança homeomorfa a um aberto de $\overline{\mathbb{R}}^m$.

Definição 2.1. *Seja M um conjunto. Um $\mathcal{G}$-atlas de dimensão m e classe C^∞ sobre M é uma família $\mathcal{A} = \{(U_\lambda, u_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ verificando as seguintes condições:*

1. *para cada $\lambda \in \Lambda$ a aplicação $u_\lambda : U_\lambda \longrightarrow \tilde{\Omega}_c^\lambda$ é um homeomorfismo do subconjunto aberto $U_\lambda \subset M$ no subconjunto aberto $u_\lambda(U_\lambda) \subset \tilde{\Omega}_c^\lambda$, onde $\tilde{\Omega}_c^\lambda$ é um aberto contido em $\overline{\mathbb{R}}^m$;*

2. *$\oslash \neq U_\lambda \subset M$, para cada $\lambda \in \Lambda$ e $M = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$;*

3. *para todo par $\alpha, \beta \in \Lambda$, com $U_\alpha \cap U_\beta = W \neq \oslash$, os subconjuntos $u_\alpha(W)$ e $u_\beta(W)$ são abertos contidos em $\tilde{\Omega}_c^\alpha$ e $\tilde{\Omega}_c^\beta$, respectivamente, enquanto que $\tilde{\Omega}_c^\alpha$ e $\tilde{\Omega}_c^\beta$ são abertos contidos em $\overline{\mathbb{R}}^m$ tal que*

$$u_\beta \circ u_\alpha^{-1} : u_\alpha(W) \longrightarrow u_\beta(W)$$

é um difeomorfismo de classe C^∞.

Como na teoria clássica tem-se as seguintes denominações:

- *o par (U_λ, u_λ) é denominado uma* **carta** *(ou* **sistema de coordenadas***) de $\mathcal{A}$;*

- *se $U \subset M$ e $u : U \longrightarrow u(U) \subset \tilde{\Omega}_c$ é um homeomorfismo de U sobre sua imagem, onde $\tilde{\Omega}_c$ é um subconjunto aberto de $\overline{\mathbb{R}}^m$, o par (U, u) é dito compatível com $\mathcal{A}$ se para cada par $(U_\lambda, u_\lambda) \in \mathcal{A}$ com $W = U \cap U_\lambda \neq \oslash$ tal que*

$$u \circ u_\lambda^{-1} : u_\lambda(W) \longrightarrow u(W),$$

é um difeomorfismo de classe C^∞ onde

$$u_\lambda(W) \subset \tilde{\Omega}_c^\lambda \quad e \quad u(W) \subset \tilde{\Omega}_c$$

são subconjuntos abertos, enquanto que $\tilde{\Omega}_c^\lambda$ é um subconjunto aberto do $\overline{\mathbb{R}}^m$.

Segue-se que, para um dado $\mathcal{G}$-atlas $\mathcal{A}$ de dimensão m sobre M, existe um único $\mathcal{G}$-atlas máximal $\mathcal{A}^*$ de dimensão m sobre M definido por:

$$(U, u) \in \mathcal{A}^*, \textit{ se e somente se, } (U, u) \in \mathcal{A} \textit{ ou } (U, u) \textit{ é compatível com } \mathcal{A}.$$

A família $\mathcal{A} = \{(U_\lambda, u_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ pode também ser chamada de **$\mathcal{G}$-estrutura diferenciável.**

Definição 2.2. *Uma variedade diferenciável generalizada(ou $\mathcal{G}$-variedade)de dimensão m e classe C^∞ é um par $(M, \mathcal{A})$, onde M é um conjunto e $\mathcal{A}$ é um $\mathcal{G}$-atlas dimensão m e classe C^∞ sobre M.*

2.1.2 O teorema da invariância da dimensão

Agora, apresentaremos uma versão do teorema da invariância da dimensão para $\mathcal{G}$-variedades. Antes porém será anunciado o seguinte lema que pode ser encontrado em [Jac1] e [AM], necessário para a realização da demonstração do referido teorema.

Lema 2.3. *Seja R é um anel comutativo com unidade. Se R^m e R^n forem isomorfos como R-módulos, então $m = n$.*

Teorema 2.4 (Teorema da invariância da dimensão). *Seja $(M, \mathcal{A})$ uma $\mathcal{G}$-variedade. Então, a dimensão das cartas do $\mathcal{G}$-atlas $\mathcal{A}$ é constante em cada componente conexa de M.*

Demonstração:

Suponhamos que existem pares de cartas (U_α, ϕ_α) e (U_β, ϕ_β) pertencentes ao $\mathcal{G}$-atlas $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$, onde $\phi_\alpha(U_\alpha) \subset \tilde{\Omega}_c^\alpha$, sendo $\tilde{\Omega}_c^\alpha \subset \overline{\mathbb{R}}^m$ um subconjunto aberto, para algum $m \in \mathbb{N}$, enquanto que $\phi_\beta(U_\beta) \subset \tilde{\Omega}_c^\beta$, onde $\tilde{\Omega}_c^\beta \subset \overline{\mathbb{R}}^n$ é subconjunto aberto e tal que $W = U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$. Então, temos que

$$\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(W) \to \phi_\beta(W)$$

é um difeomorfismo, ou seja, dado $p \in \phi_\alpha(W)$ a aplicação

$$d(\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1})_p : \overline{\mathbb{R}}^m \to \overline{\mathbb{R}}^n$$

é um $\overline{\mathbb{R}}$-isomorfismo de módulos. Como $\overline{\mathbb{R}}$ é um anel comutativo com unidade, então pelo lema 2.3, se conclui que $m = n$. ■

Observamos que no caso de M ser apenas uma $\mathcal{G}$-variedade topológica, para a demonstração da invariância da dimensão se aplica o teorema de Brouwer sobre a invariância do domínio (veja [HW]).

2.1.3 Exemplos de $\mathcal{G}$-variedades

Exemplo 2.5. *O* $\overline{\mathbb{R}}$*-módulo* $\overline{\mathbb{R}}^n$.

Observe que:

$$\overline{\mathbb{R}}^n = \bigcup_{x \in \overline{\mathbb{R}}^n} B_1(x).$$

Dados $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}^n$ *e as cartas* $\phi_{x_0} : B_1(x_0) \subset \overline{\mathbb{R}}^n \longrightarrow B_1(\phi_{x_0}(x_0)) \subset \overline{\mathbb{R}}^n$. *Agora, realize uma mudança de cartas através da aplicação*

$$T : B_1(\phi_{x_0}(x_0)) \subset \overline{\mathbb{R}}^n \longrightarrow B_1(o) \subset \overline{\mathbb{R}}^n$$

definida por $T(x) = x - \phi_{x_0}(x_0)$.

Podemos, então, considerar um G-atlas máximal contendo cartas do tipo $\varphi = T \circ \phi : B_1(x_0) \subset \overline{\mathbb{R}}^n \longrightarrow B_1(0) \subset \overline{\mathbb{R}}^n$. *Portanto,* $\overline{\mathbb{R}}^n$ *é uma* $\mathcal{G}$*-variedade.*

Exemplo 2.6. *A* $\mathcal{G}$*-esfera unitária* $S^n = \{x \in \overline{\mathbb{R}}^{n+1} : [x]_2 = 1\}$.

Com as seguintes observações dadas em [AFJ1] e a ordenação que se encontra em [AJOS]:

1. $x = (x_1, ..., x_{n+1}) \in \overline{\mathbb{R}}^{n+1}$ *define-se* $[x]_2 = (\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2)^{\frac{1}{2}}$, *que é induzido pela aplicação* $\overline{\mathbb{R}}$*-bilinear* $< .,. >: \overline{\mathbb{R}}^{n+1} \times \overline{\mathbb{R}}^{n+1} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *definida por*

$$< x, y >= \sum_{i=1}^{n+1} x_i y_i;$$

2. $x^i \in \bar{\mathbb{R}}$, $x^i > 0$ *se* x^i *tem um representante* $\hat{x^i}$ *tal que* $\hat{x^i}(\epsilon) > 0$ *para todo* $\epsilon \in I$.

Podemos considerar um $\mathcal{G}$*-atlas* $\mathcal{A}$ *com as seguintes* $\mathcal{G}$*-cartas: Para cada* $i = 1, ..., n+1$, *defina os subconjuntos abertos:*

$$U_i^+ = \{(x_1, ..., x_i, ..., x_{n+1}) \in S^n : x^i > 0\},$$

e

$$U_i^- = \{(x_1, ..., x_i, ..., x_{n+1}) \in S^n : x^i < 0\}.$$

Defina, agora, as cartas $\phi_i^\pm : B \longrightarrow U_i^\pm$ *com* $i = 1, ..., n+1$ *e* $B = \{x \in \bar{\mathbb{R}}^n : [x]_2 < 1\}$ *por*

$$\phi_i^{\pm}((x_1,...,x_n)) = (x^1,...,x^{i-1}, \pm\sqrt{1-[(x_1,...,x_n)]_2^2}, x^{1+i},...,x^n).$$

Exemplo 2.7. *O $\overline{\mathbb{R}}$-módulo das matrizes de ordem $n \times m$ é denotado por $\mathcal{M}(n \times m, \overline{\mathbb{R}})$.*

Inicialmente observe que a aplicação $\phi : \mathcal{M}(n\times m, \overline{\mathbb{R}}) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}^{m\cdot n}$ definida por

$$\phi((a_{ij})) = (a_{11},...,a_{1n};...;a_{m1},...,a_{mn})$$

é um $\overline{\mathbb{R}}$-isomofismo de módulos, ou seja,

$$\mathcal{M}(n \times m, \overline{\mathbb{R}}) \cong \overline{\mathbb{R}}^{m\cdot n}.$$

Podemos, então, considerar um $\mathcal{G}$-atlas sobre $\mathcal{M}(n \times m, \overline{\mathbb{R}})$ e obter uma $\mathcal{G}$-variedade de dimensão $m \cdot n$. Em particular, quando $m = n$ temos que $\mathcal{M}(n, \overline{\mathbb{R}}) \cong \overline{\mathbb{R}}^{n^2}$ é uma $\mathcal{G}$-variedade de dimensão n^2.

Exemplo 2.8. *A $\mathcal{G}$-subvariedade aberta.*

Sejam M uma $\mathcal{G}$-variedade e U um subconjunto aberto de M. Então, U é uma $\mathcal{G}$-variedade.

Para provar tal afirmação vamos considerar um $\mathcal{G}$-atlas $\mathcal{A}_M$ para M e o seguinte $\mathcal{G}$-atlas para U:

$$\mathcal{A}_U = \{(U_\alpha \cap U, \phi_\alpha |_{U_\alpha \cap U}) : (U_\alpha, \phi_\alpha) \in \mathcal{A}_M\}.$$

Então, o par $(U, \mathcal{F}_U)$ é uma $\mathcal{G}$-variedade.

Exemplo 2.9. *O grupo linear $GL(n, \overline{\mathbb{R}})$.*

O grupo linear das matrizes com entrada em $\overline{\mathbb{R}}$ é definido como sendo

$$GL(n, \overline{\mathbb{R}}) := \{A \in \mathcal{M}(n, \overline{\mathbb{R}}) : detA \in Inv(\overline{\mathbb{R}})\}.$$

Pelo teorema fundamental de $\overline{\mathbb{R}}$ (veja [AJ]) tem-se que $Inv(\overline{\mathbb{R}})$ é um aberto em $\overline{\mathbb{R}}$. Sendo det $: \mathcal{M}(n, \overline{\mathbb{R}}) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *uma aplicação contínua, então* $\det^{-1}(Inv(\overline{\mathbb{R}})) = GL(n, \overline{\mathbb{R}})$ *é um aberto de $\mathcal{M}(n, \overline{\mathbb{R}})$. Como $\mathcal{M}(n, \overline{\mathbb{R}})$ é uma $\mathcal{G}$-variedade, então $GL(n, \overline{\mathbb{R}})$ é uma $\mathcal{G}$-variedade.*

Observação: Note que $GL(1, \overline{\mathbb{R}}) = Inv(\overline{\mathbb{R}})$.

2.2 O produto de $\mathcal{G}$-variedades

O próximo lema irá nos proporcionar a demonstração de que o produto de $\mathcal{G}$-variedades é uma $\mathcal{G}$-variedade, bem como a possibilidade de calcularmos a dimensão.

Lema 2.10. $\overline{\mathbb{R}}^{m_1} \times \overline{\mathbb{R}}^{m_2} \cong \overline{\mathbb{R}}^{m_1+m_2}$*, onde* $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$.

Demonstração:

Sabemos que $\overline{\mathbb{R}}^m$, com $m \in \mathbb{N}$, é um módulo sobre o anel $\overline{\mathbb{R}}$ com identidade $1_{\overline{\mathbb{R}}}$. Seja $e_i : 1 \leq i \leq m$ a base canônica de $\overline{\mathbb{R}}^m$. Então, temos que:

1. $\overline{\mathbb{R}}^{m_1} \cong \oplus_{i=1}^{m_1} \overline{\mathbb{R}}$;
2. $\overline{\mathbb{R}}^{m_2} \cong \oplus_{j=1}^{m_2} \overline{\mathbb{R}}$;
3. $\overline{\mathbb{R}}^{m_1+m_2} \cong \oplus_{k=1}^{m_1+m_2} \overline{\mathbb{R}}$.

Portanto, de (1.), (2.) e (3.) obtemos

$$\overline{\mathbb{R}}^{m_1+m_2} \cong \oplus_{i=1}^{m_1+m_2} \overline{\mathbb{R}} \cong \oplus_{i=1}^{m_1} \overline{\mathbb{R}} \oplus_{j=1}^{m_2} \overline{\mathbb{R}} \cong \overline{\mathbb{R}}^{m_1} \oplus \overline{\mathbb{R}}^{m_2} = \overline{\mathbb{R}}^{m_1} \times \overline{\mathbb{R}}^{m_2}.$$

Proposição 2.11. *Sejam* $(M_1, \mathcal{A}_1)$ *e* $(M_2, \mathcal{A}_2)$ $\mathcal{G}$*-variedades de dimensões* m_1 *e* m_2*, respectivemente. O produto cartesiano* $M_1 \times M_2$ *é uma* $\mathcal{G}$*-variedade de dimensão* $m_1 + m_2$.

Demonstração:

Considere as cartas

$$\phi_{\alpha\beta} : U_\alpha \times U_\beta \subset M_1 \times M_2 \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}^{m_1+m_2}$$

definidas por

$$\phi_{\alpha\beta}(x, y) = (\phi_\alpha(x), \phi_\beta(y)),$$

onde a carta $\phi_\alpha : U_\alpha \subset M_1 \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}^{m_1}$ pertence ao $\mathcal{G}$-atlas $\mathcal{A}_1$, enquanto que a carta $\phi_\beta : U_\beta \subset M_2 \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}^{m_2}$ pertence ao $\mathcal{G}$-atlas $\mathcal{A}_2$. Além disso, $\phi_\alpha(U_\alpha) = B_1((\phi_\alpha)(x_0))$ e $\phi_\beta(U_\beta) = B_1((\phi_\beta)(y_0))$.
Observe que

$$\begin{aligned}\phi_{\alpha\beta}(U_\alpha \times U_\beta) &= \phi_\alpha(U_\alpha) \times \phi_\beta(U_\beta)\\ &= B_1((\phi_\alpha)(x_0)) \times B_1((\phi_\beta)(y_0)) \subset \overline{\mathbb{R}}^{m_1} \times \overline{\mathbb{R}}^{m_2}.\end{aligned}$$

Agora, pelo lema temos que $\overline{\mathbb{R}}^{m_1} \times \overline{\mathbb{R}}^{m_2} \cong \overline{\mathbb{R}}^{m_1+m_2}$, onde $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$. Então, as cartas $\phi_{\alpha\beta}$ estão bem definidas e formam um $\mathcal{G}$-atlas $\mathcal{A}$. Portanto, $(M_1 \times M_2, \mathcal{A})$ é uma $\mathcal{G}$-variedade de dimensão $m_1 + m_2$. ■

Podemos generalizar o lema anterior da seguinte forma:

Lema 2.12. $\prod_{i=1}^{k} \overline{\mathbb{R}}^{m_i} \cong \overline{\mathbb{R}}^{\sum_{i=1}^{k} m_i}$, *onde* $m_i \in \mathbb{N}$ *com* $1 \leq i \leq k$.

Com este lema podemos generalizar a proposição obtendo-se assim o seguinte corolário:

Corolário 2.13. *Sejam* $M_1, ..., M_n$ $\mathcal{G}$*-variedades de dimensão* $m_1, ..., m_n$, *respectivamente, então* $\prod_{i=1}^{n} M_i$ *é uma* $\mathcal{G}$*-variedade de dimensão* $\sum_{i=1}^{n} m_i$.

2.3 Aplicações diferenciáveis e módulos tangentes

2.3.1 Aplicações diferenciáveis entre $\mathcal{G}$-variedades

Inicialmente será dado o conceito de diferenciabilidade entre $\mathcal{G}$-variedades.

Definição 2.14. *Sejam* M_1^m *e* M_2^n $\mathcal{G}$*-variedades. Uma aplicação* $f : M_1^m \to M_2^n$ *é dita diferenciável no ponto* $p \in M_1$ *se existem cartas* $\varphi : V \subset M_2 \to \varphi(V) \subset \tilde{\Omega}_c^\varphi$ *em* $f(p)$ *e* $\phi : U \subset M_1 \to \phi(U) \subset \Omega_c^\phi$ *em* p *com* $f(U) \subset V$, *onde* $\Omega_c^\phi \subset \overline{\mathbb{R}}^m$ *e* $\tilde{\Omega}_c^\varphi \subset \overline{\mathbb{R}}^n$ *são subconjuntos abertos, tais que*

$$\varphi \circ f \circ \phi^{-1} : \tilde{\Omega}_c^\phi \to \tilde{\Omega}_c^\varphi,$$

é diferenciável em $\phi^{-1}(p)$.

Definição 2.15. *A aplicação* f *é diferenciável em um aberto de* M_1 *se é diferenciável em todos os pontos deste aberto. E* f *é de classe* C^r *se localmente for de classe* C^r.

Como no caso clássico, observa-se a partir da condição 3, do conceito de atlas, que esta definição não depende da escolha das cartas.

Será dado agora o conceito de curva em $\overline{\mathbb{R}}^n$.

Definição 2.16. *Seja J um subconjunto aberto de $\mathbb{R}$, uma curva em $\overline{\mathbb{R}}^n$ é uma aplicação $\alpha : \tilde{J}_c \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}^n$ com $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, onde cada α_i é uma aplicação de $\tilde{J}_c$ em $\overline{\mathbb{R}}$.*

Definição 2.17. *A curva α é diferenciável se cada α_i o for.*

Podemos escrever $\alpha(t) = (x_1(t), ..., x_n(t)) \in \overline{\mathbb{R}}^n$ com $t \in \tilde{J}_c$. Agora, seja $t_0 \in \tilde{J}_c$ tal que $\alpha(t_0) = p \in \overline{\mathbb{R}}^n$, $\alpha'(t_0) = (x_1'(t_0), ..., x_n'(t_0)) \in \overline{\mathbb{R}}^n$. Seja $f : \tilde{\Omega}_c \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ uma aplicação diferenciável definida em uma vizinhança $\tilde{\Omega}_c \subset \bar{\mathbb{R}}^n$ de $p = (p_1, ..., p_n)$. Restringindo-se f a curva $\alpha : \tilde{J}_c \to \overline{\mathbb{R}}^n$ podemos escrever a derivada direcional segunda $v \in \overline{\mathbb{R}}^n$ da seguinte forma

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}((f \circ \alpha)(t)) \mid_{t=t_0} &= \frac{d}{dt} f(x_1(t), ..., x_n(t)) \mid_{t=t_0} \\
&= \sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial f}{\partial x_i}) \mid_{t=t_0} (\frac{dx_i}{dt}) \mid_{t=t_0} \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i'(t_0) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \\
&= (\sum_{i=1}^{n} x_i'(t_0) \frac{\partial}{\partial x_i}(p)) f,
\end{aligned}$$

onde cada $x_i \in \overline{\mathbb{R}}$ e

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \lim_{h \to 0} \frac{f(p_1, ..., p_i + h, ..., p_n) - f(p_1, ..., p_n)}{\alpha_{-\log\|h\|}}.$$

Portanto, como no caso clássico, a derivada direcional segundo v é um operador sobre funções diferenciáveis que dependem unicamente de v.

Agora, será dado o conceito de curva em $\mathcal{G}$-variedades.

Definição 2.18. *Sejam M uma $\mathcal{G}$-variedade e J um aberto de $\mathbb{R}$. Uma aplicação diferenciável $\alpha : \tilde{J}_c \longrightarrow M$, é chamada de curva em M.*

Seja M uma $\mathcal{G}$-variedade, então o conjunto das funções de M em $\overline{\mathbb{R}}$ diferenciáveis em p será denotado por D_p.

Definição 2.19. *Considere uma curva $\alpha : \tilde{J}_c \longrightarrow M$ e suponha que $\alpha(t_0) = p \in M$. A velocidade da curva α em $t_0 \in \tilde{J}_c$ é a aplicação $\alpha'(t_0) : D_p \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ definida por*

$$\alpha'(t_0) f = \tfrac{d}{dt}(f \circ \alpha)(t) \mid_{t=t_0},$$

onde $f \in D_p$.

2.3.2 Módulo tangente

Agora, será apresentado o conceito de vetor tangente a uma $\mathcal{G}$-variedade M em p.

Definição 2.20. *Um vetor tangente em $p \in M$ é a velocidade em $t = t_0$ de alguma curva $\alpha : \tilde{J}_c \to M$ com $\alpha(t_0) = p$.*

Observação: O conjunto dos vetores tangentes a M em p será denotado por T_pM.

Proposição 2.21. *Seja M uma $\mathcal{G}$-variedade de dimensão n. O conjunto T_pM com as operações usuais de funções é um $\overline{\mathbb{R}}$-módulo livre.*

Demonstração:

Seja $x : U \subset \tilde{\Omega}_c \to M$ uma carta em $p \in M$,onde $\tilde{\Omega}_c \subset \overline{\mathbb{R}}^n$ e tal que $x(0) = p$. Vamos expressar a função $f \in D_p$ e a curva α nesta parametrização por

$$f \circ x(p) = f(x_1, ..., x_n)$$

e $(x^{-1} \circ \alpha)(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$.

Restringindo f a α, obtemos

$$\begin{aligned} \alpha'(t_0)f &= \tfrac{d}{dt}(f \circ \alpha)(t) \mid_{t=t_0} \\ &= (\textstyle\sum_{i=1}^n x_i'(t_0)\frac{\partial}{\partial x_i}(p))f. \end{aligned}$$

Portanto, o vetor $\alpha'(t_0)$ pode ser expresso na parametrização x por

$$\alpha'(t_0) = \textstyle\sum_{i=1}^n x_i'(t_0)\frac{\partial}{\partial x_i}(p).$$

Agora, em T_pM define-se a seguinte estrutura de módulo:

Dados $u, v \in T_pM$ existem curvas $\alpha, \beta : \tilde{J}_c \longrightarrow M$ com $\alpha(t_1) = p$, $\beta(t_2) = p$ e $u = \alpha'(t_1) : D_p \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $v = \beta'(t_2) : D_p \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. A soma $u + v : D_p \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ e o produto $\lambda \cdot v : D_p \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, onde $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$, são funções definidas por:

1. $(u + v)(f) = u(f) + v(f)$, $\forall f \in D_p$;
2. $(\lambda \cdot v)(f) = \lambda \cdot v(f)$, $\forall f \in D_p$.

Observe que, a cada carta escolhida $x : U \longrightarrow M$ existe uma base associada $\{(\frac{\partial}{\partial x^1})_p, ..., (\frac{\partial}{\partial x^n})_p\}$ em T_pM.

Portanto, o conjunto T_pM, com as operações usuais de funções é um $\overline{\mathbb{R}}$-módulo finitamente gerado. ■

Definição 2.22. *O conjunto T_pM é denominado de* **módulo tangente***.*

Observe que aqui o termo vetor é utilizado em uma situação bem mais geral em que T_pM é um módulo livre.

2.4 A derivada de uma aplicação diferenciável

Vamos agora estudar a noção de derivação de funções definidas em $\mathcal{G}$-variedades.

Proposição 2.23. *Sejam M_1^m e M_2^n $\mathcal{G}$-variedades e $f : M_1 \longrightarrow M_2$ uma aplicação diferenciável. Para cada $p \in M_1$ e cada $v \in T_pM_1$, escolha uma curva diferenciável $\alpha : \tilde{J}_c \longrightarrow M_1$ com $\alpha(t_0) = p$ e $\alpha'(t_0) = v$. Considere a curva $\beta = \phi \circ \alpha$. Então a aplicação*

$$df_p : T_pM_1 \longrightarrow T_{f(p)}M_2,$$

definida por $df_p(v) = \beta'(0)$, é um $\overline{\mathbb{R}}$-homomorfismo que não depende da escolha da curva α.

Demonstração:

Como f é diferenciável em $p \in M_1$, dada uma carta $y : V \subset \overline{\mathbb{R}}^n \longrightarrow M_2$ em $f(p) \in M_2$ existe uma carta $x : U \subset \overline{\mathbb{R}}^m \longrightarrow M_1$ em p, tal que, $\phi(x(U)) \subset Y(V)$. Além disso, $y^{-1} \circ \phi \circ x : U \subset \overline{\mathbb{R}}^m \longrightarrow V \subset \overline{\mathbb{R}}^n$ é diferenciável em $x^{-1}(p) = q$.

Agora,

$$(y^{-1} \circ f \circ x)(q) = (y_1(x_1, ..., x_m), ..., y_n(x_1, ..., x_m)),$$

onde $(x_1, ..., x_m) \in U$ e $(y_1, ..., y_n) \in V$.

Por outro lado, expressando α na carta x, obtemos

$$(x^{-1} \circ \alpha)(t) = (x_1(t), ..., x_m(t)).$$

Logo,

$$(y^{-1} \circ \beta)(t) = (y^{-1} \circ f \circ \alpha)(t)$$
$$= (y_1(x_1(t), ..., x_m(t)), ..., y_n(x_1(t), ..., x_m(t))).$$

Então, a expressão de $\beta'(t_0)$ na base $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial y_i}(f(p)) \right) \right\}_{1 \leq i \leq n}$ de $T_{f(p)}M_2$, associada a parametrização y, é dada por

$$\beta'(t_0) = (\textstyle\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial y_1}{\partial x^i} x_i'(t_0), ..., \frac{\partial y_n}{\partial x^i} x_i'(t_0)).$$

Portanto, $\beta'(t_0)$ não depende da escolha da curva α.

Temos também que

$$\beta'(t_0) = df_p(\alpha')(t_0)) = (\tfrac{\partial y_i}{\partial x_j})_{n \times m}(x^{-1} \circ \alpha(t_0))(x_j'(t_0))_{m \times 1}.$$

Então, df_p é um homomorfismo de módulos de T_pM_1 em $T_{f(p)}M_2$, cuja matriz nas bases associadas às cartas x e y é a matriz $(\frac{\partial y_i}{\partial x_j})$. ■

Definição 2.24. *A aplicação $\overline{\mathbb{R}}$-linear referida na proposição 2.23 é chamada a diferencial de f em p.*

O teorema seguinte nos dá a regra da cadeia para $\mathcal{G}$-variedades.

Teorema 2.25 (regra da cadeia para $\mathcal{G}$-variedades). *Sejam M_1, M_2 e M_3 $\mathcal{G}$-variedades. Se $f : M_1 \longrightarrow M_2$ e $g : M_2 \longrightarrow M_3$ são aplicações diferenciáveis em $p \in M_1$ e $f(p) \in M_2$, respectivamente, então a função composta $g \circ f : M_1 \longrightarrow M_3$ é diferenciável em p e*

$$d(g \circ f)_p = dg_{f(p)} \circ df_p$$

Demonstração:

Como g é uma aplicação diferenciável em $f(p)$ existem cartas $\eta : U_3 \subset M_3 \longrightarrow \eta(U_3) \subset \tilde{\Omega}_c^\eta$ em $g(f(p))$ onde $\tilde{\Omega}_c^\eta \subset \overline{\mathbb{R}}^n$ é um subconjunto aberto com $\eta(g(f(p))) = 0$, $\varphi : U_2 \subset M_2 \longrightarrow \varphi(U_2) \subset \tilde{\Omega}_c^\varphi$ em $f(p)$ onde $\tilde{\Omega}_c^\varphi \subset \overline{\mathbb{R}}^k$ é um subconjunto aberto com $\varphi(f(p)) = 0$ tal que $g(U_2) \subset U_3$. Além disso, a aplicação

$$\gamma = \eta \circ g \circ \varphi^{-1} : \phi(U_2) \longrightarrow \eta(U_3)$$

é diferenciável em $\varphi(f(p))$.

Temos também que f é diferenciável em $p \in M_1$, então existe uma carta $\phi : U_1 \subset M_1 \longrightarrow \phi(U_1) \subset \tilde{\Omega}_c^\phi$ onde $\tilde{\Omega}_c^\phi \subset \overline{\mathbb{R}}^m$ é um subconjunto aberto com $\phi(p) = 0$ e $f(U_1) \subset U_2$, tal que a aplicação

$$h = \varphi^{-1} \circ f \circ \phi : \phi(U_1) \longrightarrow \varphi(U_2)$$

é diferenciável em $\phi(p)$.

Agora, pela regra da cadeia para $\overline{\mathbb{R}}$-módulos do tipo $\overline{\mathbb{R}}^s$, temos que

$$d(\gamma \circ h)_0 = d\gamma_0 \circ dh_0.$$

Enquanto que,

$$dg_{f(p)} = d\eta_0^{-1} \circ d\gamma_0 \circ d\varphi_{f(p)} \quad \text{e} \quad df_p = d\varphi_0^{-1} \circ dh_0 \circ d\phi_p.$$

Então,

$$\begin{aligned}
(g \circ f)_p &= d\eta_0^{-1} \circ d(\gamma \circ h)_0 \circ d\phi_p \\
&= d\eta_0^{-1} \circ (d\gamma_0 \circ dh_0) \circ d\phi_p \\
&= (d\eta_0^{-1} \circ d\gamma_0 \circ d\varphi_{f(p)}) \circ (d\varphi_0^{-1} \circ dh_0 \circ d\phi_p) \\
&= dg_{f(p)} \circ df_p. \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Definição 2.26. *Sejam M_1 e M_2 $\mathcal{G}$-variedades. Uma aplicação $f : M_1 \longrightarrow M_2$ é um difeomorfismo se ela for diferenciável, bijetora e sua inversa $f^{-1} : M_1 \longrightarrow M_2$ for diferenciável.*

Definição 2.27. *Uma aplicação ϕ é um difeomorfismo local em $p \in M$, onde M é uma $\mathcal{G}$-variedade, se existirem vizinhanças U de p e V de $\phi(p)$ tais que $\phi : U \longrightarrow V$ for um difeomorfismo.*

Observe que se $f : M_1 \longrightarrow M_2$, onde M_1 e M_2 são $\mathcal{G}$-variedades, for um difeomorfismo, então $df_p : T_pM_1 \longrightarrow T_{f(p)}M_2$ é um isomorfismo $\overline{\mathbb{R}}$-linear de módulos para todo $p \in M_1$.

Teorema 2.28. *Sejam M_1 e M_2 $\mathcal{G}$-variedades de dimensões iguais a m e n, respectivamente. Se $f : M_1 \longrightarrow M_2$ é um difeomorfismo, então $m = n$.*

Demonstração:

Sendo $f : M_1 \longrightarrow M_2$ um difeomorfismo, então dado $p \in M_1$ existem cartas $\varphi : U_\varphi \subset M_2 \longrightarrow \varphi(U_\varphi) \subset \tilde{\Omega}_c^\varphi$ em torno de $f(p)$ com $\varphi(0) = f(p)$, $\phi : U_\phi \subset M_1 \longrightarrow \phi(U_\phi) \subset \tilde{\Omega}_c^\phi$ em torno de p com $\phi(0) = p$ e $f(\phi(U_\phi)) \subset U_\phi$, tal que

$$\varphi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U_\phi) \subset \tilde{\Omega}_c^\phi \to \varphi(U_\varphi) \subset \tilde{\Omega}_c^\varphi$$

é um difeomorfismo, onde $\tilde{\Omega}_c^\phi \subset \overline{\mathbb{R}}^m$ e $\tilde{\Omega}_c^\varphi \subset \overline{\mathbb{R}}^n$ são subconjuntos abertos.

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r, "f"] & M_2 \arrow[d, "\varphi"] \\
\phi(U_\phi) \subset \tilde{\Omega}_c^\phi \arrow[u, "\phi^{-1}"] \arrow[r, "\varphi \circ f \circ \phi^{-1}"'] & \varphi(U_\varphi) \subset \tilde{\Omega}_c^\varphi
\end{tikzcd}$$

Portanto, temos que

$$d(\varphi \circ f \circ \phi^{-1})_{\varphi(p)} : \overline{\mathbb{R}}^m \to \overline{\mathbb{R}}^n.$$

é um $\overline{\mathbb{R}}$-isomorfismo de módulos. Como $\overline{\mathbb{R}}$ é um anel comutativo com unidade, então, pelo lema 2.3 tem-se que $m = n$. ■

No que segue, será apresentado a versão do teorema da aplicação inversa para $\mathcal{G}$-variedades. Para realizar a demonstração precisamos do seguinte lema.

Lema 2.29. *Seja $A \in M_n(\overline{\mathbb{R}})$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. $A : \overline{\mathbb{R}}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}^n$ *é injetiva;*

2. $A : \overline{\mathbb{R}}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}^n$ *é bijetiva;*

3. $\det A \in Inv(\overline{\mathbb{R}})$.

Para demonstração do lema necessitamos do seguinte teorema, cuja a demonstração encontra-se em [Jac1].

Teorema 2.30. *Se R é um anel comutativo com unidade, uma matriz $A \in M_n(R)$ é invertível se e somente se* $\det A \in Inv(R)$

Demonstração do lema 2.29:

Vamos provar inicialmente que (2.) $\Longleftrightarrow$ (3.):

Sendo $A : \overline{\mathbb{R}}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}^n$ um homomorfismo de módulos, então, A é bijetiva se e somente se A é invertível. Como $\overline{\mathbb{R}}$ é um anel comutativo com unidade então pelo teorema 2.30 A é invertível se e somente se $\det A \in Inv(\overline{\mathbb{R}})$. Provando-se então a equivalência entre (2.) e (3.).

Provaremos agora que (1.) $\Longleftrightarrow$ (3.):

Vamos provar inicialmente que (1.) $\Longrightarrow$ (3.).

Suponhamos que $\det A \notin Inv(\overline{\mathbb{R}})$. Pelo teorema 2.30 não existe $A^{-1} \in M_n(\overline{\mathbb{R}})$. Sendo assim, a equação $Av = 0$ tem solução não nula, contradizendo assim a hipótese (1.).

Será provado agora a recíproca, isto é, (3.) $\Longrightarrow$ (1.).

Suponha que $\det A \in Inv(\overline{\mathbb{R}})$, pelo teorema 2.30 existe A^{-1}. Logo, a equação $Av = 0$ tem solução única, isto é, $v = 0$. Portanto, o homomorfismo $A : \overline{\mathbb{R}}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}^n$ é injetor. ∎

Uma versão do lema 2.29 com demonstração encontra-se em [KS2].

Teorema 2.31 (Teorema da aplicação inversa). *Sejam M_1 e M_2 $\mathcal{G}$-variedades n-dimensionais. Seja $f : M_1 \to M_2$ uma aplicação diferenciável de classe C^∞ que é localmente imagem de uma função generalizada e cuja derivada no ponto $p \in M_1$, $df_p : T_pM_1 \longrightarrow T_{f(p)}M_2$, é um isomorfismo. Então, f é um difeomorfismo local.*

Demonstração:

Como f é diferenciável em p, então, existem cartas $\varphi : V_\varphi \subset M_2 \to \varphi(V_\varphi) \subset \tilde{\Omega}_c^\varphi$ em $f(p)$ e $\phi : U_\phi \subset M_1 \to \phi(U_\phi) \subset \tilde{\Omega}_c^\phi$ em p tal que, $f(U_\phi) \subset V_\varphi$ e a aplicação

$$\varphi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U_\phi) \subset \tilde{\Omega}_c^\phi \to \varphi(V_\varphi) \subset \tilde{\Omega}_c^\varphi$$

é diferenciável em $\phi^{-1}(p)$, onde $\tilde{\Omega}_c^\phi$ e $\tilde{\Omega}_c^\varphi$ são subconjuntos abertos do $\overline{\mathbb{R}}^n$. Além disso, existe $f^{\phi\varphi} \in \mathcal{G}(\Omega^\phi, \Omega^\varphi)$ tal que

$$k(f^{\phi\varphi})\mid_{\phi(U_\phi)} = \varphi \circ f \circ \phi^{-1}.$$

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r, "f"] & M_2 \arrow[d, "\varphi"] \\
\phi(U_\phi) \subset \tilde{\Omega}_c^\phi \arrow[u, "\phi^{-1}"] \arrow[r, "\varphi \circ f \circ \phi^{-1}"'] & \varphi(V_\varphi) \subset \tilde{\Omega}_c^\varphi
\end{tikzcd}$$

Temos também, por hipótese, que $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ é um $\overline{\mathbb{R}}$-isomorfismo, então

$$d(k(f^{\phi\varphi})\mid_{\phi(U_\phi)})_{\phi(p)} : \overline{\mathbb{R}}^n \to \overline{\mathbb{R}}^n$$

é um $\overline{\mathbb{R}}$-isomorfismo. Então, pela lema 2.29, temos que

$$\det d(k(f^{\phi\varphi})\mid_{\phi(U_\phi)})_{\phi(p)} \in Inv(\overline{\mathbb{R}}).$$

Portanto, pelo teorema 1.33 existem U e V subconjunto abertos de $\overline{\mathbb{R}}^n$ tais que $\varphi(p) \in U$, $(\varphi \circ f \circ \phi^{-1})(\varphi(p)) \in V$ e a aplicação $\varphi \circ f \circ \phi^{-1} : U \longrightarrow V$ é um difeomorfismo.

Portanto, f é um difeomorfismo local. ■

2.5 Imersões, mergulhos e subvariedades generalizadas

Nesta seção apresentaremos os conceitos de imerção, mergulho e subvariedade generalizada. Também será apresentada uma versão do teorema da forma local das imersões no contexto das $\mathcal{G}$-variedades.

2.5.1 Imersões generalizadas

Definição 2.32. *Seja $f : U \subset M \longrightarrow N$ uma aplicação diferenciável de classe C^r, onde M e N são $\mathcal{G}$-variedades de dimensão m e n respectivamente. Se $df_p : T_pM \longrightarrow T_{f(p)}N$ é injetiva em um ponto $p \in U$, f é dita uma* **imersão em** p. *Se f é uma imersão em cada ponto $p \in U$, f é dita uma* **imersão**.

Agora será apresentada uma versão do teorema da forma local da imersão para $\mathcal{G}$-variedades. Antes, porém, será definido a imersão canônica em $\overline{\mathbb{R}}^n$.

Definição 2.33. *A inclusão $i : \overline{\mathbb{R}}^m \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}^n (m \leq n)$*

$$i(a_1, ..., a_m) = (a_1, ..., a_m, 0, ..., 0)$$

é denominada **imersão canônica**.

Teorema 2.34 (Forma local da imersão para $\mathcal{G}$-variedades). *Seja $f : M \longrightarrow N$ uma imersão em p de classe C^∞ e localmente imagem de uma função generalizada pela aplicação mergulho k, onde M e N são $\mathcal{G}$-variedades de dimensão m e n, respectivamente, com $m \leq n$. Então, existem sistemas de coordenadas locais em torno de p e $f(p)$, tal que*

$$f(x_1, ..., x_m) = (x_1, ..., x_m, 0, ..., 0).$$

Demonstração:

Como f é uma imersão em $p \in M$, existem cartas $\varphi : V^{\varphi} \subset N \longrightarrow \tilde{\Omega}_c^{\varphi} \subset \overline{\mathbb{R}}^n$ em $f(p)$, $\phi : U^{\phi} \subset M \longrightarrow \tilde{\Omega}_c^{\phi} \subset \overline{\mathbb{R}}^m$ em p tal que $f(U^{\phi}) \subset V^{\varphi}$ com $\phi(p) = 0$, $\varphi(f(p)) = 0$, $\phi(U^{\phi}) = B_{\epsilon}^m(0)$ e $\varphi(V^{\varphi}) = B_{\epsilon}^n(0)$ tal que a aplicação

$$g := \varphi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(u^{\phi}) \subset \tilde{\Omega}_c^{\phi} \longrightarrow \varphi(U^{\varphi}) \subset \tilde{\Omega}_c^{\varphi}.$$

é uma imersão em $\phi(p)$.

Agora, sendo f localmente a imagem de uma aplicação generalizada, então sem perda de generalidades, podemos supor com relação a estas cartas que existe uma aplicação $f^{\phi\varphi} \in \mathcal{G}(\Omega^{\phi})^m$ tal que

$$(kf^{\phi\varphi}) \mid_{\phi(U^{\phi})} = g$$

Como g é uma imersão em $\phi(p)$, então, $dg_{\phi(p)} : \tilde{\Omega}_c^{\phi} \longrightarrow \tilde{\Omega}_c^{\varphi}$ é injetora, existe uma submatriz de $dg_0 = (\frac{\partial g^i}{\partial x_j}(0))_{n\times m}$ do tipo $(\frac{\partial g^i}{\partial x_j}(0))_{m\times m}$ tal que

$$\det(\tfrac{\partial g^i}{\partial x_j}(0))_{m\times m} \in Inv(\overline{\mathbb{R}}).$$

Agora, define-se a aplicação $G : B_{\epsilon}^m \times B_{\epsilon}^{n-m} \subset \overline{\mathbb{R}}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}^n$ por

$$G(x_1, ..., x_n) = (g^1(x_1, ..., x_m), ..., g^m(x_1, ..., x_m), x_{m+1}, ..., x_n).$$

Sendo g uma aplicação de classe C^{∞}, então $G \in C^{\infty}(\tilde{\Omega}_c^{\phi} \times \overline{\mathbb{R}}_c^{n-m}, \overline{\mathbb{R}}^n)$. Então,

$$dG_0 = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial g^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial g^1}{\partial x^n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial g^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial g^n}{\partial x^n} \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & I_{n-m} \end{pmatrix}_0 .$$

Agora,

$$\begin{aligned} \det dG_0 &= \tfrac{\partial(g^1,...,g^m)}{\partial(x_1,...,x_m)} \mid_0 . \det I_{n-m} \\ &= \tfrac{\partial(g^1,...,g^m)}{\partial(x_1,...,x_m)} \mid_0 \in Inv(\overline{\mathbb{R}}). \end{aligned}$$

Então, pelo teorema da aplicação inversa generalizado G é um difeomorfismo local de um de uma vizinhança $U \subset \overline{\mathbb{R}}^n$ de $\phi(p)$ em uma vizinhança $V \subset \overline{\mathbb{R}}^n$ de $G(\phi(p))$.

Observe agora que:

$$g(a_1, ..., a_m) = G(a_1, ..., a_m, 0, ..., 0) = (G \circ i)(a_1, ..., a_m).$$

Visto que φ e G são difeomorfismos locais em 0, então $\varphi^{-1} \circ G$ também é. Então, $\varphi^{-1} \circ G$ pode ser usado como parametrização local de N em torno do ponto $f(p)$. Então,

$$\begin{aligned}
f(x_1, ..., x_m) &= (\varphi^{-1} \circ g \circ \phi)(x_1, ..., x_m) \\
&= \varphi^{-1}(g(\phi(x_1, ..., x_m))) \\
&= \varphi^{-1}(g(a_1, ..., a_m)) \\
&= \varphi^{-1}(G(a_1, ..., a_m, 0, ..., 0)) \\
&= \varphi^{-1}(G(i(a_1, ..., a_m))) \\
&= (\varphi^{-1} \circ G) \circ i(\phi(x_1, ..., x_m)).
\end{aligned}$$

Então,

$$f = (\varphi^{-1} \circ G) \circ i \circ \phi.$$

Portanto, localmente temos que

$$f(x_1, ..., x_m) = (x_1, ..., x_m, 0, ..., 0). \blacksquare$$

O teorema da forma local da imersão generalizado afirma que, localmente f é uma imersão canônica.

Observe que, no caso de $M = \overline{\mathbb{R}}^m$ e $N = \overline{\mathbb{R}}^n$, obtém-se uma versão do teorema da forma local das imersões generalizado no ambiente $\overline{\mathbb{R}}^n$, ou seja, para o cálculo diferencial de Colombeau.

2.5.2 Mergulhos e subvariedades generalizadas

A seguir, apresentaremos o conceito de mergulho no ambiênte das $\mathcal{G}$-variedades e a definição de $\mathcal{G}$-subvariedade.

Definição 2.35. *Sejam M e N $\mathcal{G}$-variedades. Uma aplicação diferenciável $f : M \longrightarrow N$ é um mergulho generalizado se for uma imersão generalizada e, além disso, um homeomorfismo sobre $f(M) \subset N$, onde $f(M)$ tem a topologia induzida por N.*

Definição 2.36. *Uma $\mathcal{G}$-subvariedade n-dimensional de uma $\mathcal{G}$-variedade m-dimensional M é um subconjunto $N \subset M$ tal que:*

1. *N é um subespaço munido com a topologia induzida pela de M*

2. *Para cada $p \in N$, existe uma carta $\varphi : U \longrightarrow \varphi(U) \subset \tilde{\Omega}_c^{\varphi}$, onde $U \subset M$ é um aberto contendo p e $\tilde{\Omega}_c^{\varphi}$ é um aberto contido em $\bar{\mathbb{R}}^m$ tal que:*

   (a) $\varphi(p) = (0, ..., 0)$;

   (b) $\varphi(U) = B_{\epsilon}^m(0) \subset \tilde{\Omega}_c^{\varphi}$;

   (c) $\varphi(U \cap N) = \{x \in B_{\epsilon}^m(0) : x^{n+1} = ... = x^m = 0\}$.

Teorema 2.37. *Se $f : M \longrightarrow N$ é um mergulho, então $f(M)$ é uma $\mathcal{G}$-subvariedade de N.*

Demonstração:

Dado $q \in f(M)$, existe $p \in M$ tal que $q = f(p)$. Como f é um mergulho, isto é, um homeomorfismo que é uma imersão, então pelo teorema da forma local das imersões existem cartas (U_0, ϕ) e (V_0, φ) sobre p e $f(p)$, respectivamente com $\phi(p) = 0$, $\phi(U) = B_{\epsilon}^m(0)$, $\varphi(f(p)) = 0$, $\varphi(V) = B_{\epsilon}^n(0)$, $f(u) \subset V$ e tal que

$$(\varphi \circ \mu \circ \phi^{-1})(x^1, ..., x^m) = (x^1, ..., x^m, 0, ..., 0).$$

Sendo f um homeomorfismo, então $\phi \circ f^{-1} : f(U) \subset N \longrightarrow B_{\epsilon}^m(0)$ é uma carta em $f(p)$. Finalmente, observe que $V \cap f(U) = f(U)$ e portanto, $\varphi(V \cap f(U)) = \{(x_1, ..., x_n) : x^{m+1} = ... = x^n = 0\}$. Concluímos, então que $f(M)$ é uma $\mathcal{G}$-subvariedade de N. ■

Definição 2.38. *A imagem de um mergulho de uma $\mathcal{G}$-variedade é denominada de $\mathcal{G}$-***subvariedade mergulhada**.

Mostraremos agora que o teorema da pré-imagem em geral não-vale neste contexto. Consideremos a $\mathcal{G}$-variedade $S^1(0) = \{(x, y) \in \bar{\mathbb{R}}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. Defina a aplicação $f : \bar{\mathbb{R}}^2 \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ por $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Então,

$$f^{-1}(0) = S^1(0) \text{ e } \nabla f(x, y) = (2x, 2y).$$

Agora, tomando-se um elemento idempotente $e \in \bar{\mathbb{R}}$, isto é, $e^2 = e$, note que

$$e^2 + (1 - e)^2 = e^2 + 1 - 2e + e^2 = e + 1 - e = 1 \tag{2.1}$$

Então, $(e, 1 - e) \in f^{-1}(0)$ e além disso temos que

$$\nabla f(e, 1-e) = (2e, 2(1-e)).$$

Porém, os elementos e e $1-e$ são divisores de zero, tendo em vista que

$$e(1-e) = e - e^2 = e - e = 0.$$

Portanto, pelo teorema fundamental de $\overline{\mathbb{R}}$(teorema 1.7) os elementos e e $1-e$ não pertencem a $Inv(\overline{\mathbb{R}})$.

Capítulo 3

Geometria das Membranas

Em [AFJ2], Aragona, Fernandes e Juriaans, baseados na topologia introduzida em [AFJ3] e [AFJ4], introduziram o conceito de membrana e estenderam a definição de integral dada em [AFJ1] para integral sobre membrana. Neste capítulo apresentaremos uma nova geometria, tendo como ambiente natural as membranas, que será denominada de Geometria das Membranas. Nela, serão apresentados conceitos importantes, tais como submembrana, curvatura média escalar, curvatura de Gauss-Kronecker e geodésica. Apresentaremos, também, uma versão do teorema de Gauss-Bonnet neste ambiente. As membranas $X = cl[(X_\epsilon)]$, a serem consideradas, serão aquelas em que as pré-membranas (X_ϵ), que as representam, são famílias de subvariedades compactas $X_\epsilon \subset \mathbb{R}^n$ e de igual dimensão, isto é, $\dim X_\epsilon = m$ para todo $\epsilon \in I$.

3.1 Aplicações diferenciáveis entre membranas

Iniciaremos a seção apresentando o conceito de aplicação entre membranas. Contudo, apresentaremos antes um lema que é de fundamental importância, não só para apresentarmos a referida definição, mas também para demonstrarmos outros resultados adiante.

Lema 3.1 (Lema fundamental das membranas). *Seja $X = cl[(X_\epsilon)]$ uma membrana em $\overline{\mathbb{R}}^n$, onde $\dim X_\epsilon = m$ para todo $\epsilon \in I$. Então, para quaisquer dois representantes (X_ϵ) e (X'_ϵ), a aplicação*

$$\phi_\epsilon : X_\epsilon \longrightarrow X'_\epsilon,$$

proviniente do conceito de membrana, é um difeomorfismo para todo ϵ pequeno.

Demonstração:

Sejam (X_ϵ) e (X'_ϵ) representantes de X. Por definição existe uma família de aplicações nulas $(\psi_\epsilon) \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ tal que a função

$$\phi : I \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

definida por

$$\phi_\epsilon(x) = x + \psi_\epsilon(x)$$

satisfaz $\phi_\epsilon(X_\epsilon) = X'_\epsilon$ para todo $\epsilon \in I$.
Então, para cada $\epsilon \in I$ e $p_\epsilon \in X_\epsilon$, a aplicação linear

$$(d\phi_\epsilon)_{p_\epsilon} : T_{p_\epsilon}X_\epsilon \longrightarrow T_{\phi_\epsilon(p_\epsilon)}X'_\epsilon$$

é definida por

$$(d\phi_\epsilon)_{p_\epsilon} = I_n + (d\psi_\epsilon)_{p_\epsilon},$$

onde I_n é a matriz identidade de ordem n.
E sendo $(\psi_\epsilon) \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, então $(d\psi_\epsilon) \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Logo, por definição, para todo $\Pi \subset\subset \mathbb{R}^n$ existem $C > 0$ e $\eta \in I$ tal que para todo $N \in \mathbb{Z}$

$$|(d\psi_\epsilon)_{p_\epsilon} v| \leq C\epsilon^N \text{ para todo } \epsilon \in (0, \eta),\ v \in \Pi.$$

Agora, dado $u \in S_1^{n-1}(0)$, então

$$\begin{aligned} |(I_n + (d\psi_\epsilon)_{p_\epsilon})u| &\geq |I_n u| - |(d\psi_\epsilon)_{p_\epsilon} u| \\ &= |u| - C\epsilon^N \text{ para todo } \epsilon \in (0, \eta) \end{aligned}$$

Então, para ϵ suficientemente pequeno temos

$$|(I_n + (d\psi_\epsilon)_{p_\epsilon})u| \geq |u| = 1.$$

Daí, temos que, dado $v \in \mathbb{R}^n$ não nulo, então

$$\begin{aligned} \left|(I_n + (d\psi_\epsilon)_{p_\epsilon})\frac{v}{|v|}\right| &\geq 1 \\ |(I_n + (d\psi_\epsilon)_{p_\epsilon})v| &\geq |v| \\ |(d\phi_\epsilon)_{p_\epsilon} v| &\geq |v|. \end{aligned}$$

Claramente $(d\phi_\epsilon)_{p_\epsilon}$ é um isomorfismo e portanto $\phi_\epsilon : X_\epsilon \longrightarrow X'_\epsilon$ é um difeomorfismo para todo $\epsilon < \eta$. ■

Definição 3.2. *Sejam* $X = cl[(X_\epsilon)]$, $Y = cl[(Y_\epsilon)]$ *membranas em* $\overline{\mathbb{R}}^r$, *onde* $\dim X_\epsilon = m$, $\dim Y_\epsilon = n$. *e uma aplicação* $f : X \longrightarrow Y$ *é uma terna formada por:*

1. (f_ϵ);

2. (X_ϵ), (Y_ϵ) *representantes de* X *e* Y, *respectivamente;*

3. $f_\epsilon : X_\epsilon \to Y_\epsilon$ *aplicação para todo* ϵ *pequeno.*

Onde, para quaisquer outra terna

1. (g_ϵ);

2. $(X_\epsilon^{'})$, $(Y_\epsilon^{'})$ *representantes de* X *e* Y, *respectivamente;*

3. $g_\epsilon : X_\epsilon^{'} \to Y_\epsilon^{'}$ *aplicação para todo* ϵ *pequeno,*

tem-se que

$$(g_\epsilon(x_\epsilon) - \varphi_\epsilon^{-1} \circ f_\epsilon \circ \psi_\epsilon(x_\epsilon)) \in \mathcal{N}^n,$$

onde $\varphi_\epsilon, \psi_\epsilon$ *são difeomorfismos garantidos pelo lema fundamental.*
Além disso,

$$f(cl[(x_\epsilon)]) = cl[(f_\epsilon(x_\epsilon))].$$

Proposição 3.3. *A aplicação entre membranas está bem definida*

Demonstração:

1. Dados $x = cl[(x_\epsilon)], x^{'} = cl[(x_\epsilon^{'})] \in X$ tais que $x = x^{'}$. Então,

$$x_\epsilon = x_\epsilon^{'} + \eta_\epsilon, \text{ onde } (\eta_\epsilon) \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^n).$$

Usando-se o desenvolvimento de Taylor temos que

$$\begin{aligned} f_\epsilon(x_\epsilon) &= f_\epsilon(y_\epsilon + \eta_\epsilon) \\ &= f_\epsilon(y_\epsilon) + df_\epsilon(y_\epsilon)\eta_\epsilon + d^2 f_\epsilon(y_\epsilon)\eta_\epsilon^2 + ... + \frac{1}{p!}d^p f(y_\epsilon)\eta_\epsilon^p + R_{p\epsilon}(\eta_\epsilon), \end{aligned}$$

onde $R_{p\epsilon}(\eta_\epsilon) = \frac{1}{(p+1)!}d^{p+1}f(y_\epsilon + \theta\eta_\epsilon)\eta_\epsilon^{p+1}$, para $\theta \in (0, 1)$.

E sendo (f_ϵ), (η_ϵ) famílias de funções moderadas e nulas, respectivamente, temos que

$$(f_\epsilon(y_\epsilon) + df_\epsilon(y_\epsilon)\eta_\epsilon + d^2 f_\epsilon(y_\epsilon)\eta_\epsilon^2 + ... + \tfrac{1}{p!}d^p f(y_\epsilon)\eta_\epsilon^p + R_{p\epsilon}(\eta_\epsilon)) \in \mathcal{N}^n.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} f(x) &= cl[(f_\epsilon(x_\epsilon))] \\ &= cl[(f_\epsilon(y_\epsilon))] \\ &= f(y). \end{aligned}$$

2. Suponha que exista uma outra terna:

   (a) (g_ϵ) ;

   (b) $(X_\epsilon^{'})$, $(Y_\epsilon^{'})$ representantes de X e Y, respectivamente;

   (c) $g_\epsilon : X_\epsilon^{'} \longrightarrow Y_\epsilon^{'}$, aplicação para todo ϵ pequeno.

   E tal que $(g_\epsilon(x_\epsilon))$ seja um representante para $f(x)$. Como

   $$(g_\epsilon(x_\epsilon) - \varphi_\epsilon^{-1} \circ f_\epsilon \circ \psi_\epsilon(x_\epsilon)) \in \mathcal{N}^n,$$

   onde $\varphi_\epsilon, \psi_\epsilon$ são difeomorfismos garantidos pelo lema fundamental, então

   $$cl[(g_\epsilon(x_\epsilon))] = cl[(\varphi_\epsilon^{-1} \circ f_\epsilon \circ \psi_\epsilon(x_\epsilon)))]. \blacksquare$$

Proposição 3.4. *Sejam $X = cl[(X_\epsilon)]$ e $Y = cl[(Y_\epsilon)]$ membranas. Se para cada ϵ pequeno $f_\epsilon : X_\epsilon \to Y_\epsilon$ é uma função diferenciável em $p_\epsilon \in X_\epsilon$, então $\varphi_\epsilon^{-1} \circ f_\epsilon \circ \psi_\epsilon$ é uma aplicação diferenciável em $\phi_\epsilon^1(p_\epsilon)$, onde as funções φ_ϵ e ψ_ϵ estão garantidas pelo lema fundamental.*

Demonstração:

Sejam $(X_\epsilon^{'})$ e $(Y_\epsilon^{'})$ pré-membranas, representantes de X e Y, respectivamente. Então existem aplicações nulas $(\psi_\epsilon^1), (\psi_\epsilon^2) \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^r)$, tais que as aplicações

$$\phi_\epsilon^1(x) = x + \psi_\epsilon^1(x) \text{ e } \phi_\epsilon^2(x) = x + \psi_\epsilon^2(x) \text{ para todo } (\epsilon, x) \in I \times \mathbb{R}^r$$

satisfazem.

$$\phi_\epsilon^1(X_\epsilon) = X_\epsilon^{'} \quad \text{e} \quad \phi_\epsilon^2(Y_\epsilon) = Y_\epsilon^{'}.$$

Observe que ϕ_ϵ^1 e ϕ_ϵ^2 são aplicações diferenciáveis. Em particular elas são diferenciáveis em $p_\epsilon \in X_\epsilon$ e $\phi_\epsilon(p_\epsilon) \in Y_\epsilon$, respectivamente, para todo $\epsilon \in I$.

Agora, pelo lema fundamental das membranas a aplicação

$$\phi_\epsilon^1 : X_\epsilon \longrightarrow X_\epsilon'$$

é um difeomorfismo para todo $\epsilon \in I$, então

$$(\phi_\epsilon^1)^{-1} : X_\epsilon' \longrightarrow X_\epsilon$$

é uma aplicação diferenciável em $\phi_\epsilon^1(p_\epsilon)$ para todo $\epsilon \in I$.

$$\begin{tikzcd} X_\epsilon \arrow[r, "f_\epsilon"] & Y_\epsilon \arrow[d, "\phi_\epsilon^2"] \\ X_\epsilon' \arrow[u, "(\phi_\epsilon^1)^{-1}"] \arrow[r, "\phi_\epsilon^2 \circ f_\epsilon \circ (\phi_\epsilon^1)^{-1}"'] & Y_\epsilon' \end{tikzcd}$$

Logo, a aplicação

$$\phi_\epsilon^2 \circ f_\epsilon \circ (\phi_\epsilon^1)^{-1} : X_\epsilon' \longrightarrow Y_\epsilon'$$

é uma aplicação diferenciável em $\phi_\epsilon^1(p_\epsilon)$. ■

Agora, daremos o conceito de diferenciabilidade em membranas.

Definição 3.5. *Sejam $X = cl[(X_\epsilon)]$ e $Y = cl[(Y_\epsilon)]$ membranas em $\overline{\mathbb{R}}^r$, onde $\dim X_\epsilon = m$ e $\dim Y_\epsilon = n$, para todo $\epsilon \in I$. Uma aplicação $f : X \longrightarrow Y$ é dita diferenciável em $p = cl[(p_\epsilon)] \in X$ se existe uma terna formada por:*

1. (f_ϵ);
2. (X_ϵ), (Y_ϵ) *representantes de X e Y, respectivamente;*
3. $f_\epsilon : X_\epsilon \to Y_\epsilon$, *diferenciável em $p_\epsilon \in X_\epsilon$ para todo ϵ pequeno.*

Onde para quaisquer outra terna

1. (g_ϵ);
2. (X_ϵ'), (Y_ϵ') *representantes de X e Y, respectivamente;*
3. $g_\epsilon : X_\epsilon' \to Y_\epsilon'$, *diferenciável em $p_\epsilon' \in X_\epsilon'$ para todo ϵ pequeno,*

tem-se que

$$(g_\epsilon'(p_\epsilon) - (\varphi_\epsilon^{-1} \circ f_\epsilon \circ \psi_\epsilon)'(p_\epsilon')) \in \mathcal{N}^n,$$

com $\varphi_\epsilon, \psi_\epsilon$ *difeomorfismos garantidos pelo lema fundamental.*
Além disso,

$$f'(p) = cl[(f_\epsilon'(p_\epsilon))].$$

Definição 3.6. *Sejam* $X = cl[(X_\epsilon)]$ *e* $Y = cl[(Y_\epsilon)]$ *membranas* $\overline{\mathbb{R}}^r$, *onde* $\dim X_\epsilon = m$ *e* $\dim Y_\epsilon = n$, *para todo* $\epsilon \in I$. *Uma aplicação* $f : X \longrightarrow Y$ *é dita diferenciável em* X *se for diferenciável em cada ponto de* X.

3.2 Módulos tangente e normal a uma membrana

Nesta seção apresentaremos o conceito de módulo tangente a uma membrana.

Definição 3.7. *O* $\overline{\mathbb{R}}$*-módulo tangente a uma membrana* $M = cl[(M_\epsilon)]$ *em* $\overline{\mathbb{R}}^n$, *no ponto* $p = cl[(p_\epsilon)] \in M$, *é definido por*

$$T_pM := \{cl[(v_\epsilon)] : v_\epsilon \in T_{p_\epsilon}M_\epsilon \ \forall \ \epsilon \in I\}.$$

Proposição 3.8. *O* $\bar{\mathbb{R}}$*-módulo tangente independe da escolha do representante da membrana.*

Demonstração:

Seja (M_ϵ') um representante de $M = cl[(M_\epsilon)]$. Dado $cl[(v_\epsilon')] \in T_pM$ com $v_\epsilon' \in T_{p_\epsilon}M_\epsilon'$ existe uma curva $\beta_\epsilon : I \longrightarrow M_\epsilon'$ tal que

$$\beta_\epsilon(0) = p_\epsilon' \text{ e } \dot{\beta}_\epsilon(0) = v_\epsilon' \in T_{p_\epsilon'}M_\epsilon'.$$

Sendo $p_\epsilon' \in M_\epsilon' = \phi_\epsilon(M_\epsilon)$ existe $p_\epsilon \in M_\epsilon$ tal que $\phi_\epsilon(p_\epsilon) = p_\epsilon'$.
Pelo lema fundamental das membranas $(d\phi_\epsilon)_{p_\epsilon} : T_{p_\epsilon}M_\epsilon \longrightarrow T_{p_\epsilon'}M_\epsilon'$ é um isomorfismo, então existe $v_\epsilon \in T_{p_\epsilon}M_\epsilon$ tal que

$$(d\phi_\epsilon)_{p_\epsilon}(v_\epsilon) = v_\epsilon'$$

Como $(d\phi_\epsilon)_{p_\epsilon} = I_n + (d\psi_\epsilon)_{p_\epsilon}$, onde $\psi_\epsilon \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, então

$$v'_\epsilon = v_\epsilon + (d\psi_\epsilon)_{p_\epsilon}(v_\epsilon).$$

Donde concluímos que,

$$(v'_\epsilon - v_\epsilon) \in (\mathcal{N})^n$$

Portanto,

$$cl[(v'_\epsilon)] = cl[(v_\epsilon)]. \blacksquare$$

Definição 3.9. *O $\bar{\mathbb{R}}$-módulo normal a uma membrana $M = cl[(M_\epsilon)]$ no ponto $p = cl[(p_\epsilon)] \in M$ é definido por*

$$T_pM^\perp := \{v \in \overline{\mathbb{R}}^n : < v, w >= 0 \ \forall \ w \in T_pM\},$$

onde $< .,. >: \overline{\mathbb{R}}^n \times \overline{\mathbb{R}}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ é uma aplicação $\overline{\mathbb{R}}$- bilinear definida em [AFJ1] por

$$< x, y >= \textstyle\sum_1^n x_i y_i.$$

No que segue apresentaremos a noção de dimensão de uma membrana neste contexto.

Definição 3.10. *A dimensão de uma membrana $M = cl[(M_\epsilon)]$ é definida como sendo a dimensão da subvariedade M_ϵ.*

Exemplo 3.11. *A dimensão da membrana $\gamma = cl[(\gamma_\epsilon([0,1]))]$, onde (γ_ϵ) é uma história, é igual a 1.*

Teorema 3.12. *Seja $M = cl[(M_\epsilon)]$ uma membrana em $\overline{\mathbb{R}}^n$. Se (M'_ϵ) é uma pré-membrana tal que $(M'_\epsilon) \sim (M_\epsilon)$, então*

$$\dim cl[(M_\epsilon)] = \dim cl[(M'_\epsilon)].$$

Demonstração:

Seja $M = cl[(M_\epsilon)]$, onde $\dim M_\epsilon = m$ para todo $\epsilon \in I$. Suponha que (M'_ϵ) é uma pré-membrana tal que $(M'_\epsilon) \sim (M_\epsilon)$, então existe uma família de funções $(\psi_\epsilon) \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^n.\mathbb{R}^n)$ tal que a aplicação $\phi : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida por

$$\phi(\epsilon, x) = x + \psi_\epsilon(x)$$

satisfaz $\phi_\epsilon(M_\epsilon) = M'_\epsilon$.

O lema fundamental das membranas nos garante que a aplicação linear

$$(d\phi_\epsilon)_{p_\epsilon} : T_{p_\epsilon}M_\epsilon \longrightarrow T_{\phi(p_\epsilon)}M'_\epsilon$$

é um isomorfismo para todo $\epsilon \in I$.

Portanto, $\dim T_{p_\epsilon}M_\epsilon = \dim T_{\phi(p_\epsilon)}M'_\epsilon$, ou seja, em cada pré-membrana (M'_ϵ) que representa M seus elementos tem dimensão igual a m. ■

Definição 3.13. *Seja $M = cl[(M_\epsilon)]$ uma membrana em $\overline{\mathbb{R}}^n$ e de dimensão m. O número $n - m$ é denominado de codimensão da membrana.*

Exemplo 3.14. *Seja (γ_ϵ) uma história, onde*

$$[0,1] \underset{t \longrightarrow \gamma_\epsilon(t)}{\xrightarrow{\gamma_\epsilon}} \mathbb{R}^3$$

para todo $\epsilon \in I$. Então, a membrana $\gamma = cl[(\gamma_\epsilon)]$ tem codimensão 2.

Definição 3.15. *Uma membrana M é denominada de hiper-membrana se tem codimensão 1.*

Exemplo 3.16. *Dado $\epsilon \in I$ e seja $r_\epsilon = e^{1/\epsilon^2}$, claramente $(r_\epsilon) \in \mathcal{N}$. Consideremos a esfera $S^n_{r_\epsilon}(p_\epsilon) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ centrada em $p_\epsilon = (0, ..., 0, -\sqrt{e^{2/\epsilon^2} - 1})$ e raio r_ϵ. Então a subvariedade*

$$M_\epsilon = \{(x_1, ..., x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} \geq 0\} \cap S^n_{r_\epsilon}(p_\epsilon)$$

tem dimensão n.

Note que (M_ϵ) é uma pré-membrana, pois:

1. *Cada M_ϵ é uma subvariedade compacta, já que M_ϵ é fechada e $M_\epsilon \subset S^n_{r_\epsilon}(p_\epsilon)$ que é compacta. Além disso $dim M_\epsilon = n$ para todo $\epsilon \in I$;*

2. *Seja $K = \{(x_1, ..., x_{n+1}) \in S^n_1(0) : x_{n+1} \geq 0\}$ compacto, então $M_\epsilon \subset K$ para todo $\epsilon \in I$, pois:*

   Dado $a_\epsilon = (0, ..., 0, e^{1/\epsilon^2} - \sqrt{e^{2/\epsilon^2} - 1}) \in M_\epsilon$, para $\epsilon = 1$ temos que $a_1 = (0, ..., 0, e - \sqrt{e^2 - 1})$, enquanto que $a_\epsilon \to 0$ quando $\epsilon \to 0$;

3. *Sendo cada M_ϵ compacto, então a função característica χ_{M_ϵ} é integrável.*

Agora, como $dim M_\epsilon = n$ para todo $\epsilon \in I$, então a dimensão da membrana $M = [(M_\epsilon)]$ em $\overline{\mathbb{R}}^{n+1}$ é igual a n. Logo M tem codimensão 1 e portanto é uma hiper-membrana.

Proposição 3.17. *Sejam (X_ϵ) e (Y_ϵ) pré-membranas, então $(X_\epsilon \times Y_\epsilon)$ é uma pré-membrana.*

Demonstração:

1. Sejam (X_ϵ) e (Y_ϵ) pré-membranas, então existem $K_1 \subset\subset \mathbb{R}^m$ e $K_2 \subset\subset \mathbb{R}^n$ tais que:

   (a) $X_\epsilon \subset K_1$ para todo $\epsilon \in I_{\eta_1}$, para algum $\eta_1 \in I$;

   (b) $Y_\epsilon \subset K_2$ para todo $\epsilon \in I_{\eta_2}$, para algum $\eta_2 \in I$.

   Tome $\eta = \min\{\eta_1, \eta_2\}$, então para todo $\epsilon \in I_\eta$ temos por (a) e (b) que

   $$X_\epsilon \subset K_1 \subset\subset \mathbb{R}^m \quad \text{e} \quad Y_\epsilon \subset K_2 \subset\subset \mathbb{R}^n.$$

   Então,

   $$X_\epsilon \times Y_\epsilon \subset K_1 \times K_2 \subset\subset \mathbb{R}^{m+n} \quad \text{para todo} \quad \epsilon \in I_\eta.$$

2. As funções características χ_{X_ϵ} e χ_{Y_ϵ} são integravéis em X_ϵ e Y_ϵ, respectivamente, para todo $\epsilon \in I_\eta$, isto é,

   $$\int_{X_\epsilon} \chi_{X_\epsilon} < \infty \quad e \quad \int_{Y_\epsilon} \chi_{Y_\epsilon} < \infty. \tag{3.1}$$

   Sendo X_ϵ e Y_ϵ n-subvariedades compactas e orientadas, então $X_\epsilon \times Y_\epsilon$, para cada ϵ pertencente a I_η, é uma subvariedade compacta e orientada de dimensão $2n$.

   Em $X_\epsilon \times Y_\epsilon$ será dada a seguinte orientação: $u_1, ..., u_n, v_1, ..., v_n$ são positivamente orientados em

   $$T_{(p,q)}(X_\epsilon \times Y_\epsilon) \cong T_pX_\epsilon \oplus T_pY_\epsilon$$

   se $u_1, ..., u_n$ e $v_1, ..., v_n$ se são positivamentes orientadas em T_pX_ϵ e T_pY_ϵ, respectivamente.

   Sejam

   $$\pi_1 : X_\epsilon \times Y_\epsilon \longrightarrow X_\epsilon \quad \text{e} \quad \pi_1 : X_\epsilon \times Y_\epsilon \longrightarrow X_\epsilon$$

projeções canônicas. Então,

$$\int_{X_\epsilon \times Y_\epsilon} \chi_{X_\epsilon \times Y_\epsilon} = \int_{X_\epsilon \times Y_\epsilon} \chi_{X_\epsilon \times Y_\epsilon} \pi_1^* \omega \wedge \pi_2^* \eta, \tag{3.2}$$

onde $\omega = dx_1 \wedge ... \wedge dx_n$, enquanto que $\eta = dy_1 \wedge ... \wedge dy_n$ (veja [Spi]). Agora, sejam $\{U_{\epsilon i}\}_{1 \leq i \leq r}$ e $\{V_{\epsilon j}\}_{1 \leq j \leq s}$ coberturas de X_ϵ e Y_ϵ, respectivamente. Então existem partições da unidade $\{\zeta_{\epsilon i}\}$ e $\{\xi_{\epsilon j}\}$ subordinadas as coberturas $\{U_{\epsilon i}\}_{1 \leq i \leq r}$ e $\{V_{\epsilon j}\}_{1 \leq j \leq s}$, respectivamente, com suportes compactos $supp\zeta_{\epsilon i}$ e $supp\xi_{\epsilon j}$. Então,

$$\int_{X_\epsilon} \chi_{X_\epsilon} = \sum_{i=1}^{r} \int_{U_{\epsilon i}} \chi_{X_\epsilon}(x) \zeta_{\epsilon i}(x) dx_1 ... dx_n \tag{3.3}$$

e

$$\int_{Y_\epsilon} \chi_{Y_\epsilon} = \sum_{j=1}^{s} \int_{V_{\epsilon j}} \chi_{Y_\epsilon}(y) \xi_{\epsilon j}(y) dy_1 ... dy_n. \tag{3.4}$$

Via teorema de Fubini temos que

$$\begin{aligned}
\int_{X_\epsilon} \chi_{X_\epsilon} \int_{Y_\epsilon} \chi_{Y_\epsilon} &= \sum_{i=1}^{r} \int_{U_{\epsilon i}} \chi_{X_\epsilon}(x) \zeta_{\epsilon i}(x) dx_1 ... dx_n \sum_{j=1}^{s} \int_{V_{\epsilon j}} \chi_{X_\epsilon}(y) \xi_{\epsilon j}(y) dy_1 ... dy_n \\
&= \sum_{i=1}^{r} \int_{U_{\epsilon i}} \{\sum_{j=1}^{s} \int_{V_{\epsilon j}} \chi_{Y_\epsilon}(y) \xi_{\epsilon j}(y) dy_1 ... dy_n\} \chi_{X_\epsilon}(x) \zeta_{\epsilon i}(x) dx_1 ... dx_n \\
&= \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \int_{U_{\epsilon i}} \{\int_{V_{\epsilon j}} \chi_{Y_\epsilon}(y) \xi_{\epsilon j}(y) dy_1 ... dy_n\} \chi_{X_\epsilon}(x) \zeta_{\epsilon i}(x) dx_1 ... dx_n \\
&= \sum_{i,j=1}^{r+s} \int_{U_{\epsilon i} \times V_{\epsilon j}} \chi_{X_\epsilon \times Y_\epsilon}(x, y) \zeta_{\epsilon i}(x) \xi_{\epsilon j}(y) dx_1 ... dx_n dy_1 ... dy_n. \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

Defina a aplicação $\lambda_{ij\epsilon} : U_{\epsilon i} \times V_{\epsilon j} \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$\lambda_{ij\epsilon}(x, y) = \zeta_{\epsilon i}(x) \xi_{\epsilon j}(y), \text{ onde } 1 \leq i \leq r \text{ e } 1 \leq j \leq s.$$

Então, $\{\lambda_{ij\epsilon}\}$ é uma partição da unidade subordinada a $\{U_{\epsilon i} \times V_{\epsilon j}\}$, cobertura de $X_\epsilon \times Y_\epsilon$. Logo, de (3.1),(3.2), (3.5) e

$$\int_{X_\epsilon\times Y_\epsilon} \chi_{X_\epsilon\times Y_\epsilon}\pi_1^*\omega\wedge\pi_2^*\eta = \sum_{i,j=1}^{r+s}\int_{U_{\epsilon i}\times V_{\epsilon j}} \chi_{X_\epsilon\times Y_\epsilon}(x,y)\zeta_{\epsilon i}(x)\xi_{\epsilon j}(y)dx_1...dx_n dy_1...dy_n,$$

segue-se que

$$\int_{X_\epsilon\times Y_\epsilon}\chi_{X_\epsilon\times Y_\epsilon} = \int_{X_\epsilon}\chi_{X_\epsilon}\cdot\int_{Y_\epsilon}\chi_{Y_\epsilon} < \infty,$$

ou seja, $\chi_{X_\epsilon\times Y_\epsilon}$ é integrável em $X_\epsilon \times Y_\epsilon$.

De (1.) e (2.) temos que $(X_\epsilon \times Y_\epsilon)$ é uma pré-membrana. ∎

Proposição 3.18. *Sejam $X = cl[(X_\epsilon)]$ e $Y = cl[(Y_\epsilon)]$ membranas em $\overline{\mathbb{R}}^m$ e $\overline{\mathbb{R}}^n$, respectivamente. Se $(X_\epsilon^{'})$ e $(Y_\epsilon^{'})$ são pré-membranas, então*

$$(X_\epsilon^{'}) \sim (X_\epsilon) \quad e \quad (Y_\epsilon^{'}) \sim (Y_\epsilon) \;\Leftrightarrow\; (X_\epsilon^{'}\times Y_\epsilon^{'}) \sim (X_\epsilon \times Y_\epsilon).$$

Demonstração:

Da proposição 3.17, sendo (X_ϵ) e (Y_ϵ) pré-membranas, então $(X_\epsilon \times Y_\epsilon)$ é uma pré- membrana.

Suponha, inicialmente que $(X_\epsilon^{'}) \sim (X_\epsilon)$ e que $(Y_\epsilon^{'}) \sim (Y_\epsilon)$, então existem aplicações nulas $(\psi_\epsilon^1) \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ e $(\psi_\epsilon^2) \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ tais que as funções

$$\phi^1 : I\times\mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m \quad \text{e} \quad \phi^2 : I\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

definidas por:

$$\begin{aligned}\phi_\epsilon^1(x) &= x + \psi_\epsilon^1(x); &(3.6)\\ \phi_\epsilon^1(y) &= y + \psi_\epsilon^2(x), &(3.7)\end{aligned}$$

satisfazendo

$$\begin{aligned}\phi_\epsilon^1(X_\epsilon) &= X_\epsilon^{'} &(3.8)\\ \phi_\epsilon^1(Y_\epsilon) &= Y_\epsilon^{'}. &(3.9)\end{aligned}$$

Defina, agora, a aplicação $\phi : I\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+n}$ por

$$\phi(\epsilon,(x,y)) = (x,y) + \psi_\epsilon(x,y),$$

onde $\psi_\epsilon(x,y) = (\psi^1_\epsilon(x), \psi^2_\epsilon(y))$.

Afirmamos que:

1. $(\psi_\epsilon) \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^{m+n}, \mathbb{R}^{m+n})$.

   Prova da afirmação:

   Sendo $(\psi^1_\epsilon) \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ e $(\psi^2_\epsilon) \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, então para todo $K_1 \subset\subset \mathbb{R}^m$ e $K_1 \subset\subset \mathbb{R}^n$ existem constantes $C^1 > 0$, $C^2 > 0$ e δ_1, $\delta_2 \in I$, tal que para todo $p \in \mathbb{N}$ tem-se

   $$|\psi^1_\epsilon(x)| \leq C_1\epsilon^p \text{ para todo } x \in K_1 \text{ e para todo } \epsilon \in I_{\delta_1};$$

   $$|\psi^2_\epsilon(y)| \leq C_2\epsilon^p \text{ para todo } y \in K_2 \text{ e para todo } \epsilon \in I_{\delta_2}.$$

   Tome $C = \max\{C_1, C_2\}$ e $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Então, para todo $K = K_1 \times K_2 \subset\subset \mathbb{R}^{m+n}$ existe $C \in \mathbb{N}$, $\delta \in I$ tal que

   $$\|\psi_\epsilon(x,y)\| = \max\{|\psi^1_\epsilon(x)|, |\psi^2_\epsilon(y)|, x \in K_1, y \in K_2\} \leq C\epsilon^p, \ \forall\ \epsilon \in I_\delta.$$

   Logo, $(\varphi_\epsilon) \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^{m+n}, \mathbb{R}^{m+n})$

2. $\psi_\epsilon(X_\epsilon \times Y_\epsilon) = X^{'}_\epsilon \times Y^{'}_\epsilon$

   Prova da afirmação:

   (a) $X^{'}_\epsilon \times Y^{'}_\epsilon \subset \psi_\epsilon(X_\epsilon \times Y_\epsilon)$.

   Dado $(x^{'}_\epsilon, y^{'}_\epsilon) \in (X^{'}_\epsilon \times Y^{'}_\epsilon)$, existem $x_\epsilon \in X_\epsilon$ e $y_\epsilon \in Y_\epsilon$ tal que

   $$\psi_\epsilon(x_\epsilon) = x^{'}_\epsilon \quad \text{e} \quad \psi_\epsilon(y_\epsilon) = y^{'}_\epsilon.$$

   Então,

   $$\begin{aligned} \psi_\epsilon(x_\epsilon, y_\epsilon) &= (\psi^1_\epsilon(x_\epsilon), \psi^2_\epsilon(y_\epsilon)) \\ &= (x^{'}_\epsilon, y^{'}_\epsilon). \end{aligned}$$

   Donde,

   $$X^{'}_\epsilon \times Y^{'}_\epsilon \subset \psi_\epsilon(X_\epsilon \times Y_\epsilon).$$

(b) $\psi_\epsilon(X_\epsilon \times Y_\epsilon) \subset X_\epsilon^{'} \times Y_\epsilon^{'}$.

Dado $w_\epsilon \in \psi_\epsilon(X_\epsilon \times Y_\epsilon)$, existe $(x_\epsilon, y_\epsilon) \in X_\epsilon \times Y_\epsilon$ tal que

$$w_\epsilon = \psi_\epsilon(x_\epsilon, y_\epsilon) = (\psi_\epsilon^1(x_\epsilon), \psi_\epsilon^2(y_\epsilon))$$

De (3.8) e (3.9) temos que

$$\psi_\epsilon(X_\epsilon \times Y_\epsilon) \subset X_\epsilon^{'} \times Y_\epsilon^{'}.$$

Portanto, de (a.) e (b.) temos que

$$\psi_\epsilon(X_\epsilon \times Y_\epsilon) = X_\epsilon^{'} \times Y_\epsilon^{'}.$$

E de (1.) e (2.) obtemos $(X_\epsilon^{'} \times Y_\epsilon^{'}) \sim (X_\epsilon \times Y_\epsilon)$.

Reciprocamente, suponha agora que $(X_\epsilon^{'} \times Y_\epsilon^{'}) \sim (X_\epsilon \times Y_\epsilon)$, então existe uma família de funções nulas $(\psi_\epsilon) \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^{m+n}, \mathbb{R}^{m+n})$ e uma aplicação $\Phi : I \times \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^{m+n}$ tal que:

1. $\Phi(\epsilon, (x, y)) = (x, y) + \psi_\epsilon(x, y)$;
2. $\Phi_\epsilon(X_\epsilon \times Y_\epsilon) = X_\epsilon^{'} \times Y_\epsilon^{'}$.

1. Considere agora, para cada $\epsilon \in I$, as aplicações diferenciáveis de inclusão $i_{1\epsilon} : X_\epsilon \to X_\epsilon \times Y_\epsilon$ e projeção $\pi_{1\epsilon}^{'} : X_\epsilon^{'} \times Y_\epsilon^{'} \to X_\epsilon^{'}$.

$$\begin{array}{ccc} X_\epsilon \times Y_\epsilon & \xrightarrow{\Phi_\epsilon} & X_\epsilon^{'} \times Y_\epsilon^{'} \\ i_{1\epsilon} \Big\uparrow & & \Big\downarrow \pi_{1\epsilon}^{'} \\ X_\epsilon & \xrightarrow[\phi_\epsilon]{} & X_\epsilon^{'} \end{array}$$

Pelo lema fundadmental das membranas temos que a aplicação $\Phi_\epsilon : X_\epsilon \times Y_\epsilon \to X_\epsilon^{'} \times Y_\epsilon^{'}$ é um difeomorfismo, em particular Φ_ϵ é uma aplicação diferenciável. Então, a aplicação $\phi_\epsilon = \pi_{1\epsilon}^{'} \circ \Phi_\epsilon \circ i_{1\epsilon} : X_\epsilon \to X_\epsilon^{'}$ é uma aplicação diferenciável.

Por outro lado, consideremos as aplicações diferenciáveis de inclusão $i_{1\epsilon}^{'} : X_\epsilon^{'} \to X_\epsilon^{'} \times Y_\epsilon^{'}$ e projeção $\pi_{1\epsilon} : X_\epsilon \times Y_\epsilon \to X_\epsilon$. E sendo Φ_ϵ^{-1} :

$X_\epsilon' \times Y_\epsilon' \to X_\epsilon \times Y_\epsilon$ também uma aplicação diferenciável, então a aplicação $\phi_\epsilon^{-1} = \pi_{1\epsilon} \circ \Phi_\epsilon^{-1} \circ (i_{1\epsilon}')$ é uma aplicação diferenciável.

$$\begin{tikzcd}
X_\epsilon \times Y_\epsilon \arrow[d, "\pi_{1\epsilon}"'] & X_\epsilon' \times Y_\epsilon' \arrow[l, "\Phi_\epsilon^{-1}"'] \\
X_\epsilon & X_\epsilon' \arrow[l, "\phi_\epsilon^{-1}"] \arrow[u, "i_{1\epsilon}'"']
\end{tikzcd}$$

Portanto, a aplicação $\phi_\epsilon = \pi_\epsilon' \circ \phi_\epsilon \circ i_{1\epsilon} : X_\epsilon \to X_\epsilon'$ é um difeomorfismo.

2. É claro que $\phi_\epsilon(X_\epsilon) = X_\epsilon'$, pois π_1' e Φ_ϵ são aplicações sobrejetoras, enquanto que i_1 é uma aplicação injetiva.

De (1.) e (2.) concluímos que $(X_\epsilon') \sim (X_\epsilon)$. De modo análogo prova-se que $(Y_\epsilon') \sim (Y_\epsilon)$. ■

Proposição 3.19. *Sejam X e Y membranas em $\overline{\mathbb{R}}^m$ e $\overline{\mathbb{R}}^n$, respectivamente, então:*

1. *$X \times Y$ é uma membrana em $\overline{\mathbb{R}}^{m+n}$;*
2. *$\dim(X \times Y) = \dim X + \dim Y$.*

Demonstração:

Sejam (X_ϵ) e (Y_ϵ) pré-membranas, representantes de X e Y, respectivamente, então:

1. Sabemos que $(X_\epsilon \times Y_\epsilon)$ é uma pré-membrana. Portanto, podemos considerar a membrana $cl[(X_\epsilon \times Y_\epsilon)]$. Vamos provar que $X \times Y = cl[(X_\epsilon \times Y_\epsilon)]$:

   Sendo $X = cl[(X_\epsilon)] = \{cl[(x_\epsilon)] : x_\epsilon \in X_\epsilon, \epsilon \in I\} \subset \tilde{\mathbb{R}}_c^m$ e $Y = cl[(Y_\epsilon)] = \{cl[(y_\epsilon)] : y_\epsilon \in Y_\epsilon, \epsilon \in I\} \subset \tilde{\mathbb{R}}_c^n$, então:

$$X \times Y = \{cl[(x_\epsilon)] : x_\epsilon \in X_\epsilon, \epsilon \in I\} \times \{cl[(y_\epsilon)] : y_\epsilon \in Y_\epsilon, \epsilon \in I\}.$$

   Vamos definir a aplicação $\Theta : X \times Y \to \{cl[(x_\epsilon, y_\epsilon)] : x_\epsilon \in X_\epsilon, y_\epsilon \in Y_\epsilon, \epsilon \in I\}$ por

$$\Theta(cl[(x_\epsilon)],[(y_\epsilon)]) = cl[(x_\epsilon, y_\epsilon)].$$

Observe que a aplicação Θ está bem definida, pois:
Dados $(cl[(x_\epsilon)], cl[(y_\epsilon)]), (cl[(x'_\epsilon)], cl[(y'_\epsilon)]) \in X \times Y$ tal que

$$(cl[(x_\epsilon)], cl[(y_\epsilon)]) = (cl[(x'_\epsilon)], cl[(y'_\epsilon)]).$$

Então,

$$cl[(x_\epsilon)] = cl[(x'_\epsilon)] \quad \text{e} \quad cl[(y_\epsilon)] = cl[(y'_\epsilon)].$$

Logo,

$$(X'_\epsilon) \sim (X_\epsilon) \quad \text{e} \quad (Y'_\epsilon) \sim (Y_\epsilon).$$

Pela proposição 3.18 temos que $(X_\epsilon \times Y_\epsilon) \sim (X'_\epsilon \times Y'_\epsilon)$. Então, $cl[(x_\epsilon, y_\epsilon)] = cl[(x'_\epsilon, y'_\epsilon)]$, ou seja, $\Theta(cl[(x_\epsilon)], cl[(y_\epsilon)]) = \Theta(cl[(x'_\epsilon)], cl[(y'_\epsilon)])$.
Observe também que:

(a) Θ é sobrejetora;

(b) Dados $(cl[(x_\epsilon)], cl[(y_\epsilon)]), (cl[(x'_\epsilon)], cl[(y'_\epsilon)]) \in X \times Y$, tal que

$$\Theta(cl[(x_\epsilon)], cl[(y_\epsilon)]) = \Theta(cl[(x'_\epsilon)], cl[(y'_\epsilon)]),$$

então

$$cl[(x_\epsilon, y_\epsilon)] = cl[(x'_\epsilon, y'_\epsilon)].$$

Logo,

$$(x_\epsilon, y_\epsilon) \sim (x'_\epsilon, y'_\epsilon),$$

E pela proposição 3.18 temos que

$$(X'_\epsilon) \sim (X_\epsilon) \quad \text{e} \quad (Y'_\epsilon) \sim (Y_\epsilon).$$

Ou seja,

$$cl[(X'_\epsilon)] = cl[(X_\epsilon)] \quad \text{e} \quad cl[(Y'_\epsilon)] = cl[(Y_\epsilon)].$$

E então,

$$(cl[(x_\epsilon)], cl[(y_\epsilon)]) = (cl[(x_\epsilon^{'})], cl[(y_\epsilon^{'})]).$$

Portanto, a aplicação Θ é injetiva.

De (a.) e (b.) concluímos que ela é bijetiva e então

$$X \times Y = \{cl[(x_\epsilon, y_\epsilon)] : x_\epsilon \in X_\epsilon, y_\epsilon \in Y_\epsilon, \epsilon \in I\} = cl[(X_\epsilon \times Y_\epsilon)]$$

Portanto, $X \times Y$ é uma membrana.

2. Suponha que $\dim X = r$ e que $\dim Y = s$, ou seja, $\dim X_\epsilon = r$ e $\dim Y_\epsilon = s$, para todo $\epsilon \in I$. Então,

$$\dim(X_\epsilon \times Y_\epsilon) = r + s \text{ para todo } \epsilon \in I.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\dim(X \times Y) &= r + s \\ &= \dim X + \dim Y. \blacksquare\end{aligned}$$

Corolário 3.20. *Sejam $X_1,...,X_r$ membranas em $\overline{\mathbb{R}}^{m_1},...,\overline{\mathbb{R}}^{m_r}$ respectivamente. Então,*

1. $X_1 \times ... \times X_r$ *é uma membrana em* $\overline{\mathbb{R}}^{m_1+...+m_r}$;
2. $\dim(X_1 \times ... \times X_r) = \sum_{i=1}^{r} \dim X_i$.

Demostração:

Sabendo-se que o produto de duas membranas é uma membrana, o resultado será obtido por indução. $\blacksquare$

Exemplo 3.21. *Sejam $M^{m_i} = cl[(M_\epsilon^{m_i})]$ membranas m_i-dimensionais em $\overline{\mathbb{R}}^{m_i+1}$, onde $1 \leq i \leq r$ e cujos representantes, como no exemplo 3.16, são iguais a*

$$M_\epsilon^{m_i} = \{(x_1, ..., x_{m_i+1}) \in \mathbb{R}^{m_i+1} : x_{m_i+1} \geq 0\} \cap S_{r_\epsilon}^{m_i}(p_\epsilon).$$

Então, pelo corolário3.20 $M^{m_1} \times ... \times M^{m_r}$ é uma membrana em $\overline{\mathbb{R}}^{r+\sum_{i=1}^{r} m_i}$ com dimensão $\sum_{i=1}^{r} m_i$.

Definição 3.22. *Sejam X e Y membranas e $f : X \longrightarrow Y$ uma aplicação diferenciável em $p \in X$. A derivada de f no ponto p, $df_p : T_pX \longrightarrow T_{f(p)}Y$ é definida por*

$$df_p(cl[(v_\epsilon)_\epsilon]) = cl[((df_\epsilon)_{p_\epsilon} v_\epsilon)_\epsilon].$$

Teorema 3.23 (Regra da cadeia). *Sejam X, Y e Z membranas. Se $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ são aplicações diferenciáveis em $p \in X$ e $f(p) \in Y$, respectivamente, então:*

1. *a aplicaçõa $g \circ f : X \to Z$ é diferenciável em p;*
2. *$d(g \circ f)_p = dg_{f(p)} \circ df_p$.*

Demonstração:

1. Sendo g uma aplicação diferenciável em $f(p) = cl[(f_\epsilon(p_\epsilon))]$, onde $f = cl[(f_\epsilon)]$ e $p = cl[(p_\epsilon)]$, então a aplicação $g_\epsilon : Y_\epsilon \to Z_\epsilon$ é diferenciável em $f_\epsilon(p_\epsilon) \in Z_\epsilon$ para cada $\epsilon \in I$. Temos também que a aplicação f é diferenciável em $p \in X$, então a aplicação $f_\epsilon : X_\epsilon \to Y_\epsilon$ é diferenciável em $p_\epsilon \in X$ para cada $\epsilon \in I$.

   Portano, $g_\epsilon \circ f_\epsilon : X_\epsilon \to Z_\epsilon$ é diferenciável em p_ϵ para cada $\epsilon \in I$. Concluímos, então que a aplicação $g \circ f : X \to Z$ é diferenciável em $p \in X$.

2. Sendo $g_\epsilon \circ f_\epsilon : X_\epsilon \to Z_\epsilon$ é diferenciável em p_ϵ para cada $\epsilon \in I$.

   Então,

   $$d(g_\epsilon \circ f_\epsilon)_{p_\epsilon} = (dg_\epsilon)_{f_\epsilon(p_\epsilon)} \circ (df_\epsilon)_{p_\epsilon} \quad \text{para todo } \epsilon \in I.$$

   Logo, dado $v = cl[(v_\epsilon)] \in T_pX$, temos que:

   $$\begin{aligned} (g \circ f)_p v &= cl[(d(g_\epsilon \circ f_\epsilon)_{p_\epsilon} v_\epsilon)_\epsilon] \\ &= cl[((dg_\epsilon)_{f_\epsilon(p_\epsilon)}((df_\epsilon)_{p_\epsilon} v_\epsilon))_\epsilon] \\ &= dg_{f(p)}((df)_p v) \\ &= dg_{f(p)} \circ df_p v. \end{aligned}$$

   Portanto,

   $$d(g \circ f)_p = dg_{f(p)} \circ df_p. \blacksquare$$

3.3 Aplicação de Gauss

Inicialmente será apresentado um resultado que nos possibilitará a formulação do conceito de aplicação de Gauss neste ambiente.

Proposição 3.24. *Seja* $X = cl[(X_\epsilon)]$ *uma hiper-membrana em* $\overline{\mathbb{R}}^{n+1}$ *com* $\dim X = n$. *Então,*

1. $(\epsilon \mapsto N_\epsilon(p_\epsilon))$ *é uniformemente limitado para todo* ϵ *pequeno, onde*

$$N_\epsilon : X_\epsilon \longrightarrow S_1^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

é a aplicação de Gauss.

2. *se* $(X_\epsilon^{'}) \sim (X_\epsilon)$, *então*

$$cl[\epsilon \mapsto N_\epsilon^{'}(\phi_\epsilon(p_\epsilon))] = cl[\epsilon \mapsto N_\epsilon(p_\epsilon)],$$

onde ϕ_ϵ *é a aplicação que surge na definição de membrana.*

Demonstração:

1. Sendo $N_\epsilon : X_\epsilon \longrightarrow S_1^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ a aplicação de Gauss, então

$$|N_\epsilon(p_\epsilon)| = 1 \text{ para todo } \epsilon \in I.$$

2. Suponha que $(X_\epsilon^{'}) \sim (X_\epsilon)$, então existe uma aplicação nula $(\psi_\epsilon) \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}^{n+1})$ tal que a função $\phi : I \times \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ definida por

$$\phi(\epsilon, x) = x + \psi_\epsilon(x),$$

satisfaz

$$\phi(\epsilon, X_\epsilon) = X_\epsilon^{'} \quad \forall\ \epsilon \in I.$$

E pelo lema fundamental das membranas temos que $\phi_\epsilon : X_\epsilon \longrightarrow X_\epsilon^{'}$ é um difeomorfismo para todo $\epsilon \in I$, em particular é uma aplicação bijetora. Considere a aplicação $N_\epsilon^{'} : X_\epsilon^{'} \to S_1^n$ definida por

$$N_\epsilon^{'} := N_\epsilon \circ \phi_\epsilon^{-1},$$

onde $N_\epsilon : X_\epsilon \longrightarrow S_1^n$ é uma aplicação de Gauss.

Agora, dado $p_\epsilon^{'} \in X_\epsilon^{'}$, temos que

$$\begin{aligned} \left|N_\epsilon^{'}(p_\epsilon^{'})\right| &= \left|N_\epsilon(\phi_\epsilon^{-1}(p_\epsilon^{'})\right| \\ &= \left|N_\epsilon(\phi_\epsilon^{-1}(\phi_\epsilon(p_\epsilon))\right| \\ &= \left|N_\epsilon(p_\epsilon)\right| = 1. \end{aligned}$$

Então, $N_\epsilon^{'}$ também é uma aplicação de Gauss. Portanto,

$$cl[\epsilon \mapsto N_\epsilon^{'}(\phi_\epsilon(p_\epsilon)] = cl[\epsilon \mapsto N_\epsilon(p_\epsilon)]. \blacksquare$$

Podemos agora definir a aplicação de Gauss no contexto das membranas.

Definição 3.25. *Seja* $X = cl[(X_\epsilon)]$ *uma hiper-membrana em* $\overline{\mathbb{R}}^{n+1}$*, onde* $\dim X_\epsilon = n$. *A aplicação de Gauss* $N : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}^{n+1}$ *é definida por*

$$N(cl[(p_\epsilon)]) = cl[(N_\epsilon(p_\epsilon))],$$

onde $N_\epsilon : X_\epsilon \longrightarrow S_1^n$ *é a aplicação de Gauss para todo* $\epsilon \in I$.

Note que: Dado $p \in X$, $p = (p_1, ..., p_n)$, sabemos que $|p_i| \in \overline{\mathbb{R}}$ (veja [AFJ1]) com $|p_i|(\epsilon) = |p_i(\epsilon)|$ para todo $\epsilon \in I$. Além disso,

$$\begin{aligned} [N(p)]_2 &= [\sum_{i=1}^{n} \left|N^i(p)\right|^2]^{1/2} \\ &= \bar{1} \in \bar{\mathbb{R}}, \end{aligned}$$

com $|N^i(p)|(\epsilon) = |N_\epsilon^i(p_\epsilon)|$. Portanto,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \left|N^i(p)\right|^2(\epsilon) &= \sum_{i=1}^{n} \left|N_\epsilon^i(p_\epsilon)\right|^2 \\ &= 1 \ \ \forall \epsilon \in I. \end{aligned}$$

3.4 Curvaturas média escalar e de Gauss-Kronecker

Nesta seção apresentaremos os conceitos de curvaturas média e de Gauss-Kronecker em membranas.

Proposição 3.26. *Seja $X = cl[(X_\epsilon)]$ uma membrana em $\overline{\mathbb{R}}^n$, então:*

1. *$(\epsilon \mapsto H_\epsilon(p_\epsilon))$ é um elemento moderado, onde H_ϵ é a curvatura média de X_ϵ;*

2. *$(\epsilon \mapsto K_\epsilon(p_\epsilon))$ é um elemento moderado, onde K_ϵ é a curvatura de Gauss-Kronecker de X_ϵ;*

3. *Se $(X_\epsilon^{'}) \sim (X_\epsilon)$, tem-se que:*

   (a) $cl[\epsilon \mapsto H_\epsilon(p_\epsilon)] = cl[\epsilon \mapsto H_\epsilon^{'}(p_\epsilon^{'})]$;

   (b) $cl[\epsilon \mapsto K_\epsilon(p_\epsilon)] = cl[\epsilon \mapsto K_\epsilon^{'}(p_\epsilon^{'})]$.

Demonstração:

Sendo $(\epsilon \mapsto N_\epsilon(p_\epsilon))$ um elemento moderado, onde $N_\epsilon : X_\epsilon \longrightarrow S_1^n$ é a aplicação de Gauss. Então, $((dN_\epsilon)_{p_\epsilon})$ é moderada. Daí temos que

$$(\epsilon \mapsto tr(dN_\epsilon)_\epsilon) \qquad \text{e} \qquad (\epsilon \mapsto \det(dN_\epsilon)_\epsilon)$$

também são famílias de funções moderadas. E isto prova (1) e (2)

Agora, para provar (3) vamos aplicar, de imediato, a hipótese que $(X_\epsilon^{'}) \sim (X_\epsilon)$. Então, existe uma aplicação $\phi : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida por $\phi(\epsilon, x) = x + \psi_\epsilon(x)$, onde $(\psi_\epsilon) \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Tem-se também que $\phi_\epsilon(X_\epsilon) = X_\epsilon^{'}$ para cada $\epsilon \in I$. Além disso, pelo lema das membranas sabe-se que $\phi_\epsilon : X_\epsilon \to X_\epsilon^{'}$ é um difeomorfismo para cada $\epsilon \in I$.

Seja $N_\epsilon^{'} : X_\epsilon^{'} \to S_1^n$ a aplicação de Gauss. Defina a aplicação $N_\epsilon : X_\epsilon \to S_1^n$ por $N_\epsilon := N_\epsilon^{'} \circ \phi_\epsilon$. Então, $(dN_\epsilon)_{p_\epsilon} := (dN_\epsilon^{'})_{\phi_\epsilon(p_\epsilon)} \circ (d\phi_\epsilon)_{p_\epsilon}$.

Como $(d\phi_\epsilon)_{p_\epsilon} = I_n + (d\psi_\epsilon)$, então dado $v \in T_{p_\epsilon}X_\epsilon$ temos que

$$\begin{aligned}
(dN_\epsilon)_{p_\epsilon}v &= (dN_\epsilon^{'})_{\phi_\epsilon(p_\epsilon)}((d\phi_\epsilon)_{p_\epsilon}v) \\
&= (dN_\epsilon^{'})_{\phi_\epsilon(p_\epsilon)}(v + (d\psi_\epsilon)_{p_\epsilon}v) \\
&= (dN_\epsilon^{'})_{\phi_\epsilon(p_\epsilon)}v + (dN_\epsilon^{'})_{\phi_\epsilon(p_\epsilon)}((d\psi_\epsilon)_{p_\epsilon}v).
\end{aligned}$$

Então,

$$(dN_\epsilon)_{p_\epsilon} = (dN'_\epsilon)_{\phi_\epsilon(p_\epsilon)} + (dN'_\epsilon)_{\phi_\epsilon(p_\epsilon)}((d\psi_\epsilon)_{p_\epsilon}).$$

Agora, sendo $((dN'_\epsilon)_{\phi_\epsilon(p_\epsilon)})$ e $((d\psi_\epsilon)_{p_\epsilon})$ famílias de funções moderadas e nulas, respectivamente, então $((dN'_\epsilon)_{\phi_\epsilon(p_\epsilon)} \circ (d\psi_\epsilon)_{p_\epsilon}$ é uma família de funções nulas.

Dado $\epsilon \in I$, seja $\{v_1, ..., v_n\}$ uma base para $T_{p_\epsilon}X_\epsilon$.Então, para cada v_i da base e de (4.11) temos que

$$\begin{aligned}
(dN_\epsilon)_{p_\epsilon} v_i &= (dN'_\epsilon)_{\phi_\epsilon(p_\epsilon)} v_i + (dN'_\epsilon)_{\phi_\epsilon(p_\epsilon)}((d\psi_\epsilon)_{p_\epsilon} v_i) \\
k_{\epsilon i}(p_\epsilon) v_i &= k'_{\epsilon i}(\phi_\epsilon(p_\epsilon)) v_i + (dN'_\epsilon)_{\phi_\epsilon(p_\epsilon)}((d\psi_\epsilon)_{p_\epsilon} v_i).
\end{aligned}$$

Então, obtemos a curvatura de Gauss-Kronecker em p_ϵ,

$$\begin{aligned}
K_\epsilon(p_\epsilon) &= k_{\epsilon 1}(p_\epsilon)...k_{\epsilon n}(p_\epsilon) \\
&= k'_{\epsilon 1}(p_\epsilon)...k'_{\epsilon n}(p_\epsilon) + \zeta_\epsilon \\
&= K_\epsilon(\phi_\epsilon(p_\epsilon)) + \zeta_\epsilon,
\end{aligned}$$

onde $(\zeta_\epsilon) \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.
Portanto,

$$cl[(K_\epsilon(p_\epsilon))] = cl[(K'_\epsilon(\phi_\epsilon(p_\epsilon)))].$$

Ainda por (4.11) temos que

$$\begin{aligned}
H_\epsilon(p_\epsilon) &= tr(dN_\epsilon)_{p_\epsilon} \\
&= tr(dN'_\epsilon)_{\phi_\epsilon(p_\epsilon)} + trd(N'_\epsilon \circ \psi_\epsilon))_{p_\epsilon} \\
&= H'_\epsilon(\phi_\epsilon(p_\epsilon)) + trd(N'_\epsilon \circ \psi_\epsilon)_{p_\epsilon},
\end{aligned}$$

onde obviamente $(trd(N'_\epsilon \circ \psi_\epsilon)_{p_\epsilon}) \in \mathcal{N}$.
Portanto,

$$cl[\epsilon \mapsto H_\epsilon(p_\epsilon)] = cl[\epsilon \mapsto H'_\epsilon(\phi_\epsilon(p_\epsilon))]. \blacksquare$$

Podemos agora definir, baseado na proposição 3.26, as curvaturas média e de Gauss-Kronecker de uma membrana.

Definição 3.27. *Seja $X = cl[(X_\epsilon)]$ uma membrana, dado $p \in X$ define-se as curvaturas, média $H : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ e Gauss-Kronecker $K : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, em p por*

1. $H(p) = cl[\epsilon \mapsto H_\epsilon(p_\epsilon)]$;

2. $K(p) = cl[\epsilon \mapsto K_\epsilon(p_\epsilon)]$.

Aqui, o análogo clássico do conceito de superfície mínima ocorre da seguinte forma:

Definição 3.28. *Uma membrana $X = cl[(X_\epsilon)]$ é dita mínima em $p = cl[(p_\epsilon)] \in X$ se $H(p) = 0$, isto é, se $(H_\epsilon(p_\epsilon)) \in \mathcal{N}$.*

Exemplo 3.29. *Dado $b = cl[(b_\epsilon)] \in M = cl[(M_\epsilon)]$, onde M é a membrana dada no exemplo 3.16, vamos calcular as curvaturas de Gauss-Kronecker e escalar média de M. Observe, inicialmente, que*

$$K_\epsilon(b_\epsilon) = e^{-n/\epsilon^2} \quad e \quad H_\epsilon(b_\epsilon) = e^{-1/\epsilon^2},$$

pois o raio da esfera $S^n_{r_\epsilon}$ é igual a e^{-1/ϵ^2}.

Portanto, as curvaturas de Gauss-Kronecker e escalar média de M são iguais a

$$K(b) = cl[(e^{-n/\epsilon^2})] \quad e \quad H(b) = cl[(e^{-1/\epsilon^2})],$$

respectivamente.

Como (e^{-1/ϵ^2}) pertence a $\mathcal{N}$, então $H = 0$. Concluímos, então, que M é uma membrana mínima. Observe também que $K = 0$.

3.5 Integração em membranas

Em [AFJ2] Aragona, Fernandes e Juriaans, estenderam a definição de integral dada em [AFJ1] para integral sobre membrana. Nesta seção apresentaremos o conceito de integral sobre membrana neste contexto e baseado na defição dada em [AFJ2]. Este conceito se faz necessário se quisermos uma versão do teorema de Gauss-Bonnet para membranas.

Inicialmente, daremos o conceito de orientação em membranas.

Definição 3.30. *Uma membrana $M = cl[(M_\epsilon)]$ m-dimensional de $\overline{\mathbb{R}}^n$ é dita orientável se cada subvariedade M_ϵ for orientada.*

A seguinte proposição nos garante que o conceito de orientação sobre membranas está bem definido.

Proposição 3.31. *Seja $M = cl[(M_\epsilon)]$ uma membrana m-dimensional de $\overline{\mathbb{R}}^n$ e orientada. A orientação de M independe de seu representante.*

Demonstração:

Sendo $(M'_\epsilon) \sim (M_\epsilon)$, pelo lema fundamental para cada $\epsilon \in I$ existe um difeomorfismo $\phi_\epsilon : M'_\epsilon \longrightarrow M_\epsilon$. Como a orientação é preservada pelo difeomorfismo ϕ_ϵ, pois sendo

$$d\phi_\epsilon = I_n + d\psi_\epsilon,$$

então $J(\phi_\epsilon) = detd\phi_\epsilon > 0$.
Segue-se o resultado. ■

Sejam $f = cl[(f_\epsilon)] \in \mathcal{G}(\Omega)$ e $M = cl[(M_\epsilon)]$ uma membrana m-dimensional de $\overline{\mathbb{R}}^n$ orientada. Dado um atlas $\{(U_{\alpha\epsilon}, \varphi_{\alpha\epsilon})\}_{\alpha\in\Lambda}$ para cada subvariedade diferenciável M_ϵ. Como M_ϵ é compacta existe uma partição diferenciável da unidade $\{\xi_{i\epsilon}\}_{1\leq i\leq s}$ subordinada à cobertura $\{U_{\alpha\epsilon}\}_{\alpha\in\Lambda}$. Então,

$$\int_{M_\epsilon} f_\epsilon = \sum_{i=1}^{s} \int_{U_{\epsilon i}} f_\epsilon \xi_{i\epsilon} dx_{\epsilon 1} \cdots dx_{\epsilon m}.$$

Agora, sendo $(f_\epsilon) \in \mathcal{E}_M(\Omega)$ e $0 \leq \xi_{i\epsilon} \leq 1$ para todo $i \in \{1, ..., s\}$, então $(f_\epsilon \xi_{i\epsilon}) \in \mathcal{E}_M(\Omega)$, ou seja, $f = cl[(f_\epsilon \xi_\epsilon)] \in \mathcal{G}(\Omega)$. A definição de integral em membranas dada em [AFJ2], que se encontra no capítulo 1, nos garante que o conceito de integral sobre a membrana $M = cl[(M_\epsilon)]$ neste contexto, dado por

$$\begin{aligned}
\int_M f &= cl[\epsilon \mapsto \sum_{i=1}^{s} \int_{U_{\epsilon i}} f_\epsilon \xi_{i\epsilon} dx_{\epsilon 1} \cdots dx_{\epsilon m}] \\
&= cl[\epsilon \mapsto \int_{M_\epsilon} f_\epsilon],
\end{aligned}$$

está bem definida.

Estamos agora em condições de definir volume de uma membrana M.

Definição 3.32. *Sejam $g = cl[(g_\epsilon)] \in \mathcal{G}(\Omega)$ e $M = cl[(M_\epsilon)]$ uma hipermembrana n-dimensional de $\overline{\mathbb{R}}^{n+1}$ orientada, onde cada (M_ϵ, g_ϵ) é uma subvariedade Riemanniana. O volume de M é definido por*

$$V(M) := cl[\epsilon \mapsto V(M_\epsilon)],$$

onde

$$V(M_\epsilon) = \int_{M_\epsilon} \sqrt{\det(g_{ij\epsilon})}\xi_{i\epsilon} dx_{1\epsilon}...dx_{n\epsilon}.$$

Agora iremos apresentar a definição de curvatura total para membranas.

Definição 3.33. *Sejam $g = cl[(g_{ij\epsilon})] \in \mathcal{G}(\Omega)$ e $M = cl[(M_\epsilon)]$ uma hipermembrana em $\overline{\mathbb{R}}^{n+1}$ orientada, onde cada (M_ϵ, g_ϵ) é uma subvariedade Riemanniana com $dim M_\epsilon = n$. Seja $K = cl[(K_\epsilon)]$, onde cada K_ϵ é a curvatura gaussiana de M_ϵ. O número generalizado*

$$\int_M K = cl[\epsilon \mapsto \int_{M_\epsilon} K_\epsilon dV_\epsilon].$$

é denominado a curvatura total de M.

Proposição 3.34. *Sejam $g = cl[(g_{ij\epsilon})] \in \mathcal{G}(\Omega)$ e $M = cl[(M_\epsilon)]$ uma hipermembrana n-dimensional em $\overline{\mathbb{R}}^{n+1}$ orientada, onde cada (M_ϵ, g_ϵ) é uma subvariedade Riemanniana. Se a curvatura Gauss-Kronecker de M é uma constante $K \in \overline{\mathbb{R}}$, então*

$$\int_M K = KV(M),$$

onde $V(M)$ é o volume de M.

Demonstração:

Temos dois casos a serem considerados:

1. Se $K = 0$, então existe um representante $(K_\epsilon) \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$. Sendo cada $M_\epsilon \subset \mathbb{R}^n$ compacto, então para todo $p \in \mathbb{N}$ existe $C_1 > 0$ e existe $\eta_1 \in I$ tal que

   para todo $x_\epsilon \in M_\epsilon$ tem-se que $|K_\epsilon(x_\epsilon)| \leq C_1 \epsilon^p$ para todo $\epsilon \in I_{\eta_1}$.

   Agora,

$$\begin{aligned} \left| \int_{M_\epsilon} K_\epsilon(x_\epsilon) dV_\epsilon \right| &\leq \int_{M_\epsilon} |K_\epsilon(x_\epsilon)|\, dV_\epsilon \\ &\leq C_1 (\int_{M_\epsilon} dV_\epsilon) \epsilon^p \\ &= C_1 \epsilon^p V(M_\epsilon).\ \forall \epsilon \in I_{\eta_1}. \qquad (3.10) \end{aligned}$$

   Como $(\epsilon \mapsto V(M_\epsilon))$ é um elemento moderado, dado $C_2 > 0$, existem $a \in \mathbb{R}$ e $\eta_2 \in I$ tal que

$$V(M_\epsilon) \leq C_2\epsilon^a \quad \forall\, \epsilon \in I_{\eta_2}.$$

Então, utilizando-se a desigualdade (3.10) obtemos

$$\left| \int_{M_\epsilon} K_\epsilon(x_\epsilon) dV_\epsilon \right| \leq C\epsilon^q, \ \forall \epsilon \in I_\eta,$$

onde $q = p + a$ e $\eta = \min\{\eta_1, \eta_2\}$, $C = C_1C_2$.
Portanto,

$$(\epsilon \mapsto \int_{M_\epsilon} K_\epsilon(x_\epsilon) dV_\epsilon) \in \mathcal{N}.$$

E então

$$\begin{aligned} \int_M K &= cl[\epsilon \mapsto \int_{M_\epsilon} K_\epsilon(x_\epsilon) dV_\epsilon] \\ &= 0. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Temos também que

$$(\epsilon \mapsto V(M_\epsilon) K_\epsilon(x_\epsilon)) \in \mathcal{N}.$$

Dai,

$$\begin{aligned} 0 &= cl[(V(M_\epsilon)(K_\epsilon(x_\epsilon)] \\ &= cl[(V(M_\epsilon)] \cdot cl[(K_\epsilon(x_\epsilon))] \\ &= V(M)K. \end{aligned} \tag{3.12}$$

De (3.11) e (3.12), obtemos

$$\int_M K = KV(M).$$

2. Se $K \neq 0$, então existe um representante (K_ϵ), tal que K_ϵ é uma função constante para todo $\epsilon \in I$. Então,

$$
\begin{aligned}
\int_M K &= cl[\epsilon \mapsto \int_{M_\epsilon} K_\epsilon(x_\epsilon)dV_\epsilon] \\
&= cl[\epsilon \mapsto K_\epsilon \int_{M_\epsilon} dV_\epsilon] \\
&= cl[\epsilon \mapsto K_\epsilon V(M_\epsilon)] \\
&= cl[(K_\epsilon)] \cdot cl[(V(M_\epsilon)] \\
&= KV(M) \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Observamos que o caso onde K é função diferenciável e M é apenas uma superfície, o teorema 3.34 pode ser encontrado em [Ca2].

3.6 Uma versão do teorema de Gauss-Bonnet para membranas e aplicações

Nesta seção apresentaremos a versão do teorema de Gauss-Bonnet para membranas e algumas aplicações. Lembramos que este é um dos mais importantes teoremas da geometria diferencial. Sua demonstração no caso de hiper-superfície pode ser encontrada [Al], [Fe] e [Ch]. Podemos encontrar várias aplicações em [Ca2] no caso de superfície.

3.6.1 A característica de Euler-Poincaré

A seguinte proposição nos possibilitará dar a definição de característica de Euler-Poincaré para membranas.

Proposição 3.35. *Sejam $g = cl[(g_{ij\epsilon})] \in \mathcal{G}(\Omega)$ e $M = cl[(M_\epsilon)]$ uma hiper-membrana n-dimensional em $\overline{\mathbb{R}}^{n+1}$ orientada, onde cada (M_ϵ, g_ϵ) é uma sub-variedade Riemanniana. Então*

1. *$(\epsilon \mapsto \chi(M_\epsilon))$ é um elemento moderado, onde χ é a característica de Euler-Poincaré.*

2. *se a pré-membrana $(M_\epsilon^{'})$ é um outro representante de M, então*

$$cl[\epsilon \mapsto \chi(M_\epsilon)] = cl[\epsilon \mapsto \chi(M_\epsilon^{'})].$$

Demonstração:

1. Pelo teorema de Gauss-Bonnet (veja [Fe], [Al],[Ch]) temos que

$$\chi(M_\epsilon) = \frac{\omega_\epsilon}{2}\int_{M_\epsilon} K_\epsilon dV_\epsilon, \quad \forall\epsilon \in I,$$

onde ω_ϵ é o volume da n-esfera unitária.

O teorema 3.26 afirma que $(\epsilon \mapsto K_\epsilon(p_\epsilon))$ é moderado, então dado $C_1 > 0$ existem $a \in \mathbb{N}$, $\eta_1 \in I$ tal que

$$|K_\epsilon(p_\epsilon)| < C_1\epsilon^{-a}, \forall\epsilon \in I_{\eta_1}.$$

Então,

$$\begin{aligned} |\chi(M_\epsilon)] &= \frac{\omega_\epsilon}{2}\left|\int_{M_\epsilon} K_\epsilon(p_\epsilon)dV_\epsilon\right| \\ &\leq \frac{\omega_\epsilon}{2}\int_{M_\epsilon} |K_\epsilon(p_\epsilon)|\, dV_\epsilon \\ &\leq \frac{\omega_\epsilon}{2}C_1\epsilon^{-a}\int_{M_\epsilon} dV_\epsilon \\ &= \frac{\omega_\epsilon}{2}C_1V(M_\epsilon)\epsilon^{-a}, \quad \forall\epsilon \in I_{\eta_2}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Sendo $(\epsilon \mapsto V(M_\epsilon))$ um elemento moderado, então dado $C_2 > 0$ existem $b \in \mathbb{R}$, $\eta_2 \in I$ tal que

$$|V_\epsilon(M_\epsilon)| \leq C_2\epsilon^{-b}, \quad \forall\epsilon \in I_{\eta_2} \tag{3.14}$$

Seja $\eta = \min\{\eta_1, \eta_2\}$, $C = \frac{\omega_\epsilon}{2}C_1C_2$ e $d = a + b$. Então, de (4.12) e (4.13) obtemos

$$\chi(M_\epsilon) \leq C\epsilon^{-d}, \quad \forall\epsilon \in I_\eta.$$

Portanto, o elemento $(\epsilon \mapsto \chi(M_\epsilon))$ é moderado.

2. Suponha que $(M_\epsilon^{'})$ é um outro representante de M. Então, existe uma aplicação nula $(\psi_\epsilon) \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ tal que a função $\phi : I \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definida por

$$\phi_\epsilon(x) = x + \psi_\epsilon(x),$$

satisfaz

$$\phi(M_\epsilon) = M'_\epsilon \quad \forall \epsilon \in I.$$

E pelo lema fundamental das membranas temos que ϕ_ϵ é um difeomorfismo para todo $\epsilon \in I$. Então,

$$\begin{aligned} \chi(M'_\epsilon) &= \chi(\phi_\epsilon(M_\epsilon)) \\ &= \chi(M_\epsilon) \end{aligned} \tag{3.15}$$

Portanto,

$$cl[(\chi(M_\epsilon))] = cl[(\chi(M'_\epsilon))].$$

Ou seja, $\chi(M)$ não depende do representante. ■

Definição 3.36. *Sejam $g = cl[(g_{ij\epsilon})] \in \mathcal{G}(\Omega)$ e $M = cl[(M_\epsilon)]$ uma hiper-membrana n-dimensional em $\overline{\mathbb{R}}^{n+1}$ orientada, onde cada (M_ϵ, g_ϵ) é uma subvariedade Riemanniana. A característica de Euler-Poincaré para a membrana M é um número generalizado definido por*

$$\chi(M) := cl[\epsilon \mapsto \chi(M_\epsilon)].$$

Proposição 3.37. *Sejam $g = cl[(g_{ij\epsilon})], h = cl[(h_{ij\epsilon})] \in \mathcal{G}(\Omega)$, $M = cl[(M_\epsilon)]$ e $N = [(N_\epsilon)]$ hiper-membranas em $\overline{\mathbb{R}}^{n+1}$ com dimensão n par e orientadas. Então, a característica de Euler-Poincaré do produto $M \times N$ é*

$$\chi(M \times N) = \chi(M)\chi(N).$$

Demonstração:

Sendo $(\epsilon \mapsto \chi(M_\epsilon))$ e $(\epsilon \mapsto \chi(N_\epsilon))$ elementos moderados, então

$$(\epsilon \mapsto \chi(M_\epsilon \times N_\epsilon))$$

também é um elemento moderado.
Como

$$\chi(M_\epsilon \times N_\epsilon) = \chi(M_\epsilon)\chi(N_\epsilon), \quad \forall \epsilon \in I,$$

então

$$\begin{aligned}\chi(M \times N) &= [\epsilon \mapsto \chi(M_\epsilon \times N_\epsilon)] \\ &= [\epsilon \mapsto \chi(M_\epsilon)\chi(N_\epsilon)] \\ &= [\epsilon \mapsto \chi(M_\epsilon)][\epsilon \mapsto \chi(N_\epsilon)] \\ &= \chi(M)\chi(N). \ \blacksquare\end{aligned}$$

Corolário 3.38. *Sejam $g^1 = cl[(g^1_{ij\epsilon})], ..., g^n = cl[(g^n_{ij\epsilon})] \in \mathcal{G}(\Omega)$, $M_1, ..., M_n$ hiper-membranas em $\overline{\mathbb{R}}^{m+1}$ com dimensão m e orientadas. Então, a característica de Euler-Poincaré do produto $\prod_{i=1}^n M_i$ é*

$$\chi(\textstyle\prod_{i=1}^n M_i) = \prod_{i=1}^n \chi(M_i).$$

3.6.2 O teorema de Gauss-Bonnet

Agora estamos em condições de apresentar a generalização do teorema de Gauss-Bonnet para membranas. Lembramos que o caso onde K é função diferenciável e M é apenas uma variedade diferenciável, o teorema de Gauss-Bonnet pode ser encontrado em [Fe] e [Ch], e no caso de superfícies em [Ca2].

Teorema 3.39 (Teorema de Gauss-Bonnet). *Sejam $g = cl[(g_{ij\epsilon})] \in \mathcal{G}(\Omega)$ e $M = cl[(M_\epsilon)]$ uma hiper-membrana n-dimensional em $\overline{\mathbb{R}}^{n+1}$ com n par, orientada, onde cada (M_ϵ, g_ϵ) é uma subvariedade Riemanniana. Então,*

$$\int_M K = \frac{\omega_n}{2}\chi(M),$$

onde ω_n [1] é o volume da n-esfera unitária $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $K = cl[(K_\epsilon)]$ e cada K_ϵ é a curvatura Gauss-Kronecker de M_ϵ.

Demonstração:

Sendo cada M_ϵ uma hiper-superfície n-dimensional em $\mathbb{R}^{n+1}$ com n par, compacto e orientada, então pelo teorema de Gauss-Bonnet(veja [Ch]), temos que

$$\int_{M_\epsilon} K_\epsilon = \frac{\omega_n}{2}\chi(M_\epsilon).$$

[1] $\omega_n = \frac{2\pi^{(n+1)/2}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}$, Γ é a função gama onde $\Gamma(a) = a\Gamma(a+1)$, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \pi^{1/2}$ e $\Gamma(1) = 1$.

Então,

$$\begin{aligned}\int_M K &= cl[\epsilon \mapsto \int_{M_\epsilon} K_\epsilon] \\ &= cl[\epsilon \mapsto \frac{\omega_n}{2}\chi(M_\epsilon)] \\ &= cl[\epsilon \mapsto \frac{\omega_n}{2}]cl[\epsilon \mapsto \chi(M_\epsilon] \\ &= \frac{\omega_n}{2}\chi(M). \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Corolário 3.40. *Sejam $g = cl[(g_{ij\epsilon})] \in \mathcal{G}(\Omega)$ e $M = cl[(M_\epsilon)]$ uma hipermembrana de dimensão 2 em $\overline{\mathbb{R}}^3$, orientada, onde cada (M_ϵ, g_ϵ) é uma subvariedade Riemanniana. Então,*

$$\int_M K = 2\pi\chi(M),$$

onde $K = cl[(K_\epsilon)]$ é a curvatura Gauss-Kronecker de M.

Apresentaremos agora uma aplicação do teorema de Gauss-Bonnet para membranas classificando todas as membranas de curvatura Gauss-Kronecker positiva.

Proposição 3.41. *Sejam $g = cl[(g_{ij\epsilon})] \in \mathcal{G}(\Omega)$ e $M = cl[(M_\epsilon)]$ uma hipermembrana n-dimensional em $\overline{\mathbb{R}}^{n+1}$ com n par, orientada, onde cada (M_ϵ, g_ϵ) é uma subvariedade Riemanniana. Se $K > 0$, então os representantes de M são famílias de esferas.*

Demonstração:

Por hipótese $K > 0$, isto é, $K(x) > 0$ para todo $x \in M$. Suponha que a afirmação seja falsa, então existe uma sequencia $(\epsilon_n) \subset I$ tal que $\epsilon_n \to 0$ e tal que $\chi(M_{\epsilon_n}) \geq 1$. Logo os M_{ϵ_n} são r-toros. Portanto, existe $p_{\epsilon_n} \in M_{\epsilon_n}$ tal que $K(p_{\epsilon_n}) < 0$. Seja $p := cl[(p_{\epsilon_n})]$ então $K(p) \leq 0$. Absurdo, pois por hipótese $K > 0$. ■

3.7 Geodésicas

Antes de discutirmos a noção de geodésica em membrana, apresentaremos o conceito de submembrana baseado na seguinte preposição;

Proposição 3.42. *Seja (M_ϵ) uma pré-membrana. Se $N_\epsilon \subset M_\epsilon$ para todo $\epsilon \in I$ são subvariedades de igual dimensão, então (N_ϵ) é uma pré-membrana.*

Demonstração:

Sendo (M_ϵ) uma pré-membrana, então:

1. Existe $K \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto compacto e existe $\eta \in I$ tal que $M_\epsilon \subset K$ para todo $\epsilon \in I_\eta$.

   Como existe $\delta \in I$ tal que $N_\epsilon \subset M_\epsilon$ para todo $\epsilon \in I_\delta$. Tome $\rho = \min\{\delta, \eta\}$. Então $N_\epsilon \subset K$ para todo $\epsilon \in I_\rho$.

2. Note que as funções características de cada M_ϵ são integráveis e como $N_\epsilon \subset M_\epsilon$ para todo $\epsilon \in I_\rho$, então

$$\int_{N_\epsilon} \chi_{N_\epsilon} \leq \int_{M_\epsilon} \chi_{M_\epsilon}.$$

   Portanto, a função carecterística de N_ϵ é integrável.

De (1.) e (2.) concluímos que (N_ϵ) é uma pré-membrana. ■

Observe que no caso da proposição anterior temos que $N := cl[(N_\epsilon)]$ é uma membrana. O que nos motiva a formular a seguinte definição:

Definição 3.43. *Seja $M = cl[(M_\epsilon)]$ uma membrana em $\overline{\mathbb{R}}^n$. Uma submembrana $N = cl[(N_\epsilon)]$ de M é uma membrana onde $N_\epsilon \subset M_\epsilon$ para todo $\epsilon \in I$ são subvariedades de igual dimensão.*

Proposição 3.44. *Sejam $M = cl[(M_\epsilon)]$ uma membrana em $\overline{\mathbb{R}}^n$ e (γ_ϵ) uma família de curvas $\gamma_\epsilon : [0,1] \longmapsto M_\epsilon$, com $\epsilon \in I$. Então:*

1. *$(\gamma_\epsilon([0,1]))$ é uma pré-membrana;*

2. *$cl[(\gamma_\epsilon([0,1]))]$ é uma submembrana de M.*

Demonstração:

1. Como $\gamma_\epsilon([0,1]) \subset M_\epsilon$ para todo $\epsilon \in I_\eta$, para algum $\eta \in I$. Então $(\gamma_\epsilon([0,1]))$ é uma pré-membrana de M;

2. Segue-se direto de (1.). ■

Definição 3.45. *Sejam $M = cl[(M_\epsilon)]$ uma membrana em $\overline{\mathbb{R}}^n$ e $cl[(\gamma_\epsilon([0,1]))]$ uma submembrana de M, onde $\gamma_\epsilon : [0,1] \longrightarrow M_\epsilon$ é uma curva para cada $\epsilon \in I$. Define-se uma curva $\gamma : [0,1] \longrightarrow M$ em M por*

$$\gamma(t) := cl[(\gamma_\epsilon(t))], \text{ para todo } t \in [0,1]$$

tal que dado $n \in \mathbb{N}$ existe $\eta \in I$, $C > 0$

$$|\gamma_\epsilon^n(t)| \leq C\epsilon^{-N} \ \forall \epsilon \in I_\eta, \ \forall t \in [0,1].$$

Definição 3.46. *Seja $M = cl[(M_\epsilon)]$ uma membrana em $\overline{\mathbb{R}}^n$. Um campo $V : [0,1] \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}^n$ ao longo de uma curva $\gamma : [0,1] \longrightarrow M$ é definido por*

$$V(t) := cl[(\gamma_\epsilon'(t))_\epsilon], \text{ para todo } t \in [0,1].$$

Definição 3.47. *Seja $cl[(M_\epsilon)]$ uma membrana em $\overline{\mathbb{R}}^n$. Um campo V ao longo de uma curva $\gamma : [0,1] \longrightarrow M$ é diferenciável se $V : [0,1] \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}^n$ for diferenciável.*

Definição 3.48. *Sejam $M = cl[(M_\epsilon)]$ uma hiper-membrana em $\overline{\mathbb{R}}^{n+1}$ n-dimensional e $V : [0,1] \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}^n$ um campo diferenciável ao longo de uma $\gamma : [0,1] \longrightarrow M$. A derivada covariante de*

$$V(t) := cl[(\gamma_\epsilon'(t))_\epsilon],$$

onde $\gamma_\epsilon'(t) = \frac{d\gamma_\epsilon^j}{dt}(t)\frac{\partial}{\partial x_\epsilon^j}(\gamma_\epsilon(t))$, é dada pela expressão

$$\frac{DV}{dt}(t) = cl[(\tfrac{D}{dt}\gamma_\epsilon'(t))], \text{ para todo } t \in I_\eta \text{ com } \eta \in I,$$

e onde

$$\frac{D}{dt}\gamma_\epsilon'(t) = \left\{\frac{d^2\gamma_\epsilon^k}{dt^2} + \frac{d\gamma_\epsilon^j}{dt}\frac{dx_\epsilon^i}{dt}\Gamma_{ij\epsilon}^k\right\}\frac{\partial}{\partial x_\epsilon^k}(\gamma_\epsilon(t)).$$

Definição 3.49. *Seja $M = cl[(M_\epsilon)]$ uma hiper-membrana em $\bar{\mathbb{R}}^{n+1}$ n-dimensional. Uma curva $\gamma : [0,1] \longrightarrow M$ é dita uma geodésica em $t_0 \in [0,1]$ se*

$$cl[(\tfrac{D}{dt}\gamma_\epsilon'(t)\ |_{t=t_0})] = 0,$$

isto é, $(\frac{D}{dt}\gamma_\epsilon'(t_0)) \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}^{n+1})$.

Proposição 3.50. *Seja $M = cl[(M_\epsilon)]$ uma hiper-membrana em $\overline{\mathbb{R}}^3$, orientada, com curvatura $K > 0$ e $K \in Inv(\mathcal{G}(\mathbb{R}))$. Se existem duas geodésicas simples e fechadas em M, então elas se intersectam como membranas.*

Demonstração:

Sejam $\gamma = cl[(\gamma_\epsilon)]$; $\delta = cl[(\delta_\epsilon)]$ duas geodésicas simples e fechadas em $M = cl[(M_\epsilon)]$. Como $K > 0$, então pelo teorema 3.41 M tem uma família (M_ϵ) como representante tal que M_ϵ é homeomorfo S^2 para todo ϵ pequeno.

Suponha que nem sempre $\gamma_\epsilon \cap \delta_\epsilon \neq \oslash$, então existe uma sequência $(\epsilon_n) \subset I$ tal que $\epsilon \to 0$ e $\gamma_{\epsilon_n} \cap \delta_{\epsilon_n} = \oslash$.

Seja $\mathcal{R}_{\epsilon_n} \subset M_{\epsilon_n}$ tal que $\partial \mathcal{R}_{\epsilon_n} = \gamma_{\epsilon_n} \cup \delta_{\epsilon_n}$. Então

$$\chi(\mathcal{R}_{\epsilon_n}) = 0. \tag{3.16}$$

Sendo $\gamma = cl[(\gamma_\epsilon)]$; $\delta = cl[(\delta_\epsilon)]$ duas geodésicas simples e fechadas em $M = cl[(M_\epsilon)]$, então pelo teorema clássico de Gauss-Bonnet temos que

$$\int_{\gamma_{\epsilon n}} K^{\gamma_{\epsilon n}}_{g\epsilon_n}(s)ds + \int_{\gamma_{\epsilon n}} K^{\delta_{\epsilon n}}_{g\epsilon_n}(s)ds + \int_{\mathcal{R}_{\epsilon_n}} K = 2\pi\chi(\mathcal{R}_{\epsilon_n}) \tag{3.17}$$

De (3.16) e (3.17), segue-se

$$\int_{\gamma_{\epsilon n}} K^{\gamma_{\epsilon n}}_{g\epsilon_n}(s)ds + \int_{\gamma_{\epsilon n}} K^{\delta_{\epsilon n}}_{g\epsilon_n}(s)ds + \int_{\mathcal{R}_{\epsilon_n}} K = 0. \tag{3.18}$$

Dai temos que a classe de (3.18) temos que

$$\int_{\gamma} K^{\gamma}_{g}(s)ds + \int_{\gamma} K^{\delta}_{g}(s)ds + \int_{\mathcal{R}} K = 0. \tag{3.19}$$

Agora, sendo γ e δ geodésicas, então as curvaturas geodésicas são nulas, isto é,

$$K^{\gamma}_{g} := [\gamma'']_2 = \mathcal{N} \qquad K^{\delta}_{g} := [\delta'']_2 = \mathcal{N}.$$

Lembramos que $[x]_2 = \sum_{i=1}^{2} x_i^2$, que é induzido pela aplicação $\overline{\mathbb{R}}$-bilinear $< .,. >: \overline{\mathbb{R}}^2 \times \overline{\mathbb{R}}^2 \to \overline{\mathbb{R}}$ definida por $< x, y >= \sum_{i=1}^{2} x_i y_i$.

Então,

$$\int_{\gamma} K^{\gamma}_{g}(s)ds = \mathcal{N} \qquad \int_{\gamma} K^{\delta}_{g}(s)ds = \mathcal{N}. \tag{3.20}$$

Portanto, de (3.19), e (3.20) temos que

$$\int_{\mathcal{R}} K = 0.$$

Que é uma contradição já que por hipótese $K \in Inv(\mathcal{G}(\mathbb{R}^n))$.

Logo, $\gamma_\epsilon \cap \delta_\epsilon \neq \oslash$ para todo ϵ pequeno. Então, existe $t_{0\epsilon} \in (0,1)$ tal que

$$\gamma_\epsilon(t_{0\epsilon}) = \delta_\epsilon(t_{0\epsilon}).$$

Portanto concluímos que

$$\gamma(t_0) = cl[(\gamma_\epsilon(t_{0\epsilon}))] = cl[(\delta_\epsilon(t_{0\epsilon}))] = \delta(t_0). \blacksquare$$

Podemos obter as equações locais de uma geodésica, como no caso clássico. Seja (U_ϵ, x_ϵ) um sistema de coordenadas em torno de $\gamma_\epsilon(t_0)$. Para cada $\epsilon \in I$, em $U_\epsilon \subset M_\epsilon$, temos que

$$\gamma_\epsilon(t) = (x^1_\epsilon(t), ..., x^n_\epsilon(t)), \text{ onde } t \in I.$$

Neste caso γ é uma geodésica se e só se

$$cl[(\tfrac{d^2x^k_\epsilon}{dt^2} + \textstyle\sum_{i,j}\Gamma^k_{ij\epsilon}\tfrac{dx^i_\epsilon}{dt}\tfrac{dx^j_\epsilon}{dt})_\epsilon] = 0, \text{ com } k = 1, ..., n.$$

Apresentaremos agora a noção de comprimento de uma curva em uma membrana.

Definição 3.51. *Sejam $M = cl[(M_\epsilon)]$ uma membrana e $\alpha : [0,1] \to M$ uma curva em M unindo dois pontos $p, q \in M$, tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha(1) = q$. O comprimento de α é definido por*

$$L(\alpha) := cl[(\epsilon \mapsto L(\alpha_\epsilon))],$$

onde $L(\alpha_\epsilon) = \int_0^1 \left|\alpha'_\epsilon(t)\right| dt$.

A proposição seguinte nos mostra que o conceito de comprimento de uma curva está bem definida.

Proposição 3.52. *Sejam $M = cl[(M_\epsilon)]$ uma membrana e $\alpha : [0,1] \to M$ uma curva em M unindo dois pontos $p, q \in M$, tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha(1) = q$. O comprimento da curva α independe da escolha do seu representante.*

Demonstração:

Seja $(\beta_\epsilon[0,1])$ uma pré-membrana tal que $(\beta_\epsilon[0,1]) \sim (\alpha_\epsilon[0,1])$. Então, existe uma aplicação $\phi : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida por $\phi_\epsilon(x) = x + \psi_\epsilon(x)$, onde $(\psi_\epsilon) \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ e além disso

$$\phi_\epsilon(\alpha_\epsilon([0,1])) = \beta_\epsilon([0,1]).$$

Então, dado $t \in [0,1]$ temos que

$$\phi_\epsilon(\alpha_\epsilon(t)) = \beta_\epsilon(t).$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\beta_\epsilon'(t) &= d\phi_\epsilon(\alpha_\epsilon') \\
&= (I_n + d\psi_\epsilon)(\alpha_\epsilon') \\
&= \alpha_\epsilon'(t) + d\psi_\epsilon(\alpha_\epsilon'(t))
\end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned}
L(\beta_\epsilon) &= \int_0^1 \left|\beta_\epsilon'(t)\right| dt \\
&= \int_0^1 \left|(d\phi_\epsilon)(\alpha_\epsilon'(t))\right| dt \\
&= \int_0^1 \left|\alpha_\epsilon'(t) + d\psi_\epsilon(\alpha_\epsilon'(t))\right| dt \\
&\leq \int_0^1 \left|\alpha_\epsilon'(t)\right| dt + \int_0^1 \left|d\psi_\epsilon(\alpha_\epsilon'(t))\right| dt \\
&\leq L(\alpha_\epsilon) + \int_0^1 \|d\psi_\epsilon\| \cdot \left|\alpha_\epsilon'(t)\right| dt
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Portanto,

$$|L(\beta_\epsilon) - L(\alpha_\epsilon)| \leq \int_0^1 \|d\psi_\epsilon\| \cdot \left|\alpha_\epsilon'(t)\right| dt.$$

Agora, sendo α uma curva em M, existem $a > 0$, $C_1 > 0$, $\eta_1 \in I$ tal que

$$\left|\alpha_\epsilon'(t)\right| \leq C_1\epsilon^{-a} \qquad \forall \epsilon \in I_{\eta_1}.$$

Daí temos que,

$$\begin{aligned}
|L(\beta_\epsilon) - L(\alpha_\epsilon| &\leq \int_0^1 \|d\psi_\epsilon\| \, C\epsilon^{-a} dt \\
&\leq \|d\psi_\epsilon\| \, C_1\epsilon^{-a}, \ \forall \epsilon \in I_{\eta_1}.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Como $(\psi_\epsilon) \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, então $(d\psi_\epsilon) \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Logo $\forall b \in \mathbb{N}$, $\exists C_2 >$ 0 tal que
para algum $\eta_2 \in I$, temos

$$\|d\psi_\epsilon\| \leq C_2\epsilon^b \ \forall \epsilon \in I_{\eta_2}. \tag{3.23}$$

E substituindo-se (3.23) em (3.22) obtemos

$$|L(\beta_\epsilon) - L(\alpha_\epsilon| \leq C\epsilon^{b-a}, \quad \epsilon \in I_\eta,$$

onde $C = C_1 \cdot C_2$ e $\eta = \min\{\eta_1, \eta_2\}$.
Portanto,

$$(L(\beta_\epsilon) - L(\alpha_\epsilon)) \in \mathcal{N}. \ \blacksquare$$

No que segue será apresentado o conceito de distância em uma membrana.

Definição 3.53. *Seja $M = cl[(M_\epsilon)]$ uma membrana, dados dois pontos $p, q \in M$, a distância de p a q é dada por*

$$d(p,q) := cl[\epsilon \mapsto d(p_\epsilon, q_\epsilon)],$$

onde $d(p_\epsilon, q_\epsilon) := \inf L(\alpha_{p_\epsilon, q_\epsilon})$.

Definição 3.54. *Seja $M = cl[(M_\epsilon)]$ uma membrana, uma curva geodésica $\alpha : [0,1] \to M$ unindo dois pontos $p, q \in M$ é dita mínima se o comprimento é menor ou igual ao comprimento de qualquer outra curva geodésica unindo tais pontos.*

Definição 3.55. *Uma membrana M é dita completa se existe um representante (M_ϵ) tal que para todo ϵ pequeno, M_ϵ é uma subvariedade completa.*

Teorema 3.56. *Sejam $M = cl[(M_\epsilon)]$ uma membrana completa e $\gamma = cl[(\gamma_\epsilon)]$ uma curva geodésica. Então, existe um representante $(\tilde{\gamma}_\epsilon)$ de γ tal que*

1. *$\tilde{\gamma}_\epsilon$ é a geodésica de M_ϵ $\forall \epsilon \in I$;*

2. *$\tilde{\gamma}_\epsilon$ é uma geodésica de M_ϵ definida em $\mathbb{R}$;*

3. *$cl[(\tilde{\gamma}_\epsilon)] = cl[(\gamma_\epsilon)]$.*

Demonstração:

Sendo M completa existe um representante (M_ϵ) de M onde cada M_ϵ é uma subvariedade completa.

Agora, como γ é uma curva geodésica, dado $n \in \mathbb{N}$, $\exists\ \epsilon_0 > 0, C > 0$ tal que

$$\left|\gamma''\right| \leq C\epsilon^n \,\forall\, 0 < \epsilon < \epsilon_0 \ \ \forall \epsilon \in [0,1] \tag{3.24}$$

Sejam $p_\epsilon = \gamma_\epsilon(0)$ e $v_\epsilon = \gamma_\epsilon'(0)$ e $\tilde{\gamma}_\epsilon$ uma geodésica de M_ϵ tal que

$$\begin{cases} \tilde{\gamma}_\epsilon''(t) = 0 \ t \in [0,1] \\ \tilde{\gamma}_\epsilon(0) = p_\epsilon \\ \tilde{\gamma}_\epsilon'(0) = v_\epsilon \end{cases}$$

Logo,

$$\tilde{\gamma}_\epsilon(t) - \gamma_\epsilon(t) = \textstyle\int_0^t (\tilde{\gamma}_\epsilon' - \gamma_\epsilon')(s)ds.$$

E então,

$$|\tilde{\gamma}_\epsilon(t) - \gamma_\epsilon(t)| \leq \int_0^t \left|(\tilde{\gamma}_\epsilon' - \gamma_\epsilon')(s)\right| ds. \tag{3.25}$$

Também

$$\begin{aligned} (\tilde{\gamma}_\epsilon' - \gamma_\epsilon')(t) &= \int_0^t (\tilde{\gamma}_\epsilon'' - \gamma_\epsilon'')(s)ds \\ &= -\int_0^t \gamma_\epsilon''(s)ds. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Assim,

$$\left|(\tilde{\gamma}_\epsilon' - \gamma_\epsilon')(t)\right| \leq \int_0^t \left|\gamma_\epsilon''(s)\right| ds \tag{3.27}$$

Substituíndo-se (3.24) em (3.27), obtemos

$$\left|(\tilde{\gamma}_\epsilon' - \gamma_\epsilon')(t)\right| \leq C\epsilon^N |t| \tag{3.28}$$

E de (3.25) e (3.28) temos que

$$\begin{aligned} |\tilde{\gamma}_\epsilon(t) - \gamma_\epsilon(t)| &\leq C\epsilon^N |t|^2 \\ &\leq C\epsilon^N. \end{aligned}$$

Logo,

$$cl[(\tilde{\gamma}_\epsilon)] = cl[(\gamma_\epsilon)]. \blacksquare$$

O próximo teorema, análogo a um resultado clássico aqui será visto como lema(veja [Ca1] e [Ca2]), afirma que dado dois pontos pertencentes a uma membrana completa existe uma geodésica mínima ligando tais pontos.

Lema 3.57. *Seja S uma hiper-superfície completa. Dado dois pontos $p, q \in S$, existe uma geodésica mínima ligando p a q.*

Teorema 3.58. *Seja $M = cl[(M_\epsilon)]$ uma membrana completa. Dados dois pontos $p, q \in M$, existe uma geodésica mínima ligando p à q.*

Demonstração:

Dados $p = cl[(p_\epsilon)], q = cl[(q_\epsilon)] \in M$, como M é completa existe um representante M_ϵ tal que cada M_ϵ é completa. Então, pelo lema 3.57, para cada $\epsilon \in I$ existe uma geodésica mínima $\gamma_\epsilon : [0,1] \longrightarrow M_\epsilon$ tal que $\gamma_\epsilon(0) = p_\epsilon$ e $\gamma_\epsilon(1) = q_\epsilon$. Então, a curva $\gamma : [0,1] \longrightarrow M$, onde $\gamma := cl[(\gamma_\epsilon)]$, é uma geodésica mínima. ligando p à q. $\blacksquare$

Capítulo 4

Aplicações da Álgebra de Colombeau à Geometria FRW com Mudança de Assinatura

Motivados pelo fato de que na álgebra de Colombeau as operações não lineares são permitidas, estudos de modelos cosmológicos com mudança de assinatura foram desenvolvidos em [Kam] e em [MN]. Neste capítulo, apresentaremos uma revisão crítica dos resultados obtidos nos dois artigos. Lembramos que mudança de assinaturas cosmológicas são caracterizadas pela divisão, por uma hiper-superfície com bordo, do espaço-tempo em dois subespaços, sendo que um deles é Riemanniano com curvatura constante $(K = -1, K = 0, K = 1)$ e o outro é o espaço Lorentziano.

Em [Kam] encontra-se um estudo da equação de campo de Klein-Gordon considerando o espaço-tempo bidimensional. Já em [MN] é apresentado resultados relacionados ao tensor energia-momento da hiper-superfície que separa as variedades, onde é considerada a métrica de Friedman-Robertson-Walker para a variedade espaço-tempo.

Aqui foi estendido o estudo, realizado em [Kam], considerando a referida métrica e demonstramos que não só é impossível obter a equação de Klein-Gordon, na álgebra de Colombeau, no caso em que a troca de assinatura se da entre os espaços Euclidianos e Lorentziano(veja [Kam]), mas também entre os espaços Riemanniano com curvatura constante $K = \pm 1$(esfera, espaço hiperbólico) e o espaço Lorentziano. Com relação ao artigo [MN] será provado que não é possível obter o tensor energia-momento neste ambiente com relação a métrica FRW. Tudo isto se dará com base no teorema do valor intermediário generalizado que apresentaremos adiante.

4.1 Mudança de assinatura e funções generalizadas

A caracterização da troca de assinaturas em cosmologia, que pode ser vista em [Kam] e em [HD], ocorre da seguinte forma: Considere o espaço-tempo X dividido em duas variedades disjuntas, X_- e X_+, por uma hiper-superfície bordada e definida por $t = 0$. Esta hiper-superfície será denotada por

$$\Sigma = X - (X_- \cup X_+).$$

Enquanto que X_- e X_+ denotam as variedades, Riemanniana e Lorentziana, mergulhadas com os tensores métricos com assinaturas (++++) e (-+++), respectivamente. A descontinuidade de uma grandeza física A é representada por $[A] = A_+ - A_-$, onde A_- e A_+ denotam grandezas relativas às variedades X_- e X_+, respectivamente. A métrica FRW para troca de assinaturas do espaço-tempo considerado é definida por

$$ds^2 = -f(t)dt^2 + \frac{R(t)^2}{1 - Kr^2}dr^2 + R(t)^2r^2d\theta^2 + R(t)^2r^2sen^2\theta d\varphi^2, \qquad (4.1)$$

onde $r > 0$, $0 < \varphi < 2\pi$, $0 < \theta < \pi$, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função tal que para $t < 0$ tem-se que $f(t) < 0$, enquanto que para $t = 0$ temos $f(t) = 0$ e finalmente para $t > 0$ temos $f(t) > 0$. Além disso, $R > 0$ denota o fator escala representando a expansão relativa do universo e K é a curvatura do espaço constante no tempo com

$$K = \begin{cases} +1 & : \text{esfera unitária} \\ 0 & : \text{espaço Euclideano.} \\ -1 & : \text{espaço hiperbólico} \end{cases}$$

A métrica (4.1) descreve um espaço-tempo mudando de assinatura na hipersuperfície $t = 0$. Para $t < 0$ descreve um espaço Riemanniano e para $t > 0$ um espaço-tempo Lorentziano. A partir dela observa-se que o tensor métrico é dado por

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} -f(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R(t)^2}{1-Kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R(t)^2r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R(t)^2r^2sen^2\theta \end{pmatrix}.$$

Enquanto que o tensor métrico inverso é dado por

$$(g^{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{-1}{f(t)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-Kr^2}{R(t)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R(t)^2 r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R(t)^2 r^2 sen^2\theta} \end{pmatrix}.$$

Observe que para calcular os símbolos de Christoffel

$$\Gamma^k_{ij} = \tfrac{1}{2} g^{km} (\tfrac{\partial g_{jm}}{\partial x^i} + \tfrac{\partial g_{im}}{\partial x^j} - \tfrac{\partial g_{ij}}{\partial x^m}), \qquad m = t, r, \theta, \varphi,$$

precisamos diferenciar a métrica g_{ij}. Sendo f descontínua em $t = 0$, isto é, sobre Σ e portanto não diferenciável, temos que g_{ij} e g^{ij} também não são diferenciáveis em $t = 0$. Mas a regularização de f se dá no espaço das distribuições. Portanto, basta mergulhar as métricas g_{ij} e g^{ij} no espaço das distribuições para obtermos regularidade. Porém, em g^{ij} aparece $1/f$, operação não permitida no espaço das distribuições. Então, a solução para o problema é mergulhar as métricas na álgebra de Colombeau $\mathcal{G}(X)$(veja [GKOS]), pois se sabe que a operação produto e inverso multiplicativo estão bem definidas. Deste ponto de vista, f é considerada uma função generalizada.

Os símbolos de Christoffel para esta métrica, são dados por:

$$\Gamma^t_{\lambda t} = \begin{cases} \frac{\dot{f}}{2f} & , \quad \lambda = t \\ 0 & , \quad \lambda = \theta, \varphi \end{cases} \qquad \Gamma^t_{\lambda r} = \begin{cases} \frac{R\dot{R}}{(1-Kr^2)f} & , \quad \lambda = r \\ 0 & , \quad \lambda = t, \theta, \varphi \end{cases}$$

$$\Gamma^t_{\lambda\theta} = \begin{cases} \frac{r^2 R\dot{R}}{f} & , \quad \lambda = \theta \\ 0 & , \quad \lambda = t, r, \varphi \end{cases} \qquad \Gamma^t_{\lambda\varphi} = \begin{cases} \frac{r^2 R\dot{R} sen^2\theta}{f} & , \quad \lambda = \varphi \\ 0 & , \quad \lambda = t, r, \theta \end{cases}$$

$$\Gamma^r_{\lambda t} = \begin{cases} \frac{\dot{R}}{R} & , \quad \lambda = r \\ 0 & , \quad \lambda = t, \theta, \varphi \end{cases} \qquad \Gamma^r_{\lambda r} = \begin{cases} \frac{\dot{R}}{R} & , \quad \lambda = t \\ \frac{Kr}{1-Kr^2} & , \quad \lambda = r \\ 0 & , \quad \lambda = \varphi, \theta \end{cases}$$

$$\Gamma^r_{\lambda\theta} = \begin{cases} 0, \quad \lambda = t, r, \varphi \\ -(1-Kr^2)r, \quad \lambda = \theta \end{cases} \qquad \Gamma^r_{\lambda\varphi} = \begin{cases} 0, \quad \lambda = t, r, \theta \\ -(1-Kr^2) r sen^2\theta, \quad \lambda = \varphi \end{cases}$$

$$\Gamma^\theta_{\lambda t} = \begin{cases} \frac{\dot{R}}{R} & , \quad \lambda = \theta \\ 0 & , \quad \lambda = t, r, \varphi \end{cases} \qquad \Gamma^\theta_{\lambda r} = \begin{cases} \frac{1}{r} & , \quad \lambda = \theta \\ 0 & , \quad \lambda = t, r, \varphi \end{cases}$$

$$\Gamma^\theta_{\lambda\theta} = \begin{cases} \frac{\dot{R}}{R} & , \quad \lambda = t \\ \frac{1}{r} & , \quad \lambda = r \\ 0 & , \quad \lambda = \theta, \varphi \end{cases} \qquad \Gamma^\theta_{\lambda\varphi} = \begin{cases} 0 & , \quad \lambda = t, r, \theta \\ -\frac{1}{2} sen 2\theta & , \quad \lambda = \varphi \end{cases}$$

$$\Gamma^{\varphi}_{\lambda t} = \begin{cases} \frac{\dot{R}}{R} & , \quad \lambda = \varphi \\ 0 & , \quad \lambda = t, r, \theta \end{cases} \qquad \Gamma^{\varphi}_{\lambda r} = \begin{cases} 0 & , \quad \lambda = t, r, \theta \\ \frac{1}{r} & , \quad \lambda = \varphi \end{cases}$$

$$\Gamma^{\varphi}_{\lambda \theta} = \begin{cases} cotg\theta & , \quad \lambda = \varphi \\ 0 & , \quad \lambda = t, r, \theta \end{cases} \qquad \Gamma^{\varphi}_{\lambda \varphi} = \begin{cases} \frac{\dot{R}}{R} & , \quad \lambda = t \\ \frac{1}{r} & , \quad \lambda = r \\ cotg\theta & , \quad \lambda = \theta \\ 0 & , \quad \lambda = \varphi \end{cases}$$

4.1.1 A equação de Klein-Gordon

Neste tópico será estudada a equação de Klein-Gordon para a troca de assinaturas, que pode ser contínua ou descontínua, conforme for a natureza da função f. Como exemplo, podemos citar as particulares métricas planas dadas em [Kam] para a obtenção das trocas de assinaturas contínua e descontínua, onde é desenvolvido um estudo análogo. Elas são apresentadas da seguinte forma:

$$ds^2 = tdt^2 - dx^2; \tag{4.2}$$

$$ds^2 = f(t)dt^2 - dx^2, \tag{4.3}$$

com $f(t) = H(t) - H(-t)$, sendo $H(t)$ a função de Heaviside enquanto que $H(-t) = 1 - H(t)$.

Definição 4.1. *Seja (X, g) uma variedade Riemanniana(semi-Riemanniana). Denomina-se equação de Klein-Gordon, em X, a equação diferencial parcial de ordem dois dada por*

$$(g^{ij}\nabla_i\nabla_j - m^2)\phi = 0, \tag{4.4}$$

onde $\phi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função escalar.

Para as métricas (4.2) e (4.3) as equações de Klein-Gordon são dadas por

$$\frac{1}{t}\partial_t^2\phi - \frac{1}{2t^2}\partial_t\phi - \partial_x^2\phi - m^2\phi = 0, \tag{4.5}$$

$$\frac{1}{f}\partial_t^2\phi - \frac{\delta}{f^2}\partial_t\phi - \partial_x^2\phi - m^2\phi = 0, \tag{4.6}$$

respectivamente, e encontram-se nos exemplos dados por Kamleh em [Kam].

No que segue, fazendo-se uso da métrica (4.1), daremos uma versão em $C^\infty(\tilde{\mathbb{R}}_c, \overline{\mathbb{R}})$ da equação de Klein-Gordon:

Proposição 4.2 (Equação de Klein-Gordon I). *Sejam X o espaço tempo com a métrica FRW e $\phi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ um campo escalar com a condição $[\phi] = 0$ sobre a hiper-superfície Σ. Então, a equação de Klein-Gordon no espaço $C^\infty(\tilde{\mathbb{R}}_c, \overline{\mathbb{R}})$ é dada por*

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{f}\partial_t^2\phi + \frac{1-Kr^2}{R^2}\partial_r^2\phi + \frac{1}{R^2r^2}\partial_\theta^2\phi + \frac{1}{r^2R^2sen^2\theta}\partial_\varphi^2\phi + \\ &+\frac{R\delta - 3\dot{R}}{f^2R}\partial_t\phi + \frac{2-3Kr^2}{rR^2}\partial_r\phi + \frac{cotg\theta}{rR^2}\partial_\theta\phi - m^2\phi = 0. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Demonstração:

Com $i, j = t, r, \theta, \varphi$, da equação (4.4), obtemos

$$(g^{tt}\nabla_t\nabla_t + g^{rr}\nabla_r\nabla_r + g^{\theta\theta}\nabla_\theta\nabla_\theta + g^{\varphi\varphi}\nabla_\varphi\nabla_\varphi - m^2)\phi = 0 \tag{4.8}$$

Agora, sendo ϕ um campo escalar, então

$$\nabla_i\phi = \partial_i\phi, \tag{4.9}$$

com $i = t, r, \theta, \varphi$.

E sendo $\partial_i\phi$ um campo vetorial, faremos uso da derivada covariante

$$\nabla_l A_i = \partial_l A_i - \Gamma^k_{il} A_k, \tag{4.10}$$

onde os A_i são campos vetoriais, para calcularmos $g^{ll}\nabla_l\nabla_l\phi$, com $l = t, r, \theta, \varphi,$.

Para $l = t$:

$$\begin{aligned}
g^{tt}\nabla_t\nabla_t\phi &= g^{tt}(\partial_t(\partial_t\phi) - \Gamma^{\alpha}_{tt}\partial_\alpha\phi) \\
&= -\frac{1}{f}(\partial^2_t\phi - \Gamma^t_{tt}\partial_t\phi - \Gamma^r_{tt}\partial_r\phi - \Gamma^\theta_{tt}\partial_\theta\phi - \Gamma^\varphi_{tt}\partial_\varphi\phi) \\
&= -\frac{1}{f}\partial^2_t\phi + \frac{\dot{f}}{2f^2}\partial_t\phi.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Para $l = r$:

$$\begin{aligned}
g^{rr}\nabla_r\nabla_r\phi &= g^{rr}(\partial_r(\partial_r\phi) - \Gamma^{\beta}_{rr}\partial_\beta\phi); \\
&= \frac{1-Kr^2}{R^2}(\partial^2_r\phi - \Gamma^t_{rr}\partial_t\phi - \Gamma^r_{rr}\partial_r\phi - \Gamma^\theta_{rr}\partial_\theta\phi - \\
&\quad \Gamma^\varphi_{rr}\partial_\varphi\phi) \\
&= \frac{1-Kr^2}{R^2}\partial^2_r\phi - \frac{\dot{R}}{fR}\partial_t\phi - \frac{Kr}{R^2}\partial_r\phi.
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Para $l = \theta$:

$$\begin{aligned}
g^{\theta\theta}\nabla_\theta\nabla_\theta\phi &= g^{\theta\theta}(\partial_\theta(\partial_\theta)\phi - \Gamma^{\beta}_{\theta\theta}\partial_\beta\phi); \\
&= \frac{1}{R^2r^2}(\partial^2_\theta\phi - \Gamma^t_{\theta\theta}\partial_t\phi - \Gamma^r_{\theta\theta}\partial_r\phi - \Gamma^\theta_{\theta\theta}\partial_\theta\phi - \Gamma^\varphi_{\theta\theta}\partial_\varphi\phi) \\
&= \frac{1}{R^2r^2}\partial^2_\theta\phi - \frac{\dot{R}}{Rf}\partial_t\phi + \frac{(1-Kr^2)}{rR^2}\partial_r\phi
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Para $l = \varphi$:

$$\begin{aligned}
g^{\varphi\varphi}\nabla_\varphi\nabla_\varphi\phi &= g^{\varphi\varphi}(\partial_\varphi(\partial_\varphi\phi) - \Gamma^{\beta}_{\varphi\varphi}\partial_\beta\phi);\\
&= \frac{1}{r^2R^2sen^2\theta}(\partial^2_\varphi\phi - \Gamma^{t}_{\varphi\varphi}\partial_t\phi - \Gamma^{r}_{\varphi\varphi}\partial_r\phi - \Gamma^{\theta}_{\varphi\varphi}\partial_\theta\phi -\\
&\quad \Gamma^{\varphi}_{\varphi\varphi}\partial_\varphi\phi)\\
&= \frac{1}{r^2R^2sen^2\theta}\partial^2_\varphi\phi - \frac{\dot{R}}{Rf}\partial_t\phi + \frac{1-kr^2}{rR^2}\partial_r\phi +\\
&\quad \frac{cotg\theta}{rR^2}\partial_\theta\phi
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Substituindo-se as igualdades (4.11-4.14) na equação (4.8) obtemos a equação (4.7). ■

Vamos supor agora a função ϕ descontínua, sua natureza pode ser descrita da forma

$$\phi = \phi_+H^+ + \phi_-H^-. \tag{4.15}$$

Aqui, H^+ e H^- denotam as funções generalizadas correspondentes de $H(t)$ e $H(-t) = 1 - H(t)$, respectivamente. Enquanto que, ϕ_- e ϕ_+ são funções diferenciáveis, definidas nas regiões X_- e X_+, respectivamente.

Agora será apresentada uma nova versão da a equação de Klein-Gordon (4.7) no espaço $C^\infty(\tilde{\mathbb{R}}_c, \overline{\mathbb{R}})$, através do seguinte corolário.

Corolário 4.3 (Equação de Klein-Gordon II). *Sejam X o espaço tempo com a métrica FRW e $\phi : X \to \mathbb{R}$ um campo escalar descontínuo. Então, a equação de Klein-Gordon no espaço $C^\infty(\tilde{\mathbb{R}}_c, \overline{\mathbb{R}})$ é dada por*

$$
\begin{aligned}
&\{-\frac{1}{f}\partial_t^2\phi_+ + \frac{1-Kr^2}{R^2}\partial_r^2\phi_+ + \frac{1}{R^2r^2}\partial_\theta^2\phi_+ + \frac{1}{r^2R^2sen^2\theta}\partial_\varphi^2\phi_+ + \\
&\frac{R\delta-3\dot{R}}{fR}\partial_t\phi_+ + \frac{2-3Kr^2}{rR^2}\partial_r\phi_+ + \frac{cotg\theta}{r^2R^2}\partial_\theta\phi_+ - m^2\phi_+\}H^+ + \\
&\{-\frac{1}{f}\partial_t^2\phi_- + \frac{1-Kr^2}{R^2}\partial_r^2\phi_- + \frac{1}{R^2r^2}\partial_\theta^2\phi_- + \frac{1}{r^2R^2sen^2\theta}\partial_\varphi^2\phi_- + \\
&(\frac{R\delta-3\dot{R}}{fR})\partial_t\phi_- + \frac{2-3Kr^2}{rR^2}\partial_r\phi_- + \frac{cotg\theta}{r^2R^2}\partial_\theta\phi_- - m^2\phi_-\}H^- + \\
&\{-\frac{2}{f}[\partial_t\phi] + \frac{1-Kr^2}{R^2}[\partial_r\phi] + \frac{1}{R^2r^2}[\partial_\theta\phi] + \frac{1}{r^2R^2sen^2\theta}[\partial_\varphi\phi] + \\
&\frac{2f^2r-3fR\dot{R}r^2-3Kr^3f^2-3kr^3f^2+f^2cotg\theta}{f^2r^2R^2}[\phi]\}\delta + \frac{1}{f^2}[\phi]\delta^2 - \frac{1}{f}[\phi]\dot{\delta} = 0.
\end{aligned}
$$

Demonstração:

Sendo a derivada de qualquer função descontínua dependente do tempo dada por

$$
\partial_i\phi = \partial_i\phi_+H^+ + \partial_i\phi_-H^- + [\phi]\delta, \tag{4.16}
$$

com $i = t, r, \theta, \varphi$.

Então, derivando-se com relação a t a expressão (4.16) para $i = t$, obtemos

$$
\begin{aligned}
\partial_t^2\phi &= \partial_t(\partial_t\phi_+H^+ + \partial_t\phi_-H^- + [\phi]\delta) \\
&= \partial_t^2\phi_+H^+ + \partial_t\phi_+\partial_tH^+ + \partial_t^2\phi_-H^- + \\
&\quad \partial_t\phi_-\partial_tH^- + \partial_t[\phi]\delta + [\phi]\dot{\delta}
\end{aligned} \tag{4.17}
$$

Agora,

$$
\begin{aligned}
\partial_i[\phi] &= \partial_i(\phi_+ - \phi_-) \\
&= \partial_i\phi_+ - \partial_i\phi_- \\
&= (\partial_i\phi)_+ - (\partial_i\phi)_- \\
&= [\partial_i\phi],
\end{aligned} \tag{4.18}
$$

onde $i = t, r, \theta, \varphi$.

Enquanto que,

$$
\begin{aligned}
\partial_t H^+(t) &= \partial_t H(t) \\
&= \delta(t),
\end{aligned} \tag{4.19}
$$

$$
\begin{aligned}
\partial_t H^-(t) &= \partial_t(1 - H(t)) \\
&= -\partial_t H(t) \\
&= -\delta(t).
\end{aligned} \tag{4.20}
$$

Por fim,

$$
\partial_i H^+(t) = 0, \tag{4.21}
$$

e

$$
\partial_i H^-(t) = 0, \tag{4.22}
$$

onde $i = r, \theta, \varphi$.

Portanto, substituindo-se as expressões (4.18 - 4.20) em (4.17) obtemos a seguinte expressão

$$
\partial_t^2\phi = \partial_t^2\phi_+ H^+ + \partial_t^2\phi_- H^- + 2[\partial_t\phi]\delta + [\phi]\dot{\delta} \tag{4.23}
$$

Derivando-se a expressão (4.16) com relação a i, onde $i = r, \theta, \varphi$, temos que

$$\begin{aligned}
\partial_i^2 \phi &= \partial_i(\partial_i \phi_+ H^+ + \partial_i \phi_- H^- + [\phi]\delta) \\
&= \partial_i^2 \phi_+ H^+ + \partial_i \phi_+ \partial_i H^+ + \partial_i^2 \phi_- H^- + \\
&\quad \partial_i \phi_- \partial_i H^- + \partial_i[\phi]\delta + [\phi]\partial_i \delta
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Substituindo-se as expressões (4.18), (4.21) e (4.22) em (4.24) obtemos a seguinte expressão

$$\partial_i^2 \phi = \partial_i^2 \phi_+ H^+ + \partial_i^2 \phi_- H^- + [\partial_i \phi]\delta. \tag{4.25}$$

Para finalizar, basta substituir as expressões (4.23) e (4.25) na equação (4.7) para obtermos a equação de Klein-Gordon II. ■

4.1.2 Formalismo Mansouri-Nozari

No formalismo de Mansouri-Nozari, que trata do estudo do tensor energia-momento segundo a álgebra de Colombeau, encontrado em [MN], considera-se também a métrica 4.1 com a função

$$f(t) = H(t) - H(-t) \tag{4.26}$$

e

$$R(t)^2 = R_+^2(t)H(t) + R_-^2 H(-t). \tag{4.27}$$

Para a regularização da função f em $t = 0$ é feito a seguinte escolha particular:

$$H(t) \mid_{t-0} = \tau, \quad \tau > 1/2. \tag{4.28}$$

Substituindo-se as equações,

$$H(-t) = 1 - H(t) \tag{4.29}$$

e (4.28) em (4.26), obtemos

$$f(t)\mid_{t=0} = 2\tau - 1.$$

O que permitiria operações não lineares, como por exemplo $f(t)^{-1}$ ou $f(t)^2$. Mas no espaço das distribuições, operações dessa natureza não são permitidas. Então, mergulha-se f na álgebra de Colombeau, passando-se a considerar f como função regularizada onde

$$f_\epsilon(x) = \int f(y)\tfrac{1}{\epsilon}\rho(\tfrac{x}{\epsilon})dy.$$

Aqui a função f, de modo análogo ao realizado no primeiro tópico deste capítulo, é vista como elemento do espaço via teorema do mergulho, e consequentemente os (g^{ij}), (g_{ij}) e os símbolos de Christoffel obtidos no início do capítulo.

Sendo assim obtém-se a partir (3.16), (3.17), (3.18) e (3.19) as seguintes componentes do tensor de Einstein:

$$G_{tt} = -\frac{3Kf^3}{R^2 f^2} - \frac{3f^2 R^2}{f^2 R^4} \tag{4.30}$$

$$G_{rr} = \frac{1}{1-Kr^2}\left(\frac{2R\ddot{R}}{f^2} - \frac{R\dot{R}\dot{f}}{f^2} + \frac{f(R\dot{R})^2}{R^2 f^2} + \frac{Kf^2}{f^2}\right) \tag{4.31}$$

$$G_{\theta\theta} = r^2\left(\frac{2R\ddot{R}}{f^2} - \frac{R\dot{R}\dot{f}}{f^2} + \frac{f(R\dot{R})^2}{R^2 f^2} + \frac{Kf^2}{f^2}\right) \tag{4.32}$$

$$G_{\varphi\varphi} = r^2\sin^2\theta\left(\frac{2R\ddot{R}}{f^2} - \frac{R\dot{R}\dot{f}}{f^2} + \frac{f(R\dot{R})^2}{R^2 f^2} + \frac{Kf^2}{f^2}\right) \tag{4.33}$$

Sendo f uma função descontínua em $t = 0$, para que os coeficientes do tensor de Einstein façam sentido poderíamos mergulhar os coeficientes da métrica no espaço das distribuições. Entretanto, observa-se a presença de operações não lineares no processo de obtenção do referido tensor. A saída, então, foi mergulhar a métrica e sua inversa na álgebra de Colombeau.

Lembrando-se que a função f é definida por

$$f(t) := H(t) - H(-t),$$

vamos calcular, inicialmente, sua derivada. Como $\delta(-t) = \delta(t)$, então

$$\begin{aligned} \dot{f}(t) &= \dot{H}(t) + \dot{H}(-t) \\ &= \delta(t) + \delta(-t) \\ &= 2\delta(t) \end{aligned} \tag{4.34}$$

Sendo $H \approx H^2$, então, pelo teorema 1.24 temos que

$$\begin{aligned} \dot{H} &\approx 2H\dot{H} \\ \delta &\approx 2H\delta \\ H\delta &\approx \frac{\delta}{2}. \end{aligned} \tag{4.35}$$

Agora, por (4.35) temos

$$\begin{aligned} f(t)\delta(t) &= H(t)\delta(t) - H(-t)\delta(t) \\ &= H(t)\delta(t) - H(-t)\delta(-t) \\ &\approx \frac{1}{2}\delta(t) - \frac{1}{2}\delta(-t) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{4.36}$$

A derivada de qualquer função descontínua dependente do tempo é dada por

$$\dot{F} = \dot{F}_{+}H^{+} + \dot{F}_{-}H^{-} + \hat{F}, \tag{4.37}$$

onde H^{+} e H^{-} são as funções correspondentes de $H(t)$ e $H(-t) = 1 - H(t)$, respectivamente e $\hat{F} = [F]\delta(t)$ é a parte singular da derivada.

Como

$$G^{i}_{j} = g^{i\lambda}G_{\lambda j}, \quad i, j, \lambda \in \{t, r, \theta, \varphi\},$$

usando-se as relações (4.30 - 4.33) e as equações (4.34- 4.36) obtém-se:

$$\hat{G}^{t}_{t} \approx 0; \tag{4.38}$$

$$\hat{G}^{r}_{r} \approx (\frac{f[\dot{R}]}{f^{2}R} - \frac{[\dot{R}]}{f^{2}R})\delta; \tag{4.39}$$

$$\hat{G}^{\theta}_{\theta} \approx (\frac{f[\dot{R}]}{f^{2}R} - \frac{[\dot{R}]}{f^{2}R})\delta; \tag{4.40}$$

$$\hat{G}^{\varphi}_{\varphi} \approx (\frac{f[\dot{R}]}{f^{2}R} - \frac{[\dot{R}]}{f^{2}R})\delta. \tag{4.41}$$

Note que, o tensor energia-momento do espaço-tempo inteiro pode ser escrito como

$$T_{ij} = T^{+}_{ij}H^{+} + T^{-}_{ij}H^{-} + \hat{T}_{ij}, \tag{4.42}$$

onde T^{+}_{ij} e T^{-}_{ij} são os tensores energia-momento correspondendo ao espaço Riemanniano e ao espaço-tempo Lorentziano, respectivamente, enquanto que

$$\hat{T}_{ij} = CS_{ij}\delta(t) \tag{4.43}$$

é a parte singular, com C sendo uma constante a ser determinada.

A constante C pode ser determinada, apresentada na literatura(veja [MN]), mostrada a seguir:

Seja τ a espessura da casca Σ. Então,

$$S_{ij} = \lim_{\tau \to 0} \int_0^{\tau} T_{ij} dn \tag{4.44}$$

é o tensor energia-momento de Σ(veja [Is]).

Agora, de (4.43) tem-se que

$$\begin{aligned} \int \hat{T}_{ij} dn &= C S_{ij} \int \delta(\Phi(x)) dn \\ &= C S_{ij} \left| \frac{dn}{d\Phi} \right|, \end{aligned}$$

onde $\Phi = t = 0$ define uma hiper-superfície singular Σ.

Então,

$$\begin{aligned} C &= \left| \frac{d\Phi}{dn} \right| \\ &= \left| n^i \partial_i \Phi \right|. \end{aligned} \tag{4.45}$$

Sendo o vetor n normal a hiper-superfície Φ, de (4.45) e usando a métrica (4.1), obtém-se

$$C = \frac{1}{|f(t)|}. \tag{4.46}$$

Substituíndo-se (4.46) em (4.43), obtemos

$$\hat{T}_{ij} = \frac{1}{|f(t)|} S_{ij} \delta. \tag{4.47}$$

Seja $\hat{G}_{ij} = \kappa\hat{T}_{ij}$ a equação de Einstein proporcional a δ, onde $\kappa = 8\pi G/c^2$ é a constante de gravitação de Einstein. Das expressões (4.38 - 4.41), de (4.47) e da parte singular da equação de Einstein, obtém-se que:

$$\kappa S_t^t \frac{\delta}{|f|} \approx 0; \tag{4.48}$$

$$\kappa S_r^r \frac{\delta}{|f|} \approx (\frac{f[\dot{R}]}{R} - \frac{[\dot{R}]}{R})\frac{\delta}{f^2}; \tag{4.49}$$

$$\kappa S_\theta^\theta \frac{\delta}{|f|} \approx (\frac{f[\dot{R}]}{R} - \frac{[\dot{R}]}{R})\frac{\delta}{f^2}; \tag{4.50}$$

$$\kappa S_\varphi^\varphi \frac{\delta}{|f|} \approx (\frac{f[\dot{R}]}{R} - \frac{[\dot{R}]}{R})\frac{\delta}{f^2}, \tag{4.51}$$

onde $S_j^i = g^{i\lambda}S_{\lambda j} \quad \text{com} \quad \lambda \in \{t, r, \theta, \varphi\}$.

Portanto, se conclui que o tensor energia-momento da hipersuperfície singular é

$$S \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(f-1)[\dot{R}]}{\kappa R} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(f-1)[\dot{R}]}{\kappa R} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(f-1)[\dot{R}]}{\kappa R} \end{pmatrix}.$$

Então, se $[\dot{R}] = 0$ conclui-se que $S \approx 0$, mas isto em geral não é necessário. Então, o tensor energia-momento, da hipersuperfície singular pode ser não nulo, contrariando assim o caso clássico.

4.2 A não-invertibilidade multiplicativa das funções generalizadas que mudam de sinal

Vamos agora demonstrar que funções generalizadas que mudam de sinal não possuem inverso multiplicativo.

Lema 4.4. *Seja dados* $(x_\epsilon), (y_\epsilon) \in \mathcal{E}_M$ *se* $x_\epsilon < z_\epsilon < y_\epsilon$ $\forall \epsilon \in I$, *então* $(z_\epsilon) \in \mathcal{E}_M$.

Demonstração:

Como (x_ϵ), $(y_\epsilon) \in \mathcal{E}_M$ então existem $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, $\eta_1, \eta_2 \in I$, $C_1, C_2 > 0$ tal que

$$|x(\epsilon)| \leq C_1 \epsilon^{-N_1} \ \forall\, \epsilon \in I_{\eta_1} \quad \text{e} \quad |y(\epsilon)| \leq C_1 \epsilon^{-N_2} \quad \forall\, \epsilon \in I_{\eta_2}.$$

Seja $\eta = min\{\eta_1, \eta_2\}$, $N = max\{N_1, N_2\}$ e $C = max\{C_1, C_2\}$ então

$$|x(\epsilon)| \leq C\epsilon^{-N} \quad \text{e} \quad |y(\epsilon)| \leq C\epsilon^{-N} \quad \forall\, \epsilon \in I_\eta.$$

Analisemos os seguintes casos:

1. Se $x(\epsilon) > 0 \quad \forall\, \epsilon \in I_\eta$ então $(x_\epsilon) \in \mathcal{E}_M$;

2. Se $y(\epsilon) < 0 \quad \forall\, \epsilon \in I_\eta$ então $(x_\epsilon) \in \mathcal{E}_M$, bastando multiplicar por menos e aplicar o caso 1.;

3. Se $x(\epsilon) < 0 < y(\epsilon) \quad \forall\, \epsilon \in I_\eta$ então

   (a) Se existe $\epsilon \in I_\eta$ tal que $x(\epsilon_1) < z(\epsilon) < 0$, então
   $$|z(\epsilon)| < |x(\epsilon)| < C\epsilon^{-N};$$

   (b) Se existe $\epsilon \in I$ tal que $x(\epsilon) < 0 < \hat{z}(\epsilon) < y(\epsilon)$, então
   $$|z(\epsilon)| < |y(\epsilon)| < C\epsilon^{-N}.$$

De (1.), (2.) e (3.) segue-se que $(z_\epsilon) \in \mathcal{E}_M$. ■

Lema 4.5. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *om comjunto aberto e convexo, dados* $cl[(x_{0\epsilon})], cl[(y_{0\epsilon})] \in \tilde{\Omega}_c$. *Se* $z_{0\epsilon} \in [x_{0\epsilon}, y_{0\epsilon}]$*(segmento de reta). Então* $cl[(z_{0\epsilon})] \in \tilde{\Omega}_c$

Demonstração:

Como $cl[(x_{0\epsilon})], cl[(y_{0\epsilon})] \in \tilde{\Omega}_c$ então $\exists K_1, K_2 \subset\subset \Omega$ $\eta_1 > 0, \eta_2 > 0$ tal que $x_{0\epsilon} \in K_1$ e $y_{0\epsilon} \in K_2$ para todo $\epsilon < \eta_1$, $\epsilon < \eta_2$.

Tome $\eta = min\{\eta_1, \eta_2\}$ e seja $K = K_1 \cup K_2$ então $x_{0\epsilon}, y_{0\epsilon} \in K$ para todo $\epsilon < \eta$.

Seja $\tilde{K} = \{tx + (1-t)y : t \in [0,1]x, y \in K\}$.

$$\tilde{K} = \{tx + (1-t)y : t \in [0,1]x, y \in K\}.$$

Então $z_{0\epsilon} \in \tilde{K} \subset\subset \Omega$ para todo $\epsilon < \eta$.

Claramente $\tilde{K}$ é limitado e como $\overline{\tilde{K}}$ é fechado então é compacto.

Resta provar que $\overline{\tilde{K}} \subset \Omega$:

Suponha que $\overline{\tilde{K}}$ não está contido em Ω e como $\tilde{K} \subset \Omega$ então $\overline{\tilde{K}} \cap \partial\Omega \neq \oslash$. Logo, existe $p \in \overline{\tilde{K}} \cap \partial\Omega$ e então $p \in \overline{\tilde{K}}$ e $p \in \partial\Omega$. Donde existe $(x_n) \subset \tilde{K}$ tal que $x_n \to p$, onde $x_n = t_n u_n + (1-t_n)v_n$ com $u_n, v_n \in K$ e $t_n \in [0,1]$.

Como K e $[0,1]$ são compactos então existe subsequencias (u_{n_i}), (v_{n_i}) e (t_{n_i}) tal que $u_{n_i} \to u_0$, $v_{n_i} \to v_0$ e $t_{n_i} \to t_0$. Então

$$x_{n_i} = t_{n_i} u_n + (1-t_n)v_{n_i} \to t_0 u_0 + (1-t_0)v_0 \in \Omega$$

pois Ω é convexo.

Da unicidade do limite temos que temos que $p = t_0 u_0 + (1-t_0)v_0 \in \Omega$, isto é, $p \in \Omega$. Mas isto é absurdo, pois $p \in \partial\Omega$ e Ω é aberto. ■

Teorema 4.6. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto e convexo, $\tilde{f} \in \mathcal{G}(\Omega)$ e $\tilde{x}_0, \tilde{y}_0 \in \tilde{\Omega}_c$ tal que:*

1. $\tilde{f}(\tilde{x}_0) < 0 < \tilde{f}(\tilde{y}_0)$,
2. $cl[(x_{0i\epsilon} - y_{0i\epsilon})] \in Inv(\overline{\mathbb{R}})$.

Então, existe $\tilde{z}_0 \in \tilde{\Omega}_c$ tal que $\tilde{f}(\tilde{z}_0) = 0$.

Demonstração:

Sejam $\tilde{w}_0 = \tilde{f}(\tilde{x}_0)$ e $\tilde{u}_0 = \tilde{f}(\tilde{y}_0)$ então existem representantes $(w_{0\epsilon})$, $(u_{0\epsilon})$ de $\tilde{w}_0$ e $\tilde{u}_0$, respectivamente e tal que:

1. $w_{0\epsilon} < 0$ para todo $\epsilon \in I$;
2. $u_{0\epsilon} > 0$ para todo $\epsilon \in I$.

Seja (f_ϵ) um representante de $\tilde{f}$ então existem $(\eta_\epsilon), (\nu_\epsilon) \in \mathcal{N}$ tal que:

$$f_\epsilon(x_{0\epsilon}) = w_{0\epsilon} + \eta_\epsilon \quad \text{e} \quad f_\epsilon(y_{0\epsilon}) = u_{0\epsilon} + \nu_\epsilon.$$

Defina agora:

1. $h_\epsilon(x) = f_\epsilon(x) - \eta_\epsilon$;
2. $g_\epsilon(x) = f_\epsilon(x) - \nu_\epsilon$.

Então,

$$\tilde{h} := cl[(h_\epsilon)] = \tilde{f} = cl[(g_\epsilon)] = \tilde{g}.$$

E além disso

$$\begin{aligned} h_\epsilon(x_{0\epsilon}) &= f_\epsilon(x_{0\epsilon}) - \eta_\epsilon \\ &= w_{0\epsilon} + \eta_\epsilon - \eta_\epsilon \\ &= w_{0\epsilon} < 0. \end{aligned} \tag{4.52}$$

Enquanto que

$$\begin{aligned} g_\epsilon(y_{0\epsilon}) &= g_\epsilon(y_{0\epsilon}) - \mu_\epsilon \\ &= u_{0\epsilon} + \nu_\epsilon - \nu_\epsilon \\ &= u_{0\epsilon} > 0. \end{aligned} \tag{4.53}$$

Defina agora, para cada $\epsilon \in I$, a aplicação $F_\epsilon : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$F_\epsilon(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_{0i\epsilon}-y_{0i\epsilon}}\{(x_i - y_{0i\epsilon})h_\epsilon(x) - (x_i - x_{0i\epsilon})g_\epsilon(x)\}.$$

Pela hipótese (2.) temos que $(\frac{1}{x_{0i\epsilon}-y_{0i\epsilon}})$ é moderado. Então $(F_\epsilon) \in \mathcal{E}_M(\Omega)$.

Portanto, podemos definir a aplicação $\tilde{F} : \tilde{\Omega}_c \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $\tilde{F} = cl[(F_\epsilon)] \in \mathcal{G}(\Omega)$ por

$$\begin{aligned} \tilde{F}(\tilde{x}) &= cl[(F_\epsilon(x_\epsilon))] \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} cl[(\frac{1}{x_{0i\epsilon} - y_{0i\epsilon}}\{(x_{i\epsilon} - y_{0i\epsilon})\tilde{h}_\epsilon(x_\epsilon) - (x_{i\epsilon} - x_{0i\epsilon})\tilde{g}_\epsilon(x_\epsilon)\})] \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_{0i} - y_{0i}}\{(x_i - y_{0i})\tilde{h}(x) - (x_i - x_{0i})\tilde{g}(x)\} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_{0i} - y_{0i}}\{(x_i - y_{0i})\tilde{f}(x) - (x_i - x_{0i})\tilde{f}(x)\} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{x_{0i} - y_{0i}}{x_{0i} - y_{0i}}\tilde{f}(x) \\ &= \tilde{f}(x). \end{aligned} \tag{4.54}$$

Observe que:

$$F_\epsilon(x_{0\epsilon}) = h_\epsilon(x_{0\epsilon}) = w_{0\epsilon} < 0.$$

e

$$F_\epsilon(y_{0\epsilon}) = g_\epsilon(y_{0\epsilon}) = u_{0\epsilon} > 0.$$

Então pelo teorema do valor internediário e da convexidade de Ω existe $z_{0\epsilon} \in [x_{0\epsilon}, y_{0\epsilon}] \subset \Omega$ tal que $F(z_{0\epsilon}) = 0$. E pelo lema 4.5 temos que $\tilde{z}_0 = cl[(z_{0\epsilon})] \in \tilde{\Omega}_c$. E por 4.54 obtemos que

$$\tilde{f}(\tilde{z}_0) = \tilde{F}(\tilde{z}_0) = 0. \blacksquare$$

Corolário 4.7. *Sejam $J = (-2\tau, 2\tau) \subset \mathbb{R}$ um intervalo com $\tau \in \mathbb{R}_+^*$ e $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(t) = H(t) - H(-t)$, onde H é a função de Heaviside. Se f é vista como uma função generalizada então existe $t_0 \in \tilde{J}_c$ tal que $f(t_0) = 0$.*

Demonstração:

Seja $x_{0\epsilon} = -\tau$ e $y_{0\epsilon} = \tau$ para todo $\epsilon in I$ com $\tau \mathbb{R}_+^*$, então

$$x_0 = cl[(x_{0\epsilon})] \text{ e } y_0 = cl[(y_{0\epsilon})]$$

pertencentes a $\tilde{J}_c$.
Então

$$f(x_0) = f(-\tau) = 2H(\tau) - 1 = -1 < 0.$$

Enquanto que

$$f(y_0) = f(\tau) = 2H(\tau) - 1 = 1 > 0.$$

Observe que $x_{0\epsilon} - y_{0\epsilon} = -2\tau$ para todo ϵ então $\frac{1}{x_0 - y_0} = -\frac{1}{2\tau} \in \overline{\mathbb{R}}$. Logo $(x_0 - y_0) \in Inv(\overline{\mathbb{R}})$.
Portanto, pelo teorema 4.7 existe $z_0 \in \tilde{J}_c$ tal que $f(z_0) = 0$. Cocluímos então que f não é invertívvel em $\mathcal{G}(J)$. $\blacksquare$

Podemos concluir, então, considerando a métrica FRW, que: a equação de Klein-Gordon não existe no ambiente das funções generalizadas. Como exemplo, podemos citar as métricas dadas em [Kam] para a obtenção das troca de assinaturas. Além disso, as componentes do tensor de Einstein e consequentemente as equações de Einstein, não fazem sentido neste ambiente. Portanto, o tensor energia-momento da hipersuperfície, obtido em [MN] neste ambiente, também não existe.

Referências Bibliográficas

[AB1] Aragona, J.; Biagioni, H. **Intrinsic definition of the Colombeau algebra of generalized functions**. Analysis mathmatics,v.17,p.75-132,1991.

[AJ] Aragona, J.; Juriaans, S.O. **Some structural properties of the topological ring of Colombeau's generalized numbers**. Communications in Algebra. p.2201-2230, 2001.

[AJOS] Aragona, J.; Juriaans, S.O.; Oliveira, O. R. B.; Scarpalezos, D. **Algebraic and Geometric theory of the topological ring of Colombeau generalized functions**.

[AFJ1] Aragona, J.; Fernandes, R.; Juriaans, S.O. **A discontinuos Colombeau differential calculus** Monatassh, Math,13-29, 2005.

[AFJ2] Aragona, J.;Fernadez, R.; Juriaans,O.S; Oberguggenberger,M. **Differential calculus and integration generalized functions on membranes**. arXiv:0809.403901[math.AP]23Sep2008.

[AFJ3] Aragona, J.;Fernadez, R.; Juriaans,O.S. **The sharp topology on the full Colombeau algebra of generalized functions**.(2005) Preprint.

[AFJ4] Aragona, J.;Fernadez, R.; Juriaans,O.S. **The natural topologies on the Colombeau algebra**.(2005) Preprint.

[AS] Aragona, J.; Soares, M. **An existence theorem for an analytic first order PDE in the framework of Colombeaus̀ theory Monatsh**. Math. 134,9-17(2001).

[Al] Allendoerfer, C.B. **The Euler number of a Riemann manifold**. Amer. J. Math., 62, 1940, 243-248.

[AM] Atiyah, M.; MacDonald, J.G. **Introduction to Commutative algebra**, Addison-Wesley,1969.

[Ca1] Carmo, M.P. **Geometria Riemanniana**. Projeto Euclides,2a. ed.,1968.

[Ca2] Carmo, M.P. **Differential geometry of curves and surface**. Prentice Hall, New Jersey,1976.

[Ch] S.S.Chern, A simple intrinsic proof of the Gauss-Bonnet formula for closed Riemannian manifold, Ann. Math. vol. 45, 1944 pp. 747-752.

[Col1] Colombeau, J.F.**Elementary introduction to new generalized functions**. North Holland, Amsterdam, 1985.

[CG] Colombeau, J.F.; J.E. Galé. **New generalized functions and multiplication of distributions**. North Holland, Amsterdam 1985.

[Col2] Colombeau, J.F.**Multiplication de distributions et acoustique**, J. Acoustique 1, 9-14,1988.

[Fe] Fenchel, W. **On total curvatures of a Riemannian manifolds: I**. Jour. London Math. Soc., 15, 1940, 15-22.

[GKSV] Grosser, M; Kunzinger M., Steinbauer; R. Vickers J.A. **A global theory of algebras of generalized functions**. Adv. Math., 166(1): 50-72, 2002.

[GKOS] Grosser, M.; Kunzinger, M.; Oberguggenberger,M.; Steinbauer, R. **Geometric theory of generalized functions with applications to general relativity**. Kluwer academic plublishers. London, 2001.

[Hun] Hungerford, T. W. **Algebra**. Springer-Verlag. USA,2003.

[HD] Hellaby,C.; Dray, T. **Replay comment:comparison of approaches to classical signature change**. arXiv:gr-qc/9601040vI 25 Jan 1996.

[HW] Hurewicz, W.; Wallman, H. **Dimension theory**. Princeton University press. Princeton, New Jersey, 1941.

[Is] Israel. W. **Singular hypersurfaces and thin shells in general relativity**. Il nuovo Cimento. Rivista internazionale organo della societa italiana di fisica. Vol.XLIV B,N.1 Serie decima. 11 Luglio 1966.

[Jur] Juriaans, S.O. **Uma introdução à teoria das funções generalizadas de Colombeau**. 64^0 Seminário Brasileiro de Análise-USP, São Paulo-2006.

[Jac1] Jacobson, N. **Basic algebra**.Vol.I. W.H.Freeman and company. San Francisco, 1974.

[Jac2] Jacobson, N. **Basic algebra**.Vol.II. W.H.Freeman and company. San Francisco, 1974.

[Kam] Kamleh, W. **Singnature changing space-times and the new generalized function**. Preprint.

[Kun1] Kunzinger, M. **Lie transformation groups in Colombeau algebras**. Doctoral Thesis, University of Viena, 1996.

[KO] Kunzinger,M.; Oberguggenberger,M. **Characterization of Colombeau generalized functions by their point value**. Math. Nachr. 203(1999).

[KS1] Kunzinger, M.; Steinbauer, R. **Foundations of a nonlinear distributional geometry**. arXiv:math.FA/0102019v4, 2001.

[KS2] Kunzinger, M.; Steinbauer, R. **Generalized pseudo-riemannian geometry**. Transactions of the American Mathmatical Society. V.354(10), 4179-4199,2002.

[KS3] Kunzinger, M.; Steinbauer, R. **A note on the Penrose junction conditions**.arXiv:gr-qc/9811007v2 19 Apr 1999.

[Kun2] Kunzinger, M. **Recent progress in special Colombeau algebras: geometry, topology, and algebra**. arXiv:0702.4304v1.math.FA, 2007.

[Mir] Miraglia, F. **Introduction to partially ordered structures and sheaves**. CLE, Unicamp, 2002.

[MN] Mansouri, Reza; Nozari, Kourosh. **A new distributional approach to signature change**. General Relativity and Gravitation, Vol. $32, n°2, 2000$.

[Obe] Oberguggenberger, M. **Multiplication of distributions and applications to partial differential equations**. Pitman, 1992.

[OPS] Oberguggenberger, M.; Pilipovic, S.; Scarpalezos, D. **Local properties of Colombeau generalized function**. Preprint, 2001.

[Sca1] Scarpalezos, D. **Topologies dans les espaces de nouvelles fonctions generalisées de Colombeau. $\overline{\mathbb{C}}$ topologiques**. Université Paris 7, 1993.

[Sca2] Scarpalezos, D. **Colombeau´s generalized functions: topological structures micro local properties. A simplified point of view.** CNRSURA212, Université Paris 7, 1993.

[Sch1] Schwartz, L. **Sur l'impossibilité de la multiplication des distributions**. C.R. Acad.Sci. Pris 239(1954), 847-848.

[Sch2] Schwartz, L. **Théorie des distributions**. Nouvelle ÉD. Hermann, 1996.

[Spi] Spivak, Michael. **A comprehensive introduction to differential geometry**. Publish or Perish,INC. Houston, Texas, 2005.

[SV] Steinbauer, R.; Vickers. **The use of generalized functions and distributions in general relativity**. Class.Quantum Grav. 23(2006), 91-114.

[SH] Steinbauer, R.;Heinzle, M. **Remarks on the distributional Schwarzschild geometry**.arXiv:gr-qc/0112047 v1 19 Dec 2001.