Integração não-absoluta em $\mathbb{R}^2$ usando partições triangulares

Pedro Levit Kaufmann

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
DOUTOR EM CIÊNCIAS

Programa: Matemática
Orientador: Prof. Dr. Ricardo Bianconi

Durante o desenvolvimento deste trabalho, o autor obteve apoio financeiro do CNPq e da CAPES.

São Paulo, maio de 2009.

Integração não-absoluta em $\mathbb{R}^2$ usando partições triangulares

Este exemplar corresponde à redação
final da tese devidamente corrigida
e defendida por Pedro Levit Kaufmann
e aprovada pela Comissão Julgadora.

Banca Examinadora:

- Prof. Dr. Ricardo Bianconi (orientador) - IME-USP.
- Prof. Dr. Severino Toscano do Rêgo Melo - IME-USP.
- Prof. Dr. Paulo Régis Caron Ruffino - IMECC-UNICAMP.
- Prof. Dr. Dicesar Lass Fernandes- IMECC-UNICAMP.
- Prof. Dr. Plácido Zoega Táboras- IMECC-UNICAMP.

Agradecimentos

Este trabalho não existiria sem a vívida colaboração de uma série de pessoas. Devo destacar meu orientador Ricardo, "pelos problemas que me trouxe", por sua disposição e por nossas frutíferas discussões; minha família, pelo apoio constante e incondicional; Eliza, pela inspiração, e pelo eficientíssimo apoio moral; Štefan, meu co-orientador em Praga, pela extensa bagagem matemática com a qual me pôs em contato, pelas incontáveis cervejas e outras bebidas que me ofereceu e pelo seu misterioso senso de humor.

Dois agradecimentos especiais devo ao Prof. Paulo Cordaro, pela ajuda inestimável em um momento difícil, e ao Prof. Pavel Krejčí, pelo grande apoio e pela idéia dos triângulos.

Agradeço também a Profa. Mary Lilian, pela orientação durante a primeira etapa de meu Doutorado.

Inúmeras outras pessoas também colaboraram muito durante os últimos quatro anos, professores, alunos e amigos, no Brasil e no exterior. Não poderia incluir todos os seus nomes temendo cometer alguma injustiça. Alguns colaboraram através de aulas e palestras, outros estudando junto, e outros através de muitas conversas matemáticas, profissionais, filosóficas e pessoais. Finalmente, sou agradecido àqueles que pessoalmente me inspiraram e influenciaram, voluntária ou involuntariamente, através de suas atitudes e posturas em relação à vida e à ciência.

Resumo

Utilizamos neste trabalho um exemplo dado por Mařík e apresentado por Karták em [5] para mostar que as integral de Henstock-Kurzweil e a M_1-integral introduzida em [4] não são invariantes por rotações. A seguir é apresentada uma definição abstrata de integral e é discutida a incompatibilidade entre o Teorema da Divergência e o Teorema de Fubini quando grande generalidade é requerida. Finalmente é introduzida uma nova integral não-absoluta baseada em partições triangulares do domínio, que admite fórmula de mudança de variáveis com respeito a transformações lineares, satisfaz o Teorema da Divergência com grande generalidade e apresenta boas relações com a integral de Lebesgue. Algumas propriedades de convergência são estudadas para esta integral.

Abstract

In this work an example by Mařík, presented by Karták in [5], is brought up in order to show that the Henstock-Kurzweil integral and the M_1-integral introduced in [4] are not invariant by rotations. A general definition of integral is presented, followed by a discussion about incompatibility between the Divergence Theorem and Fubini's Theorem when great generality is required. Finally a new nonabsolute integral based on triangular partitions of the domain is introduced, which admits change of variables formula with respect to linear transformations, satisfies the Divergence Theorem with great generality and presents good relations with the Lebesgue integral. Some convergence properties are studied for this integral.

Prefácio

Consideremos o problema de decidir para que classe de funções F definidas em um intervalo compacto $[a,b]$ é satisfeita a equação

$$\int_a^b F' = F(b) - F(a) \tag{0.1}$$

Se a integral considerada em (0.1) for a integral de Lebesgue, é sabido que nem para todas as funções deriváveis F temos que F' é Lebesgue integrável; é o caso por exemplo da função F definida em $[0,1]$ por

$$F(x) = \begin{cases} x^2 sen\left(\frac{1}{x^2}\right), & \text{se } x > 0; \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases} \tag{0.2}$$

Denjoy, em 1912, e independentemente Perron, em 1913, definiram dois novos processos de integração sobre $[a,b]$ mais abrangentes que a integração de Lebesgue tais que (0.1) é satisfeita para *toda* função F derivável. As naturezas de suas definições eram bem distintas, contudo se provou em torno de dez anos mais tarde que eram equivalentes (veja [7] para as definições das integrais de Denjoy e Perron e para a demonstração da equivalência). Em 1956, Jaroslav Kurzweil e Ralph Henstock desenvolveram em parceria um processo de integração equivalente ao de Denjoy e Perron, contudo de muito mais simples definição, baseando-se em somas de Riemann (a integral de Henstock-Kurzweil será brevemente discutida no Capítulo 1; veja a Definição 1.1). Refere-se às integrais de Denjoy, Perron e Henstock-Kurzweil como integrais *não-absolutas*, devido ao fato de que nem sempre, quando uma função é integrável com respeito a uma dessas integrais, temos que o valor absoluto da mesma função também é integrável, como acontece com a integral de Lebesgue.

O problema de definir integrais mais abrangentes que a de Lebesgue obtendo máxima generalidade de funções que satisfaçam (0.1) se estende naturalmente para mais dimensões; queremos definir integrais em certo domínio $U \subset \mathbb{R}^N$, que satisfaçam a seguinte versão bem geral do Teorema da Divergência:

$$\int_U divF = \int_{\partial U} F \cdot N, \text{para cada } F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \text{ diferenciável.} \tag{0.3}$$

Para que isto aconteça, naturalmente $divF$ deve ser integrável. Para domínios suficientemente simples (por exemplo, quando U é a união finita de triângulos) a integral à direita sempre converge. A extensão natural da definição de integral de Henstock-Kurzweil para o caso multidimensional não satisfaz (0.3), mas por outro lado satisfaz um Teorema do tipo Fubini bem geral (ver [8]). Jean Mawhin em [6] acrescentou à definição da integral de Henstock-Kurzweil uma condição de regularidade para as partições, obtendo (0.3), mas perdendo a propriedade básica da aditividade da integral com respeito a intervalos. Em [4] Jarník, Kurzweil e Schwabik definiram a M_1-integral (veja a Definição 1.3 abaixo), uma modificação da integral definida por Mawhin que ainda satisfaz (0.3) e não apresenta a mesma falha relativa à aditividade.

Estas três integrais apresentam uma deficiência em comum: não são invariantes com respeito a rotações (veja Proposição 1.7); não podemos dispor portanto de uma satisfatória fórmula de mudança de variáveis para estas integrais. Tem grande peso neste resultado o fato de que as partições do domínio consideradas nos três casos são partições em *intervalos*. Em [3], Jarník e Kurzweil estabeleceram mais uma integral, esta considerando partições do domínio em subconjuntos com fronteira continuamente diferenciável por partes, obtendo (0.3) e fórmula de mudança de variáveis para transformações continuamente diferenciáveis. Contudo, a riqueza de partições para esta última integral gera dificuldades técnicas consideráveis ao se efetuar cálculos, mesmo para se provar propriedades simples.

Diante deste panorama, vamos nos restringir ao caso bidimensional e expor ao longo deste trabalho os seguintes tópicos:

1. mostraremos que o Teorema de Fubini e o Teorema da Divergência são, sob um certo aspecto, *mutuamente exclusivos*. Para tal se fará necessário estabelecer o conceito abstrato de integrais e primitivas.

2. vamos introduzir uma integral que preserve a maleabilidade técnica da integral M_1, utilizando partições do domínio em *triângulos* ao invés de intervalos, e mostrar que esta integral satisfaz (0.3), bem como admite fórmula de mudança de variáveis para transformações lineares.

Discutiremos (1) no Capítulo 2 e (2) no Capítulo 3.

Sumário

Capítulo 1

A integral de Henstock-Kurzweil e a integral M_1

1.1 Definições

A integral de Henstock-Kurzweil, que denotaremos por HK-integral, é dita uma *integral de calibre*. Isto significa que sua definição se baseia em somas de Riemann, porém é suprimida a condição de que a espessura das partições do domínio U de determinada função deva ser *uniformemente* pequena para que consideremos a convergência da integral dessa função. Para tal é utilizada a noção de *calibre*, que é simplesmente uma função estritamente positiva definida em U. Veja a Definição 1.1 abaixo.

Usualmente nos referimos a um *intervalo em* $\mathbb{R}^N$ como um produto de N intervalos da reta. Dado $U \subset \mathbb{R}^2$, denotamos por

$$sub(U) \doteq \{J \subset U : \ J \text{ é um intervalo}\}$$

o conjunto de todos os intervalos contidos em U, ou *subintervalos* de U. Todos os intervalos aos quais nos referimos no decorrer deste texto, exceto quando indicado, são intevalos fechados.

Definição 1.1. *Seja $I \subset \mathbb{R}^N$ um intervalo. Uma* HK-partição de I *é um conjunto finito da forma $\{(I^j, t^j)\}_{j\in\Gamma}$ onde $I^j \in sub(I)$ para cada $j \in \Gamma$, os intervalos I^j são* não-sobrepostos *(isto é, $|I^j \cap I^k| = 0$ sempre que $j \neq k$), $t^j \in I^j$* e *$\cup_{j\in\Gamma} I^j = I$.*

A soma de Riemann *de uma função $f : I \to \mathbb{R}$ com respeito a uma HK-partição $\mathcal{P} = \{(I^j, t^j) : j \in \Gamma\}$ de I é dada por*

$$S(f, \mathcal{P}) \doteq \sum_{j\in\Gamma} f(t^j)|I^j|.$$

Dado um calibre δ em I, dizemos que uma HK-partição $\{(I^j, t^j)\}_{j\in\Gamma}$ de I é δ-fina *se $I^j \subset B_{\delta(t^j)}(t^j)$ para cada $j \in \Gamma$, onde $B_{\delta(t^j)}(t^j)$ é a bola de centro t^j e raio $\delta(t^j)$.*

1. *Seja $f : I \to \mathbb{R}$. Dizemos que f é* HK-integrável *se existir $A \in \mathbb{R}$ tal que para cada $\epsilon > 0$ existe um calibre δ em I satisfazendo, para cada HK-partição δ-fina $\mathcal{P}$ de I,*

$$|S(f, \mathcal{P}) - A| < \epsilon. \tag{1.1}$$

Neste caso escrevemos

$$(HK)\int f \doteq (HK)\int_I f \doteq A.$$

2. *Seja $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ de suporte compacto. Dizemos que f é* HK-integrável *se existir $A \in \mathbb{R}$ e um intervalo $J \subset \mathbb{R}^N$ com $\operatorname{supp} f \subset J$ tais que f é HK-integrável em J e $(HK)\int_J f = A$, e neste caso definimos*

$$(HK)\int f \doteq (HK)\int_{\mathbb{R}^2} f \doteq (HK)\int_J f = A.$$

A existência de HK-partições δ-finas de I independentemente do calibre δ escolhido é garantida pelo Lema de Cousin (veja [1]).

É fácil verificar que a definição da HK-integral de f em $\mathbb{R}^N$ é independente da escolha de J. É possível definir a HK-integral também para funções que não têm suporte compacto (veja [1] para o caso unidimensional); embora nosso interesse aqui será focalizado em funções de domínio limitado, o item *2.* da definição será útil para o estudo do efeito das rotações para essa integral.

Observe que, se considerássemos na definição acima apenas os calibres *constantes*, a HK-integral coincidiria com a integral de Riemann. Desta forma, todas as funções Riemann integráveis são também HK-integráveis, e os valores das integrais coincidem. Diz-se neste caso que a integral de Henstock-Kurzweil é *mais geral* que a integral de Riemann; esse conceito será aprofundado no Capítulo 2. Para $N = 1$, através da HK-integral podemos não apenas integrar todas as funções Riemann integráveis, mas também as Lebesgue integráveis e todas as derivadas de funções deriváveis F, satisfazendo

$$(HK)\int_a^b F' = F(b) - F(a).$$

Referimo-nos ao livro de Lee [9] para um estudo aprofundado da HK-integral em uma dimensão.

Quando $N = 2$, contudo, a HK-integral não satisfaz o Teorema da Divergência como indicado em (0.3). Isso já foi ressaltado em [6] e também é consequência do fato da HK-integral satisfazer o Teorema de Fubini (veja [8]), o que pela proposição 2.5 mais adiante exclui a possibilidade de termos (0.3). Em [4] e [6] este problema foi contornado exigindo-se uma certa *regularidade* das partições consideradas ao avaliarmos a convergência das somas de Riemann em (1.1). Segue a definição de regularidade de uma partição considerada em [4]:

Definição 1.2. *Definimos a* irregularidade *de uma HK-partição* $\mathcal{P} = \{(I^j, t^j)\}_{j\in\Gamma}$ *por*

$$irr(\mathcal{P}) \doteq \sum_{j\in\Gamma} per(I^j)\, diam(I^j),$$

aonde $per(I^j)$ *e* $diam(I^j)$ *denotam respectivamente o perímetro e o diâmetro de* I^j. *Dado* $C > 0$, $\mathcal{P}$ *é dita* C-regular *se* $irr(\mathcal{P}) \leq C$.

Será conveniente denotar, para um intervalo arbitrário $J \subset \mathbb{R}^2$, $q(J) \doteq per(J)\, diam(J)$. Então a irregularidade de $\mathcal{P}$ pode ser escrita como

$$irr(\mathcal{P}) = \sum_{j\in\Gamma} q(I^j).$$

Uma adaptação do Lema de Cousin garante a existência de partições δ-finas, C-regulares de $I \subset \mathbb{R}^2$, sob a condição de que $C \geq q(I)$. Observe que para cada intervalo $J \subset I$ temos que $q(J) \leq q(I)$, de forma que também existem partições δ-finas C-regulares de J quando $C \geq q(I)$.

Definição 1.3. *1.* $f : I \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *é dita* M_1-integrável *se existir* $A \in \mathbb{R}$ *tal que para cada* $\epsilon > 0$ *e cada* $C \geq q(I)$ *existe um calibre* δ *em* I *satisfazendo, para cada HK-partição* $\mathcal{P}$ *de* I, *a seguinte condição:*

$$\text{se } \mathcal{P} \text{ é } \delta\text{-fina e } C\text{-regular, então } |S(f,\mathcal{P}) - A| < \epsilon. \tag{1.2}$$

Neste caso escrevemos

$$(M_1)\int f \doteq (M_1)\int_I f \doteq A.$$

2. Seja $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *de suporte compacto. Dizemos que* f *é* M_1-integrável *se existir* $A \in \mathbb{R}$ *e um intervalo* $J \subset \mathbb{R}^2$ *com* $supp\, f \subset J$ *tais que* f *é* M_1*-integrável em* J *e* $(M_1)\int_J f = A$, *e neste caso definimos*

$$(M_1)\int f \doteq (M_1)\int_{\mathbb{R}^2} f \doteq (M_1)\int_J f = A.$$

A restrição imposta às partições consideradas em (1.2) faz com que a M_1-integral seja mais geral que a HK-integral, *estritamente* pois através da M_1-integral pode-se integrar o divergente de qualquer função diferenciável (veja [4]), o que não ocorre com a HK-integral.

É possível definir a M_1-integral também sobre domínios que são conjuntos *elementares*, isto é, conjuntos que podem ser particionados em uma quantidade finita de intervalos. Uma condição suficiente para que $K = \cup_{j=1}^n I^j$ admita partições δ-finas C-regulares, independentemente do calibre δ, é que $C \geq \sum_{j=1}^n q(I^j)$; o importante é que *à partir* de um certo $C > 0$ suficentemente grande sempre existam partições δ-finas C-regulares, de forma que vamos nos referir, exceto quando indicado, simplesmente a "$C > 0$ *suficientemente* *grande*" para que os domínios considerados admitam partições C-regulares. Isso não altera a definição da M_1-integral, já que toda partição C-regular é também D-regular, sempre que $D > C$.

Mostrar que as propriedades da M_1-integral destacadas em [4] são preservadas ao considerarmos domínios elementares é um trabalho bastante técnico, que omitiremos neste ponto pelo fato de ser análogo ao trabalho realizado com a Δ-integral na Seção 3.2. Destacamos duas dessas propriedades que se farão necessárias na próxima Seção:

Proposição 1.4 (Aditividade). *Seja $K \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto elementar, $f : K \to \mathbb{R}$ e seja $\{L, R\}$ uma partição de K em conjuntos elementares. Então f é M_1-integrável em K se e somente se f é M_1-integrável em L e R, e neste caso*

$$(M_1)\int_L f + (M_1)\int_R f = (M_1)\int_K f.$$

Lema 1.5 (Saks-Henstock). *Seja $K \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto elementar, f uma função M_1-integrável em K e considere um calibre δ em K tal que a condição (1.2) da Definição da M_1-integral é satisfeita com respeito a $C > 0$ e $\epsilon > 0$. Suponha que $\mathcal{P} = \{(I^j, t^j) : j \in \Gamma\}$ é uma* HK-subpartição *δ-fina, C-regular* em *I.*[1] *Então*

$$\left| \sum_{j \in \Gamma} \left[f(t^j)|I^j| - (M_1)\int_{I^j} f \right] \right| \leq \epsilon.$$

1.2 Efeito das rotações para a HK-integral e a M_1-integral

Em [5], Karel Karták apresenta o seguinte exemplo, dado por seu orientador de mestrado na época, J. Mařík:

Exemplo 1.6. Seja (a_n) uma sequência de números reais com $a_0 = 0$, $a_0 < a_1 < a_2 < \ldots$ e $a_n \to 1$, e seja (b_n) uma sequência de reais positivos convergindo a zero mas tal que $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n = +\infty$. Definimos para cada n natural o seguinte subconjunto de $[0,1] \times [0,1]$:

$$K_n \doteq [a_{n-1}, a_n] \times [a_{n-1}, a_n], \text{ e } K_n^+ \doteq \{(x,y) \in K_n : y \geq x\}.$$

É possível construir uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ satisfazendo para cada n natural:

1. f é contínua em K_n e se anula em ∂K_n;

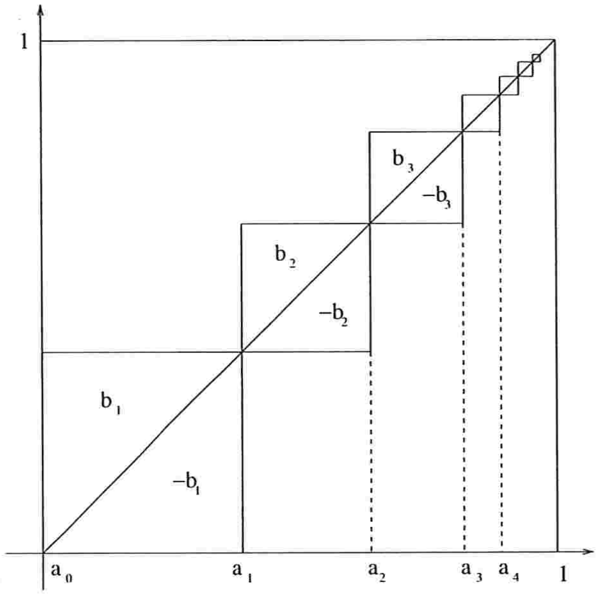
2. $f(x,y) = -f(y,x)$, para cada $(x,y) \in K_n$;

[1] Uma *HK-subpartição em K* é definida da mesma forma que uma HK-partição de K (veja Definição 1.1), excluindo-se a condição $\cup_{j \in \Gamma} I^j = K$; δ-finura e C-regularidade são definidas da mesma forma que para HK-partições de K.

3. $f(x,y) \geq 0$, para cada $(x,y) \in K_n^+$;

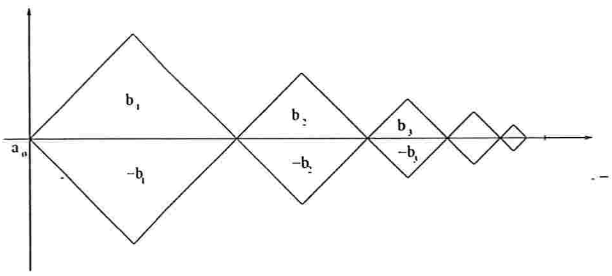
4. $(R)\int_{K_n^+} f = b_n$

e tal que $f(x,y) = 0$ para cada $(x,y) \notin \cup_{n\in\mathbb{N}} K_n$. Note que f é descontínua em $(1,1)$ e é contínua nos demais pontos de $\mathbb{R}^2$.



Proposição 1.7. *1. A função f definida acima é M_1-integrável;*

2. a $\frac{\pi}{4}$-rotação de f no sentido horário não é M_1-integrável. Isto é, se $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é definida por $T \doteq \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, então $f \circ T^{-1}$ não é M_1-integrável.



$f \circ T^{-1}$ não pode ser M_1-integrável em decorrência da aditividade da M_1 integral com respeito a intervalos. De outra forma, como $supp\, f \circ T^{-1} \subset [0, \sqrt{2}] \times [-1, 1]$, $f \circ T^{-1}$ deveria ser M_1-integrável em $[0, \sqrt{2}] \times [0, 1]$, o que contradiria o fato de que $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n = +\infty$.

Podemos provar diretamente que f é M_1-integrável usando a Proposição 1.8 abaixo. Esse resultado foi provado para a integral de Perron em [5], e aqui apresentamos uma versão para a M_1-integral. Observe que [5] data de 1955, e a definição de integral desenvolvida por Henstock e Kurzweil (Definição 1.1) é posterior a 1956.

Proposição 1.8. *Considere $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ e $A \in \mathbb{R}$. Então são equivalentes as seguintes afirmações:*

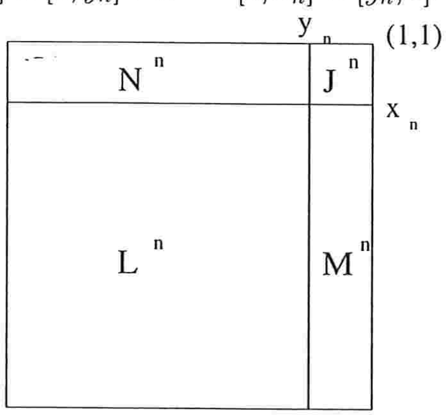
1. *f é M_1-integrável em $[0,1]^2$ e $(M_1)\int f = A$;*

2. *f é M_1-integrável em $K_{(x,y)} \doteq [0,1]^2 \setminus [x,1] \times [y,1]$ para cada x, y com $0 < x, y < 1$, e o limite*
$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} (M_1)\int_{K_{(x,y)}} f \tag{1.3}$$
existe e é igual a A.

Usaremos notação semelhante a de [5]: se f e A satisfizerem as condições do item *2.*, diremos que f é *M_1^{**}-integrável* e que A é a *M_1^{**} integral de f*, e denotaremos
$$(M_1^{**})\int f \doteq A.$$

Demonstração. (1)$\Rightarrow$(2) Mostremos primeiro o seguinte: para cada $t \in [0,1]^2$ e cada sequência $(J^n)_n$ de subintervalos de $[0,1]^2$ convergindo a t (no sentido de que $J^1 \supset J^2 \supset \ldots$ e $\bigcap_{n=1}^{\infty} J^n = \{t\}$) temos que
$$\lim_{n\to\infty} (M_1)\int_{J^n} f = 0.$$
Observe que, pela aditividade da M_1-integral (Proposição 1.4), f é M_1-integrável em cada J^n. Dado $\epsilon > 0$, o Lema de Saks-Henstock 1.5 nos garante que existe $\delta = \delta(t) > 0$ tal que $J^n \subset B_{\delta(t)}(t)$ implica
$$\left| f(t)|J^n| - (M_1)\int_{J^n} f \right| < \epsilon;$$
como $f(t)|J^n|$ converge a zero, segue a conclusão. Isto que acabamos de mostrar equivale a dizer que *as primitivas de funções M_1-integráveis são contínuas*, como veremos no proximo Capítulo.

Suponha agora que $(J^n)_n$ converge a $(1,1)$, $J^n = [x_n, 1] \times [y_n, 1]$, e considere $L^n \doteq [0, x_n] \times [0, y_n]$, $M^n \doteq [x_n, 1] \times [0, y_n]$ e $N^n \doteq [0, x_n] \times [y_n, 1]$. Veja a figura abaixo.



Novamente pela aditividade da M_1-integral, para cada n temos

$$(M_1)\int_{L_n} f + (M_1)\int_{M_n} f + (M_1)\int_{N_n} f + (M_1)\int_{J_n} f = (M_1)\int f = A.$$

Logo,

$$(M_1)\int_{K(x_n,y_n)} f - A = (M_1)\int_{L_n} f + (M_1)\int_{M_n} f + (M_1)\int_{N_n} f - A = -(M_1)\int_{J_n} f,$$

que converge a zero, de onde segue que f é M_1^{**}-integrável, com $(M_1^{**})\int f = A$.

(2)$\Rightarrow$(1) Suponha que f seja M_1^{**}-integrável, com $(M_1^{**})\int f = A$. Vamos chamar, para cada subintervalo $J \subset [0,1]^2$ com $(1,1) \in J$,

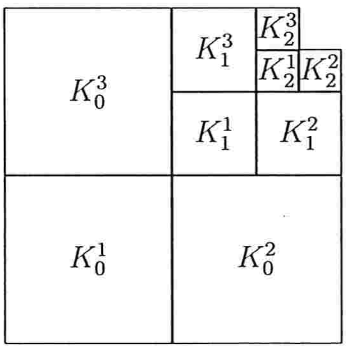
$$\Phi(J) \doteq (HK)\int_{[0,1]^2 \setminus J} f.$$

Sejam $\epsilon > 0$ e $C \geq q([0,1]^2)$, e vamos escolher $r > 0$ satisfazendo $|r^2 f(1,1)| < \epsilon$ e tal que , para cada $J \subset B_r(1,1)$ subintervalo com $(1,1) \in J$,

$$|\Phi(J) - A| < \epsilon. \tag{1.4}$$

Definamos, para cada i natural, $J_i \doteq [1-2^{-i}, 1]^2$. Então existe i_1 tal que, para cada $J \subset J_{i_1}$ subintervalo com $(1,1) \in J$, a desigualdade (1.4) é satisfeita. Definamos também, para cada i natural e cada $l \in \{1,2,3\}$,

$$K_i^l \doteq \begin{cases} [1-2^i, 1-2^{1+1}] \times [1-2^i, 1-2^{1+1}], & \text{if } l = 1; \\ [1-2^i, 1-2^{1+1}] \times [1-2^{i+1}, 1], & \text{if } l = 2; \\ [1-2^{i+1}, 1] \times [1-2^i, 1-2^{1+1}], & \text{if } l = 3, \end{cases}$$



Seja δ_i^l um calibre em K_i^l tal que para cada HK-partição δ_i^l-fina, C-regular $\mathcal{Q}$ de K_i^l temos

$$\left| S_{K_i^l}(f, \mathcal{Q}) - (M_1)\int_{K_i^l} f \right| < \frac{\epsilon}{3.2^i}. \tag{1.5}$$

É possível definir um calibre δ em $[0,1]^2$ satisfazendo as seguintes propriedades:

1. $\delta(1,1) \leq 2^{-i_1} = d((1,1),[0,1]^2 \setminus J_{i_1})$ (e consequentemente $\delta(1,1) \leq r$);

2. $x \neq (1,1) \Rightarrow \delta(x) \leq d(x,(1,1))$;

3. $x \in K_i^l \Rightarrow \delta(x) \leq \delta_i^l(x)$;

4. $x \in int(K_i^l) \Rightarrow \delta(x) \leq d(x,[0,1]^2 \setminus K_i^l)$.

onde $int(K_i^l)$ é o interior de K_i^l em relação à topologia induzida de $\mathbb{R}^2$ em $[0,1]^2$. Vamos chamar $K_i \doteq K_i^1 \cup K_i^2 \cup K_i^3 = J_i \setminus J_{i+1}$; as propriedades (3) e (4) do calibre δ e a desigualdade (1.5) garantem que, para cada HK-partição δ-fina, $3C$-regular $\mathcal{Q}$ de K_i podemos assumir que cada intervalo de $\mathcal{Q}$ está contido em algum K_i^l, e

$$\left| S_{K_i}(f,\mathcal{Q}) - (M_1)\int_{K_i} f \right| < \frac{\epsilon}{2^i}. \tag{1.6}$$

Suponha que $\mathcal{P} = \{(I^j,t^j) : j \in \Gamma\}$ seja uma HK-partição δ-fina, C-regular de $[0,1]^2$. Pela definição de δ existe $j_0 \in \Gamma$ tal que $t^{j_0} = (1,1)$ e $I^{j_0} \subset J_{i_1}$, e podemos assumir que cada I^j com $j \neq j_0$ está contido em algum K_i^l.

Fixemos $i_0 > i_1$ tal que $J_{i_0} \subset I^{j_0}$. Se $\mathcal{R}$ é uma HK-partição δ-fina, C-regular de $J_{i_1} \setminus J_{i_0}$, então

$$\left| S(f,\mathcal{R}) - (M_1)\int_{J_{i_1}\setminus J_{i_0}} f \right| < \epsilon. \tag{1.7}$$

De fato, podemos assumir que $\mathcal{R}$ pode ser escrito como uma união disjunta $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{i_1} \cup \cdots \cup \mathcal{R}_{i_0-1}$ onde, para cada $i = i_1, \ldots, i_0 - 1$,

$$\mathcal{R}_i \doteq \{(L^j,t_j) \in \mathcal{R} : L^j \subset K_i\}$$

é uma HK-partição δ_i-fina, $3C$-regular de K_i. Então para cada $i = i_1, \ldots, i_0 - 1$ temos

$$\left| S(f,\mathcal{R}_i) - (HK)\int_{K_i} f \right| < \frac{\epsilon}{2^i},$$

e por (1.6) obtemos que

$$\left| S(f,\mathcal{R}) - (HK)\int_{J_{i_1}\setminus J_{i_0}} f \right|$$

$$= \left| S(f,\mathcal{R}_{i_1}) + \cdots + S(f,\mathcal{R}_{i_0-1}) - \left[(M_1)\int_{K_{i_1}} f + \cdots + (HK)\int_{K_{i_0-1}} f \right] \right| \leq \sum_{i=i_1}^{i_0-1} \frac{\epsilon}{2^i} < \epsilon.$$

Vamos definir

$$\mathcal{P}_0 \doteq \{(I^j,t^j) : j \in \Gamma_0\}, \text{ e } \mathcal{P}_1 \doteq \{(I^j,t^j) : j \in \Gamma_1\},$$

onde $\Gamma_0 \doteq \{j \in \Gamma : I^j \subset [0,1]^2 \setminus J_{i_1}\}$ e $\Gamma_1 \doteq \Gamma \setminus (\Gamma_0 \cup J_0)$. Então $\mathcal{P}$ pode ser escrito como a união disjunta

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_0 \cup \mathcal{P}_1 \cup \{(I^{j_0},t^{j_0})\}.$$

$\mathcal{P}_1$ é uma HK-subpartição δ-fina C-regular em $J_{i_1} \setminus J_{i_0}$, então por (1.7) e pelo Lema de Saks-Henstock 1.5,

$$\left| S(f, \mathcal{P}_1) - (M_1)\int_{J_{i_1} \setminus J_{i_0}} f \right| < \epsilon,$$

logo por

$$\left| (HK)\int_{J_{i_1} \setminus J_{i_0}} f \right| = |\Phi(J_{i_0}) - \Phi(J_{i_1})| \leq |\Phi(J_{i_0}) - A| + |A - \Phi(J_{i_1})| < 2\epsilon$$

temos que $|S(f, \mathcal{P}_1)| < 3\epsilon$.

Agora por (1.4) e por um argumento semelhante ao usado para provar (1.7),

$$|S(f, \mathcal{P}_0) - A| \leq \left| S(f, \mathcal{P}_0) - (M_1)\int_{[0,1]^2 \setminus J_{i_1}} f \right| + |\Phi(J_{i_1}) - A| \leq 2\epsilon.$$

Logo, como $S(f, \mathcal{P}) = S(f, \mathcal{P}_0) + S(f, \mathcal{P}_1) + f(1,1)r^2$, temos que

$$|S(f, \mathcal{P}) - A| \leq |S(f, \mathcal{P}_0) - A| + |S(f, \mathcal{P}_1)| + |f(1,1)r^2| < 6\epsilon.$$

Portanto f é M_1-integrável e $(M_1)\int f = A$. □

Vale ressaltar que, suprimindo todos os argumentos envolvendo regularidade, uma versão análoga da Proposição 1.8 para a HK-integral pode ser provada usando a mesma demonstração. Temos assim uma prova alternativa à de Karták em [5] de que a integral de Henstock-Kurzweil não é invariante por certas rotações, sem envolver a equivalência entre a integral de Perron e a integral de Henstock-Kurzweil.[2]

O Exemplo 1.6 acima motiva a busca de um processo de integração no plano que seja invariante por rotações; no Capítulo 3 apresentaremos uma modificação da M_1-integral que resolve o problema (veja a Proposição 3.3), mantendo todas as boas propriedades da M_1-integral.

[2]No referido artigo, mostra-se que a integral de *Perron* bidimensional não é invariante por rotações; como essa integral é equivalente à integral bidimensional de Henstock-Kurzweil, segue que esta última integral também não é invariante por rotações.

Capítulo 2

Teorema da Divergência versus Teorema de Fubini para um processo geral de integração

O objetivo principal neste Capítulo é mostrar que qualquer tentativa de definir um processo de integração para funções em $\mathbb{R}^2$ a valores reais que satisfaça o Teorema da Divergência para uma ampla classe de funções necessariamente exige o sacrifício do Teorema de Fubini, ao menos em sua formulação mais geral.[1]

2.1 O conceito abstrato de integração

Um conceito geral de integração para funções reais é apresentado no livro clássico de Saks [12]. Nós daremos uma definição para funções definidas em um intervalo em $\mathbb{R}^N$, que será um pouco mais restritiva que a dada por Saks para o caso $N = 1$. Vamos adotar uma notação semelhante à usada por Schwabik em [13] para funções definidas no intervalo compacto da reta.

Com o objetivo de trabalharmos com funções primitivas em um contexto geral, será necessário estabelecer o conceito de *funções de intervalo* em um intervalo $I \subset \mathbb{R}^N$. Funções de intervalo em I são funções definidas no conjunto $Sub(I)$ de todos os subintervalos de I, a valores reais. Uma função de intervalo F é dita *contínua* em um ponto $t \in I$ se para cada sequência $(I^j)_j$ de subintervalos de I, decrescente (isto é, $I^1 \supset I^2 \supset \dots$) e com $\cap_{j=1}^{\infty} I^j = \{t\}$, tivermos que $F(I^j) \to 0$. Quando F é contínua em cada ponto de I dizemos simplesmente que F é contínua.

Definição 2.1. *Seja $I \subset \mathbb{R}^N$ um intervalo. Um* funcional *em I é uma função definida*

[1]Um certo grau de incompatibilidade entre o Teorema da Divergência e o Teorema de Fubini ao se generalizar a integral de Henstock-Kurzweil a duas ou mais dimensões já havia sido apontado por Pfeffer em seu livro [10].

em um subconjunto não vazio de $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ a valores reais.[2] *Dados T um funcional em I, $f \in Dom(T)$, e E um subconjunto de I tal que $\chi_E f \in Dom(T)$, usaremos a notação*

$$T_E(f) \doteq T(\chi_E f).$$

Um funcional T em I é dito aditivo (em relação a intervalos) *se as seguintes duas condições forem satisfeitas:*

1. $0 \in Dom(T)$ *e* $T(0) = 0$;

2. *para cada $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ e cada partição finita $\{I^j : j \in \Gamma\}$ de I em intervalos temos que $f \in Dom(T)$ se e somente se $\chi_{I^j} f \in Dom(T)$ para cada j, e neste caso*

$$T(f) = \sum_{j\in\Gamma} T_{I^j}(f).$$

Dado um intervalo $I \subset \mathbb{R}^N$ e um funcional aditivo T em I, cada $f \in Dom(T)$ pode ser associada a uma função de intervalo em I definida por

$$F : J \in Sub(I) \mapsto T_J(f) \in \mathbb{R}.$$

Vamos chamar essa função de *T-primitiva de f*.

Definição 2.2. *Um funcional aditivo T em I é chamado uma* integral em I *se forem satisfeitas as seguintes condições:*

1. *para cada $f \in Dom(T)$, a T-primitiva de f é contínua;*

2. *T é* linear, *isto é, se $f, g \in Dom(T)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então $f + \lambda g \in Dom(T)$ e $T(f + \lambda g) = T(f) + \lambda T(g)$.*

*Quando T é uma integral em I, diremos que cada $f \in Dom(T)$ é T-*integrável. *Vamos usar as notações*

$$(T)\int f \doteq (T)\int_I f \doteq T(f) \quad e \quad (T)\int_J f \doteq T_J(f)$$

para cada $J \in Sub(I)$.

Se T e S são integrais tais que $Dom(T) \subset Dom(S)$ e para cada $f \in Dom(T)$ é satisfeita a igualdade

$$(T)\int f = (S)\int f,$$

diremos que S é mais geral *que T.*

[2]Estamos usando a notação $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ para o conjunto de todas as funções definidas em I a valores reais.

Na definição de integral (unidimensional) apresentada por Schwabik em [13], que é equivalente à definição de Saks, não é exigida a linearidade dos funcionais em I; em compensação, linearidade e algumas outras propriedades são exigidas para que a integral pertença a uma classe mais restrita. No decorrer deste trabalho apenas a linearidade e a continuidade das primitivas se farão necessárias, e por esta razão escolhemos apresentar a definição de integral desta forma.

As integrais de Riemann, Lebesgue, Henstock-Kurzweil e a M_1-integral são todas integrais, de acordo com essa definição. A continuidade das M_1-primitivas foi mostrada no início da demonstração da Proposição 1.8. Para as integrais mais gerais que a de Lebesgue, é importante destacar a seguinte observação simples:

Proposição 2.3. *Seja T uma integral em um intervalo $I \subset \mathbb{R}^N$, mais geral que a integral de Lebesgue, e seja $f \in Dom(T)$ tendo F como T-primitiva. Se $g : I \to \mathbb{R}$ é igual a f em quase todo $x \in I$, então $g \in Dom(T)$ e a T-primitiva de g é igual a F.*

Demonstração. Para cada $J \in Sub(I)$, temos que $\chi_J g = \chi_J f + \chi_J h$, onde h é igual a zero para quase todo $x \in I$. Logo $\chi_J h$ é Lebesgue integrável com o valor da integral igual a zero, e pela linearidade de T temos

$$(T)\int \chi_J g = (T)\int \chi_J f + (T)\int \chi_J h = (T)\int \chi_J f + (L)\int \chi_J h = (T)\int \chi_J f. \square$$

2.2 Teorema da Divergência versus Teorema de Fubini

Está enunciado no item *1.* da Proposição abaixo o Teorema da Divergência que gostaríamos de ver satisfeito para nossas integrais. Para o que segue será conveniente trabalhar com um enunciado equivalente:

Proposição 2.4. *Seja $I \subset \Omega \subset \mathbb{R}^2$ onde $I = [a, b]$ é um intervalo e Ω é um aberto, e seja T uma integral em I. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *para cada função diferenciável $G : \Omega \to \mathbb{R}^2$, temos que $divG$ é T-integrável em I e*

$$(T)\int_I divG = (L)\int_{\partial I} G \cdot N; \tag{2.1}$$

2. *para cada função diferenciável $F : \Omega \to \mathbb{R}$ temos que $\partial F/\partial x_1$ é T-integrável em I e*

$$(T)\int_I \frac{\partial F}{\partial x_1} = \int_{a_2}^{b_2} [F(b_1, \eta) - F(a_1, \eta)]d\eta. \tag{2.2}$$

3. para cada função diferenciável $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ temos que $\partial F/\partial x_2$ é T-integrável em I e

$$(T)\int_I \frac{\partial F}{\partial x_2} = \int_{a_1}^{b_1} [F(\zeta, b_2) - F(\zeta, a_2)]d\zeta. \tag{2.3}$$

As integrais à direita nas equações (2.2) e (2.3) indicam a integral de Riemann nos intervalos indicados. Estas duas integrais de Riemann convergem pelo fato de F ser diferenciável em ambos os casos.

Demonstração. É evidente que as afirmações *2.* e *3.* são equivalentes. Suponha que a afirmação *1.* é verdadeira, e seja $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Considere $G \doteq (F, 0) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Então $divG = \partial F/\partial x_1$ é T-integrável em I e

$$\begin{aligned}(T)\int_I \partial F/\partial x_1 &= (L)\int_{\partial I} (F, 0) \cdot N \\ &= \int_{a_2}^{b_2} [F(b_1, \eta) - F(a_1, \eta)]d\eta.\end{aligned}$$

Suponha agora que as afirmações *2.* e *3.* são verdadeiras, e seja $G = (G_1, G_2) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Então tanto $\partial G_1/\partial x_1$ quanto $\partial G_2/\partial x_2$ são T-integráveis em I e satisfazem as equações (2.2) e (2.3), respectivamente. Logo

$$(T)\int_I \left[\frac{\partial G_1}{\partial x_1} + \frac{\partial G_2}{\partial x_2}\right] = (T)\int_I \frac{\partial G_1}{\partial x_1} + (T)\int_I \frac{\partial G_2}{\partial x_2}$$

$$= \int_{a_2}^{b_2} [G_1(b_1, \eta) - G_1(a_1, \eta)]d\eta + \int_{a_1}^{b_1} [G_2(b_2, \eta) - G_2(a_2, \eta)]d\eta$$

$$= (L)\int_{\partial K} G \cdot N,$$

concluindo nossa Demonstração. □

Proposição 2.5. *Seja $I = [a, b] \subset \mathbb{R}^2$ um intervalo, e vamos supor que*

H1. T é uma integral em I mais geral que a integral de Riemann (bidimensional) e satisfaz uma das condições da Proposição 2.4;

H2. S_1 e S_2 são integrais em $[a_1, b_1]$ e $[a_2, b_2]$, respectivamente, sendo cada uma delas mais geral que a integral de Riemann (unidimensional) no respectivo domínio.

Então existe uma função $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo:

T1. $g \in Dom(T)$ e $(T)\int_I g = 0;$

T2. para cada $x \in [a_1, b_1]$, $g(x, \cdot\,) \in Dom(S_2)$ *e* $(S_2)\int_{a_2}^{b_2} g(x,\eta)\,d\eta = 0$, *logo*

$$(S_1)\int_{a_1}^{b_1}(S_2)\int_{a_2}^{b_2} g(\zeta,\eta)\,d\eta\,d\zeta = 0;$$

T3. para quase todo $y \in [a_2, b_2]$, $g(\,\cdot\,, y)$ não é S_1*-integrável.*

Este resultado mostra que o Teorema de Fubini deve ser (ao menos parcialmente) sacrificado, quando queremos uma integral que satisfaça o Teorema da Divergência para toda função diferenciável, como indicado na Proposição 2.4. O exemplo usado para provar esse resultado pode ser encontrado em [4], com algumas modificações. No referido artigo, esse exemplo é usado para mostrar que especificamente a integral M_1 não satisfaz o Teorema de Fubini.

Demonstração. Consideremos $[a, b] = [0, 1]^2$; é fácil generalizar os resultados posteriormente para um intervalo bidimensional arbitrário. Vamos definir uma função diferenciável $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ da forma

$$F(x,y) \doteq \begin{cases} (R)\displaystyle\int_0^y g(x,\eta)\,d\eta, & \text{para } (x,y) \in]0,1] \times [0,1]; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{2.4}$$

Antes de definir g, vamos definir uma função auxiliar $\phi :]0, 1] \to \mathbb{R}$, derivável em $]0, 1[$. Definimos, para cada $n = 1, 2, \ldots$, $V_n \doteq [2^{-n}, 2^{-n+1}]$, $s_{n1} \doteq (2^{-n} + 2^{-n+1})/2$, $s_{n2} \doteq (2^{-n} + s_{n1})/2$, $s_{n3} \doteq (2^{-n} + s_{n2})/2$ e $s_{n4} \doteq (2^{-n} + s_{n3})/2$. Podemos definir ϕ de forma que sejam satisfeitas, para cada n:

$\phi(x) = 0$ para cada $x \in [2^{-n}, s_{n4}]$;

ϕ é decrescente em $[s_{n4}, s_{n3}]$;

$\phi(x) = -n2^{2n+2}$ para cada $x \in [s_{n3}, s_{n2}]$;

$\phi(s_{n2} + t) = \phi(s_{n2} - t)$ para cada $t \in [0, 2^{-n-2}]$;

$\phi(s_{n1} + t) = -\phi(s_{n1} - t)$ para cada $t \in [0, 2^{-n-1}]$.

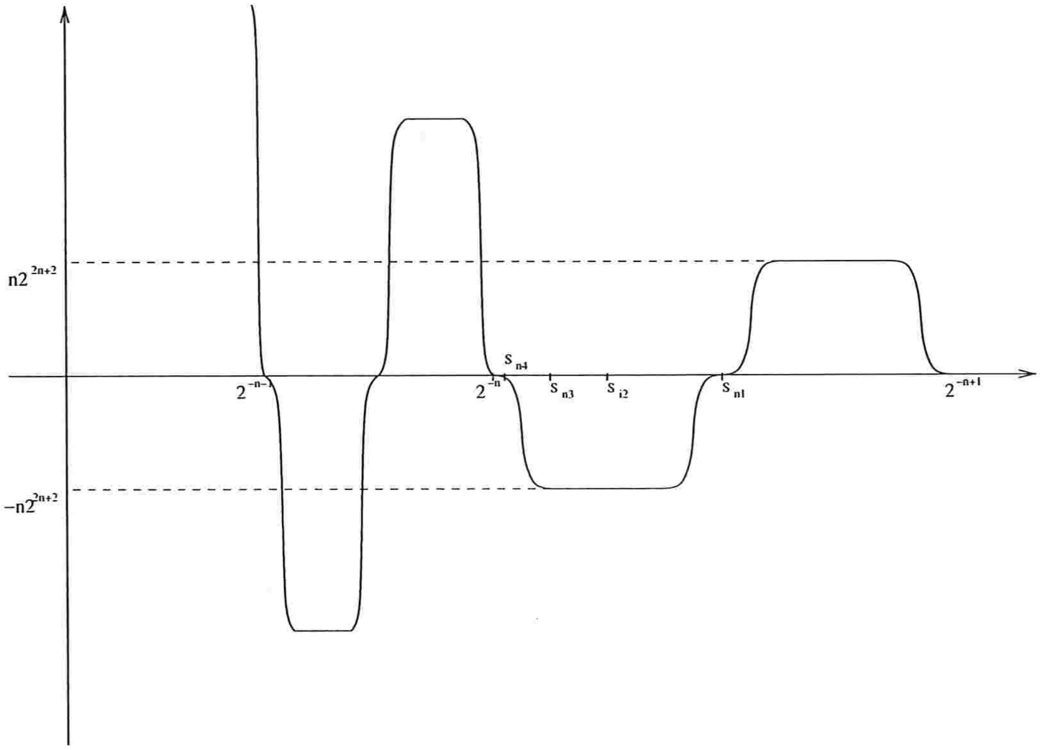
Então para cada n temos que

$$(R)\int_{s_{n1}}^1 \phi \geq 2^{-n-2}.n2^{2n+2} = n2^n \quad \text{e} \quad (R)\int_{2^{-n}}^1 \phi = 0.$$

Vamos chamar $k_n \doteq n2^{4n+2}$ e definir, para cada $(x, y) \in V_n \times [0, 1]$,

$$g(x,y) \doteq \phi(x)\mathrm{sen}\,(\pi k_n y),$$

e definimos ainda $g(0, y) \doteq 0$ para cada $y \in [0, 1]$. As integrais em (2.4) são convergentes para cada $(x, y) \in]0, 1] \times [0, 1]$, logo F está bem definida.



Primeiro vamos verificar que F é diferenciável em $[0,1]^2$; de fato, para cada $(x,y) \in V_n \times [0,1]$ temos que

$$|F(x,y)| \leq |\phi(x)| \left|(R)\int_0^y \operatorname{sen}(2\pi k_n \eta)\, d\eta\right| \leq n2^{2n+2}.k_n^{-1} = \frac{1}{2^{2n}} \leq x^2$$

e com isso obtemos a diferenciabilidade de F em $(0,y)$ para cada $y \in [0,1]$, com $dF_{(0,y)} = 0$. Pode-se verificar de forma mais simples que

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \phi'(x)(R)\int_0^y \operatorname{sen}(2\pi k_n \eta)\, d\eta \quad \text{e} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = g(x,y)$$

para cada $(x,y) \in V_n \times [0,1]$, e $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 0$ quando $(x,y) \notin [0,1]^2$; como $\frac{\partial F}{\partial x}$ e $\frac{\partial F}{\partial y}$ se anulam em $\partial(V_n \times [0,1])$ para cada n, temos que as derivadas parciais são contínuas em todo $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,y) : y \in [0,1]\}$. Como F é diferenciável, por hipótese temos que $g = \frac{\partial F}{\partial y} \in Dom(T)$ e

$$(T)\int g = (R)\int_0^1 [F(\zeta,1) - F(\zeta,0)]d\zeta = 0.$$

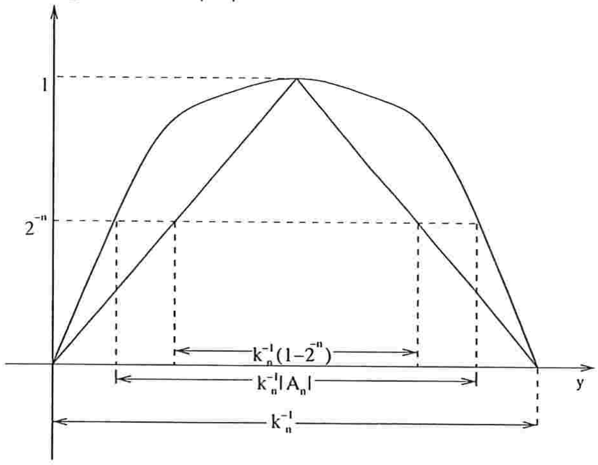
Está claro que *T2.* é satifeita, logo nos resta mostrar *T3.*. Para cada n e cada $y \in [0,1]$,

$$(R)\int_{2^{-n}}^1 g(\zeta,y)\, d\zeta = 0 \tag{2.5}$$

e

$$\left|(R)\int_{s_{n1}}^{1} g(\zeta, y)\, d\zeta\right| \geq n2^n |\text{sen}\,(\pi k_n y)|. \tag{2.6}$$

Vamos denotar $A_n \doteq \{y \in [0,1] : |\text{sen}\,(\pi k_n y)| \geq 2^{-n}\}$ para cada n, e $A \doteq \cup_{n=1}^{\infty} A_n$. Cáculos simples nos permitem estimar $|A_n| \geq 1 - 2^{1-n}$ (veja a figura abaixo) e logo temos para cada n que $|A| \geq 1 - 2^{1-n}$; portanto $|A| = 1$.



Seja $y \in A$. Como $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$, existe n_0 tal que, para cada $n \geq n_0$, $y \in A_n$. Então a desigualdade (2.6) nos dá a estimativa

$$\left|(R)\int_{s_{n1}}^{1} g(\zeta, y)\, d\zeta\right| \geq n2^n.2^{-n} = n,\ n \geq n_0. \tag{2.7}$$

Isto implica que $g(\,\cdot\,, y) \notin Dom(S_1)$; de fato, G^y fosse uma S_1-primitiva para $g(\,\cdot\,, y)$, ela não poderia ser contínua, já que por (2.5) e (2.7) o limite

$$\lim_{x \to 0^+} G^y([x, 1]) = \lim_{x \to 0^+} (S_1)\int_x^1 g(\zeta, y)\, d\zeta = \lim_{x \to 0^+} (R)\int_x^1 g(\zeta, y)\, d\zeta$$

não existe. Portanto $g(\,\cdot\,, y)$ não é S_1-integrável para quase todo $y \in [0,1]$ e completamos nossa demonstração. □

Capítulo 3

A Δ-integral

A integral que iremos introduzir agora, a qual chamaremos de *Δ-integral*, se aplica, inicialmente, a funções definidas em domínios triangulares, portanto a princípio não se pode avaliar se essa integral está de acordo com a definição abstrata dada na Seção 2.1; posteriormente poderemos estender a definição a funções definidas em *conjuntos Δ-elementares*, que são os subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ que podem ser escritos como união finita de triângulos. Aqui estamos emprestando a notação de "conjunto elementar", que é usado para designar subconjuntos de $\mathbb{R}^N$ que se escrevem como união finita de intervalos, e adaptando a nossos propósitos. Como os intervalos em $\mathbb{R}^2$ são conjuntos Δ-elementares, poderemos então verificar se a Δ-integral está de acordo com as Definições 2.1 e 2.2.

Seja I um triângulo em $\mathbb{R}^2$. Dizemos que um conjunto finito não-vazio $\mathcal{P} = \{(I^j, t^j)\}_{j\in\Gamma}$ é uma *Δ-partição (δ-fina)* de I se $\{I^j\}_{j\in\Gamma}$ for uma partição de I em triângulos (isto é, temos $|I^j \cap I^k| = 0$ sempre que $j \neq k$ e $\cup_{j\in\Gamma} I^j = I$), e para cada $j \in \Gamma$ tivermos $t^j \in I^j$ e $I^j \subset B_{\delta(t^j)}(t^j)$.

Definimos a *irregularidade* de $\mathcal{P}$ por

$$irr(\mathcal{P}) \doteq \sum_{j\in\Gamma} q(I^j), \tag{3.1}$$

onde $q(I^j) = per(I^j)\, diam(I^j)$, como na definição 1.2, e dado $C > 0$, diremos que $\mathcal{P}$ é *C-regular* se $irr(\mathcal{P}) \leq C$.

Para obtermos uma definição satisfatória de integral, é preciso verificar o Lema de Cousin para esse tipo de partição.

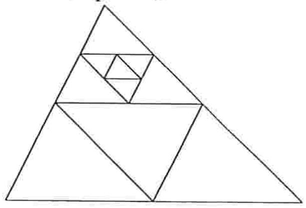
Lema 3.1 (Cousin). *Seja I um triângulo, δ um calibre I e $C \geq q(I)$. Então existe uma Δ-partição δ-fina, C-regular de I.*

Demonstração. Primeiro observemos o seguinte, para um triângulo arbitrário J. Se ligarmos os pontos médios de cada lado de J por três segmentos de reta, particionamos J em quatro triângulos $J_1, \ldots, J_4$, congruentes entre si e homotéticos a J. Neste caso temos

$$q(J) = \sum_{j=1}^{4} q(J_j). \tag{3.2}$$

Provemos o Lema de Cousin para $C = q(I)$; o caso geral segue trivialmente. Suponha por absurdo que I não admite uma Δ-partição δ-fina, C-regular. Então, particionando I em quatro triângulos congruentes $I_1^1, \ldots, I_4^1$ como foi descrito acima, temos por (3.2) que ao menos ums desses triângulos, digamos, $I_{n_1}^1$, não admite uma Δ-partição δ-fina, $\frac{C}{4}$-regular.

Particionando da mesma forma $I_{n_1}^1$ em quatro triângulos $I_1^2, \ldots, I_4^2$, ao menos um deles, $I_{n_2}^2$, não admite uma Δ-partição δ-fina, $\frac{C}{4^2}$-regular.



Repetindo esse procedimento, obtemos uma sequência de triângulos $(I_{n_j}^j)_{j\in\mathbb{N}}$ tal que, para cada j, $I_{n_j}^j$ não admite uma Δ-partição δ-fina, $\frac{C}{4^j}$-regular, e $I \supset I_{n_1}^1 \supset I_{n_2}^2 \supset \ldots$. Como $diam(I_{n_j}^j) \xrightarrow{j} 0$, existe $t \in I$ com $\cap_{j\in\mathbb{N}} I_{n_j}^j = \{t\}$. Existe um natural k satisfazendo $I_{n_k}^k \subset B_{\delta(t)}(t)$, o que nos leva a uma contradição, já que $\{(I_{n_k}^k, t)\}$ é uma Δ-partição δ-fina, $\frac{C}{4^k}$-regular de $I_{n_k}^k$. $\square$

Definição 3.2. *1. Seja I um triângulo. Diremos que $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ é* Δ-integrável *se existe $A \in \mathbb{R}$ tal que, para cada $\epsilon > 0$ e cada $C \geq q(I)$, existe um calibre δ em I satisfazendo, para cada Δ-partição de I, a seguinte condição:*

$$\text{se } \mathcal{P} \text{ é } \delta\text{-fina e } C\text{-regular, então } |S(f,\mathcal{P}) - A| < \epsilon.$$

Neste caso, escrevemos

$$(\Delta)\int f \doteq (\Delta)\int_I f \doteq A.$$

2. Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de suporte compacto. Diremos que f é Δ-integrável *se existe $A \in \mathbb{R}$ e um triângulo $I \subset \mathbb{R}^2$ com $supp\, f \subset I$, tais que f é Δ-integrável em I e $(\Delta)\int_I f = A$. Neste caso definimos*

$$(\Delta)\int f \doteq (\Delta)\int_{\mathbb{R}^2} f \doteq (\Delta)\int_I f = A.$$

A condição de regularidade das partições é necessária para garantir a validade do Teorema da Divergência para toda função diferenciável, como veremos (Teorema 3.29).

Observe que a definição da Δ-integral segue o mesmo molde da M_1-integral, a distinção essencial está no fato de que para a Δ-integral estamos considerando partições do domínio em triângulos, ao invés de retângulos. Esta simples modificação de imediato nos permite obter uma integral tolerante com respeito a transformações lineares, em particular com respeito a rotações, como mostra a Proposição 3.3 abaixo.

Proposição 3.3. *Se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tem suporte compacto e é Δ-integrável, e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é uma transformação linear inversível, então $f \circ T$ é Δ-integrável e*

$$(\Delta)\int f \circ T = |\det T|^{-1}(\Delta)\int f.$$

Demonstração. Seja J um triângulo com $supp\, f \subset J$, e $I \doteq T^{-1}[J]$. Fixados $\epsilon > 0$ e $C \geq q(I)/||T||$, existe um calibre η em J tal que para cada Δ-partição η-fina, $(||T||C)$-regular $\mathcal{Q}$ de J temos

$$\left| S(f, \mathcal{Q}) - (\Delta)\int_J f \right| < |\det T|\epsilon. \tag{3.3}$$

Considere em I o calibre $\delta \doteq \eta \circ T$, e suponha que $\mathcal{P} = \{(I^j, t^j) : j \in \Gamma\}$ é uma Δ-partição δ-fina, C-regular de I. Note que se denotamos $T < \mathcal{P} > \doteq \{(T[I^j], T(t^j)) : j \in \Gamma\}$, então $|T[I^j]| = |\det T|\, |I^j|$ implica

$$S(f, T < \mathcal{P} >) = |\det T| S(f \circ T, \mathcal{P}).$$

Temos ainda que para um triângulo arbitrário K vale $q(T[K]) \leq ||T|| q(K)$, e logo $irr(T < \mathcal{P} >) \leq ||T|| irr(\mathcal{P})$. Assim $T < \mathcal{P} >$ é uma Δ-partição δ-fina, $(||T||C)$-regular de J. Então pela desigualdade (3.3) temos

$$\left| S(f \circ T, \mathcal{P}) - |\det T|^{-1}(\Delta)\int_I f \right| = \left| |\det T|^{-1} S(f, T < \mathcal{P} >) - |\det T|^{-1}(\Delta)\int_I f \right| < \epsilon$$

concluindo a demonstração. □

Seria desejável generalizar a Proposição 3.3 para o caso em que T é um difeomorfismo; até o presente momento não sabemos se isto é possível para a Δ-integral. Faremos um breve comentário sobre este problema na Seção 4.2.

3.1 Propriedades básicas

Ao longo desta Seção, I denotará sempre um triângulo, exceto quando indicado.

Proposição 3.4 (Linearidade). *Sejam f e g funções Δ-integráveis em I e $\lambda \in \mathbb{R}$. Então $f + g$ e λf são Δ-integráveis, e*

$$(\Delta)\int (f + g) = (\Delta)\int f + (\Delta)\int g, \text{ e}$$

$$(\Delta)\int (\lambda f) = \lambda(\Delta)\int f.$$

Em particular, a função identicamente nula é Δ-integrável e $(\Delta)\int 0 = 0$.

Demonstração. Seja $\epsilon > 0$ e $C \geq q(I)$. Existem δ_1 e δ_2 calibres em I tais que, para cada Δ-partição $\mathcal{P}$ δ_1-fina, C-regular temos

$$\left| \sum_{(J,t)\in\mathcal{P}} f(t)|J| - (\Delta)\int f \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

e para cada Δ-partição $\mathcal{Q}$ δ_2-fina, C-regular temos

$$\left| \sum_{(J,t)\in\mathcal{Q}} g(t)|J| - (\Delta)\int g \right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Logo, se $\mathcal{P}$ é uma Δ-partição $min\{\delta_1, \delta_2\}$-fina, C-regular, temos

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{(J,t)\in\mathcal{P}} (f(t)+g(t))|J| - \left((\Delta)\int f + (\Delta)\int g\right) \right| &\leq \left| \sum_{(J,t)\in\mathcal{P}} f(t)|J| - (\Delta)\int f \right| \\
&+ \left| \sum_{(J,t)\in\mathcal{P}} g(t)|J| - (\Delta)\int g \right| \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon
\end{aligned}$$

e a primeira parte da demonstração está concluída.

A segunda decorre trivialmente da identidade $S(\lambda f, \mathcal{P}) = \lambda S(f, \mathcal{P})$. $\square$

Como para a integral de Lebesgue, temos o seguinte para a Δ-integral:

Proposição 3.5. *Se $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ se anula quase sempre, então f é Δ-integrável e $(\Delta)\int f = 0$.*

Demonstração. Sejam $\epsilon > 0$ e $C \geq q(I)$, e considere o conjunto $X \doteq \{x \in I : f(x) \neq 0\}$. X pode ser escrito como a união disjunta $\cup_n X_n$, onde

$$X_n \doteq \{x \in I : n-1 < f(x) \leq n\},\ n \in \mathbb{N}.$$

Para cada n natural, observe que $|X_n| = 0$, já que $|X| = 0$. Logo existe um aberto U_n de I satisfazendo

$$X_n \subset U_n,\ |U_n| < \frac{1}{2^n n}\epsilon.$$

Para cada $x \in X_n$, existe $\delta(x) > 0$ tal que $B_{\delta(x)}(x) \subset U_n$. Desta forma, definimos um calibre em X. Estendendo arbitrariamente δ a I (por exemplo, estabelecendo que $\delta(x) = 1$, para

$x \in I \setminus X$), temos que, para cada Δ-partição δ-fina, C-regular $\mathcal{P} = \{(I^j, t^j) : j \in \Gamma\}$ de I,

$$\begin{aligned} |S(f,\mathcal{P}) - 0| &= \left| \sum_{j\in\Gamma} f(t^j)|I^j| \right| \\ &= \left| \sum_{j\in\Gamma_0} f(t^j)|I^j| + \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{j\in\Gamma_n} f(t^j)|I^j| \right| \\ &\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{j\in\Gamma_n} |f(t^j)|\,|I^j| \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} n \sum_{j\in\Gamma_n} |I^j| \\ &\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} n|U_n| \leq \epsilon, \end{aligned}$$

onde $\Gamma_0 \doteq \{j \in \Gamma : t^j \in I \setminus X\}$ e $\Gamma_n \doteq \{j \in \Gamma : t^j \in X_n\}$. Logo, f é Δ-integrável e $(\Delta)\int f = 0$. $\square$

Consequentemente, pela linearidade da Δ-integral e usando o mesmo argumento da demonstração da Proposição 2.3, obtemos que

Corolário 3.6. *Se f é Δ-integrável em I e $g : I \to \mathbb{R}$ satisfaz $g(x) = f(x)$ para quase todo $x \in I$, então g é Δ-integrável em I e*

$$(\Delta)\int g = (\Delta)\int f.$$

A Δ-integral também preserva ordem, no seguinte sentido:

Proposição 3.7. *Se f e g são Δ-integráveis em I e $f(x) \leq g(x)$ para quase todo $x \in I$, então*

$$(\Delta)\int f \leq (\Delta)\int g.$$

Demonstração. Pela linearidade, basta mostrar que $(\Delta)\int h \geq 0$, onde $h = g - f$. Pelo Corolário 3.6, podemos supor que $h(x) \geq 0$ para *todo* $x \in I$. Mas neste caso, para qualquer Δ-partição $\mathcal{P}$ de I, a soma de Riemann $S(h, \mathcal{P})$ é positiva, e o resultado segue de que $(\Delta)\int h$ pode ser aproximado por somas de Riemann deste tipo. $\square$

Proposição 3.8 (Critério de Cauchy). *Uma função f definida em I é Δ-integrável se e somente se para cada $\epsilon > 0$ e cada C suficientemente grande existir um calibre δ em I tal que, sempre que $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$ forem partições δ-finas, C-regulares de I, temos*

$$|S(f,\mathcal{P}) - S(f,\mathcal{P}')| < \epsilon.$$

Demonstração. ($\Leftarrow$) Fixemos C suficientemente grande e vamos considerar uma sequência $(\delta_n)_n$ de calibres em I tal que

1. para cada $x \in I$ temos $\delta_1(x) \geq \delta_2(x) \geq \ldots$;

2. sempre que $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$ forem Δ-partições δ_n-finas, C-regulares de I, temos que

$$|S(f,\mathcal{P}) - S(f,\mathcal{P}')| < \frac{1}{n}.$$

Fixemos, para cada n, uma Δ-partição δ_n-fina, C-regular $\mathcal{P}_n$ de I. Observe que, dados n e k naturais, temos que

$$|S(f,\mathcal{P}_n) - S(f,\mathcal{P}_{n+k})| < \frac{1}{n}, \tag{3.4}$$

de onde segue que $(S(f,\mathcal{P}_n))_n$ é uma sequência de Cauchy. Escrevendo $\lim_n S(f,\mathcal{P}_n) \doteq A$ e fazendo k tender a infinito em (3.4) obtemos

$$|S(f,\mathcal{P}_n) - A| \leq \frac{1}{n}.$$

Dado $\epsilon > 0$, existe um natural n_0 satisfazendo $\frac{2}{n_0} < \epsilon$. Considerando $\delta \doteq \delta_{n_0}$, temos que para cada Δ-partição δ-fina, C-regular $\mathcal{P}$ de I temos que

$$|S(f,\mathcal{P}) - A| \leq |S(f,\mathcal{P}) - S(f,\mathcal{P}_{n_0})| + |S(f,\mathcal{P}_{n_0}) - A| \leq \frac{1}{n_0} + \frac{1}{n_0} < \epsilon,$$

de onde segue que f é Δ-integrável com $(\Delta)\int f = A$.

A outra implicação é de simples demonstração. $\square$

Antes de mostrarmos as propriedades aditivas da Δ-integral, observemos que, para cada I e J triângulos, temos que

$$J \subset I \Rightarrow q(J) \leq q(I). \tag{3.5}$$

Proposição 3.9 (Aditividade). *Seja I um triângulo, $I = K \cup L$, onde K e L são triângulos com $|K \cap L| = 0$. Então f é Δ-integrável em I, se e somente se f é Δ-integrável em K e L, e neste caso*

$$(\Delta)\int_K f + (\Delta)\int_L f = (\Delta)\int_I f. \tag{3.6}$$

Demonstração. Suponha f Δ-integrável em I. Sejam $\epsilon > 0$ e $C \geq q(I)$, e consideremos um calibre δ tal que

$$\left|S(f,\mathcal{P}) - (\Delta)\int_I f\right| < \epsilon, \tag{3.7}$$

para cada Δ-partição $\mathcal{P}$ δ-fina, $2C$-regular de I. Sejam $\mathcal{P}_K^1$ e $\mathcal{P}_K^2$ Δ-partições δ-finas, C-regulares de K, e seja $\mathcal{P}_L$ uma Δ-partição δ-fina, C-regular de L. Então $\mathcal{P}_I^1 \doteq \mathcal{P}_K^1 \cup \mathcal{P}_L$ e $\mathcal{P}_I^2 \doteq \mathcal{P}_K^2 \cup \mathcal{P}_L$ são Δ-partições δ-finas, $2C$-regulares de I satisfazendo

$$S(f,\mathcal{P}_K^1) - S(f,\mathcal{P}_K^2) = S(f,\mathcal{P}_I^1) - S(f,\mathcal{P}_I^2).$$

Por (3.7) temos $|S(f,\mathcal{P}_I^1) - S(f,\mathcal{P}_I^2)| < 2\epsilon$, logo a Δ-integrabilidade de f em K é garantida pelo critério de Cauchy 3.8. Analogamente, f é Δ-integrável em L.

Suponhamos agora que f é Δ-integrável em K e L. Sejam $\epsilon > 0$ e $C \geq q(I)$, e consideremos calibres δ_K em K e δ_L em L tais que

$$\left| S(f,\mathcal{P}) - (\Delta)\int_K f \right| < \frac{\epsilon}{2},$$

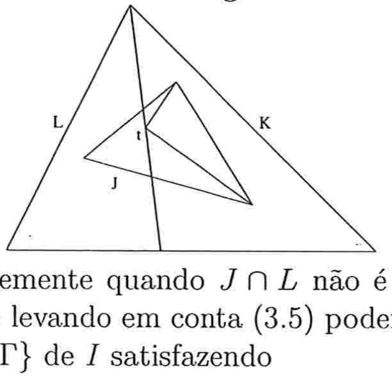
para cada Δ-partição $\mathcal{P}$ δ_K-fina, $3C$-regular de K, e

$$\left| S(f,\mathcal{Q}) - (\Delta)\int_L f \right| < \frac{\epsilon}{2},$$

para cada Δ-partição $\mathcal{Q}$ δ_L-fina, $3C$-regular de L. Vamos definir um calibre δ em I por

$$\delta(x) \doteq \begin{cases} \min\{\delta_K(x), d(x,L)\}, & \text{se } x \in K \setminus L; \\ \min\{\delta_L(x), d(x,K)\}, & \text{se } x \in L \setminus K; \\ \min\{\delta_K(x), \delta_L(x)\}, & \text{se } x \in K \cap L. \end{cases} \tag{3.8}$$

Seja $\mathcal{P}$ uma Δ-partição δ-fina, C-regular de I. Para cada (J,t) da partição tal que J intercepta $K \cap L$ temos que $t \in K \cap L$, e se ainda $J \cap K$ *não* for um triângulo, podemos particionar $I^j \cap K$ em até três triângulos, todos se interceptando em t^j, unindo t^j aos vértices de I^j contidos em K, como mostra a figura abaixo.



O mesmo é válido evidentemente quando $J \cap L$ não é um triângulo. Por essas observações, pela definição de δ e levando em conta (3.5) podemos obter, à partir de $\mathcal{P}$, uma Δ-partição $\mathcal{Q} = \{(I^j, t^j) : j \in \Gamma\}$ de I satisfazendo

1. $S(f,\mathcal{P}) = S(f,\mathcal{Q})$;

2. para cada $j \in \Gamma$, ou $I^j \subset K$, ou $I^j \subset L$;

3. denotando $\Gamma_K \doteq \{j \in \Gamma : I^j \subset K\}$, temos que $\mathcal{Q}_K \doteq \{(I^j, t^j) : j \in \Gamma_K\}$ é uma Δ-partição δ_K-fina, $3C$-regular de K;

4. denotando $\Gamma_L \doteq \{j \in \Gamma : I^j \subset L\}$, temos que $\mathcal{Q}_L \doteq \{(I^j, t^j) : j \in \Gamma_L\}$ é uma Δ-partição δ_L-fina, $3C$-regular de L.

Temos assim que

$$\begin{aligned}
\left|S(f,\mathcal{P}) - \left((\Delta)\int_K f + (\Delta)\int_L f\right)\right| &= \left|S(f,\mathcal{Q}) - \left((\Delta)\int_K f + (\Delta)\int_L f\right)\right| \\
&\leq \left|S(f,\mathcal{Q}_K) - (\Delta)\int_K f\right| + \left|S(f,\mathcal{Q}_L) - (\Delta)\int_L f\right| \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,
\end{aligned}$$

e portanto f é Δ-integrável em I e vale (3.6). □

Em comparação à M_1-integral (ver [4]), demonstrar as propriedades aditivas apresenta algumas dificuldades adicionais, decorrentes da diferente natureza geométrica dos triângulos em relação aos intervalos. É um exercício meramente técnico estender a demonstração para o caso em que I é particionado em uma quantidade finita de triângulos $I_1, \ldots, I_n$. Alguma dificuldade pode surgir ao definir δ em (3.8); basta tomar aí

$$\delta(x) \doteq \begin{cases} \min\{\delta_j(x), d(x, \cup_{k\neq j} I_k)\}, & \text{se } x \in I_j \setminus (\cup_{k\neq j} I_k); \\ \min\{\delta_j(x) : x \in I_j\}, & \text{se } x \text{ pertence a dois ou mais } I_j. \end{cases} \tag{3.9}$$

Através de alguns argumentos geométricos se pode mostrar que os conjuntos Δ-elementares podem ser escritos como união finita de triângulos *não-sobrepostos*.[1] Observando-se que, se I e J são triângulos distintos com $J \subset I$, então $I \setminus J$ é um conjunto Δ-elementar, temos o seguinte Corolário da Proposição 3.9:

Corolário 3.10. *Se f é Δ-integrável em I (ou $\mathbb{R}^2$) e J é um triângulo contido em I (ou $\mathbb{R}^2$), então f é Δ-integrável em J.*

As propriedades aditivas da Δ-integral nos permitem estabelecer o conceito de Δ-*primitiva* de uma função Δ-integrável. Dado um subconjunto qualquer X de $\mathbb{R}^2$, vamos denotar por $Sub_\Delta(X)$ o conjunto de todos os triângulos contidos em X.

Definição 3.11. *Se $f : X \to \mathbb{R}$ é Δ-integrável, onde X ou é $\mathbb{R}^2$ ou é um triângulo qualquer, a* Δ-primitiva *de f é a função $F : Sub_\Delta(X) \to \mathbb{R}$ definida por*

$$F(J) \doteq (\Delta)\int_J f.$$

Observe que as Δ-primitivas definidas desta maneira são funções *de triângulo* e não de intervalo, como as primitivas definidas no Capítulo 2.

[1] Uma forma de resolver o problema intuitivamente é a seguinte: se o conjunto Δ-elementar se escreve como uma união finita qualquer de triângulos $\cup I^j$, então o conjunto $X \doteq \{x \in K : x \text{ pertence a alguma reta que contém algum lado de algum } I^j\}$ particiona K em finitos conjuntos Δ-elementares *convexos*, que podem facilmente ser particionados em finitos triângulos não-sobrepostos.

3.2 Δ-integração em domínios Δ-elementares e comparação com a M_1-integral

As propriedades aditivas da Δ-integral nos permitem estender naturalmente sua definição a funções definidas em domínios Δ-elementares, como veremos ao longo desta Seção. Dado um subconjunto fechado não-vazio K de $\mathbb{R}^2$ tal que $K = K_1 \cup \cdots \cup K_n$, onde os K_j são fechados não vazios e não-sobrepostos, diremos que $\{K_1, \ldots K_n\}$ é uma *partição* de K, ou que K *pode ser particionado* em $K_1, \ldots, K_n$. Foi observado anteriormente que os conjuntos Δ-elementares sempre podem ser (finitamente) particionados em triângulos.

Definição 3.12. *Seja K um conjunto Δ-elementar em R^2, e suponha que $\{I_1, \ldots, I_n\}$ é uma partição qualquer de K em triângulos. Diremos que $f : K \to \mathbb{R}$ é* Δ-integrável (em K) *se para cada $j = 1, \ldots, n$ a restrição de f a I_j for Δ-integrável no sentido da Definição 3.2. Neste caso, definimos*

$$(\Delta) \int f \doteq (\Delta) \int_K f \doteq \sum_{i=1}^{n} (\Delta) \int_{I_i} f.$$

A aditividade da Δ-integral nos garante que a definição da δ-integral em K é independente da escolha de $I_1, \ldots, I_n$. De fato, se $\{J_1, \ldots, J_m\}$ é uma outra partição de K em triângulos, então o conjunto

$$(\cup_{i=1}^{n} \partial I_i) \cup (\cup_{j=1}^{m} \partial J_j)$$

de todas as fronteiras dos triângulos I_j e J_k induzem uma partição de K em uma quantidade finita de conjuntos Δ-elementares, que por sua vez podem ser particionados em uma quantidade finita de triângulos. A conclusão segue quando aplicamos a propriedade aditiva para o caso triangular (Proposição 3.9).

A linearidade da Δ-integral (Proposição 3.4), bem como as propriedades descritas no Lema 3.5, Corolário 3.6 e Proposição 3.7 são evidentemente estendidas para funções definidas em K.

A Proposição 3.9 pode ser generalizada a conjuntos Δ-elementares como segue:

Proposição 3.13. *Seja K um conjunto Δ-elementar, $f : K \to \mathbb{R}$ e suponha que $K = M \cup N$, onde M e N são conjuntos elementares não-sobrepostos. Então f é Δ-integrável em K se e somente se f é Δ-integrável em M e N, e neste caso temos*

$$(\Delta)\int_K f + (\Delta)\int_M f = (\Delta)\int_N f.$$

Demonstração. Segue diretamente de que, se $\{M_1, \ldots, M_m\}$ é uma partição de M em triângulos e $\{N_1, \ldots, N_n\}$ é uma partição de N em triângulos, então $\{M_1, \ldots, M_m, N_1, \ldots, N_n\}$ é uma partição de K em triângulos. □

Δ-integração em conjuntos Δ-elementares também poderia ter sido definida exatamente como na Definição 3.2, apenas trocando o domínio triangular I por um domínio Δ-elementar. Essas duas definições são compatíveis, de acordo com a seguinte caracterização:

Proposição 3.14. *Seja K um conjunto Δ-elementar, $f : K \to \mathbb{R}$ e $A \in \mathbb{R}$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *f é Δ-integrável e $(\Delta)\int f = A$;*

2. *para cada $\epsilon > 0$ e cada $C > 0$ suficientemente grande, existe um calibre δ em K satisfazendo, para cada Δ-partição $\mathcal{P}$ de K, a condição:*

$$\text{se } \mathcal{P} \text{ é } \delta\text{-fina e } C\text{-regular, então } |S(f, \mathcal{P}) - A| < \epsilon. \tag{3.10}$$

Δ-partições de K, δ-finura e C-regularidade devem ser interpretadas da mesma forma que para Δ-partições de um triângulo, da forma como foram discutidas no início deste Capítulo. Observe que o Lema de Cousin também é válido para K, no seguinte sentido: se δ é um calibre em K e K pode ser particionado em triângulos $I_1, \ldots, I_n$, então para cada $C \geq \sum_{i=1}^n q(I_i)$ existe uma partição δ-fina, C-regular de K. Basta tomar para cada $j = 1, \ldots, n$ uma partição δ-fina, C-regular de I_j, como foi feito para provar o Lema de Cousin para triângulos (Lema 3.1), e considerar a partição de K formada pelos elementos das partições de cada I_j. Os $C > 0$ *suficientemente grandes*, como especificado no item *2.* da Proposição acima, podem ser por exemplo os $C \geq \sum_{i=1}^n q(I_i)$, de forma que o Lema de Cousin garanta a existência de partições δ-finas, C-regulares de K.

Demonstração (da Proposição 3.14). Vamos chamar por enquanto as funções f que satisfazem *2.* de *Δ'-integráveis* e para essas funções vamos definir a *Δ' integral de f* por $(\Delta')\int f \doteq A$.

Suponha que f seja Δ-integrável com $(\Delta)\int f = A$. Então K pode ser particionado em triângulos $I_1, \ldots, I_n$ tais que f é Δ-integrável em cada I_i, e denotando

$$(\Delta)\int_{I_1} f = A_1, \ldots, (\Delta)\int_{I_n} f = A_n,$$

temos que $A = A_1 + \cdots + A_n$. Seja $\epsilon > 0$, e $C > 0$ suficientemente grande. Para cada j existe um calibre δ_i em I_i satisfazendo, para cada Δ-partição δ_i-fina, $3C$-regular $\mathcal{P}$ de I_i,

$$|S_{I_i}(f, \mathcal{P}) - A_i| < \frac{\epsilon}{n}. \tag{3.11}$$

Podemos assumir que δ_i satisfaz a seguinte condição adicional: para cada $x \in \partial I_i$, $B_{\delta(x)}(x)$ não intercepta os lados de I_i que não contém x.

Vamos definir um calibre δ em K por

$$\delta(x) \doteq \begin{cases} \min\{\delta_i(x), d(x, \partial I_i)\}, & \text{se } x \in int(I_i) \text{ para algum } i; \\ \min\{\delta_i(x) : i = 1, \ldots, n,\ x \in I_i\}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Fixada uma partição δ-fina, C-regular $\mathcal{P} = \{(J^j, t^j) : j \in \Gamma\}$ de K temos que, para cada i, j tais que $|J^j \cap I_i| > 0$,

$$J^j \cap I_i \neq \emptyset \Rightarrow t^j \in I_i.$$

Então para estes i, j, $J^j \cap I_i$ pode ser particionado em n_{ij} triângulos $J_1^{ij}, \ldots, J_{n_{ij}}^{ij}$ pelos segmentos de reta que unem t^j aos vértices de J^j contidos em I_i (n_{ij} é um natural de um a três, veja a demonstração da Proposição 3.9). Logo,

$$\mathcal{Q} \doteq \{(J_l^{ij}, t^j) : i = 1, \ldots, n,\ j \in \Gamma,\ |J^j \cap I_i| > 0,\ l = 1, \ldots n_{ij}\}$$

é uma Δ-partição δ-fina de K. Além disso, para cada $i = 1, \ldots, n$,

$$\mathcal{Q}_i \doteq \{(J_l^{ij}, t^j) \in \mathcal{Q} : J_l^{ij} \subset I_i\}$$

é uma Δ-partição δ-fina, $3C$-regular de I_i, portanto satisfaz (3.11). Como $\mathcal{Q} = \cup_{i=1}^n \mathcal{Q}_i$ e $S(f, \mathcal{P}) = S(f, \mathcal{Q})$, segue que

$$|S(f, \mathcal{P}) - A| \leq |S(f, \mathcal{Q}_1) - A_1| + \cdots + |S(f, \mathcal{Q}_n) - A_n| < \epsilon,$$

e portanto f é Δ'-integrável, com $(\Delta')\int f \doteq A$.

Suponha agora que f é Δ'-integrável com $(\Delta')\int f = A$. Vamos fixar um triângulo $I \subset K$. Consideremos $C > 0$ suficientemente grande,[2] seja $\epsilon > 0$, e seja δ um calibre em K tal que, para cada Δ-partição δ-fina, $2C$-regular $\mathcal{P}$ de K, temos que

$$|S(f, \mathcal{P}) - A| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{3.12}$$

Vamos supor que $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{R}$ sejam Δ-partições δ-finas, C-regulares de I. $K \setminus I$ admite uma Δ-partição δ-fina, C-regular $\mathcal{S}$. Então as Δ-partições de K definidas por

$$\mathcal{Q}' \doteq \mathcal{Q} \cup \mathcal{S} \text{ e } \mathcal{R}' \doteq \mathcal{R} \cup \mathcal{S}$$

são δ-finas e $2C$-regulares, satisfazendo assim a desigualdade (3.12) e por conseguinte

$$|S(f, \mathcal{Q}') - S(f, \mathcal{R}')| < \epsilon.$$

Como $|S(f, \mathcal{Q}') - S(f, \mathcal{R}')| = |S(f, \mathcal{Q}) - S(f, \mathcal{R})|$, pelo critério de Cauchy (Proposição 3.8) segue que f é Δ-integrável em I. Daí concluímos que f é Δ-integrável em K, e a Proposição 3.13 nos garante que $(\Delta)\int f = A$. □

Usando esta caracterização, através de uma demonstração análoga a da Proposição 3.8 obtemos que a Δ-integral satisfaz o critério de Cauchy também em domínios Δ-elementares.

É possível agora comparar a Δ-integral, quando definida sobre um domínio *retangular*, com a M_1-integral.

[2]Se K pode ser particionado em triângulos $I_1, \ldots, I_n$, é suficiente tomar $C \geq \max\{q(I), \sum_{i=1}^n q(I_i)\}$.

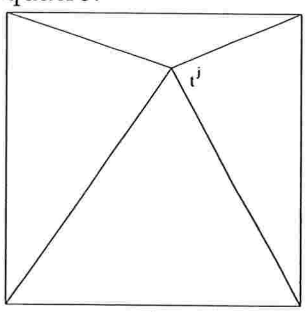
Proposição 3.15. *Seja $K \subset \mathbb{R}^2$ um intervalo. Se $f : K \to \mathbb{R}$ é Δ-integrável, então f é também M_1-integrável e*

$$(M_1)\int f = (\Delta)\int f.$$

Demonstração. Seja $\epsilon > 0$, $C > 0$ suficientemente grande, e suponha que δ é um calibre em K tal que, para cada Δ-partição δ-fina, $4C$-regular $\mathcal{P}$ de K, temos que

$$\left| S(f, \mathcal{P}) - (\Delta)\int_K f \right| < \epsilon. \tag{3.13}$$

Seja $\mathcal{Q} = \{(K^j, t^j) : j \in \Gamma\}$ uma M_1-partição δ-fina, C-regular de K. Para cada j, os segmentos de reta que unem t^j aos vértices de K^j particionam K^j em triângulos $K_1^j, \cdots, K_{n_j}^j$ onde n_j é um inteiro entre dois e quatro.



Então a Δ-partição $\mathcal{P}_0$ definida por

$$\mathcal{P}_0 \doteq \cup_{j \in \Gamma} \cup_{i=1}^{n_j} \{(K_i^j, t^j)\}$$

é $4C$-regular, já que para cada j, i temos $q(K_i^j) \leq |K^j| diam(K^j)$. A conclusão segue de (3.13) e da igualdade $S(f, \mathcal{P}_0) = S(f, \mathcal{Q})$. □

Observe que f é Δ-integrável também em todo subintervalo $L \in Sub(K)$, com $(\Delta)\int_L f = F(L)$, onde F é a M_1-primitiva de f. Isto significa que a função de intervalo $\tilde{F}$: $L \in Sub(K) \mapsto (\Delta)\int_L f$ conicide com F, e é portanto contínua. Logo a Δ-integral é de fato uma integral de acordo com a Definição 2.2, e a Proposição 3.15 afirma que a M_1-integral é mais geral que a Δ-integral. A relação é estrita, pois a f exibida no início da Seção 1.2 é M_1-integrável, mas não é Δ-integrável. Isto se dá pois a Δ-integral tolera rotações (Proposição 3.3), e a $\frac{\pi}{4}$-rotação de f no sentido horário não é Δ-integrável, o que se mostra com a mesma argumentação usada para a M_1-integral (veja a Proposição 1.7).

3.3 Lema de Saks-Henstock, quase sempre derivabilidade das Δ-primitivas e mensurabilidade das funções Δ-integráveis

Iniciamos esta Seção introduzindo e demonstrando que vale para a Δ-integral o Lema de Saks-Henstock, uma ferramenta muito útil em se tratando de integração não-absoluta.

Lema 3.16 (Saks-Henstock). *Seja K um conjunto Δ-elementar e seja $f : K \to \mathbb{R}$ Δ-integrável, e considere um calibre δ em K tal que a condição na definição da Δ-integral é satisfeita para $\epsilon > 0$ e $C > 0$ suficientemente grande.*[3] *Suponha que $\mathcal{P} = \{(I^j, t^j) : j \in \Gamma\}$ é uma Δ-partição δ-fina, C-regular de K.*

Então para cada $\Gamma' \subset \Gamma$ não vazio temos que

$$\left|\sum_{j\in\Gamma'}\left[f(t^j)|I^j| - (\Delta)\int_{I^j} f\right]\right| \leq \epsilon.$$

Demonstração. Seja $r > 0$. Fixemos para cada $j \in \Gamma \setminus \Gamma'$ um calibre δ_j em I^j, menor que δ em cada ponto de I^j, e uma partição $\mathcal{P}_j$ δ_j-fina, $q(I^j)$-regular de I^j satisfazendo

$$\left|S_{I^j}(f, \mathcal{P}_j) - (\Delta)\int_{I^j} f\right| < \frac{r}{\#(\Gamma \setminus \Gamma')}, \tag{3.14}$$

onde $\#(\Gamma \setminus \Gamma')$ denota o número de elementos de $\Gamma \setminus \Gamma'$. Considere a seguinte partição de I:

$$\tilde{\mathcal{P}} \doteq \{(I^j, t^j) : j \in \Gamma'\} \cup \left(\cup_{j\in\Gamma\setminus\Gamma'}\mathcal{P}_j\right).$$

É facil notar que $\tilde{\mathcal{P}}$ é δ-fina, e ainda que

$$\begin{aligned} irr(\tilde{\mathcal{P}}) &= \sum_{j\in\Gamma'} q(I^j) + \sum_{j\in\Gamma\setminus\Gamma'} irr(\tilde{\mathcal{P}}) \\ &\leq \sum_{j\in\Gamma'} q(I^j) + \sum_{j\in\Gamma\setminus\Gamma'} q(I^j) \leq C. \end{aligned}$$

Pela Δ-integrabilidade de f temos que

$$\left|S_I(f, \tilde{\mathcal{P}}) - (\Delta)\int_K f\right| = \left|\sum_{j\in\Gamma'} f(t^j)|I^j| + \sum_{j\in\Gamma\setminus\Gamma'} S_{I^j}(f, \mathcal{P}_j) - \sum_{j\in\Gamma'}(\Delta)\int_{I_j} f - \sum_{j\in\Gamma\setminus\Gamma'}(\Delta)\int_{I_j} f\right| \leq \epsilon.$$

Logo pela desigualdade (3.14) temos

$$\left|\sum_{j\in\Gamma'} f(t^j)|I^j| - \sum_{j\in\Gamma'}(\Delta)\int_{I_j} f\right| \leq \epsilon + r.$$

[3] Isto é, tal que δ satisfaz (3.10).

Fazendo r tender para zero, concluímos nossa demonstração. □

O Lema de Saks-Henstock pode ser reescrito da seguinte forma:

Corolário 3.17 (Saks-Henstock). *Seja f Δ-integrável no conjunto Delta-elementar K, e considere um calibre δ em K tal que a condição na definição da Δ-integral é satisfeita para $\epsilon > 0$ e $C > 0$ suficientemente grande. Suponha que $\mathcal{P} = \{(I^j, t^j) : j \in \Gamma\}$ é uma Δ-partição δ-fina, C-regular de K. Então*

$$\sum_{j\in\Gamma} \left| f(t^j)|I^j| - (\Delta)\int_{I^j} f \right| \leq 2\epsilon.$$

Demonstração. Basta notar que

$$\sum_{j\in\Gamma} \left| f(t^j)|I^j| - (\Delta)\int_{I^j} f \right| = \sum_{j\in\Gamma_1} \left(f(t^j)|I^j| - (\Delta)\int_{I^j} f \right) - \sum_{j\in\Gamma_2} \left(f(t^j)|I^j| - (\Delta)\int_{I^j} f \right),$$

onde $\Gamma_1 \doteq \left\{ j \in \Gamma : f(t^j)|I^j| - (\Delta)\int_{I^j} f \geq 0 \right\}$ e $\Gamma_2 \doteq \Gamma \setminus \Gamma_1$, e aplicar duas vezes o Lema 3.16 de Saks-Henstock. □

O conceito de derivada de uma função de triângulo é uma ferramenta importante para obtermos boas propriedades de convergência para a Δ-integral. Na teoria abstrata da integração, usualmente o conceito de derivada é aplicável a funções de *intervalo* (veja por exemplo [12]). Adaptamos aqui a funções de triângulo, para nossa conveniência.

Dado $\rho > 0$, um conjunto fechado não vazio $B \subset \mathbb{R}^2$ é dito *ρ-regular* se

$$\sup\{|B|/|J| : J \text{ é um quadrado contendo } B\} > \rho.$$

Em particular, quando B é um intervalo, B é ρ-regular se e somente se $l(B)/L(B) > \rho$, onde $l(B)$ e $L(B)$ denotam respectivamente o maior e o menor lado de B.

Definição 3.18. *Sejam $K \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto Δ-elementar e $F : Sub_\Delta(I) \to \mathbb{R}$ uma função de intervalo em K. Diremos que F é* derivável *$x \in K$ se existir $a \in \mathbb{R}$ tal que para cada $\rho > 0$ tivermos que cada sequência decrescente de triângulos ρ-regulares $I_j \subset Sub_\Delta(I)$ convergindo a x satisfaz*

$$\frac{F(I_j)}{|I_j|} \to a.$$

Neste caso escreveremos $F'(x) \doteq a$.

Por *sequência de triângulos $(I_j)_j$ convergindo a x*, se entenda que $I_1 \supset I_2 \supset \ldots$ e $\cap_j I_j = \{x\}$. É usual escrever

$$\lim_{J\to x} \frac{F(J)}{|J|} = a;$$

este limite significa precisamente que para cada $\rho > 0$ temos que cada sequência decrescente de intervalos ρ-regulares I_j convergindo a x satisfaz $\frac{F(I_j)}{|I_j|} \to a$. O próximo resultado importante desta Seção relaciona Δ-integração com derivação:

Proposição 3.19. *Suponha f Δ-integrável em K e considere F a Δ-primitiva de f. Então*

$$\lim_{J \to x} \frac{F(J)}{|J|} = f(x) \tag{3.15}$$

para quase todo $x \in K$.

Para demonstrar este resultado aplicaremos o Teorema de Cobertura de Vitali. Lembramos que, dado $X \subset \mathbb{R}^2$ não-vazio, dizemos que uma família $\mathcal{C}$ de subconjuntos fechados de $\mathbb{R}^2$ *cobre X no sentido de Vitali* se para cada $x \in X$ existir $\rho = \rho(x) > 0$ e uma sequência de elementos ρ-regulares de $\mathcal{C}$ convergindo a x. Segue o enunciado do Teorema:

Teorema 3.20 (Teorema da Cobertura de Vitali). *Seja $X \subset \mathbb{R}^2$ não-vazio. Se $\mathcal{C}$ cobre X no sentido de Vitali, então existe um sobcunjunto no máximo enumerável $\{B_n : n \in \Lambda\}$ de $\mathcal{C}$ tal que B_n são dois a dois disjuntos e $|X \setminus \cup_n B_n| = 0$.*

Também utilizaremos o seguinte Lema:

Lema 3.21. *Para cada $r > 0$ existe $A = A(r) > 0$ satisfazendo $q(J) \leq A|J|$ para cada triângulo r-regular J.*

Demonstração (do Lema 3.21). Seja J triângulo r-regular. Então existe um quadrado D contendo J tal que $|J| \geq r|D|$. Logo

$$q(J) = perim(J)diam(J) < 3\,diam(J)^2 \leq 3\,diag(D)^2 = 6|D| \leq \frac{6}{r}|J|,$$

e assim $A \doteq \frac{6}{r}$ satisfaz a condição desejada. □

Demonstração (da Proposição 3.19). Seja $X \doteq \{x \in K : (3.15) \text{ não é satisfeita}\}$. Para cada $x \in X$, ou F não é derivável em x ou é derivável em x mas $F'(x) \neq f(x)$; de qualquer maneira para estes x existem $\rho(x) > 0$ e $\eta(x) > 0$ tais que para cada vizinhança V de x existe um triângulo $\rho(x)$-regular $J = J(x, V) \subset K$ satisfazendo $x \in J \subset V$ e

$$|F(J) - f(x)|J|| > \eta(x)|J|. \tag{3.16}$$

Para cada $m, n \in \mathbb{N}$ seja $X_{mn} \doteq \{x \in X : \rho(x) > 1/m, \eta(x) > 1/n\}$. Note que $\cup_{m,n\in\mathbb{N}} X_{mn} = X$, logo basta mostrar que para cada $m, n \in \mathbb{N}$ fixados temos que $|X_{mn}| = 0$. Pelo Lema 3.21 existe $A > 0$ tal que, para cada triângulo $\frac{1}{m}$-regular J, temos

$$q(J) \leq A|J|. \tag{3.17}$$

Fixemos $B > |K|$ e seja $\epsilon > 0$. Como f é Δ-integrável em K, pelo Corolário 3.17 do Lema de Saks-Henstock existe um calibre δ em K tal que para cada Δ-partição δ-fina, AB-regular $\mathcal{P}$ *em* K temos

$$\sum_{(J,t)\in\mathcal{P}} |F(J) - f(t)|J|| < \epsilon. \tag{3.18}$$

Podemos assumir $\delta(x) \leq 1$ para cada $x \in K$, e que B é suficientemente grande, de forma que seja garantida a existência de Δ-partições δ-finas AB-regulares.

A família

$$\mathcal{C} \doteq \{J(x, V) : x \in X_{mn},\ V \text{ é uma vizinhança de } x \text{ contida em } B_{\delta(x)}(x)\}$$

é uma cobertura no sentido de Vitali de X_{mn}, logo pelo Teorema da cobertura de Vitali 3.20 existem $J_1 = J_1(x_1, V_1), \ldots, J_k = J_k(x_k, V_k) \in \mathcal{C}$, dois a dois disjuntos, satisfazendo

$$m^*(X_{mn}) < \sum_{i=1}^{k} |J_i| + \epsilon, \tag{3.19}$$

onde m^* denota medida exterior. (3.17) garante que

$$\sum_{i=1}^{k} q(J_i) \leq A \sum_{i=1}^{k} |J_i| \leq AB, \tag{3.20}$$

logo por (3.16), (3.18) e (3.19) temos que

$$m^*(X_{mn}) < \sum_{i=1}^{k} |J_i| + \epsilon < \sum_{i=1}^{k} \frac{|F(J_i) - f(x_i)|J_i||}{\eta(x_i)} + \epsilon$$

$$< n \sum_{i=1}^{k} |F(J_i) - f(x_i)|J_i|| + \epsilon < (n+1)\epsilon,$$

e assim $|X_{mn}| = 0$. $\square$

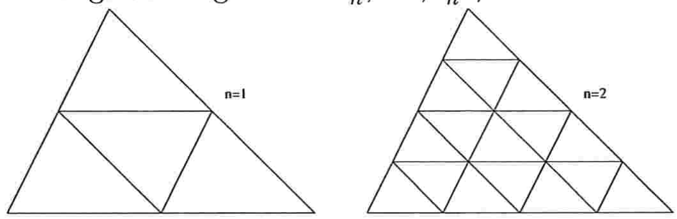
Podemos demonstrar agora que as funções Δ-integráveis são mensuráveis. Vamos chamar de *funções triângulo-escada* a todas as funções f definidas em I que podem ser escritas como

$$f(x) = \chi_{I^1}(x)a_1 + \cdots + \chi_{I^n}(x)a_n,$$

onde $\{I^1, \ldots, I^n\}$ é uma partição de I em triângulos e $a_1, \ldots, a_n$ são constantes.

Proposição 3.22. *Se f é Δ-integrável em um conjunto Δ-elementar K, então f é quase sempre o limite de uma sequência de funções triângulo-escada. Em particular, f é mensurável.*

Demonstração. Para o caso em que K é um triângulo, para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos particionar K em 4^n triângulos congruentes $I_n^1, \ldots, I_n^{4^n}$, como mostra a figura abaixo.



Defina, para cada $x \in I_n^j$,

$$f_n(x) \doteq \frac{F(I_n^j)}{|I_n^j|}.$$

A Proposição 3.19 garante que $f_n(x) \xrightarrow{n} f(x)$ para quase todo $x \in K$. O resultado se estende naturalmente a K Δ-elementar, já que os conjuntos Δ-elementares podem ser finitamente particionados em triângulos. □

3.4 Alguns Teoremas de convergência

Apresentamos nesta Seção versões dos Teoremas clássicos da Convergência Monotônica e da Convergência Dominada, e do Lema de Fatou, para a Δ-integral.

Teorema 3.23 (Convergência Monotônica). *Sejam K um conjunto Δ-elementar, $f : K \to \mathbb{R}$, $(f_n)_n$ uma sequência de funções Δ-integráveis em K e $A \in \mathbb{R}$, e suponha que sejam satisfeitas as seguintes condições:*

1. *$f_n(x) \xrightarrow{n} f(x)$, para quase todo $x \in K$;*
2. *$f_1(x) \leq f_2(x) \leq \ldots$ para quase todo $x \in K$;*
3. *$(\Delta)\int f_n \xrightarrow{n} A$.*

Então, f é Δ-integrável em K e $(\Delta)\int f = A$.

Demonstração. Pelo Corolário 3.6, basta demonstrarmos a Proposição para o caso em que *1.* e *2.* são satisfeitas *para todo* $x \in K$. Sejam $\epsilon > 0$, $C > 0$ suficientemente grande, e considere $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $n \geq n_0$,

$$\left|(\Delta)\int f_n - A\right| < \epsilon. \tag{3.21}$$

Para cada $x \in K$, existe um natural $k(x) > n_0$ com $|f_{k(x)}(x) - f(x)| < \epsilon$. Pelo Corolário 3.17 do Lema de Saks-Henstock, para cada n natural existe um calibre δ_n em K satisfazendo, para cada $\mathcal{P} = \{(I^j, t^j) : j \in \Gamma\}$ partição δ_n-fina, C-regular de K,

$$\sum_{j \in \Gamma} \left| f_n(t^j)|I^j| - (\Delta)\int_{I^j} f_n \right| < \frac{\epsilon}{2^n} \tag{3.22}$$

Seja $\delta(x) \doteq \delta_{k(x)}(x)$ e suponha que $\mathcal{P} = \{(I^j, t^j) : j \in \Gamma\}$ é uma partição δ-fina, C-regular de K. Então

$$\begin{aligned}
|S(f,\mathcal{P}) - A| &\leq \sum_{j\in\Gamma} |f(t^j) - f_{k(t^j)}(t^j)|\,|I^j| + \sum_{j\in\Gamma} \left| f_{k(t^j)}(t^j)|I^j| - (\Delta)\int_{I^j} f_{k(t^j)} \right| \\
&\quad + \left| \sum_{j\in\Gamma} (\Delta)\int_{I^j} f_{k(t^j)} - A \right| \\
&= \epsilon|I| + \epsilon + \left| \sum_{j\in\Gamma} (\Delta)\int_{I^j} f_{k(t^j)} - A \right|.
\end{aligned}$$

É suficiente mostrar agora que $\left|\sum_{j\in\Gamma}(\Delta)\int_{I^j} f_{k(t^j)} - A\right| \leq \epsilon$. Como cada sequência $\left((\Delta)\int_{I^j} f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente e majorada por A, para cada $j \in \Gamma$ existe $A^j \in \mathbb{R}$ com $(\Delta)\int_{I^j} f_n \xrightarrow{n} A^j$. Então

$$(\Delta)\int f_n = \sum_{j\in\Gamma} (\Delta)\int_{I^j} f_n \xrightarrow{n} \sum_{j\in\Gamma} A^j,$$

o que implica por hipótese que $\sum_{j\in\Gamma} A^j = A$.

Chamando $l \doteq l(\mathcal{P}) \doteq min\{k(t^j);\, j \in \Gamma\}$, temos que

$$(\Delta)\int f_l = \sum_{j\in\Gamma} (\Delta)\int_{I^j} f_l \leq \sum_{j\in\Gamma} (\Delta)\int_{I^j} f_{k(t^j)} \leq \sum_{j\in\Gamma} A^j = A$$

e podemos concluir que

$$\left| \sum_{j\in\Gamma} (\Delta)\int_{I^j} f_{k(t^j)} - A \right| \leq \left| (\Delta)\int f_l - A \right| \leq \epsilon. \square$$

Lema 3.24. *Sejam g, h, f_1 e f_2 funções Δ-integráveis em um conjunto Δ-elementar K. Se $g(x) \leq f_i(x) \leq h(x)$, para $i = 1, 2$ e para quase todo $x \in K$, então as funções $min\{f_1, f_2\}$ e $max\{f_1, f_2\}$ também são Δ-integráveis.*

Demonstração. Basta demonstrar para o caso em que a desigualdade é satisfeita para todo $x \in K$. Vamos supor que K é um triângulo; novamente é fácil estender o resultado para K Δ-elementar. Consideremos primeiro o caso em que $g = 0$. Para cada $J \subset K$ triângulo, vamos considerar $F^*(J) \doteq max\left\{(\Delta)\int_J f_1, (\Delta)\int_J f_2\right\}$. A função F^* satisfaz, para cada triângulo $J \subset K$ e cada partição $\mathcal{P}$ de J em triângulos,

$$F^*(J) \leq \sum_{L\in\mathcal{P}} F^*(L). \tag{3.23}$$

Se $\mathcal{P}$ for uma partição de K, temos ainda que

$$0 \leq \sum_{L\in\mathcal{P}} F^*(L) \leq (\Delta)\int h$$

e assim podemos considerar

$$0 \leq A \doteq sup \left\{ \sum_{L \in \mathcal{P}} F^*(L) : \mathcal{P} \text{ é uma partição de } K \right\} \leq (\Delta)\int h.$$

Seja $f = max\{f_1, f_2\}$, e vamos mostrar que $(\Delta)\int f = A$. Sejam $\epsilon > 0$ e $C > 0$ suficientemente grande, e vamos fixar uma partição $\mathcal{P}_1$ de K satisfazendo

$$\sum_{L \in \mathcal{P}_1} F^*(L) > A - \epsilon. \tag{3.24}$$

Pelo Corolário do Lema de Saks-Henstock 3.17, existe um calibre δ em K tal que para cada $\mathcal{P} = \{(I^j, t^j) : j \in \Gamma\}$ partição δ-fina, C-regular de K temos que

1. $\sum_{j \in \Gamma} \left| f(t^j)|I^j| - (\Delta)\int_{I^j} f \right| \leq 2\epsilon$, para $i = 1, 2$;

2. $\mathcal{P}$ é *mais fina* que $\mathcal{P}_1$, isto é, para cada $j \in \Gamma$ existe $L \in \mathcal{P}_1$ com $I^j \subset L$.

A condição 2. garante, por (3.23), que

$$0 \leq A - \sum_{j \in \Gamma} F^*(I^j) \leq A - \sum_{L \in \mathcal{P}_1} F^*(L) < \epsilon. \tag{3.25}$$

Para cada $J \in sub_\Delta(K)$ definimos, para $i = 1, 2$,

$$B_i(J) \doteq sup \left\{ \sum_{(K,t) \in \mathcal{Q}} \left| f_i(t)|K| - (\Delta)\int_K f_i \right| : \mathcal{Q} \text{ é uma partição } \delta\text{-fina, } C\text{-regular de } J \right\}.$$

Observe que, para $i = 1, 2$, $B_i(K) < \epsilon$ e

$$\sum_{L \in \mathcal{P}} B_i(L) \leq B_i(J), \tag{3.26}$$

para $J \in Sub_\Delta(K)$ e cada partição $\mathcal{P}$ de J em triângulos.

Seja $\mathcal{P} = \{(I^j, t^j) : j \in \Gamma\}$ uma Δ-partição δ-fina, C-regular de K. Para cada $j \in \Gamma$, $i = 1, 2$ temos $f_i(t^j)|I^j| \leq (\Delta)\int_{I^j} f_i + B_i(I^j) \leq F^*(I^j) + B_1(I^j) + B_2(I^j)$, e logo

$$f(t^j)|I^j| \leq F^*(I^j) + B_1(I^j) + B_2(I^j). \tag{3.27}$$

De forma similar obtemos que

$$F^*(I^j) - B_1(I^j) - B_2(I^j) \leq f(t^j)|I^j|. \tag{3.28}$$

Então por (3.27) e (3.28), e usando em seguida (3.26), temos

$$\left| \sum_{j \in \Gamma} [f(t^j)|I^j| - F^*(I^j)] \right| \leq \left| \sum_{j \in \Gamma} (B_1(I^j) + B_2(I^j)) \right| \leq B_1(I) + B_2(I) \leq 2\epsilon.$$

Logo, por (3.25),

$$\left|\sum_{j\in\Gamma} f(t^j)|I^j| - A\right| \leq \left|\sum_{j\in\Gamma} [f(t^j)|I^j| - F^*(I^j)]\right| + \left|\sum_{j\in\Gamma} F^*(I^j) - A\right| \leq 3\epsilon,$$

como queríamos.

Para o caso em que $g \neq 0$, basta observar que $0 \leq f_i(x) - g(x) \leq h(x) - g(x)$, $i = 1, 2$ e aplicar o que já demonstramos, e obtemos que $\max\{f_1, f_2\}$ é Δ-integrável. $\min\{f_1, f_2\}$ também é Δ-integrável em decorrência de que $\min\{f_1, f_2\} = -\max\{-f_1, -f_2\}$. $\square$

Teorema 3.25 (Convergência Dominada). *Sejam K um conjunto Δ-elementar, $f : K \to \mathbb{R}$, $(f_n)_n$ uma sequência de funções Δ-integráveis em K, e suponha que sejam satisfeitas as seguintes condições:*

1. *$f_n(x) \xrightarrow{n} f(x)$, para quase todo $x \in K$;*

2. *existem funções g, h Δ-integráveis em K tais que, para cada natural n, temos que $g(x) \leq f_n(x) \leq h(x)$ para quase todo $x \in K$;*

Então, f é Δ-integrável e

$$(\Delta)\int f_n \to (\Delta)\int f.$$

Demonstração. Novamente basta demonstrar para o caso em que *1.* e *2.* são satisfeitas para todo $x \in K$. Pelo Lema 3.24, para cada n a função $\min\{f_1, \ldots, f_n\}$ é Δ-integrável, e pelo Teorema da Convergência Monotônica 3.23 para cada k a função $\inf\{f_n : n \geq k\}$ também é Δ-integrável. Analogamente, para cada k a função $\sup\{f_n : n \geq k\}$ também é Δ-integrável. Temos então

$$(\Delta)\int \inf_{n\geq k} f_n \leq \inf_{n\geq k}(\Delta)\int f_n \leq \sup_{n\geq k}(\Delta)\int f_n \leq (\Delta)\int \inf_{n\geq k} f_n. \tag{3.29}$$

Lembramos que, para cada $x \in K$, $f_n(x) \xrightarrow{n} f(x)$ se e somente se

$$\lim_{k\to\infty}\left(\inf_{n\geq k} f_n(x)\right) = f(x) = \lim_{k\to\infty}\left(\sup_{n\geq k} f_n(x)\right).$$

Aplicando novamente o Teorema da Convergência Monotônica com respeito à sequência $(\inf_{n\geq k} f_n)_{k\in\mathbb{N}}$, obtemos que f é Δ-integrável e que $(\Delta)\int f = \lim_{k\to\infty}(\Delta)\int \inf_{n\geq k} f_n$. Da mesma forma, temos $(\Delta)\int f = \lim_{k\to\infty}(\Delta)\int \sup_{n\geq k} f_n$. Combinando com (3.29), temos que $(\Delta)\int f_n \to (\Delta)\int f$. $\square$

Lembrando que, dada uma sequência de reais $(a_n)_n$, o *limite inferior de* $(a_n)_n$ é definido por

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \doteq \lim_{k\to\infty}\left(\inf_{n\geq k} a_n\right) \in \mathbb{R}\cup\{-\infty,\infty\},$$

da demonstração do Teorema da Convergência Dominada obtemos como Corolário:

Lema 3.26 (Lema de Fatou). *Sejam K um conjunto Δ-elementar, $f : K \to \mathbb{R}$ e $(f_n)_n$ uma sequência de funções não negativas e Δ-integráveis em K, tais que $f_n(x) \to f(x)$ para quase todo $x \in K$. Se a sequência $\left((\Delta)\int f_n\right)_n$ for limitada, então f é Δ-integrável e*

$$(\Delta)\int f \leq \liminf_{n\to\infty}(\Delta)\int f_n.$$

3.5 Relação com a integral de Lebesgue

A primeira observação que deve ser feita com o intuito de comparar a Δ-integral com a integral de Lebesgue em um domínio Δ-elementar K é a de que as funções simples são Δ-integráveis, e o valor da integral coincide com o valor da integral de Lebesgue. De fato, considere um conjunto mensurável não-vazio $E \subset K$, e mostremos que χ_E é Δ-integrável, com $(\Delta)\int \chi_E = |E|$; o resultado se estende a funções simples pela linearidade da Δ-integral. Sejam $\epsilon > 0$ e $C > 0$ suficientemente grande. Existe um aberto U de K satisfazendo $U \supset E$ e $|U| < |E| + \epsilon$, e é possível definir um calibre δ em K satisfazendo

1. $B_{\delta(x)}(x) \subset U$, para cada $x \in E$;

2. $\delta(x) \leq d(x, E)$, para cada $x \in K \setminus E$.

Dada uma Δ-partição δ-fina, C-regular $\mathcal{P} = \{(I^j, t^j) : j \in \Gamma\}$ de K, vamos escrever $\Gamma_0 \doteq \{j \in \Gamma : t^j \notin E\}$ e $\Gamma_1 \doteq \{j \in \Gamma : t^j \in E\}$. Pela escolha de δ temos que

$$|E| \leq S(\chi_E, \mathcal{P}) = \sum_{j\in\Gamma_0} 0.|I^j| + \sum_{j\in\Gamma_1} 1.|I^j| = \left|\cup_{j\in\Gamma_1} I^j\right| \leq |U| < |E| + \epsilon,$$

de onde segue o resultado.

Dada uma função Lebesgue integrável *positiva* $f : K \to \mathbb{R}$, a observação acima nos permite deduzir que também neste caso f é Δ-integrável, com $(\Delta)\int f = (L)\int f$. Basta notar que, pela definição da integral de Lebesgue, existe uma sequência de funções simples positivas $(s_n)_n$ em K satisfazendo

1. $s_1(x) \leq s_2(x) \leq \ldots$, para quase todo $x \in K$;

2. $s_n(x) \xrightarrow{n} f(x)$ para quase todo $x \in K$; e

3. $(L)\int s_n \longrightarrow (L)\int f$.

A conclusão segue do Teorema da Convergência Monotônica para a Δ-integral (Teorema 3.23), já que s_n são Δ-integráveis, com $(\Delta)\int s_n = (L)\int s_n$. Para definições e propriedades da integral de Lebesgue, citamos [11].

De maneira mais geral, temos o seguinte resultado:

Proposição 3.27. *Seja K um conjunto Δ-elementar e $f : K \to \mathbb{R}$. Então f é Lebesgue integrável se e somente se f e $|f|$ são Δ-integráveis,*[4] *e neste caso*

$$(L)\int f = (\Delta)\int f.$$

Em particular, a Δ-integral é mais geral que a integral de Lebesgue.

Para a demonstração precisamos do seguinte resultado adicional:

Proposição 3.28. *Seja K um conjunto Δ-elementar. Se $f : K \to \mathbb{R}$ é mensurável e $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ para quase todo $x \in K$, onde g e h são Δ-integráveis, então f é Δ-integrável, e*

$$(\Delta)\int g \leq (\Delta)\int f \leq (\Delta)\int h. \tag{3.30}$$

Demonstração (da Proposição 3.28). Restringimos novamentente nossa demonstração ao caso em que as desigualdades são satisfeitas para todo $x \in K$, que K é um triângulo e que as desigualdades em (3.7) são satisfeitas para todo $x \in K$. Seja $(\phi_n)_n$ uma sequência de funções triângulo-escada convergindo quase sempre a f. Então, pelo Lema 3.24, $f_n \doteq \max\{g, \min\{h, \phi_n\}\}$ é Δ-integrável, $(f_n)_n$ converge a f quase sempre e $g(x) \leq f_n(x) \leq h(x)$, para cada n e cada $x \in K$. Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada 3.25, f é Δ-integrável, e (3.30) é decorrência direta da Proposição 3.7. □

Demonstração (da Proposição 3.27). Suponha que f e $|f|$ sejam Δ-integráveis. Para cada subconjunto $E \subset K$ mensurável, a função $\chi_E f$ é mensurável e

$$-|f| \leq \chi_E f \leq |f|,$$

logo, pela Proposição 3.28, $\chi_E f$ é Δ-integrável. Assim,

$$f^+ \doteq \max\{0, f\} \text{ e } f^- \doteq -\min\{0, f\}$$

são funções mensuráveis, positivas e Δ-integráveis, com $f = f^+ - f^-$.

Vamos considerar a sequência de funções $(f_n^+)_n$ definida para cada n natural e $x \in K$ por

$$f_n^+(x) \doteq \min\{n, f^+(x)\}.$$

[4]Usualmente se diz, para uma integral não absoluta T qualquer, que uma determinada função f é *absolutamente T-integrável*, quando $|f|$ é T-integrável.

cada f_n^+ é Lebesgue integrável, por ser limitada e mensurável, e é Δ-integrável pelo Lema 3.24. Além disso, para cada $x \in K$ temos que $0 \leq f_1^+(x) \leq f_2^+(x) \leq \ldots$ e $f_n^+(x) \xrightarrow{n} f^+(x)$. O Teorema da Convergência Monotônica clássico para funções Lebesgue integráveis garante que f^+ é Lebesgue integrável, e pelas observações feitas no início desta Seção temos neste caso

$$(L)\int f^+ = (\Delta)\int f^+.$$

Analogamente se mostra que f^- é Lebesgue integrável, com $(L)\int f^- = (\Delta)\int f^-$. Segue da linearidade da Δ-integral e da integral de Lebesgue que f é Lebesgue integrável e

$$(L)\int f = (\Delta)\int f.$$

Reciprocamente, se f é Lebesgue integrável, então f^+ e f^-, também o são, e por serem positivas são tambémΔ-integráveis, com os valores das integrais coincidido com os valores da integral de Lebesgue. Segue que

$$f = f^+ - f^- \text{ e } |f| = f^+ + f^-$$

são Δ-integráveis, e $(\Delta)\int f = (L)\int f$, $(\Delta)\int |f| = (L)\int |f|$ novamente pela linearidade da Δ-integral. □

3.6 O Teorema da Divergência

Observe que, até este ponto, a C-regularidade das Δ-partições não foi necessária para demonstrar nenhum resultado. Neste trabalho ela será utilizada exclusivamente para demonstrar o Teorema 3.29 abaixo.

Teorema 3.29 (Divergência). *Sejam Ω um aberto não-vazio de $\mathbb{R}^2$, $K \subset \Omega$ um conjunto Δ-elementar, e $F : \Omega \to \mathbb{R}^2$ uma função diferenciável. Então $divF$ é Δ-integrável em K, e*

$$(\Delta)\int_K divF = (L)\int_{\partial K} F \cdot N. \tag{3.31}$$

Observe que a integral à direita em (3.31), nestas condições, sempre existe pela continuidade de $F \cdot N$ em cada um dos segmentos de reta que compõem ∂K. Pelo que foi visto no Capítulo 2, quando K é um intervalo, Teorema da Divergência 3.29 implica que o Teorema de Fubini não é satisfeito em K, no sentido da Proposição 2.5. Podemos concluir em particular que a Δ-integral é *estritamente* mais geral que a integral de Lebesgue.

Demonstração. Seja $\epsilon > 0$ e $C > 0$ suficientemente grande. Pela diferenciabilidade de F, para cada $x \in K$ existe $\delta(x) > 0$ tal que

$$y \in B_{\delta(x)}(x) \Rightarrow ||F(y) - F(x) - dF_x(y-x)|| \leq \frac{\epsilon}{C}||y-x||. \tag{3.32}$$

δ define um calibre em K. Seja $\mathcal{P} = \{(I^j, t^j) : j \in \Gamma\}$ uma Δ-partição δ-fina, C-regular de K, e defina, para cada $j \in \Gamma$,

$$G^j(y) \doteq F(t^j) + dF_{t^j}(y - t^j) \text{ e}$$
$$H^j(y) \doteq F(y) - F(t^j) - dF_{t^j}(y - t^j).$$

Note que, para cada j, $F = G^j + H^j$. logo

$$\begin{aligned}
\left|S_K(divF, \mathcal{P}) - (L)\int_{\partial I} F \cdot N\right| &= \left|\sum_{j\in\Gamma}\left[divF(t^j)|I^j| - (L)\int_{\partial I^j} F \cdot N\right]\right| \\
&= \left|\sum_{j\in\Gamma}\left[divF(t^j)|I^j| - (L)\int_{\partial I^j} (G^j + H^j) \cdot N\right]\right| \\
&= \left|\sum_{j\in\Gamma}\left[divF(t^j)|I^j| - (L)\int_{\partial I^j} G^j \cdot N - (L)\int_{\partial I^j} H^j \cdot N\right]\right|.
\end{aligned}$$

Uma versão clássica do Teorema da Divergência, aplicada às funções afins G^j, nos dá

$$(L)\int_{\partial I^j} G^j \cdot N = (L)\iint_{I^j} divG^j = divF(t^j)|I^j|.$$

Substituindo na desigualdade acima temos

$$\left|S(divF, \mathcal{P}) - (L)\int_{\partial I} F \cdot N\right| = \left|\sum_{j\in\Gamma}(L)\int_{\partial I^j} H^j \cdot N\right|.$$

Pela condição de diferenciabilidade de F expressada pela desigualdade (3.32), para cada j temos

$$\begin{aligned}
\left|(L)\int_{\partial I^j} H^j \cdot N\right| &\leq (L)\int_{\partial I^j} ||H^j(y)||dy \leq \max_{y\in\partial I^j}||H^j(y)||\,per(\partial I^j) \\
&\leq \max_{y\in\partial I^j}\frac{\epsilon}{C}||y - t^j||\,per(\partial I^j) \leq \frac{\epsilon}{C}q(I^j).
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Estas observações nos levam a

$$\begin{aligned}
\left|S(divF, \mathcal{P}) - (L)\int_{\partial I} F \cdot N\right| &= \left|\sum_{j\in\Gamma}(L)\int_{\partial I^j} H^j \cdot N\right| \leq \sum_{j\in\Gamma}\left|(L)\int_{\partial I^j} H^j \cdot N\right| \\
&\leq \frac{\epsilon}{C}\sum_{j\in\Gamma} q(I^j) \leq \epsilon,
\end{aligned}$$

o que conclui nossa demonstração. □

Capítulo 4

Conclusão

4.1 Contribuições deste trabalho: recapitulação

Vamos recapitular brevemente quais resultados apresentados ao longo deste trabalho representam contribuições originais à teoria.

- A Proposição 1.8, tornou possível usar o exemplo de [5] para mostrar que a M_1-integral não é invariante por rotações, além de dar como subproduto uma prova de que também a integral de Henstock-Kurzweil não é invariante por rotações, sem envolver a equivalência entre as integrais multidimensionais de Perron e de Henstock-Kurzweil;

- Com a Proposição 2.5, generalizamos o resultado da M_1-integral não satisfazer o Teorema de Fubini para um contexto de integração geral;

- Introduzimos a Δ-integral, e obtivemos para esta integral todos os resultados já existentes para a M_1-integral e que foram exibidos em [4]. Mostramos que, ao contrário da M_1-integral, a Δ-integral admite uma fórmula de mudança de variáveis válida para transformações lineares (Proposição 3.3). Mostramos que a Δ-integral tem propriedades aditivas estritamente mais ricas que a M_1-integral: enquanto que a M_1-integral é aditiva com respeito a conjuntos elementares mas *não* com respeito a conjuntos Δ-elementares (por consequência imediata da Proposição 1.7), a Δ-integral é aditiva com respeito a conjuntos Δ-elementares. Mostramos que a Δ-integral é estritamente mais geral que a M_1-integral (Proposição 3.15).

Adicionalmente, foram obtidos resultados sobre a Δ-integral – em especial a mensurabilidade das funções integráveis (Proposição 3.22), os Teoremas da Convergência Monotônica e da Convergência Dominada (respectivamente, 3.23 e 3.25), e a relação com a integral de Lebesgue dada pela Proposição 3.27 – cujas demonstrações podem ser facilmente adaptadas para provar resultados correspondentes para a M_1-integral.

4.2 Questões sobre a Δ-integral

Concluindo nosso trabalho, retomamos brevemente o questionamento a respeito da obtenção de uma fórmula de mudança de variáveis satisfatória para a Δ-integral. Observamos que a Proposição 3.3 representa uma vantagem da Δ-integral em relação à integral de Henstock-Kurzweil e à integral M_1; contudo, seu enunciado não é geral o suficiente para permitir, por exemplo, a generalização da Δ-integral a variedades diferenciáveis de dimensão dois. Para tal, seria necessária a obtenção de uma fórmula de mudança de variáveis válida para difeomorfismos. A título de motivação para este problema, citamos Jarník e Kurzweil [3]. Tendo em mente o problema de se obter um integral que satisfizesse um Teorema da Divergência bem geral, e que adicionalmente dispusesse de uma fórmula de mudança de variáveis válida para difeomorfismos, Jarník e Kurzweil introduziram no referido artigo outras duas integrais, usando partições de domínios em $\mathbb{R}^2$ compactos e com fronteira continuamente diferenciável por partes. Citamos a definição de uma delas, a CP_P-integral.

Definição 4.1. *Seja $K \subset \mathbb{R}^2$ não-vazio, compacto e com fronteira continuamente diferenciável por partes. Uma* CP_P-partição *de K é um conjunto finito da forma $\{(K^j, t^j) : j \in \Gamma\}$, onde cada K^j é fechado de K e com fronteira continuamente diferenciável por partes, K^j são não-sobrepostos, $t^j \in K^j$ e $\cup_{j\in\Gamma} K^j = K$. Dizemos que uma CP_P-partição $\mathcal{P} = \{(K^j, t^j) : j \in \Gamma\}$ de K é* δ-fina *(onde δ é um calibre em K) se, para cada j, $K^j \subset B_{\delta(t^j)}(t^j)$, e dizemos que $\mathcal{P}$ é* C-regular *(para $C > 0$) quando*

$$\sum_{j\in\Gamma} \int_{\partial K^j} ||x - t^j||\, dx \leq C. \tag{4.1}$$

Uma função $f : K \to \mathbb{R}$ é dita CP_P-integrável *se existir $A \in \mathbb{R}$ tal que, para cada ϵ e cada $C > 0$ suficientemente grande, existe um calibre δ em K tal que cada CP_P-partição $\mathcal{P}$ de K satisfaz*

$$\mathcal{P} \text{ é } \delta\text{-fina, } C\text{-regular} \Rightarrow |S(f,\mathcal{P}) - A| < \epsilon,$$

onde $S(f,\mathcal{P}) \doteq \sum_{j\in\Gamma} f(t^j)|K^j|$.

A condição de regularidade das partições expressa por (4.1) faz exatamente o mesmo papel da condição de regularidade da Δ-integral, que é o de obter um Teorema da Divergência geral.[1]

No referido artigo se mostra que de fato podemos obter para a CP_P-integral uma fórmula de mudança de variáveis válida para difeomorfismos, o que decorre naturalmente do fato de que difeomorfismos mapeiam CP_P-partições em CP_P-partições.

Contudo, não é difícil ver que a grande riqueza das partições do domínio impede que tenhamos para a CP_P-integral um lema correspondente ao Lema 3.21, e desta forma não podemos obter um resultado correspondente à importante Proposição 3.19, ao menos

[1]Mais precisamente, ela é usada para se obter a desigualdade correspondente a (3.33) no decorrer da demonstração do Teorema da Divergência.

através de demonstração semelhante à usada para a Δ-integral. Além disso, a definição complicada da CP_P-integral dificulta consideravelmente a demonstração de propriedades simples; no referido artigo, por exemplo, a maior parte do texto é dedicada à demonstração do Lema de Cousin, e outras propriedades básicas não são estudadas.

Outro questionamento pertinente a respeito da Δ-integral é a possível generalização a três ou mais dimensões. Para tal, é intuitivo escolher, como objetos para substituir os triângulos em $\mathbb{R}^N$, os *simplexos*. Neste caso, para $N \neq 2$ é preciso adaptar o conceito de regularidade definido em (3.1); isto pode ser feito substituindo o perímetro do triângulo pela medida de Lebesgue ($(N-1)$-dimensional) da fronteira do simplexo, ou então utilizando o conceito de regularidade da CP_P-integral definida acima. A maioria das propriedades da Δ-integral se estenderia facilmente a um novo conceito de integral em $\mathbb{R}^N$ usando partições do domínio em simplexos; algumas dificuldades podem surgir, no entanto, para demonstrar propriedades que estão conectadas com a natureza geométrica dos triângulos, tais como a propriedade aditiva (Proposição 3.9). Naturalmente, podemos estudar neste caso também possíveis generalizações da Proposição 3.3.

Referências Bibliográficas

[1] Bartle, R., *A Modern Theory of Integration,* Graduate Studies in Mathematics, 32. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.

[2] Gordon, R. A., *The Integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron and Henstock,* Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.

[3] Jarník, J., Kurzweil, J., *A nonabsolutely convergent integral which admits C^1-transformations,* Časopis Pěst. Mat., 109:157–167, 1984.

[4] Jarník, J., Kurzweil, J., Schwabik, Š., *On Mawhin's approach to multiple nonabsolutely convergent integral,* Časopis Pěst. Mat., 108:356–380, 1983.

[5] Karták, K., *K teorii vícerozměrného integrálu* (em tradução livre, *Sobre a teoria da integração em várias variáveis*) Časopis Pěst. Mat., 80:400–414, 1955.

[6] Mawhin, J., *Generalized multiple perron integrals and the Green-Goursat theorem for differentiable vector fields,* Czechoslovak Math. J. *31 (106)* (1981), no. 4, 614–632.

[7] Natanson, I. P., *Theory of Functions of a Real Variable,* Frederick Ungar, New York, 1955.

[8] Ostaszewski, K., *Henstock Integration in the Plane,* Transactions of the Amer. Math. Soc., 295 (2), 1986, 665–685.

[9] Lee, P. Y., *Lanzhou Lectures on Henstock Integration,* Series in Real Analysis, 2. World Scientific, Singapore, NJ, 1989.

[10] Pfeffer, W. F., *The Riemann Approach to Integration,* Cambridge Tracts in Math., 109. Cambridge Univ. Press, 1993.

[11] Rudin, W., *Real and Complex Analysis,* McGraw-Hill, New York, 1987.

[12] Saks, S., *Theory of the Integral* Dover Publications, New York, 1964.

[13] Schwabik, Š., *General integration and extensions,* Preprint