Espaços linearmente Lindelöf

Robson Aparecido Figueiredo

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
MESTRE EM CIÊNCIAS

Programa: Matemática

Orientador: Profª. Drª. Lúcia Renato Junqueira

Durante o desenvolvimento deste trabalho, o autor recebeu auxílio financeiro do CNPq — Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico

São Paulo, Março de 2010

Espaços linearmente Lindelöf

Este exemplar corresponde à redação
final da dissertação devidamente corrigida
e defendida por Robson Aparecido Figueiredo
e aprovada pela Comissão Julgadora.

Banca Examinadora:

- Profª. Drª. Lúcia Renato Junqueira (orientadora) – IME-USP.
- Prof. Dr. Antonio de Pádua Franco Filho – IME-USP.
- Prof. Dr. Marcelo Dias Passos – UNIFESP.

Agradecimentos

Sou imensamente grato a todos que de algum modo contribuíram para que este trabalho fosse concretizado. Em especial:

Aos amigos, presentes em todos os momentos.

Aos professores e alunos do grupo de pesquisa em Topologia Geral e Teoria dos Conjuntos do IME-USP, sempre dispostos a ajudar.

Aos professores Antonio de Padua Franco Filho, Marcelo Dias Passos e Ofélia Teresa Alas, pelas valiosas críticas e sugestões apresentadas a este trabalho.

À minha orientadora, Lúcia Renato Junqueira, cuja paciência, compreensão e atenção dispensadas foram imprescindíveis à realização deste projeto.

Aos meus pais, Isaias e Elza, que tanto fizeram por mim.

Aos meus irmãos, Rodrigo e Jackceley, meus grandes amigos.

À Sarah, que com seu amor torna a minha vida muito mais feliz.

Por fim, ao CNPq, que me apoiou financeiramente durante esses dois anos.

Resumo

Este trabalho tem como foco principal o estudo de espaços topológicos linearmente Lindelöf e as relações que eles guardam com os espaços de Lindelöf. Mostramos que condições adicionais, como ser metalindelöf ou $\aleph_\omega$-compacto, fazem de um espaço linearmente Lindelöf um espaço de Lindelöf. Por outro lado, apresentamos alguns exemplos de espaços linearmente Lindelöf que não possuem a propriedade de Lindelöf. É possível, inclusive, obter exemplos de um espaço localmente compacto e um consistente que seja realcompacto. São feitas, ainda, algumas comparações entre a propriedade de Lindelöf e a de ser linearmente Lindelöf. Mostramos, por exemplo, duas generalizações do teorema de Arhangels'kiĭ, sendo que uma delas constitui um exemplo interessante de aplicação de técnicas de submodelos elementares. Ao longo de toda a dissertação, são introduzidos vários problemas que até o momento permanecem em aberto.

Palavras-chave: linearmente Lindelöf, Lindelöf, pontos de acumulação completos, submodelos elementares, ultrafiltros bons

Abstract

The main focus of this dissertation lies in investigating linearly Lindelöf topological spaces and their relation to Lindelöf spaces. We show that if we add an assumption like metalindelöf or $\aleph_\omega$-compact to a linearly Lindelöf space we get a Lindelöf space. However, we give some examples of linearly Lindelöf spaces that do not satisfy the Lindelöf condition. By the way, it is possible to find an instance of a locally compact space and a consistent example which is realcompact. We also make comparison between the Lindelöf and the linearly Lindelöf conditions. For example, we prove two generalizations of the Arhangels'kiĭ theorem where one of them is an interesting application of elementary submodels tecniques. Along this work several open problems are included.

Keywords: linearly Lindelöf, Lindelöf, points of complete accumulation, elementary submodels, good ultrafilters

Sumário

Introdução **1**

1 Preliminares **5**

1.1 Teoria dos conjuntos 5

1.1.1 Ordinais 6

1.1.2 Filtros e ultrafiltros 7

1.1.3 Grandes Cardinais 9

1.2 Topologia 11

1.2.1 Definições e resultados básicos 11

1.2.2 Propriedades de recobrimentos 15

1.2.3 A compactificação de Stone-Čech 22

1.2.4 O espaço de Stone 24

1.2.5 Espaços realcompactos 26

1.2.6 Limites inversos 27

1.3 Submodelos elementares 30

2 Espaços linearmente Lindelöf **35**

2.1 Algumas equivalências e propriedades básicas 35

2.2 Exemplos de espaços não-Lindelöf 40

2.2.1 O espaço de Miščenko 40

2.2.2 O espaço de Buzyakova-Gruenhage 48

3 Quando linearmente Lindelöf implica Lindelöf? 51

3.1 Alguns resultados 51

3.2 Espaços incontavelmente compactos 61

3.3 Dois exemplos localmente compactos 68

3.4 Um exemplo consistente realcompacto 78

4 Lindelöf *versus* linearmente Lindelöf 83

4.1 Linearmente Lindelöf é discretamente reflexiva? 85

4.2 O teorema de Arhangel'skiĭ 86

4.3 Um resultado mais geral 93

5 Problemas em aberto 103

A Pontos bons e medíocres 105

A.1 A existência de ultrafiltros bons e enumeravelmente incompletos 107

A.2 Outros teoremas 114

Referências Bibliográficas 121

Índice Remissivo 124

Introdução

A gênese da noção de espaço linearmente Lindelöf está ligada a tentativas de se caracterizar a propriedade de Lindelöf em termos do conceito de ponto de acumulação completo.

Em 1922, Urysohn e Alexandroff mostraram que um espaço X é compacto se, e somente se, todo subconjunto infinito de X possui um ponto de acumulação completo em X.

Daí, surge naturalmente a pergunta: haveria uma caracterização semelhante para a propriedade de Lindelöf?

Pode-se facilmente mostrar que se todo subconjunto não-enumerável de um espaço X tem ponto de acumulação completo, então X é um espaço de Lindelöf. No entanto, a recíproca não é verdadeira. Em 1929, Alexandorff e Urysohn mostraram que $\aleph_\omega$ munido da topologia da ordem é um espaço de Lindelöf, porém não possui ponto de acumulação completo.

Em contrapartida, eles provaram que todos os espaços de Lindelöf satisfazem a seguinte condição mais fraca:

$(*)$ *todo subconjunto $A \subseteq X$ não-enumerável de cardinalidade regular tem um ponto de acumulação completo em X.*

Restava, assim, saber se os espaços satisfazendo $(*)$ possuiam necessariamente a propriedade de Lindelöf.

Em 1962, A. S. Miščenko construiu um exemplo de um espaço Tychonoff e não-Lindelöf satisfazendo $(*)$. Os espaços satisfazendo $(*)$ foram mais tarde chamados de *linearmente Lindelöf*, visto que eles constituem a classe dos espaços dos quais toda cobertura aberta linearmente ordenada pela inclusão possui uma subcobertura enumerável.

Sobre tais espaços é natural considerar duas questões gerais que norteiam este trabalho.

Questão 1. Que condições adicionais tornam um espaço linearmente Lindelöf um espaço de Lindelöf?

Questão 2. Quais teoremas sobre espaços de Lindelöf podem ser estendidos a espaços linearmente Lindelöf?

Surpreendentemente, pouco se sabe sobre espaços linearmente Lindelöf. Para as questões acima foram dadas ao longo do tempo contribuições positivas em ambas as direções, mas elas constituem apenas respostas parciais. Existem poucos exemplos (alguns complexos) em ZFC de espaços que são de Tychonoff, linearmente Lindelöf e não-Lindelöf. Entretanto, não existe, até o momento, nenhum exemplo conhecido de um espaço normal, linearmente Lindelöf que não é Lindelöf. Aliás, a questão da existência de um exemplo deste tipo é apontado por Hrušák e Moore, em [18], como um dos vinte maiores problemas da área de topologia conjuntista da atualidade. Tais espaços seriam altamente patológicos: o problema intrinsecamente envolve cardinais singulares e qualquer exemplo é um espaço de Dowker, isto é, um espaço normal cujo produto cartesiano com o intervalo fechado unitário $[0, 1]$ não é normal. Todavia, resultados interessantes envolvendo espaços linearmente Lindelöf podem ser provados — como por exemplo, uma generalização do teorema de Arhangel'skiĭ.

A seguir, daremos uma breve descrição dos conteúdos que serão apresentados ao longo desta dissertação.

O primeiro capítulo objetiva destacar definições e resultados preliminares, bem como estabelecer as notações empregadas ao longo do texto. Teoremas já consagrados em livros didáticos terão suas demonstrações omitidas, mas suas bibliografias serão indicadas. Isso para que o leitor tenha à mão informações suficientes para acompanhar o que será feito posteriormente, sem dar, contudo, muito espaço e atenção a coisas que fogem ao propósito deste trabalho.

No segundo capítulo introduziremos o conceito de espaço linearmente Lindelöf e suas principais equivalências. Serão dados, também, dois exemplos de espaços linearmente Lindelöf que não possuem a propriedade de Lindelöf, a saber, os espaços de Miščenko — o qual citamos anteriormente — e o espaço de Gruenhage-Buzyakova.

O terceiro capítulo será dedicado ao estudo de propriedades topológicas que constituem respostas parciais à questão 1. Mostramos que condições adicionais como ser metalindelöf ou $\aleph_\omega$-compacto fazem de um espaço linearmente Lindelöf um espaço de Lindelöf. Por outro lado, são apresentados dois espaços localmente compactos, linearmente Lindelöf e não-Lindelöf e um exemplo consistente com ZFC de um espaço realcompacto, linearmente Lindelöf que não é Lindelöf.

No quarto capítulo comparamos a propriedade de Lindelöf com a de ser linearmente Lindelöf. Perguntamos — e apresentamos uma resposta — se a propriedade de um espaço ser linearmente Lindelöf é discretamente reflexiva — vale lembrar que para a propriedade de Lindelöf esta é, até o momento, uma questão em aberto. São dadas, ainda, duas generalizações do teorema de Arhangels'kiĭ. A primeira delas constitui um exemplo interessante de aplicação de técnicas de submodelos elementares.

Ao longo de toda a dissertação, são apresentadas perguntas ainda sem respostas, parciais ou definitivas, relacionadas às questões 1 e 2. Nós as reunimos no quinto capítulo.

Por fim, no apêndice A apresentamos resultados relacionados ao conceito de pontos bons e medíocres de um espaço que serão utilizados na seção 3.3, na construção de dois exemplos de espaços localmente compactos, linearmente Lindelöf, mas não-Lindelöf.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, estabelecemos a notação que será utilizada ao longo desta dissertação, além de listar resultados preliminares e definições essenciais à compreensão do texto.

1.1 Teoria dos conjuntos

As abreviaturas ZFC, CH e GCH denotam, respectivamente, a axiomática de Zermelo-Fraenkel, a hipótese do contínuo e a hipótese do contínuo generalizada.

Apenas com o interesse de facilitar a notação e a linguagem empregadas, denotaremos por Ord e $Card$ a classe dos ordinais e cardinais, respectivamente. Desta forma, por exemplo, por $x \in Ord$ entenda-se apenas "x é um ordinal".

Dados um cardinal κ e um conjunto X, serão utilizadas as seguintes notações:

$$[X]^{\kappa} = \{A \subseteq X : |A| = \kappa\},$$
$$[X]^{<\kappa} = \{A \subseteq X : |A| < \kappa\}$$

e

$$[X]^{\leq\kappa} = \{A \subseteq X : |A| \leq \kappa\}$$

Dados conjuntos X e Y, o conjunto de todas as funções de X em Y será denotado por ${}^{X}Y$. Para $f \in {}^{X}Y$, $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$ definimos

$$f[A] = \{f(x) : x \in A\}$$

e

$$f^{-1}[B] = \{x \in X : f(x) \in B\}.$$

Os conjuntos $f[A]$ e $f^{-1}[B]$ são chamados a *imagem de A por f* e a *imagem inversa de B por f*.

1.1.1 Ordinais

Dado um ordinal α, $\lim \alpha$ denotará o conjunto dos elementos de α que são ordinais limites.

Definição 1.1.1. Seja $\langle A, \prec \rangle$ uma boa-ordem. O *tipo-de-ordem* de A é o único ordinal $ot(A)$ tal que as ordens $\langle ot(A), \in_{ot(A)} \rangle$ e $\langle A, \prec \rangle$ são isomorfas.

Lema 1.1.2. *Se $\mathcal{F}$ é uma família de conjuntos então*

$$|\bigcup \mathcal{F}| \leq |\mathcal{F}| \cdot \sup\{|X| : X \in \mathcal{F}\}.$$

Demonstração. 5.2 de [20]. □

Definição 1.1.3. Seja γ um ordinal. Um conjunto $F \subseteq \gamma$ é *fechado* em γ se, e somente se, $\alpha \in F$ para todo ordinal limite $\alpha \in \gamma$ tal que $\sup(F \cap \alpha) = \alpha$.

Vale lembrar que ser fechado segundo a definição 1.1.3 é equivalente a ser fechado na topologia da ordem.

Definição 1.1.4. Seja γ um ordinal limite. Um conjunto $F \subseteq \gamma$ é

- *ilimitado* em γ se $\sup F = \gamma$.
- *c.u.b.* em γ se F é fechado e ilimitado em γ.

Definição 1.1.5. Seja γ um ordinal limite. Um conjunto $S \subseteq \gamma$ é *estacionário* se, e somente se, $S \cap C \neq \emptyset$ para todo $C \subseteq \gamma$ c.u.b. em γ.

Lema 1.1.6. *Se $F, G \subseteq \gamma$ são c.u.b. em γ, então $F \cap G$ é c.u.b. em γ.*

Demonstração. 8.2 de [20]. □

Lema 1.1.7. *Para todo $k \in \omega \setminus \{0\}$, $\lim \omega_k$[1] é estacionário em ω_k.*

Demonstração. Note que $\lim \omega_k$ é c.u.b. em ω_k e aplique o lema 1.1.6. □

Lema 1.1.8 (*Pressing-down*). *Sejam κ um cardinal regular não-enumerável, $S \subseteq \kappa$ estacionário em κ e $f : S \to \kappa$ uma função regressiva, isto é, $f(\gamma) < \gamma$ para todo $\gamma \in S \setminus \{0\}$. Então, existe $\alpha < \kappa$ tal que $f^{-1}\{\alpha\}$ é estacionário em κ.*

Demonstração. 6.14 do capítulo II de [25]. □

1.1.2 Filtros e ultrafiltros

Ao longo desta subseção $\mathcal{R}$ denotará uma família de conjuntos tal que $A \cap B \in \mathcal{R}$ para quaisquer $A, B \in \mathcal{R}$.

Definição 1.1.9. Um *filtro em $\mathcal{R}$* é uma família $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{R}$ não vazia tal que:

(F1) $\emptyset \notin \mathcal{F}$;

(F2) Se $A \in \mathcal{F}$ e $B \in \mathcal{F}$ então $A \cap B \in \mathcal{F}$;

(F3) Se $A, B \in \mathcal{R}, A \in \mathcal{F}$ e $A \subseteq B$, então $B \in \mathcal{F}$.

Se $\mathcal{R} = \wp(I)$ para algum conjunto $I \neq \emptyset$ então dizemos que $\mathcal{F}$ é um *filtro* sobre I.

Um *ultrafiltro* $\mathcal{U}$ em $\mathcal{R}$ é um filtro maximal com respeito à inclusão, isto é, se $\mathcal{F}$ é um filtro em $\mathcal{R}$ tal que $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}$ então $\mathcal{U} = \mathcal{F}$.

[1] $\lim \omega_k$ é o conjunto de ordinais limites de ω_k.

Dizemos que uma família não vazia $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{R}$ é uma *base para um filtro* em $\mathcal{R}$ se

(BF1) $\emptyset \notin \mathcal{G}$;

(BF2) Se $A, B \in \mathcal{G}$ então existe $C \in \mathcal{G}$ tal que $C \subseteq A \cap B$.

Uma família de conjuntos $\mathcal{A} \neq \emptyset$ tem a *propriedade da intersecção finita* (*p.i.f.*) se para cada subconjunto finito $\mathcal{A}_0$ de $\mathcal{A}$, temos que $\bigcap \mathcal{A}_0 \neq \emptyset$. Note que todo filtro tem a propriedade da interseção finita.

Lema 1.1.10. *Se $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{R}$ é não vazio e tem a p.i.f., então existe um filtro $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{A}$.*

Definição 1.1.11. Se $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{R}$ é não vazio e tem a *p.i.f.*, então o *filtro $\mathcal{G}$ gerado por $\mathcal{A}$* é definido por

$$G = \bigcap \{\mathcal{F} : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{F} \text{ e } \mathcal{F} \text{ é um filtro sobre } I\}.$$

Lema 1.1.12. *Para todo filtro $\mathcal{F}$ em $\mathcal{R}$, existe um ultrafiltro $\mathcal{U}$ em $\mathcal{R}$, tal que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$.*

Definição 1.1.13. Seja I um conjunto. Uma *álgebra de conjuntos* sobre I é uma família $\mathcal{A} \subseteq \wp(I)$ tal que

(*i*) $I \in \mathcal{A}$;

(*ii*) se $X, Y \in \mathcal{A}$, então $X \cap Y \in \mathcal{A}$;

(*iii*) se $X \in \mathcal{A}$, então $I \setminus X \in \mathcal{A}$.

A seguinte caracterização para ultrafiltros será muito utilizado no decorrer desta dissertação:

Lema 1.1.14. *Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra de conjuntos sobre um conjunto $I \neq \emptyset$ e $\mathcal{U}$ um filtro em $\mathcal{A}$. Então, $\mathcal{U}$ é um ultrafiltro em $\mathcal{A}$ se, e somente se, para todo $X \in \mathcal{A}$, ou $X \in \mathcal{U}$ ou $I \setminus X \in \mathcal{U}$.*

Definição 1.1.15. Sejam κ um cardinal e $\mathcal{F}$ um filtro em $\mathcal{R}$. Dizemos que $\mathcal{F}$ é *κ-completo* se $\bigcap \mathcal{A} \in \mathcal{F}$ para todo $\mathcal{A} \in [\mathcal{F}]^{<\kappa}$. Caso contrário, dizemos que $\mathcal{F}$ é *κ-incompleto*.

Dizemos que $\mathcal{F}$ é *enumeravelmente completo* (ou *σ-completo*) se $\mathcal{F}$ é ω_1-completo. Caso contrário, dizemos que $\mathcal{F}$ é *enumeravelmente incompleto* (ou *σ-incompleto*).

1.1.3 Grandes Cardinais

Dizemos que um cardinal κ é um *cardinal limite forte* se

$$2^\lambda < \kappa \text{ para todo } \lambda < \kappa.$$

Definição 1.1.16. Seja κ um cardinal.

- κ é *fracamente inacessível*, se κ é regular, não-enumerável e um limite.
- κ é *inacessível*, se κ é regular, não-enumerável e um limite forte.

Todo cardinal inacessível é fracamente inacessível. Se assumirmos GCH, então todo cardinal fracamente inacessível é inacessível, ou seja, os cardinais fracamente inacessíveis são exatamente os cardinais inacessíveis.

Definição 1.1.17. Um cardinal não-enumerável é *mensurável* se existe um ultrafiltro κ-completo não-principal sobre κ.

Teorema 1.1.18. *Todo cardinal mensurável é inacessível.*

Demonstração. 10.4 de [20]. □

Definição 1.1.19. Um cardinal κ é um *cardinal de Jónsson* se para toda função $f : [\kappa]^{<\aleph_0} \to \kappa$, existe $H \in [\kappa]^\kappa$ tal que a imagem de $f \restriction [H]^{<\aleph_0}$ é um subconjunto próprio de κ.

Para ordinais α e β e um cardinal κ, denotamos por

$$\alpha \longrightarrow [\kappa]^{<\omega}_{\beta}$$

a seguinte afirmação: para toda função $f : [\alpha]^{<\omega} \longrightarrow \beta$ existe um $H \in [\alpha]^{\kappa}$ tal que a imagem de $f \restriction [H]^{<\omega}$ é um subconjunto próprio de β.

A negação desta é afirmação é denotada por $\alpha \nrightarrow [\kappa]^{<\omega}_{\beta}$. Se para alguma função $f : [\alpha]^{<\omega} \longrightarrow \beta$ a afirmação falha, dizemos que f *testemunha* $\alpha \nrightarrow [\kappa]^{<\omega}_{\beta}$.

Note que um cardinal κ é de Jónsson se, e somente se, $\kappa \longrightarrow [\kappa]^{<\omega}_{\kappa}$.

Teorema 1.1.20. (*a*) $\aleph_0$ *não é um cardinal de Jónsson.*

(*b*) *Se um cardinal* κ *não é de Jónsson então* κ^+ *não é de Jónsson.*

Demonstração. (a) Seja $f : [\omega]^{<\omega} \longrightarrow \omega$ dada por $f(x) = |x|$ para todo $x \in [\omega]^{<\omega}$. Então, f testemunha $\omega \nrightarrow [\omega]^{<\omega}_{\omega}$.

(b) Como κ não é um cardinal de Jónsson, existe uma função $f : [\kappa]^{<\omega} \longrightarrow \kappa$ que testemunha $\kappa \nrightarrow [\kappa]^{<\omega}_{\kappa}$. Para cada $\kappa \leq \alpha < \kappa^+$, considere uma bijeção $F_\alpha : \kappa \longrightarrow \alpha$ e as funções

$$\begin{array}{rccc} h_\alpha : & [\alpha]^{<\omega} & \longrightarrow & [\kappa]^{<\omega} \\ & A & \longmapsto & F_\alpha^{-1}[A] \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rccc} f_\alpha : & [\alpha]^{<\omega} & \longrightarrow & \alpha \\ & A & \longmapsto & F_\alpha \circ f \circ h_\alpha(A) \end{array}.$$

Note que cada f_α testemunha $\alpha \nrightarrow [\kappa]^{<\omega}_{\alpha}$. Defina $g : [\kappa^+]^{<\omega} \longrightarrow \kappa^+$ por:

$$g(A) = \begin{cases} f_\alpha(A \setminus \{\alpha\}), & \text{se } \alpha = \max(A) \geq \kappa; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Então, g testemunha $\kappa^+ \nrightarrow [\kappa^+]^{<\omega}_{\kappa^+}$. De fato, sejam $X \in [\kappa^+]^{\kappa^+}$ e $\beta < \kappa^+$. Então, existe $\alpha \in \kappa^+$ tal que $\beta < \alpha$ e $|X \cap \alpha| = \kappa$. Logo, para algum $A \in [X \cap \alpha]^{<\omega}$, $\beta = f_\alpha(A) = g(A \cup \{\alpha\})$. $\square$

Corolário 1.1.21. *Para todo $n \in \omega$, $\aleph_n$ não é um cardinal de Jónsson.*

1.2 Topologia

1.2.1 Definições e resultados básicos

Definição 1.2.1. Sejam $\langle X, \tau \rangle$ um espaço topológico e $x \in X$. Dizemos que $\mathcal{B} \subseteq \tau$ é uma *base* para x se para todo aberto V tal que $x \in V$, existe $U \in B$ tal que $x \in U \subseteq V$.

Definição 1.2.2. O *peso* de um espaço topológico X é definido por

$$w(X) = \min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \text{ é uma base de abertos para } X\} + \omega.$$

Definição 1.2.3. A *densidade* de um espaço topológico X é definida por

$$d(X) = \min\{|D| : D \subseteq X \text{ é denso em } X\} + \omega.$$

Dizemos que X é *separável* se, e somente se, $d(X) = \omega$.

Definição 1.2.4. Seja $\langle X, \tau \rangle$ um espaço topológico. Dizemos que X é:

- T_1 se, para todo $x \in X$, $\{x\}$ é um fechado de X;
- T_2 ou de *Hausdorff* se, para quaisquer $x, y \in X$ distintos, existem U e V abertos disjuntos tais que $x \in U$ e $y \in V$;
- T_3 se, para quaisquer $x \in X$ e $F \subseteq X$ fechado com $x \notin F$, existem $U, V \in \tau$ disjuntos satisfazendo $x \in U$ e $F \subseteq V$. Se X também é T_1 dizemos que X é *regular*;
- $T_{3\frac{1}{2}}$ se, e somente se, dados $x \in X$ e $F \subseteq X$ fechado quaisquer com $x \notin F$, existe uma função contínua $f : X \to [0, 1]$ tal que $f(x) = 0$ e $f(y) = 1$ para todo $y \in F$. Se X também é T_1 dizemos que X é um espaço de *Tychonoff*;

- T_4 se, dados $F, G \subseteq X$ fechados e disjuntos quaisquer, existem $U, V \in \tau$ disjuntos tais que $F \subseteq U$ e $G \subseteq V$. Se X também é T_1 dizemos que X é *normal*.

Teorema 1.2.5. *Para um espaço regular X, $w(X) \leq 2^{d(X)}$.*

Demonstração. 1.5.7 de [13]. □

Definição 1.2.6. Um ponto x é um *ponto de acumulação completo* de um conjunto A se $|A \cap U| = |A|$ para toda vizinhança aberta U de x.

Definição 1.2.7. Um subconjunto A de um espaço topológico X é *raro* em X se todo aberto não-vazio de X contém um aberto não vazio disjunto de A.

Teorema 1.2.8. *Seja X um espaço topológico. Se A é um subconjunto de X de cardinalidade $\kappa > w(X)$ regular então A tem um ponto de acumulação completo em X.*

Demonstração. Seja $\mathcal{B}$ uma base de X tal que $|\mathcal{B}| = w(X)$. Suponhamos, por absurdo, que A não possua ponto de acumulação completo. Então, para cada $x \in A$, existe $U_x \in \mathcal{B}$ tal que $|U_x \cap A| < \kappa$. Seja $\{A_\alpha : \alpha \in \lambda\}$ uma enumeração de $\{U_x \cap A : x \in A\}$. É claro que $\lambda \leq w(X)$. Assim, pelo lema 1.1.2,

$$\kappa = |A| = |\bigcup_{\alpha<\lambda} A_\alpha| \leq \lambda \cdot \bigcup_{\alpha<\lambda} |A_\alpha| < \kappa.$$

Um absurdo. □

Definição 1.2.9. Seja $x \in X$. O *tightness de x em X* é definido por

$$t(x, X) = \min\{\kappa \in Card : \forall C \subseteq X \text{ tal que } x \in \overline{C},\ \exists C_0 \in [C]^{\leq\kappa} \text{ tal que } x \in \overline{C_0}\} + \omega.$$

O *tightness de X* é definido por

$$t(X) = \sup\{t(x, X) : x \in X\}.$$

Para cada cardinal κ e cada $C \subseteq X$ seja

$$[C]_\kappa = \bigcup\{\overline{M} : M \subseteq C \text{ e } |M| \leq \kappa\}.$$

É fácil ver que $t(X) \leq \kappa$ se, e somente se, $\overline{C} = [C]_\kappa$ para todo $C \subseteq X$. Esta caracterização de tightness será muito útil na demosntração do próximo teorema.

Teorema 1.2.10. *Sejam X um espaço topológico e*

$$t_0(X) = \min\{\kappa \in Card : \forall C \subseteq X \text{ tal que } \overline{C} \neq C,\ \exists C_0 \in [C]^{\leq\kappa} \text{ tal que } \overline{C_0} \setminus C \neq \emptyset\} + \omega.$$

Então, $t(X) = t_0(X)$.

Demonstração. Sejam $\kappa = t(X)$ e $\kappa_0 = t_0(X)$.

Vamos mostrar que $\kappa_0 \leq \kappa$. Seja $C \subseteq X$ tal que $\overline{C} \setminus C \neq \emptyset$. Fixe $x \in \overline{C} \setminus C$. Da definição de $t(X)$ segue que existe $C_0 \in [C]^{\leq\kappa}$ tal que $x \in \overline{C_0}$, isto é, $\overline{C_0} \setminus C \neq \emptyset$. Portanto, $\kappa_0 \leq \kappa$.

Mostremos, agora, que $\kappa \leq \kappa_0$. Suponha o contrário. Então, $\overline{C} \neq [C]_{\kappa_0}$ para algum $C \subseteq X$. Logo, $D = [C]_{\kappa_0}$ não é fechado, isto é, $\overline{D} neD$. Portanto, pela definição de κ_0, existe $D_0 \in [D]^{\leq\kappa_0}$ tal que $\overline{D_0} \setminus D \neq \emptyset$. Mas, para cada $d \in D_0$, existe $M_d \in [C]^{\leq\kappa_0}$ tal que $d \in \overline{M_d}$. Assim, $M = \bigcup\{M_d : d \in D_0\} \in [C]^{\leq\kappa_0}$ e $\overline{D_0} \subseteq \overline{M} \subseteq D$. Portanto, $\overline{D_0} \setminus D = \emptyset$, uma contradição. □

Definição 1.2.11. Seja κ um ordinal. Uma κ-sequência transfinita $\langle x_\alpha \rangle_{\alpha<\kappa}$ em X é uma *sequência livre em X* se

$$\overline{\{x_\beta : \beta < \alpha\}} \cap \overline{\{x_\beta : \alpha \leq \beta < \kappa\}} = \emptyset$$

para todo $\alpha < \kappa$.

Segue diretamente da definição, que uma sequência livre é um subespaço discreto de X.

Definição 1.2.12. A *freeness* de X é definida por

$$F(X) = \sup\{\kappa \in \mathrm{Card} : \text{ existe uma } \kappa\text{-sequência livre em } X\} + \omega.$$

Definição 1.2.13. Um espaço topológico X é *sequencial* se, para todo subconjunto $A \subseteq X$, temos que:

A não é fechado se, e somente se, existe $\langle x_n \rangle_{n \in \omega}$ em A tal que $\lim x_n \nsubseteq A$.

Note que um espaço X é sequencial se, e somente se, para todo subconjunto $A \subseteq X$, A é fechado se, e somente se, $\lim x_n \subseteq A$ para toda sequência $\langle x_n \rangle_{n<\omega}$ em A.

Teorema 1.2.14. *O tightness de qualquer espaço sequencial X é enumerável.*

Demonstração. Seja $C \subseteq X$ não fechado. Como X é sequencial, existe uma sequência $\langle x_n \rangle_{n<\omega}$ em C convergindo para um $x \in \overline{C} \setminus C$. Seja $C_0 = \{x_n : n < \omega\}$. Logo, $|C_0| \leq \omega$ e $\overline{C}_0 \setminus C \neq \emptyset$. Portanto, pelo teorema 1.2.10, $t(X) = \omega$. □

Teorema 1.2.15. *Sejam X um espaço sequencial de Hausdorff e Y um subespaço de X tal que $|Y| \leq \mathfrak{c}$. Então, $|\overline{Y}| \leq \mathfrak{c}$.*

Demonstração. Construa, indutivamente, uma sequência $\langle C_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ de subconjuntos de X da seguinte maneira:

- C_0 é o conjunto de limites de sequências convergentes de Y. Note que $Y \subseteq C_0$, pois podemos tomar sequências constantes.
- Tendo construído C_α para algum $\alpha < \omega_1$, seja $C_{\alpha+1}$ o conjunto de limites de sequências convergentes de C_α.
- Tendo construído C_β para todo $\beta < \alpha$, sendo $\alpha \in \omega_1$ um ordinal limite, tome $C_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} C_\beta$.

Tome $C = \bigcup_{\alpha<\omega_1} C_\alpha$. Afirmamos que C é fechado. De fato, sejam $\langle y_n : n < \omega \rangle$ uma sequência em C convergente e $y \in \lim y_n$. Da regularidade de ω_1 segue que existe $\alpha < \kappa$ tal que $\{y_n : n < \omega\} \subseteq C_\alpha$. Por construção, $y \in C_{\alpha+1}$. Logo, $y \in C$. Como X é sequencial, C é fechado.

Da construção acima segue que, para cada $\alpha < \omega_1$, $Y \subseteq C_\alpha \subseteq \overline{Y}$. Logo, $Y \subseteq C \subseteq \overline{Y}$ e, como C é fechado, $C = \overline{Y}$. Visto que X é um espaço de Hausdorff, cada $|C_\alpha| \leq \mathfrak{c}$. Então,

$$|\overline{Y}| = |C| \leq \omega_1 \cdot \sup_{\alpha<\omega_1} |C_\alpha| \leq \mathfrak{c}. \qquad \square$$

1.2.2 Propriedades de recobrimentos

Definição 1.2.16. Um espaço X é *compacto* se, e somente se, toda cobertura aberta de X possui subcobertura finita.

Definição 1.2.17. Um espaço X é *localmente compacto* se todo $x \in X$ admite um sistema fundamental de vizinhanças compactas.

Definição 1.2.18. Um espaço é *enumeravelmente compacto* se, e somente se, toda cobertura aberta enumerável possui subcobertura finita.

Teorema 1.2.19. *Para todo espaço de Hausdorff X as seguintes condições são equivalentes:*

(*i*) *X é um espaço enumeravelmente compacto;*

(*ii*) *Toda família localmente finita de subconjuntos não-vazios de X é finita.*

(*iii*) *Toda família localmente finita de subconjuntos unitários de X é finita.*

(*iv*) *Todo subconjunto infinito de X tem um ponto de acumulação.*

(*v*) *Todo subconjunto infinito enumerável de X tem um ponto de acumulação.*

Demonstração. 3.10.3 de [13]. $\square$

Definição 1.2.20. Dizemos que um espaço X é de *Lindelöf*, ou tem a *propriedade de Lindelöf* , se toda cobertura aberta de X possui uma subcobertura enumerável.

A propriedade de Lindelöf foi introduzida por Alexandroff e Urysohn em 1929. O termo "Lindelöf" se refere a um resultado de Lindelöf que afirma que qualquer família de subconjuntos abertos de um espaço euclidiano possui uma subfamília enumerável com a mesma união.

A noção de um espaço de Lindelöf nos leva ao conceito de grau de Lindelöf:

Definição 1.2.21. O *grau de Lindelöf* de um espaço X — o qual denotaremos por $L(X)$ — é o menor cardinal κ tal que toda cobertura aberta de X possui uma subcobertura de cardinalidade $\leq \kappa$.

Definição 1.2.22. O *grau hereditário de Lindelöf* de um espaço X é definido por

$$hL(X) = \sup\{L(Y) : Y \subseteq X\}.$$

Teorema 1.2.23. *Sejam X um espaço de Hausdorff e $K(X)$ o conjunto de todos os subconjuntos compactos de X. Então,*

$$|K(X)| \leq 2^{hL(X)}.$$

Demonstração. 9.1 de [15]. □

Teorema 1.2.24. *Toda cobertura aberta de um espaço regular de Lindelöf possui um refinamento localmente finito.*

Demonstração. 3.8.11 de [13]. □

Definição 1.2.25. Um espaço é *paracompacto* se, e somente se, toda cobertura aberta possui um refinamento aberto localmente finito.

Logo, todo espaço de Lindelöf é paracompacto.

Definição 1.2.26. Um espaço é *enumeravelmente paracompacto* se, e somente se, toda cobertura aberta enumerável possui um refinamento aberto localmente finito.

Teorema 1.2.27. *Para um espaço T_1 X as seguintes condições são equivalentes:*

(i) X é normal e enumeravelmente paracompacto.

(ii) Para toda cobertura aberta enumerável $\{U_n : n \in \omega\}$ de X existe uma cobertura aberta localmente finita $\{V_n : n \in \omega\}$ de X tal que $\overline{V}_n \subseteq U_n$ para todo $n \in \omega$.

(iii) Para toda cobertura enumerável $\{U_n : n \in \omega\}$ *de* X *existe uma cobertura fechada* $\{F_n : n \in \omega\}$ *de* X *tal que* $F_n \subseteq U_n$ *para todo* $n \in \omega$.

Demonstração. 5.2.2 de [13]. □

Definição 1.2.28. Um espaço topológico X é *pseudocompacto* se X é um espaço de Tychonoff e toda função contínua $f : X \to \mathbb{R}$ é limitada.

Teorema 1.2.29. *Todo espaço normal e pseudocompacto é enumeravelmente compacto.*

Demonstração. 3.10.21 de [13]. □

Corolário 1.2.30. *Todo espaço de Lindelöf e pseudocompacto é compacto.*

Teorema 1.2.31. *Para todo espaço* X *de Tychonoff, são equivalentes:*

(i) X *é um espaço pseudocompacto.*

(ii) Toda família localmente finita de subconjuntos abertos não-vazios de X *é finita.*

(iii) Toda cobertura aberta localmente finita de X *é finita.*

(iv) Toda cobertura aberta localmente finita de X *tem uma subcobertura finita.*

Demonstração. 3.10.22 de [13]. □

Teorema 1.2.32. *Um espaço de Tychonoff* X *é pseudocompacto se, e somente se, dada uma cobertura aberta enumerável* $\mathcal{U}$ *de* X*, existe uma subfamília* $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{U}$ *finita tal que* $\{\overline{U} : U \in \mathcal{C}\}$ *cobre* X.

Demonstração. ($\Rightarrow$): Suponha, por absurdo, que exista uma cobertura aberta enumerável $\mathcal{U} = \{U_n : n \in \omega\}$ de X tal que, para todo $S \subseteq \omega$ finito, $\{\overline{U}_n : n \in S\}$ não cobre X.

Seja $T = \{n \in \omega : U_n \setminus \bigcup_{i<n} \overline{U}_i \neq \emptyset\}$. Para cada $n \in T$, defina $V_n = U_n \setminus \bigcup_{i<n} \overline{U}_i$. Tome $\mathcal{V} = \{V_n : n \in T\}$.

Afirmamos que $\mathcal{V}$ é localmente finita. De fato, seja $x \in X$. Como $\mathcal{U}$ cobre X, $x \in U_n$ para algum $n \in \omega$. Logo, $U_n \cap V_k = \emptyset$ para todo $k > n$.

Por outro lado, note que $\mathcal{V}$ cobre X. Logo, por hipótese, $|\mathcal{V}| = \omega$.

Portanto, $\mathcal{V}$ é uma família infinita de abertos não vazios localmente finita, contradizendo 1.2.31.

($\Leftarrow$): Suponha, por absurdo, que exista uma família $\mathcal{U} = \{U_n : n \in \omega\}$ de abertos de X que seja infinita e localmente finita.

Como $\mathcal{U}$ é localmente finita, para cada $j \in \omega$, $X \setminus \bigcup_{n \geq j} \overline{U}_n$ é um aberto e $\{X \setminus \bigcup_{n \geq j} \overline{U}_n : j \in \omega\}$ cobre X.

Temos ainda que nenhuma subfamília finita de $\{\overline{X \setminus \bigcup_{n \geq j} \overline{U}_n} : j \in \omega\}$ cobre X, visto que esta sequência é crescente e $U_k \not\subseteq \overline{X \setminus \bigcup_{n \geq j} \overline{U}_n}$ para todo $k \geq j$. Isto contradiz a hipótese. □

Teorema 1.2.33. *Um espaço de Tychonoff X é pseudocompacto se, e somente se, $\overline{U}$ é pseudocompacto para todo aberto próprio não-vazio U de X.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Sejam U um aberto e $\{U_n : n \in \omega\}$ uma cobertura aberta de $\overline{U}$. Então, $\{U_n : n \in \omega\} \cup \{X \setminus \overline{U}\}$ cobre X. Logo, pelo teorema 1.2.32, $\{\overline{U}_n : n \in \omega\} \cup \{\overline{X \setminus \overline{U}}\}$ tem uma subcobertura finita. Seja $\{\overline{U}_{n_i} : i \leq k\} \cup \{\overline{X \setminus \overline{U}}\}$ uma tal subcobertura. Então, $\{\overline{U}_{n_i} : i \leq k\}$ cobre U. Mas, $\overline{U}_{n_i} \cap U \subseteq \overline{U_{n_i} \cap \overline{U}}$. Logo, $\{\overline{U_{n_i} \cap \overline{U}} : i \leq k\}$ cobre $\overline{U}$. Portanto, pelo teorema 1.2.32, $\overline{U}$ é pseudocompacto.

($\Leftarrow$) Seja $\{U_n : n \in \omega\}$ uma cobertura aberta enumerável de X. Se $\overline{U}_0$ não cobre X então $\overline{X \setminus \overline{U}_0}$ é um espaço pseudocompacto. Visto que $\{U_n : 0 < n < \omega\}$ cobre $\overline{X \setminus \overline{U}_0}$, existem $n_0, \ldots, n_k \in \omega \setminus \{0\}$ tais que $\{\overline{U}_{n_i} : i \leq k\}$ cobre $X \setminus \overline{U}_0$. Logo, $\{\overline{U}_{n_i} : i \leq k\} \cup \{\overline{U}_0\}$ cobre X. Portanto, pelo teorema 1.2.32, X é pseudocompacto. □

Teorema 1.2.34. *Sejam X um espaço pseudocompacto, Y um espaço de Tychonoff de caráter enumerável e $f : X \to Y$ uma função contínua e bijetora. Então, f é um homeomorfismo.*

Demonstração. Basta mostrarmos que, para todo F fechado de Y, $f[F]$ é um fechado de Y. Seja então F um fechado de Y. Como X é regular, existe uma família $\mathcal{U}$ de abertos de X tal

que $F = \bigcap\{\overline{U} : U \in \mathcal{U}\}$. Do fato de f ser injetora segue que

$$f[F] = \bigcap_{U \in \mathcal{U}} f[\overline{U}].$$

Para finalizar, resta mostrar que cada $f[\overline{U}]$ é um fechado de Y.

Suponha o contrário e fixe $U \in \mathcal{U}$ tal que $H = f[\overline{U}]$ não é um fechado de Y. Então, existe $y \in \overline{H} \setminus H$. Visto que $\chi(Y) = \omega$, existe uma base decrescente $\{U_n : n < \omega\}$ para x. Para cada $n \in \omega$, escolha um $y_n \in U_n \cap H$ diferente de y. Como Y é de Tychonoff, para cada $n \in \omega$, existe uma função contínua $f_n : Y \to \mathbb{R}$ tal que $f_n(x_n) = n$ e $f_n(X \setminus U_n) \subseteq \{0\}$. Note que a família $\{U_n \setminus \{y\} : n < \omega\}$ é localmente finita. Logo, a fórmula $f(x) = \sum_{n<\omega} |f_n(x)|$ define uma função contínua $f : X \to \mathbb{R}$. Como $g = f \restriction H$ não é limitada, temos que H não é pseudocompacto.

Por outro lado, do teorema 1.2.33 segue que $\overline{U}$ é um espaço pseudocompacto. Como f é contínua, temos que $f[\overline{U}]$ é pseudocompacto, uma contradição. □

Definição 1.2.35. Um espaço topológico X é *metacompacto* se toda cobertura aberta de X possui um refinamento pontualmente finito.

Definição 1.2.36. Um espaço topológico X é *enumeravelmente metacompacto* se toda cobertura aberta enumerável de X possui um refinamento pontualmente finito.

Teorema 1.2.37 (Ishikawa, [19]). *Um espaço topológico X é enumeravelmente metacompacto se, e somente se, para toda sequência decrescente $\langle F_i : i < \omega\rangle$ de fechados não vazios de X, com $\bigcap_{i<\omega} F_i = \emptyset$, existe uma sequência decrescente $\langle A_i : i < \omega\rangle$ de abertos tal que $\bigcap_{i<\omega} A_i = \emptyset$ e $F_i \subseteq A_i$ para cada $i < \omega$.*

Demonstração. Suponhamos X um espaço enumeravelmente metacompacto e $\langle F_i : i < \omega\rangle$ como no enunciado. Logo, $\{X \setminus F_i\}$ é uma cobertura aberta enumerável de X e, portanto, possui um refinamento pontualmente finito $\mathcal{V}$. Para cada $V \in \mathcal{V}$, seja $g(V)$ o primeiro $X \setminus F_i$ contendo V. Seja, ainda, para cada $i \in \omega$, $V_i = \bigcup\{V \in \mathcal{V} : g(V) = X \setminus F_i\}$. Então, cada V_i é

um aberto tal que $V_i \subseteq X \setminus F_i$ e $\{V_i : i < \omega\}$ é uma cobertura aberta pontualmente finita de X. Para cada $i < \omega$, tome

$$W_i = \bigcup_{i<n<\omega} V_n.$$

Então, cada W_i é um aberto tal que

$$F_i \subseteq X \setminus (X \setminus F_i) \subseteq X \setminus \bigcup_{n \leq i} V_n \subseteq W_i.$$

Por fim, note que $\bigcap_{i\in\omega} W_i = \emptyset$ pois, caso contrário, $\{V_i : i < \omega\}$ não seria pontualmente finita.

Por outro lado, seja X um espaço satisfazendo a segunda parte do enunciado. Seja, ainda, $\{U_i : i \in \omega\}$ uma cobertura aberta enumerável de X. Para cada $i < \omega$, tome

$$F_i = X \setminus \bigcup_{n \leq i} U_i.$$

Então, por hipótese, existe uma sequência decrescente $\langle A_i : i < \omega\rangle$ de abertos tal que $\cap_{i<\omega} A_i = \emptyset$ e $F_i \subseteq A_i$ para cada $i < \omega$. Tome, agora, para cada $i < \omega$,

$$B_i = X \setminus A_i.$$

Então, cada B_i é fechado e $B_i \subseteq \bigcup_{n\leq i} U_i$. Finalmente, seja $B_{-1} = \emptyset$ e tome, para cada $i < \omega$,

$$V_i = U_i \setminus B_{i-1}.$$

Então, cada V_i é um aberto e $V_i \subseteq U_i$. Além disso, visto que

$$U_i \setminus \bigcup_{n<i} U_n \subseteq U_i \setminus B_{i-1} = V_i,$$

temos que

$$X = \bigcup_{n\in\omega} U_n \subseteq \bigcup_{i\in\omega} (U_i \setminus \bigcup_{n<i} U_n) \subseteq \bigcup_{i\in\omega} V_i.$$

Portanto, $\{V_i : i < \omega\}$ é um refinamento de $\{U_i : i < \omega\}$.

Por fim, sejam $x \in X$ e $i(x) = \min\{i < \omega : x \notin A_i\}$. Como $\langle A_i : i < \omega\rangle$ é decrescente, $x \notin A_i$ para todo $i \geq i(x)$. Logo, $x \in B_i$ para todo $i \geq i(x)$ e, portanto, $x \notin V_i$ para todo $i \geq i(x)$. Assim, $\{V_i : i < \omega\}$ é uma cobertura pontualmente finita de X. Portanto, X é enumeravelmente metacompacto. □

Definição 1.2.38. Um espaço topológico X é *metalindelöf* se toda cobertura aberta de X possui um refinamento aberto pontualmente enumerável.

Definição 1.2.39. Uma família $\mathcal{N}$ de subconjuntos de um espaço topológico X é um "*network*" para X se para todo $x \in X$ e qualquer vizinhança U de x existe $M \in \mathcal{N}$ tal que $x \in M \subseteq U$.

Teorema 1.2.40. *Um espaço compacto de Hausdorff é metrizável se, e somente se, tem peso enumerável.*

Demonstração. 4.2.8 de [13]. □

Lema 1.2.41. *Para todo ordinal α, $\alpha+1$ munido da topologia da ordem é um espaço compacto.*

Demonstração. Vamos provar o lema por indução transfinita. Se $\alpha = 0$ então $\alpha + 1 = \{0\}$ é claramente compacto. Suponha $[0, \alpha]$ compacto para algum ordinal α. Seja $\mathcal{U}$ uma cobertura aberta de $[0, \alpha]$. Então, existe $\beta < \alpha$ tal que $]\beta, \alpha] \subseteq U$ para algum $U \in \mathcal{U}$. Note que $[0, \beta]$ é compacto pois, é um subsepaço fechado de $[0, \alpha]$ que, por hipótese de indução, é compacto. Logo, existem $U_1, \ldots, U_k \subseteq \mathcal{U}$ tais que $[0, \beta] \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} U_i$. Assim, $[0, \alpha] = [0, \beta] \cup]\beta, \alpha] \subseteq (\bigcup_{i=1}^{k} U_i) \cup U$ e, portanto, $[0, \alpha]$ é compacto.

Agora, suponha α um ordinal limite e $[0, \beta]$ compacto para todo $\beta < \alpha$. Seja $\mathcal{U}$ uma cobertura aberta de $[0, \alpha]$. Então, existe $\beta < \alpha$ tal que $]\beta, \alpha] \subseteq U$ para algum $U \in \mathcal{U}$. Por hipótese de indução, $[0, \beta]$ é compacto. Logo, existem $U_1, \ldots, U_k \subseteq \mathcal{U}$ tais que $[0, \beta] \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} U_i$. Assim, $[0, \alpha] = [0, \beta] \cup]\beta, \alpha] \subseteq (\bigcup_{i=1}^{k} U_i) \cup U$ e, portanto, $[0, \alpha]$ é compacto. □

1.2.3 A compactificação de Stone-Čech

Definição 1.2.42. Uma *compactificação* de um espaço de Tychonoff X é um par ordenado $\langle Y, c\rangle$, onde Y é um espaço compacto de Hausdorff e $c : X \to Y$ é uma imersão de X em Y tais que $\overline{c[X]} = Y$.

Teorema 1.2.43. *Um espaço topológico X tem uma compactificação $\langle Y, c\rangle$ se, e somente se, X é um espaço de Tychonoff.*

Demonstração. 3.5.1 de [13]. □

Teorema 1.2.44. *Todo espaço de Tychonoff X tem uma compactificação $\langle Y, c\rangle$ tal que $w(Y) = w(X)$.*

Demonstração. 3.5.2 de [13]. □

Uma compactificação $\langle Y, c\rangle$ de um espaço X será denotada por cX.

Sejam X um espaço de Tychonoff e $\mathcal{C}(X) = \{f \in [0,1]^X : f \text{ é contínua}\}$. Visto que X é um espaço de Tychonoff, a família de funções $\mathcal{C}(X)$ separa pontos e fechados em X. Logo, pelo teorema da diagonal, a função

$$\begin{array}{rccl} \beta : & X & \to & \prod_{\mathcal{C}(X)}[0,1] \\ & x & \mapsto & \langle f(x) : f \in \mathcal{C}(X)\rangle \end{array}$$

é uma imersão de X em $\prod_{\mathcal{C}(X)}[0,1]$.

Definição 1.2.45. A *compactificação de Stone-Čech* de X — denotada por βX — é o fecho de $\beta[X]$ em $\prod_{\mathcal{C}(X)}[0,1]$.

Definição 1.2.46. Considere c_1X e c_2X compactificações de um espaço de Tychonoff X. Escrevemos $c_1X \trianglerighteq c_2X$ — ou $c_2X \trianglelefteq c_1X$ — se existe uma função contínua $f : c_1X \to c_2X$ tal que $f \circ c_1(x) = c_2(x)$ para todo $x \in X$.

Se $c_1X \trianglerighteq c_2X$ e $c_2X \trianglerighteq c_1X$, dizemos que c_1X e c_2X são *topologicamente equivalentes*.

Teorema 1.2.47. *Duas compactificações c_1X e c_2X de um espaço de Tychonoff X são topologicamente equivalentes se, e somente se, existe um homeomorfismo $h : c_2X \to c_1X$ tal que $h \circ c_2 = c_1$.*

Demonstração. 19.7 de [30]. □

Deste ponto em diante, não distinguiremos compactificações equivalentes.

Teorema 1.2.48. *Sejam X um espaço de Tychonoff e Y uma compactificação de X. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) $Y = \beta X$;

(ii) $Y \trianglerighteq Z$ *para toda compactificação* Z *de* X;

(iii) Para toda função contínua $f : X \to [0,1]$ *existe uma função contínua* $g : Y \to [0,1]$ *que estende* f;

(iv) Para toda função contínua e limitada $f : X \to \mathbb{R}$ *existe uma função contínua* $g : Y \to \mathbb{R}$ *que estende* f;

(v) Para toda função contínua $f : X \to K$, *onde* K *é um espaço compacto Hausdorff, existe uma função contínua* $g : Y \to K$ *que estende* f.

Demonstração. 19.5 e 19.10 de [30]. □

Tais extensões de f serão denotadas por βf.

Teorema 1.2.49. *Seja X um espaço topológico discreto tal que $|X| \geq \aleph_0$. Então, $|\beta X| = 2^{2^{|X|}}$ e $w(\beta X) = 2^{|X|}$.*

Demonstração. 3.6.11 de [13]. □

1.2.4 O espaço de Stone

Definição 1.2.50. Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de conjuntos. Definimos

$$Ult(\mathcal{A}) = \{u \subseteq \mathcal{A} : u \text{ é um ultrafiltro em } \mathcal{A}\},$$

e, para cada $a \in \mathcal{A}$,

$$V(a) = \{u \in Ult(\mathcal{A}) : a \in u\}.$$

Proposição 1.2.51. *$\{V(a) : a \in \mathcal{A}\}$ é base para uma topologia sobre $Ult(\mathcal{A})$.*

Definição 1.2.52. Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de conjuntos. O *espaço de Stone* de $\mathcal{A}$ — ao qual denotaremos por $st(\mathcal{A})$ — é o conjunto $Ult(\mathcal{A})$ munido da topologia gerada pela base $\{V(a) : a \in \mathcal{A}\}$.

Proposição 1.2.53. *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de conjuntos sobre um conjunto I. Então, $st(\mathcal{A})$ é um espaço de Hausdorff, 0-dimensional e compacto.*

Demonstração. Mostremos, primeiramente, que $st(\mathcal{A})$ é 0-dimensional. De fato, note que

$$Ult(\mathcal{A}) \setminus V(a) = \{u \in Ult(\mathcal{A}) : a \notin u\} = \{u \in Ult(\mathcal{A}) : I \setminus a \in u\} = V(I \setminus a)$$

para todo $a \in \mathcal{A}$. Logo, cada $V(a)$ é um aberto-fechado e, portanto, $\{V(a) : a \in \mathcal{A}\}$ é uma base de abertos-fechados.

Agora, vamos mostrar que $st(\mathcal{A})$ é Hausdorff. Sejam $u_1, u_2 \in Ult(\mathcal{A})$ tais que $u_1 \neq u_2$. Então, existe $a \in \mathcal{A}$ tal que

$$(a \in u_1 \text{ e } a \notin u_2) \text{ ou } (a \notin u_1 \text{ e } a \in u_2).$$

Podemos supor, sem perda de generalidade, que $a \in u_1$. Como $a \notin u_2$, $X \setminus a \in u_2$. Assim, $u_1 \in V(a)$, $u_2 \in V(I \setminus a)$ e $V(a) \cap V(I \setminus a) = \emptyset$.

Por fim, mostremos que $st(\mathcal{A})$ é um espaço compacto. Suponhamos o contrário. Então, existe uma cobertura aberta $\mathcal{U}$ de $Ult(\mathcal{A})$ que não possui subcobertura finita. Podemos assumir

que $\mathcal{U} = \{V(a) : a \in \mathcal{C}\}$ para algum subconjunto $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$. Sendo assim, dados $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{C}$, existe $u \in Ult(\mathcal{A}) \setminus (V(a_1) \cup \ldots \cup V(a_n)) = V(I \setminus a_1 \cap \ldots \cap I \setminus a_n)$. Logo, $\{I \setminus a : a \in \mathcal{C}\}$ tem a propriedade da intersecção finita. Pelo lema 1.1.12, existe $u \in Ult(\mathcal{A})$ tal que $\{I \setminus a : a \in \mathcal{C}\} \subseteq u$. Note que, para todo $a \in \mathcal{C}$, $a \notin u$ e, por conseguinte, $u \notin V(a)$. Portanto, $\mathcal{U}$ não cobre $Ult(\mathcal{A})$, uma contradição. □

Teorema 1.2.54. *Seja X um espaço topológico munido da topologia discreta. Se $\mathcal{B} \subseteq \wp(X)$ é uma álgebra de conjuntos tal que $\bigcup \mathcal{B} = X$ e $\{\{x\} : x \in X\} \subseteq \mathcal{B}$, então $st(\mathcal{B})$ é uma compactificação de X.*

Demonstração. Pela proposição 1.2.51, $st(\mathcal{B})$ é um espaço compacto de Hausdorff. Resta construir uma imersão $c : X \to st(\mathcal{B})$ tal que $\overline{c[X]} = st(\mathcal{B})$. Seja $c : X \to st(\mathcal{B})$ dada por $c(x) = \{A \in \mathcal{B} : x \in A\}$.

Note que cada $c(x)$ é um ultrafiltro principal em $\mathcal{B}$, e portanto, um ponto isolado de $st(\mathcal{B})$. Logo, $c[X]$ é um subconjunto discreto de $st(\mathcal{B})$. Visto que c é injetora, temos que c é uma imersão.

Para ver que $c[X]$ é denso em $st(\mathcal{B})$, considere um aberto $U \neq \emptyset$ de $st(\mathcal{B})$. Então, existe $A \in \mathcal{B}$ não vazio tal que $V(A) \subseteq U$. Logo, para todo $x \in A$, temos que $c(x) \in \{\mathcal{U} \in Ult(\mathcal{B}) : A \in \mathcal{U}\} = V(A)$. Portanto, $\overline{c[X]} = st(\mathcal{B})$.

Mostramos, assim, que $st(\mathcal{B})$ é uma compactificação de X. □

Teorema 1.2.55. *Seja X um espaço topológico munido da topologia discreta. Então, $st(\wp(X))$ é a compactificação de Stone-Čech de X.*

Deste ponto em diante, sempre que X for um espaço discreto nos referiremos a $Ult(\wp(X))$ como βX. Portanto, $\beta X \setminus X$ designará o espaço de ultrafiltros não principais sobre X.

Seja $f : \kappa \to \gamma$ uma função arbitrária. É fácil ver que

$$\begin{array}{rccl} F: & \beta\kappa & \to & \beta\lambda \\ & x & \mapsto & \{B \subseteq \lambda : f^{-1}(B) \in x\} \end{array}$$

é contínua e que $F \restriction \kappa = f$. Logo, $F = \beta f$.

1.2.5 Espaços realcompactos

As referências aqui são [13] e [14].

Definição 1.2.56. Um espaço X é *realcompacto* se, e somente se, X é homeomorfo a um subespaço fechado de $\mathbb{R}^\kappa$ para algum cardinal κ.

Teorema 1.2.57. *Todo subespaço fechado de um espaço realcompacto é realcompacto.*

Teorema 1.2.58. *O produto cartesiano de espaços realcompactos é realcompacto.*

Definição 1.2.59. Sejam X um espaço de Tychonoff e $e : X \to \prod_{C(X)} \mathbb{R}$ a imersão canônica dada por $e(x) = \langle f(x) \rangle_{f \in C(X)}$ para todo $x \in X$. Então, a realcompactificação de Hewitt é definida por $\upsilon X = \overline{e[X]}^Y$.

Proposição 1.2.60. *Sejam X um espaço, Y um espaço realcompacto e $f : X \to Y$ uma função contínua. Então, existe uma única função contínua $\upsilon f : \upsilon X \to Y$ tal que $\upsilon f \restriction X = f$.*

Definição 1.2.61. Um subconjunto $Z \subseteq X$ é um *zero-set* — ou um *z-set* — se $Z = f^{-1}\{0\}$ para alguma função contínua $f : X \to [0, 1]$.

A família de todos os zero-sets de X é denotada por $\mathscr{Z}(X)$.

Definição 1.2.62. Um $z - filtro$ $\mathcal{F}$ sobre X é um filtro em $\mathscr{Z}(X)$. Analogamente, um $z - ultrafiltro$ $\mathcal{F}$ sobre X é um ultrafiltro em $\mathscr{Z}(X)$.

Lema 1.2.63. *Um espaço X é realcompacto se, e somente se, todo z-ultrafiltro sobre X enumeravelmente completo tem interseção não-vazia.*

Corolário 1.2.64. *Espaços de Lindelöf são realcompactos.*

Teorema 1.2.65. *Um espaço de Tychonoff que é a união de um subespaço realcompacto e um subespaço compacto é realcompacto.*

Teorema 1.2.66. *Seja $f : X \to Y$ uma função contínua de um espaço realcompacto X em um espaço de Tychonoff Y. Então, a imagem inversa por f de um subespaço realcompacto de Y é realcompacto.*

Teorema 1.2.67. *Seja X um espaço de Tychonoff e Y um espaço hereditariamente realcompacto. Se $f : X \to Y$ é uma função contínua e injetora então X é hereditariamente realcompacto.*

1.2.6 Limites inversos

Definição 1.2.68. Sejam, para cada $n \in \omega$, um espaço topológico X_n e, para quaisquer $m, n \in \omega$ satisfazendo $m \leq n$, uma função contínua sobrejetora $\pi_m^n : X_n \to X_m$. Suponha ainda que $\pi_k^m \circ \pi_m^n = \pi_k^n$ sempre que $k \leq m \leq n < \omega$ e que $\pi_m^m = id_{X_m}$ para todo $m \in \omega$. Sob estas condições, dizemos que a família $\{X_n, \pi_m^n : m \leq n < \omega\}$ — a qual denotaremos simplesmente por $\{X_n, \pi_m^n\}$ — é uma *sequência inversa dos espaços* X_n.

Seja $S = \{X_n, \pi_m^n\}$ uma sequência inversa. Um elemento $\langle x_n \rangle_{n\in\omega}$ do produto Cartesiano $\prod_{n\in\omega} X_n$ é chamado de *fio* de S se $\pi_m^n(x_n) = x_m$ para quaisquer $m, n \in \omega$ satisfazendo $m \leq n$.

Definição 1.2.69. O *limite inverso* de uma sequência inversa $S = \{X_n, \pi_m^n\}$ é o subespaço de $\prod_{n\in\omega} X_n$ definido por

$$X_\omega = \overleftarrow{\lim}_n X_n = \{\langle x_n \rangle_{n\in\omega} \in \prod_n X_n : \langle x_n \rangle_{n\in\omega} \text{ é um fio de} S\}.$$

Lema 1.2.70. *Seja $S = \{X_n, \pi_m^n\}$ um sequência inversa de espaços de Hausdorff. Então o limite inverso de S é um subespaço fechado do produto Cartesiano $\prod_{i\in\omega} X_i$.*

Demonstração. Seja $x = \langle x_i \rangle_{i\in\omega} \in (\prod_{i\in\omega} X_i) \setminus X_\omega$. Logo, existem $m, n \in \omega$, com $m < n$, tais que $x_m \neq \pi_m^n(x_n)$. Como X_m é de Hausdorff segue que existem abertos disjuntos A e B de

X_m tais que $x_m \in A$ e $\pi^n_m(x_n) \in B$. Considere o aberto $U = \prod_{i\in\omega} U_i$, onde

$$U_i = \begin{cases} A, & \text{se } i = m; \\ (\pi^n_m)^{-1}(B), & \text{se } i = n; \\ X_i, & \text{se } i \notin \{m, n\}. \end{cases}$$

Note que $x \in U \subseteq (\prod_{i\in\omega} X_i) \setminus X_\omega$. Portanto, X_ω é fechado. □

Segue imediatamente do lema 1.2.70:

Corolário 1.2.71. *Seja $S = \{X_n, \pi^n_m\}$ um sequência inversa de espaços compactos de Hausdorff. Então o limite inverso de S é um espaço compacto de Hausdorff.*

É fácil ver que para cada $m < \omega$, a função

$$\begin{array}{rccc} \pi^\omega_m : & X_\omega & \longrightarrow & X_m \\ & \langle x_n \rangle_{n\in\omega} & \longmapsto & x_m \end{array}$$

é contínua e sobrejetora.

Lema 1.2.72. *Sejam $U_0, \ldots, U_n$ abertos de $X_0, \ldots, X_n$, respectivamente. Então, existe um aberto V de X_n tal que*

$$(\pi^\omega_n)^{-1}[V] = (\pi^\omega_0)^{-1}[U_0] \cap \ldots \cap (\pi^\omega_n)^{-1}[U_n].$$

Demonstração. A demonstração será feita por indução sobre n. Para $n = 0$ basta tomarmos $V = U_0$. Suponhamos o lema válido para algum natural $n > 0$ e sejam $U_0, \ldots, U_{n+1}$ abertos de $X_0, \ldots, X_{n+1}$, respectivamente. Da hipótese de indução segue que existe um aberto W de X_n tal que

$$(*) \qquad (\pi^\omega_n)^{-1}[W] = (\pi^\omega_0)^{-1}[U_0] \cap \ldots \cap (\pi^\omega_n)^{-1}[U_n].$$

Seja $V = (\pi_n^{n+1})^{-1}[W] \cap U_{n+1}$. Logo,

$$\begin{aligned}(\pi_{n+1}^{\omega})^{-1}[V] &= (\pi_{n+1}^{\omega})^{-1}[(\pi_n^{n+1})^{-1}[W] \cap U_{n+1}] \\ &= (\pi_n^{\omega})^{-1}[W] \cap (\pi_{n+1}^{\omega})^{-1}[U_{n+1}].\end{aligned}$$

De $(*)$ segue que

$$(\pi_{n+1}^{\omega})^{-1}[V] = (\pi_0^{\omega})^{-1}[U_0] \cap \ldots \cap (\pi_{n+1}^{\omega})^{-1}[U_{n+1}].$$ □

Lema 1.2.73. *Sejam $S = \{X_n, \pi_m^n\}$ uma sequência inversa, $x = \{x_n\} \in X_\omega$ e, para cada $n \in \omega$, $\mathcal{B}_n(x)$ uma base para x_n. Então,*

$$\mathcal{B}(x) = \{(\pi_n^{\omega})^{-1}(U) : n < \omega \text{ e } U \in \mathcal{B}(x_n)\}$$

é uma base para x.

Demonstração. Seja U uma vizinhança de x em X_ω. Então, existem $U_0 \in \mathcal{B}(x_0), \ldots, U_k \in \mathcal{B}(x_k)$ tais que

$$x \in X_\omega \cap \left(\prod_{i \leq k} U_i \times \prod_{k<i<\omega} X_i\right) \subseteq U.$$

Pelo lema 1.2.72, existe um aberto V de X_n tal que

$$(\pi_0^{\omega})^{-1}[U_0] \cap \ldots \cap (\pi_n^{\omega})^{-1}[U_n] = (\pi_n^{\omega})^{-1}[V].$$

Como

$$X_\omega \cap \left(\prod_{i \leq k} U_i \times \prod_{k<i<\omega} X_i\right) = (\pi_0^{\omega})^{-1}[U_0] \cap \ldots \cap (\pi_n^{\omega})^{-1}[U_n],$$

temos que

$$x \in (\pi_n^{\omega})^{-1}[V] \subseteq U.$$ □

1.3 Submodelos elementares

Nesta seção, introduziremos o conceito de submodelos elementares e apresentaremos alguns resultados que serão utilizados nas seções 3.3 e 4.2. As demonstrações desses resultados serão omitidas, mas podem ser encontradas em [11] ou [25].

Definição 1.3.1. Seja M um conjunto não-vazio. Para cada fórmula φ, a *relativização de* φ *a* M é a fórmula φ^M, definida recursivamente por:

- $(x = y)^M$ é a fórmula $x = y$ para quaisquer variáveis x e y;
- $(x \in y)^M$ é a fórmula $x \in y$ para quaisquer variáveis x e y;
- $(\neg\varphi)^M$ é a fórmula $\neg(\varphi^M)$ para toda fórmula φ;
- $(\varphi \wedge \varphi')^M$ é a fórmula $(\varphi^M) \wedge (\varphi'^M)$ para quaisquer fórmulas φ e φ';
- $(\exists x\,(\varphi))^M$ é a fórmula $\exists x\,(x \in M \wedge (\varphi^M))$ para toda fórmula φ e toda variável x.

Para uma fórmula φ, a notação $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ indicará que $x_1, \ldots, x_n$ são as variáveis livres distintas de φ.

Dados $a_1, \ldots, a_n \in M$ e uma fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, escreveremos $M \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]$ se, e somente se, φ^M é válida ao substituirmos x_i por a_i para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Definição 1.3.2. Sejam M e N conjuntos. Dizemos que M é um *submodelo elementar* de N — e denotamos por $M \prec N$ — se, e somente se, $M \subseteq N$ e, para toda fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ da linguagem da teoria dos conjuntos, e todos $a_1, \ldots, a_n \in M$, temos que

$$\varphi^M(a_1, \ldots, a_n) \text{ se, e somente se, } \varphi^N(a_1, \ldots, a_n).$$

Lema 1.3.3 (Critério de Tarski). *Sejam M e N conjuntos com $M \subseteq N$. Então, $M \prec N$ se, e somente se, para toda fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n, x)$ e para $a_1, \ldots, a_n \in M$ quaisquer, tem-se que $N \models \exists x \varphi[a_1, \ldots, a_n]$ implica que existe $a \in M$ tal que $N \models \varphi[a_1, \ldots, a_n, a]$.*

Teorema 1.3.4 (Löwenheim-Skolem). *Sejam A e N conjuntos tais que $A \subseteq N$. Então existe $M \prec N$ tal que $A \subseteq M$ e $|M| \leq |A| \cdot \omega$*

Para fazermos uso do teorema de Löwenheim-Skolem, é pertinente perguntarmos qual conjunto N será interessante tomarmos. Como trabalhamos em ZFC, seria muito conveniente podermos escolher um conjunto N tal que todos os axiomas de ZFC fossem válidos. Porém, pelo segundo teorema da incompletude de Gödel, ZFC não prova sua própria existência, isto é, não se pode obter um conjunto N, em ZFC, tal que, para todo axioma φ de ZFC, tenha-se $N \models \varphi$. No entanto, é possível satisfazer os nossos propósitos com um pouco menos que isso, como veremos agora.

Definição 1.3.5. Seja A um conjunto. O *fecho transitivo* de A é definido por

$$TC(A) = \bigcap \{T : T \supseteq A \text{ e } T \text{ é transitivo}\}.$$

Definição 1.3.6. Seja θ um cardinal infinito. Definimos então o conjunto

$$H_\theta = \{A : |TC(A)| < \theta\}.$$

Teorema 1.3.7. *Seja θ um cardinal regular não-enumerável. Então, H_θ é um modelo para* ZFC-P, *onde* ZFC-P *é a coleção de axiomas de* ZFC *sem o axioma das partes.*

Ná prática, uma demonstração de um resultado em topologia não requer o uso do axioma das partes além do que um conjunto H_θ, para θ suficientemente grande, é capaz de satisfazer. Em todo caso, se fixarmos um cardinal limite forte κ tal que $|X| < \kappa$, então o conjunto H_θ, com $\theta = \kappa^+$, pode ser tomado como universo da demonstração — no sentido de que, se tivermos necessidade do conjunto $\wp(A)$ para algum conjunto A que ocorre na demonstração, então $\wp(A) \in H_\theta$.[2]

Assim sendo, deste ponto em diante, sempre que escrevermos H_θ, estaremos assumindo a hipótese adicional de que θ é um cardinal regular, não-enumerável e grande o suficiente para ser tomado como universo da demonstração em questão.

[2]Note que, para efeito de simplificar a demonstração, sempre podemos supor que $X = |X|$.

Lema 1.3.8. *Sejam κ um cardinal e $M \prec H_\theta$ tais que $\kappa \in M$ e $\kappa \subset M$. Então,*

$$\forall A \in M(|A| \leq \kappa \Rightarrow A \subseteq M).$$

Corolário 1.3.9. *Seja $M \prec H_\theta$. Se $A \in [M]^{\leq\omega}$ então $A \subseteq M$.*

Definição 1.3.10. Dizemos que $\mathcal{M} \neq \emptyset$ é uma *cadeia elementar de H_θ* se, e somente se, $\mathcal{M}$ é uma cadeia com respeito à ordem $\subseteq$ e $M \prec H_\theta$ para todo $M \in \mathcal{M}$. Caso $\mathcal{M}$ seja bem-ordenada[3] — digamos, $\mathcal{M} = \{M_\alpha \mid \alpha \in \sigma\}$ —, dizemos ainda que $\mathcal{M}$ é

- uma *ϵ-cadeia* se, e somente se, $M_\alpha \in M_{\alpha+1}$ para todo ordinal α tal que $\alpha + 1 \in \sigma$.
- *contínua* se, e somente se, $M_\beta = \bigcup\{M_\alpha \mid \alpha \in \beta\}$ para todo ordinal limite $\beta \in \sigma$.

Teorema 1.3.11. *Se $\mathcal{M}$ é uma cadeia elementar então $M \prec \bigcup\mathcal{M}$ para todo $M \in \mathcal{M}$.*

Proposição 1.3.12. *$\mathcal{M} \neq \emptyset$ é uma cadeia elementar de H_θ se, e somente se, $M \prec H_\theta$ para todo $M \in \mathcal{M}$ e $\mathcal{M}$ é uma cadeia com respeito à ordem $\prec$.*

Lema 1.3.13. *Se $\mathcal{M}$ é uma cadeia elementar infinita de H_θ, então $\bigcup\mathcal{M} \prec H_\theta$.*

Dizemos que um conjunto C é *κ-fechado* se, e somente se, $[C]^{\leq\kappa} \subseteq C$.

Teorema 1.3.14. *Sejam κ um cardinal infinito e $A \subseteq H_\theta$ com $|A| \leq 2^\kappa$. Então, existe $M \prec H_\theta$ κ-fechado tal que $A \subseteq M$ e $|M| \leq 2^\kappa$.*

Definição 1.3.15. Sejam κ um cardinal infinito e $M \prec H_\theta$. Dizemos que *M tem a propriedade κ-covering* — ou, simplesmente, que *M é κ-covering* — se, e somente se, para todo $A \in [M]^{\leq\kappa}$ existe $B \in M$ tal que $A \subseteq B$ e $|B| \leq \kappa$.

Teorema 1.3.16. *Sejam κ um cardinal infinito e $A \subseteq H_\theta$ satisfazendo $|A| \leq \kappa$. Então existe $M \prec H_\theta$ tal que $A \subseteq M$, $|M| \leq \kappa^+$ e M tem a propriedade* κ-covering.

[3] Ao longo do texto, sempre que escrevermos uma cadeia elementar de H_θ como $\mathcal{M} = \{M_\alpha \mid \alpha \in \sigma\}$, estaremos assumindo que $M_\alpha \subseteq M_\beta$ para quaisquer $\alpha, \beta \in \sigma$ tais que $\alpha \in \beta$.

A seguir damos um exemplo de aplicação de submodelos elementares a Topologia. Em aplicações deste tipo, geralmente consideramos um espaço topológico $\langle X, \tau \rangle$ e um submodelo elementar M de um H_θ conveniente e então derivamos propriedades de X através de uma "versão M de X". O candidato mais natural a "versão M de X" seria o par $\langle X \cap M, \tau \cap M \rangle$. Porém, em muitos casos, $\tau \cap M$ não é uma topologia, haja vista que em geral uniões arbitrárias de elementos de $\tau \cap M$ não estão em M. Contudo, $\tau \cap M$ é uma base para uma topologia τ^M sobre X. Assim, dependendo da particular aplicação, a "versão M de X" pode ser $\langle X, \tau^M \rangle$ ou seu subespaço $\langle X \cap M, \tau^M \rangle$.

Teorema 1.3.17 (Arhangel'skiĭ). *Se $\langle X, \tau \rangle$ é uma espaço de Lindelöf, de Hausdorff e de caráter enumerável então $|X| \leq \mathfrak{c}$.*

Demonstração. Escolha um cardinal regular θ "suficientemente grande" e seja $M \prec H_\theta$ tal que $X, \tau \in M$, $|M| = \mathfrak{c}$ e M é ω-fechado — a existência de tal M é garantida pelo teorema 1.3.14. Para provarmos o teorema basta mostrarmos que $X \subseteq M$.

Seja $Y = X \cap M$. Claramente, $|Y| \leq \mathfrak{c}$.

AFIRMAÇÃO 1. *Para todo $y \in Y$, M contém uma base $\mathcal{B}_y$ para y.*

Seja $y \in Y$. Então,

$$H_\theta \models \exists \mathcal{B}_y (\mathcal{B}_y \text{ é uma base enumerável para } y).$$

Pelo Critério de Tarski, existe $\mathcal{B}_y \in M$ tal que $\mathcal{B}_y$ é uma base enumerável para y. Do corolário 1.3.9 segue que $\mathcal{B}_y \subseteq M$.

AFIRMAÇÃO 2. *Y é um subspaço fechado de X.*

De fato, seja $x \in \overline{Y}$. Visto que $\chi(X) \leq \omega$, existe uma sequência $\langle x_n \rangle_{n \in \omega} \subseteq \omega \times Y$ convergindo para x. Como $[M]^\omega \subseteq M$, temos que $\langle x_n \rangle_{n \in \omega} \in M$. Visto que

$$H_\theta \models \exists y (y \in \lim x_n)$$

com os parmetros τ, $\langle x_n \rangle_{n\in\omega}$ em M, então, pelo Critério de Tarski, existe $y \in M$ tal que

$$H_\theta \models y \in \lim x_n.$$

Como X é de Hausdorff, $x = y$. Portanto, $x \in Y$.

Para finalizar, basta mostrar que $X \subseteq M$. Suponhamos, por absurdo, que exista $x \in X \setminus M$. Para cada $y \in Y$, escolha $U_y \in \mathcal{B}_y$ tal que $x \notin U_y$. Tal U_y existe, pois X é de Hausdorff e $\mathcal{B}_y$ é uma base para Y. Então,

$$Y \subseteq \bigcup_{y\in Y} U_y \quad \text{e} \quad x \in X \setminus \bigcup_{y\in Y} U_y.$$

Da Afirmação 2 segue que Y é um espaço de Lindelöf. Logo, existe $\{y_n : n \in \omega\} \subseteq Y$ tal que $Y \subseteq \mathcal{U} = \bigcup_{n\in\omega} U_{y_n}$. Então,

$$M \models \mathcal{U} \text{ é um recobrimento aberto de } X.$$

Como $[M]^{\leq\omega} \subseteq M$, temos que $\mathcal{U} = \{U_{y_n} : n < \omega\} \in M$. Por elementaridade,

$$H_\theta \models \mathcal{U} \text{ é um recobrimento aberto de } X,$$

isto é, $X \subseteq \bigcup \mathcal{U}$. Absurdo, pois $x \notin \bigcup \mathcal{U}$. $\square$

Capítulo 2

Espaços linearmente Lindelöf

Neste capítulo introduziremos o conceito de espaço linearmente Lindelöf e suas principais equivalências. Serão dados, também, dois exemplos de espaços linearmente Lindelöf que não possuem a propriedade de Lindelöf.

2.1 Algumas equivalências e propriedades básicas

Teorema 2.1.1 (Alexandroff e Urysohn, [3]). *Um espaço X é compacto se e só se todo subconjunto infinito de X tem um ponto de acumulação completo.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponha, por absurdo, que exista $A \subseteq X$ infinito sem ponto de acumulação completo. Então, para cada $x \in X$, existe U_x vizinhança aberta de x tal que $|A \cap U_x| < |A|$. Seja $\mathcal{U} = \{U_x\}_{x \in X}$. É claro que $\mathcal{U}$ é uma cobertura aberta de X. Da compacidade de X segue que existem $x_1, \ldots, x_k \in X$ tais que $X = U_{x_1} \cup \ldots \cup U_{x_k}$. Assim,

$$(*) \qquad |A| = |A \cap X| = |\bigcup_{i=1}^{k} A \cap U_{x_i}| \leq |A \cap U_{x_1}| + \ldots + |A \cap U_{x_k}| < k \cdot |A| = |A|,$$

o que implica, $|A| < |A|$. Absurdo.

($\Leftarrow$) Suponhamos, por absurdo, que X não seja compacto. Então o conjunto $\mathcal{C}$ formado por coberturas abertas de X que não possuem subcobertura finita é não vazio. Sejam $\kappa = \min\{|\mathcal{U}| :$

$\mathcal{U} \in \mathcal{C}\}$ e $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha<\kappa} \in \mathcal{C}$. Considere, ainda, o conjunto $S = \{\beta < \kappa : U_\beta \setminus \bigcup_{\alpha<\beta} U_\alpha \neq \emptyset\}$. Então, $\mathcal{U}' = \{U_\alpha\}_{\alpha\in S}$ é uma subcobertura de $\mathcal{U}$. Logo, $\mathcal{U}' \in \mathcal{C}$. Da minimalidade de κ segue que $|S| = \kappa$. Para cada $\alpha \in S$ escolha $p_\alpha \in U_\alpha \setminus \bigcup_{\beta<\alpha} U_\beta$. Assim, $\{p_\alpha : \alpha \in S\}$ é um conjunto infinito de pontos dois a dois distintos. Então, por hipótese, $\{p_\alpha\}_{\alpha\in S}$ possui um ponto de acumulação completo $p \in X$. Visto que $\mathcal{U}'$ é uma cobertura de X, $p \in U_\beta$ para algum $\beta \in S$. Logo,

$$|U_\beta \cap \{p_\alpha\}_{\alpha\in S}| \leq |\beta| \leq \beta < \kappa = |S| = |\{p_\alpha\}_{\alpha\in S}|.$$

Isso contradiz o fato de p ser um ponto de acumulação completo do conjunto $\{p_\alpha\}_{\alpha\in S}$. □

Note que na última desigualdade em $(*)$, a existência de uma subcobertura finita de $\mathcal{U}$ foi essencial para se obter a contradição. Se em vez de compacto, X fosse um espaço de Lindelöf, não teríamos necessariamente a desigualdade estrita.

Na verdade, a propriedade de Lindelöf não pode ser caracterizada de forma semelhante àquela feita no teorema anterior para a compacidade. Isto é, não é verdade que em todo espaço de Lindelöf cada subconjunto não-enumerável tem um ponto de acumulação completo. De fato, seja $\{Y_n\}_{n\in\omega}$ uma família de espaços de Lindelöf dois a dois disjuntos, tal que $|Y_n| = \aleph_n$ para todo $n \in \omega$. Então, $Y = \bigoplus_{n\in\omega} Y_n$ é um espaço de Lindelöf sem pontos de acumulação completo em Y.

Uma condição um pouco mais fraca é satisfeita por espaços de Lindelöf: todo subconjunto não-enumerável de X de cardinalidade regular tem um ponto de acumulação completo. Entretanto, como veremos mais adiante, esta condição não é forte o suficiente para caracterizar a propriedade de Lindelöf; ela caracteriza espaços linearmente Lindelöf.

Definição 2.1.2. Um espaço topológico X é dito *linearmente Lindelöf* se toda cobertura aberta de X linearmente ordenada por $\subsetneq$ possui uma subcobertura enumerável.

Antes de mostrarmos a equivalência mencionada acima, apresentamos algumas caracterizações de um espaço linearmente Lindelöf com relação à coberturas abertas.

Teorema 2.1.3. *Seja X um espaço topológico. São equivalentes:*

(a) X é linearmente Lindelöf;

(b) Toda cobertura aberta de X bem ordenada por $\subsetneq$ possui uma subcobertura enumerável.

(c) Toda cobertura aberta $\mathcal{U}$ não-enumerável de cardinalidade regular contém uma subcobertura $\mathcal{U}'$ tal que $|\mathcal{U}'| < |\mathcal{U}|$;

(d) Toda cobertura aberta $\mathcal{U}$ de cofinalidade $> \omega$ possui uma subcobertura $\mathcal{U}'$ tal que $|\mathcal{U}'| < |\mathcal{U}|$;

(e) Toda cobertura aberta possui uma subcobertura de cofinalidade enumerável.

Demonstração. $(a) \Rightarrow (e)$: Seja $\mathcal{U}$ uma cobertura aberta de X de cardinalidade κ com $cf(\kappa) > \omega$. Seja $\mu = \min\{|\mathcal{V}| : \mathcal{V} \subseteq \mathcal{U} \text{ e } X \subseteq \bigcup \mathcal{V}\}$. Fixe $\mathcal{V}$ uma subcobertura de $\mathcal{U}$ tal que $|\mathcal{V}| = \mu$. Considere uma enumeração $\mathcal{V} = \{V_\alpha\}_{\alpha<\mu}$. Para cada $\beta < \mu$, seja $W_\beta = \bigcup_{\alpha\leq\beta} V_\alpha$. De (a) temos que existe $\{\beta_i : i < \omega\} \subseteq \mu$ tal que $X \subseteq \bigcup_{i<\omega} W_{\beta_i}$. Da minimalidade de μ segue que $\{\beta_i : i < \omega\} \subseteq \mu$ é cofinal em μ. Portanto, $cf(\mu) \leq \omega$.

$(e) \Rightarrow (d)$ e $(d) \Rightarrow (c)$ são imediatos.

$(c) \Rightarrow (b)$: Suponhamos, por absurdo, que o conjunto $\mathcal{C}$ formado pelas coberturas abertas de X, bem ordenadas por $\subsetneq$ e que não possuam subcobertura enumerável seja não vazio.

Sejam $\mu = \min\{ot(\mathcal{U}) : \mathcal{U} \in \mathcal{C}\}$ e $\mathcal{U} \in \mathcal{C}$. Podemos supor que $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha<\mu}$ de forma que $U_\alpha \subsetneq U_\beta$ sempre que $\alpha < \beta$. Afirmamos que μ é um cardinal regular não-enumerável. De fato, $\mu > \omega$, por definição. Agora, seja $\langle \mu_\alpha : \alpha < cf(\mu)\rangle$ crescente e cofinal em μ. Então, $\{U_{\mu_\alpha}\}_{\alpha<cf(\mu)} \subseteq \mathcal{U}$, o que implica $\{U_{\mu_\alpha}\}_{\alpha<cf(\mu)} \in \mathcal{C}$. Portanto, da minimalidade de μ segue que $cf(\mu) = \mu$.

Por (c), $\mathcal{U}$ possui uma subcobertura $\mathcal{U}'$ tal que $|\mathcal{U}'| < |\mathcal{U}| = \mu$. Logo, $\mathcal{U} \notin S$. Então, $\mathcal{U}'$ possui uma subcobertura enumerável $\mathcal{U}''$. É claro que $\mathcal{U}''$ é, também, uma subcobertura enumerável de $\mathcal{U}$, contradizendo o fato de $\mathcal{U} \in S$.

$(b) \Rightarrow (a)$: Seja $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$ uma cobertura aberta de X que é uma cadeia com relação à inclusão. Seja $S = \{\beta < \kappa : U_\beta \setminus \bigcup_{\alpha<\beta} U_\alpha \neq \emptyset\}$. Visto que $\mathcal{U}$ é uma cadeia, temos que $U_\alpha \subsetneq U_\beta$ sempre que $\alpha < \beta$ e $\alpha, \beta \in S$. Seja $S' \subseteq S$ e defina $\mu = \min S'$. Então, $U_\mu \subsetneq U_\alpha$

para todo $\alpha \in S$ com $\mu < \alpha$. Portanto, $\{U_\alpha : \alpha \in S\}$ é uma cobertura bem ordenada. De (b) segue que existe $\mathcal{U}' \subseteq \{U_\alpha : \alpha \in S\} \subseteq \mathcal{U}$ enumerável. □

O próximo resultado relaciona a propriedade de ser linearmente Lindelöf com a de ter pontos de acumulação completos.

Teorema 2.1.4. *Seja X um espaço topológico. São equivalentes:*

(*a*) *X é linearmente Lindelöf;*

(*b*) *Todo subconjunto A de X de cardinalidade regular $> \omega$ tem um ponto de acumulação completo em X;*

(*c*) *Todo subconjunto A de X de cardinalidade κ com $cf(\kappa) > \omega$ tem um ponto de acumulação completo em X.*

Demonstração. $(a) \Rightarrow (b)$: Suponha, por absurdo, que exista $A \subseteq X$ sem ponto de acumulação completo de cardinalidade $\kappa > \omega$ regular. Podemos supor que $A = \{x_\alpha : \alpha < \kappa\}$. Para cada $\alpha < \kappa$, seja $U_\alpha = X \setminus \overline{A}_\alpha$, onde $A_\alpha = \{x_\gamma : \gamma > \alpha\}$.

Afirmamos que $\{U_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$ cobre X. De fato, seja $x \in X$. Como A não possui ponto de acumulação completo, existe V_x uma vizinhança aberta de x tal que $|V_x \cap A| < \kappa$. Da regularidade de κ segue que existe $\alpha < \kappa$ tal que $V_x \cap A_\alpha = \emptyset$. Logo, $x \in U_\alpha$.

Assim, $\{U_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$ é uma cobertura aberta de X linearmente ordenada por $\subsetneq$. Pelo item (a), $\{U_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$ possui uma subcobertura enumerável $\{U_{\alpha_i}\}_{i<\omega}$. Da definição de $\{U_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$ segue que $\{\alpha_i\}_{i<\omega}$ é cofinal em κ, contradizendo o fato de que $cf(\kappa) > \omega$.

$(b) \Rightarrow (a)$: Suponha, por absurdo, que X não seja linearmente Lindelöf. Então, pelo teorema 2.1.3.(c) existe uma cobertura $\mathcal{U}$ de cardinalidade regular $\kappa > \omega$ que não possui uma subcobertura $\mathcal{U}'$ tal que $|\mathcal{U}'| < |\mathcal{U}|$. Seja $\{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$ uma enumeração de $\mathcal{U}$. Considere, agora, o conjunto $S = \{\alpha < \kappa : U_\alpha \setminus \bigcup_{\beta<\alpha} U_\beta \neq \emptyset\}$. Note que $\{U_\alpha : \alpha \in S\}$ é uma subcobertura de $\mathcal{U}$. Logo, $|S| = \kappa$.

Para cada $\alpha \in S$, escolha $p_\alpha \in U_\alpha \setminus \bigcup_{\beta<\alpha} U_\beta$. Como $A = \{p_\alpha : \alpha \in S\}$ é um conjunto não-enumerável de cardinalidade regular κ, segue de (b) que A possui um ponto de acumulação completo $p \in X$. Seja $\beta \in S$ tal que $p \in U_\beta$. Da definição de A segue que

$$|U_\beta \cap A| = |\beta| < \kappa = |A|,$$

contradizendo o fato de p ser um ponto de acumulação completo de A. □

$(b) \Rightarrow (c)$: Fixe $A \subseteq X$ de cardinalidade κ tal que $cf(\kappa) \geq \omega$. Se κ é regular então, por (b), A tem um ponto de acumulação completo. Suponhamos, então, que κ seja singular. Logo, $\kappa = \aleph_\alpha$ para algum ordinal limite $\alpha \geq \omega$ e $cf(\aleph_\alpha) = cf(\alpha)$. Seja $\langle \alpha_\gamma : \gamma < cf(\alpha)\rangle$ uma sequência de ordinais sucessores, estritamente crescente e cofinal em α. Considere, ainda, uma família $\{A_\gamma : \gamma < cf(\alpha)\}$ de subconjuntos de A tal que $A = \bigcup_{\gamma<cf(\alpha)} A_\gamma$ e, para cada $\gamma < cf(\alpha)$, $|A_\gamma| = \aleph_{\alpha_\gamma}$. Considere o conjunto $P = \{p_\gamma : \gamma < cf(\alpha)\}$, onde cada p_γ é um ponto de acumulação completo de A_γ.

Se $|P| = cf(\alpha)$, por (b), existe um ponto de acumulação completo p de P. Afirmamos que $p \in A$ é um ponto de acumulação completo de A. De fato, suponha, por absurdo, que exista U uma vizinhança aberta de p tal que $|U \cap A| < \kappa$. Então, existe $\gamma_0 < cf(\alpha)$ tal que $|U \cap A| \leq \aleph_{\alpha_{\gamma_0}} = |A_{\gamma_0}|$. Como p é um ponto de acumulação completo de $\{p_\gamma : \gamma < cf(\alpha)\}$, existe $\gamma_1 > \gamma_0$ tal que $p_{\gamma_1} \in U$. Mas p_{γ_1} é um ponto de acumulação completo de A_{γ_1}. Logo, $|U \cap A_{\gamma_1}| = \aleph_{\alpha_{\gamma_1}} > \aleph_{\alpha_{\gamma_0}} \geq |U \cap A|$. Um absurdo, visto que $A_{\alpha_{\gamma_1}} \subseteq A$.

Suponhamos, então, que $|P| < cf(\alpha)$. Da regularidade de $cf(\alpha)$ segue que existe $\gamma_0 \in cf(\alpha)$ tal que $C = \{\gamma < cf(\alpha) : p_\gamma = p_{\gamma_0}\}$ tem cardinalidade $cf(\alpha)$. Como C é cofinal em $cf(\alpha)$ e $\langle \alpha_\gamma : \gamma \in cf(\alpha)\rangle$ é estritamente crescente e cofinal em α, $\{\alpha_\gamma : \gamma \in C\}$ é cofinal em α e, portanto, $\{\aleph_{\alpha_\gamma} : \gamma \in C\}$ é cofinal em κ. Temos, ainda, que dada uma vizinhança U de p_{γ_0},

$$|U \cap A| \geq |U \cap A_\gamma| = \aleph_{\alpha_\gamma}$$

para todo $\gamma \in C$. Portanto, $|U \cap A| = \kappa$, isto é, p_{γ_0} é um ponto de acumulação completo de A.

$(c) \Rightarrow (b)$: Imediato.

2.2 Exemplos de espaços não-Lindelöf

Nesta seção apresentamos dois exemplos de espaços linearmente Lindelöf e de Tychonoff que não tem a propriedade de Lindelöf.

2.2.1 O espaço de Miščenko

Em 1962 Miščenko publicou (veja [26]) o que provavelmente foi o primeiro exemplo de um espaço linearmente Lindelöf e não-Lindelöf.

Antes de apresentarmos o espaço em questão, precisaremos provar alguns resultados básicos.

Definição 2.2.1. Sejam θ e κ cardinais. Dizemos que um espaço topológico X é $[\theta, \kappa]$-*compacto* se toda cobertura aberta de X de cardinalidade $\leq \kappa$ possui uma subcobertura de cardinalidade $< \theta$. Se $\theta = \aleph_0$, dizemos que X é *inicialmente* κ*-compacto*, e se $\kappa \geq |X|$, X é chamado de *finalmente* θ*-compacto*.

Note que X é enumeravelmente compacto se, e somente se, X é inicialmente ω-compacto, e têm a propriedade de Lindelöf se, e somente se, X é finalmente ω_1-compacto.

NOTAÇÃO. $\mathbf{N} = \omega \setminus \{0\}$.

Lema 2.2.2. *Para todo* $k \in \mathbf{N}$, ω_k *é inicialmente* ω_{k-1}*-compacto.*

Demonstração. Seja $\mathcal{U}$ uma cobertura de ω_k tal que $|\mathcal{U}| \leq \aleph_{k-1}$. Como $\alpha + 1 = [0, \alpha]$ é compacto para todo ordinal α, é suficiente mostrar que existe $U_0 \in \mathcal{U}$ contendo um intervalo da forma $]\alpha_0, \omega_k[$.

Para cada $\alpha \in \lim \omega_k \setminus \{0\}$ escolha $\beta(\alpha) < \alpha$ de forma que $]\beta(\alpha), \alpha]$ esteja contido em algum $U \in \mathcal{U}$. Então, a função

$$\begin{array}{rccc} f: & \lim \omega_k & \longrightarrow & \omega_k \\ & \alpha & \longmapsto & \beta(\alpha) \end{array}$$

é regressiva.

Pelo lema *pressing down* existe $\alpha_0 \in \omega_k$ tal que $f^{-1}\{\alpha_0\}$ é estacionário em ω_k. Logo, $f^{-1}\{\alpha_0\}$ é cofinal em ω_k e, portanto, $|f^{-1}\{\alpha_0\}| = \aleph_k$. Para cada $U \in \mathcal{U}$ considere o conjunto

$$M_U = \{\alpha \in f^{-1}\{\alpha_0\} :]\alpha_0, \alpha] \subseteq U\}.$$

Da definição de f segue que $f^{-1}\{\alpha_0\} = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} M_U$. Logo, pelo teorema 1.1.2,

$$\aleph_k = |f^{-1}\{\alpha_0\}| \leq |\mathcal{U}| \cdot \sup\{|M_U| : U \in \mathcal{U}\} \leq \aleph_{k-1} \cdot \sup\{|M_U| : U \in \mathcal{U}\}.$$

Então, $\sup\{|M_U| : U \in \mathcal{U}\} = \aleph_k$. Da regularidade de $\aleph_k$ segue que existe $U_0 \in \mathcal{U}$ tal que $|M_{U_0}| = \aleph_k$. Assim, M_{U_0} é cofinal em ω_k. Portanto, $]\alpha_0, \omega_k[\subseteq U_0$. □

Lema 2.2.3. *Para todo $k \in \mathbb{N}$, $\prod_{k \leq i \leq n} \omega_i$ é um inicialmente ω_{k-1}-compacto.*

Demonstração. Procederemos por indução sobre n. Se $n = k$ então a afirmação vale pelo lema 2.2.2. Suponhamos, então, a afirmação válida para algum $n - 1 \geq k$. Seja $\mathcal{U}$ uma cobertura de $\prod_{k \leq i \leq n} \omega_i$ tal que $|\mathcal{U}| \leq \aleph_{k-1}$.

Fixe $x = \langle x_k, \ldots, x_{n-1} \rangle \in P = \prod_{k \leq i < n} \omega_i$. Para cada $\alpha < \lim \omega_n$ escolha ordinais $x_i(\alpha) \in \{0\} \cup (\omega_i \setminus \lim \omega_i)$, $k \leq i \leq n$, e $U_\alpha \in \mathcal{U}$ de modo que $\prod_{k \leq i < n} [x_i(\alpha), x_i] \times [x_n(\alpha), \alpha] \subseteq U_\alpha$.

Logo, a função

$$\begin{array}{rccc} f: & \lim \omega_n & \longrightarrow & \omega_n \\ & \alpha & \longmapsto & x_n(\alpha) \end{array}$$

é regressiva. Como $\lim \omega_n$ é estacionário, pelo lema *pressing down*, existe $\alpha_0 \in \lim \omega_n$ tal que $M = f^{-1}\{x_n(\alpha_0)\}$ é estacionário e, portanto, cofinal em ω_n. Note que $\prod_{k \leq i < n} [x_i(\alpha), x_i] \times [x_n(\alpha_0), \alpha] \subseteq U_\alpha$ para todo $\alpha \in M$. Visto que $|P| < \aleph_n$ e $|M| = \aleph_n$, existe $\alpha_1 \in M$ tal que $\prod_{k \leq i < n} [x_i(\alpha_1), x_i] \times [x_n(\alpha_0), \omega_n[\subseteq U_{\alpha_1}$.

Assim, para cada $x \in P$ podemos tomar ordinais $y_i(x) \in \{0\} \cup (\omega_i \setminus \lim \omega_i)$, $k \leq i \leq n$, e $U(x) \in \mathcal{U}$ de forma que $\prod_{k \leq i < n} [y_i(x), x_i] \times [y_n(x), \omega_n[\subseteq U(x)$.

Como $|\{y_n(x) : x \in P\}| \leq \aleph_{n-1}$, pela regularidade de $\aleph_n$, existe $\overline{\alpha} \in \omega_n$ tal que $\overline{\alpha} > y_n(x)$

para todo $x \in P$. Então,

$$\prod_{k \leq i < n} [y_i(x), x_i] \times]\overline{\alpha}, \omega_n[\subseteq U(x),$$

para todo $x \in P$. Seja

$$V_U = \bigcup \{ \prod_{k \leq i < n} [y_i(x), x_i] : U(x) = U \}.$$

Note que a família $\{V_U : U \in \mathcal{U}\}$ cobre P. Logo, pela hipótese de indução, possui uma subcobertura finita $\{V_{U_1} \ldots, V_{U_s}\}$. Então, a família $\{U_1, \ldots, U_s\}$ cobre o conjunto $P \times]\overline{\alpha}, \omega_n[$. Mas,

$$\prod_{i=k}^{n} \omega_i = (P \times [0, \overline{\alpha}]) \cup (P \times]\overline{\alpha}, \omega_n[).$$

Visto que $[0, \overline{\alpha}]$ é compacto, $P \times [0, \overline{\alpha}]$ é $[\aleph_0, \aleph_{k-1}]$-compacto, isto é, é coberto por um número finito de elementos $\{U_{s+1}, \ldots, U_m\}$. Portanto, a família $\{U_1, \ldots, U_m\}$ cobre o espaço $\prod_{i=k}^{n} \omega_i$. □

Lema 2.2.4. *Se $\beta > 0$ é um ordinal tal que $cf(\beta) < \omega_k$, então para todo aberto U contendo $\{\beta\} \times \prod_{i=k}^{n} \omega_i$ existe $\alpha < \beta$ tal que $]\alpha, \beta] \times \prod_{i=k}^{n} \omega_i \subseteq U$.*

Demonstração. Seja $\{\beta_\gamma\}_{\gamma < cf(\beta)}$ cofinal em β. Suponhamos, primeiramente, $n = k$. Para cada $\lambda \in \omega_k$ tome $\gamma_\lambda < cf(\beta)$ e $\delta_\lambda \in \{0\} \cup (\omega_n \setminus \lim \omega_n)$ tais que $]\beta_{\gamma_\lambda}, \beta] \times [\delta_\lambda, \lambda] \subseteq U$. Então, a função

$$\begin{array}{rccc} f: & \lim \omega_k & \longrightarrow & \omega_k \\ & \lambda & \longmapsto & \delta_\lambda \end{array}$$

é regressiva. Pelo lema *pressing down* existe $\delta < \omega_k$ tal que $M = f^{-1}\{\delta\}$ é estacionário em ω_k e, portanto, cofinal em ω_k. Daí,

$$]\beta_{\gamma_\lambda}, \beta] \times [\delta, \lambda] \subseteq U$$

para todo $\lambda \in M$. Como $|M| = \omega_k$ e $cf(\beta) < \omega_k$, existe $\gamma < cf(\beta)$ tal que $|\{\lambda \in M : \gamma_\lambda = \gamma\}| = \aleph_k$. Portanto,

$$]\beta_\gamma, \beta] \times [\delta, \omega_k[\subseteq U.$$

Como $[0, \delta]$ é compacto, existem $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \leq \delta$ tais que $[0, \delta] \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} [\delta_{\lambda_i}, \lambda_i]$. Seja $\alpha =$

$\max\{\beta_\gamma, \beta_{\gamma_{\lambda_1}}, \ldots, \beta_{\gamma_{\lambda_k}}\}$. Logo,

$$]\alpha, \beta] \times \omega_k \subseteq U.$$

Suponhamos, agora, que o lema valha para $n-1 \geq k$. Fixe $x = \langle x_k, \ldots, x_{n-1}\rangle \in P = \prod_{k \leq i < n} \omega_i$. Para cada $\lambda \in \lim \omega_n$ tome $\gamma_\lambda < cf(\beta)$ e ordinais $x_k^\lambda, \ldots, x_n^\lambda$, cada um dos quais ou é sucessor ou é igual a 0, tais que $\langle \beta, x, \lambda\rangle \in]\beta_{\gamma_\lambda}, \beta] \times \prod_{k \leq i < n}[x_i^\lambda, x_i] \times [x_n^\lambda, \lambda] \subseteq U$. Então, a função

$$\begin{array}{rccc} f: & \lim \omega_n & \longrightarrow & \omega_n \\ & \lambda & \longmapsto & x_n^\lambda \end{array}$$

é regressiva. Pelo lema *pressing down* existe $\mu < \omega_n$ tal que $M = f^{-1}\{\mu\}$ é estacionário e, portanto, cofinal em ω_n. Assim, $]\beta_{\gamma_\lambda}, \beta] \times \prod_{k \leq i < n}[x_i^\lambda, x_i] \times [\mu, \lambda] \subseteq U$ para todo $\lambda \in M$. Como $cf(\beta) < \omega_n$, $|\{\langle x_k^\lambda, \ldots, x_{n-1}^\lambda\rangle : \lambda \in M\}| < \aleph_n$ e $|M| = \aleph_n$, existe $\lambda_0 < \lambda$ tal que $]\beta_{\gamma_{\lambda_0}}, \beta] \times \prod_{k \leq i < n}[x_i^{\lambda_0}, x_i] \times [\mu, \omega_n[\subseteq U$. Como $[0, \mu]$ é compacto, existem $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \leq \mu$ tais que

$$[0, \mu] \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} [x_n^{\lambda_j}, \lambda_j] \subseteq U$$

Seja $\beta(x) = \max\{\beta_{\gamma_{\lambda_j}} : 0 \leq j \leq m\}$ e, para cada i, $y_i(x) = \max\{x_i^{\lambda_j} : 0 \leq j \leq m\}$. Assim,

$$]\beta(x), \beta] \times \prod_{k \leq i < n} [y_i(x), x_i] \times \omega_n \subseteq U.$$

Agora, para cada $x \in \prod_{k \leq i < n} \omega_i$ seja $U_x =]\beta(x), \beta] \times \prod_{k \leq i < n}[y_i(x), x_i]$. Como

$$\{\beta\} \times \prod_{k \leq i < n} \omega_i \subseteq \bigcup_{x \in P} U_x,$$

pela hipótese de indução, existe $\alpha < \beta$ tal que

$$]\alpha, \beta] \times \prod_{k \leq i < n} \omega_i \subseteq \bigcup_{x \in P} U_x.$$

Portanto,

$$]\alpha, \beta] \times \prod_{k \leq i \leq n} \omega_i \subseteq \bigcup_{x \in P} (U_x \times \omega_n) \subseteq U.$$

□

Lema 2.2.5. *Para todo $k \in \mathbf{N}$, $\prod_{k \leq i < \omega} \omega_i$ é inicialmente $\aleph_{k-1}$-compacto.*

Demonstração. Provemos, inicialmente, que $\prod_{k \leq i < \omega} \omega_i$ é enumeravelmente compacto. Suponha, por absurdo, que exista uma cobertura enumerável $\mathcal{U} = \{U_n : n < \omega\}$ que não possui subcobertura finita. Podemos supor que

$$U_n = V_n \times \prod_{k+n < i < \omega} \omega_i,$$

onde, $V_n \subseteq \prod_{k \leq i \leq k+n} \omega_i$.

Afirmamos que existe $\alpha_k \in \omega_k$ tal que o conjunto

$$\{\alpha_k\} \times \prod_{k < i < \omega} \omega_i$$

não é coberto por um número finito de elementos de $\mathcal{U}$. De fato, suponhamos o contrário. Então, para cada $\alpha \in \omega_k$, existe $N_\alpha \in \omega$ tal que

$$\bigcup_{n=1}^{N_\alpha} U_n \supseteq \{\alpha\} \times \prod_{k < i < \omega} \omega_i.$$

Pelo lema 2.2.4, existe um $\beta(\alpha) \in \omega_k$ tal que

$$\bigcup_{n=1}^{N_\alpha} U_n \supseteq]\beta(\alpha), \alpha] \times \prod_{k < i < \omega} \omega_i.$$

Para cada natural $n \geq k$, seja $W_n = \bigcup\{]\beta(\alpha), \alpha] : \alpha \in \omega_k \text{ e } N_\alpha = n\}$.

É claro que $\{W_n\}_{n < \omega}$ é uma cobertura aberta do espaço ω_k e, portanto, existe um n_0 tal

que $\bigcup_{n=1}^{n_0} W_n \supseteq \omega_k$. Então, $\bigcup_{n=1}^{n_0} U_n \supseteq \prod_{k\leq i<\omega} \omega_i$, contradizendo o fato de $\mathcal{U}$ não possuir subcobertura finita.

De modo inteiramente análogo, pode-se mostrar que se

$$\{\alpha_k\} \times \ldots \times \{\alpha_n\} \times \prod_{n<i<\omega} \omega_i$$

não é coberto por um número finito de elementos de $\mathcal{U}$, então existe $\alpha_{n+1} \in \omega_{n+1}$ tal que

$$\{\alpha_k\} \times \ldots \times \{\alpha_n\} \times \{\alpha_{n+1}\} \times \prod_{n+1<i<\omega} \omega_i$$

também não é coberto por um número finito de elementos de $\mathcal{U}$.

Portanto, existe $\langle \alpha_i : k \leq i < \omega \rangle \in \prod_{k\leq i<\omega} \omega_i$ tal que, para cada n,

$$\{\alpha_k\} \times \ldots \times \{\alpha_n\} \times \prod_{n<i<\omega} \omega_i$$

não é coberto por um número finito de elementos de $\mathcal{U}$ e, por conseguinte, o ponto $\langle \alpha_i : k \leq i < \omega \rangle$ não está contido em nenhum $U_i \in \mathcal{U}$, contradizendo o fato de $\mathcal{U}$ ser uma cobertura de $\prod_{k\leq<\omega} \omega_i$.

Mostramos, assim, que $\prod_{k\leq i<\omega} \omega_i$ é enumeravelmente compacto.

Seja, agora, $\mathcal{U}$ uma cobertura aberta tal que $|\mathcal{U}| \leq \aleph_{k-1}$. Cada $U \in \mathcal{U}$ pode ser descrito da forma:

$$U = \bigcup_{k\leq n<\omega} (V_n(U) \times \prod_{n<i<\omega} \omega_i),$$

onde, cada $V_n(U)$ é um aberto de $\prod_{k\leq i\leq n} \omega_i$ eventualmente vazio. Seja

$$V_n = \bigcup_{U\in\mathcal{U}} V_n(U) \times \prod_{n<i<\omega} \omega_i.$$

É claro que $\{V_n : k \leq n < \omega\}$ cobre o espaço $\prod_{k\leq i<\omega} \omega_i$. Como $\prod_{k\leq i<\omega} \omega_i$ é enumeravelmente

compacto, existe um natural $N \geq k$ tal que $\bigcup_{i=k}^{N} V_i \supseteq \prod_{k \leq i < \omega} \omega_i$. Então, a família

$$\mathcal{C} = \{V_n(U) \times \prod_{n<i\leq N} \omega_i \ : \ k \leq n \leq N \text{ e } U \in \mathcal{U}\}$$

cobre o espaço $\prod_{i=k}^{N} \omega_i$. Pelo lema 2.2.3, $\mathcal{C}$ possui uma sucobertura finita. Portanto, $\mathcal{U}$ possui uma subcobertura finita. □

Exemplo 2.2.6. Considere $\prod_{0<i<\omega} \omega_i + 1$ com a topologia produto usual. Para cada $k \in \mathbf{N}$, seja

$$X_k = \prod_{0<i\leq k} \omega_i + 1 \times \prod_{k<i<\omega} \omega_i.$$

Então, o espaço

$$X = \bigcup_{0<k<\omega} X_k$$

com a topologia de subespaço é linearmente Lindelöf, porém, não é Lindelöf.

Demonstração. Primeiramente, mostremos que X é um espaço linearmente Lindelöf. Seja $\mathcal{U}$ uma cobertura aberta não-enumerável de X de cardinalidade regular. Então, $|\mathcal{U}| \neq \aleph_\omega$.

Se $|\mathcal{U}| < \aleph_\omega$ então $|\mathcal{U}| = \aleph_n$ para algum $n < \omega$. Como cada X_k é $[\aleph_0, \aleph_k]$-compacto segue que X é $[\aleph_1, \aleph_k]$-compacto para todo $k < \omega$. Em particular, X é $[\aleph_1, \aleph_n]$-compacto. Logo, $\mathcal{U}$ possui uma subcobertura enumerável $\mathcal{U}'$, donde, $|\mathcal{U}'| < |\mathcal{U}|$.

Suponha, então, que $|\mathcal{U}| > \aleph_\omega$. Para cada $x \in X$ escolha um $U_x \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U_x$. Então $\mathcal{U}' = \{U_x : x \in X\}$ é uma subcobertura de $\mathcal{U}$. Além disso, $|\mathcal{U}'| \leq |X| = \aleph_\omega < |\mathcal{U}|$.

Portanto, pelo teorema 2.1.3, X é linearmente Lindelöf.

Resta mostrar que X não é Lindelöf. Para cada $i \in \omega$ seja

$$\mathcal{U}_i = \{U_\alpha^i : \alpha < \omega_i\},$$

onde,

$$U_\alpha^i = \{\langle x_n : n < \omega \rangle \in X : x_i < \alpha\}.$$

A família $\mathcal{U} = \bigcup_{0<i<\omega} \mathcal{U}_i$ é uma cobertura aberta de X. Vamos mostrar que $\mathcal{U}$ não possui subcobertura enumerável. De fato, seja $\mathcal{U}'$ um subconjunto enumerável de $\mathcal{U}$. Então, para cada $i < \omega$, $s_i = \{\alpha < \omega_i : U^i_\alpha \in \mathcal{U}'\}$ é enumerável. Como cada ω_i é um cardinal regular $> \omega$, existe $\alpha_i \in \omega_i$ tal que $\alpha_i \geq \alpha$ para todo $\alpha \in s_i$. Logo, $\{U^i_\alpha : \alpha \in s_i\} \subseteq U^i_{\alpha_i}$ para cada $i < \omega$. Então, $p = \langle \alpha_i + 1 : i < \omega \rangle \notin U^k_{\alpha_k}$ para todo $k < \omega$. Logo, $p \notin \bigcup \mathcal{U}'$ e, portanto, $\mathcal{U}'$ não cobre X. □

Em [26], Miščenko afirma não saber se tal exemplo é ou não normal. Em 1971, M. E. Rudin mostrou que o espaço de Miščenko não é normal.

Teorema 2.2.7. *O espaço de Miščenko não é normal.*

Demonstração. Seja X o espaço de Miščenko. Considere os seguintes subconjuntos fechados e disjuntos de X:

$$F = \{\langle x_n \rangle_{n\in\mathbf{N}} \in X : x_n \neq 0 \text{ para todo } n \in \mathbf{N}\}$$

e

$$G = \{\langle x_n \rangle_{n\in\mathbf{N}} \in X : \text{existe } n \in \mathbf{N} \text{ tal que } x_{n+1} = 0 \text{ e, para } 0 < i \leq n,\ x_i = \omega_i\}.$$

Para provar o teorema é suficiente mostrarmos que para todo aberto U de X contendo G, temos que $F \cap \overline{U} \neq \emptyset$.

Seja U um aberto de X tal que $G \subseteq U$. Então, para cada $n \in \mathbf{N}$, existem $\alpha^n_1 \in \omega_1, \ldots, \alpha^n_n \in \omega_n$ tal que

$$]\alpha^n_1, \omega_1] \times \ldots \times]\alpha^n_n, \omega_n] \times \{0\} \times \{0\} \times \ldots \subseteq U.$$

Da regularidade de cada ω_n, segue que $\alpha_n = \sup\{\alpha^i_n : n \leq i < \omega\} < \omega_n$. Para cada $n \in \mathbf{N}$, escolha $y_n \in]\alpha_n, \omega_n[$. Note que $y = \langle y_n \rangle_{n\in\mathbf{N}} \in F$, pois $y_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbf{N}$. Além disso, $y \in \overline{U}$. De fato, seja V uma vizinhança aberta de y. Podemos supor $V = (V_n \times \prod_{n<i<\omega} \omega_i + 1) \cap X$, onde V_n é um aberto de $\prod_{0<i\leq n} \omega_i + 1$ tal que $y \in V_n$. Logo,

$$\langle y_1, \ldots, y_n, 0, 0, \ldots \rangle \in]\alpha^n_1, \omega_1] \times \ldots \times]\alpha^n_n, \omega_n] \times \{0\} \times \{0\} \times \ldots \subseteq U$$

e

$$\langle y_1, \ldots, y_n, 0, 0, \ldots \rangle \in V. \qquad \square$$

2.2.2 O espaço de Buzyakova-Gruenhage

O espaço que vamos apresentar aqui foi descoberto por G. Gruenhage e R. Buzyakova independentemente (veja [8]).

Exemplo 2.2.8. Considere $D = \{0, 1\}$ com a topologia discreta e $D^{\aleph_\omega}$ com a topologia produto usual. Para cada $x = \langle x_\alpha : \alpha < \aleph_\omega \rangle \in D^{\aleph_\omega}$, tome $A_x = \{\alpha \in \aleph_\omega : x_\alpha = 1\}$. Considere, agora, o espaço $X = \{x \in D^{\aleph_\omega} : |A_x| < \aleph_\omega\}$. Então, X é Tychonoff e linearmente Lindelöf, mas não é Lindelöf.

Demonstração. $D^{\aleph_\omega}$ é Tychonoff, pois é o produto cartesiano de espaços de Tychonoff. Como Tychonoff é uma propriedade hereditária, X é Tychonoff.

Agora, vamos mostrar que X não é Lindelöf. Primeiramente, note que $\overline{X} = D^{\aleph_\omega}$ mas, $X \neq D^{\aleph_\omega}$. Logo, X não é fechado e, portanto, não é compacto.

Por outro lado, o Σ-produto $\Sigma(0) = \{x \in D^{\aleph_\omega} : |A_x| \leq \omega\}$ de $D^{\aleph_\omega}$ é um subespaço enumeravelmente compacto de X. De fato, pelo teorema 1.2.19, basta mostrarmos que todo subconjunto infinito enumerável de $\Sigma(0)$ tem um ponto de acumulação. Seja então $Y \subseteq \Sigma(0)$ tal que $|Y| = \omega$. Da definição de $\Sigma(0)$ segue que $A = \bigcup_{x \in Y} A_x$ é enumerável. Note que $Y \subseteq \prod_{\alpha \in \aleph_\omega} D_\alpha \subseteq X$, onde

$$D_\alpha = \begin{cases} D, & \text{se } \alpha \in A; \\ \{0\}, & \text{se } \alpha \in \aleph_\omega \setminus A. \end{cases}$$

Visto que $\prod_{\alpha \in \aleph_\omega} D_\alpha$ é compacto T_2, Y tem um ponto de acumulação y em $\prod_{\alpha \in \aleph_\omega} D_\alpha$. Como $\prod_{\alpha \in \aleph_\omega} D_\alpha \subseteq \Sigma(0)$, $y \in \Sigma(0)$. $\Sigma(0)$ é Tychonoff, haja vista que X é Tychonoff. Logo, pelo teorema 1.2.29, $\Sigma(0)$ é pseudocompacto. Desta forma, para toda função contínua $f : X \to \mathbb{R}$, a restrição $f \restriction \Sigma(0)$ é limitada. Mas, $\Sigma(0)$ é denso em X, pois $\Sigma(0)$ é denso em $D^{\aleph_\omega}$. Então, f é limitada e, portanto, X é pseudocompacto. Visto que todo espaço pseudocompacto e Lindelöf é compacto, temos que X não é Lindelöf.

Finalmente, vamos mostrar que X é linearmente Lindelöf. De fato, seja $B \subseteq X$ tal que $|B|$ é regular e não-enumerável. Note que $w(X) \leq w(D^{\aleph_\omega}) = \aleph_\omega$. Assim, se $|B| > \aleph_\omega$ então, pelo lema 1.2.8, B tem um ponto de acumulação completo em X.

Visto que $\aleph_\omega$ não é regular, resta considerar o caso em que $|B| < \aleph_\omega$. Para cada $n \in \omega$, seja

$$X_n = \{x \in X : |A_x| \leq \aleph_n\}.$$

Obviamente, $X = \bigcup\{X_n : n \in \omega\}$. Tome, para cada $n \in \omega$,

$$B_n = B \cap X_n.$$

Então, $B = \bigcup\{B_n : n \in \omega\}$. Visto que $|B|$ é regular e não-enumerável, existe $k \in \omega$ tal que $|B_k| = |B|$. Portanto, é suficiente mostrar que B_k possui um ponto de acumulação completo em X.

Existe $m \in \omega$ tal que $k \leq m$ e $|B_k| = |B| < \aleph_m$. Sejam

$$A(m) = \bigcup\{A_x : x \in B_k\}$$

e

$$K = \{x \in X : \forall a \in A \setminus A(m)(x_a = 0)\}.$$

Note que K é compacto (produto de compactos) e $B_k \subseteq K$. Logo, B_k tem um ponto de acumulação completo em K e, portanto, em X. Portanto, X é linearmente Lindelöf. $\square$

Capítulo 3

Quando linearmente Lindelöf implica Lindelöf?

Este capítulo é dedicado ao estudo de propriedades topológicas que fazem de um espaço linearmente Lindelöf um espaço de Lindelöf.

As referências aqui são [17], [16], [1], [2].

3.1 Alguns resultados

Teorema 3.1.1 (Howes [17]). *Seja X um espaço regular. Então, X é linearmente Lindelöf e enumeravelmente metacompacto se, e somente se, X é Lindelöf.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponha, por absurdo, que X não seja Lindelöf. Seja μ o menor cardinal tal que existe uma cobertura aberta $\mathcal{U}$ de X de cardinalidade μ que não possui subcobertura enumerável. Pelo teorema 2.1.3, $\mathcal{U}$ possui uma subcobertura $\mathcal{V}$ de cofinalidade enumerável. Da minimalidade de μ segue que $|\mathcal{V}| = \mu$ e, portanto, $cf(\mu) = \omega$. Então, seja $\{V_\alpha : \alpha < \mu\}$ uma enumeração de $\mathcal{V}$ e considere uma sequência $\langle \mu_n : n \in \omega \rangle$ estritamente crescente e cofinal em μ. Para cada $n \in \omega$, tome

$$\mathcal{W}_n = \{V_\alpha : \alpha < \mu_n\}$$

e

$$F_n = X \setminus \bigcup \mathcal{W}_n.$$

Da minimalidade de μ segue que cada $F_n \neq \emptyset$. Então, $\langle F_n : n < \omega \rangle$ é uma sequência

enumerável e decrescente de fechados não vazios de X tal que $\bigcap_{i<\omega} F_{\alpha_i} = \emptyset$. Visto que X é enumeravelmente metacompacto, pelo teorema 1.2.37, existe uma sequência decrescente de abertos $\langle A_n : n < \omega \rangle$ tal que $\bigcap_{n\in\omega} A_n = \emptyset$ e $F_n \subseteq A_n$ para todo $n \in \omega$. Para cada $n \in \omega$, seja $H_n = X \setminus A_n$. Então, $\langle H_n : n < \omega \rangle$ é uma sequência crescente de fechados de X e

$$H_n = X \setminus A_n \subseteq X \setminus F_n = \bigcup \mathcal{W}_n.$$

para todo $n \in \omega$. Então, $\mathcal{W}_n \cup \{X \setminus H_n\}$ é uma cobertura aberta de X de cardinalidade $< \mu$. Da minimalidade de μ segue que cada $\mathcal{W}_n$ contém uma subfamília enumerável $\mathcal{W}_n^*$ que cobre H_n. Mas, $\{H_n : n \in \omega\}$ cobre X. Portanto, $\bigcup \mathcal{W}_n^*$ é uma subcobertura enumerável de $\mathcal{U}$, uma contradição.

($\Leftarrow$) Aplicação direta do teorema 1.2.24. □

Note que no teorema 3.1.1 utilizamos a regularidade do espaço X apenas para provar a suficiência.

Questão 3 (Howes [16] e Miščenko [26]). Um espaço linearmente Lindelöf e normal é Lindelöf?

Este é um problema famoso que permanece aberto por pelo menos 50 anos, sem nenhum resultado parcial conhecido. Um contra-exemplo, se encontrado, deverá necessariamente ser um espaço de Dowker[1], pois é um corolário imediato do teorema 3.1.1 que todo espaço normal, enumeravelmente paracompacto e linearmente Lindelöf é um espaço de Lindelöf.

Teorema 3.1.2. *Todo espaço linearmente Lindelöf X tal que $nw(X) < \aleph_\omega$ é Lindelöf.*

Demonstração. Sejam $\mathcal{U}$ uma cobertura aberta arbitrária de X e $\mathcal{N}$ um "network" para X tal que $|\mathcal{N}| < \aleph_\omega$. Para cada $U \in \mathcal{U}$, tome $\mathcal{M}_U \subseteq \mathcal{N}$ de forma que $U = \bigcup \mathcal{M}_U$. Seja $\mathcal{M} = \bigcup_{U\in\mathcal{U}} \mathcal{M}_U$. Para cada $M \in \mathcal{M}$ escolha $U_M \in \mathcal{U}$ tal que $M \subseteq U_M$. Note que $\mathcal{V} = \{U_M : M \in \mathcal{M}\}$ é uma subcobertura de $\mathcal{U}$. Além disso, $|\mathcal{V}| \leq |\mathcal{M}| < \aleph_\omega$, isto é, existe $n < \omega$ tal que

[1] Um espaço de Dowker é um espaço normal que não é enumeravelmente paracompacto.

$|\mathcal{V}| = \aleph_n$. Como X é linearmente, $\mathcal{V}$ possui uma subcobertura $\mathcal{W}$ tal que $|\mathcal{W}|$ tem cofinalidade enumerável. Visto que $\aleph_m$ é regular para cada $m > 0$, $|\mathcal{W}| = \aleph_0$. □

Lema 3.1.3. *Seja X um espaço linearmente Lindelöf. Então, todo subespaço fechado e discreto de X é enumerável.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que exista um subespaço D de X que seja fechado, discreto e não-enumerável. Podemos supor $|D| = \omega_1$. Seja $\{d_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ uma enumeração de D. Para cada $\alpha < \omega_1$, tome $D_\alpha = \{d_\beta : \beta \leq \alpha\}$. Então, $\{D_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ é uma cobertura aberta de D linearmente ordenada pela inclusão. Logo, existe $\{\alpha_n : n < \omega\} \subseteq \omega_1$ tal que $D \subseteq \bigcup_{n<\omega_1} D_{\alpha_n}$. Como ω_1 é regular, existe $\alpha \in \omega_1$ tal que $\alpha > \alpha_n$ para todo $n \in \omega$. Assim, $d_\alpha \notin \bigcup_{n<\omega_1} D_{\alpha_n}$, isto é, $\{D_{\alpha_n} : n < \omega\}$ não cobre D, uma contradição. □

Teorema 3.1.4. *Se X é um espaço linearmente Lindelöf e metaLindelöf então X é Lindelöf.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que X não seja Lindelöf e seja κ o menor cardinal tal que existe uma cobertura aberta $\mathcal{U}$ de X de cardinalidade κ que não possui subcobertura enumerável. Visto que X é metaLindelöf, $\mathcal{U}$ possui um refinamento aberto $\mathcal{V}$ pontualmente enumerável. Note que $\mathcal{V}$ não possui subcobertura enumerável. Da minimalidade de κ segue que $|\mathcal{V}| \geq \kappa$.

Para cada $x \in X$, sejam $\mathcal{W}_x = \{V \in \mathcal{V} : x \in V\}$ e $W_x = \bigcup \mathcal{W}_x$. Visto que $\mathcal{V}$ é pontualmente enumerável, segue que cada $\mathcal{W}_x$ é enumerável.

Vamos construir, por recursão transfinita, uma κ-sequência $\langle x_\alpha : \alpha < \kappa\rangle$ em X como segue.

Tome $x_0 \in X$ arbitrário. Suponha, para algum $0 < \alpha < \kappa$, escolhido x_β para todo $\beta < \alpha$. Como $\bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{W}_{x_\beta}$ tem cardinalidade $< \kappa$, pela minimalidade de κ, temos que $X \setminus \bigcup_{\beta<\alpha} W_{x_\beta} \neq \emptyset$. Sendo assim, tome $x_\alpha \in X \setminus \bigcup_{\beta<\alpha} W_{x_\beta}$.

Note que se $\alpha < \beta < \kappa$ então $\mathcal{W}_{x_\alpha} \cap \mathcal{W}_{x_\beta} = \emptyset$. Logo, $Y = \{x_\alpha : \alpha < \kappa\}$ é um subespaço discreto de X.

Afirmamos que Y é fechado. De fato, suponha, por absurdo, que exista $x \in \overline{Y} \setminus Y$. Fixe $V \in \mathcal{V}$ tal que $x \in V$. Visto que X é T_1 e $x \in \overline{Y}$, $|V \cap Y| \geq 2$. Logo, existem $\alpha < \beta < \kappa$ tais que $x_\alpha, x_\beta \in V$. Então, $V \in \mathcal{W}_{x_\alpha} \cap \mathcal{W}_{x_\beta}$, uma contradição.

Agora, pelo lema 3.1.3, temos que $\kappa \leq \omega$, uma contradição. Portanto, X é um espaço de Lindelöf. □

Corolário 3.1.5. *Todo espaço linearmente Lindelöf com uma base pontualmente enumerável é Lindelöf.*

Espaços localmente metrizáveis

Espaços linearmente Lindelöf e localmente metrizáveis constituem um caso especial importante de espaços linearmente Lindelöf que satisfazem o primeiro axioma de enumerabilidade. Em [7], Arhagel'skii e Buzyakova mostram o seguinte resultado:

Teorema 3.1.6. *Todo espaço linearmente Lindelöf, localmente metrizável e regular é hereditariamente Lindelöf.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que X não seja hereditariamente Lindelöf. Então, existe uma sequência estritamente crescente de abertos $(U_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$. Para cada, $\alpha < \omega_1$, escolha $x_\alpha \in U_{\alpha+1} \setminus U_\alpha$. Logo, $Y = \{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ é um subespaço de cardinalidade ω_1 tal que cada subespaço não-enumerável Z de Y não é Lindelöf.

Como X é linearmente Lindelöf, existe um ponto $p \in X$ de acumulação completo de Y. Tome qualquer vizinhança U de p tal que $\overline{U}$ é metrizável. Visto que $\overline{U}$ também é linearmente Lindelöf, segue que $\overline{U}$ é um espaço separável e metrizável[2]. Por outro lado, $Z = U \cap Y$ é não-enumerável. Portanto, pela escolha de Y, Z não é Lindelöf. Mas, isto é impossível, visto que Z é um subespaço de U, um espaço metrizável e separável[3]. □

Observe que no teorema acima podemos substituir a hipótese de que X é linearmente Lindelöf por uma mais fraca, a de que X é ω_1-Lindelöf.

Corolário 3.1.7. *Não existe sobre a reta real nenhuma topologia localmente compacta, linearmente Lindelöf e não-Lindelöf que seja mais fina que a topologia usual da reta real.*

[2] 4.1.15. de [13]
[3] Corolário 4.1.16. de [13]

Demonstração. Suponha, por absurdo, que exista uma topologia τ sobre a reta real que seja localmente compacta, linearmente Lindelöf, não-Lindelöf e mais fina que a topologia usual. Vamos denotar por $\mathcal{R}$ e $\mathbb{R}$ o conjunto dos reais munido da topologia τ e da topologia usual, respectivamente.

Considere a bijeção $f : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x$. Como a topologia de $\mathcal{R}$ é mais fina que a de $\mathbb{R}$ temos que f é contínua. Sejam $x \in \mathcal{R}$ e U uma vizinhança de x. Como $\mathcal{R}$ é localmente compacto, existe uma vizinhança V de x tal que $\overline{V}$ é compacta e $V \subseteq \overline{V} \subseteq U$. Logo, $f \restriction \overline{V} : \overline{V} \to f[\overline{V}]$ é um homeomorfismo. Assim, $\overline{V}$ tem peso enumerável, haja vista que $f[\overline{V}]$ tem peso enumerável. Logo, pelo teorema 1.2.40, $\overline{V}$ é metrizável. Portanto, $\mathcal{R}$ é localmente metrizável e, pelo teorema 3.1.6, é um espaço de Lindelöf, uma contradição. □

Questão 4. Em ZFC, todo espaço linearmente Lindelöf, localmente compacto e de caráter enumerável é Lindelöf?

Outros resultados

Proposição 3.1.8. *Seja um espaço X tal que $F(X) \leq \omega$ e o fecho de todo subespaço discreto enumerável de X é um espaço de Lindelöf. Então, X é um espaço de Lindelöf.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que X não seja de Lindelöf. Então, existe um recobrimento aberto $\mathcal{U}$ de X que não possui subrecobrimento enumerável. Vamos construir, por recursão transfinita, sequências $\langle x_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ e $\langle \mathcal{U}_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ satisfazendo, para todo $\alpha < \omega_1$:

(1) $\mathcal{U}_\alpha \subseteq \mathcal{U}$ e $|\mathcal{U}_\alpha| \leq \omega$;

(2) $\mathcal{U}_\beta \subseteq \mathcal{U}_\alpha$ sempre que $\beta \leq \alpha$;

(3) $\overline{\{x_\beta : \beta < \alpha\}} \subseteq \bigcup \mathcal{U}_\alpha$;

(4) $x_\alpha \in X \setminus \bigcup \mathcal{U}_\alpha$.

Escolha $x_0 \in X$ qualquer e $\mathcal{U}_0 = \emptyset$. Suponha que para algum $\alpha \in \omega_1 \setminus \{\emptyset\}$ já tenham sido escolhidos $x_\beta \in X$ e $\mathcal{U}_\beta \in \mathcal{U}$ para todo $\beta < \alpha$ satisfazendo (1) – (4). Então, $\{x_\beta : \beta < \alpha\}$ é

um subespaço discreto e enumerável de X e, portanto, um espaço de Lindelöf. Então, existe $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{U}$ enumerável que cobre $\overline{\{x_\beta : \beta < \alpha\}}$. Tome $\mathcal{U}_\alpha = \mathcal{A} \cup \left(\bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{U}_\beta\right)$. Note que $\mathcal{U}_\alpha$ é enumerável. Visto que $\mathcal{U}$ não possui subrecobrimento enumerável, temos que

$$\bigcup \mathcal{U}_\alpha \neq X.$$

Portanto, podemos escolher $x_\alpha \in X \setminus \bigcup \mathcal{U}_\alpha$. Desta forma, a construção está completa.

Note que para cada $0 < \alpha < \omega_1$,

$$\overline{\{x_\beta : \beta < \alpha\}} \subseteq \bigcup \mathcal{U}_\alpha \quad \text{e} \quad \left(\bigcup \mathcal{U}_\alpha\right) \cap \{x_\beta : \alpha \leq \beta < \omega_1\} = \emptyset.$$

Portanto,

$$\overline{\{x_\beta : \beta < \alpha\}} \cap \overline{\{x_\beta : \alpha \leq \beta < \omega_1\}} = \emptyset$$

para todo $\alpha < \omega_1$, isto é, $\{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ é uma ω_1-sequência livre.

Mas, isso contradiz a hipótese de que $F(X) \leq \omega$. Portanto, X é um espaço de Lindelöf. □

Teorema 3.1.9. *Seja X um espaço ω_1-Lindelöf tal que $t(X) \leq \omega$ e o fecho de todo discreto enumerável de X é Lindelöf. Então X é Lindelöf.*

Demonstração. Tendo em vista a proposição 3.1.8, basta mostrarmos que $F(X) \leq \omega$. Suponha, por absurdo, que $F(X) > \omega$. Então, existe uma ω_1-sequência livre $(x_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ em X. Para cada $\alpha < \omega_1$, tome $U_\alpha = X \setminus \overline{\{x_\beta : \alpha \leq \beta < \omega_1\}}$.

Afirmamos que $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ cobre X. De fato, seja $x \in \overline{\{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}}$. Como $t(X) \leq \omega$, existe $S \subseteq \omega_1$ enumerável tal que $x \in \overline{\{x_s : s \in S\}}$. Visto que ω_1 é regular, existe $\alpha_0 < \omega_1$ tal que $\alpha_0 > s$ para todo $s \in S$. Como $(x_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ é uma sequência livre em X, temos que $x \in \overline{\{x_\alpha : \alpha < \alpha_0\}} \subseteq X \setminus \overline{\{x_\alpha : \alpha \geq \alpha_0\}} = U_{\alpha_0}$.

Visto que X é ω_1-Lindelöf, existe $T \subseteq \omega_1$ enumerável tal que $X \subseteq \bigcup_{t\in T} U_t$. Como ω_1 é regular, existe $\alpha_1 < \omega_1$ tal que $\alpha_1 > t$ para todo $t \in T$. Da definição de $\mathcal{U}$ segue que $x_{\alpha_1} \notin \bigcup_{t\in T} U_t$, uma contradição. □

Na proposição 3.1.8 e no teorema 3.1.9 a hipótese ω_1-Lindelöf pode ser substituída por

linearmente Lindelöf.

Corolário 3.1.10. *Assuma a hipótese do contínuo. Seja X um espaço regular e ω_1-Lindelöf tal que $t(X) \leq \omega$. Então, X é Lindelöf.*

Demonstração. Sob CH, o fecho de todo subespaço discreto e enumerável de X tem peso $\leq \omega_1$ (veja o teorema 1.2.5). Mas, todo espaço ω_1-Lindelöf de peso $\leq \omega_1$ é Lindelöf. Portanto, sob a CH, o fecho de qualquer subespaço discreto e enumerável de X é Lindelöf. Portanto, pelo teorema 3.1.9, X é Lindelöf. □

Definição 3.1.11. Um espaço X é *discretamente Lindelöf* se o fecho de todo subespaço discreto de X é Lindelöf.

Lema 3.1.12 ([4]). *Todo espaço discretamente Lindelöf é linearmente Lindelöf.*

Demonstração. Sejam X um espaço discretamente Lindelöf e $\mathcal{U}$ uma cobertura aberta de X tal que $cf(\kappa) > \omega$, onde $\kappa = |\mathcal{U}|$. Podemos supor $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$. Para cada $\alpha < \kappa$, tome $W_\alpha = \bigcup\{U_\beta : \beta < \alpha\}$. Fixe, arbitrariamente, $d \notin X$. Definamos, indutivamente, uma sequência $(x_\alpha)_{\alpha<\omega}$ como segue. Se $U_0 = \emptyset$ então tome $x_0 = d$. Se $U_0 \neq \emptyset$, seja x_0 um ponto qualquer em U_0. Se $\alpha < \kappa$ e os pontos x_β, para $\beta < \alpha$, já estão definidos, defina $V_\alpha = U_\alpha \setminus (F_\alpha \cup (\bigcup \mathcal{U}_\alpha))$, onde $F_\alpha = \overline{\{x_\beta : \beta < \alpha, x_\beta \neq d\}}$ e $\mathcal{U}_\alpha = \{U_\beta : \beta < \alpha\}$. Tome $x_\alpha \in V_\alpha$, se $V_\alpha \neq \emptyset$ e, $x_\alpha = d$, caso contrário. Claramente, $A = \{x_\alpha : \alpha < \kappa, x_\alpha \neq d\}$ é um subespaço discreto de X. Portanto, existe uma subfamília enumerável $\mathcal{U}'$ de $\mathcal{U}$ tal que $\overline{A} \subseteq \bigcup \mathcal{U}'$. Visto que $cf(\kappa) > \omega$, existe $\beta < \kappa$ tal que $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}_\beta$. Então, $x_\alpha \notin A$ para todo $\beta < \alpha$. Portanto, $x_\alpha = d$ sempre que $\beta < \alpha$. Isto pode acontecer somente se $X = (\bigcup \mathcal{U}_\beta) \cup F_\beta$. Como $F_\beta \subseteq \overline{A} \subseteq \bigcup \mathcal{U}' \subseteq \bigcup \mathcal{U}_\beta$, temos que $\bigcup \mathcal{U}_\beta = X$. Além disso, $|\mathcal{U}_\beta| < \kappa$ e $\mathcal{U}_\beta \subseteq \mathcal{U}$. Portanto, pelo teorema 2.1.3, X é linearmente Lindelöf. □

Questão 5. Todo espaço regular — ou de Tychonoff, ou normal — e discretamente Lindelöf é Lindelöf?

Corolário 3.1.13. *Se X é enumeravelmente metacompacto e discretamente Lindelöf então X é Lindelöf.*

Do lema 3.1.12 segue o seguinte caso particular do teorema 3.1.9:

Corolário 3.1.14. *Se X é um espaço discretamente Lindelöf tal que $t(X) \leq \omega$, então X é um espaço de Lindelöf.*

Para um espaço topológico X, defina

$$LF(X) = \sup\{L(\overline{D}) : D \subseteq X, \text{discreto}\}.$$

Note que um espaço X é discretamente Lindelöf se, e somente se, $LF(X) \leq \omega$.

Teorema 3.1.15. *Para todo espaço X,*

$$L(X) \leq LF(X) \cdot F(X).$$

Demonstração. Sejam $\lambda = LF(X)$ e $\kappa = F(X)$ e suponha, por absurdo, que $L(X) > \lambda\kappa$. Então, existe uma cobertura aberta $\mathcal{U}$ de X que não possui subcobertura de cardinalidade $\leq \lambda\kappa$.

Vamos construir, por recursão transfinita, famílias $\langle x_\alpha : \alpha < \kappa^+\rangle$ e $\langle \mathcal{U}_\alpha : \alpha < \kappa^+\rangle$ satisfazendo, para todo $\alpha < \kappa^+$:

(1) $\mathcal{U}_\alpha \subseteq \mathcal{U}$ e $|\mathcal{U}_\alpha| \leq \lambda\kappa$;

(2) $\mathcal{U}_\beta \subseteq \mathcal{U}_\alpha$ sempre que $\beta \leq \alpha$;

(3) $\overline{\{x_\beta : \beta < \alpha\}} \subseteq \bigcup \mathcal{U}_\alpha$;

(4) $x_\alpha \in X \setminus \bigcup \mathcal{U}_\alpha$.

Escolha $x_0 \in X$ qualquer e tome $\mathcal{U}_0 = \emptyset$. Suponha que para algum $\alpha \in \kappa^+ \setminus \{0\}$ tenhamos escolhidos x_β e $\mathcal{U}_\beta$ para todo $\beta < \alpha$ satisfazendo (1) – (4). Então, $\{x_\beta : \beta < \alpha\}$ é um subespaço discreto de X e, portanto, existe $\mathcal{B}_\alpha \subseteq \mathcal{U}$ tal que $|\mathcal{B}_\alpha| \leq \lambda$ e $\mathcal{B}_\alpha$ cobre $\overline{\{x_\beta : \beta < \alpha\}}$. Note que $\mathcal{U}_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{U}_\beta \cup \mathcal{B}_\alpha$ tem cardinalidade $\leq \lambda\kappa$. Podemos então fixar $x_\alpha \in X \setminus \bigcup \mathcal{U}_\alpha$.

Note que para cada $0 < \alpha < \kappa^+$,

$$\overline{\{x_\beta : \beta < \alpha\}} \subseteq \bigcup \mathcal{U}_\alpha \quad \text{e} \quad \left(\bigcup \mathcal{U}_\alpha\right) \cap \{x_\beta : \alpha \leq \beta < \kappa^+\} = \emptyset.$$

Portanto,

$$\overline{\{x_\beta : \beta < \alpha\}} \cap \overline{\{x_\beta : \alpha \leq \beta < \kappa^+\}} = \emptyset$$

para todo $\alpha < \omega_1$, isto é, $\{x_\alpha : \alpha < \kappa^+\}$ é uma κ^+-sequência livre.

Mas, isso contradiz a hipótese de que $F(X) \leq \kappa$. Portanto, $L(X) \leq \lambda \kappa$ □

Vamos, agora, a seguinte generalização do corolário 3.1.14:

Teorema 3.1.16. *Seja X um espaço discretamente Lindelöf tal que $t(X) < \aleph_\omega$. Então, X é um espaço de Lindelöf.*

Demonstração. Como X é linearmente Lindelöf, temos que $F(X) \leq t(X) < \aleph_\omega$. Logo, pelo teorema 3.1.15, $L(X) < \aleph_\omega$ e, portanto, $L(X) = \aleph_n$ para algum $n \in \omega$. Novamente, do fato de X ser linearmente Lindelöf segue que $L(X) \leq \omega$. □

Questão 6. É verdade, em ZFC, que todo espaço linearmente Lindelöf, de Tychonoff e de caráter enumerável é Lindelöf? Pode se tirar CH das hipóteses do corolário 3.1.10? Todo espaço linearmente Lindelöf, hereditariamente separável e de Tychonoff (ou apenas regular) é de Lindelöf?

Teorema 3.1.17. *Assuma GCH e seja X um espaço linearmente Lindelöf tal que $t(X) < \aleph_\omega$. Então X é Lindelöf.*

Demonstração. Como X é linearmente Lindelöf, basta mostrarmos que $L(X) < \aleph_\omega$. Suponha, por absurdo, que $L(X) \geq \aleph_\omega$. Então, existe um recobrimento aberto $\mathcal{U}$ de X que não possui subrecobrimento cardinalidade $< \aleph_\omega$. Vamos construir, por recursão transfinita, sequências $\langle x_\alpha : \alpha < \aleph_\omega \rangle$ e $\langle \mathcal{U}_\alpha : \alpha < \aleph_\omega \rangle$ satisfazendo, para todo $\alpha < \aleph_\omega$:

(1) $\mathcal{U}_\alpha \subseteq \mathcal{U}$ e $|\mathcal{U}_\alpha| < \aleph_\omega$;

(2) $\mathcal{U}_\beta \subseteq \mathcal{U}_\alpha$ sempre que $\beta \leq \alpha$;

(3) $\overline{\{x_\beta : \beta < \alpha\}} \subseteq \bigcup \mathcal{U}_\alpha$;

(4) $x_\alpha \in X \setminus \bigcup \mathcal{U}_\alpha$.

Escolha $x_0 \in X$ qualquer e $\mathcal{U}_0 = \emptyset$. Suponha que para algum $\alpha \in \aleph_\omega \setminus \{\emptyset\}$ já tenham sido escolhidos $x_\beta \in X$ e $\mathcal{U}_\beta \in \mathcal{U}$ para todo $\beta < \alpha$ satisfazendo (1) – (4). Então, $A_\alpha = \{x_\beta : \beta < \alpha\}$ é um subespaço discreto de X de cardinalidade $\kappa < \aleph_\omega$. De GCH segue que $|\overline{A}_\alpha| \leq \kappa^\kappa = \kappa^+ < \aleph_\omega$. Logo, existe uma subfamília $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$ cobrindo $\overline{A}_\alpha$ tal que $|\mathcal{U}'|$ é regular ou $|\mathcal{U}'| < \omega$. Como $\overline{A}_\alpha$ é linearmente Lindelöf, existe uma subcobertura $\mathcal{U}''$ de $\mathcal{U}'$ cuja cardinalidade tem cofinalidade enumerável. Visto que $|\mathcal{U}'|$ é regular ou finita, temos que $|\mathcal{U}''| \leq \omega$. Portanto, $\overline{A}_\alpha$ é de Lindelöf. Então, existe $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{U}$ enumerável que cobre $\overline{A}_\alpha$. Tome $\mathcal{U}_\alpha = \mathcal{A} \cup \left(\bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{U}_\beta\right)$. Note que $\mathcal{U}_\alpha$ tem cardinalidade $\kappa < \aleph_\omega$. Visto que $\mathcal{U}$ não possui subrecobrimento tem cardinalidade $\kappa < \aleph_\omega$, temos que

$$\bigcup \mathcal{U}_\alpha \neq X.$$

Portanto, podemos escolher $x_\alpha \in X \setminus \bigcup \mathcal{U}_\alpha$. Desta forma, a construção está completa.
Note que para cada $0 < \alpha < \aleph_\omega$,

$$\overline{\{x_\beta : \beta < \alpha\}} \subseteq \bigcup \mathcal{U}_\alpha \quad \text{e} \quad \left(\bigcup \mathcal{U}_\alpha\right) \cap \{x_\beta : \alpha \leq \beta < \aleph_\omega\} = \emptyset.$$

Portanto,

$$\overline{\{x_\beta : \beta < \alpha\}} \cap \overline{\{x_\beta : \alpha \leq \beta < \aleph_\omega\}} = \emptyset$$

para todo $\alpha < \aleph_\omega$, isto é, $\{x_\alpha : \alpha < \aleph_\omega\}$ é uma $\aleph_\omega$-sequência livre.

Mas, visto que X é um espaço linearmente Lindelöf, temos que $F(X) \leq t(X) < \aleph_\omega$[4], uma contradição. Portanto, X é um espaço de Lindelöf. □

Note que se pudéssemos tirar GCH das hipóteses do teorema acima teríamos o melhor

[4]Suponha, por absurdo, que $F(X) > t(X)$. Então, existe $\{x_\alpha : \alpha < \tau^+\}$ uma sequência livre em X. Para cada $\alpha < \tau^+$, tome $U_\alpha = X \setminus \overline{\{x_\beta : \beta \geq \alpha\}}$. Afirmamos que $\{U_\alpha : \alpha < \tau^+\}$ cobre X. De fato, seja $x \in \overline{\{x_\alpha : \alpha < \tau^+\}}$. Como $t(X) < \tau$, existe $\{\alpha_\gamma : \gamma < \tau\} \subseteq \tau^+$ tal que $x \in \overline{\{x_{\alpha_\gamma} : \gamma < \tau\}}$. Como τ^+ é regular, existe $\alpha < \tau^+$ tal que $\alpha > \alpha_\gamma$ para todo $\gamma < \tau$. Portanto, $x \in U_\alpha$.

resultado possível deste tipo, visto que no espaço de Buzyakova-Gruenhage (subseção 2.2.2) X é um espaço linearmente Lindelöf e não-Lindelöf cujo tightness é exatamente $\aleph_\omega$. Sendo assim, é natural perguntar:

Questão 7. O teorema 3.1.17 permanece válido se excluirmos GCH de sua formulação?

Questão 8. Um espaço discretamente Lindelöf (de Tychonoff) é um espaço de Lindelöf?

Questão 9 ([7], Questões 1 e 3). É verdade, em ZFC, que todo espaço localmente compacto, linearmente Lindelöf e de caráter enumerável é um espaço de Lindelöf?

Questão 10 ([7], Questão 4). Existe um espaço linearmente Lindelöf e não metrizável com uma base de ordem enumerável? Equivalentemente, todo espaço linearmente Lindelöf com uma base de ordem enumerável é Lindelöf?

Questão 11 (Arhagel'skiĭ e Buzyakova). Todo espaço linearmente Lindelöf, realcompacto e localmente compacto é Lindelöf?

Questão 12 (Arhagel'skiĭ). O produto de quaisquer dois p-espaços linearmente Lindelöf é Lindelöf?

3.2 Espaços incontavelmente compactos

O principal objetivo desta seção é mostrar que um espaço linearmente Lindelöf e $\aleph_\omega$-compacto é incontavelmente compacto e, portanto, Lindelöf. Para isso, será crucial um resultado de "interpolação" no qual, para um certo espaço X, deduzimos que X é κ-compacto, sabendo-se que $\mu < \kappa < \lambda$ e que X é μ-compacto e λ-compacto. Para a prova deste último, será usado um resultado da teoria pcf[5] de Shelah.

Nossas principais referências são [5] e [21].

Começaremos lembrando que dado um cardinal κ, um espaço X é κ-compacto se todo subconjunto de cardinalidade κ de X tem um ponto de acumulação completo. Logo, X é

[5]"pcf" é uma abreviação para "possible cofinalities".

linearmente Lindelöf se, e somente se, X é κ-compacto para todo cardinal κ regular e não-enumerável. Sendo assim, um espaço linearmente Lindelöf X é Lindelöf se X é κ-compacto para $\kappa = \aleph_\omega$ e para todo cardinal κ regular e não-enumerável.

Definição 3.2.1. Um espaço X é incontavelmente!compacto*incontavelmente compacto* se todo subconjunto não-enumerável de X tem um ponto de acumulação completo em X.

Lema 3.2.2. *Sejam κ um cardinal singular e $\langle \kappa_\alpha : \alpha < cf(\kappa)\rangle$ uma sequência estritamente crescente e cofinal em κ. Seja X um espaço $cf(\kappa)$-compacto e κ_α-compacto para todo $\alpha < cf(\kappa)$. Então, X é κ-compacto.*

Demonstração. Seja $A \subseteq X$ de cardinalidade κ. Seja $\{x_\alpha : \alpha < \kappa\}$ uma enumeração de A. Considere o conjunto $P = \{p_\alpha : \alpha < cf(\kappa)\}$, onde cada p_α é um ponto de acumulação completo de $A_\alpha = \{x_\lambda : \lambda < \kappa_\alpha\}$.

Se $|P| < cf(\kappa)$ então, da regularidade de $cf(\kappa)$ segue que existe $p \in X$ tal que $J = \{\alpha < cf(\kappa) : p_\alpha = p\}$ tem cardinalidade $cf(\kappa)$. Se, por outro lado, $|P| = cf(\kappa)$ então P possui um ponto de acumulação completo $p \in X$.

Em ambos os casos, dada uma vizinhança U de p, o conjunto $J = \{\alpha \in cf(\kappa) : p_\alpha \in U\}$ tem cardinalidade $cf(\kappa)$. Logo, J é cofinal em $cf(\kappa)$ e, por conseguinte, $\sup\{k_\alpha : \alpha \in J\} = \kappa$. Como

$$|U \cap A| \geq |U \cap A_\alpha| = \kappa_\alpha$$

para todo $\alpha \in J$, temos que

$$\kappa = \sup_{\alpha \in J} \kappa_\alpha \leq |U \cap A| \leq \kappa.$$

Portanto, p é um ponto de acumulação completo de A. □

O resultado acima nos dá a seguinte caracterização de espaços compactos: um espaço é compacto se, e somente se, todo subconjunto infinito de cardinalidade regular tem ponto de acumulação completo. Ou seja, um espaço é compacto se, e somente se, é linearmente Lindelöf e ω-compacto.

Teorema 3.2.3. *Todo espaço incontavelmente compacto é de Lindelöf.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que exista um espaço X incontavelmente compacto que não seja de Lindelöf. Seja μ o menor cardinal tal que existe uma cobertura aberta $\mathcal{V} = \{U_\alpha : \alpha < \mu\}$ de X que não possui uma subcobertura finita. Então, pela minimalidade de μ, uma condição mais forte é satisfeita:

$$(*) \qquad \text{se } J \subseteq \mu \text{ e } |J| < \mu \text{ então } \{U_\alpha : \alpha \in J\} \text{ não cobre } X.$$

Claramente, $\mu > \aleph_0$. Fixe uma função $g : X \to \mu$ tal que $x \in U_{g(x)}$ para cada $x \in X$. Vamos construir uma sequência transfinita $\langle x_\alpha : \alpha < \mu \rangle$ em X como segue.

- Escolha $x_0 \in X$ arbitrariamente;
- Suponha que, para algum $\alpha \in \mu \setminus \{0\}$, tenham sido escolhidos x_β para todo $\beta < \alpha$. Pela propriedade $(*)$ de $\mathcal{V}$, podemos tomar

$$x_\alpha \in X \setminus \left(\bigcup \{U_\beta : \beta < \alpha\} \cup \bigcup \{U_{g(x_\beta)} : \beta < \alpha\} \right).$$

Claramente, $x_\alpha \neq x_\beta$ para qualquer $\beta \neq \alpha$. Portanto, a cardinalidade do conjunto $A = \{x_\alpha : \alpha < \mu\}$ é exatamente μ. Por outro lado, cada U_α contém menos que μ pontos de A. Visto que $\mathcal{V}$ cobre X segue que o conjunto não-enumerável A não tem pontos de acumulação completo em X, uma contradição. □

Definição 3.2.4. Sejam κ, λ, μ cardinais. Então, $\Phi(\mu, \kappa, \lambda)$ denota a seguinte afirmação: $\mu < \kappa < \lambda = cf(\lambda)$ e existe $\{S_\xi : \xi < \lambda\} \subseteq [\kappa]^\mu$ tal que $|\{\xi : |S_\xi \cap A| = \mu\}| < \lambda$ sempre que $A \in [\kappa]^{<\kappa}$.

A seguir mostramos que a propriedade Φ produz o resultado de interpolação prometido para κ-compacidade.

Teorema 3.2.5. *Assuma que $\Phi(\mu, \kappa, \lambda)$ vale e o espaço X é μ-compacto e λ-compacto. Então X é κ-compacto.*

Demonstração. Seja $Y \subseteq X$ tal que $|Y| = \kappa$. Usando $\Phi(\mu, \kappa, \lambda)$, fixe uma família $\{S_\xi : \xi < \lambda\} \subseteq [Y]^\mu$ tal que $|\{\xi : |S_\xi \cap A| = \mu\}| < \lambda$ sempre que $A \in [Y]^{<\kappa}$. Visto que X é μ-compacto

podemos tomar, para cada $\xi < \lambda$, um ponto de acumulação completo p_ξ de S_ξ. Agora, atentamos para os dois casos possíveis. Se $|\{p_\xi : \xi < \lambda\}| < \lambda$ então a regularidade de λ implica a existência de $p \in X$ tal que $|\{\xi < \lambda : p_\xi = p\}| = \lambda$. Se, por outro lado, $|\{p_\xi : \xi < \lambda\}| = \lambda$ então podemos usar a λ-compacidade X para tomar um ponto de acumulação completo p deste conjunto. Em ambos os casos o ponto $p \in X$ tem a propriedade que para toda vizinhança U de p temos $|\{\xi : |S_\xi \cap U| = \mu\}| = \lambda$.

Visto que $S_\xi \cap U \subseteq Y \cap U$, usando $\Phi(\mu, \kappa, \lambda)$, temos que $|Y \cap U| = \kappa$. Assim, p é um ponto de acumulação completo de Y. Portanto, X é κ-compacto. □

O próximo resultado implica: se $\Phi(\mu, \kappa, \lambda)$ vale então κ é singular.

Teorema 3.2.6. *Se $\Phi(\mu, \kappa, \lambda)$ vale então $cf(\mu) = cf(\kappa)$.*

Demonstração. Seja $\{S_\xi : \xi < \lambda\} \subseteq [\kappa]^\mu$ testemunha de $\Phi(\mu, \kappa, \lambda)$ e fixe uma sequência estritamente crescente de ordinais $\{\eta_\alpha < \kappa : \alpha < cf(\kappa)\}$ cofinal em κ. Pela regularidade de $\lambda > \kappa$ existe um ordinal $\xi < \lambda$ tal que $|S_\xi \cap \eta_\alpha| < \mu$ para cada $\alpha < cf(\kappa)$[6]. Mas, este S_ξ deve ser cofinal em κ pois, caso contrário, $|S_\xi \cap \eta_\alpha| = \mu$ para algum $\alpha < cf(\kappa)$. Além disso, $|S_\xi| = \mu = \sup\{|S_\xi \cap \eta_\alpha| : \alpha < cf(\kappa)\}$[7]. Portanto, $cf(\mu) \leq cf(\kappa) \leq \mu$.

Agora, suponha, por absurdo, que $cf(\mu) < cf(\kappa)$ e tome $\mu_\alpha = |S_\xi \cap \eta_\alpha|$ para cada $\alpha < cf(\kappa)$. Seja $\{y_\gamma\}_{\gamma < cf(\mu)}$ cofinal em μ. Para cada $\gamma < cf(\mu)$, tome $\alpha_\gamma = \min\{\beta < cf(\kappa) : \mu_\beta \geq y_\gamma\}$. Então, $\{\mu_{\alpha_\gamma}\}_{\gamma < cf(\mu)}$ é cofinal em μ. Logo, $\sup\{\mu_{\alpha_\gamma} : \gamma < cf(\mu)\} = \mu$. Por outro lado, como $|\{\alpha_\gamma : \gamma < cf(\mu)\}| \leq cf(\mu) < cf(\kappa)$, existe $\delta < cf(\kappa)$ tal que $\delta > \alpha_\gamma$ para todo $\gamma < cf(\mu)$. Então, $\mu = \sup\{\mu_{\alpha_\gamma} : \gamma < cf(\mu)\} \leq \mu_\delta < \mu$, um absurdo. □

A teoria pcf é uma teoria inventada por Saharon Shelah (1978) acerca de produtos reduzidos[8] de conjuntos "pequenos" de cardinais regulares. A aplicação mais conhecida dessa teoria

[6]Suponha, por absurdo, que para cada $\xi < \lambda$ existe $\alpha < cf(\kappa)$ tal que $|S_\xi \cap \eta_\alpha| = \mu$. Logo, $\bigcup_{\alpha < cf(\kappa)}\{\xi : |S_\xi \cap \eta_\alpha| = \mu\} = \lambda$. Por outro lado, da regularidade segue que existe $\beta < \lambda$ tal que $|\{\xi : |S_\xi \cap \eta_\alpha| = \mu\}| < \beta$ para todo $\alpha < cf(\kappa)$. Assim, $\lambda = |\bigcup_{\alpha < cf(\kappa)}\{\xi : |S_\xi \cap \eta_\alpha| = \mu\}| \leq cf(\kappa) \cdot \beta < \lambda$, um absurdo.

[7]Visto que S_ξ é bem ordenado, existe θ ordinal e um isomorfismo $\gamma \in \theta \mapsto s_\gamma \in S_\xi$. Seja $\tau \in \mu$. Então, $s_\tau < \kappa$. Como $\{\eta_\alpha\}_{\alpha < cf(\kappa)}$ é cofinal em κ, existe $\beta < cf(\kappa)$ tal que $s_\tau \leq \eta_\beta$. Portanto, $\tau \leq |S_\xi \cap \eta_\beta|$.

[8]Veja página 116.

é o resultado: se $\aleph_\omega$ é cardinal limite forte, então $2^{\aleph_\omega} < \aleph_{\omega_4}$. No entanto, existem aplicações a combinatória, grupos abelianos, cálculo de partições e topologia geral.

Para os nossos propósitos, o próximo teorema, fruto da teoria pcf, terá um papel fundamental.

Definição 3.2.7. Sejam A é um conjunto infinito e $\mathcal{F}$ é um filtro sobre A. Dadas duas funções $f, g : A \longrightarrow \alpha$, com $\alpha \in Ord$, definimos

$$f <_{\mathcal{F}} g \text{ se, e somente se, } \{a \in A : f(a) < g(a)\} \in \mathcal{F}.$$

Definição 3.2.8. Sejam A um conjunto infinito, F um filtro sobre A e $\{\gamma_a : a \in A\}$ um conjunto indexado de ordinais limites. Uma escala em $\prod_{a\in A} \gamma_a$ é uma sequência $\langle f_\alpha : \alpha < \lambda\rangle$ de funções em $\prod_{a\in A} \gamma_a$ que é crescente e cofinal em $\prod_{a\in A} \gamma_a$ na ordem parcial $<_F$.

Teorema 3.2.9 (Shelah). *Existe uma sequência estritamente crescente de comprimento $cf(\kappa)$ de cardinais regulares $\kappa_\alpha < \kappa$, cofinal em κ e tal que no produto*

$$\mathbb{P} = \prod_{\alpha<cf(\kappa)} \kappa_\alpha$$

existe uma $<^*$-escala $\{f_\alpha : \alpha < \kappa^+\}$ de comprimento κ^+, onde, para $f, g \in \mathbb{P}$, $f <^* g$ se, e somente se, existe $\alpha < cf(\kappa)$ tal que $f(\beta) < g(\beta)$ sempre que $\alpha \leq \beta < cf(\kappa)$.

Demonstração. 1.3 da página 46 de [29]. □

De acordo com o teorema 3.2.6, dado um cardinal singular κ, $cf(\kappa)$ é o menor cardinal μ tal que $\Phi(\mu, \kappa, \lambda)$ pode valer. Nosso principal resultado diz que isto acontece se escolhermos $\lambda = \kappa^+$.

Teorema 3.2.10. *Para todo cardinal singular κ temos $\Phi(cf(\kappa), \kappa, \kappa^+)$.*

Demonstração. Pelo teorema 3.2.9, existe uma sequência estritamente crescente de compri-

mento $cf(\kappa)$ de cardinais regulares $\kappa_\alpha < \kappa$ cofinal em κ e tal que no produto

$$\mathbb{P} = \prod_{\alpha < cf(\kappa)} \kappa_\alpha$$

existe uma escala $\{f_\alpha : \alpha < \kappa^+\}$ de comprimento κ^+.

Agora, para mostrar que isto implica $\Phi(cf(\kappa), \kappa, \kappa^+)$, tomemos o conjunto $H = \bigcup\{\{\alpha\} \times \kappa_\alpha : \alpha < cf(\kappa)\}$. Note que $|H| = \kappa$ e toda função $f \in \mathbb{P}$ é um subconjunto de H de cardinalidade $cf(\kappa)$.

Afirmamos que a escala $\{f_\xi : \xi < \kappa^+\} \subseteq [H]^{cf(\kappa)}$ testemunha $\Phi(cf(\kappa), \kappa, \kappa^+)$. De fato, seja $A \subseteq H$ com $|A| < \kappa$. Podemos escolher $\alpha < cf(\kappa)$ de tal modo que que $|A| < \kappa_\alpha$. Visto que cada κ_β é regular, existe uma função $g \in \mathbb{P}$ tal que $A \cap (\{\beta\} \times \kappa_\beta) \subseteq \{\beta\} \times g(\beta)$ sempre que $\alpha \leq \beta < cf(\kappa)$. Visto que $\{f_\xi : \xi < \kappa^+\}$ é cofinal em $\mathbb{P}$, existe $\xi < \kappa^+$ com $g <^* f_\xi$. Seja $\xi \leq \eta < \kappa^+$. Como $\{f_\xi : \xi < \kappa^+\}$ é crescente, $g <^* f_\eta$. Logo, existe $\delta < cf(\kappa)$ tal que $g(\alpha) < f_\eta(\alpha)$ sempre que $\delta \leq \alpha < cf(\kappa)$. Assim, se $(\alpha, f_\eta(\alpha)) \in A$ então $f_\eta(\alpha) < g(\alpha)$ e, portanto, $\alpha < \delta$. Portanto, $|A \cap f_\eta| < cf(\kappa)$ sempre que $\xi \leq \eta < \kappa^+$. □

Teorema 3.2.11. *Se $\Phi(cf(\kappa), \kappa, \lambda)$ vale para algum cardinal singular κ então também vale $\Phi(\mu, \kappa, \lambda)$ sempre que $cf(\kappa) < \mu < \kappa$ com $cf(\mu) = cf(\kappa)$.*

Demonstração. Fixe $\{\kappa_\alpha : \alpha < cf(\kappa)\}$ uma sequência estritamente crescente e cofinal em κ. Também fixamos uma partição $\{H_\alpha : \alpha < cf(\kappa)\}$ de κ com $|H_\alpha| = \kappa_\alpha$ for each $\alpha < cf(\kappa)$.

Escolha uma família $\{S_\xi : \xi < \lambda\} \subseteq [\kappa]^{cf(\kappa)}$ que testemunha $\Phi(cf(\kappa), \kappa, \lambda)$. Visto que λ é regular, podemos assumir sem qualquer perda de generalidade que $|H_\alpha \cap S_\xi| < cf(\kappa)$ vale para todo $\alpha < cf(\kappa)$ e todo $\xi < \lambda$.[9] Note que isto implica $|\{\alpha : H_\alpha \cap S_\xi \neq \emptyset\}| = cf(\kappa)$ para cada $\xi < \lambda$.

Agora, tome um cardinal μ com $cf(\mu) = cf(\kappa) < \mu < \kappa$ e fixe $\{\mu_\alpha : \alpha < cf(\kappa)\}$ uma sequência estritamente crescente e cofinal em μ. Para mostrar que $\Phi(\mu, \kappa, \lambda)$ vale, podemos

[9] Para cada $\alpha < cf(\kappa)$ seja $R_\alpha = \{\xi < \lambda : |H_\alpha \cap S_\xi| = cf(\kappa)\}$. Por $\Phi(cf(\kappa), \kappa, \lambda)$ temos que cada $|R_\alpha| < \lambda$. Da regularidade de λ segue que $|\bigcup_{\alpha < cf(\kappa)} R_\alpha| < \lambda$. Seja $R = \lambda \setminus \bigcup_{\alpha < cf(\kappa)} R_\alpha$. Então, $|R| = \lambda$ e $\forall \xi \in R$ $\forall \alpha < cf(\kappa)$ $|H_\alpha \cap S_\xi| < cf(\kappa)$.

usar o conjunto $S = \bigcup\{H_\alpha \times \mu_\alpha : \alpha < cf(\kappa)\}$, visto que claramente $|S| = \kappa$.

Para cada $\xi < \lambda$ defina $T_\xi \subseteq S$ como segue:

$$T_\xi = \bigcup\{(S_\xi \cap H_\alpha) \times \mu_\alpha : \alpha < cf(\kappa)\}.$$

Então, $|T_\xi| = \mu$ pois, $|\{\alpha : H_\alpha \cap S_\xi \neq \emptyset\}| = cf(\kappa)$. Afirmamos que $\{T_\xi : \xi < \lambda\}$ testemunha $\Phi(\mu, \kappa, \lambda)$.

De fato, seja $A \subseteq S$ com $|A| < \kappa$. Para cada $\alpha < cf(\kappa)$ considere

$$B_\alpha = \{x \in H_\alpha : \exists y \in \mu_\alpha \text{ tq } (x, y) \in A \cap (H_\alpha \times \mu_\alpha)\}$$

e tome $B = \bigcup\{B_\alpha : \beta < cf(\kappa)\}$. Claramente, $B \subseteq \kappa$ e $|B| \leq |A| < \kappa$. Logo, $|\{\xi : |S_\xi \cap B| = cf(\kappa)\}| < \lambda$.

Agora, considere qualquer ordinal $\xi < \lambda$ com $|S_\xi \cap B| < cf(\kappa)$. Se $\langle \gamma, \delta \rangle \in (T_\xi \cap A) \cap (H_\alpha \times \mu_\alpha)$ para algum $\alpha < cf(\kappa)$ então $\gamma \in S_\xi \cap B_\alpha$ e, portanto, $H_\alpha \cap S_\xi \cap B \neq \emptyset$. Isto implica que

$$W = \{\alpha : (T_\xi \cap A) \cap (H_\alpha \times \mu_\alpha) \neq \emptyset\}$$

tem cardinalidade $\leq |S_\xi \cap B| < cf(\kappa)$. Mas, para cada $\alpha \in W$ temos que

$$|T_\xi \cap (H_\alpha \times \mu_\alpha)| \leq cf(\kappa) \cdot \mu_\alpha < \mu$$

e, portanto,

$$T_\xi \cap A = \bigcup\{(T_\xi \cap A) \cap (H_\alpha \times \mu_\alpha) : \alpha \in W\}$$

implica $|T_\xi \cap A| < \mu$. Mas, isto mostra que $\{T_\xi : \xi < \lambda\}$ testemunha $\Phi(\mu, \kappa, \lambda)$. □

Teorema 3.2.12. *Todo espaço linearmente Lindelöf e $\aleph_\omega$-compacto é incontavelmente compacto e portanto, em particular, Lindelöf.*

Demonstração. Seja X um espaço linearmente Lindelöf e $\aleph_\omega$-compacto. Como X é linearmente Lindelöf, X é κ-compacto para todo cardinal κ tal que $cf(\kappa) > \omega$. Resta mostrar que X é

κ-compacto sempre que $\kappa > \aleph_\omega$ é um cardinal singular com $cf(\kappa) = \omega$.

Pelos teoremas 3.2.10 e 3.2.11, $\Phi(\aleph_\omega, \kappa, \kappa^+)$ vale. Como X é $\aleph_\omega$-compacto e κ^+-compacto, temos que, pelo teorema 3.2.5, X é κ-compacto. □

Arhangel'skiĭ e Buzyakova provaram em [8] que a cardinalidade de um espaço de Tychonoff, de caráter enumerável e linearmente Lindelöf é $\leq 2^{\aleph_0}$. Logo, pelo teorema 3.2.12, se assumirmos $\aleph_\omega > 2^{\aleph_0}$, então todo espaço linearmente Lindelöf, de Tychonoff e de caráter enumerável é Lindelöf.

3.3 Dois exemplos localmente compactos

Em [6] e [8] Arhangel'skiĭ e Buzyakova perguntaram se todo espaço linearmente Lindelöf e localmente compacto é Lindelöf.

Nesta seção são apresentados dois exemplos de espaços localmente compactos e linearmente Lindelöf que não são Lindelöf. Ambos foram construídos por K. Kunen — em [23] e [24] — e são espaços do tipo $X \setminus \{p\}$. No primeiro, X é o limite de uma sequência inversa dos espaços $\beta\beth_n$ e p é um fio de $P_{\beth_n}$-pontos fracos em $\beta\beth_n$. Neste caso, X tem peso $\beth_\omega$. No segundo exemplo, X é o limite de uma sequência inversa de espaços de peso $< \aleph_\omega$ e p é um fio de $P_{\aleph_n}$-pontos fracos. O peso de X é $\aleph_\omega$. O segundo exemplo é obtido do primeiro através de técnicas de submodelos elementares.

Definição 3.3.1. Sejam X um espaço topológico e κ um cardinal. Dizemos que um ponto $x \in X$ é um

- P_κ*-ponto fraco* se, e somente se, $x \notin \overline{A}$ para todo $A \subseteq X \setminus \{x\}$ tal que $|A| < \kappa$;
- P_κ*-ponto* se, e somente se, para toda família $\mathcal{F}$ de vizinhanças de x, com $|\mathcal{F}| < \kappa$, $\bigcap \mathcal{F}$ é uma vizinhança de x.

Os termos "P-ponto" e "P-ponto fraco" designarão "$P_{\aleph_1}$-ponto" e "$P_{\aleph_1}$-ponto fraco", respectivamente.

Definição 3.3.2. Seja κ um cardinal infinito. Dizemos que $x \in \beta\kappa$ é *regular* se existe $\mathcal{A} \in [x]^{\kappa}$ tal que $\bigcap \mathcal{B} = \emptyset$ para todo $\mathcal{B} \in [\mathcal{A}]^{\omega}$.

Definição 3.3.3. Um ultrafiltro x sobre κ é *bom* se para toda função $H : [\kappa]^{<\omega} \to x$, existe uma função $K : \kappa \to x$ tal que $K(\alpha_1) \cap \ldots \cap K(\alpha_n) \subseteq H(s)$ para cada $s = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \in [\kappa]^{<\omega}$.

Lema 3.3.4. *Seja κ um cardinal infinito. Então,*

(a) *existe um ultrafiltro x sobre κ que é bomultrafiltro!bom e enumeravelmente incompleto;*

(b) *se $x \in \beta\kappa$ é κ^+-bom, então x é um P_κ-ponto fraco em X.*

(c) *se $U \in \beta\kappa$ é κ^+-bom e enumeravelmente incompleto então U é regular.*

Demonstração. Os itens acima são exatamente os resultados A.1.3, A.2.3 e A.2.7. □

Lema 3.3.5. *Sejam $\kappa \geq 2^{\lambda}$, y um ultrafiltro sobre λ e x um ultrafiltro regular sobre κ. Então, existe uma função sobrejetora $f : \kappa \to \lambda$ tal que $\beta f(x) = y$.*

Demonstração. A.2.8. □

O primeiro exemplo

Lema 3.3.6. *Sejam $S = \{X_n, \pi^n_m\}$ uma sequência inversa e $p = \langle p_n : n < \omega \rangle \in X_\omega$ satisfazendo:*

(A) *Cada p_n é um $P_{\beth_n}$-ponto fraco em X_n;*

(B) *Cada $\chi(p_n, X_n) \leq \beth_{n+1}$;*

(C) *Cada $(\pi^n_0)^{-1}\{p_0\}$ é raro em X_n.*

Então, $\chi(p, X) = \beth_\omega$ e, para todo cardinal regular $\kappa > \omega$, nenhuma κ-sequência de pontos distintos de p converge para p.

Demonstração. Pelo lema 1.2.73, para qualquer $x = \langle x_n \rangle_{n\in\omega} \in X_\omega$,

$$\mathcal{B}(x) = \{(\pi_n^\omega)^{-1}[U] : n < \omega \text{ e } U \in \mathcal{B}(x_n)\}$$

é uma base para x. Assim,

$$\chi(p, X_\omega) \leq \sup_n \chi(p_n, X_n) \leq \beth_\omega.$$

AFIRMAÇÃO 1. $(\pi_0^\omega)^{-1}\{p_0\}$ *é raro em* X_ω.

Seja W um aberto de X_ω. Visto que $\bigcup_{x\in X_\omega} \mathcal{B}(x)$ é uma base de X_ω podemos supor que $W = (\pi_n^\omega)^{-1}[U]$ para algum $n \in \omega$ e algum aberto U de X_n. De (C) segue que existe $x_n \in U \setminus (\pi_0^n)^{-1}\{p_0\}$. Seja $a \in (\pi_n^\omega)^{-1}[U] = \{y \in X : y_n \in U\}$ tal que $a_n = x_n$. Note que $a \notin (\pi_0^\omega)^{-1}\{p_0\}$, pois, caso contrário, teríamos $a_n = x_n \in (\pi_0^n)^{-1}\{p_0\}$.

Note que $(\pi_n^\omega)^{-1}\{p_n\} \subseteq (\pi_0^\omega)^{-1}\{p_0\}$ e, por conseguinte, $(\pi_n^\omega)^{-1}\{p_n\}$ também é raro em X_ω.

Suponha, por absurdo, que exista uma κ-sequência $\overrightarrow{q} = \langle q_\alpha : \alpha < \kappa \rangle \to p$, onde $\kappa > \omega$ é regular e cada $q_\alpha \neq p$.

AFIRMAÇÃO 2. $\kappa \leq \chi(p, X)$.

Suponha, por absurdo, $\kappa > \chi(p, X)$. Seja $\mathcal{B}(p)$ uma base para p em X_ω tal que $|\mathcal{B}(p)| = \chi(p, X)$. Para cada $U \in \mathcal{B}(p)$ escolha $\alpha_U < \kappa$ tal que $q_\beta \in U$ para todo $\beta > \alpha_U$. Logo, $\sup\{\alpha_U : U \in \mathcal{B}(p)\} = \kappa$[10]. Assim, $cf(\kappa) \leq \chi(p, X) < \kappa$, contradizendo a hipótese de que κ é regular.

Assim, $\kappa \leq \beth_\omega$. Visto $\beth_\omega$ não é regular, temos que $\kappa < \beth_\omega$. Logo, existe m tal que $\kappa < \beth_m$. Agora, $q_\alpha \neq p$ implica que $\pi_n^\omega(q_\alpha) \neq p_n = \pi_n^\omega(p)$ para algum n. Podemos, então, fixar $n \geq m$ e $S \subseteq \kappa$ com $|S| = \kappa$ e $\pi_n^\omega(q_\alpha) \neq p_n$ para todo $\alpha \in S$. Mas, então, $p_n \in \overline{\{\pi_n^\omega(q_\alpha) : \alpha \in S\}}$, pois S ém cofinal em κ, contradizendo (A).

[10]Seja $\lambda < \kappa$. Visto que X_ω é de Hausdorff, existe $U \in \mathcal{B}(p)$ tal que $q_\lambda \notin U$. Assim, $\alpha_U > q_\lambda$. Portanto, $\{\alpha_U : U \in \mathcal{B}(p)\}$ é cofinal em κ e, por conseguinte, $\sup\{\alpha_U : U \in \mathcal{B}(p)\} = \kappa$.

Para provar que $\chi(p, X) = \beth_\omega$ é suficiente fixar $m < \omega$ e provar que $\chi(p, X) \geq \beth_m$. Suponha, por absurdo, que exista uma base para p tal que $|\mathcal{B}| < \beth_m$. Da *Afirmação 1* segue que $(\pi^\omega_m)^{-1}\{p_m\}$ é raro denso em X_ω. Logo, para cada $U \in \mathcal{B}$ podemos escolher $y_U \in U \setminus (\pi^\omega_m)^{-1}\{p_m\}$. Então, $p \in \overline{\{y_U : U \in \mathcal{B}\}}$, donde, $p_m = \pi^\omega_m(p) \in \overline{\{\pi^\omega_m(y_U) : U \in \mathcal{B}\}}$, contradizendo (A). □

Teorema 3.3.7. *Existem um espaço X compacto de Hausdorff e um ponto $p \in X$ tais que:*

(1) $\chi(p, X) = w(X) = \beth_\omega$;

(2) *Para todo cardinal regular $\kappa > \omega$, nenhuma κ-sequência de pontos distintos de p converge para p.*

Demonstração. Basta mostrarmos que existe uma sequência inversa $\{X_n, \pi^n_m\}$ que satisfaz $(A), (B)$ e (C) do lema 3.3.6. Para cada $n < \omega$, tome $X_n = \beta\beth_n$ e escolha — pelo teorema 3.3.4 — um ultrafiltro $p_n \in \beta\beth_n$ bom e σ-incompleto. Dos lemas 3.3.4 e 3.3.5 segue que existe, para cada $n \in \omega$, uma função $\Pi^{n+1}_n : \beth_{n+1} \longrightarrow \beth_n$ sobrejetora tal que $p_n = \beta\Pi^{n+1}_n(p_{n+1})$. Para cada $n \in \omega$, tome $\pi^n_n = id_{X_n}$ e, para quaisquer $m, n \in \omega$ tais que $m < n$, seja

$$\pi^n_m = \Pi^{m+1}_m \circ \Pi^{m+2}_{m+1} \circ \ldots \circ \Pi^n_{n-1}.$$

Então (A) segue do lema 3.3.4 e (B) é claro, visto que, pelo teorema 1.2.49, existe uma base para o espaço X_n de tamanho $2^{\beth_n} = \beth_{n+1}$. Finalmente, (C) vale porque $(\pi^n_0)^{-1}\{p_0\} \subseteq (\beth_n)^*$[11], que é raro em $\beta\beth_n$. □

Exemplo 3.3.8. Dados um espaço X e um ponto $p \in X$ como no teorema 3.3.7, $X \setminus \{p\}$ é localmente compacto, de Hausdorff e linearmente Lindelöf mas, não é Lindelöf.

Demonstração. Mostremos, primeiramente, que $X \setminus \{p\}$ não é Lindelöf. De fato, suponhamos, por absurdo, que $X \setminus \{p\}$ seja Lindelöf. Como X é compacto de Hausdorff segue que X é regular. Logo, para cada vizinhança aberta U de p, podemos escolher abertos disjuntos

[11] Se $x \in X_n$ é principal então $\pi^n_0(x) = \{B \subseteq \beth_0 : (\pi^n_0)^{-1}[B] \in x\}$ é principal, pois $(\pi^n_0)^{-1}[\bigcap \pi^n_0(x)] = \bigcap\{(\pi^n_0)^{-1}[B] : B \in \pi^n_0(x)\} \in x$.

A_U e B_U tais que $p \in A_U$ e $X \setminus U \subseteq B_U$. É fácil ver que $\mathcal{C} = \{B_U : p \in U \text{ e } U \in \tau_X\}$ cobre $X \setminus \{p\}$. Logo, por hipótese, existe $\{B_{U_n} : n < \omega\} \subseteq \mathcal{C}$ cobrindo $X \setminus \{p\}$. Seja $\mathcal{B}(p) = \{\bigcap_{i=0}^{n} A_{U_i} : n < \omega\}$. Afirmamos que $\mathcal{B}(p)$ é uma base para p. De fato, seja U uma vizinhança aberta de p. Visto que X é compacto, existem naturais $n_1 < \ldots < n_k$ tais que $X \setminus U \subseteq B_{U_{n_1}} \cup \ldots \cup B_{U_{n_k}}$, o que implica $\bigcap_{i=0}^{n_k} A_{U_i} \subseteq U$. Assim, $\chi(p, X) \leq \omega$, contradizendo (1) do teorema 3.3.7.

Agora, vamos mostrar que $X \setminus \{p\}$ é linearmente Lindelöf. De fato, suponhamos, por absurdo, que $X \setminus \{p\}$ não seja linearmente Lindelöf. Então, existe $A = \{x_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq X \setminus \{p\}$ de cardinalidade regular κ não-enumerável sem ponto de acumulação completo. Como X é compacto de Hausdorff segue que p é o único ponto de acumulação completo de A. Por (2), existe U uma vizinhança aberta de p tal que para cada $\alpha < \kappa$ existe $\beta > \alpha$ tal que $x_\beta \notin U$. Podemos, assim, construir, indutivamente, uma sequência $(\lambda_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ como segue:

(a) $\lambda_0 = \min\{\beta < \kappa : x_\beta \notin U\}$;

(b) $\lambda_\alpha = \min\{\gamma > \sup_{\beta<\alpha} \lambda_\beta : x_\gamma \notin U\}$.

Da compacidade de X segue que $\{x_{\lambda_\alpha}\}_{\alpha<\kappa} \subseteq A$ tem um ponto de acumulação completo diferente de p, que, claramente, também é um ponto de acumulação completo de A. Contradição.

Finalmente, mostremos que $X \setminus \{p\}$ é localmente compacto[12]. Seja $x \in X \setminus \{p\}$. Como X é de Hausdorff, existem abertos disjuntos U e V tais que $x \in U$ e $p \in V$. Assim,

$$\overline{U}^{X\setminus\{p\}} = \overline{U} \cap (X \setminus \{p\}) = \overline{U}$$

é compacto em X, e, portanto, em $X \setminus \{p\}$. Portanto, $X \setminus \{p\}$ é localmente compacto. □

O segundo exemplo

Exatamente como no lema 3.3.6, podemos provar:

[12]Um espaço X é *localmente compacto* se para cada $x \in X$ existe uma vizinhança U de x tal que $\overline{U}$ é compacto.

Lema 3.3.9. *Sejam $\{X_n, \pi^n_m\}$ uma sequência inversa e $p = \langle p_n : n < \omega \rangle \in X = X_\omega$ satisfazendo para cada $n \in \omega$:*

(A) p_n é um $P_{\aleph_n}$-ponto fraco em X_n;

(B) $w(X_n) < \aleph_\omega$;

(C) $(\pi^n_0)^{-1}\{p_0\}$ é raro em X_n.

Então, $\chi(p, X_\omega) = w(X_\omega) = \aleph_\omega$ e, para todo cardinal regular $\kappa > \omega$, nenhuma κ-sequência de pontos distintos de p converge para p.

Lema 3.3.10. *Seja x um ultrafiltro regular sobre κ. Assuma que $y \in F \subseteq Y$, onde Y é compacto de Hausdorff, $w(Y) \leq \kappa$ e $\mathrm{int}(F) = \emptyset$. Então, existe uma função $g : \kappa \to Y$ tal que:*

(a) βg é sobrejetora;

(b) $\beta g(x) = y$;

(c) $g(\xi) \notin F$ para todo $\xi \in \kappa$;

(d) $(\beta g)^{-1}[F]$ é raro em $\beta\kappa$.

Demonstração. Fixe $A \subseteq \kappa$ com $A \notin x$ e $|A| = \kappa$. Suponha $\{x_\alpha : \alpha < \kappa\}$ uma enumeração de A. Seja $\{E_\alpha : \alpha < \kappa\}$ como na definição 3.3.2. Para cada $\alpha < \kappa$, tome $S_\alpha = E_\alpha \cap (\kappa \setminus A)$. Então, $\{S_\alpha : \alpha < \kappa\}$ satisfaz a definição 3.3.2 e $S_\alpha \cap A = \emptyset$ para todo $\alpha < \kappa$. Seja $\{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$ uma base para y em Y. Como $\mathrm{int}(F) = \emptyset$ e $w(Y) \leq \kappa$, podemos tomar $D \subseteq Y \setminus F$ denso em Y tal que $|D| \leq \kappa$.

Escolha $g : \kappa \to Y$ de forma que

- $g[A] = D$;
- $g(\xi) \in \bigcap\{U_\alpha : \xi \in S_\alpha\} \setminus F$ para cada $\xi \in \bigcup_{\alpha<\kappa} S_\alpha$;
- $g(\xi) \in Y \setminus F$ para cada $\xi \in \kappa \setminus (A \cup \bigcup_{\alpha<\kappa} S_\alpha)$.

Como $\beta\kappa$ é compacto, βg é contínua e $D \subseteq \beta g[\beta\kappa]$, temos que $\beta g[\beta\kappa] = Y$, isto é, vale (a).

Suponha, por absurdo, que $\beta g(x) \neq y$. Então, existem abertos disjuntos U_α e U tais que $\beta g(x) \in U$ e $y \in U_\alpha$. Como βg é contínua, existe $C \subseteq \kappa$ tal que $x \in V_C$, e, $\beta g[V(C)] \subseteq U$. Por definição, $C \in x$ e, por conseguinte, $C \cap S_\alpha \neq \emptyset$. Fixe $\xi \in C \cap S_\alpha$. Assim, $\Omega_\xi \in V_C$. Mas, $\beta g(\Omega_\xi) \in U_\alpha \subseteq Y \setminus U$. Portanto, vale (b).

O item (c) segue diretamente da definição de g.

De (c) segue que $(\beta g)^{-1}[F] \subseteq \kappa^*$[13] e, portanto, vale (d). □

Lema 3.3.11. *Assuma que $y_0 \in F \subseteq Y$, onde $\langle Y, \tau\rangle$ é compacto de Hausdorff, $w(Y) \leq \aleph_n$ e $\mathrm{int}(F) = \emptyset$. Então, existem um compacto de Hausdorff X, um ponto $x_0 \in X$ e uma função contínua $h : X \to Y$ tal que:*

(1) *$h[X] = Y$ e $h(x_0) = y_0$;*

(2) *$h^{-1}[F]$ é raro em X;*

(3) *$w(X) = \aleph_n$;*

(4) *Em X, x é $P_{\aleph_n}$-ponto fraco e não um P-ponto.*

Demonstração. Do lema 3.3.4 segue que existe um ultrafiltro x sobre $\kappa = \aleph_n$ que é bom e enumeravelmente incompleto e, pelo mesmo lema, temos que x é regular. Logo, pelo lema 3.3.10, existe $g : \kappa \to Y$ satisfazendo (a)−(d).

Seja λ o cardinal tal que $\lambda^+ = \kappa$. Pelo teorema 1.3.16, existe $M \prec H_\theta$ tal que $\{Y, \tau, F, g, x, y_0, \kappa, \beta\kappa, \beta g\} \cup \kappa \subseteq M$, $|M| = \kappa$ e M tem a propriedade λ-covering.

Seja $\mathcal{B} = \wp(\kappa) \cap M$. Note que $\mathcal{B}$ é uma álgebra de boole e, para todo $z \in \beta\kappa$, $z \cap M$ é um ultrafiltro em $\mathcal{B}$. Podemos, então, considerar a função

$$\begin{array}{rccl} \Gamma : & \beta\kappa & \to & st(\mathcal{B}) \\ & z & \mapsto & z \cap M \end{array},$$

[13] $\kappa^* = \beta\kappa \setminus \kappa$.

onde $st(\mathcal{B})$ é o espaço de Stone de $\mathcal{B}$ — veja a subseção 1.2.4.

Γ é sobrejetora. De fato, seja $v \in st(\mathcal{B})$. Pelos lemas 1.1.10 e 1.1.12, existe $u \in \beta\kappa$ tal que $u \subseteq v$. Como $u \cap M$ e v são ultrafiltros em $\mathcal{B}$ e $v \subseteq u \cap M$, temos que $v = u \cap M = \Gamma(u)$.

Como $w(Y) \leq \kappa$, pelo lema 1.3.8, temos que $\tau \cap M$ é uma base para Y. Assim, para todos $z_1, z_2 \in \beta\kappa$,

$$\Gamma(z_1) = \Gamma(z_2) \Rightarrow \beta g(z_1) = \beta g(z_2).$$

De fato, suponhamos que $\beta g(z_1) \neq \beta g(z_2)$. Visto que Y é um espaço de Hausdorff, existem $V_1, V_2 \in \tau \cap M$ tais que $\beta g(z_1) \in V_1$, $\beta g(z_2) \in V_2$ e $\overline{V}_1 \cap \overline{V}_2 = \emptyset$. Como, $(\beta g)^{-1}[\overline{V}_1]$ e $(\beta g)^{-1}[\overline{V}_2]$ são subconjuntos compactos disjuntos de $\beta\kappa$,

$$H_\theta \models \exists A \in \wp(\kappa)\ ((\beta g)^{-1}[\overline{V}_1] \subseteq V(A) \subseteq \beta\kappa \setminus (\beta g)^{-1}[\overline{V}_2]).$$

Pelo critério de Tarski, existe $A \in \wp(\kappa) \cap M$ tal que

$$H_\theta \models (\beta g)^{-1}[\overline{V}_1] \subseteq V(A) \subseteq \beta\kappa \setminus (\beta g)^{-1}[\overline{V}_2].$$

Note que $A \in z_1 \cap M$, porém $A \notin z_2 \cap M$. Portanto, $z_1 \cap M \neq z_2 \cap M$, uma contradição.

Portanto, está bem definida a função

$$\begin{array}{rccc} h: & st(\mathcal{B}) & \longrightarrow & Y \\ & z \cap M & \longmapsto & \beta g(z) \end{array}.$$

Seja $x_0 = \Gamma(x)$.

AFIRMAÇÃO 1. *h é sobrejetora e $h(x_0) = y_0$.*

Para ver isto, basta notar que $\beta g = h \circ \Gamma$.

$$\begin{tikzcd} \beta\kappa \arrow[rr, "\beta g"] \arrow[dr, "\Gamma"'] & & Y \\ & st(\mathcal{B}) \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

AFIRMAÇÃO 2. *$h^{-1}[F]$ é raro em $st(\mathcal{B})$.*

Para ver que $h^{-1}[F]$ é raro em $st(\mathcal{B})$, note que, pelo teorema 1.2.54, $st(\mathcal{B})$ é uma compacticação de $\mathcal{B}$ e, portanto, $st(\mathcal{B}) \setminus \mathcal{B}$ é raro em $st(\mathcal{B})$. Assim, basta mostrarmos que $h^{-1}[F] \subseteq st(\mathcal{B}) \setminus \mathcal{B}$, isto é, os elementos de $h^{-1}[F]$ são ultrafiltros não-principais em $\mathcal{B}$. Sendo assim, seja $z \cap M \in h^{-1}[F]$. Então, da definição de h segue que $\beta g(z) \in F$. Logo, $z \in (\beta g)^{-1}[F] \subseteq \beta\kappa \setminus \kappa$ e, portanto, z é um ultrafiltro não-principal sobre κ. Portanto, $z \cap M$ é não principal em $\mathcal{B}$.

AFIRMAÇÃO 3. *x_0 não é um P-ponto em $st(\mathcal{B})$.*

Como x é enumeravelmente incompleto, por $M \prec H_\theta$, temos que $\Gamma(x) = x \cap M$ é enumeravelmente incompleto. Logo, $\Gamma(x)$ não é um P-ponto em $st(\mathcal{B})$.

AFIRMAÇÃO 4. *x_0 é um P_κ-ponto fraco em $st(\mathcal{B})$.*

Fixe $Z \subseteq st(\mathcal{B}) \setminus \{x_0\}$ com $|Z| \leq \lambda$. Vamos mostrar que $x_0 \notin \overline{Z}^{st(\mathcal{B})}$.

Para cada $z \in Z$, escolha $F_z \in x_0$ tal que $F_z \notin z$. Considere o conjunto $E = \{F_z\}_{z \in Z}$. Então, $E \in [M]^{\leq\lambda}$. Visto que M é λ-covering, existe $F \in [M]^{\leq\lambda}$ tal que $E \subseteq F$ e $F \in M$. Logo, pelo critério de Tarski, existe uma sequência $\langle G_\xi : \xi < \lambda \rangle \in M$ que enumera $x \cap F$. Pelo corolário 1.1.21, $\lambda^+ = \kappa = \aleph_n$ não é Jónsson. Como também temos que $\kappa \in M$, pelo critério de Tarski, podemos fixar $\psi : [\kappa]^{<\omega} \to \lambda$ em M tal que $\psi[[W]^{<\omega}] = \kappa$ para todo $W \in [\kappa]^\kappa$. Considere a função

$$\begin{array}{rccc} H: & [\kappa]^{<\omega} & \to & x_0 \\ & s & \mapsto & G_{\psi(s)} \end{array}.$$

É fácil ver que $H \in M$. Visto que x é um bom ultrafiltro, podemos tomar $\langle K_\alpha : \alpha < \kappa \rangle \in M$ tal que cada $K_\alpha \in x$ — e, portanto, $K_\alpha \in x_0 = \Gamma(x) = x \cap M$ — e $K_{\alpha_1} \cap \ldots \cap K_{\alpha_n} \subseteq H(\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\})$ para cada n e cada $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \kappa$.

Agora (em V), afirmamos que existe $\alpha < \kappa$ tal que, para cada $z \in Z$, $K_\alpha \notin z$ — e, portanto, $x_0 \in V(K_\alpha)$, mas $V(K_\alpha) \cap Z = \emptyset$. Suponha o contrário. Então, podemos fixar $W \in [\kappa]^\kappa$ e $z \in Z$ tal que $K_\alpha \in z$ para todo $\alpha \in W$. Fixe $\xi < \lambda$ tal que $G_\xi = F_z$. Visto que $\psi([W]^{<\omega}) = \lambda$, fixe $s \in [W]^{<\omega}$ tal que $\psi(s) = \xi$. Seja $s = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$. Então $G_\xi = G_{\psi(s)} = H(s) \supset K_{\alpha_1} \cap \ldots \cap K_{\alpha_n} \in z$, uma contradição, visto que $F_z \notin z$. □

Teorema 3.3.12. *Existem um espaço X compacto de Hausdorff, e, um ponto $p \in X$ tais que:*

(1) $\chi(p, X) = w(X) = \aleph_\omega$;

(2) *Para todo cardinal regular $\kappa > \omega$, nenhuma κ-sequência de pontos distintos de p converge para p.*

Demonstração. Basta construirmos uma sequência inversa satisfazendo (A)−(C) do lema 3.3.9. A construção será feita por recursão transfinita. Sejam X_0 o conjunto de Cantor munido da topologia usual, $p_0 \in X_0$ arbitrário e $\pi_0^0 = id_{X_0}$.

Suponha, para algum $n > 0$, escolhidos X_n compacto e de Hausdorff, com $w(X_n) = \aleph_n$, $p_n \in X_n$ e uma função contínua e sobrejetora $\pi_0^n : X_n \to X_0$ tal que $p_n \in F = (\pi_0^n)^{-1}\{p_0\}$ e F é raro em X_n. Pelo lema 3.3.11, existem um espaço X_{n+1} compacto e de Hausdorff, um ponto $p_{n+1} \in X_{n+1}$ e uma função contínua $\pi_n^{n+1} : X_{n+1} \to X_n$ satisfazendo:

- $\pi_n^{n+1}[X_{n+1}] = X_n$ e $\pi_n^{n+1}(p_{n+1}) = p_n$;
- $(\pi_n^{n+1})^{-1}[F]$ é raro em X_n;
- $w(X_{n+1}) = \aleph_{n+1}$;
- Em X_{n+1}, p_{n+1} é um $P_{\aleph_{n+1}}$-ponto fraco mas não é um P-ponto.

Note que X_{n+1}, p_{n+1} e $\pi_0^{n+1} = \pi_0^n \circ \pi_n^{n+1}$ satisfazem (A)−(C) do lema 3.3.9. □

Observe que no lema 3.3.11 não assumimos que F é fechado, embora tenhamos tomado F fechado na demonstração do teorema 3.3.12. Mesmo para F denso em Y, o item (2) continua válido.

No lema 3.3.11, n pode ser 0, embora este caso não seja necessário para a demonstração do teorema 3.3.12.

Questão 13 (J.T. Moore). Existe um espaço linearmente Lindelöf, não Lindelöf de tamanho $\aleph_\omega$?

Questão 14 (J.T. Moore). Existe um espaço normal, linearmente Lindelöf e não-Lindelöf de peso $\aleph_\omega$?

3.4 Um exemplo consistente realcompacto

Arhangel'skiĭ e Buzyakova construiram em [6] um exemplo consistente — assumindo $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_\omega}$ — de um espaço hereditariamente realcompacto, linearmente Lindelöf e de Tychonoff que não é de Lindelöf.

Lembramos que dizemos que um espaço X é realcompacto se X é homeomorfo a um subespaço fechado do produto de Tychonoff $\mathbb{R}^\kappa$ para algum cardinal κ.

Todo espaço regular e Lindelöf é realcompacto. Enquanto, o limite inverso de uma sequência de espaços de Lindelöf não é necessariamente normal, limites inversos e produtos de realcompactos são realcompactos. Portanto, limites inversos e produtos arbitrários de espaços de Lindelöf T_3 são realcompactos. De fato, um espaço é realcompacto se. e somente se, ele é o limite inverso de uma família de espaços Lindelöf T_3.

Questão 15. Existe em ZFC um exemplo de um espaço realcompacto, linearmente Lindelöf que não é de Lindelöf?

Teorema 3.4.1. *Suponha que $2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_\omega}$. Então, existe um espaço de Tychonoff, hereditariamente realcompacto e linearmente Lindelöf que não possui a propriedade de Lindelöf.*

Demonstração. Sejam X o espaço de Buzyakova-Gruenhage, I o intervalo $[0,1]$ da reta real e $Z = X \times I$.

Suponha que exista um subespaço H de Z tal que a restrição $\pi_I \restriction H$ seja injetora e a projeção $\pi_X[H] = X$. Como π_X é uma função aberta e X não é um espaço de Lindelöf,

temos que H não é um espaço de Lindelöf. Note que $\pi_I \restriction H$ é um função contínua e injetora do espaço de Tychonoff H no espaço hereditariamente realcompacto I. Logo, pelo teorema 1.2.67, o espaço H é hereditariamente realcompacto.

Vamos mostrar, agora, que H é linearmente Lindelöf. Seja então A um subconjunto não-enumerável de H de cardinalidade regular. Se $|A| > \aleph_\omega$ então, visto que $w(H) = \aleph_\omega$ e pelo teorema 1.2.8, A possui um ponto de acumulação completo em H.

Resta considerar o caso em que $|A| < \aleph_\omega$. Existem duas possibilidades:

Caso 1. Se $|\pi_X[A]| < |A|$ então, visto que $|A|$ é regular, existe $x \in X$ tal que $|(\{x\} \times I) \cap A| = |A|$.

Caso 2. Suponha $|\pi_X[A]| = |A|$ e, para cada $n \in \omega$, considere o conjunto $A_n = \{x \in \pi_X[A] : |A_x| \leq \aleph_n\}$. Visto que $\omega < |\pi_X[A]| < \aleph_\omega$, $|\pi_X[A]|$ é regular e $\pi_X[A] \subseteq \bigcup A_n$, existe $n \in \omega$ tal que $|A_n| = |\pi_X[A]|$. Seja $C = \bigcup_{x \in A_n} A_x$. Considere o conjunto $B = \prod_{\aleph_\omega} X_n$, onde

$$X_n = \begin{cases} \{0,1\}, & \text{se } x \in C; \\ \{0\}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Note que B é um subconjunto compacto de X tal que tal que $|B \cap \pi_X[A]| = |\pi_X[A]| = |A|$. Então, $B \times I$ é um subespaço compacto de Z tal que $|(B \times I) \cap A| = |A|$.

De qualquer modo, existe um subespaço compacto F de Z tal que $|F \cap A| = |A|$. Visto que $A \subseteq H$, $\pi_I \restriction A$ é injetora; portanto, o conjunto $L_1 = \pi_I[F \cap A]$ é um subconjunto de I de cardinalidade regular não-enumerável. Seja C o conjunto de todos os pontos de acumulação completo de L_1 em I. Note que C é um subespaço compacto e não-enumerável[14] de I e

[14]Suponha, por absurdo, que $|C| \leq \omega$. Seja $\{c_n : n < \omega\}$ uma enumeração de C. Vamos construir, por recursão finita, uma sequência crescente $\langle U_n : n < \omega \rangle$ de abertos de I tal que

$$(*) \qquad \{c_k : k \leq n\} \subseteq U_n \text{ e } |I \setminus U_n \cap A| = |A| \quad .$$

para todo $n \in \omega$. Como $\psi(I) = \omega$ e $|A|$ é regular não-enumerável, podemos escolher uma vizinhança aberta U_0 de c_0 tal que $|I \setminus U_0 \cap A| = |A|$. Suponha que, para algum n, tenhamos escolhidos abertos $U_0 \subseteq \ldots \subseteq U_n$ satisfazendo $(*)$. Seja $B = I \setminus U_n \cap A$. Visto que $\psi(I) = \omega$ e $|B| = |A|$, temos que existe uma vizinhança V de c_{n+1} tal que $|I \setminus V \cap B| = |A|$. Tome $U_{n+1} = V \cup U_n$ e a construção está completa. Como C é compacto, existe $n_0 \in \omega$ tal que $C \subseteq U_{n_0}$. Seja $A_0 = I \setminus U_{n_0} \cap A$. Note que $|A_0| = |A|$. Então, existe um ponto de acumulação

$C \subseteq \pi_I[F]$.

Fixe $c \in C$ arbitrariamente e considere o conjunto $S = \{z \in F : \pi_I(z) = c\}$. Visto que a restrição de $\pi_I \restriction F$ é uma função perfeita[15], existe um ponto do conjunto S que é ponto de acumulação completo de $A_1 = A \cap F$. Portanto, o conjunto K de todos os pontos de acumulação completo de A_1 em F satisfaz

$$\pi_I[K] = C.$$

Logo, $\pi_I[K]$ é não-enumerável. Claramente, K é um subconjunto compacto de Z. Portanto, $K \in \mathcal{K}$. Então, da definição de H, $H \cap K \neq \emptyset$ e qualquer ponto de $H \cap K$ é um ponto de acumulação completo de A. Portanto, H é um espaço linearmente Lindelöf.

Resta construirmos um subespaço H de Z satisfazendo as hipóteses requeridas. Seja $\mathcal{K}$ a família de todos os subconjuntos compactos K de Z tais que $|\pi_I[K]| > \omega$. Como $w(Z) = \aleph_\omega$ — pois $w(X) \leq \aleph_\omega$ —, pelo teorema 1.2.23, temos que $|\mathcal{K}| \leq 2^{\aleph_\omega}$. Como $2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_\omega}$, temos que $|\mathcal{K}| \leq 2^\omega$. Portanto, podemos representar $\mathcal{K}$ na forma:

$$\mathcal{K} = \{K_\alpha : \alpha < 2^{\aleph_0}\}.$$

Note que $|\pi_I[K_\alpha]| = 2^{\aleph_0}$ para todo $\alpha < 2^{\aleph_0}$. De fato, cada $\pi_I[K_\alpha]$ é um subespaço compacto e não-enumerável do intervalo I; portanto, $|\pi_I[K]| = 2^{\aleph_0}$.

Vamos construir, por recursão transfinita, uma sequência $\langle\langle x_\alpha, y_\alpha\rangle : \alpha < 2^{\aleph_0}\rangle$ como segue. Escolha um $\langle x_0, y_0\rangle \in K_0$ qualquer e suponha que para algum $\alpha < 2^\omega$ tenhamos escolhido $\langle x_\beta, y_\beta\rangle \in K_\beta$ para todo $\beta < \alpha$. Tome $M_\alpha = \{y_\beta : \beta < \alpha\}$. Visto que $|M_\alpha| < 2^\omega$, podemos escolher $\langle x_\alpha, y_\alpha\rangle \in K_\alpha$ tal que $y_\alpha \in \pi_I[K_\alpha] \setminus M_\alpha$.

Seja $H = \{\langle x_\alpha, y_\alpha\rangle : \alpha < \mathfrak{c}\}$. Segue diretamente da construção de H que $\pi_I \restriction H$ é uma função injetora. Finalmente, note que $\pi_X[H] = X$, visto que $\{x\} \times I \in \mathcal{K}$ para todo $x \in X$. $\square$

---

completo p de A_0. Note que p é um ponto de acumulação completo de A, mas $p \notin C$, uma contradição.

[15] Uma função $f : X \to Y$ é *perfeita* se X é um espaço de Hausdorff, f é fechada e $f^{-1}\{y\}$ é um compacto de X para todo $y \in X$.

Proposição 3.4.2. *Suponha que $2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_\omega}$. Então, existe uma topologia Tychonoff τ sobre I tal que $\langle I, \tau \rangle$ é um espaço de Tychonoff, hereditariamente realcompacto, linearmente Lindelöf e não-Lindelöf.*

Demonstração. Considere os espaços H e Z da demonstração anterior. Fixe $a \in X$. Considere o conjunto $E = \{\langle a, y \rangle : y \in I \setminus \pi_I[H]\}$. Defina $H' = E \cup H$. Então, $\pi_I[H'] = I$ e a restrição $\pi_X \restriction H'$ é uma função injetora. Portanto, H' é um espaço de Tychonoff, hereditariamente realcompacto, linearmente Lindelöf e não-Lindelöf. Basta, assim, tomarmos

$$\tau = \{\pi_I[U \cap H'] : U \text{ é um aberto de } Z\}. \qquad \square$$

Note que não podemos provar a proposição 3.4.2 em ZFC, visto que ZFC+CH implica que toda topologia linearmente Lindelöf sobre I contendo a topologia usual de I é Lindelöf.

Questão 16. Na proposição 3.4.2, podemos adicionar às propriedades de $\langle I, \tau \rangle$ local compacidade (e local metrizabilidade ou, no mínimo, caráter enumerável)?

Questão 17. Todo espaço de Hausdorff, localmente compacto, ω_1-Lindelöf e de tightness enumerável é de Lindelöf (em ZFC)?

Capítulo 4

Lindelöf *versus* linearmente Lindelöf

Neste capítulo, comparamos a propriedade de Lindelöf com a de ser linearmente Lindelöf no seguinte sentido: queremos saber quais teoremas sobre espaços de Lindelöf podem ser estendidos para espaços linearmente Lindelöf.

Vamos a um primeiro exemplo. Sabemos que todo espaço regular de Lindelöf é normal. Uma pergunta natural é: todo espaço regular linearmente Lindelöf é normal? A resposta é negativa. Podemos tomar como contra-exemplo, o espaço de Miščenko (veja 2.2.1). Esse é um espaço de Tychonoff, linearmente Lindelöf e não-normal.

O próximo teorema é uma extensão para espaços linearmente Lindelöf do seguinte resultado: o produto cartesiano $X \times Y$ de um espaço de Lindelöf X por um espaço compacto Y é um espaço de Lindelöf.

Teorema 4.0.3. *Sejam X é um espaço linearmente Lindelöf e Y é um espaço compacto. Então, $X \times Y$ é um espaço linearmente Lindelöf.*

Demonstração. Seja A um subconjunto de $X \times Y$ de cardinalidade $\kappa > \omega$ regular. Basta mostrarmos que A possui um ponto de acumulação completo em $X \times Y$. Considere as projeções $\pi_X : X \times Y \to X$ e $\pi_Y : X \times Y \to Y$.

(i) Suponhamos que existe $x \in X$ tal que $\pi_X^{-1}\{x\} \cap A$ tem cardinalidade κ. Neste caso, temos que $\pi_Y[A \cap \{x\} \times Y]$ tem cardinalidade κ e, portanto, possui um ponto de acumulação

completo $y \in Y$. Portanto, $\langle x, y\rangle$ é um ponto de acumulação completo de A.

(ii) Suponhamos que existe $y \in Y$ tal que $\pi_Y^{-1}\{y\} \cap A$ tem cardinalidade κ. É similar ao caso anterior.

(iii) Suponhamos que nenhum dos casos acima ocorrem. Vamos construir, por recursão transfinita, um subconjunto $D \subseteq A$ de cardinalidade κ tal que para todos $\langle x_0, y_0\rangle, \langle x_1, y_1\rangle \in D$, $x_0 = x_1$ se, e somente se, $y_0 = y_1$.

Sejam $S = \langle\langle x_\alpha, y_\alpha\rangle : \alpha < \theta\rangle \in A^{<\kappa}$ e, para cada $\alpha < \theta$, $S_\alpha = (\pi_X^{-1}\{x_\alpha\} \cup \pi_Y^{-1}\{y_\alpha\}) \cap A$. Afirmamos que $A \neq \bigcup_{\alpha<\theta} S_\alpha$. De fato, suponhamos o contrário. Por hipótese, $|S_\alpha| < \kappa$ para cada $\alpha < \theta$. Como κ é regular e $\theta < \kappa$, temos que $|A| = |\bigcup_{\alpha<\theta} S_\alpha| < \kappa$, uma contradição.

Considere $C : \wp(A) \setminus \{\emptyset\} \to A$ uma função escolha e $\langle x_0, y_0\rangle \in A$ arbitrário. Então, está bem definida a função $G : A^{<\kappa} \to A$ dada por $G(\emptyset) = \langle x_0, y_0\rangle$ e $G(S) = C(A \setminus \bigcup_{\alpha<\theta} S_\alpha)$ para cada $S = \langle(x_\alpha, y_\alpha) : \alpha < \theta\rangle \in A^{<\kappa} \setminus \{\emptyset\}$. Pelo teorema da Recursão Transfinita, existe uma κ-sequência $\langle\langle x_\alpha, y_\alpha\rangle : \alpha < \kappa\rangle$ em A tal que, para todos $\alpha, \beta < \kappa$, com $\alpha \neq \beta$, temos que $x_\alpha \neq x_\beta$ e $y_\alpha \neq y_\beta$.

Seja $D = \{\langle x_\alpha, y_\alpha\rangle : \alpha < \kappa\}$. Daí, $\pi_X[D]$ tem cardinalidade κ e, portanto, possui um ponto de acumulação completo $x \in X$. Seja $\mathcal{U}$ o conjunto de todas as vizinhanças de x. Para cada $U \in \mathcal{U}$ tome $Y(U) = \pi_Y(\pi_X^{-1}[U] \cap D)$. Considere a família

$$\mathcal{F} = \{\overline{Y(U) \setminus F} : U \in \mathcal{U} \text{ e } F \in [Y]^{<\kappa}\}.$$

Como Y é compacto e $\mathcal{F}$ é uma família de fechados de Y que tem a *p.i.f.*, temos que $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$. Fixe $y \in \bigcap \mathcal{F}$.

Afirmamos que $\langle x, y\rangle$ é um ponto de acumulação completo de A. De fato, seja W uma vizinhança de (x, y). Podemos supor $W = U \times V$, onde U e V são vizinhanças de x e y respectivamente. Note que $|V \cap Y(U)| = \kappa$ pois, caso contrário, tomando $F = V \cap Y(U)$, teríamos $V \cap (Y(U) \setminus F) = \emptyset$, uma contradição. Visto que

$$V \cap Y(U) = \pi_Y(W) \cap \pi_Y(\pi_X^{-1}[U] \cap D) = \pi_Y(W \cap \pi_X^{-1}[U] \cap D),$$

temos que $W \cap D$ tem cardinalidade κ. □

4.1 Linearmente Lindelöf é discretamente reflexiva?

Dado um espaço e uma categoria de seus subespaços, é natural querermos saber como essa categoria de subespaços afeta as propriedades do espaço.

Dizemos que uma propriedade $\mathcal{P}$ é reflexiva nesse contexto se, para todo espaço X, for verdadeira seguinte implicação: se $\mathcal{P}$ vale nos subespaços de X da tal categoria, $\mathcal{P}$ vale para o espaço X.

Definição 4.1.1. Seja $\mathcal{P}$ uma propriedade topológica. Dizemos que $\mathcal{P}$ é uma propriedade *discretamente reflexiva* se para qualquer espaço X, X satisfaz $\mathcal{P}$ se, e somente se, para todo $D \subseteq X$ discreto, $\overline{D}$ satisfaz $\mathcal{P}$.

A compacidade foi a primeira propriedade a ser mostrada discretamente reflexiva. Esse resultado foi mostrado por V. V. Tkachuk em 1987.

A partir de então, iniciou-se um estudo sistemático a fim de saber quais propriedades eram e quais não eram discretamente reflexivas. Como era de se esperar, constatou-se que nem toda propriedade é discretamente reflexiva. Exemplos foram dados em [2]. Entre eles, alguns foram mostrados assumindo-se a hipótese do contínuo.

Contudo, ainda permanece em aberto a seguinte questão:

Questão 18. A propriedade de Lindelöf é uma propriedade discretamente reflexiva?

É natural estender a pergunta para a propriedade de ser linearmente Lindelöf. Para esta questão, Alas, Tkachuk e Wilson mostraram, em [2], que a resposta é afirmativa, conforme veremos a seguir.

Lema 4.1.2. *Seja κ um cardinal infinito. Suponha que $\langle F_\alpha : \alpha < \kappa \rangle$ seja uma sequência decrescente de subconjuntos fechados não vazios de um espaço X. Então, existe um discreto $D \subseteq F_0$ tal que $\overline{D} \cap F_\alpha \neq \emptyset$ para todo $\alpha < \kappa$.*

Demonstração. Seja $x_0 \in F_0$ arbitrário. Fixe $d \notin X$ arbitrariamente. Suponha que para algum $0 < \beta < \kappa$ tenhamos escolhido $\{x_\alpha : \alpha < \beta\} \subseteq F_0 \cup \{d\}$ de modo que para cada $\gamma < \beta$

$$(1) \qquad \overline{D}_\beta \cap F_\gamma \neq \emptyset, \text{ onde } D_\beta = \{x_\alpha : \alpha < \beta,\ x_\alpha \neq d\}.$$

Se $\overline{D}_\beta \cap F_\alpha \neq \emptyset$, tome $x_\beta = d$. Caso contrário, escolha $x_\beta \in F_\beta \setminus \overline{D}_\beta$.

Para completar a prova, basta mostrarmos que o conjunto $\{x_\alpha : \alpha < \kappa,\ x_\alpha \neq d\} \subseteq F_0$ é discreto. De fato, dado $\alpha < \kappa$ tal que $x_\alpha \neq d$, temos que $x_\alpha \in F_\alpha$ e $F_\alpha \cap \overline{D}_\alpha = \emptyset$. Portanto, $x_\alpha \notin \overline{\{x_\beta : \beta < \alpha,\ x_\beta \neq d\}}$. Por outro lado, se $E_\alpha = \{x_\beta : \alpha < \beta < \kappa,\ x_\beta \neq d\} \neq \emptyset$ tome $\xi(\alpha) = \min\{\gamma \in \kappa : x_\gamma \in E_\alpha\}$. Logo, $\overline{\{x_\beta : \alpha < \beta < \kappa,\ x_\beta \neq d\}} \subseteq F_{\xi(\alpha)}$ enquanto que $x_\alpha \notin F_{\xi(\alpha)}$. □

Teorema 4.1.3. *Se o fecho de todo subcojunto discreto de X é linearmente Lindelöf então X é linearmente Lindelöf.*

Demonstração. Sejam κ um cardinal regular não-enumerável e $\langle F_\alpha : \alpha < \kappa\rangle$ uma sequência estritamente decrescente de subconjuntos fechados e não vazios de X. Pelo lema 4.1.2, existe um discreto $D \subseteq X$ tal que $G_\alpha = \overline{D} \cap F_\alpha \neq \emptyset$ para todo $\alpha < \kappa$. Note que $\langle G_\alpha : \alpha < \kappa\rangle$ é uma sequência decrescente de fechados não vazios do espaço linearmente Lindelöf $\overline{D}$. Como consequência, temos que $\bigcap\{G_\alpha : \alpha < \kappa\} \neq \emptyset$ e, portanto, $\bigcap\{F_\alpha : \alpha < \kappa\} \neq \emptyset$. □

4.2 O teorema de Arhangel'skiĭ

Em [8], Arhangel'skiĭ e Buzyakova provaram que todo espaço linearly Lindelöf, de Tychonoff e de caráter enumerável tem cardinalidade $\leq 2^{\aleph_0}$. Alan Dow, em [12], redemonstra este resultado através do uso de técnicas de submodelos elementares.

Definição 4.2.1. Para um espaço X de Tychonoff, seja $Ch(X)$ o menor cardinal κ tal que $\beta X \setminus X$ pode ser escrito como união de no máximo κ espaços compactos.

Note que na definição acima βX pode ser substituída por qualquer outra compactificação de X.

Teorema 4.2.2. *Suponha κ um cardinal e Y um subespaço de um espaço de Tychonoff $\langle X, \tau\rangle$ tais que $Ch(Y) \leq \kappa$, $|Y| \leq \kappa$ e $\chi(y, X) \leq \kappa$ para todo $y \in Y$. Então, Y é um G_κ-conjunto em X.*

Demonstração. Podemos supor que $Y \subseteq \beta Y$. Pelo teorema de Löwenheim-Skolem, existe $M \prec H_\theta$ tal que $\{X, \tau, Y, \beta Y, \tau_{\beta Y}, \kappa\} \cup \kappa \cup Y \subseteq M$ e $|M| = \kappa$. Para provar que Y é um G_κ-conjunto em X mostraremos que $Y = \bigcap\{U \in M : Y \subseteq U \text{ e } U \in \tau\}$.

Como $Ch(Y) \leq \kappa$,

$$H_\theta \models \exists \mathcal{K} \ (\mathcal{K} \text{ é família de compactos de } \beta Y \text{ tal que } \beta Y \setminus Y = \bigcup \mathcal{K} \text{ e } |\mathcal{K}| \leq \kappa).$$

Pelo critério de Tarski, existe $\mathcal{K} \in M$ tal que

$$H_\theta \models \mathcal{K} \text{ é uma família de compactos de } \beta Y,\ \beta Y \setminus Y = \bigcup \mathcal{K} \text{ e } |\mathcal{K}| \leq \kappa.$$

Note que, pelo lema 1.3.8, $\mathcal{K} \subseteq M$.

Fixe $x \in X \setminus Y$ e seja

$$\mathcal{F}_x = \{F \subseteq X : F \text{ é fechado e } x \in F \in M\}.$$

Vamos mostrar que existe $F \in \mathcal{F}_x$ tal que $F \cap Y = \emptyset$. Suponhamos o contrário. Como $\{\overline{F \cap Y}^{\beta Y} : F \in \mathcal{F}_x\}$ tem a *p.i.f.*, podemos tomar $p \in \beta Y$ tal que $p \in \overline{F \cap Y}^{\beta Y}$ para todo $F \in \mathcal{F}$.

Note que $p \notin Y$. De fato, suponha que $p \in Y$. Como $\chi(y, X) \leq \kappa$,

$$H_\theta \models \exists \mathcal{B} \subseteq \tau \text{ base para } p \text{ tal que } |\mathcal{B}| \leq \kappa.$$

Do critério de Tarski segue que existe $\mathcal{B} \in M$ tal que

$$H_\theta \models \mathcal{B} \subseteq \tau \text{ é base para } p \text{ e } |\mathcal{B}| \leq \kappa.$$

Pelo lema 1.3.8, $\mathcal{B} \subseteq M$. Logo, existe $U \in \mathcal{B} \cap M$ tal que $p \in U$ e $x \in F = X \setminus U$. Assim, $p \notin \overline{F \cap Y}^{\beta Y}$, uma contradição. Portanto, $p \in \beta Y \setminus Y$.

Sendo assim, existe $K \in \mathcal{K}$ tal que $p \in K$. Como $|Y| \leq \kappa$,

$$H_\theta \models \exists \mathcal{U} \subseteq \tau_{\beta Y} \text{ tal que } Y \subseteq \bigcup \mathcal{U},\ |\mathcal{U}| \leq \kappa \text{ e } \forall U \in \mathcal{U}\ (K \cap \overline{U}^{\beta Y} = \emptyset).$$

Visto que todos os parâmetros acima estão em M, pelo critério de Tarski, existe $\mathcal{U} \in M$ tal que

$$H_\theta \models \mathcal{U} \subseteq \tau_{\beta Y},\ Y \subseteq \bigcup \mathcal{U},\ |\mathcal{U}| \leq \kappa \text{ e } \forall U \in \mathcal{U}\ (K \cap \overline{U}^{\beta Y} = \emptyset).$$

Do lema 1.3.8 segue que $\mathcal{U} \subseteq M$.

Temos que

$$H_\theta \models \exists f : \mathcal{U} \to \tau \text{ tal que } \forall U \in \mathcal{U}\ (U \cap Y = f[U] \cap Y).$$

Logo, como $\mathcal{U}$, τ e Y estão em M, segue do critério de Tarski, que existe $f : \mathcal{U} \to \tau$ em M tal que

$$H_\theta \models \forall U \in \mathcal{U}\ (U \cap Y = f[U] \cap Y).$$

Note que $\mathcal{V} = f[\mathcal{U}] \in M$. De fato,

$$H_\theta \models \exists \mathcal{V} \forall V (V \in \mathcal{V} \Leftrightarrow \exists U \in \mathcal{U}\ (\langle U, V \rangle \in f))).$$

Pelo critério de Tarski, existe $\mathcal{V} \in M$ tal que

$$H_\theta \models \forall V (V \in \mathcal{V} \Leftrightarrow \exists U \in \mathcal{U}\ (\langle U, V \rangle \in f))).$$

É claro que $F = X \setminus \bigcup \mathcal{V}$ é um fechado de X disjunto de Y. Logo, por hipótese, $F \notin \mathcal{F}_x$. Como $\mathcal{V} \in M$, $F \in M$. Assim, $x \notin F = X \setminus \bigcup \mathcal{V}$. Então, existe $f(U) \in \mathcal{V} \subseteq M$ tal que $x \in f(U)$. Visto que X é Tychonoff, existe $W \in \tau \cap M$ tal que $x \in W \subseteq \overline{W}^X \subseteq f(U)$. Como

$W \in M$, $\overline{W \cap Y}^X \in M$. Logo, $\overline{W}^X \in \mathcal{F}_x$. Então, $p \in \overline{\overline{W}^X \cap Y}^{\beta Y}$. Mas,

$$\overline{\overline{W}^X \cap Y}^{\beta Y} \subseteq \overline{f(U) \cap Y}^{\beta Y} = \overline{U \cap Y}^{\beta Y} \subseteq \overline{U}^{\beta Y}.$$

Logo, $K \cap \overline{U}^{\beta Y} \neq \emptyset$. Uma contradição. □

Lema 4.2.3. *Seja X um espaço ω_1-compacto*[1] *tal que $t(X) = \omega$. Seja $\mathcal{F}$ um filtro enumeravelmente completo de conjuntos fechados de X. Então, para cada $F \in \mathcal{F}$, existe $D \subseteq F$ enumerável tal que $\overline{D} \cap G \neq \emptyset$ para todo $G \in \mathcal{F}$.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que exista $F \in \mathcal{F}$ tal que para todo $D \subseteq F$ enumerável $\overline{D} \cap G = \emptyset$ para algum $G \in \mathcal{F}$. Construa , por recursão transfinita, sequências $\langle x_\alpha : \alpha \in \omega_1 \rangle$ e $\langle F_\alpha : \alpha \in \omega_1 \rangle$ satisfazendo:

(i) $F_0 = F$;

(ii) $x_\alpha \in \bigcap\{F_\beta : \beta \leq \alpha\}$ e $F_\alpha \in \mathcal{F}$ para todo $\alpha < \omega_1$;

(iii) $F_\alpha \cap \overline{\{x_\beta : \beta \in \alpha\}} = \emptyset$.

De (ii) e (iii) segue que $\{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ é uma sequência livre, isto é, para todo $\alpha < \omega_1$

$$\overline{\{x_\beta : \beta < \alpha\}} \cap \overline{\{x_\beta : \alpha \leq \beta < \omega_1\}} = \emptyset.$$

Para finalizar, vamos mostrar que a sequência $\{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ não possui pontos de acumulação completo, contradizendo a hipótese de que X é ω_1-compacto. De fato, seja $x \in \overline{\{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}}$. Como $t(X) \leq \omega$, existe $\beta < \omega_1$ tal que $x \in \overline{\{x_\alpha : \alpha < \beta\}}$. Assim, o aberto $U = X \setminus \overline{\{x_\alpha : \beta \leq \alpha < \omega_1\}}$ contém x e $U \cap \{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ é enumerável. □

Lema 4.2.4. *Se Y é um espaço linearmente Lindelöf, de Tychonoff, separável e $\chi(X) \leq \omega$, então $Ch(Y) \leq 2^{\aleph_0}$.*

[1] Cada subconjunto de X de tamanho ω_1 tem um ponto de acumulação completo.

Demonstração. Fixe $p \in \beta Y \setminus Y$ e seja $\mathcal{C}_p$ o conjunto das bases de filtros $\mathcal{F}$ de fechados de Y tais que:

(i) Cada $E \in \mathcal{F}$ é enumerável;

(ii) $p \in \overline{E}$ para cada $E \in \mathcal{F}$;

(ii) $Y \cap \bigcap\{\overline{E} : E \in \mathcal{F}\} = \emptyset$.

Note que $\mu_p = \min\{|\mathcal{F}| : \mathcal{F} \in \mathcal{C}_p\} > 0$. De fato, seja $D \subseteq Y$ enumerável tal que $\overline{D}^Y = Y$. Então $\{V \cap D : p \in V \in \tau_{\beta Y}\} \in \mathcal{C}_p$.

Afirmamos que $\mu_p \leq \omega$. De fato, suponhamos, por absurdo, que $\mu_p > \omega$. Da minimalidade de μ_p e do fato de Y ser linearmente Lindelöf segue que $cf(\mu_p) \leq \omega$. Sejam, então, $\langle \rho_n : n \in \omega \rangle$ uma sequência crescente e cofinal em μ_p, e, para cada $n \in \omega$,

$$G_n = \bigcap\{F_\alpha : \alpha < \rho_n\} \qquad \text{e} \qquad \mathcal{F}_n = \{H \cap Y \cap G_n : H \text{ é vizinhança fechada de } p\}.$$

Fixe $n \in \omega$. É claro que $\mathcal{F}_n$ é um filtro. Afirmamos que $\mathcal{F}_n$ é enumeravelmente completo. De fato, seja $\{H_i\}_{i<\omega}$ uma família de vizinhanças fechadas de p. Para cada $i < \omega$, existe $U_i \subseteq H_i$ vizinhança aberta de p. Fixe $\alpha < \rho$. Então, cada $C_i = U_i \cap E_\alpha$ é um subconjunto enumerável de Y e $p \in \overline{C_i}$. Da minimalidade de μ_p, segue que $Y \cap G_n \cap \bigcap_{i<\omega} \overline{C_i} \neq \emptyset$. Como $\overline{C_i} \subseteq H_i$, $Y \cap G_n \cap \bigcap_{i<\omega} H_i \neq \emptyset$.

Note que cada $G_n \cap Y \in \mathcal{F}_n$. Logo, pelo lema 4.2.3, existe $Z_n \subseteq G_n \cap Y$ separável tal que $Z_n \cap H \neq \emptyset$ para cada H vizinhança fechada de p. Logo, $p \in \overline{Z}_n$. Assim, $\bigcap_{n<\omega} \overline{Z}_n \subseteq \bigcap_{\alpha<\rho} F_\alpha = \emptyset$. Portanto, $\{Z_n : n \in \omega\}$ é uma base de filtro que satisfaz (i), (ii) e (iii), contradizendo a minimalidade de μ_p.

Visto que Y é separável, de Hausdorff e de caráter enumerável, $|Y| \leq 2^\omega$. Então

$$\mathcal{D} = \{\overline{D}^Y : D \subseteq Y \text{ e } |D| \leq \omega\}.$$

tem cardinalidade $\leq 2^\omega$. $\square$

Teorema 4.2.5. *Se $\langle Y, \tau\rangle$ é um espaço* de Tychonoff, *linearmente Lindelöf* e *de caráter enumerável e $|Y| \leq 2^{\aleph_0}$, então $Ch(Y) \leq 2^{\aleph_0}$.*

Demonstração. A menos de menção em contrário, todos fechos são tomados em βY.

Pelo teorema 3.5.2 de [13], existe uma compactificação T_2 $\langle cY, \tau_{cY}\rangle$ de Y tal que $w(cY) = w(Y)$. Seja, ainda, $\mathcal{B}$ uma base de cY tal que $|\mathcal{B}| = w(Y) \leq 2^{\aleph_0}$.

Pelo teorema 1.3.14, existe $M \prec H_\theta$ ω-fechado tal que $\{Y, \tau, cY, \tau_{cY}, \mathcal{B}, 2^\omega\} \cup Y \cup 2^\omega \subseteq M$ e $|M| \leq 2^{\aleph_0}$.

Vamos mostrar que $\beta Y \setminus Y$ é coberto por conjuntos compactos $K \subseteq \beta Y \setminus Y$ tais que $K \in M$. Seja $p \in \beta Y \setminus Y$. Seja

$$\mathcal{F}_p = \{A \subseteq Y \text{ zero-set}: A \in M \text{ e } p \in \overline{A}\}.$$

Suponha $\mathcal{F}_p$ enumeravelmente incompleto. Logo, existe um subconjunto $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}_p$ enumerável tal que $\bigcap \mathcal{A} = \emptyset$. Seja $K = \bigcap\{\overline{A} : A \in \mathcal{A}\}$. Note que $K \subseteq \beta Y \setminus Y$ e $p \in K$. Além disso, $K \in M$, haja vista que M é ω-fechado.

Suponha, agora, que $\mathcal{F}_p$ é enumeravelmente completo. Do lema 4.2.3 segue que existe $D \subseteq Y$ enumeravel tal que $\overline{D}^Y \cap A \neq \emptyset$ para todo $A \in \mathcal{F}_p$. Suponha, por absurdo, que $p \notin \overline{D}$. Então, existe $V_p \in \mathcal{B}$ vizinhança de p tal que $V_p \cap \overline{D} = \emptyset$. Da regularidade de cX segue que existe $U_p \in \mathcal{B}$ $p \in U_p \subseteq \overline{U_p} \subseteq V_p$. Seja $A = \overline{U_p} \cap Y$. Então, $A \in \mathcal{F}_p$ e $\overline{D}^Y \cap A = \emptyset$. Uma contradição. Logo, $p \in \overline{D}$. É claro que $D \in M$ e pelo lema 4.2.4 existe uma coleção $\mathcal{K} \in M$ de conjuntos compactos de $\overline{D} \setminus \overline{D}^Y$ tal que $\overline{D} \cap (\beta Y \setminus Y) = \overline{D} \setminus \overline{D}^Y = \bigcup \mathcal{K}$ e $|\mathcal{K}| \leq 2^\omega$. Visto que $\mathcal{K} \subseteq M$ existe algum $K \in \mathcal{K} \cap M$ com $p \in K$ como requerido. □

Teorema 4.2.6. *Se $\langle X, \tau\rangle$ é um espaço de Tychonoff, linearmente Lindelöf e de caráter enumerável, então $|X| \leq 2^{\aleph_0}$.*

Demonstração. Seja $\{M_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ uma cadeia crescente de submodelos elementares tal que $|M_\alpha| = 2^{\aleph_0}$ e $\{M_\beta : \beta < \alpha\} \cup [M_\alpha]^\omega \subseteq M_\alpha$ para todo $\alpha < \omega_1$. Assuma, ainda, que

$X, \tau \in M_0$. Seja $M = \bigcup_{\alpha<\omega_1} M_\alpha$. Para provarmos o teorema basta mostrarmos que $X \subseteq M$. Seja $Y = X \cap M$.

AFIRMAÇÃO 3. *Y é um subspaço fechado de X.*

De fato, seja $x \in \overline{Y}$. Visto que que $\chi(X) \leq \omega$, existe $(x_n)_{n\in\omega} \subseteq \omega \times Y$ convergindo para x. Como $[M]^\omega \subseteq M$, $(x_n)_{n\in\omega} \in M$. Como

$$H_\theta \models \exists y(y \in \lim x_n),$$

e $\tau, (x_n)_{n\in\omega} \in M$, então, pelo critério de Tarski, existe $y \in M$ tal que

$$H_\theta \models y \in \lim x_n.$$

Visto que X é de Hausdorff, $x = y$. Portanto, $x \in Y$.

Agora, para cada $\alpha < \omega_1$, seja

$$\mathcal{V}_\alpha = \{U \in \tau : X_\alpha = X \cap M_\alpha \subseteq U\}.$$

Note que $X_\alpha \in M_{\alpha+1}$, pois X e M_α estão em $M_{\alpha+1}$. Logo, $\mathcal{V}_\alpha \in M_{\alpha+1}$. Pelos teoremas 4.2.2 e 4.2.5 para cada $\alpha \in \omega_1$, existe $\mathcal{U}_\alpha \subseteq \mathcal{V}_\alpha$ tal que $|\mathcal{U}_\alpha| \leq 2^\omega$ e $X_\alpha = \bigcap \mathcal{U}_\alpha$. É fácil ver que $\mathcal{U}_\alpha \in M_{\alpha+1}$. Pelo lema 1.3.8, $\mathcal{U}_\alpha \subseteq M_{\alpha+1}$.

Suponha, por absurdo, que exista $x \in X \setminus \bigcup_{\alpha<\omega_1} X_\alpha$. Então, para cada $\alpha < \omega_1$, escolha $W_\alpha \in \mathcal{U}_\alpha$ tal que $x \notin W_\alpha$. Para cada β, $\{W_\alpha : \alpha < \beta\} \in M_\beta$ e $X \cap M = \bigcup_{\alpha<\omega_1} X_\alpha \subseteq \bigcup_{\alpha<\omega_1} W_\alpha$. Como $X \cap M$ é fechado e X é ω_1-Lindelöf, existe $\beta \in \omega_1$ tal que $X \cap M \subseteq \bigcup_{\alpha<\beta} W_\alpha$.

Para finalizar, basta mostrarmos que

AFIRMAÇÃO 4. *$X \subseteq \bigcup_{\alpha<\beta} W_\alpha$.*

De fato, suponha o contrário. Então,

$$H_\theta \models X \setminus \bigcup\{W_\alpha : \alpha < \omega_1\} \neq \emptyset.$$

Assim,

$$M \models X \setminus \bigcup\{W_\alpha : \alpha < \omega_1\} \neq \emptyset,$$

pois, X e $\{W_\alpha : \alpha < \beta\}$ são membros de M. Logo, $X \cap M \not\subseteq \bigcup_{\alpha<\omega_1} W_\alpha$, uma contradição. □

Note que se X é um espaço de caráter enumerável, Tychonoff e linearmente Lindelöf, e $\aleph_\omega > 2^{\aleph_0}$ então $nw(X) \leq |X| \leq 2^{\aleph_0} < \aleph_\omega$ e, portanto, pelo teorema 3.1.2, X é um espaço de Lindelöf. Arhangel'skiĭ e Buzyakova perguntaram, assim, se todo espaço linearmente Lindelöf de caráter enumerável é Lindelöf em ZFC. Vale lembrar que todos os exemplos de espaços conhecidos que são linearmente Lindelöf e não Lindelöf tem caráter $\geq \aleph_\omega$.

Em um artigo ainda não publicado , Oleg Pavlov (veja [27]) dá uma resposta negativa à pergunta construindo um exemplo a partir de $MA+\aleph_\omega < 2^{\aleph_0}$ de um espaço que possui caráter enumerável, é linearmente Lindelöf, mas não é Lindelöf.

4.3 Um resultado mais geral

Em [7], Arhangel'skiĭ e Buzyakova mostraram um resultado mais geral: a cardinalidade de um espaço X sequencial, linearmente Lindelöf e de Tychonoff não excede à $2^{\aleph_0}$ se, e somente se, o pseudocaráter de X não excede à $2^{\aleph_0}$. Todos os espaços aqui são assumidos de Tychonoff.

Proposição 4.3.1. *Seja X um espaço sequencial, ω_1-Lindelöf e tal que todo subconjunto fechado F de X com $|F| \leq \mathfrak{c}$ é um $G_\mathfrak{c}$-conjunto em X. Então $|X| \leq \mathfrak{c}$.*

Demonstração. Considere o conjunto

$$\mathcal{F} = \{F \subseteq X : F \text{ é fechado e } |F| \leq \mathfrak{c}\}.$$

Por hipótese, para cada $F \in \mathcal{F}$ podemos fixar uma família $\mathcal{U}_F$ de conjuntos abertos de X tal que $|\mathcal{U}_F| \leq \mathfrak{c}$ e $\bigcap \mathcal{U}_F = F$. Para toda família enumerável $\mathcal{V}$ de conjuntos abertos de X tal que $X \setminus \bigcup \mathcal{V} \neq \emptyset$, fixe $p_\mathcal{V} \in X \setminus \bigcup \mathcal{V}$. Agora, vamos definir, por recursão transfinita, uma w_1-sequência $\langle F_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ de elementos de $\mathcal{F}$ como segue.

Tome $F_0 = \emptyset$. Assuma que, para algum $\alpha < \omega_1$, $F_\beta \in \mathcal{F}$ esteja definida para todo $\beta < \alpha$.

Definiremos o conjunto $F_\alpha \in \mathcal{F}$. Tome

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}_\alpha &= \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{U}_{F_\beta}, \\
\mathcal{V}_\alpha &= \{\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}_\alpha : |\mathcal{V}| \leq \omega \text{ e } X \setminus \bigcup \mathcal{V} \neq \emptyset\}, \\
P_\alpha &= \{p_\mathcal{V} : \mathcal{V} \in \mathcal{V}_\alpha\}, \\
H_\alpha &= \bigcup_{\beta<\alpha} F_\beta \cup P_\alpha.
\end{aligned}$$

Claramente, $|\mathcal{U}_\alpha| \leq \mathfrak{c}$, $|\mathcal{W}_\alpha| \leq \mathfrak{c}$ e $|H_\alpha| \leq \mathfrak{c}$. Seja $F_\alpha = \overline{H}_\alpha$. Pelo teorema 1.2.15, $|F_\alpha| \leq \mathfrak{c}$. Assim, $F_\alpha \in \mathcal{F}$.

Por construção, temos que se $\beta < \alpha$ então $F_\beta \subseteq F_\alpha$. Como $t(X) \leq \omega$ e cada F_α é um fechado, o conjunto $L = \bigcup\{F_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ é um fechado de X[2]. Portanto, o subespaço L de X é ω_1-Lindelöf. Também temos que $|L| \leq 2^\omega$.

Vamos mostrar que $L = X$. Suponhamos o contrário e fixe $b \in X \setminus L$. Então, para cada $\alpha < \omega_1$, podemos escolher $U_\alpha \in \mathcal{U}(F_\alpha)$ tal que $b \notin \mathcal{U}(F_\alpha)$. É claro que $F_\alpha \subseteq U_\alpha$. Portanto, $\{U_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ cobre L. Como L é ω_1-Lindelöf existe $\mathcal{V} \subseteq \{U_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ enumerável tal que $L \subseteq \bigcup \mathcal{V}$. É claro que $b \notin \bigcup \mathcal{V}$ e $p_\mathcal{V} \in X \setminus \bigcup \mathcal{V} \subseteq X \setminus L$. Por outro lado, como ω_1 é regular, existe $\alpha* < \omega_1$ tal que $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}_{\alpha*}$ e $\mathcal{V} \in \mathcal{V}_{\alpha*}$. Então, $p_\mathcal{V} \in P_{\alpha*} \subseteq H_{\alpha*} \subseteq F_{\alpha*} \subseteq L$, uma contradição. □

Lema 4.3.2. *Sejam Z um espaço regular, $A \subseteq Z$ e $z \in Z$. Então, no mínimo uma das seguintes condições são satisfeitas:*

(a) Existe um subconjunto $B \subseteq A$ discreto e enumerável tal que z não é G_δ-separado de $\overline{B}^A$;

(b) z é G_δ-separado de A;

(c) Existe uma ω_1-sequência livre em A.

[2]Seja $x \in \overline{L}$. Tendo em vista que $t(x) \leq \omega$, segue que existe $\{x_n : n < \omega\} \subseteq L$ tal que $x \in \overline{\{x_n : n < \omega\}}$. Como ω_1 é regular e $\{F_\alpha : \alpha < \omega\}$ é uma cadeia, existe $\alpha < \omega_1$ tal que $\{x_n : n < \omega\} \subseteq F_\alpha$. Assim, $x \in \overline{F}_\alpha = F_\alpha \subseteq L$.

Demonstração. Suponha que as condições (a) e (b) não são satisfeitas. Então, $z \notin A$, pois, caso contrário, a condição (a) seria satisfeita com $B = \{z\}$. Temos, ainda, que $z \in \overline{A}$. De fato, suponha o contrário. Então, da regularidade de Z segue que z é G_δ-separado de $\overline{A}$ e, consequentemente, a condição (b) é satisfeita, uma contradição.

Vamos construir, por recursão transfinita, uma sequência $\langle x_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ em A, mas livre em Z. Simultaneamente, construiremos $\langle F_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ uma sequência decrescente de fechados G_δ de Z contendo z.

Tome x_0 um ponto qualquer de Y e $F_0 = X$. Seja $\alpha \in \omega_1 \setminus \{0\}$ e assuma que para cada $\beta < \alpha$ tenhamos escolhidos um $x_\beta \in A$ e um $F_\beta \subseteq Z$ fechado G_δ contendo o ponto z de modo que:

(d) $x_\beta \in F_\beta$;

(e) F_β não intersecta o fecho em Y do conjunto $S_\beta = \{x_\kappa : \kappa < \beta\}$;

(f) $F_\beta \subseteq F_\kappa$, para cada $\kappa < \beta$.

Logo, o conjunto $M_\beta = \{x_\kappa : \beta \leq \kappa < \alpha\}$ está contido em F_β. Portanto, $\overline{M}_\beta \subseteq F_\beta$. Por outro lado, $\overline{S}_\beta^Y \cap F_\beta = \emptyset$, pela condição (e). Segue que $\langle x_\beta : \beta < \alpha \rangle$ é uma sequência livre em A; visto que a condição (a) não é satisfeita, z é G_{ω_1}-separado do fecho de S_α em A. Portanto, existe P_α um G_{ω_1}-conjunto fechado de Z tal que $z \in P_\alpha$ e

(g) $P_\alpha \cap \overline{S}_\alpha = \emptyset$.

Tome

$$F_\alpha = P_\alpha \cap (\bigcap \{F_\beta : \beta < \alpha\}).$$

Claramente, F_α é um G_{ω_1}-conjunto fechado de Z contendo z. Portanto, visto que a condição (b) não é satisfeita, $A \cap F_\alpha \neq \emptyset$. Seja $x_\alpha \in A \cap F_\alpha$ arbitrário. As condições (d), (e) e (f) são agora satisfeitas para cada $\beta \leq \alpha$. A definição das sequências transfinitas $\langle x_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ e $\langle F_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ está completa.

Segue imediatamente da construção acima que $\langle x_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ é uma sequência livre. Portanto, a condição (c) é satisfeita, e a prova do lema está completa. $\square$

Segue imediatamente do teorema 4.3.2:

Lema 4.3.3. *Sejam Y um subespaço de um espaço X e $x \in X$. Se $F(Y) \leq \omega$ então um, e apenas um, dos seguintes itens é satisfeito:*

(a) *Existe $A \subseteq Y$ enumerável tal que $x \in \overline{A}$,*

(b) *Existe P um G_δ-conjunto fechado de X tal que $x \in P$ e $P \cap Y = \emptyset$.*

Lema 4.3.4. *Sejam X um espaço linearmente Lindelöf, e, $\mathcal{F}$ uma família de fechados de X, satisfazendo:*

(a) $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$;

(b) *para todo $P \subseteq X$ fechado existe $F \in \mathcal{F}$ tal que ou $F \subseteq P$ ou $F \cap P = \emptyset$.*

Então, existe $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ enumerável tal que $\bigcap \mathcal{G} = \emptyset$.

Demonstração. Seja $\mathcal{C} = \{\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F} : \bigcap \mathcal{F}' = \emptyset\}$. Note que $\mathcal{C} \neq \emptyset$, pois $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$. Seja $\tau = \min\{|\mathcal{F}'| : \mathcal{F}' \in \mathcal{C}\}$ e tome $\mathcal{H} \in \mathcal{C}$ tal que $|\mathcal{H}| = \tau$. Se $\tau \leq \omega$, basta tomarmos $\mathcal{G} = \mathcal{H}$. Suponhamos, então, que $\tau > \omega$. Logo, $cf(\tau) = \omega$, pois X é linearmente Lindelöf e $\{X \setminus F : F \in \mathcal{H}\}$ é uma cobertura aberta de X de cardinalidade τ. Portanto, $\mathcal{H} = \bigcup\{\mathcal{H}_n : n \in \omega\}$, onde $|\mathcal{H}_n| < \tau$ para todo $n < \omega$. Para cada n, $H_n = \bigcap \mathcal{H}_n$ é um fechado de X e, em virtude de (b), existe $F_n \in \mathcal{F}$ tal que $F_n \subseteq H_n$ ou $F_n \cap H_n = \emptyset$. Note que o segundo caso não pode ocorrer, pois $\mathcal{K}_n = \mathcal{H}_n \cup \{F_n\}$ é uma subfamília de $\mathcal{F}$ tal que $|\mathcal{K}_n| < \tau$ e, portanto, $F_n \cap H_n = F_n \cap \bigcap \mathcal{H}_n = \bigcap \mathcal{K}_n \neq \emptyset$. Segue que $F_n \subseteq H_n$ para todo $n \in \omega$. Claramente, $\bigcap\{H_n : n \in \omega\} = \bigcap \mathcal{H} = \emptyset$. Assim, $\bigcap\{F_n : n \in \omega\} = \emptyset$. Portanto, $\mathcal{G} = \{F_n : n \in \omega\}$ é a subfamília enumerável de $\mathcal{F}$ que procuramos. □

Proposição 4.3.5. *Sejam X um espaço regular, Y um subespaço linearmente Lindelöf de X tal que $F(Y) \leq \omega$, e $x \in X \setminus Y$. Seja, ainda, $\mathcal{F}$ uma família de fechados de Y satisfazendo:*

(a) se F é um subespaço fechado separável de Y tal que $x \in \overline{F}$ então $F \in \mathcal{F}$;

(b) se B é um fechado G_δ de X tal que $x \in B$ então $Y \cap B \in \mathcal{F}$.

Então, existe $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$ enumerável tal que $\bigcap \mathcal{H} = \emptyset$.

Demonstração. Vamos mostrar que todas as condições do lema 4.3.4 são satisfeitas. Seja $P \subseteq Y$ fechado em Y. Então, $F(P) \leq \omega$. Em virtude do lema 4.3.3, ou existe B um fechado G_δ de X tal que $x \in B$ e $P \cap B = \emptyset$, ou, existe $F \subseteq P$ separável e fechado de P tal que $x \in \overline{F}$. No primeiro caso, segue de (b), que $B \cap Y \in \mathcal{F}$ e é disjunto de P; no segundo caso, $F \subseteq P$, e, em virtude de (a), $F \in \mathcal{F}$. Portanto, a condição (b) do lema 4.3.4 é satisfeita. Visto que $x \notin Y$, e Y é regular, é claro que Portanto, pelo lema 4.3.4, existe $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$ enumerável tal que $\bigcap \mathcal{H} = \emptyset$. □

Proposição 4.3.6. *Seja X um espaço linearmente Lindelöf tal que $|X| \leq \mathfrak{c}$, $w(X) \leq \mathfrak{c}$ e $F(X) \leq \omega$. Então, $Ch(X) \leq \mathfrak{c}$.*

Demonstração. Pelo teorema 4.2, podemos uma compactificação $Z = cX$ de X tal que $w(Z) \leq 2^\omega$. Considere, ainda, a família

$$\mathcal{S} = \{B \subseteq Z \mid B \text{ é fechado}, B \cap X \text{ é separável e } \overline{B \cap X} = B\}.$$

Note que $|\mathcal{S}| \leq 2^\omega$, pois $|X| \leq 2^\omega$. Seja $\mathcal{G}$ a família de todos G_δ-subconjuntos fechados de Z. Como $w(Z) \leq 2^\omega$, $|\mathcal{G}| \leq (2^\omega)^\omega = 2^\omega$. Portanto, $\varepsilon = \{\bigcap \lambda \mid \lambda \subseteq \mathcal{S} \cup \mathcal{G} \text{ e } |\lambda| \leq \omega\}$ tem cardinalidade $\leq \mathfrak{c}$.

Vamos mostrar que para todo $z \in Z \setminus X$ existe $K \in \varepsilon$ tal que $z \in K \subseteq Z \setminus X$ — daí, $Ch(X) \leq 2^\omega$.

Fixe $z \in Z \setminus X$ e considere as famílias $\mathcal{S}_z = \{B \in \mathcal{S} \mid z \in B\}$, $\mathcal{G}_z = \{B \in \mathcal{G} \mid z \in B\}$ e

$$\mathcal{F}_z = \{X \cap B \mid B \in \mathcal{S}_z \cup \mathcal{G}_z\}.$$

A família $\mathcal{F}_z$ satisfaz as condições impostas sobre $\mathcal{F}$ no lema 4.3.5. De fato,

(a) Seja F um subespaço fechado separável de X tal que $z \in \overline{F}$. Note que $\overline{F} \in \mathcal{S}$, pois $\overline{F} \cap X = F$ é separável e $\overline{\overline{F} \cap X} = \overline{F}$. Logo, $\overline{F} \in \mathcal{S}_z$ e, portanto, $F = X \cap \overline{F} \in \mathcal{F}_z$.

(b) Seja, agora, B fechado G_δ de Z tal que $z \in B$. Então, $B \in \mathcal{G}_z$. Portanto, $X \cap B \in P_z$.

Portanto, pelo lema 4.3.5, existe $\bigcap \eta \subseteq \mathcal{S}_z \cup \mathcal{G}_z$ enumerável tal que $\eta \subseteq Z \setminus X$. Claramente, $z \in \bigcap \eta \in \varepsilon$. Daí, existe $\mathcal{K} \subseteq \varepsilon$ tal que $Z \setminus X = \bigcup \mathcal{K}$. Visto que $|\mathcal{K}| \leq |\varepsilon| \leq \mathfrak{c}$ e todos os elementos de $\mathcal{K}$ são fechados de Z, concluímos que X é um $G_{\mathfrak{c}}$-conjunto. □

Proposição 4.3.7. *Sejam Z um espaço topológico regular, H um subespaço de Z e $\tau = L(H)$. Então, para todo $F \subseteq Z \setminus H$ fechado de Z, existe um G_δ-conjunto P de Z tal que $F \subseteq P \subseteq Z \setminus H$.*

Demonstração. Como F é um conjunto fechado, para cada $z \in H$, podemos escolher uma vizinhança aberta U_z de z tal que $U_z \cap F = \emptyset$. Visto que Z é regular, existe, para cada $z \in H$, uma vizinhaça V_z de z tal que $z \in V_z \subseteq \overline{V}_z \subseteq U_z$. É claro que $\mathcal{V} = \{V_z : z \in H\}$ cobre H. Então, existe uma subcobertura $\mathcal{W}$ de $\mathcal{V}$ tal que $|\mathcal{W}| \leq \tau$. Seja $P = \bigcap\{Z \setminus \overline{W} : W \in \mathcal{W}\}$. Então, P é um G_δ-conjunto e $F \subseteq P \subseteq Z \setminus X$. □

Proposição 4.3.8. *Sejam X um espaço linearmente Lindelöf tal que $|X| \leq \mathfrak{c}$ e $F(X) \leq \omega$ e cX uma compactificação de X. Então existem famílias $\mathcal{P}$ e $\mathcal{K}$ de subconjuntos compactos de cX tais que as seguintes condições são satisfeitas:*

(a) $cX = (\bigcup \mathcal{P}) \cup (\bigcup \mathcal{K})$;

(b) $|F \cap X| = 1$ *para cada* $F \in \mathcal{P}$;

(c) $F \cap X = \emptyset$ *para cada* $F \in \mathcal{K}$;

(d) $|\mathcal{P}| \leq \mathfrak{c}$ *e* $|\mathcal{K}| \leq \mathfrak{c}$.

Demonstração. Visto que $|X| \leq \mathfrak{c}$ e X é de Tychonoff e T_1, existe uma família $\mathcal{F}$ de funções contínuas de X em $[0,1]$ que separa pontos e cuja cardinalidade é $\leq 2^\omega$. Então, a função $g : X \to \{0,1\}^{\mathcal{F}}$ dada por $g(x) = \langle f(x) \rangle_{f \in \mathcal{F}}$ é um contínua e injetora. Como $\{0,1\}^{\mathcal{F}}$ é de

Tychonoff e $w(\{0,1\}^{\mathcal{F}}) = |\mathcal{F}| \leq 2^{\omega}$, temos que $Y = g[X]$ é de Tychonoff e $w(Y) \leq 2^{\omega}$. Assim, $F(Y) \leq F(X) \leq \omega$, $|Y| \leq |X| \leq 2^{\omega}$ e Y é linearmente Lindelöf.

Portanto, pela proposição 4.3.6, $Ch(Y) \leq 2^{\omega}$. Tome uma extensão de Stone-Čech $\beta g : \beta X \to \beta Y$ de g e fixe uma família $\mathcal{C}$ de compactos de βY tal que $\bigcup \mathcal{C} = \beta Y \setminus Y$ e $|\mathcal{C}| \leq 2^{\omega}$. Sejam

$$\mathcal{P}_1 = \{(\beta g)^{-1}\{y\} : y \in Y\} \text{ e } \mathcal{K}_1 = \{(\beta g)^{-1}[K] : K \in \mathcal{C}\}.$$

Agora, tome uma função contínua e sobrejetora $h : \beta X \to cX$ tal que $h \restriction X = id_X$ e

$$\mathcal{P} = \{h[F] : F \in \mathcal{P}_1\} \text{ e } \mathcal{K} = \{h[K] : K \in \mathcal{K}_1\}.$$

Note que $h[\beta X \setminus X] = cX \setminus X$. Obviamente, $\mathcal{P}$ e $\mathcal{K}$ satisfazem as condições (a)−(d). □

Lema 4.3.9. *Se X é linearmente Lindelöf e $L(X) \leq \mathfrak{c}^+$, então $L(X) \leq \mathfrak{c}$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{U}$ uma cobertura aberta de X. Então, existe $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ subcobertura tal que $|\mathcal{V}| \leq \mathfrak{c}^+$. Como X é linearmente Lindelöf, existe uma subcobertura $\mathcal{W}$ de $\mathcal{V}$ cuja cofinalidade é $\leq \omega$. Visto que $\mathfrak{c}^+$ é regular, $|\mathcal{W}| < \mathfrak{c}^+$, isto é, $|\mathcal{W}| \leq \mathfrak{c}$. Portanto, $L(X) \leq \mathfrak{c}$. □

Lema 4.3.10. *Sejam X um espaço um espaço linearmente Lindelöf e Y um subespaço fechado de X tais que*

(a) $\psi(y, X) \leq \mathfrak{c}$ *para cada* $y \in Y$;

(b) $|Y| \leq \mathfrak{c}$;

(c) $L(X) \leq \mathfrak{c}^+$;

(d) $F(Y) \leq \omega$.

Então, Y é um $G_{\mathfrak{c}}$-conjunto de X.

Demonstração. Como $L(X) \leq \mathfrak{c}^+$ e X é linearmente Lindelöf, segue do lema 4.3.9 que $L(X) \leq \mathfrak{c}$.

Sejam B um espaço compacto contendo X como subespaço e $cY = \overline{Y}^B$. Pela proposição 4.3.8, existe uma família $\mathcal{K}$ de compactos de cY satisfazendo:

(i) $|\mathcal{K}| \leq \mathfrak{c}$;

(ii) $\bigcup \mathcal{K} = cY$;

(iii) $|K \cap X| \leq 1$ para cada $K \in \mathcal{K}$.

Considere o subespaço $Z = cY \cup X$ do espaço B. Para cada $K \in \mathcal{K}$ seja $H_K = X \setminus K$. Assim, se $X \cap K = \emptyset$ então $H_K = X$. Por outro lado, se $K \cap X \neq \emptyset$ então, pelo fato de Y ser um fechado de X e pelas condições (b) e (c), existe $y_K \in Y$ tal que $K \cap X = \{y_K\}$. Logo, $H_K = X \setminus \{y_K\}$. De qualquer modo, como $L(X) \leq \mathfrak{c}$ e $\psi(y_K, X) \leq \mathfrak{c}$, temos que $L(H_K) \leq \mathfrak{c}$ para todo $K \in \mathcal{K}$. Além disso, $K \subseteq Z$, K é um fechado de Z e $K \cap H_K = \emptyset$. Pela proposição 4.3.7, existe um família $\mathcal{U}_K$ de abertos de Z tal que $|\mathcal{U}_K| \leq \mathfrak{c}$ e $K \subseteq \bigcap \mathcal{U}_K \subseteq Z \setminus H_K$. Então,

$$(\bigcap \mathcal{U}_K) \cap (X \setminus cY) = \emptyset.$$

Tome $\mathcal{B} = \bigcup\{\mathcal{U}_K : K \in \mathcal{K}\}$. É claro que $|\mathcal{B}| \leq \mathfrak{c}$. Visto que $\bigcup \mathcal{K} = cY$ e $K \subseteq \bigcap \mathcal{U}_K \subseteq cY$ para todo $K \in \mathcal{K}$, para cada $z \in cY$ e cada $x \in X \setminus cY$, existe $U \in \mathcal{B}$ tal que $z \in U$ e $x \notin U$.

Seja $\mathcal{W} = \{\bigcup \mathcal{A} : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}, |\mathcal{A}| < \omega \text{ e } cY \subseteq \bigcup \mathcal{A}\}$. Então, das propriedades de $\mathcal{B}$ segue que $|\mathcal{W}| \leq \mathfrak{c}$ e $\bigcap \mathcal{W} = cY$. Portanto, cY é um subconjunto G_{2^ω} de Z. Visto que $cY \cap X = Y$, Y é subconjunto G_{2^ω} de X. □

Lema 4.3.11. *Seja X um espaço sequencial tal que $|X| > \mathfrak{c}$. Então, existe um subespaço fechado Y de X tal que $|Y| = \mathfrak{c}^+$.*

Demonstração. Claramente, existe uma cadeia crescente $\mathcal{C} = \{M_\alpha \subseteq X : \alpha < \mathfrak{c}^+\}$ tal que $|M_\alpha| \leq 2^\omega$, para cada $\alpha < \mathfrak{c}^+$, e, $|\bigcup \mathcal{C}| = \mathfrak{c}^+$. Tome $F_\alpha = \overline{M}_\alpha$ e $Y = \bigcup\{F_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}^+\}$. Pelo teorema 1.2.15, $|F_\alpha| \leq \mathfrak{c}$ para cada $\alpha < \mathfrak{c}^+$. Portanto, $|Y| \leq \mathfrak{c}^+$. Segue que $|Y| = \mathfrak{c}^+$, visto que $\mathfrak{c}^+ = |\bigcup \mathcal{C}| \leq |Y|$. Afirmamos que Y é fechado. De fato, seja $\{y_n\}_{n<\omega}$ uma sequência em Y convergindo para um ponto $y \in X$. Como X é sequencial, basta mostrarmos que $y \in Y$.

Visto que $\mathfrak{c}^+$ é regular, existe $\beta < \mathfrak{c}^+$ tal que F_β contém $\{y_n\}_{n<\omega}$. Como F_β é fechado, $y \in F_\beta$. Logo, $y \in Y$. Portanto, Y é fechado. □

Teorema 4.3.12. *Seja X um espaço linearmente Lindelöf, Tychonoff e sequencial. Então, $|X| \leq \mathfrak{c}$ se, e somente se, $\psi(X) \leq \mathfrak{c}$.*

Demonstração. É claro que a condição é necessária. Vamos provar a suficiência.

Suponha, por absurdo, que $|X| > \mathfrak{c}$. Pelo lema 4.3.11, existe um subespaço fechado Y de X tal que $|Y| = \mathfrak{c}^+$. Então, $L(Y) \leq \mathfrak{c}^+$. Além disso, como X é linearmente Lindelöf e sequencial e Y é fechado, Y é linearmente Lindelöf e sequencial. Logo, pelo teorema 1.2.14, $F(Y) \leq \omega$. Pelo lema 4.3.10, todo subconjunto fechado A de Y tal que $|A| \leq \mathfrak{c}$ é um subconjunto G_{2^ω} de X. Como Y é ω_1-Lindelöf, segue da proposição 4.3.1 que $|Y| \leq 2^\omega < \mathfrak{c}^+$, uma contradição. □

Capítulo 5

Problemas em aberto

Questão 1. Um espaço linearmente Lindelöf e normal é Lindelöf?

Questão 2. Em ZFC, todo espaço linearmente Lindelöf, localmente compacto e de caráter enumerável é Lindelöf?

Questão 3. Todo espaço regular — ou de Tychonoff, ou normal — e discretamente Lindelöf é Lindelöf?

Questão 4. É verdade, em ZFC, que todo espaço linearmente Lindelöf, de Tychonoff e de caráter enumerável é Lindelöf? Pode se tirar CH das hipóteses do corolário 3.1.10? Todo espaço linearmente Lindelöf, hereditariamente separável e de Tychonoff (ou apenas regular) é de Lindelöf?

Questão 5. O teorema 3.1.17 permanece válido se excluirmos GCH de sua formulação?

Questão 6. Um espaço discretamente Lindelöf (de Tychonoff) é um espaço de Lindelöf?

Questão 7 ([7], Questões 1 e 3). É verdade, em ZFC, que todo espaço localmente compacto, linearmente Lindelöf e de caráter enumerável é um espaço de Lindelöf?

Questão 8 ([7], Questão 4). Existe um espaço linearmente Lindelöf e não metrizável com uma base de ordem enumerável? Equivalentemente, todo espaço linearmente Lindelöf com uma base de ordem enumerável é Lindelöf?

Questão 9 (Arhagel'skiĭ e Buzyakova). Todo espaço linearmente Lindelöf, realcompacto e localmente compacto é Lindelöf?

Questão 10 (Arhagel'skiĭ). O produto de quaisquer dois p-espaços linearmente Lindelöf é Lindelöf?

Questão 11 (J.T. Moore). Existe um espaço linearmente Lindelöf, não lindelöf de tamanho $\aleph_\omega$?

Questão 12 (J.T. Moore). Existe um espaço normal, linearmente Lindelöf e não Lindelöf de peso $\aleph_\omega$?

Questão 13. Existe em ZFC um exemplo de um espaço realcompacto, linearmente Lindelöf que não é de Lindelöf?

Questão 14. Na proposição 3.4.2, podemos adicionar às propriedades de $\langle I, \tau \rangle$ local compacidade (e local metrizabilidade ou, no mínimo, caráter enumerável)?

Questão 15. Todo espaço de Hausdorff, localmente compacto, ω_1-Lindelöf e de tightness enumerável é de Lindelöf (em ZFC)?

Questão 16. A propriedade de Lindelöf é uma propriedade discretamente reflexiva?

Assumindo o Axioma de Martin e $\aleph_\omega < 2^{\aleph_0}$, O. Pavlov [27] construiu uma topologia mais fina que a usual sobre um subconjunto do conjunto de Cantor que possui caráter enumerável, é linearmente Lindelöf, mas não-Lindelöf. Isto dá uma resposta negativa às questões 7 de [7] e 15 de [6].

Questão 17 (Questão 4 de [27]). Segue de $\aleph_\omega < 2^{\aleph_0}$ a existência de um espaço de caráter enumerável, linearmente Lindelöf e não-Lindelöf? E de $2^{\aleph_\omega} = 2^{\aleph_0}$?

Questão 18 (Questão 5 de [27]). Segue de $\aleph_\omega < 2^{\aleph_0}$ a existência de um espaço de pseudocaráter enumerável, linearmente Lindelöf e não-Lindelöf?

Questão 19 (Questão 6 de [27]). Existe um espaço pseudocompacto, de caráter enumerável, linearmente Lindelöf e não-Lindelöf?

Apêndice A

Pontos bons e medíocres

A principal referência aqui é [9].

Definição A.0.13. Sejam X um espaço topológico e κ um cardinal. Dizemos que um ponto $x \in X$ é um

- *P_κ-ponto fraco* se, e somente se, $x \notin \overline{A}$ para todo $A \subseteq X \setminus \{x\}$ tal que $|A| < \kappa$;
- *P_κ-ponto* se, e somente se, para toda família $\mathcal{F}$ de vizinhanças de x, com $|\mathcal{F}| < \kappa$, $\bigcap \mathcal{F}$ é uma vizinhança de x.

Os termos "P-ponto" e "P-ponto fraco" designarão "$P_{\aleph_1}$-ponto" e "$P_{\aleph_1}$-ponto fraco", respectivamente.

Lema A.0.14. *Se X é T_1 então todo P_κ-ponto é um P_κ-ponto fraco.*

Demonstração. Sejam $x \in X$ um P_κ-ponto e $A \subseteq X \setminus \{x\}$ tal que $|A| < \kappa$. Para cada $a \in A$ escolha uma vizinhança aberta U_a de x tal que $a \notin U_a$. Assim, $\mathcal{F} = \{U_a : a \in A\}$ é uma família de vizinhanças de x de cardinalidade $< \kappa$. Como x é um P_κ-ponto, $\bigcap \mathcal{F}$ é uma vizinhança de x. Mas, $(\bigcap \mathcal{F}) \cap A = \emptyset$. Portanto, $x \notin \overline{A}$. □

Definição A.0.15. Um ponto x em um espaço topológico X é *κ^+-bom* se, e somente se, dada uma família $\{U_s : s \in [\kappa]^{<\omega}\}$ de vizinhanças de x, existe uma família $\{V_\alpha : \alpha < \kappa\}$ de vizinhanças de x tal que $\bigcap_{\alpha \in s} V_\alpha \subseteq U_s$ para todo $s \in [\kappa]^{<\omega}$ não vazio.

Definição A.0.16. Um ponto x em um espaço topológico X é κ^+-*medíocre* se alguma coleção de funções injetoras $\{\varphi_\beta : \beta \to \kappa : \beta < \kappa^+\}$ satisfaz: se $\{U_\xi : \xi < \kappa\}$ é uma família de vizinhanças de x então existe uma família $\{V_\alpha : \alpha < \kappa^+\}$ de vizinhanças de x tal que $V_\alpha \cap V_\beta \subseteq U_{\varphi_\beta(\alpha)}$ sempre que $\alpha < \beta < \kappa^+$.

Definição A.0.17. Sejam $f, g : [\kappa]^{<\omega} \to \wp(\kappa)$. Dizemos que

- f é *monotônica* se

$$u, w \in [\kappa]^{<\omega} \text{ e } u \subseteq w \text{ implicam } f(u) \supseteq f(w).$$

- f é *aditiva* se

$$u, w \in [\kappa]^{<\omega} \text{ implica } g(u \cup w) = g(u) \cap g(w).$$

- $g \leq f$ se $g(u) \subseteq f(u)$ para todo $u \in [\kappa]^{<\omega}$.

Note que toda função aditiva é monotônica.

Teorema A.0.18. *Seja $x \in \beta\kappa$. São equivalentes:*

(*a*) *x é κ^+-bom;*

(*b*) *para toda função monótona $f : [\kappa]^{<\omega} \to x$, existe uma função aditiva $g : [\kappa]^{<\omega} \to x$ tal que $g \leq f$.*

Demonstração. $(a) \Rightarrow (b)$: Seja $f : [\kappa]^{<\omega} \to x$ uma função monótona arbitrária. Considere a família $\{V(f(s)) : s \in [\kappa]^{<\omega}\}$ de vizinhanças de x.[1] De (a) segue que existe uma família $\{W_\alpha : \alpha < \kappa\}$ de vizinhanças de x tais que $\bigcap_{\alpha \in s} W_\alpha \subseteq V(f(s))$ para todo $s \in [\kappa]^{<\omega}$ não vazio. Para cada α, escolha $A_\alpha \in x$ tal que $V(A_\alpha) \subseteq W_\alpha$. Considere, assim, a função $g : [\kappa]^{<\omega} \to x$ dada por $g(\emptyset) = f(\emptyset)$ e $g(s) = \bigcap_{\alpha \in s} A_\alpha$ para todo $s \in [\kappa]^{<\omega}$ não vazio. Note que $V(g(s)) \subseteq V(f(s))$ para todo $s \in [\kappa]^{<\omega}$.

[1] Para cada $s \in [\kappa]^{<\omega}$, $V(f(s)) = \{z \in \beta\kappa : f(s) \in z\}$.

Mostremos que $g \leq f$. Suponhamos, por absurdo, que $g(s) \setminus f(s) \neq \emptyset$ para algum $s \in [\kappa]^{<\omega}$. Pelo lema 1.1.12, existe um ultrafiltro y sobre κ tal que $g(s) \setminus f(s) \in y$. Logo, $y \in V(g(s)) \subseteq V(f(s))$ e, consequentemente, $y \in V(f(s))$, isto é, $f(s) \in y$. Mas, $f(s) \cap (g(s) \setminus f(s)) = \emptyset$. Uma contradição com o fato de y ser um filtro.

Resta mostrar que g é aditiva. De fato, sejam $s_1, s_2 \in [\kappa]^{<\omega}$. Como f é monótona e $g \leq f$, temos que $g(s) \subseteq g(\emptyset)$ para todo $s \in [\kappa]^{<\omega}$. Logo, se $s_1 = \emptyset$, então $g(s_1 \cup s_2) = g(s_2) = g(s_2) \cap g(s_1)$. O caso $s_2 = \emptyset$ é idêntico. Suponha então que s_1 e s_2 sejam não-vazios. Então,

$$g(s_1 \cup s_2) = \bigcap_{\alpha \in s_1 \cup s_2} A_\alpha = \bigcap_{\alpha \in s_1} A_\alpha \cap \bigcap_{\alpha \in s_2} A_\alpha = g(s_1) \cap g(s_2).$$

$(b) \Rightarrow (a)$: Seja $\{U_s : s \in [\kappa]^{<\omega}\}$ uma família de vizinhanças de x. Vamos construir uma função monótona $f : [\kappa]^{<\omega} \to x$, por recursão finita sobre o comprimento de s, como segue.

Se $s = \emptyset$, isto é, $|s| = 0$, escolha $f(\emptyset) \in x$ tal que $V(f(\emptyset)) \subseteq U_\emptyset$. Suponha que já tenhamos escolhidos $f(s) \in x$ para todo $s \in [\kappa]^n$ de modo que $V(f(s)) \subseteq U_s$. Para cada $s \in [\kappa]^{n+1}$, escolha $f(s) \in x$ tal que

$$V(f(s)) \subseteq \bigcap_{s' \in [s]^n} V(f(s')) \cap U_s.$$

Da construção acima segue que f é monótona. Logo, pelo item (b), existe uma função aditiva $g : [\kappa]^{<\omega} \to x$ tal que $g \leq f$. Portanto, para cada $\alpha < \kappa$, basta tomarmos $V_\alpha = V(g(\{\alpha\}))$. □

A.1 A existência de ultrafiltros bons e enumeravelmente incompletos

A referência aqui é [10].

Lema A.1.1. *Sejam κ um cardinal infinito e $\{Y_\alpha : \alpha < \kappa\}$ uma família de conjuntos tal que $|Y_\alpha| = \kappa$ para todo $\alpha < \kappa$. Então, existe uma família de conjuntos $\{Z_\alpha : \alpha < \kappa\}$ tal que para todos $\alpha, \beta < \kappa$:*

(i) $Z_\alpha \subseteq Y_\alpha$;

(*ii*) $|Z_\alpha| = \kappa$;

(*iii*) *Se* $\alpha \neq \beta$ *então* $Z_\alpha \cap Z_\beta = \emptyset$.

Demonstração. Para cada ordinal $\alpha \leq \kappa$, considere o conjunto

$$X_\alpha = \{\langle \gamma, \beta \rangle : \gamma \leq \beta < \alpha\}.$$

Visto que κ é um ordinal limite, $X_\kappa = \bigcup_{\alpha<\kappa} X_\alpha$.

Construiremos uma função injetora $f : X_\kappa \to \bigcup_{\gamma<\kappa} Y_\gamma$ tal que

$$f(\gamma, \beta) \in Y_\gamma \text{ sempre que } \gamma \leq \beta < \kappa. \tag{A.1}$$

Uma vez construída, definimos, para cada $\gamma < \kappa$,

$$Z_\gamma = \{f(\langle \gamma, \beta \rangle) : \gamma \leq \beta < \kappa\},$$

e a família $\{Z_\gamma : \gamma < \kappa\}$ satisfaz (*i*), (*ii*) e (*iii*), como queríamos.

A fim de definir f, vamos construir, por recursão transfinita, uma cadeia de funções injetoras $\{f_\alpha : X_\alpha \to \bigcup_{\gamma<\alpha} Y_\gamma : \alpha < \kappa\}$ onde cada f_α satisfaz (A.1) para α. Suponhamos que, para algum $\alpha < \kappa$, exista uma função injetora $f_\alpha : X_\alpha \to \bigcup_{\gamma<\alpha} Y_\gamma$ satisfazendo (A.1) com α em lugar de κ. Visto que $|X_\alpha| < \kappa$ e $|Y_\gamma| = \kappa$ para todo $\gamma < \kappa$, podemos estender f_α a uma função injetora $f_{\alpha+1} : X_{\alpha+1} \to \bigcup_{\gamma<\alpha+1} Y_\gamma$ que satisfaz (A.1) para $\alpha+1$. Simplesmente escolha, para cada $\gamma \leq \alpha$, um $f_{\alpha+1}(\langle \gamma, \alpha \rangle) \in Y_\gamma$ diferente de todos os valores previamente escolhidos para $f_{\alpha+1}$.

Suponhamos, agora, que α é um ordinal limite e já temos escolhidos uma cadeia de funções injetoras $\{f_\beta : \beta < \alpha\}$ com cada f_β satisfazendo (A.1). Então, tome $f_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} f_\beta$.

Portanto, a união $f = \bigcup_{\alpha<\kappa} f_\alpha$ é uma função injetora de X_κ em $\bigcup_{\alpha<\kappa} Y_\alpha$ satisfazendo (A.1). □

Seja κ um cardinal infinito. Uma *partição* de κ é uma família disjunta P de conjuntos não

vazios tal que $\bigcup P = \kappa$.

Seja $\mathcal{P}$ uma coleção não vazia de partições de κ tal que cada partição tenha cardinalidade κ. Seja, ainda, F um filtro não trivial sobre κ. Dizemos que o par $\langle \mathcal{P}, F \rangle$ é *consistente* se dados quaisquer $X \in F$, $P_1, \ldots, P_n \in \mathcal{P}$ e $X_1 \in P_1, \ldots, X_n \in P_n$, temos que $X \cap \bigcap_{i=1}^{n} X_i \neq \emptyset$.

Sejam F um filtro sobre κ e $E \subseteq \wp(\kappa)$ tais que $F \cup E$ tem a propriedade da interseção finita. Denotaremos por $[F \cup E]$ o filtro gerado por $F \cup E$.

Um filtro F sobre κ é *uniforme* se, e somente se, $|X| = \kappa$ para todo $X \in F$.

Lema A.1.2. *Seja κ um cardinal infinito.*

(*i*) *Seja F um filtro uniforme sobre κ gerado por um subconjunto $E \subseteq F$ tal que $|E| \leq \kappa$. Então, existe uma coleção $\mathcal{P}$ de partições de κ tal que $|\mathcal{P}| = 2^\kappa$ e $\langle \mathcal{P}, F \rangle$ é consistente.*

(*ii*) *Suponhamos que $\langle \mathcal{P}, F \rangle$ é consistente. Seja $J \subseteq \kappa$. Então, ou $\langle \mathcal{P}, [F \cup \{J\}] \rangle$ é consitente ou $\langle \mathcal{P}', [F \cup \kappa \setminus J] \rangle$ é consistente para algum $\mathcal{P}' \subseteq \mathcal{P}$ cofinito.*

(*iii*) *Suponhamos que $\langle \mathcal{P}, F \rangle$ seja consistente. Sejam $p : [\kappa]^{<\omega} \to F$ uma função monotônica e $P \in \mathcal{P}$. Então, existe um filtro $F' \supseteq F$ sobre κ e uma função aditiva $q : [\kappa]^{<\omega} \to F'$ tal que $q \leq p$ e $\langle \mathcal{P} \setminus \{P\}, F' \rangle$ é consistente.*

Demonstração. (*i*) Seja $\{J_\alpha : \alpha < \kappa\}$ uma enumeração da família de todas as interseções finitas de membros E. Note que, para cada $\alpha < \kappa$, $|J_\alpha| = \kappa$. Pelo lema A.1.1, existe uma família de conjuntos $\{I_\alpha : \alpha < \kappa\}$ tal que, para todos $\alpha < \beta < \kappa$, $|I_\alpha| = \kappa$, $I_\alpha \subseteq J_\alpha$ e $I_\alpha \cap I_\beta = \emptyset$. Considere o conjunto

$$B = \{\langle s, f \rangle : s \in [\kappa]^{<\omega} \text{ e } f : \wp(s) \to \kappa\}.$$

Observe que $|B| = \kappa$. Seja $\{\langle s_\gamma, f_\gamma \rangle : \gamma < \kappa\}$ uma enumeração de B (com possíveis repetições) de maneira que

$$B = \{\langle s_\gamma, f_\gamma \rangle : \gamma \in I_\alpha\}$$

para cada $\alpha < \kappa$. Para cada $J \subseteq \kappa$ defina a função $g_J : \kappa \to \kappa$ como segue:

$$g_J(\gamma) = \begin{cases} f_\gamma(J \cap s_\gamma), & \text{se } \gamma \in \bigcup_{\alpha<\kappa} I_\alpha; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Mostremos, primeiramente, que $\{g_J : J \subseteq \kappa\}$ tem cardinalidade 2^κ. Suponhamos $J_1 \neq J_2$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que existe $x \in J_1$ tal que $x \notin J_2$. Tome $s = \{x\}$ e $f = \{\langle\{x\}, 0\rangle, \langle 0, 1\rangle\}$. Então, $\langle s, f\rangle \in B$ e, portanto, $\langle s, f\rangle = \langle s_\gamma, f_\gamma\rangle$ para algum $\gamma < \kappa$. Agora $g_{J_1}(\gamma) = f(J_1 \cap s) = \emptyset$ e $g_{J_2}(\gamma) = f(J_2 \cap s) = 1$. Então, $g_{J_1} \neq g_{J_2}$.

Agora, sejam $\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_n \in \kappa$ e $J_1, \ldots, J_n \subseteq \kappa$ distintos entre si. Afirmamos que existe $\gamma \in I_\alpha$ tal que

$$g_{J_i}(\gamma) = \beta_i$$

para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. De fato, seja $s \in [\kappa]^{<\omega}$ tal que

$$s \cap J_i \neq s \cap J_j$$

para $1 \leq i < j \leq n$. Agora, seja $f : \wp(s) \to \kappa$ definida de forma que

$$f(J_i \cap s) = \beta_i$$

para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Existe $\gamma \in I_\alpha$ tal que $\langle s_\gamma, f_\gamma\rangle = \langle s, f\rangle$. Daí,

$$g_{J_1}(\gamma) = f_\gamma(J_i \cap s_\gamma) = f(J_i \cap s) = \beta_i.$$

Mostramos, assim, que cada f_J é sobrejetora.

Finalmente, seja

$$\mathcal{P} = \{\{f_J^{-1}(\beta) : \beta < \kappa\} : J \subseteq \kappa\}.$$

Claramente, $\mathcal{P}$ é uma coleção de 2^κ partições de κ. É óbvio que $\langle \mathcal{P}, F\rangle$ é consistente.

(ii) Suponhamos que $\langle \mathcal{P}, [F \cup \{J\}]\rangle$ não seja consistente. Então, existem $X \in F$, $P_1, \ldots, P_n \in$

$\mathcal{P}$ distintos, $X_1 \in P_1, \ldots, X_n \in P_n$, tais que

$$\text{(I)} \qquad J \cap X \cap \bigcap_{1 \leq i \leq n} X_i = \emptyset.$$

Seja $\mathcal{P}' = \mathcal{P} \setminus \{P_1, \ldots, P_n\}$. Sejam Q_j, $1 \leq j \leq m$, elementos distintos de $\mathcal{P}'$ e $Y_j \in Q_j$. Então, por hipótese,

$$\text{(II)} \qquad X \cap \bigcap_{1 \leq i \leq n} X_i \cap \bigcap_{1 \leq j \leq m} Y_j \neq \emptyset.$$

É imediato de (I) e (II) que

$$(\alpha \setminus J) \cap X \cap \bigcap_{1 \leq j \leq m} Y_j \neq \emptyset.$$

Então, $\langle \mathcal{P}', [F \cup \{\alpha \setminus J\}] \rangle$ é consistente.

(iii) Sejam $\{X_\delta : \delta < \kappa\}$ uma enumeração de P sem repetições e $\{t_\delta : \delta < \kappa\}$ uma enumeração de $[\kappa]^{<\omega}$. Para cada $\delta < \kappa$, definamos a função $q_\delta : [\kappa]^{<\omega} \to \wp(\kappa)$ como segue:

$$q_\delta(s) = \begin{cases} p(t_\delta), & \text{se } s \subseteq t_\delta; \\ q_\delta(s), & \text{se } s \nsubseteq t_\delta. \end{cases}$$

Note que $q_\delta(s) \subseteq p(t_\delta)$, $q_\delta(s) \neq 0$ se $s \subseteq t_\delta$ e $q_\delta(s_1 \cup s_2) = q_\delta(s_1) \cap q_\delta(s_2)$. Esta última é devido à

$$s_1 \cup s_2 \subseteq t_\delta \text{ se, e somente se, } s_1 \subseteq t_\delta \text{ e } s_2 \subseteq t_\delta.$$

Defina a função $q : [\kappa]^{<\omega} \to \wp(\kappa)$ por

$$q(s) = \bigcup_{\delta < \kappa} q_\delta(s),$$

para todo $s \in [\kappa]^{<\omega}$. Como p é monotônica, temos que $q(s) \subseteq p(s)$ e, portanto, $q \leq p$. Visto que $q_\delta(s) \cap q_{\delta'}$, se $\delta \neq \delta'$, temos que $q(s)$ é uma união disjunta de subconjuntos de X_δ. Usando

o fato de que cada q_δ é aditivo e que

$$X_\delta \cap X'_\delta \neq \emptyset \text{ se, e somente se, } \delta = \delta',$$

concluímos que q é aditiva. Agora, seja $F' = [F \cup \mathrm{Im}(q)]$. Afirmamos que $\langle \mathcal{P} \setminus \{P\}, F' \rangle$ é consistente. Sejam $X \in P$, $s \in [\kappa]^{<\omega}$, $X_i \in P_i \in \mathcal{P}$, $1 \leq i \leq n$, com os P_i's distintos e diferentes de P. Visto que $s = t_\delta$ para algum $\delta < \kappa$, temos que $q(s) \supseteq q_\delta(s) = p(t_\delta) \cap X_\delta$ e

$$X \cap p(t_\delta) \cap X_\delta \cap \bigcap_{1 \leq i \leq n} X_i \neq \emptyset.$$

Portanto,

$$X \cap q(s) \cap \bigcap_{1 \leq i \leq n} X_i \neq \emptyset. \qquad \square$$

Teorema A.1.3. *Para todo cardinal infinito κ existe um ultrafiltro κ^+-bom e enumeravelmente incompleto sobre κ.*

Demonstração. Se $\kappa = \omega$ então tome, para cada $n \in \omega$, $I_n = \omega \setminus n$. Se $\kappa > \omega$, defina, por recursão finita, uma sequência $\langle I_n \rangle_{n<\omega}$ como segue.

- $I_0 = \kappa$;
- $I_{n+1} = I_n \setminus \{\alpha + n : \alpha \in \lim \kappa\}$.

De qualquer forma $\langle I_n \rangle_{n<\omega}$ será uma sequência tal que $\bigcap_{n<\omega} I_n = \emptyset$ e, para cada $n < \omega$, $|I_n| = \kappa$ e $I_{n+1} \subseteq I_n$. Seja F_0 o filtro uniforme sobre κ gerado por $\{I_n : n \in \omega\}$. Pelo lema A.1.2 (i), existe uma família $\mathcal{P}_0$ de partições de κ tal que $|\mathcal{P}_0| = 2^\kappa$ e $\langle \mathcal{P}_0, F_0 \rangle$ é consistente. Vamos definir, por recursão transfinita, sequências $\langle \mathcal{P}_\xi : \xi < 2^\kappa \rangle$ e $\langle F_\xi : \xi < 2^\kappa \rangle$ tais que, para todos $\eta \leq \xi < 2^\kappa$,

- $\mathcal{P}_\eta \supseteq \mathcal{P}_\xi$ e $F_\eta \subseteq F_\xi$;
- $|\mathcal{P}_\xi| = 2^\kappa$;

- $|\mathcal{P}_\xi \setminus \mathcal{P}_{\xi+1}| < \omega$;
- $\langle \mathcal{P}_\xi, F_\xi \rangle$ é consistente.

Sejam $\{p_\xi : \xi < 2^\kappa\}$ uma enumeração de todas as funções monotônicas de $[\kappa]^{<\omega}$ em $\wp(\kappa)$ e $\{J_\xi : \xi < 2^\kappa\}$ uma enumeração de $\wp(\kappa)$. Suponha que, para algum $\xi < 2^\kappa$, $\mathcal{P}_\eta$ e F_η já tenham sido definidos para todo $\eta < \xi$ satisfazendo todas as hipóteses indutivas.

Se ξ é um ordinal limite, então simplesmente tome

$$\mathcal{P}_\xi = \bigcap_{\eta<\xi} \mathcal{P}_\eta \qquad \text{e} \qquad F_\xi = \bigcup_{\eta<\xi} F_\eta.$$

É claro que $\langle \mathcal{P}_\xi, F_\xi \rangle$ é consistente e $|\mathcal{P}_\xi| = 2^\kappa$.

Suponha $\xi = \lambda + 2n + 1$ para algum ordinal limite λ e algum $n < \omega$. Seja J o primeiro elemento de $\wp(\kappa)$ tal que $J \notin F_{\lambda+2n}$. Pelo lema A.1.2 (ii), existem $\mathcal{P}_\xi \subseteq \mathcal{P}_{\xi-1}$ e $F_\xi \supseteq F_{\xi-1}$ tais que

- $|\mathcal{P}_{\xi-1} \setminus \mathcal{P}_\xi| < \omega$;
- $|\mathcal{P}_\xi| = 2^\kappa$;
- $J \in F_\xi$ ou $\kappa \setminus J \in F_\xi$;
- $\langle \mathcal{P}_\xi, F_\xi \rangle$ é consistente.

Suponha $\xi = \lambda + 2n + 2$ para algum ordinal limite λ e algum $n < \omega$. Seja $p : [\kappa]^{<\omega} \to F_{\xi-1}$ a primeira função de $\{p_\alpha : \alpha < 2^\kappa\}$ que ainda não foi usada. Pelo lema A.1.2 (iii), existem $\mathcal{P}_\xi$, F_ξ e $q : [\kappa]^{<\omega} \to F_\xi$ tais que

- $|\mathcal{P}_{\xi-1} \setminus \mathcal{P}_\xi| = 1$;
- $|\mathcal{P}_\xi| = 2^\kappa$;
- q é aditiva e $q \leq p$;

· $F_\xi = [F_{\xi-1} \cup \mathrm{Im}(q)]$;

· $\langle \mathcal{P}_\xi, F_\xi \rangle$ é consistente.

Seja $F = \bigcup_{\xi<2^\kappa} F_\xi$. Segue da construção acima que F é um ultrafiltro κ^+-bom enumeravelmente incompleto sobre κ. □

A.2 Outros teoremas

Lema A.2.1. *Se $x \in X$ é λ^{++}-bom então x é λ^+-medíocre.*

Demonstração. Fixe uma coleção de funções injetoras $\varphi_\beta : \beta \to \lambda$ ($\beta < \lambda^+$). Sejam U_ξ ($\xi < \lambda$) vizinhanças quaisquer de x. Para cada $s \in [\lambda^+]^{<\omega}$ defina

$$U_s^* = \begin{cases} U_{\varphi_\beta(\alpha)}, & \text{se } s = \{\alpha, \beta\} \text{ e } \alpha < \beta < \lambda^+; \\ X, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Visto que x é λ^{++}-bom segue que existem vizinhanças V_α ($\alpha < \lambda^+$) de x tais que $\bigcap_{\alpha \in s} V_\alpha \subseteq U_s^*$ para todo $s \in [\lambda^+]^{<\omega}$ não vazio. Em particular, $V_\alpha \cap V_\beta \subseteq U^*_{\{\alpha,\beta\}} = U_{\varphi_\beta(\alpha)}$ sempre que $\alpha < \beta < \lambda^+$. □

Lema A.2.2. *Se $x \in X$ é um P_κ-ponto fraco que também é κ^+-medíocre então x é um P_{κ^+}-ponto fraco.*

Demonstração. Seja $Y = \{y_\xi : \xi \in \kappa\} \subseteq X \setminus \{x\}$. Por hipótese, x é um P_κ-ponto fraco. Logo, para cada $\xi \in \kappa$ existe uma vizinhança U_ξ de x tal que $U_\xi \cap \{y_\eta : \eta \leq \xi\} = \emptyset$.

Por hipótese, x é κ^+-medíocre. Tomemos, então, $\varphi_\beta : \beta \to \kappa$ ($\beta < \kappa^+$) como na definição A.0.16. Fixe vizinhanças V_α ($\alpha \in \kappa^+$) de x tais que $V_\alpha \cap V_\beta \subseteq U_{\varphi_\beta(\alpha)}$ sempre que $\alpha < \beta < \kappa^+$.

Afirmamos que $V_\alpha \cap Y = \emptyset$ para algum $\alpha < \kappa^+$. Suponhamos o contrário. Então, existem $\xi \in \kappa$ e $S \subseteq \kappa^+$, com $|S| = \kappa^+$, tais que $y_\xi \in V_\alpha$ para todo $\alpha \in S$. Seja $\beta \in S$ tal que $|S \cap \beta| = \kappa$. Então, $\varphi_\beta(S \cap \beta)$ é ilimitado em κ. Podemos, então, escolher $\alpha \in S \cap \beta$ tal que

$\varphi_\beta(\alpha) > \xi$. Mas, $V_\alpha \cap V_\beta \subseteq U_{\varphi_\beta(\alpha)}$ e $U_{\varphi_\beta(\alpha)} \cap \{y_\eta : \eta \leq \varphi_\beta(\alpha)\} = \emptyset$. Logo, $y_\xi \notin V_\alpha \cap V_\beta$. Contradição, visto que $\alpha, \beta \in S$. □

Lema A.2.3. *Se $x \in X$ é κ^+-bom e o espaço X é T_1 então x é um P_κ-ponto fraco em X.*

Demonstração. Considere a seguinte afirmação:

$$(*) \qquad \text{se } \omega_\alpha < \kappa \text{ então } x \text{ é um } P_{\omega_{\alpha+1}}\text{-ponto fraco.}$$

Vamos mostrar a afirmação por indução transfinita sobre α. Suponha que $\alpha = 0$ e $\kappa > \omega$. Como x é κ^+-bom e $\omega^+ \leq \kappa$, x é ω^{++}-bom e, portanto, pelo lema A.2.1, ω^+-medíocre. Visto que X é T_1, temos ainda que x é um P_ω-ponto fraco. Logo, pelo lema A.2.2, x é um P_{ω^+}-ponto fraco.

Suponha agora que $(*)$ seja verdadeira para um certo ordinal α. Suponha também que $\omega_{\alpha+1} < \kappa$. Então, por hipótese de indução, x é $P_{\omega_{\alpha+1}}$-ponto fraco. Além disso, x é $\omega_{\alpha+3}$-bom — haja vista que $\omega_{\alpha+2} \leq \kappa$ — e, portanto, pelo lema A.2.1, x é $\omega_{\alpha+2}$-medíocre. Do lema A.2.2 segue que x é $P_{\omega_{\alpha+2}}$-ponto fraco. Portanto, $\alpha + 1$ satisfaz a $(*)$.

Suponha enfim que α seja um ordinal limite e que todo $\beta < \alpha$ satisfaça $(*)$. Suponha que $\omega_\alpha < \kappa$. Então, x é P_{ω_α}-ponto fraco, pois se $A \subseteq X \setminus \{x\}$, com $|A| < \omega_\alpha$, então $|A| = \omega_\beta$ para algum $\beta < \alpha$; por hipótese de indução, x é $P_{\omega_{\beta+1}}$-ponto fraco e, portanto, $x \notin \overline{A}$. Do lema A.2.1 segue que x é $\omega_{\alpha+1}$-medíocre. Pelo lema A.2.2, temos que x é $P_{\omega_{\alpha+1}}$-ponto fraco. Portanto, α satisfaz a afirmação.

Provamos, assim, que todo ordinal α satisfaz a afirmação. Resta mostrar que x é P_{κ^+}-ponto fraco.

Para tanto, seja $A \subseteq X \setminus \{x\}$ tal que $|A| = \omega_\alpha < \kappa$. Da afirmação acima segue que x é $P_{\omega_{\alpha+1}}$-ponto fraco e, portanto, $x \notin \overline{A}$. □

Definição A.2.4. Um ultrafiltro x sobre κ é *regular* se existem $E_\alpha \in x$ $(\alpha < \kappa)$ tais que $\bigcap_{n\in\omega} E_{\alpha_n} = \emptyset$ sempre que os α_n $(n < \omega)$ forem distintos.

Lema A.2.5. *Existe uma família $\mathcal{F} \subseteq {}^\omega\omega$ tal que*

(*i*) $|\mathcal{F}| = 2^{\aleph_0}$;

(*ii*) *se* $f \in \mathcal{F}$, *então* $f(n) < 2^n$ *para todo* $n \in \omega$;

(*iii*) *se* $f, g \in \mathcal{F}$ *e* $f \neq g$, *então o conjunto* $\{n \in \omega : f(n) = g(n)\}$ *é finito.*

Demonstração. Para cada $\varphi \in {}^{\omega}2$ tome $f_\varphi \in {}^{\omega}\omega$ definida por

$$f_\varphi(n) = \sum_{m<n} \varphi(m) \cdot 2^m$$

para todo $n \in \omega$. Seja $\mathcal{F} = \{f_\varphi : \varphi \in {}^{\omega}2\}$. As três propriedades são imediatas. □

Sejam I um conjunto não vazio, U um ultrafiltro sobre I e, para cada $i \in I$, um conjunto não vazio A_i. Considere, ainda, o produto cartesiano $C = \prod_{\in I} A_i$. Dizemos que $f, g \in C$ são U-equivalentes — em símbolos $f =_U g$ — se, e somente se,

$$\{i \in I : f(i) = g(i)\} \in U.$$

É imediato que $=_U$ é uma relação de equivalência sobre C. Dado $f \in C$, podemos então definir a classe de equivalência de f:

$$f_U = \{g \in C : f =_U g\}.$$

O *produto reduzido de* A_i *módulo* U é definido por

$$\prod_U A_i = \{f_U : f \in \prod_{i \in I} A_i\}.$$

Proposição A.2.6. *Seja* U *um ultrafiltro sobre* I *enumeravelmente incompleto. Então, existe um produto reduzido* $\prod_U X_i$ *tal que cada* $|X_i| < \aleph_0$ *e* $|\prod_U X_i| \geq 2^{\aleph_0}$.

Demonstração. Como U é enumeravelmente incompleto existem $\{I_n : n \in \omega\} \subseteq U$ tal que $\bigcap_{n\in\omega} I_n = \emptyset$. Tome $J_n = \bigcap_{m<n} I_m \cap (I \setminus I_n)$. Note que $I = \bigcup_{n\in\omega} J_n$, $J_n \notin U$ e $\{n \in \omega : J_n \neq \emptyset\}$

é infinito. Podemos supor, portanto, que $J_n \neq \emptyset$ para todo $n \in \omega$. Escolha uma família de conjuntos $\{X_i : i \in I\}$ dois a dois distintos tais que, para cada $n \in \omega$ e cada $i \in J_n$, $|X_i| = 2^n$. Para cada $n \in \omega$ e cada $i \in J_n$, seja $\{x_{i,m} : m \in 2^n\}$ uma enumeração de X_i. Seja $\mathcal{F} \subseteq {}^{\omega}\omega$ como no lema A.2.5. Para cada $f \in \mathcal{F}$, defina $h_f : I \bigcup \to X_i$ por $h_f(i) = a_{i,f(n)}$, onde n é o único natural tal que $i \in J_n$. É fácil ver que se $f, g \in \mathcal{F}$, então

$$\{i \in I : h_f(i) = h_g(i)\} = \bigcup \{J_n : n \in \omega \text{ e } f(n) = g(n)\}.$$

Se $f \neq g$, então, pelo lema, a união acima é finita e, portanto, não está em U. Em outras palavras, $h_f \neq_U h_g$. Mostramos, desta forma, que $|\prod_U X_i| \geq |\mathcal{F}| = 2^{\aleph_0}$. □

Lema A.2.7. *Se $U \in \beta\kappa$ é κ^+-bom e enumeravelmente incompleto então U é regular.*

Demonstração. Como U é enumeravelmente incompleto, pela proposição A.2.6, existe $\prod_U X_\alpha$ com $|X_\alpha| = n_\alpha < \omega$ e $|\prod_D X_\alpha| \geq \omega$. Seja $\{\overline{f}_\gamma : \gamma < \kappa\}$ uma enumeração de $\prod_U X_\alpha$ com eventuais repetições.

Seja $x \in [\kappa]^{<\omega}$. Como $|\prod_U X_\gamma| \geq \omega$, existe $\overline{f} \in \prod_U X_\gamma$ tal que $\overline{f} \neq \overline{f}_\gamma$ para todo $\gamma \in x$. Então, $\{\alpha \in \kappa : \overline{f}(\alpha) \neq \overline{f}_\gamma(\alpha)\} \in U$ para todo $\gamma \in x$. Logo, $\bigcap_{\gamma \in x}\{\alpha < \kappa : \overline{f}(\alpha) = \overline{f}_\gamma(\alpha)\} \in U$. Como

$$\bigcap_{\gamma \in x}\{\alpha < \kappa : \overline{f}(\alpha) = \overline{f}_\gamma(\alpha)\} \subseteq \{\alpha \in \kappa : n_\alpha \setminus \{f_\gamma(\alpha) : \gamma \in x\} \neq \emptyset\},$$

temos que,

$$\{\alpha \in \kappa : n_\alpha \setminus \{f_\gamma(\alpha) : \gamma \in x\} \neq \emptyset\} \in U.$$

Podemos, então, tomar a função

$$\begin{array}{rcl} G: \ [\kappa]^{<\omega} & \to & U \\ x & \mapsto & \{\alpha \in \kappa : n_\alpha \setminus \{f_\gamma(\alpha) : \gamma \in x\} \neq \emptyset\} \end{array}$$

Afirmamos que G é monotônica. De fato, sejam $x, y \in [\kappa]^{<\omega}$ tais que $x \subseteq y$. Então, $\{f_\gamma(\alpha) : \gamma \in x\} \subseteq \{f_\gamma(\alpha) : \gamma \in y\}$. Daí, $n_\alpha \setminus \{f_\gamma(\alpha) : \gamma \in x\} \supseteq n_\alpha \setminus \{f_\gamma(\alpha) : \gamma \in y\}$ e, portanto, $g(x) \supseteq g(y)$.

Como U é enumeravelmente incompleto, existe uma sequência decrescente $(Y_n)_n$ de elementos de U tal que $Y_0 = \kappa$ e $\bigcap_n Y_n = \emptyset$. Tome

$$\begin{array}{rccl} G' : & [\kappa]^{<\omega} & \to & U \\ & x & \mapsto & G(x) \cap Y_{|x|} \end{array}.$$

É fácil ver que G' é monotônica. Como U é κ^+-bom, existe $H : [\kappa]^{<\omega} \to D$ tal que $H(x) \supseteq G'(x)$ para todo x. Temos, então, que para cada $\beta < \kappa$, $\{\alpha < \kappa : \beta \in H(\kappa \setminus \{\alpha\})\}$ é finito. Tome, assim, $\{H(\kappa \setminus \{\alpha\}) : \alpha < \kappa\}$. □

Lema A.2.8. *Sejam $\kappa \geq 2^\lambda$, y um ultrafiltro sobre λ e x um ultrafiltro regular sobre κ. Então, existe uma função sobrejetora $f : \kappa \to \lambda$ tal que $\beta f(x) = y$.*

Demonstração. Como $\kappa \geq 2^\lambda = |\mathcal{P}(\lambda)|$, podemos tomar uma enumeração $\{B_\alpha : \alpha < \kappa\}$ de y (com eventuais repetições).

Sejam $S_\alpha \in x$ $(\alpha < \kappa)$ como na definição A.2.4. Note que, para cada $\xi < \kappa$, $\{B_\alpha : \xi \in S_\alpha\}$ é finito[2]. Logo, cada $\bigcap\{B_\alpha : \xi \in S_\alpha\}$ é não vazio. Podemos, assim, escolher $g : \kappa \to \lambda$ tal que $g(\xi) \in \bigcap\{B_\alpha : \xi \in S_\alpha\}$.

Afirmamos que $\beta g(x) = y$. De fato, fixe $\alpha < \kappa$. Da definição de g segue que $S_\alpha \subseteq g^{-1}(B_\alpha)$. Como x é ultrafiltro, e, $S_\alpha \in x$, temos que $g^{-1}(B_\alpha) \in x$, donde, $B_\alpha \in \beta g(x)$. Assim, $y \subseteq \beta g(x)$. Visto que y é ultrafiltro, temos que $\beta g(x) = y$.

Mas, g pode não ser sobrejetora. Tome, então, $A \in x$ tal que $|\kappa \setminus A| = \kappa$, e, escolha $f : \kappa \twoheadrightarrow \lambda$ tal que $f \restriction A = g \restriction A$. Note que $\beta f(x) = \beta g(x) = y$. De fato, se $z \in \beta g(x)$ então $f^{-1}(z) \supset g^{-1}(z) \cap A \in x$, donde, $f^{-1}(z) \in x$, ie, $z \in \beta f(x)$. Portanto, $\beta f(x) = \beta g(x) = y$. □

Lema A.2.9. *Seja U é um ultrafiltro sobre κ. Se para cada partição $\{X_\alpha\}_{\alpha<\lambda}$ de κ, com $\lambda < \kappa$, existe $\alpha_0 < \lambda$ tal que $X_{\alpha_0} \in U$ então U é κ-completo.*

Demonstração. Sejam $\{Y_\alpha : \alpha < \lambda\} \subseteq U$, com $\lambda < \kappa$, e, $Y = \bigcap_{\alpha<\lambda} Y_\alpha$. Agora, para cada $\alpha < \lambda$ considere

$$P_\alpha = \{x \in \kappa : \alpha = \min\{\beta : x \notin Y_\beta\}\}.$$

[2]Caso contrário, existiria uma sequência $\langle \alpha_n : n < \omega \rangle$ em κ tal que $\xi \in \bigcap_{n\in\omega} S_{\alpha_n}$, donde, $\bigcap_{n\in\omega} S_{\alpha_n} \neq \emptyset$.

Seja $S = \{\alpha : P_\alpha \neq \emptyset\}$. É fácil verificar que cada $x \in \kappa \setminus Y$ pertence a um único P_α, donde, $Y \cup \{P_\alpha : \alpha \in S\}$ é uma partição de κ. Por hipótese, ou existe α tal que $P_\alpha \in U$ ou $Y \in U$. Como $P_\alpha \cap Y_\alpha = \emptyset$ então $Y = \bigcap_{\alpha<\lambda} Y_\alpha \in U$. □

Lema A.2.10. *Seja κ o menor cardinal com a propriedade de que existe um ultrafiltro não-principal e σ-completo sobre κ e seja U um tal ultrafiltro. Então, U é κ-completo.*

Demonstração. Seja U um ultrafiltro σ-completo sobre κ, e, assuma que U não é κ-completo. Então, pelo lema A.2.9, existe uma partição $\{X_\alpha : \alpha < \gamma\}$ de κ tal que $\gamma < \kappa$, e, $X_\alpha \notin U$ para todo $\alpha < \gamma$. Usaremos essa partição para construir um ultrafiltro σ-completo não-principal sobre γ, contradizendo, portanto, a escolha de κ.

Seja $f : \kappa \twoheadrightarrow \gamma$ definida como segue:

$$f(x) = \alpha \quad \text{sse} \quad x \in X_\alpha \qquad (x \in \kappa).$$

Considere

$$D = \{Z \subseteq \gamma : f^{-1}(Z) \in U\}.$$

É fácil ver que D é um ultrafiltro sobre γ. Resta mostrar que D é não-principal. Suponha, por absurdo, que $\{\alpha\} \in D$ para algum $\alpha < \gamma$. Então, $X_\alpha \in U$ contradizendo nossa hipótese sobre X_α. Portanto, existe um ultrafiltro σ-completo não-principal sobre γ. □

Referências Bibliográficas

[1] O. T. Alas, *On closures of discrete subsets*, Questions and answers in general topology **20** (2002), no. 1, 85–89.

[2] O. T. Alas, Vladimir V. Tkachuk, and Richard G. Wilson, *Closures of discrete sets often reflect global propertiesvladimir*, **25** (2000), 27–44.

[3] P. S. Alexandroff and P. S. Urysohn, *Mémoire sur les espaces topologiques compacts*, Verh. Kon. Akad. Wetensch. Amsterdam **14** (1929), no. 1, 96.

[4] A. V. Arhangel'skii, *A generic theorem in the theory of cardinal invariants of topological spaces*, Comment. Math. Univ. Carolin. **36** (1995), no. 2, 303–325.

[5] ———, *Homogeneity and complete accumulation points*, Topology Proceedings **32** (2008), 239–243.

[6] A. V. Arhangel'skii and R. Z. Buzyakova, *Convergence in compacta and linear lindelöfness*, Comment. Math. Univ. Carolin. **39** (1998), no. 1, 159–166.

[7] ———, *On some properties of linearly lindelöf spaces*, Topology Proceedings **23** (1998), 1–11.

[8] ———, *On linearly lindelöf and strongly discretely lindelöf spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **127** (1999), no. 8, 2449–2458.

[9] J. Baker and K. Kunen, *Limits in the uniform ultrafilters*, Trans. Amer. Math. Soc. **353** (2001), no. 10, 4083–4093.

[10] C. C. Chang and H. J. Keisler, *Model theory*, 3rd ed., Studies in logic and foundations of mathematics, vol. 73, North-Holland, 1990.

[11] Rodrigo Roque Dias, *Reflexão de funções cardinais e da metrizabilidade*, Master's thesis, IME-USP, agosto 2008.

[12] Alan Dow, *Recent results in set-theoretic topology*, Recent Progress in General Topology (M. Husek and J. van Mill, eds.), vol. II, North-Holland, 2002.

[13] R. Engelking, *General topology*, revised and completed ed., Sigma Series in Pure Mathematics, vol. 6, Heldermann, Berlin, 1989.

[14] Leonard Gillman and Meyer Jerison, *Rings of continuous functions*, D. Van Nostrand Company, 1960.

[15] R. E. Hodel, *Cardinal functions 1*, Handbook of Set-theoretic Topology (K. Kunen and J. E. Vaughan, eds.), North-Holland, 1984, pp. 1–62.

[16] N. R. Howes, *Ordered coverings and their relationships to some unsolved problems*, Proceedings of the Washington State University Conference on General Topology (1970), 60–68.

[17] ———, *A note on transfinite sequences*, Fund. Math. **106** (1980), 213–226.

[18] Michael Hrušák and Justin Tatch Moore, *Twenty problems in set-theoretic topology*, Open problems in Topology II, 2007, pp. 111–113.

[19] F. Ishikawa, *On countably paracompact spaces*, Proc. Japan Acad. **31** (1955), 686–687.

[20] Thomas Jech, *Set theory*, 3rd ed., Springer, 2006.

[21] István Juhász and Zoltán Szentmiklóssy, *Interpolation of κ-compactness and pcf*, Comment. Math. Univ.Carolinae **50** (2009), 315–320.

[22] Akihiro Kanamori, *The higher infinite: large cardinals in set theory from their beginnings*, first ed., Perspectives in mathematical logic, Springer, 1997.

[23] K. Kunen, *Locally compact linearly lindelöf spaces*, Comment. Math. Univ. Carolin. **43** (2002), no. 1, 155–158.

[24] ———, *Small locally compact linearly lindelöf spaces*, arXiv:math. (2005), 193–198.

[25] ———, *Set theory. an introduction to independence proofs*, tenth ed., Studies in logic and the foundations of mathematics, vol. 102, Elsevier, 2006.

[26] A. S. Miscenko, *Finally compact spaces*, Soviet Math. Dokl. (1962), no. 145, 1199–1202.

[27] Oleg Pavlov, *A first countable linearly lindelöf not lindelöf space*.

[28] Elliott Pearl, *Linearly lindelöf problems*, Open problems in Topology II, Elsevier, 2007, pp. 225–231.

[29] S. Shelah, *Cardinal arithmetic*, Oxford Logic Guides, vol. 29, Oxford University Press, 1994.

[30] Stephen Willard, *General topology*, Addison-Wesley, 1970.

Índice Remissivo

H_θ, 31
$L(X)$, 15
$M \prec N$, 30
$TC(A)$, 30
$Ult(\mathcal{A})$, 23
$[X]^{<\kappa}$, 5
$[X]^{\kappa}$, 5
$[X]^{\leq\kappa}$, 5
$\lim \alpha$, 6
$\models$, 30
φ^M, 29
$d(X)$, 11
$ot(A)$, 6
$st(\mathcal{A})$, 23
$t(X)$, 12
$t(x, X)$, 12
$w(X)$, 11

base
  para um filtro, 8

c.u.b., 6
cadeia
  elementar, 31
    contínua, 31
    ϵ-, 31
cardinal
  mensurável, 9
CH, 5
compactificação, 21
  de Stone-Čech, 22
conjunto
  estacionário, 7
critério de Tarski, 30

densidade, 11

espaço
  compacto, 15
  de Hausdorff, 11
  enumeravelmente
    compacto, 15
    metacompacto, 19
    paracompacto, 16
  localmente
    compacto, 15
  metacompacto, 19
  paracompacto, 16
  pseudocompacto, 17
  realcompacto, 25
  sequencial, 13

filtro, 7
  em $\mathcal{R}$, 7
  enumeravelmente
    completo, 9
    incompleto, 9
  gerado por, 8
  κ-

completo, 9
incompleto, 9
σ-
completo, *veja* filtro enumeravelmente completo
uniforme, 109

GCH, 5
grau
de Lindelöf, 15
hereditário
de Lindelöf, 16

κ-*covering*, 32

Lema *pressing-down*, 7

p.i.f., 8
peso, 11
propriedade da intersecção finita, *veja p.i.f.*

r, 57, 62, 69

separável, 11
sequência
livre, 13

T_1, 11
T_2, 11
T_3, 11
$T_{3\frac{1}{2}}$, 11
T_4, 12
tightness
de um espaço, 12
de um ponto, 12

ultrafiltro, 7

ZFC, 5

Índice remissivo