Relações geométricas entre espaços de operadores nucleares e espaços de operadores compactos

Ronald Eduardo Paternina Salguedo

Tese apresentada
ao
Instituto de Matemática e Estatística
da
Universidade de São Paulo
para
obtenção do título
de
Doutor em Matemática

Programa: Matemática
Orientador: Prof. Dr. Elói Medina Galego

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES e CNPq

São Paulo, 25 de Marzo de 2011

Relações geométricas entre espaços de operadores nucleares e espaços de operadores compactos

Este exemplar corresponde à redação
final da tese devidamente corrigida
e defendida por Ronald Eduardo Paternina Salguedo
e aprovada pela Comissão Julgadora.

Banca Examinadora:

- Prof. Dr. Elói Medina Galego (orientador) - IME-USP.
- Prof. Dr. Raymundo Luiz de Alencar - ITA
- Prof. Dr. Jorge Tulio Mujica Ascui - UNICAMP
- Prof. Dr. Antonio Roberto da Silva - UFRJ.
- Prof. Dr. Valentin Raphael Henri Ferenczi - IME-USP.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por ter-me dado a maravilhosa oportunidade de conhecê-lo um pouco mais durante o tempo em que dedique a este trabalho. Sem tê-lo como guia, nenhuma linha deste trabalho teria sido escrita.

Sou grato ao meu orientador, Prof. Elói Medina Galego, pela orientação e assistência na elaboração deste trabalho.

Expresso meus sinceros agradecimentos também ao Prof. Antonio De Padua, pela ajuda sempre pronta e irrestrita.

Sou eternamente grato a minha mulher, María Angélica , por seu amor e pelo constante estímulo e suporte nos dias em que estar sozinho seria um problema a mais; aos meus pais, Luís Eduardo e Magali pelos tantos momentos de carinho e compreensão.

Agradeço a todos os professores, colegas de curso e amigos que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

Finalmente, agradeço à CAPES e à CNPq, pelo auxílio financeiro durante a realização deste trabalho.

Resumo

Estamos interessados na geometria dos espaços de operadores nucleares $\mathcal{N}(E,F)$ e os espaços de operadores compactos $\mathcal{K}(E,F)$, onde E e F são espaços de Banach da forma $C([0,\alpha],X)$ das funções contínuas definidas no intervalo de números ordinais $[0,\alpha]$ a valores em X, com a norma do supremo.

Provamos que para certos espaços de Banach X tais que X^* é isomorfo a um subespaço de ℓ_1 e para qualquer subespaço Y de ℓ_p, com $1 < p < +\infty$, os espaços $\mathcal{N}(C([0,\lambda],X), C([0,\xi],Y))$ e $\mathcal{K}(C([0,\mu],X), C([0,\eta],Y))$ são de dimensão linear incomparáveis, para todos ordinais infinitos λ, ξ, μ e η.

Apesar disso, também mostramos que é relativamente consistente com ZFC que os espaços $\mathcal{N}(C([0,\lambda],X), C([0,\xi],Y))$ e $\mathcal{K}(C([0,\lambda],X), C([0,\xi],Y))$ com λ e ξ ordinais infinitos, têm a mesma classificação isomorfa.

Estes resultados generalizam resultados recentes sobre os espaços de operadores em espaços $C(K)$, onde K é um espaço métrico enumerável. Eles cobrem os casos de alguns espaços de Banach não clássicos X como de Alspach, Benyamini e Lindenstrauss, Bourgain e Delbaen e também Argyros e Haydon.

Abstract

We are concerned with the geometry of spaces of nuclear operators $\mathcal{N}(E, F)$ and spaces of compact operators $\mathcal{K}(E, F)$, where E and F are some Banach spaces $C([0, \alpha], X)$ of all continuous X-valued functions defined on the intervals of ordinal numbers $[0, \alpha]$ endowed with the supreme norm.

We prove that for certain Banach spaces X such that X^* is isomorphic to a subspace of ℓ_1 and for any subspace Y of ℓ_p, with $1 < p < +\infty$, the spaces $\mathcal{N}(C([0, \lambda], X), C([0, \xi], Y))$ and $\mathcal{K}(C([0, \mu], X), C([0, \eta], Y))$ are of incomparable linear dimensions, for every infinite ordinals λ, ξ, μ and η.

In spite of this, we also show that is relatively consistent with ZFC that the spaces $\mathcal{N}(C([0, \lambda], X), C([0, \xi], Y))$ and $\mathcal{K}(C([0, \lambda], X), C([0, \xi], Y))$, with λ and ξ infinite ordinals, have the same isomorphic classifications.

These results generalize some very recent theorems concerning the spaces of operators on $C(K)$ spaces, where K are countable metric spaces. They cover the cases of certain non-classical spaces X of Alspach, Benyamini and Lindenstrauss, Bourgain and Delbaen and also Argyros and Haydon.

Aos meus pais.

Senhor, você sabe todos meus desejos,
meus suspiros não são um segredo para você.
Salmo 38: 9

Sumário

Lista de Símbolos

$\mathbb{N}$	O conjunto dos números naturais.
$\mathbb{R}$	O conjunto dos números reais.
$\mathbb{C}$	O conjunto dos números complexos.
ω	O primeiro ordinal infinito.
ω_1	O primeiro ordinal não enumerável.
$[1, \xi]$	O intervalo $\{\gamma : 1 \leq \gamma \leq \xi\}$ munido da topologia da ordem.
$\overline{\alpha}$	O cardinal de um ordinal α.
$\|\Gamma\|$	A cardinalidade de um conjunto abstrato Γ.
X	Espaço de Banach.
X^*	O espaço de Banach de todos os funcionais lineares limitados de X.
B_X	A bola unitária fechada de X.
cX	A imagem canônica do espaço de Banach X no bidual X^{**}.
$C(K, X)$	O espaço de Banach das funções contínuas definidas no espaço topológico compacto K a valores em X, com a norma do supremo.
X^α	O espaço $C(K, X)$ quando $K = [1, \alpha]$.
X_o^α	O subespaço $\{x \in X^\alpha : x(\alpha) = 0\}$.
c_o	O espaço de Banach $\mathbb{R}_o^\omega$.
ℓ_1	O dual topológico de c_o.

ℓ_∞	O dual topológico de ℓ_1.
$[V]$	O subespaço gerado por $V \subset X$ no espaço de Banach X.
dens X	A densidade do espaço de Banach X, isto é, o menor número cardinal δ tal que existe um conjunto de cardinalidade δ denso em X.
$X\hat{\otimes}_\epsilon Y$	O produto tensorial injetivo dos espaços de Banach X e Y.
$X\hat{\otimes}_\pi Y$	O produto tensorial projetivo dos espaços de Banach X e Y.
$X \sim Y$	Quando X e Y são isomorfos , ou seja, se existe um operador linear contínuo injetor do espaço de Banach X sobre o espaço de Banach Y.
$Y \hookrightarrow X$	Quando X contém um subespaço isomorfo a Y.
$Y \overset{c}{\hookrightarrow} X$	Quando existe um subespaço B de X isomorfo a Y que é complementado em X, ou seja existe uma projeção linear de X sobre B.
$\ell_\infty(\Gamma, X)$	O espaço de Banach de todas as seqüências limitadas em Γ a valores no espaço de Banach X com a norma do supremo.
$c_o(\Gamma, X)$	O subespaço de $\ell_\infty(\Gamma, X)$ das funções f, tais que para cada $\epsilon > 0$ existe um subconjunto finito F_ϵ de Γ com $\|f(\gamma)\| < \epsilon$, para todo $\gamma \notin F_\epsilon$.
$\ell_1(\Gamma, X)$	O espaço de Banach das funções definidas em Γ, com valores no espaço de Banach X absolutamente somáveis com a norma $\|f\| = \sum_{\gamma\in\Gamma} \|f(\gamma)\|$.
$(\sum_{n=1}^\infty X_n)_o$	O espaço de Banach das seqüências $x = (x_n)_{n\geq 1}$, $x_n \in X_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ tais que $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = 0$ com a norma $\|x\| = \sup\{\|x_n\| : n \in \mathbb{N}\}$.
$(\sum_{n=1}^\infty X_n)_p$	$1 \leq p < +\infty$, é o espaço de Banach das seqüências $x = (x_n)_{n\geq 1}$ $x_n \in X_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tais que $(\sum_{n=1}^\infty \|x_n\|^p)^{\frac{1}{p}} < +\infty$ com a norma $\|x\| = (\sum_{n=1}^\infty \|x_n\|^p)^{\frac{1}{p}}$.

Introdução

Em 1960, Bessaga e Pełczyński provaram, em seu artigo [6] que se X é um espaço de Banach e α, β são ordinais infinitos com $\omega \leq \alpha \leq \beta < \omega_1$, então $\mathbb{R}^\alpha \sim \mathbb{R}^\beta$ se e só se $\beta < \alpha^\omega$, daí surge um problema interessante, que acontece no caso que α, β são ordinais não enumeráveis.

Nesse mesmo ano, Semadeni [59] dá uma resposta parcial negativa para o problema, ele provou que se X é o espaço $\mathbb{R}^{\omega_1 n}$ e X_S é o conjunto dos funcionais seqüêncialmente fraca-estrela contínuos em X^{**}, então $dim\frac{X_S}{X} = n$, provando que os espaços $\mathbb{R}^{\omega_1 n}$ são todos não isomorfos para todo $n \in \mathbb{N}$. Outras respostas parciais para o problema foram dadas em [42], mas o problema geral ainda não havia sido resolvido com sucesso, até que em 1975, S. V. Kislyakov em [41], S. P. Gul'ko e A. V. Os'kin em [31], publicaram a solução do problema que posteriormente passou a ser chamado de classificação isomorfa geral dos espaços das funções contínuas $\mathbb{R}^\alpha$.

Em 1955, Grothendieck [30] introduz o conjunto dos operadores nucleares de dois espaços de Banach X e Y denotado por $N(X, Y)$. Um operador $T : X \longrightarrow Y$ é nuclear, se existem seqüências $(x_n^*)_{n \leq 1}$ em X^* e $(y_n)_{n \leq 1}$ em Y com $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n^*\| \|y_n\| < +\infty$ tais que T admite a forma

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x) y_n, \qquad \text{para todo} \qquad x \in X.$$

Grothendieck prova [30] que todo operador nuclear é compacto, isto é, $N(X, Y) \subseteq K(X, Y)$ e propôs em seu artigo [30] o problema de determinar se existem espaços de Banach X e Y de dimensão infinita tais que todo operador compacto $T : X \longrightarrow Y$ é nuclear. Entretanto, já havia respostas negativas para esta questão com os trabalhos de A. Dvoretzky e C.

Rogers [20] para o caso particular que X é o espaço c_o e Y é um espaço de Banach quaisquer.

Em 1974, W. Johnson [35] prova que se X e Y são espaços de Banach com estrutura incondicional local, então existe um operador $T : X \longrightarrow Y$ compacto não nuclear. Este resultado serviu para determinar relações importantes entre o conjunto dos espaços de operadores nucleares e os espaços de operadores compactos. Por exemplo D. Pluglissi e G. Saluzzo [51] provaram que se X é um espaço de Banach com estrutura incondicional local, então $C(K, X)$ também tem estrutura incondicional local, portanto do resultado de W. Johnson e D. Pluglissi segue que:

$$N(C(K_1, X), C(K_2, Y)) \neq K(C(K_1, X), C(K_2, Y)), \tag{0}$$

para todos os compactos K_1 e K_2 e espaços de Banach X e Y com estrutura incondicional local.

Porem, neste trabalho estou interessado nas propriedades geométricas dos subespaços isomorfos aos espaços de operadores nucleares e compactos e as relações geométricas entre seus subespaços e na classificação isomorfa dos espaços de operadores nucleares e dos espaços de operadores compactos.

Um resultado muito importante para nosso trabalho é dado por Samuel em [57], "Sobre espaços de operadores em $C(K)$"onde K é um espaço métrico enumerável infinito. Samuel provou que $\mathcal{K}(X, Y)$ não contém nenhum subespaço isomorfo a $\mathcal{N}(X, Y)$ onde X e Y são espaços $C(K)$ com K métrico enumerável infinito. Isto é para todos os compactos K_1, K_2, K_3, K_4 métricos enumeráveis infinitos temos

$$\mathcal{N}(C(K_1), C(K_2)) \not\hookrightarrow \mathcal{K}(C(K_3), C(K_4)), \tag{1}$$

.

Entretanto Samuel não estuda a relação contrária de (1). Primeiramente, continuamos com o trabalho de Samuel e provamos que a seguinte afirmação também é válida

$$\mathcal{K}(C(K_1), C(K_2)) \not\hookrightarrow \mathcal{N}(C(K_3), C(K_4)). \tag{2}$$

Por outro lado, os outros dois principais resultados de [57] mostram que a geometria dos espaços de operadores nucleares e a geometria dos espaços de operadores compactos relacionados em (1) têm algumas semelhanças. Isto é, valem as seguintes leis de cancelamento,

$$\mathcal{N}(C(K_1), C(K_1)) \sim \mathcal{N}(C(K_2), C(K_2)) \iff C(K_1) \sim C(K_2). \tag{3}$$

$$\mathcal{K}(C(K_1), C(K_1)) \sim \mathcal{K}(C(K_2), C(K_2)) \iff C(K_1) \sim C(K_2), \tag{4}$$

onde K_1, K_2 são espaços métricos compactos enumeráveis infinitos.

O objetivo deste trabalho é estender e generalizar as fórmulas (1), (2), (3), (4) para os espaços de Banach $C(K_1, X)$ e $C(K_2, Y)$ onde K_1 e K_2 são compactos de ordinais não enumeráveis, X e Y pertencem a uma ampla classe de espaços de Banach (por exemplo X é tal que X^* é isomorfo ao espaço ℓ_1, e Y é um subespaço de ℓ_p com $1 < p < \infty$).

O método aqui utilizado difere radicalmente do método utilizado no referido artigo de Samuel. Naquela situação, a hipótese de K ser metrizável ajuda a obter uma identificação entre os espaços de operadores nucleares com um espaço da forma $\ell_1(\mathbb{N}, \mathbb{R}^\alpha)$, onde α é um ordinal enumerável. Assim Samuel usa um argumento bastante delicado com seqüências básicas em ℓ_1 para dar uma caracterização dos subespaços de $\mathcal{N}(\mathbb{R}^\alpha)$ que não contém ℓ_1, a partir daí junto com o Teorema de Bessaga e Pełczyński (veja [6]) é possível provar a equivalência (3).

Um argumento como este não funcionaria para provar (3) no caso que α é não enumerável e X é um espaço de Banach (não necessariamente $\mathbb{R}$). Uma dificuldade neste caso é o fato que o espaço de operadores nucleares $\mathcal{N}(X^\alpha, Y^\xi)$ está relacionado com o produto tensorial projetivo dos espaços $(X^\alpha)^*$ e Y^ξ. É bem-conhecido que existem espaços de Banach X e Y e subespaços E_1, E_2 de X e Y respectivamente, tais que $E_1 \hat{\otimes}_\pi E_2$ não é um subespaço de $X \hat{\otimes}_\pi Y$ (veja [34, pág. 155]), o que torna o estudo dos subespaços de operadores nucleares mais complicado. Ao contrário de $\mathcal{N}(X^\alpha, Y^\xi)$, os espaços de operadores compactos $\mathcal{K}(X^\alpha, Y^\xi)$ está relacionado ao produto tensorial injetivo dos espaços de $(X^\alpha)^*$ e Y^ξ, o que torna o estudo dos subespaços um pouco mais simples. A teoria do produto tensorial de espaços de Banach e a relação com os operadores nucleares são baseadas no trabalho de Grothendieck [30] e Pietsch [50].

No primeiro capítulo, descrevemos os fundamentos da teoria dos operadores nucleares e produtos tensoriais projetivos e injetivos dos espaços de Banach, incluindo a teoria da classificação isomorfa das funções contínuas a valores num espaço de Banach X (com X^* isomorfo a um subespaço de ℓ_1) definidas num intervalo de ordinais. A teoria foi introduzida por Kislyakov [41] para o caso real e por Galego [28] para o caso geral. Também estudamos a noção de espaços com a propriedade de aproximação e sua relação com o produto tensorial injetivo e projetivo. Descrevemos com muito detalhe o produto tensorial injetivo $\ell_1 \hat{\otimes}_\epsilon \ell_p$ e caracterizamos este espaço usando projeções sobre ℓ_p e seqüências em ℓ_1.

Achamos razoável incluir uma breve seção referente aos cardinais singulares e regulares, e também algumas propriedades relacionadas com os espaços $\ell_1(\Gamma)$. Estudamos exemplos de uma classe particularmente importante de espaços de Banach cujo dual é isomorfo ao espaço ℓ_1. Em particular estudamos os espaços de Bourgain e Delbaen e mencionamos algumas conseqüências destes espaços, com isso finalizamos o primeiro capítulo.

No segundo capítulo estudamos o isomorfismo entre o espaço $\mathcal{N}(X^\lambda, Y^\xi)$ e o espaço $\mathcal{K}(X^\mu, Y^\eta)$ onde λ, ξ, μ, η são ordinais infinitos. Provamos primeiro que (Teorema 2.2)

$$\mathcal{N}(X^\lambda, Y^\xi) \not\hookrightarrow \mathcal{K}(X^\mu, Y^\eta),$$

é válido para todos os ordinais λ, ξ, μ, η e uma ampla classe de espaços de Banach X e Y. Em seguida provamos que este resultado é válido para os espaços $X = Y = \mathbb{R}$ (Corolário 2.4), para Y subespaço de ℓ_p com $1 \leq p < \infty$, e todo espaço de Banach X com X^* isomorfo a ℓ_1 e concluímos a generalização e extensão de (1) (Teorema 2.8).

No capítulo 3 estudamos o isomorfismo entre o espaço $\mathcal{K}(X^\lambda, Y^\xi)$ e o espaço $\mathcal{N}(X^\mu, Y^\eta)$. Introduzimos os $\mathcal{N}_0$-espaços (Definição 3.2) e fornecemos exemplos particularmente interessante de $\mathcal{N}_0$-espaços, e estudamos propriedades elementares de este tipo de espaços. Finalizamos o capítulo provando a generalização e extensão de (2) (Teorema 3.6)

$$\mathcal{K}(X^\lambda, Y^\xi) \not\leftrightarrow \mathcal{N}(X^\mu, Y^\eta)$$

para todos os ordinais λ, ξ, μ, η e uma classe ampla de espaços de Banach X e Y.

No capítulo 4 apresentamos a classificação isomorfa dos espaços de operadores nucleares $\mathcal{N}(X^\lambda, Y^\xi)$ para todos os ordinais infinitos λ, ξ, e espaços de Banach X e Y (Teorema 4.14). Primeiro introduzimos alguns lemas pertinentes e úteis para a demonstração do resultado principal. Introduzimos os $\mathcal{N}_1$-espaços (Definição 4.6) e os $\mathcal{N}_\infty$-espaços (Definição 4.10) e estudamos propriedades e exemplos destes espaços. O capítulo termina com o estudo de conseqüências particulares do Teorema 4.14 no qual provamos uma generalização e extensão de (3) (Teorema 4.15).

No capítulo 5 introduzimos os $\mathcal{K}_0$-espaços (Definição 5.1) e fornecemos exemplos de estes espaços. O capítulo termina com a classificação isomorfa dos espaços de operadores compactos $\mathcal{K}(X^\lambda, Y^\xi)$, para todos os ordinais infinitos λ, ξ, e espaços de Banach X e Y tais que X^* é isomorfo ao espaço ℓ_1 e Y é um $\mathcal{K}_0$-espaço (Teorema 5.5). Finalmente, como conseqüência dos Teoremas 2.8, 3.7, 4.15 e 5.7 provamos que é consistente com ZFC que as seguintes generalizações e extensões de (1), (2), (3), (4) são verdadeiras :

Teorema 1 *Sejam* λ, μ, ξ, η *ordinais infinitos e* X, Y *espaços de Banach tais que* X *é um* $\mathcal{N}_0$*-espaço,* X^* *tem a propriedade de aproximação, e* Y *é um subespaço de* ℓ_p *com* $1 < p < \infty$. *Então ,*

1. $\mathcal{N}(X^\lambda, Y^\xi)$ e $\mathcal{K}(X^\mu, Y^\eta)$ *são de dimensão linear incomparável.*

   Além disso, se X *é um* $\mathcal{N}_1$*-espaço então são equivalentes as seguintes afirmações*

2. $\mathcal{N}(X^\lambda, Y^\xi) \sim \mathcal{N}(X^\mu, Y^\eta)$

3. $\mathcal{K}(X^\lambda, Y^\xi) \sim \mathcal{K}(X^\mu, Y^\eta)$

4. $\mathbb{R}^\xi \sim \mathbb{R}^\eta$ *ou,* $\mathbb{R}^\xi \sim \mathbb{R}^{\alpha p}$ e $\mathbb{R}^\eta \sim \mathbb{R}^{\alpha q}$,

   para α *algum ordinal inicial não enumerável,* p *e* q *ordinais finitos. Além disso,* λ *e* μ *tem a mesma cardinalidade.*

Chamaremos a atenção para o fato que todos os resultados dos capítulos 2,3,4,5 são originais.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, trataremos de alguns fatos básicos a respeito dos espaços das funções contínuas definidas sobre intervalos de ordinais a valores num espaço de Banach X. Eles são úteis para o estudo de problemas da classificação isomorfa de espaços de operadores nucleares e compactos.

Iniciamos lembrando os conceitos de ordinal regular e ordinal singular, tendo em vista sua grande utilidade na construção de uma teoria adequada da classificação isomorfa para os espaços das funções contínuas definidas num intervalo de ordinais não enumerável $[0, \alpha]$. Introduzida esta teoria, estudaremos os espaços $\ell_1(\Gamma)$, tendo em vista, a importância destes espaços no estudo dos espaços de operadores nucleares e compactos. Apresentaremos também as condições sobre o conjunto Γ para que o espaço $\ell_1(\Gamma)$ tenha a propriedade de Mazur.

Serão tratados os espaços com a propriedade de aproximação e também um pouco do produto tensorial projetivo dos espaços com a propriedade de aproximação e algumas propriedades associadas com os espaços de operadores nucleares. Estudaremos como se comporta o produto tensorial projetivo de dois espaços de Banach X e Y com respeito a subespaços dos espaços de Banach X e Y.

Em seguida, trataremos do produto tensorial injetivo e de isomorfismos associados a este produto, como é o isomorfismo entre os espaços de operadores compactos $\mathcal{K}(X, Y)$, e o produto tensorial injetivo dos espaços X^* e Y. Também descrevemos explicitamente um isomorfismo entre os espaços das funções contínuas $C(K, X)$ e o produto tensorial injetivo dos espaços $C(K)$ e X. Será utilizado o espaço $S\ell_p(X)$ e a técnica destes espaços para o cálculo do produto tensorial $\ell_1 \hat{\otimes}_\epsilon \ell_p$.

Encerramos o capítulo com a definição de distância de Mazur entre dois espaços de Banach. Estudamos espaços de Banach X que contém ℓ_∞^n uniformemente e descrevemos a relação destes espaços com o tipo e cotipo de um espaço de Banach X. Uma vez provada esta relação, estudaremos alguns espaços de Banach particularmente importante, cujo dual é isomorfo ao espaço ℓ_1 como é o espaço de Bourgain-Delbaen .

1.1 Cardinais regulares e singulares

Nesta seção, destacaremos alguns fatos importantes sobre o conceito de ordinal singular e regular. Nosso objetivo principal é provar uma caracterização equivalente dos cardinais singulares em termos de conjuntos. Vamos sempre ter em mente o fato que todo número cardinal é um ordinal inicial. Uma referência útil é [38].

Definição 1.1.1 Sejam I e J conjuntos, dizemos que I é eqüipotente com J se existe uma aplicação bijetora de I em J. Um ordinal α é dito inicial se para cada ordinal limite $\beta \leq \alpha$, se β é eqüipotente com α, então β é igual ao ordinal α.

Definição 1.1.2 Um número ordinal β é dito singular se existe uma seqüência transfinita crescente de ordinais $(\alpha_t)_{t<\lambda}$ tais que

1. $\alpha_t < \beta$ para todo $t < \lambda$
2. λ é um ordinal limite menor do que β
3. $\beta = \lim_{t\to\lambda} \alpha_t$

Se β não é um ordinal singular, então β é chamado ordinal regular.

Proposição 1.1.3 ([38, pág. 161]) *Seja I um conjunto abstrato com cardinal regular. Se $I = \bigcup_{t \in \Gamma} A_t$ onde Γ é um conjunto com $|\Gamma| < |I|$, então existe um $t_0 \in \Gamma$ tal que $|A_{t_0}| = |I|$.*

Proposição 1.1.4 ([38, pág. 162]) *Se α é um ordinal infinito, então $\aleph_{\alpha+1}$ é um cardinal regular.*

1.2 Classificação isomorfa dos espaços das funções contínuas

Nesta seção, trataremos de propriedades dos isomorfismos entre os espaços das funções contínuas definidas sobre um intervalo de ordinais a valores num espaço de Banach X. Nosso objetivo principal é obter a classificação isomorfa dos espaços X^α para X um espaço de Banach com X^* isomorfo a um subespaço de ℓ_1 e α um ordinal não enumerável. Discutiremos primeiramente o caso $X = \mathbb{R}$ e logo vamos utilizar a técnica abstrata de [27] e [28] para obter a classificação isomorfa geral. A seção termina com uma breve discussão sobre a teoria dos subespaços de $C(K, X)$ isomorfo aos espaços $\ell_1(\Gamma)$ e c_o.

Definição 1.2.1 Sejam X e Y espaços de Banach, um operador linear $T : X \longrightarrow Y$ é dito isomorfismo sobre a imagem se T é injetor com imagem fechada; é dito de posto finito se a imagem de T tem dimensão finita, e é dito compacto se a imagem por T da bola unitária de X é um subconjunto relativamente compacto de Y.

A teoria da classificação isomorfa das funções contínuas $\mathbb{R}^\alpha$ com α um ordinal enumerável é totalmente descrita no próximo teorema.

Teorema 1.2.2 (Bessaga e Pełczyński, [6, pág. 55]) *Sejam α, β números ordinais tais que $\omega \leq \alpha < \beta < \omega_1$ e X um espaço de Banach. Então são verdadeiras as seguintes afirmações:*

1. $\mathbb{R}^\alpha \sim \mathbb{R}^\beta$ *se e somente se* $\beta < \alpha^\omega$.

2. $X^\alpha \sim X_0^\alpha$.

3. $(X^\alpha)^\beta \sim X^{\alpha\beta}$.

4. $(X^\alpha)^n \sim X^{\alpha n}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Definição 1.2.3 Seja X um espaço de Banach e γ um ordinal limite, definimos X_γ como o conjunto dos funcionais $F \in X^{**}$ tais que:
Para cada seqüência $(x^*_\xi)_{\xi<\gamma}$ em X^* com $x^*_\xi(x) \to 0$, quando $\xi \to \gamma$ para todo $x \in X$, tem-se $F(x^*_\xi) \to 0$ quando $\xi \to \gamma$.

Observação 1.2.4 O espaço X_γ foi definido primeiramente em [59] para o caso em que $\gamma = \omega$. No referido artigo Semadeni prova que X_ω é um subespaço vetorial fechado de X^{**}, este resultado continua válido com a mesma prova, se substituirmos o ordinal ω por γ.

Definição 1.2.5 Dado um espaço mensurável $(X, \mathcal{A}, \mu)$, um subconjunto $B \in \mathcal{A}$ é dito um átomo se para todo subconjunto $A \subseteq X$ tal que $A \subseteq B$ implica que $\mu(A) = 0$ ou $\mu(A) = \mu(B) \neq 0$. Dizemos que uma medida μ é não atômica se não possui átomos.

Definição 1.2.6 Um número cardinal m é dito um cardinal mensurável se existe uma medida não atômica definida sobre a σ-álgebra cujos elementos são subconjuntos de um conjunto de cardinalidade m.

Definição 1.2.7 Um espaço topológico K é dito disperso se cada subconjunto fechado tem um ponto isolado.

Definição 1.2.8 Uma medida regular de Borel sobre K é uma função de conjunto μ não negativa definida sobre todos os subconjuntos Boreleanos de K tal que

1. μ é finita.

2. μ é enumeravelmente aditiva.

3. $\mu(E) = \sup \mu(F) = \inf \mu(G)$, onde F varia sobre os subconjuntos compactos de E e G sobre os conjuntos abertos que contém E.

Observação 1.2.9 Assumindo que K seja disperso, W. Rudin mostra em [55, Teorema 6] que cada medida regular de Borel sobre K é atômica. Esta condição é suficiente e necessária para que um espaço topológico compacto K seja disperso, como foi provado por Pełczyński e Semadeni.

Teorema 1.2.10 (Pełczyński e Semadeni, [49, pág. 215-217]) *Dado K um espaço de Hausdorff compacto. São equivalentes as seguintes afirmações*

1. *K é disperso.*

2. *Não existe subespaço de $C(K)$ isomorfo ao espaço ℓ_1.*

3. *Se μ é uma medida regular sobre K sem átomos, então μ é identicamente nula.*

4. *Se ξ pertence a $C(K)^*$ então existem seqüências $(a_n)_{n\geq 1}$ em $\mathbb{R}$ e $(t_n)_{n\geq 1}$ em K tais que:*
$$\xi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x(t_n) \quad e \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty.$$

Observação 1.2.11 É bem-conhecido que o intervalo $[0, \alpha]$ é um espaço topológico compacto disperso para qualquer ordinal α (veja [22] ou [60]). Então decorre imediatamente do ítem 4 do Teorema 1.2.10 que:
$$(\mathbb{R}^{\alpha})^* \sim \ell_1([0, \alpha]) \quad \text{e} \quad \ell_1([0, \alpha])^* \sim \ell_\infty([0, \alpha]). \tag{1.2.1}$$

Isso significa que:
$$(\mathbb{R}^{\alpha})^{**} \sim \ell_\infty([0, \alpha]). \tag{1.2.2}$$

Definição 1.2.12 Seja γ um ordinal regular não enumerável e α um ordinal qualquer. Por $m_\gamma([0,\alpha])$ denotamos o conjunto dos $x^{**} \in \ell_\infty([0,\alpha])$ tais que:
Para cada ordinal limite $\beta < \gamma$ e cada seqüência $(x^*_\xi)_{\xi<\beta}$ com $x^*_\xi \to x^*$ na topologia fraca-estrela quando $\xi \to \beta$, então $x^{**}(x^*_\xi) \to x^{**}(x^*)$ quando $\xi \to \beta$.

Observação 1.2.13 A pergunta natural que surge é se existe uma relação entre o espaço $m_\gamma([0,\alpha])$ e o espaço X_γ quando $X = \mathbb{R}^\alpha$ onde α é um ordinal não enumerável. Em [41] Kislyakov nos dá uma resposta afirmativa para esta pergunta. Além disso, Kislyakov mostra em [41] que a existência de esta relação permite-nos obter a classificação isomorfa completa para os espaços $\mathbb{R}^\alpha$ com α um ordinal qualquer.

Teorema 1.2.14 (Kislyakov, [41, pág. 227]) *Sejam ξ e η dois números ordinais e α um ordinal inicial. Suponhamos que $\overline{\xi} = \overline{\eta} = \overline{\alpha}$ e $\xi \leq \eta$, então:*

1. *Se $\alpha = \omega$ ou α é singular ou α é regular com $\xi, \eta \geq \alpha^2$, então $\mathbb{R}^\xi \sim \mathbb{R}^\eta$ se e somente se $\eta < \xi^\omega$.*

2. *Se α é regular não enumerável com $\xi, \eta \in [\alpha, \alpha^2]$ e $\xi', \eta', \gamma, \delta$ são números ordinais tais que $\xi = \alpha\xi' + \gamma$, $\eta = \alpha\eta' + \delta$ e $\xi', \eta' \leq \alpha$ e $\gamma, \delta < \alpha$. Então $\mathbb{R}^\xi \sim \mathbb{R}^\eta$ se e somente se $\overline{\xi'} = \overline{\eta'}$. Além disso, são válidas*

$$\mathbb{R}^\xi \sim \mathbb{R}^{\alpha\xi'} \quad e \quad \mathbb{R}^\eta \sim \mathbb{R}^{\alpha\eta'}. \tag{1.2.3}$$

Definição 1.2.15 Dado um ordinal φ, uma φ-seqüência sobre um subespaço A de X é uma aplicação $f : [1,\varphi] \longrightarrow A$, denotamos por $(x_\theta)_{\theta<\varphi}$ a imagem da aplicação f.

Definição 1.2.16 Dada uma φ-seqüência $(x_\theta)_{\theta<\varphi}$, dizemos que $(x_\theta)_{\theta<\varphi}$ é β-contínua se para cada β-seqüência crescente de ordinais $(\theta_\xi)_{\xi<\beta}$ de $[1,\varphi]$ que converge para θ_β quando ξ converge para β, tivermos x_{θ_ξ} para x_{θ_β}.

Definição 1.2.17 Seja α um ordinal regular não enumerável, e φ um ordinal qualquer.

Definimos X_α^φ como o conjunto dos funcionais $F \in X^{**}$ tendo a seguinte propriedade: Para cada ordinal limite $\beta < \alpha$ e cada seqüência $x^\eta = (x_\xi^*(\eta))_{\xi<\beta}$ de β-seqüência em X^*, tais que existe um número real positivo M com $\| x_\xi^*(\eta) \| \leq M$ para cada $\eta < \varphi$ e cada $\xi < \beta$, tal que para cada $x \in X$ $x_\xi^*(\eta)(x) \to 0$ quando ξ converge para β, uniformemente em η, então $F(x_\xi^*(\eta)) \to 0$ quando ξ converge para β uniformemente em η.

Se X é um espaço de Banach e α é um ordinal regular não enumerável, definimos o conjunto

$$[X]_\alpha = \bigcap_{\varphi<\overline{\alpha}} X_\alpha^\varphi. \tag{1.2.4}$$

Observação 1.2.18 É imediato que se cX é a imagem canônica de X em X^{**}, então $cX \subseteq X_\alpha^\varphi$ (já que $cx(x_\xi^*(\eta)) = x_\xi^*(\eta)(x)$ para cada $x \in X$ e cada $\eta < \varphi$). Um argumento semelhante ao usado por Semadeni em [59], prova que X_α^φ é um subespaço vetorial fechado. Consideremos agora Y um espaço de Banach e X um subespaço fechado de Y. Seja $i : X \longrightarrow Y$ a aplicação inclusão natural de X em Y. Definindo $T(x^{**} + cX) = i^{**}x^{**} + cY$, temos que T é um operador linear bem-definido e injetor de $\frac{[X]_\alpha}{cX}$ em $\frac{[Y]_\alpha}{cY}$.

Proposição 1.2.19 (Galego, [28, pág. 729]) *Se X é um subespaço fechado de um espaço de Banach Y e α é um ordinal regular não enumerável, então*

$$\frac{[X]_\alpha}{cX} \hookrightarrow \frac{[Y]_\alpha}{cY}. \tag{1.2.5}$$

Definição 1.2.20 Seja α um ordinal regular não enumerável, γ um ordinal qualquer e X um espaço de Banach. Por $m_\alpha([0,\varphi], X)$ denotaremos o subespaço fechado de $\ell_\infty([0,\varphi], X^{**})$ formado pelas $(\varphi+1)$-seqüências $(x_\theta^{**})_{\theta<\varphi+1}$ de X^{**} que são β-contínuas para cada $\beta < \alpha$, e tais que x_θ^{**} pertence a $[X]_\alpha$ para cada $\theta \leq \varphi$.

Definição 1.2.21 Um espaço de Banach X tem a propriedade de Banach-Mazur se cada elemento de X^{**} o qual é seqüêncialmente fraca-estrela contínuo em X^{**} é fraca-estrela contínuo e assim um elemento de X. Estes espaços foram investigados em [21] e [40].

Proposição 1.2.22 (Galego, [28, pág. 729-731]) *Seja α um ordinal regular não enumerável e consideramos X um espaço de Banach com a propriedade de Mazur. Se φ é um ordinal qualquer, então:*

1. $[X^\varphi]_\alpha \sim m_\alpha([0,\varphi],X).$ (1.2.6)

2. $\frac{[X^\varphi]_\gamma}{c(X^\varphi)} \sim \frac{m_\alpha([0,\varphi],X)}{c(X^\varphi)} \sim c_o(\Lambda^\alpha_\varphi, X),$ (1.2.7)

onde Λ^α_φ é o conjunto dos ordinais em $[0,\varphi]$ com cofinalidade menor que $\overline{\alpha}$.

Observação 1.2.23 A prova do Lema 4.2 em [41] (veja também a dissertação de Galego [lema 2.5, pág. 43]), mostra que se $\alpha = \alpha'\varphi$ com $\alpha' \leq \alpha$, então $|\Lambda^\alpha_\varphi| = \overline{\alpha'}$. Portanto, o isomorfismo 1.2.7 pode ser escrito como

$$\frac{[X^\varphi]_\gamma}{c(X^\varphi)} \sim \frac{m_\alpha([0,\varphi],X)}{c(X^\varphi)} \sim c_o([0,\alpha'],X). \tag{1.2.8}$$

Observação 1.2.24 Galego em [27, Teorema 1.1] fornece importantes conseqüências da Proposição 1.2.22. Por exemplo Galego prova a classificação isomorfa dos espaços $c_o(\Gamma,X)^\xi$, para Γ um conjunto qualquer e X um espaço de Banach com a propriedade de Mazur e $|\Gamma| dens\ X^* < \overline{\alpha}$ (veja [27, pág. 3336]). Em nosso caso, o espaço X é tal que X^* é isomorfo a um subespaço de ℓ_1 e Γ é um conjunto unitário. Portanto, é possível aplicar o Teorema 1.1 de [27] para concluir a próxima proposição.

Proposição 1.2.25 (Galego, [27, Teorema 1.1]) *Seja X um espaço de Banach com a propriedade de Mazur e que não contém subespaço isomorfo ao espaço c_o e X^* é isomorfo a um subespaço de ℓ_1. Seja α um ordinal inicial não enumerável, e sejam ξ, η ordinais não enumeráveis tais que $\xi \leq \eta$. São verdadeiras as seguintes afirmações:*

1. *Se* $X^\xi \sim X^\eta$ *então* $\overline{\xi} = \overline{\eta}$.

2. *Seja* $\overline{\xi} = \overline{\eta} = \overline{\alpha}$ *e suponhamos que* α *é um ordinal singular ou* $\alpha = \omega$ *ou* α *é um ordinal regular não enumerável com* $\xi, \eta \geq \alpha^2$. *Então* $X^\xi \sim X^\eta$ *se e só se* $\eta < \xi^\omega$.

3. *Seja* α *um ordinal regular não enumerável com* $\xi, \eta \in [\alpha, \alpha^2]$; *e* $\xi', \eta', \gamma, \delta$ *são ordinais tais que*

$$\xi = \alpha\xi' + \gamma, \quad \eta = \alpha\eta' + \delta, \quad \xi', \eta' \leq \alpha, \quad \gamma, \delta < \alpha$$

Então $X^\xi \sim X^\eta$ *se e só se* $\overline{\xi'}$ *e* $\overline{\eta'}$ *são finitos ou* $\overline{\xi'}$ *e* $\overline{\eta'}$ *são infinitos com igual cardinalidade.*

Proposição 1.2.26 (Galego, [28, pág. 732]) *Seja* X *um espaço de Banach com a propriedade de Mazur. Se* ξ *é um ordinal infinito com* $\mathbb{R}^{\xi^\omega}$ *isomorfo a um subespaço de* X^ξ, *então* c_o *é isomorfo a um subespaço de* X.

Proposição 1.2.27 (Galego, [27, pág. 3337]) *Seja* X *um espaço de Banach com a propriedade de Mazur. Se* α *é um ordinal inicial infinito e existe um ordinal não nulo* $\eta < \alpha$ *com* $\mathbb{R}^\alpha$ *isomorfo a um subespaço de* X^η, *então* c_o *é isomorfo a um subespaço de* X.

Proposição 1.2.28 (Samuel, [56, pág. 107]) *Se* c_o *é isomorfo a um subespaço de* Y^n *para algum* $n \in \mathbb{N}$, *então* c_o *é isomorfo a um subespaço de* Y.

Observação 1.2.29 Samuel também prova em [56, Teorema 4.1, pág. 107] que este resultado é verdadeiro em geral, para os espaços ℓ_p com $1 \leq p < \infty$.

Observação 1.2.30 Uma situação interessante é quando K é um espaço topológico compacto disperso, nesta situação $C(K, \mathbb{R})$ (e portanto $C(K, X)$) é muito rico em cópias complementadas de c_o, como provaram Lotz, Peck e Porta em [47].

Teorema 1.2.31 (Galego, [25, pág. 91-93]) *Seja α um número ordinal, X, H espaços de Banach e K um espaço topológico compacto disperso. Então:*

1. *Se H é isomorfo a um subespaço complementado de $C(K, X)$, então ou H é isomorfo a um subespaço complementado de X^n para algum $n \in \mathbb{N}$ ou c_o é isomorfo a um subespaço de H.*

2. *Se H é isomorfo a um subespaço de X^α, então ou H é isomorfo a um subespaço de X^n para algum $n \in \mathbb{N}$ ou H comtém cópia de c_o complementada em X^α.*

1.3 Sobre os espaços $\ell_1(\Gamma)$

Nesta seção, vamos estudar um pouco mais detalhadamente os espaços $\ell_1(\Gamma)$ com Γ um cardinal maior que $\aleph_0$. Também estudaremos o comportamento das seqüências disjuntamente suportadas em $\ell_1(\mathbb{N}, X)$ e em $c_o(\mathbb{N}, X)$ e descreveremos as propriedades canônicas destas seqüências no caso que X é o espaço ℓ_1. Finalizamos a seção apresentando brevemente a relação entre os funcionais seqüencialmente fraca-estrela contínuos em $\ell_1(\Gamma)$ e o cardinal de Γ. Todos os detalhes sobre as afirmações a seguir podem ser encontrados em [50], [52], [53] e [54].

Inicialmente, recordemos um fato importante a respeito da relação entre subespaços complementados de X isomorfo ao espaço $\ell_1(\Gamma)$ e os subespaços de X^* isomorfo ao espaço $c_o(\Gamma)$.

Teorema 1.3.1 (Rosenthal, [52, pág. 17]) *Seja X um espaço de Banach e Γ um conjunto infinito. Se $c_o(\Gamma)$ é isomorfo a um subespaço de X^*, então $\ell_1(\Gamma)$ é isomorfo a um subespaço complementado de X (e conseqüentemente $\ell_\infty(\Gamma)$ é isomorfo a um subespaço de X^*).*

Teorema 1.3.2 (Rosenthal, [53, pág. 212]) *Seja X um espaço de Banach e Γ um conjunto infinito. Se $T : \ell_\infty(\Gamma) \longrightarrow X$ é um operador linear tal que $T|_{c_o(\Gamma)}$ é um isomorfismo sobre a imagem (ou $\inf_{\lambda\in\Gamma} \|Te_\lambda\| > 0$), então existe um subconjunto $\Gamma' \subseteq \Gamma$ com $|\Gamma'| = |\Gamma|$ tal que $T|_{\ell_\infty(\Gamma')}$ é um isomorfismo sobre a imagem.*

Observação 1.3.3 **([50, pág. 25])** Para fixar a notação vamos descrever algumas propriedades de $\ell_1(\Gamma)$. Seja $(x_i)_{i\in\Gamma}$ uma família de funções em $\ell_1(\Gamma)$ e denotemos por $\mathfrak{F}(\Gamma)$ a família formada pelos subconjuntos finitos de Γ. Observamos que cada elemento J de $\mathfrak{F}(\Gamma)$ está associado a uma família $(x_i(J))_{i\in\Gamma}$ em $\ell_1(\Gamma)$ definida por $x_i(J) = x_i$ para $i \in J$ e $x_i(J) = 0$ para cada $i \notin J$. Introduzimos na família $\mathfrak{F}(\Gamma)$ uma relação de ordem declarando que $J_1 \geq J_2$ se e só se $J_1 \supset J_2$. Para todo $J \in \mathfrak{F}(\Gamma)$ podemos definir o operador projeção $P_J : \ell_1(\Gamma) \longrightarrow \ell_1(\Gamma)$ como

$$P_J((x_i)_{i\in\Gamma}) = (x_i(J))_{i\in\Gamma}$$

Proposição 1.3.4 **([50, pág. 28])** *Seja X um espaço de Banach e Γ um conjunto infinito. As seguintes afirmações são verdadeiras:*

1. $\lim_J P_J(x) = x, \quad$ para todo $x \in \ell_1(\Gamma)$;
2. $\ell_1(\Gamma) \sim \ell_1(\Gamma) \oplus \ell_1(\Gamma)$;
3. *Se X^* é isomorfo a um subespaço de ℓ_1, então $\ell_1(\Gamma, X^*)$ é isomorfo a um subespaço de $\ell_1(\Gamma)$;*
4. *$\ell_1(\Gamma)$ é isomorfo a um subespaço complementado de $\ell_1(\Gamma, X)$.*

Teorema 1.3.5 **([45, pág. 31])** *c_o não é isomorfo a um subespaço de $\ell_1(\Gamma)$.*

Definição 1.3.6 Seja X um espaço de Banach, e $(x_n)_{n\geq 1}$ uma seqüência em X, dizemos que $(x_n)_{n\geq 1}$ é uma base para X (respectivamente seqüência básica) se para cada $x \in X$ (respectivamente para cada $x \in [x_i]_{i=1}^{\infty}$) existe uma única seqüência de escalares $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ tais que $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$, cuja convergência é na norma de X. Dizemos que a base $(x_n)_{n\geq 1}$ é incondicional se a série $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ converge incondicionalmente a x.

Observação 1.3.7 Suponha que $(x_n)_{n\geq 1}$ é uma base para X. Então neste caso, existe uma seqüência de funcionais lineares $(f_n)_{n\geq 1}$ em X^* definida por:

$$f_n x = f_n\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i\right) = a_n. \tag{1.3.1}$$

Definição 1.3.8 Uma base $(x_n)_{n\geq 1}$ é dita contrátil se $(f_n)_{n\geq 1}$ definida como em (1.3.1) é uma base de X^*.

Definição 1.3.9 Dada $(x_n)_{n\geq 1}$ uma base de X e $(f_n)_{n\geq 1}$ como na Equação 1.3.1, definimos o suporte de $x \in X$ com respeito a $(x_n)_{n\geq 1}$ e $(f_n)_{n\geq 1}$ como o conjunto dos $n \in \mathbb{N}$ tais que $f_n x \neq 0$; denotamos tal conjunto por supp x.

Observação 1.3.10 Denotamos por c_{oo} o espaço das seqüências de suporte finito. Quando x e y estão em c_{oo} denotamos por $\mathrm{ran}(x)$ o menor intervalo em $\mathbb{N}$ contendo seu suporte. Escrevemos $x < y$ quando $maxran(x) < minran(y)$. Se $x_1 < x_2 < ... < x_n < ...$ diremos que $x_1, x_2 ... x_n, ...$ são sucessivos. Dada uma seqüência $(x_i)_{i\geq 1}$ básica, dizemos que uma seqüência $(y_j)_{j\geq 1}$ é disjuntamente suportada com respeito a $(x_i)_{i\geq 1}$ se existem $q_1 < q_2 < ... < q_n < ...$ tal que $y_j \in [x_i : q_{j-1} < i < q_j]$. Mais geralmente, se X tem uma descomposição de Schaudder $X = \bigoplus_{n\geq 1} F_n$ dizemos que $(y_j)_{j\geq 1}$ é uma seqüência disjuntamente suportada com respeito a $(F_n)_{n\geq 1}$ se existem $0 = q_o < q_1 < q_2 < ... < q_n < ...$ tais que $y_j \in \bigoplus_{q_{j-1}<n<q_j} F_n$.

Definição 1.3.11 Dadas quaisquer seqüências básicas $(x_n)_{n\geq 1}$ em X e $(y_n)_{n\geq 1}$ em Y, dizemos que $(x_n)_{n\geq 1}$ e $(y_n)_{n\geq 1}$ são equivalentes se a convergência da série $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ é equivalente à convergência da série $\sum_{i=1}^{\infty} a_i y_i$.

Definição 1.3.12 Uma seqüência $(x_n)_{n\geq 1}$ sobre X é dita semi normalizada se $0 < \inf \|x_n\| < \sup \|x_n\| < +\infty$.

Definição 1.3.13 Seja $(x_n)_{n\geq 1}$ uma seqüência em X. Se para cada $x^* \in X^*$ a seqüência $(x^*(x_n))_{n\geq 1}$ é convergente então $(x_n)_{n\geq 1}$ é dita fracamente de Cauchy.

Teorema 1.3.14 (Rosenthal, [54, pág. 2411]) *Seja X um espaço de Banach e $(x_n)_{n\geq 1}$ uma seqüência limitada em X. Então $(x_n)_{n\geq 1}$ admite uma subseqüência $(x'_n)_{n\geq 1}$ que satisfaz uma das seguintes afirmações mutuamente exclusivas:*

1. $(x'_n)_{n\geq 1}$ *é fracamente de Cauchy.*

2. $(x'_n)_{n\geq 1}$ *é uma seqüência básica de ℓ_1.*

Definição 1.3.15 Se X é um espaço de Banach, definimos $c_o(X)$ como o espaço das seqüências $(x_n)_{n\geq 1}$ tais que $x_n \in X$ para cada $n \in \mathbb{N}$, e $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = 0$.

Observação 1.3.16 O espaço $c_o(X)$ munido da norma $\|x\| = \sup_{n\geq 1} \|x_n\|$ tem estrutura de espaço de Banach. Existe uma relação entre $c_o(\ell_1)$ e o espaço $(\sum_{n=1}^{\infty} \ell_\infty^n)_1$ (o qual é definido como o espaço $(\ell_\infty^1 \oplus \ell_\infty^2 \oplus ... \oplus \ell_\infty^n \oplus ...)$ com a norma de ℓ_1).

Proposição 1.3.17 (Cembranos, [12, pág. 295]) *Não existe subespaço de $c_o(\ell_1)$ isomorfo ao espaço $(\sum_{n=1}^{\infty} \ell_\infty^n)_1$.*

Observação 1.3.18 Consideremos $(x_n)_{n\geq 1}$ uma base para X, então as aplicações $P_n : X \longrightarrow X$ definidas por $P_n x = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k$ são projeções lineares bem-definidas em X. As normas dos operadores $(P_m)_{m\geq 1}$ são bem comportadas, isto é, não é difícil provar ([44, pág. 1]) que existe um número real positivo M tal que $\|P_m\| \leq M$ para todo $m \in \mathbb{N}$. O menor número real $M > 0$ é chamado de constante básica da seqüência $(x_n)_{n\geq 1}$. Em [45, pág. 25] se provou que cada seqüência disjuntamente suportada e normalizada em c_o ou em ℓ_p com $1 \leq p < \infty$ é equivalente à base canônica de c_o ou de ℓ_p com $1 \leq p < \infty$ respectivamente. As mesmas considerações feitas nesta demonstração mostram que cada seqüência disjuntamente suportada e normalizada de $c_o(\mathbb{N}, X)$, $\ell_p(\mathbb{N}, X)$ com $1 \leq p < \infty$ (com respeito a descomposição de Schaudder de $c_o(\mathbb{N}, X)$, $\ell_p(\mathbb{N}, X)$) é equivalente à base canônica de c_o, ℓ_p respectivamente. Por último lembramos que uma seqüência $(x_n)_{n\geq 1}$ é equivalente à base canônica $(e_n)_{n\geq 1}$ de ℓ_1 se e só se. existem números reais positivos a, b tais que para quaisquer $(c_n)_{n\geq 1}$ escalares têm-se:

$$a\sum_{i=1}^{n}|c_i| \leq \left\|\sum_{i=1}^{n} c_i x_i\right\| \leq b\sum_{i=1}^{n}|c_i| \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.3.2}$$

Teorema 1.3.19 ([45, pág. 25]) *Seja X um espaço de Banach. São verdadeiras as seguintes afirmações*

1. *Se $(w_n)_{n\geq 1}$ é uma seqüência disjuntamente suportada em $\ell_p(\mathbb{N}, X)$ (ou $c_o(\mathbb{N}, X)$) com $1 \leq p < \infty$ e $(w_n)_{n\geq 1}$ é normalizada, então $(w_n)_{n\geq 1}$ é equivalente à base canônica de ℓ_p (ou c_o) com $1 \leq p < \infty$.*

2. *Se $(x_n)_{n\geq 1}$ é uma base contrátil de X (por exemplo de c_o ou ℓ_p com $1 \leq p < \infty$) e $(w_n)_{n\geq 1}$ é uma seqüência disjuntamente suportada e convergente, então o limite é zero.*

Observação 1.3.20 Seja X um espaço de Banach e $(x_n)_{n\geq 1}$ uma seqüência em X. Não é difícil provar que $(x_n)_{n\geq 1}$ é uma seqüência básica incondicional se e só se existe um $k > 0$ tal que para todas as seqüências de escalares $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ e $(\beta_n)_{n\geq 1}$ com $|\alpha_n| \leq |\beta_n|$, então

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n\right\| \leq k \left\|\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n x_n\right\|$$

O menor número k é chamado de constante de incondicionalidade.

Definição 1.3.21 Se X é um espaço de Banach, dizemos que X tem uma estrutura incondicional local se existe um número positivo M e uma família de subespaços de dimensão finita $(E_\alpha)_{\alpha\in I}$ de X ordenados por inclusão, cujo fecho da união é o espaço X e todos os E_α têm uma base incondicional $(x_n^\alpha)_{n=1}^{d(\alpha)}$ cuja constante de incondicionalidade K_α satisfaz que

$K_\alpha \leq M$ para cada $\alpha \in I$.

Observação 1.3.22 Denotemos por $\mathfrak{F}_X$ o conjunto dos subespaços de dimensão finita do espaço de Banach X. Existe outra definição de estrutura incondicional local dada por Gordon-Lewis em [17, pág. 345]. Seja X um espaço de Banach, dizemos que X tem estrutura incondicional local (de acordo com Gordon-lewis) se existe uma constante $\Lambda \geqslant 1$ tal que para todo $E \in \mathfrak{F}_X$ a injeção canônica tem uma fatoração da forma $E \xrightarrow{v} Y \xrightarrow{u} X$, onde Y é um espaço de Banach com base incondicional (com constante de base incondicional $\mu b(Y)$), u e v são operadores lineares limitados que satisfazem a desigualdade $\|u\|\|v\|\mu b(Y) \leqslant \Lambda$. O menor Λ é chamado de constante de incondicionalidad local de X e é denotada por $\Lambda(X)$.

Exemplo 1.3.23 ([35]) Um exemplo de espaços com estrutura incondicional local é o espaço $C(K)$ com K um espaço topológico compacto (veja também [17, pág. 345] para provar que tem estrutura incondicional local no sentido de Gordon-lewis.)

Teorema 1.3.24 (Pluglissi e Saluzzo, [51, pág. 144]) *$C(K, X)$ tem estrutura incondicional local se X tem.*

Teorema 1.3.25 (Edgar, [21, pág. 577]) *Se Γ é um conjunto qualquer, então $\ell_1(\Gamma)$ tem a propriedade de Mazur se e sómente se Γ é um cardinal de valores reais não mensurável.*

1.4 Produto tensorial projetivo e espaços de operadores nucleares

Nesta seção, discutiremos a teoria do produto tensorial projetivo e mostraremos como a mesma pode ser utilizada para estudar os espaços dos operadores nucleares. Também mostraremos uma fórmula de Grothendieck para o cálculo do produto tensorial projetivo entre $\ell_1(\Gamma)$ e X, a qual é uma ferramenta indispensável para nosso trabalho. Todos os detalhes sobre as afirmações a seguir podem ser encontradas em [16], [18], [44], [45].

Para fixar a notação vamos agora definir o que entendemos por espaço com a propriedade de aproximação.

Definição 1.4.1 Um espaço de Banach X tem a propriedade de aproximação se para cada subconjunto compacto K de X e todo $\epsilon > 0$, existe um operador $T : X \longrightarrow X$ de posto finito tal que $\|T(x) - x\| < \epsilon$ para todo $x \in K$.

Observação 1.4.2 Se X é um espaço de Banach com uma base de Schauder, então X tem a propriedade de aproximação. De fato, seja $(x_n)_{n\geq 1}$ uma base de Schauder de X, temos que existem $(f_n)_{n\geq 1}$ funcionais lineares em X^* satisfazendo a Equação 1.3.1. Consideremos, como na Observação 1.3.18, os operadores $P_n : X \longrightarrow X$ por $P_n x = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)x_i$. Vemos que os $(P_i)_{i\geq 1}$ são operadores de posto finito, uniformemente limitados, e $\lim_{n\to\infty} P_n x = x$ para todo $x \in X$. Além disso a convergência é uniforme em cada subconjunto compacto de X . Portanto, X tem a propriedade de aproximação. Em particular, os espaços c_o e ℓ_p com $1 \leq p < \infty$ têm a propriedade de aproximação. Em geral, se Γ é um conjunto infinito, podemos usar um argumento semelhante ao feito acima para mostrar que $c_o(\Gamma)$ e $\ell_p(\Gamma)$ têm a propriedade de aproximação .

Passemos agora estudar o produto tensorial projetivo de dois espaços de Banach X e Y. Lembramos que, dado X e Y espaços de Banach, $X\hat{\otimes}_\pi Y$ é o completamento do espaço $(X \otimes Y, \|\ \|_\pi)$ onde a norma $\|\ \|_\pi$ é definida por:

$$\|\mu\|_\pi = \sup\{|\varphi(\mu)| : \varphi \text{ é bilinear e limitada em } X \times Y\}. \tag{1.4.1}$$

É fácil ver que para cada $\mu \in X \otimes Y$ a norma $\|\mu\|_\pi$ pode ser escrita como

$$\|\mu\|_\pi = \inf\left\{\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|\|y_i\| : x_i \in X,\ \ y_i \in Y \text{ para todo } i \in \mathbb{N} \text{ e } \mu = \sum_{i=1}^{n} x_i\hat{\otimes} y_i\right\}. \tag{1.4.2}$$

Teorema 1.4.3 ([18, pág. 48]) *Se X e Y são espaços de Banach com a propriedade de aproximação, então $X\hat{\otimes}_\pi Y$ tem a propriedade de aproximação.*

Observação 1.4.4 Vamos agora fazer alguns comentários sobre o comportamento dos subespaços normados de $X\hat{\otimes}_\pi Y$. De fato, sejam F_1 um subespaço de X, e F_2 um subespaço de Y. Consideremos as injeções canônicas $J_1 : F_1 \longrightarrow X$ e $J_2 : F_2 \longrightarrow Y$. É possível definir a aplicação linear $J : J_1 \otimes J_2 : F_1 \otimes F_2 \longrightarrow X \otimes Y$ que é também uma injeção em $X\hat{\otimes}_\pi Y$. Podemos nos perguntar se o espaço vetorial normado $F_1 \otimes_\pi F_2$ é um subespaço do espaço vetorial normado $X \otimes_\pi Y$. Em geral, a topologia de $F_1 \otimes_\pi F_2$ é estritamente mais fina que a topologia induzida por $X \otimes_\pi Y$. Para um exemplo em que esta situação ocorre sugerimos [34, pág. 155].

Proposição 1.4.5 ([34, pág. 156]) *Sejam X, Y espaços de Banach e E, F subespaços de X, Y respectivamente, então:*

1. *Se E é complementado em X e F é complementado em Y, então $E\hat{\otimes}_\pi F$ é um subespaço complementado de $X\hat{\otimes}_\pi Y$.*

2. *Se E, F são subespaços densos de X, Y respectivamente, então $E\hat{\otimes}_\pi F$ é um subespaço denso de $X\hat{\otimes}_\pi Y$.*

Proposição 1.4.6 (Semadeni [60, seção 20.3.7, pág. 351]) *Sejam X, Y, X_1, Y_1 espaços de Banach. Se $X \sim Y$ e $X_1 \sim Y_1$, então $X\hat{\otimes}_\pi X_1 \sim Y\hat{\otimes}_\pi Y_1$.*

Portanto, usando as Proposições 1.4.5 e 1.4.6 obtemos que:

Proposição 1.4.7 *São verdadeiras as seguintes afimações*

1. *Se $E \overset{c}{\hookrightarrow} X$ e $F \overset{c}{\hookrightarrow} Y$, então $E\hat{\otimes}_\pi F \overset{c}{\hookrightarrow} X\hat{\otimes}_\pi Y$.* (1.4.3)

2. *Se $Z \overset{c}{\hookrightarrow} Y$, então $X\hat{\otimes}_\pi Z \overset{c}{\hookrightarrow} X\hat{\otimes}_\pi Y$.* (1.4.4)

Definição 1.4.8 Seja X um espaço de Banach e $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço mensurável. Dizemos que uma aplicação $f : \Omega \longrightarrow X$ é simples se existem conjuntos disjuntos $E_1, E_2, ..., E_n$ de $\mathcal{A}$, e elementos $x_1, x_2, ..., x_n$ de X tais que

$$f(w) = \sum_{i=1}^{n} \chi_{E_i}(w) x_i, \quad \text{para cada} \quad w \in \Omega.$$

Definição 1.4.9 Uma aplicação $f : \Omega \longrightarrow X$ é dita μ-mensurável se é quase sempre o limite (na norma) de funções simples. Se $f(w) = \sum_{i=1}^{n} \chi_{E_i}(w) x_i$, definimos $\int_E f d\mu = \sum_{i=1}^{n} \mu(E \cap E_i) x_i \quad \forall E \in \mathcal{A}$.

Definição 1.4.10 Uma aplicação $f : \Omega \longrightarrow X$ é dita integrável Bochner se existe uma seqüência $(f_n)_{n \geq 1}$ de aplicações simples, tais que

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\Omega} \|f_n(w) - f(w)\| \, d\mu = 0$$

Neste caso, definimos $\int_E f d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_E f_n d\mu$. O conjunto de aplicações integraveis Bochner é denotado por $L_1(\mu, X)$.

Proposição 1.4.11 ([16, pág. 228]) *Existe uma isometria entre o espaço $L_1(\mu)\hat{\otimes}_\pi X$ e o espaço $L_1(\mu, X)$.*

Observação 1.4.12 Podemos substituir $L_1(\mu)$ na Proposição 1.4.11 por $\ell_1(\Gamma)$ onde Γ é um conjunto infinito. De fato, se Γ é um conjunto infinito, considere $\mathcal{A}$ a σ-álgebra formada pelos subconjuntos de Γ e defina uma medida sobre $\mathcal{A}$ tal que $\mu(\{\gamma\}) = 1$ para toda $\gamma \in \Gamma$. Logo, $L_1(\mu, X)$ é isomorfo ao espaço $\ell_1(\Gamma, X)$, e decorre da Proposição 1.4.11 que

$$\ell_1(\Gamma)\hat{\otimes}_\pi X \sim \ell_1(\Gamma, X). \tag{1.4.5}$$

Proposição 1.4.13 ([16, pág. 249]) *Sejam X, Y, Z espaços de Banach e suponhamos que Z seja separável e isomorfo a um subespaço de $X\hat{\otimes}_\pi Y$. Então existem subespaços X_0 de X,* *e Y_0 de Y tais que X_0, Y_0 são separáveis e Z é isomorfo a um subespaço de $X_0\hat{\otimes}_\pi Y_0$.*

Definição 1.4.14 Dados X, Y espaços de Banach. Um operador nuclear de X em Y é uma aplicação linear $T : X \longrightarrow Y$ com a seguinte propriedade:

Existem seqüências $(x_n^\star)_{n\geq 1}$ em X^* e $(y_n)_{n\geq 1}$ em Y tais que $\sum_{n=1}^{\infty} \|y_n\|\|x_n^*\| < +\infty$ e para cada ponto $x \in X$, $T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x)y_n$. A série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x)y_n$ é chamada de representação nuclear de T.

Observação 1.4.15 Dados X, Y espaço de Banach, denotamos por $N(X, Y)$ o conjunto dos operadores nucleares de X a Y. Em [50, pág. 51], Pietsch prova que o conjunto dos operadores nucleares $N(X, Y)$ munido da norma:

$$\|T\|_N = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n^*\|\|y_n\| : \sum_{n=1}^{\infty} x_n^* \otimes y_n \text{ é representação nuclear de } T \right\}, \tag{1.4.6}$$

é um espaço de Banach, o qual denotamos por $\mathcal{N}(X, Y)$.

Observação 1.4.16 Sejam $T : X \longrightarrow Y$ um operador nuclear e $\epsilon > 0$. Logo, existem seqüências $(x_n^*)_{n\geq 1}$ em X^* e $(y_n)_{n\geq 1}$ em Y, e um $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x)y_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=p+1}^{\infty} \|x_n^*\|\|y_n\| < \epsilon$$

Definimos

$$T_p(x) = \sum_{n=1}^{p} x_n^*(x)y_n \qquad \forall p \geq n_0$$

Como $T(x) - T_p(x) = \sum_{n\geq p+1} x_n^*(x)y_n$, segue que

$$\|T - T_p\|_N \leq \sum_{n\geq p} \|x_n^*\|\|y_n\| \leq \epsilon \quad \forall p \geq n_0 \quad .$$

Logo, o operador T se escreve como o limite (na norma) de uma seqüência de operadores de posto finito. Isso implica que T é um operador compacto. Portanto,

$$\mathcal{N}(X, Y) \subseteq \mathcal{K}(X, Y). \tag{1.4.7}$$

Proposição 1.4.17 ([16, pág. 239-245]) *Se X^* ou Y têm a propriedade de aproximação, então $\mathcal{N}(X,Y)$ é isomorfo ao espaço $X^*\hat{\otimes}_\pi Y$.*

1.5 Produto tensorial injetivo e espaços de operadores compactos

Nesta seção, vamos estudar a teoria básica do produto tensorial injetivo de dois espaços de Banach X e Y, e estabelecer alguns resultados importantes para o estudo dos espaços de operadores compactos. Também dedicamos a última parte da seção ao estudo do produto tensorial injetivo dos espaços ℓ_1 e ℓ_p com $1 < p < \infty$. Referências interessantes para esta seção são [16], [56], [60].

Dados X e Y espaços de Banach, denotamos por $X\hat{\otimes}_\epsilon Y$ o completamento do espaço $(X \otimes Y, \| \|_\epsilon)$, onde $\| \|_\epsilon$ é a norma injetiva sobre $X \otimes Y$ definida por:

$$\|z\|_\epsilon = \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \right\|_\epsilon = \sup \left\{ \left| \sum_{i=1}^{n} x^*(x_i) y^*(y_i) \right| : x^* \in B_{X^*} \text{ e } y^* \in B_{Y^*} \right\}. \tag{1.5.1}$$

Diestel em [16, pág. 227] mostra que a norma injetiva de z é igual a

$$\|z\|_\epsilon = \sup\{(x^* \otimes y^*)(z) : x^* \in B_{X^*}, y^* \in B_{Y^*}\}$$

e daí conclui que a Equação 1.5.1 não depende da representação de z como um elemento de $X \otimes Y$. Além disso, não é difícil provar que para cada $z \in E \otimes F$ é válida a desigualdade $\|z\|_\epsilon \le \|z\|_\pi$. As próximas proposições mostram que valem algumas propriedades semelhantes às do produto tensorial projetivo.

Proposição 1.5.1 ([16, pág. 224]) *Seja K um espaço topológico compacto, então*

$$C(K)\hat{\otimes}_\epsilon X \sim C(K, X). \tag{1.5.2}$$

Teorema 1.5.2 ([32, Teorema 2]) *Se X e Y têm a propriedade de aproximação, então $X\hat{\otimes}_\epsilon Y$ também tem a propriedade de aproximação.*

Proposição 1.5.3 ([16, pág. 249]) *Sejam X, Y, Z espaços de Banach e suponhamos que Z seja separável e isomorfo a um subespaço de $X\hat{\otimes}_\epsilon Y$. Então existem subespaços X_0 de X, e Y_0 de Y tais que X_0, Y_0 são separáveis e Z é isomorfo a um subespaço de $X_0\hat{\otimes}_\epsilon Y_0$.*

Observação 1.5.4 No caso em que $C(K)$ é isomorfo ao espaço c_o e X é um espaço de Banach qualquer, a Proposição 1.5.1 prova que,

$$c_o\hat{\otimes}_\epsilon X \sim c_o(X)$$

Vemos imediatamente que

$$c_o\hat{\otimes}_\epsilon \ell_1 \sim c_o(\ell_1). \tag{1.5.3}$$

Observação 1.5.5 Se X é um espaço de Banach e α um ordinal, então decorre da Proposição 1.5.1 que

$$\begin{aligned}(X^n)^\alpha = C([0,\alpha], X^n) &\sim C([0,\alpha])\hat{\otimes}_\epsilon X^n \\ &\sim (C([0,\alpha])\hat{\otimes}_\epsilon X)^n \\ &\sim (X^\alpha)^n. \end{aligned} \tag{1.5.4}$$

Também, para todo $n \in \mathbb{N}$ é válido

$$\begin{aligned}(X^n)^* &\sim (\mathbb{R}^n\hat{\otimes}_\epsilon X)^* \\ &\sim ((\mathbb{R} \oplus .... \oplus \mathbb{R})\hat{\otimes}_\epsilon X)^* \\ &\sim (\mathbb{R}\hat{\otimes}_\epsilon X)^* \oplus (\mathbb{R}\hat{\otimes}_\epsilon X)^* \oplus ... \oplus (\mathbb{R}\hat{\otimes}_\epsilon X)^* \\ &\sim X^* \oplus X^* \oplus .... \oplus X^* \\ &\sim (X^*)^n. \end{aligned} \tag{1.5.5}$$

Finalmente, observemos que para qualquer ordinal α,

$$\begin{aligned}(\ell_1(\Gamma)\hat{\otimes}_\epsilon Y)^\alpha &\sim \ell_1(\Gamma)\hat{\otimes}_\epsilon (C([0,\alpha])\hat{\otimes}_\epsilon Y) \\ &\sim \ell_1(\Gamma)\hat{\otimes}_\epsilon C([0,\alpha], Y) \\ &\sim \ell_1(\Gamma)\hat{\otimes}_\epsilon Y^\alpha. \end{aligned} \tag{1.5.6}$$

Como no caso de operadores nucleares, se X^* ou Y têm a propriedade de aproximação, então temos uma fórmula bastante especial para o cálculo do espaço $\mathcal{K}(X,Y)$.

Proposição 1.5.6 ([16, pág. 239-244]) *Se X^* ou Y têm a propriedade dc aproximação, então $\mathcal{K}(X,Y)$ é isomorfo ao espaço $X^*\hat{\otimes}_\epsilon Y$.*

Teorema 1.5.7 (**Freniche** [23, **Teorema 2.3**]) *Se c_o é isomorfo a um subespaço de $L_1[0,1]\hat{\otimes}_\epsilon X$, então c_o é isomorfo a um subespaço de X.*

Teorema 1.5.8 (**Kappeler,** [40, **pág. 629**]) *Sejam X e Y espaços de Banach tais que $X\hat{\otimes}_\epsilon Y$ tem a propriedade de Mazur. Se Γ é um cardinal não mensurável então o espaço $\ell_1(\Gamma,X)\hat{\otimes}_\epsilon Y$ tem a propriedade de Mazur.*

Agora que já conhecemos as principais propriedades do produto tensorial injetivo, podemos passar fazer a caracterização por médio de seqüências do produto tensorial injetivo $\ell_1\hat{\otimes}_\epsilon \ell_p$ com $1 < p < \infty$. Iniciamos com a seguinte definição.

Definição 1.5.9 Dados X um espaço de Banach e $1 \leq p < \infty$, definimos

$$S\ell_p(X) = \left\{ (x_n)_{n\geq 1} : \ x_n \in X \quad \forall n \in \mathbb{N} \ \text{ e } \forall \varphi \in X^* \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)|^p < +\infty \right\}$$

Observação 1.5.10 ([50]) No caso que $p=1$, o espaço $S\ell_p(X)$ é denotado por $\ell_1[X]$. Os espaços $S\ell_p(X)$ são conhecido como o conjunto das seqüências fraca-estrela p-somaveis em X .

Observação 1.5.11 Consideremos $(x_n)_{n\geq 1}$ uma seqüência em $S\ell_p(X)$ e $T : X^* \longrightarrow \ell_p$ dado por $Tx^* = (x^*(x_n))_{n\geq 1}$. É imediato verificar que T é um operador linear com gráfico fechado. Logo, pelo teorema do gráfico fechado, T é limitado. Temos que existe um $C > 0$ tal que $\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x^*(x_n)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C\|x^*\|$ para qualquer $x^* \in X^*$.

Observação 1.5.12 O espaço $S\ell_p(X)$ munido da norma

$$\|x\| = \sup\left\{ \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x^*(x_n)|^p\right)^{\frac{1}{p}} : \ x^* \in B_{X^*} \right\}, \tag{1.5.7}$$

é um espaço de Banach.

Definição 1.5.13 Seja $n \in \mathbb{N}$, definimos $P_n : S\ell_p(X) \longrightarrow S\ell_p(X)$ por $P_n((x_i)_{i\geq 1}) = (y_i)_{i\geq 1}$, onde $y_i = x_i$ para $i \leq n$ e $y_i = 0$ para cada $i > n$. P_n é uma projeção linear contínua em $S\ell_p(X)$. Definimos $P^n = I - P_n$.

Definição 1.5.14 Definimos $F_p(X)$ por

$$F_p(X) = \left\{ \mu \in S\ell_p(X) : \lim_{n\to\infty} P^n \mu = 0 \right\}. \tag{1.5.8}$$

Observação 1.5.15 É imediato verificar que $F_p(X)$ é um subespaço vetorial fechado de $S\ell_p(X)$.

Proposição 1.5.16 (Samuel, [56, pág. 106]) *O produto tensorial injetivo $X\hat{\otimes}_\epsilon \ell_p$ é isomorfo ao espaço $F_p(X)$ para cada p com $1 < p < \infty$.*

Observação 1.5.17 Para o caso em que $X = \ell_1$, pela Proposição 1.5.16 podemos considerar $\ell_1 \hat{\otimes}_\epsilon \ell_p$ como um subespaço de $S\ell_p(\ell_1)$. Seja $(e_m)_{m\in\mathbb{N}}$ a base canônica de ℓ_p, definindo $Q_m : \ell_p \longrightarrow \ell_p$ por $Q_m(\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i) = \sum_{i=1}^{m} a_i e_i$, obtemos uma projeção linear contínua.

Definição 1.5.18 Definimos uma projeção linear em $S\ell_p(\ell_1)$ por

$$\begin{aligned} \widetilde{Q}_m \ : \ & S\ell_p(\ell_1) \longrightarrow S\ell_p(\ell_1) \\ & x = (x_i)_{i\geq 1} \longmapsto \widetilde{Q}_m(x) = (Q_m(x_i))_{i\geq 1}. \end{aligned} \tag{1.5.9}$$

Proposição 1.5.19 (Samuel, [56, pág. 113]) *Se* $1 < p < \infty$ *e* $m \in \mathbb{N}$, *então*

1. $Q_m(\ell_1 \hat{\otimes}_\epsilon \ell_p) \sim \ell_p$.

2. $\lim_{n\to\infty} Q_n x = x$ para qualquer $x \in (\ell_1 \hat{\otimes}_\epsilon \ell_p)$.

1.6 Espaços de Banach especiais

Nesta seção, vamos estudar alguns métodos de construção de espaços de Banach X cujo dual é isomorfo ao espaço ℓ_1. Também, descreveremos o conceito de espaços de Banach X que contém ℓ_∞^n uniformemente e provaremos uma relação deste conceito com o cotipo de um espaço de Banach X. O interesse nestes tipos de espaços é justificado pelo fato que eles serão de fundamental importância para darmos exemplos e contra-exemplos interessantes na classificação isomorfa dos espaços de operadores nucleares e compactos. Referências para este assunto são [3], [7], [17], [62].

Lembramos que, dados X e X' espaços de Banach, a distância de Mazur entre X e X' é

$$d(X, X') = \inf \left\{ \|T\| \|T^{-1}\| : \quad T : X \longrightarrow X' \quad \text{é um isomorfismo sobrejetivo} \right\}. \tag{1.6.1}$$

Não é difícil provar que $\log d$ verifica todas as propriedades de uma métrica, esta métrica foi introduzida por Mazur.

Para fixar a notação, vamos agora definir o que entendemos por espaço de Banach que contém ℓ_∞^n uniformemente. Aqui o espaço ℓ_∞^n é o espaço vetorial n-dimensional $\mathbb{R}^n$ munido com a norma

$$\|(x_1, x_2, ..., x_n)\| = \max_{1\leq k\leq n} |x_k|.$$

Definição 1.6.1 Se X é um espaço de Banach, dizemos que X contém ℓ_∞^n uniformemente se existe uma seqüência de subespaços $(E_n)_{n\geq 1}$ de dimensão finita de X tais que $\sup_n d(E_n, \ell_\infty^n) < +\infty$.

Observação 1.6.2 Em [11], P. Cembranos e J. Mendoza estabelecem uma definição equivalente a 1.6.1. Eles provam que um espaço de Banach X contém ℓ_∞^n uniformemente se e só se existem seqüências $(E_n)_{n\geq 1}, (\mu_n)_{n\geq 1}, (v_n)_{n\geq 1}$; onde E_n são subespaços de dimensão finita de X, $\mu_n : E_n \longrightarrow \ell_\infty^n$, $v_n : \ell_\infty^n \longrightarrow E_n$ são operadores lineares limitados com $\|\mu_n\| \leq 1$ e $\|v_n\| = 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$ tais que $\mu_n \circ v_n$ (e $v_n \circ \mu_n$)= aplicação identidade . Um exemplo de um espaço de Banach X que contém ℓ_∞^n uniformemente é o espaço $(\sum_{n=1}^\infty \ell_\infty^n)_1$. Para provar isto basta tomar $E_n = \ell_\infty^n$ para $n \in \mathbb{N}$ e $\mu_n = v_n$= aplicação identidade, na definição acima (Veja também [17, Observação 11.5]).

Definição 1.6.3 Seja p um real positivo com $1 \leq p < \infty$ e X um espaço de Banach. Dizemos que X tem cotipo p se existe uma constante positiva C tal que para qualquer conjunto finito $(x_j)_{j=1}^n$ em X é válida

$$C\int_0^1 \left\|\sum_{j=1}^n r_j(t)x_j\right\| dt \geq \left(\sum_{j=1}^n \|x_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.6.2}$$

Onde os $(r_j)_{j=1}^\infty$ são as funções de Radamacher.

Uma situação diametralmente oposta a esta, é aquela em que se apresenta a desigualdade contrária a 1.6.2. Neste caso o espaço de Banach X é chamado de tipo p com $1 \leq p < 2$. Assim X tem tipo p com $1 \leq p < 2$ se satisfaz

$$\int_0^1 \left\|\sum_{j=1}^n r_j(t)x_j\right\| dt \leq C\left(\sum_{j=1}^n \|x_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Observação 1.6.4 A hipóteses sobre o número real p na Definição 1.6.3 evita casos triviais, conforme a desigualdade de Khintchine, provada em [62, pág. 12]. Além disso segue-se da Definição 1.6.3 que cada espaço de Banach X tem tipo 1 e cotipo ∞ (veja [62, pág. 95]). A próxima proposição mostra que ℓ_1 tem cotipo 2.

Proposição 1.6.5 ([62, pág. 98]) *Se* $1 \leq q < \infty$ *então* ℓ_q *tem cotipo* $\max(2, q)$.

Proposição 1.6.6 ([17, pág. 283]) *Seja X um espaço de Banach, então X não tem cotipo finito se e só se X contém ℓ_∞^n uniformemente.*

Definição 1.6.7 Dados X um espaço de Banach e $\lambda \geq 1$, dizemos que X é um $\mathcal{L}_{\infty,\lambda}$-espaço se para cada subespaço de dimensão finita E de X, existe um subespaço de dimensão finita F de X tal que $E \subseteq F$ e $d(F, \ell_\infty^{dim F}) \leq \lambda$. Se existe $\lambda \geq 1$ tal que X é um $\mathcal{L}_{\infty,\lambda}$-espaço, então X é chamado um $\mathcal{L}_\infty$-espaço.

Definição 1.6.8 Seja $(d_n)_{n \geq 1}$ uma seqüência de números reais. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos E_n como o subespaço de ℓ_∞ gerado pelas primeiras d_n coordenadas, isto é

$$E_n = \{x \in \ell_\infty : \quad x_k = 0 \quad \text{para todo } k > d_n\}.$$

Definição 1.6.9 Dado $n \in \mathbb{N}$, definimos $\pi_n : \ell_\infty \longrightarrow \ell_\infty$ como a projeção de ℓ_∞ sobre o espaço E_n, isto é, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\pi_n x$ é a restrição de x às d_n-primeiras coordenadas.

Definição 1.6.10 Definimos uma família de Bourgain-Delbaen como um conjunto de aplicações lineares $i_{m,n} : E_m \longrightarrow E_n$ tais que

1. $\pi_m \circ i_{m,n} = I_{E_m}$ para todo $m < n$.

2. $i_{m,n} \circ i_{l,m} = i_{l,n}$ se $l < m < n$.

Proposição 1.6.11 (Bourgain-Delbaen [7, pág. 160]) *Para cada a, b números reais com $0 < b < a < 1$ existe uma família de Bourgain-Delbaen tais que se definimos $i_n x = \lim_{k\to\infty} i_{n,k}(x)$ para cada $x \in E_n$ têm-se que, as i_n são aplicações lineares contínuas com $\pi_n \circ i_n = I_{E_n}$.*

Definição 1.6.12 Para cada a, b números reais com $0 < b < a < 1$ e $n \in \mathbb{N}$ seja $F_n = i_n(E_n)$ (com i_n definida na Proposição 1.6.11), então definimos o segundo espaço de Bourgain-Delbaen por

$$Y_{a,b} = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n} \, ,$$

onde o fecho é tomado em ℓ_∞.

Teorema 1.6.13 (Bourgain-Delbaen, [7, pág. 166-176]) *Sejam a, b números reais positivos. Então as seguintes afirmações são verdadeiras*

1. *$Y_{a,b}$ é um $\mathcal{L}_\infty$-espaço separável.*
2. *$Y_{a,b}$ não contém cópia de ℓ_1.*
3. *$Y_{a,b}$ não contém cópia de c_o.*
4. *$Y^*_{a,b}$ é isomorfo ao espaço ℓ_1.*
5. *Para cada a fixo, se $b' > b$ então $Y_{a,b}$ não é isomorfo a um subespaço de $Y_{a,b'}$.*

Observação 1.6.14 Existem muitas aplicações do método de Bourgain-Delbaen, utilizados para construir espaços qujo dual é isomorfo ao espaço ℓ_1 com propriedades particulares. Entre outros exemplos, destacamos aqui o método desenvolvido por Argyros-Haydon em [3]. Lembremos primeiro que um espaço de Banach X de dimensão infinita é hereditariamente indecomponível (HI) se nemhum subespaço de X é soma direta de dois subespaços de dimensão infinita. Argyros-Haydon constroem um espaço de Banach X o qual é HI (portanto, sem base incondicional) e qujo dual é isomorfo a ℓ_1.

Teorema 1.6.15 (Argyros-Haydon, [3, Proposição 5.11, Teorema 6.16]) *Existe um espaço de Banach X tal que*

1. *X é um $\mathcal{L}_\infty$-espaço separável.*
2. *X é hereditariamente indecomponível.*
3. *X^* é isomorfo ao espaço ℓ_1.*

Finalizamos a seção lembrando a seguinte definição .

Definição 1.6.16 (Banach, [4, pág. 117]) Dados espaços de Banach X e Y, dizemos que são de dimensão linear incomparáveis se X não contém subespaço isomorfo a Y e Y não contém subespaço isomorfo ao espaço X.

Capítulo 2

Sobre o isomorfismo de $\mathcal{N}(X^\lambda, Y^\xi)$ em $\mathcal{K}(X^\mu, Y^\eta)$

Neste capítulo trataremos o primeiro objetivo de nosso trabalho, o isomorfismo entre o espaço de operadores nucleares $\mathcal{N}(X^\lambda, Y^\xi)$ e os subespaços de $\mathcal{K}(X^\mu, Y^\eta)$ para todos os ordinais μ, η, λ, ξ. Vamos também estudar alguns casos de especial interesse como é o caso em que $Y = c_o$, $Y = \ell_p$ com $1 < p < \infty$ e $X = Y = \mathbb{R}$. Nestes casos, mostraremos que de fato, não existe subespaço de $\mathcal{K}(X^\mu, Y^\eta)$ isomorfo ao espaço $\mathcal{N}(X^\lambda, Y^\xi)$ para todos os ordinais λ, ξ, μ, η.

Iniciamos o capítulo provando uma relação entre os subespaços de X^α e os subespaços de X. O próximo lema mostra que, para alguns espaços de Banach X todo subespaço de X^α é um subespaço de X.

Lema 2.1 *Seja α um ordinal infinito e X um espaço de Banach tal que X^2 é isomorfo a um subespaço de X. Se H é isomorfo a um subespaço de X^α e não admite subespaço isomorfo ao espaço c_o, então H é isomorfo a um subespaço de X.*

Prova. Suponhamos que H seja isomorfo a um subespaço de X^α. Pelo ítem 2 do Teorema 1.2.31, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que H é isomorfo a um subespaço de X^n ou H admite cópia complementada de c_o em X^α. Como H não admite subespaço isomorfo ao espaço c_o, segue que H é isomorfo a um subespaço de X^n. Como X^2 é isomorfo a um subespaço de X, temos que X^n é isomorfo a um subespaço de X. Portanto, H é isomorfo a um subespaço de X. ■

O próximo teorema mostra nosso primeiro resultado importante na qual tem-se um critério para determinar se existe um subespaço de $\mathcal{K}(X^\mu, Y^\eta)$ isomorfo ao espaço $\mathcal{N}(X^\lambda, Y^\xi)$ para todos os ordinais infinitos μ, η, λ, ξ.

Teorema 2.2 *Sejam λ, μ, ξ, η ordinais infinitos e X, Y espaços de Banach tais que X^* ou Y tênha a propriedade de aproximação. Se X^* é isomorfo a um subespaço de ℓ_1 e $(\sum_{n=1}^\infty \ell_\infty^n)_1$ não é isomorfo a um subespaço de $\mathcal{K}(c_o, Y)$, então*

$$\mathcal{N}(X^\lambda, Y^\xi) \not\hookrightarrow \mathcal{K}(X^\mu, Y^\eta). \tag{2.1}$$

Prova. Suponhamos que exista um isomorfismo sobre a imagem

$$T : \mathcal{N}(X^\lambda, Y^\xi) \longrightarrow \mathcal{K}(X^\mu, Y^\eta).$$

Primeiramente, se X^* tem a propriedade de aproximação, segue, pelo Teorema 1.4.3, que o espaço $\ell_1([0, \alpha])\hat{\otimes}_\pi X^*$ tem a propriedade de aproximação. Pelo Isomorfismo 1.4.5 vemos que $\ell_1([0, \alpha], X^*)$ tem a propriedade de aproximação. Pela Equação 1.2.1 temos que $(\mathbb{R}^\alpha)^* \sim \ell_1([0, \alpha])$, e portanto, $\mathbb{R}^\alpha$ tem a propriedade de aproximação. Logo, se Y tem a propriedade de aproximação, segue, pelo Teorema 1.5.2, que $\mathbb{R}^\alpha\hat{\otimes}_\epsilon Y$ tem a propriedade de aproximação. Assim, pela Equação 1.5.2, obtemos que Y^α tem a propriedade de aproximação. Portanto, podemos usar a Proposição 1.4.17 para concluir que

$$\mathcal{N}(X^\lambda, Y^\xi) \sim (X^\lambda)^*\hat{\otimes}_\pi Y^\xi \sim \ell_1([0, \lambda], X^*)\hat{\otimes}_\pi Y^\xi. \tag{2.2}$$

Trocando no argumento anterior a expressão operador nuclear e produto tensorial projetivo, por operador compacto e produto tensorial injetivo, respectivamente, concluímos que

$$\mathcal{K}(X^\mu, Y^\eta) \sim \ell_1([0, \mu], X^*)\hat{\otimes}_\epsilon Y^\eta. \tag{2.3}$$

Como λ é um ordinal infinito, segue do ítem 4 da Proposição 1.3.4 que $\ell_1([0, \lambda])$ é isomorfo a um subespaço complementado de $\ell_1([0, \lambda], X^*)$. Além disso, é óbvio que Y^ξ é isomorfo a um subespaço complementado de Y^ξ. Logo, pelo ítem 1 da Proposição 1.4.7 concluímos que

$$\ell_1([0, \lambda])\hat{\otimes}_\pi Y^\xi \overset{c}{\hookrightarrow} \ell_1([0, \lambda], X^*)\hat{\otimes}_\pi Y^\xi. \tag{2.4}$$

Pela Isomorfismo 1.4.5, segue que

$$\ell_1([0,\lambda],Y^\xi) \overset{c}{\hookrightarrow} \ell_1([0,\lambda],X^*)\hat{\otimes}_\pi Y^\xi. \tag{2.5}$$

Pela Observação 1.2.30 temos que c_o é isomorfo a um subespaço de $C(K,X)$ para qualquer compacto disperso K, portanto, $\ell_\infty^n \hookrightarrow c_o \hookrightarrow Y^\xi$. Assim,

$$\left(\sum_{n=1}^\infty \ell_\infty^n\right)_1 \hookrightarrow \ell_1([0,\lambda],Y^\xi). \tag{2.6}$$

Substituindo a Relação 2.6 na Relação 2.5, vemos que

$$\left(\sum_{n=1}^\infty \ell_\infty^n\right)_1 \hookrightarrow \ell_1([0,\lambda],X^*)\hat{\otimes}_\pi Y^\xi. \tag{2.7}$$

Além disso, como X^* é isomorfo a um subespaço de ℓ_1, segue pelo ítem 3 da Proposição 1.3.4, que $\ell_1([0,\mu],X^*)$ é isomorfo a um subespaço de $\ell_1([0,\mu])$. Logo,

$$\ell_1([0,\mu],X^*)\hat{\otimes}_\epsilon Y^\eta \hookrightarrow \ell_1([0,\mu])\hat{\otimes}_\epsilon Y^\eta. \tag{2.8}$$

Pela Relação 1.5.6, vemos que

$$\ell_1([0,\mu],X^*)\hat{\otimes}_\epsilon Y^\eta \hookrightarrow [\ell_1([0,\mu])\hat{\otimes}_\epsilon Y]^\eta. \tag{2.9}$$

Usando as Relações 2.2, 2.3, 2.7 e 2.9; obtemos que

$$\left(\sum_{n=1}^\infty \ell_\infty^n\right)_1 \hookrightarrow \mathcal{N}(X^\lambda,Y^\xi) \hookrightarrow \mathcal{K}(X^\mu,Y^\eta) \sim [\ell_1([0,\mu])\hat{\otimes}_\epsilon Y]^\eta. \tag{2.10}$$

Segue, pelo Teorema 1.3.5, que $(\sum_{n=1}^\infty \ell_\infty^n)_1$ não contém subespaço isomorfo ao espaço c_o. Além disso, pelo ítem 2 da Proposição 1.3.4, o espaço $\ell_1([0,\mu])\hat{\otimes}_\epsilon Y$ é isomorfo a seu quadrado. Logo, o Lema 2.1 e a Equação 2.10 nos permitem concluir que, $(\sum_{n=1}^\infty \ell_\infty^n)_1$ é isomorfo a um subespaço de $\ell_1([0,\mu])\hat{\otimes}_\epsilon Y$. Como o espaço $(\sum_{n=1}^\infty \ell_\infty^n)_1$ é um espaço separável segue, pela Proposição 1.5.3, que existe um subespaço separável Z_o de Y, tal que

$$\left(\sum_{n=1}^\infty \ell_\infty^n\right)_1 \hookrightarrow \ell_1\hat{\otimes}_\epsilon Z_o \hookrightarrow \ell_1\hat{\otimes}_\epsilon Y \sim \mathcal{K}(c_o,Y). \tag{2.11}$$

Contrariando a hipótese. ■

Observação 2.3 O caso $X = Y$ e $Y = \mathbb{R}$ é de particular interesse. Neste caso, é bem-conhecido que o produto tensorial injetivo $\ell_1([0,\mu])\hat{\otimes}_\epsilon Y$ é isomorfo ao espaço $\ell_1([0,\mu])$ (veja [13, pág. 55]). Observando a prova do Teorema 2.2, vemos que o Isomorfismo 2.11 se escreve como

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \ell_\infty^n\right)_1 \hookrightarrow \ell_1. \tag{2.12}$$

Pela Observação 1.6.2, temos que o espaço $(\sum_{n=1}^{\infty} \ell_\infty^n)_1$ contém ℓ_∞^n uniformemente. Disso e da Equação 2.12 segue que ℓ_1 contém ℓ_∞^n uniformemente, contrariando as Proposições 1.6.5 e 1.6.6 .

Isso prova que o Teorema 2.2 é válido para os espaços $X = Y = \mathbb{R}$. O mesmo argumento é válido para X, Y espaços de dimensão finita. O seguinte corolário está provado.

Corolário 2.4 *Sejam λ, μ, ξ, η ordinais infinitos. Então,*

$$\mathcal{N}(\mathbb{R}^\lambda, \mathbb{R}^\xi) \not\hookrightarrow \mathcal{K}(\mathbb{R}^\mu, \mathbb{R}^\eta).$$

Observação 2.5 O Corolário 2.4 generaliza um resultado de Samuel em [57, Teorema 2.3, pág. 967], já que não fazemos nenhuma hipótese sobre os ordinais como é o caso no referido artigo, em que é assumido que os ordinais λ, μ, ξ, η são enumeráveis.

Observação 2.6 Se Y é o espaço c_o, então decorre da Proposição 1.5.6 e do Isomorfismo 1.5.3 que

$$\mathcal{K}(c_o, c_o) \sim c_o(\ell_1).$$

Logo, pela Proposição 1.3.17, temos que

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \ell_\infty^n\right)_1 \not\hookrightarrow \mathcal{K}(c_o, c_o).$$

Portanto, o Teorema 2.2 é válido para $Y = c_o$ e X^* isomorfo a um subespaço de ℓ_1. Isso implica que

$$\mathcal{N}(X^\lambda, c_o^\xi) \not\hookrightarrow \mathcal{K}(X^\mu, c_o^\eta),$$

para $X^* \hookrightarrow \ell_1$ e todos os ordinais infinitos λ, ξ, μ, η.

No próximo teorema, mostramos que, no caso que $Y = \ell_p$ com $1 < p < \infty$, $(\sum_{n=1}^{\infty} \ell_\infty^n)_1$ não é isomorfo a um subespaço de $\ell_1 \hat{\otimes}_\epsilon Y$.

Teorema 2.7 *Se $1 < p < \infty$, então*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \ell_\infty^n \right)_1 \not\hookrightarrow \ell_1 \hat{\otimes}_\epsilon \ell_p.$$

Prova. Suponha que exista um isomorfismo sobre a imagem entre $(\sum_{n=1}^{\infty} \ell_\infty^n)_1$ e $\ell_1 \hat{\otimes}_\epsilon \ell_p$. Pela Proposição 1.5.16, existe um isomorfismo T sobre a imagem entre $(\sum_{n=1}^{\infty} \ell_\infty^n)_1$ e o espaço $F_p(\ell_1)$.

Isso implica que, existe um $M > 0$ tal que

$$\frac{1}{M}\|x\| \leq \|Tx\| \leq M\|x\|, \tag{2.13}$$

para cada $x \in (\sum_{n=1}^{\infty} \ell_\infty^n)_1$. A definição de $P_m : S\ell_p(\ell_1) \longrightarrow S\ell_p(\ell_1)$ (veja Definição 1.5.13) e o fato que $F_p(\ell_1)$ é um subespaço fechado de $S\ell_p(\ell_1)$, mostram que

$$P_m(F_p(\ell_1)) \sim \ell_1 \oplus ..... \oplus \ell_1 \sim \ell_1. \tag{2.14}$$

Onde $\ell_1 \oplus ..... \oplus \ell_1$ denota a soma direta de ℓ_1 com a norma $\|(x_1, x_2, ..., x_m)\| = (\sum_{j=1}^{m} \|x_j\|_1^p)^{\frac{1}{p}}$ e $m \in \mathbb{N}$. Pela Proposições 1.6.5 e 1.6.6, sabemos que ℓ_1 não contém ℓ_∞^n uniformemente, e já que $(\sum_{n=1}^{\infty} \ell_\infty^n)_1$ contém ℓ_∞^n uniformemente, segue, pela Relação 2.14 que $P_m \circ T$ não é um isomorfismo sobre a imagem, para cada $m \in \mathbb{N}$. Seja $0 < \epsilon < 1$ e $m_1 = 1$. Como $P_{m_1} \circ T$ não é um isomorfismo sobre a imagem, então existe $z_1 \in (\sum_{n=1}^{\infty} \ell_\infty^n)_1$ com $\|z_1\| = 1$ tal que

$$\|P_{m_1} \circ Tz_1\| < \min\left\{ \frac{\epsilon}{2M}, \frac{\epsilon}{2} \right\}. \tag{2.15}$$

Pelas desigualdades 2.13 e 2.15 vemos que

$$\|Tz_1 - P_{m_1}Tz_1\| \geq \|Tz_1\| - \|P_{m_1}Tz_1\| > \frac{1}{M} - \frac{\epsilon}{2M} > \frac{1}{M} - \frac{1}{2M} > \frac{1}{2M}. \tag{2.16}$$

Já que $Tz_1 \in F_p(\ell_1)$, existe $m_2 > m_1$ tal que

$$\|P_{m_2}(Tz_1) - Tz_1\| < r. \tag{2.17}$$

Onde $r = \|Tz_1 - P_{m_1}(Tz_1)\| - \frac{1}{2M}$. Isso implica que

$$\begin{aligned}
\|P_{m_2}(Tz_1) - P_{m_1}(Tz_1)\| &\geq \|P_{m_1}(Tz_1) - Tz_1\| - \|Tz_1 - P_{m_2}(Tz_1)\| \\
&= \|P_{m_1}(Tz_1) - Tz_1\| - r \\
&= \frac{1}{2M} > \frac{\epsilon}{2M}.
\end{aligned}$$

Portanto, podemos escolher $m_2 > m_1$ tal que

$$\|P_{m_2}(Tz_1) - P_{m_1}(Tz_1)\| > \frac{\epsilon}{2M} \quad \text{e} \quad \|Tz_1 - P_{m_2}(Tz_1)\| < \min\left\{\frac{\epsilon}{2M}, \frac{\epsilon}{2^2}\right\}. \tag{2.18}$$

Considerando $P_{m_2} \circ T$, temos que existe um $z_2 \in (\sum_{n=1}^{\infty} \ell_\infty^n)_1$ tal que

$$\|z_2\| = 1 \quad \text{e} \quad \|P_{m_2}(Tz_2)\| < \min\left\{\frac{\epsilon}{2M}, \frac{\epsilon}{2^2}\right\}.$$

Usando o mesmo cálculo que fixemos para provar 2.18, com $P_{m_2} \circ T$ no lugar de $P_{m_1} \circ T$, concluímos que existe $m_3 > m_2$ tal que

$$\|P_{m_3}(Tz_2) - P_{m_2}(Tz_2)\| > \frac{\epsilon}{2M} \quad \text{e} \quad \|Tz_2 - P_{m_3}(Tz_2)\| < \min\left\{\frac{\epsilon}{2^2 M}, \frac{\epsilon}{2^3}\right\}.$$

Usando indução, concluímos que existem seqüências $(z_k)_{k\geq 1} \in (\sum_{n=1}^{\infty} \ell_\infty^n)_1$, $(m_k)_{k\geq 1} \in \mathbb{N}$ tais que são verificadas as relações

i) $\|P_{m_k}(Tz_k)\| < \frac{\epsilon}{2^k}$.

ii) $\|(P_{m_{k+1}} - P_{m_k})Tz_k\| > \frac{\epsilon}{2M}$.

iii) $\|Tz_k - P_{m_{k+1}}Tz_k\| < \frac{\epsilon}{2^{k+1}}$.

Consideremos, para cada $k \in \mathbb{N}$, os elementos

$$w_k = (P_{m_{k+1}} - P_{m_k})(Tz_k) \quad \text{e} \quad \mu_k = Tz_k - w_k. \tag{2.19}$$

Vemos que, se escrevemos $w_k = (w_{k,l})_{l\geq 1}$, então $w_{k,l} = 0$ para $l = 1, 2, ..., m_k$ e $l \geq m_{k+1}+1$ Portanto, a seqüência $(w_k)_{k\geq 1}$ é disjuntamente suportada. Pelo primeiro e segundo ítens do parágrafo acima, segue imediatamente que $(w_k)_{k\geq 1}$ é uma seqüência semi normalizada. Além disso, para cada $k \in \mathbb{N}$ temos que

$$\|Tz_k - w_k\| < \frac{\epsilon}{2^{k-1}}. \tag{2.20}$$

Pelo Teorema 1.3.14, podemos supor que (passando a subseqüência se for necessário) $(z_k)_{k\geq 1}$ é fracamente de Cauchy ou $(z_k)_{k\geq 1}$ é equivalente à base canônica de ℓ_1.

Suponhamos primeiramente que $(z_k)_{k\geq 1}$ seja uma seqüência fracamente de Cauchy. Como $(\sum_{n=1}^{\infty} \ell_\infty^n)_1$ tem a propriedade de Schur, temos que $(z_k)_{k\geq 1}$ converge em norma a um $z \in (\sum_{n=1}^{\infty} \ell_\infty^n)_1$. Portanto, Tz_k converge a Tz. Além disso a desigualdade 2.20 mostra que $(\mu_k)_{k\geq 1}$ converge a zero. Logo, $(w_k)_{k\geq 1}$ converge a Tz. Como $(w_k)_{k\geq 1}$ é disjuntamente suportada, pelo ítem 2 do Teorema 1.3.19, segue que $(w_k)_{k\geq 1}$ converge a zero. Portanto, $Tz = 0$. Entretanto, a norma de Tz satisfaz a desigualdade 2.13 o qual é uma contradição.

Se $(z_k)_{k\geq 1}$ é equivalente à base canônica de ℓ_1, então a desigualdade 2.13 mostra que $(Tz_k)_{k\geq 1}$ é equivalente à base canônica de ℓ_1. Logo, pela desigualdade 2.20, concluímos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n}|a_i| &\geq \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i w_i\right\| \\
&\geq \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i T z_i\right\| - \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i (Tz_i - w_i)\right\| \\
&\geq \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}|a_i| - \epsilon\sum_{i=1}^{n}|a_i| \\
&\geq \left(\frac{1}{\lambda} - \epsilon\right)\sum_{i=1}^{n}|a_i|, \qquad (2.21)
\end{aligned}$$

para quaisquer $a_1, a_2, ..., a_n$ escalares e λ é a constante básica de $(Tz_k)_{k\geq 1}$ como seqüência equivalente à base canônica de ℓ_1. Usando estas desigualdades e o fato que $(w_k)_{k\geq 1}$ é semi normalizada, segue que para ϵ suficientemente pequeno, a seqüência $v_k = \frac{w_k}{\|w_k\|}$ é equivalente à base canônica de ℓ_1. Além disso, por definição de $(v_k)_{k\geq 1}$, temos

$$(P_{m_{k+1}} - P_{m_k})(v_k) = v_k \qquad \forall k \geq 1 \quad \text{e} \quad \|v_k\| = 1 \quad \forall k \geq 1. \tag{2.22}$$

Consideremos agora a projeção $\widetilde{Q}_n : S\ell_p(\ell_1) \longrightarrow S\ell_p(\ell_1)$, conforme à Equação 1.5.9. Usando que $p > 1$, o ítem 1 da Proposição 1.5.19 e o fato que $(v_k)_{k\geq 1}$ é equivalente à base canônica de ℓ_1, obtemos que para todo $n \in \mathbb{N}$ a restrição de $\widetilde{Q}_n$ ao espaço linear fechado gerado por $\{v_i : i \geq 1\}$ não é um isomorfismo sobre a imagem. Portanto, tomando $n_1 = 1$, vemos que existe $k_1 \in \mathbb{N}$ e $v'_1 \in [v_k]_{k=1}^{k_1}$ tais que

$$\|v'_1\| = 1 \quad \text{e} \quad \|\widetilde{Q}_{n_1}(v'_1)\| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Pelo ítem 2 da Proposição 1.5.19, podemos escolher $n_2 > n_1$ tal que $\|v'_1 - \widetilde{Q}_{n_2}(v'_1)\| < \frac{\epsilon}{2}$. Da mesma forma, a restrição de $\widetilde{Q}_{n_2}$ ao espaço linear fechado gerado por $\{v_k : k \geq 2\}$ não é um isomorfismo sobre a imagem. Portanto, existe $k_2 \geq 2$ e $v'_2 \in [v_k]_{k=2}^{k_2}$ tais que

$$\|v'_2\| = 1 \quad \text{e} \quad \|\widetilde{Q}_{n_2}(v'_2)\| < \frac{\epsilon}{2^2}.$$

Pelo ítem 2 da Proposição 1.5.19, podemos escolher $n_3 > n_2$ tal que $\|v'_2 - \widetilde{Q}_{n_3}(v'_2)\| < \frac{\epsilon}{2^2}$. Usando indução, encontramos uma seqüência básica de blocos $(v'_k)_{k\geq 1}$ tal que verificam as relações

i) $\|\widetilde{Q}_{n_k}(v'_k)\| < \frac{\epsilon}{2^k}$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

ii) $\|(\widetilde{Q}_{n_{k+1}} - \widetilde{Q}_{n_k})(v'_k) - v'_k\| < \frac{\epsilon}{2^{k-1}}$.

Definindo

$$w'_k = \frac{(\widetilde{Q}_{n_{k+1}} - \widetilde{Q}_{n_k})(v'_k)}{\|(\widetilde{Q}_{n_{k+1}} - \widetilde{Q}_{n_k})(v'_k)\|}.$$

Vemos que $\|w'_k\| = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Além disso, pela definição de $\widetilde{Q}_n$, segue que

$$(\widetilde{Q}_{n_{k+1}} - \widetilde{Q}_{n_k})(w'_k) = w'_k. \tag{2.23}$$

Da mesma forma que fizemos para provar que $(v_k)_{k\geq 1}$ é equivalente à base canônica de ℓ_1, prova-se que $(w'_k)_{k\geq 1}$ é equivalente à base canônica de ℓ_1. Usando as Equações 2.22 e 2.23, vemos que existem seqüências de inteiros crescentes $(N_k)_{k\geq 1}$ e $(M_k)_{k\geq 1}$ tais que,

$$w'_k = (P_{N_{k+1}} - P_{N_k})(w'_k) = (\widetilde{Q}_{M_{k+1}} - \widetilde{Q}_{M_k})(w'_k). \tag{2.24}$$

Então, pondo $w'_k = (w'_{k,j,l})$, temos que os subíndices k, j, l satisfazem as desigualdades

$$1 \leq k < w \ , \quad N_k + 1 \leq j \leq N_{k+1} \ , \quad M_k + 1 \leq l \leq M_{k+1}.$$

De fato, a condição sobre j é determinada pela primeira identidade de 2.24 e a condição sobre l pela segunda identidade de 2.24. Seja $\Psi = (\Psi_i)_{i\geq 1} \in \ell_1^* \sim \ell_\infty$ e denotando por Ψ^k o elemento $(0, 0, ..., 0, \Psi_{M_k+1}, ..., \Psi_{M_{k+1}}, 0, 0, ...)$, temos

$$\begin{aligned} \Psi(w'_{k,i}) &= \langle (\Psi_1, \Psi_2, ...), (w'_{k,i,l})_{(M_k+1)\leq l\leq M_{k+1}} \rangle \\ &= \Psi_{M_k+1}.w'_{(k,i,M_k+1)} + ... + \Psi_{M_{k+1}}.w'_{(k,i,M_{k+1})} \\ &= \langle \Psi^k, (w'_{k,i}) \rangle = \Psi^k(w'_{k,i}), \end{aligned}$$

e

$$|\langle \Psi^k, w'_{k,i} \rangle|^p \leq \|\Psi^k\|^p \|w'_{k,i}\|^p. \tag{2.25}$$

Temos que,

$$\begin{aligned} \sum_{i=N_k+1}^{N_{k+1}} |\Psi(w'_{k,i})|^p &= \sum_{i=N_k+1}^{N_{k+1}} |\Psi^k(w'_{k,i})|^p \\ &\leq \|\Psi^k\|^p \sum_{i=N_k+1}^{N_{k+1}} \|w'_{k,i}\|^p \\ &\leq \|\Psi^k\|^p. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Portanto, usando as Relações 1.5.7, 2.26, 2.25 concluímos que

$$
\begin{aligned}
\left\|\sum_{l=1}^{n} a_l w_l'\right\| &= \sup\left\{\left(\sum_{j=N_l+1}^{N_{l+1}}\left|\Psi\left(\sum_{l=1}^{n} a_l w_{l,j}'\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} : \quad \Psi \in B_{\ell_1^*} \sim B_{\ell_\infty}\right\}\\
&= \sup\left\{\sum_{l=1}^{n}|a_l|^p \sum_{j=N_l+1}^{N_{l+1}}|\Psi(w_{l,j}')|^p : \quad \Psi \in B_{\ell_\infty}\right\}\\
&\leq \sup\left\{\left(\sum_{l=1}^{n}|a_l|^p \sum_{j=N_l+1}^{N_{l+1}}|\Psi(w_{l,j}')|^p\right)^{\frac{1}{p}} : \quad \Psi \in B_{\ell_\infty}\right\}\\
&\leq \sup\left\{\left(\sum_{l=1}^{n}|a_l|^p\|\Psi^l\|^p\right)^{\frac{1}{p}} : \quad \Psi \in B_{\ell_\infty}\right\}\\
&\leq \left(\sum_{l=1}^{n}|a_l|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad (2.27)
\end{aligned}
$$

onde $a_1, a_2, ..., a_n$ são escalares quaisquer.

Por outro lado, como $\|w_k'\| = 1$, vemos que para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $\varphi_k \in \ell_1$ tal que

$$\sum_{i=N_k+1}^{N_{k+1}} \left|\varphi_k(w_{k,i}')\right|^p = 1.$$

Consideremos os elementos $\varphi_k = (\varphi_k^1, \varphi_k^2, ..., \varphi_k^{M_k}, 0, 0, ...) \in \ell_\infty$ e

$$\Psi = (\varphi_1^{M_1+1}, \varphi_1^{M_1+2}, ..., \varphi_1^{M_2}, \varphi_2^{M_2+1}, \varphi_2^{M_2+2}, ..., \varphi_2^{M_3}, ..., \varphi_k^{M_k+1}, ..., \varphi_k^{M_{k+1}}, 0, 0, ..., 0, ...)$$

Um cálculo semelhante áquele feito para provar a desigualdade 2.25 mostra que $\Psi(w_{k,n}') = \varphi_k(w_k')$. Portanto, tomando $x^* = \Psi$ na Definição 1.5.7 nos dá que

$$
\begin{aligned}
\left\|\sum_{l=1}^{n} a_l w_l'\right\| &= \sup_{\|x^*\|\leq 1}\left\{\left(\sum_{j=N_l+1}^{N_{l+1}}\left|x^*\left(\sum_{l=1}^{n} a_l w_{l,n}'\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right\}\\
&= \sup_{\|x^*\|\leq 1}\left\{\left(\sum_{l=1}^{n}|a_l|^p \sum_{j=N_l+1}^{N_{l+1}}|x^*(w_{l,n}')|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right\}\\
&\geq \left(\sum_{l=1}^{n}|a_l|^p \sum_{j=N_l+1}^{N_{l+1}}|\Psi(w_{l,j}')|^p\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}
$$

$$\geq \left(\sum_{l=1}^{n} |a_l|^p \sum_{j=N_l+1}^{N_{l+1}} |\varphi_l(w'_{l,j})|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\geq \left(\sum_{l=1}^{n} |a_l|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.28}$$

Assim, pelas desigualdades 2.27 e 2.28 concluímos que $(w'_l)_{l\geq 1}$ é uma seqüência equivalente à base canônica de ℓ_p, contrariando que $(w'_l)_{l\geq 1}$ é equivalente à base canônica de ℓ_1 e $p > 1$.

■

Os Teoremas 2.2 e 2.7 nos permitem concluir uma melhora do Corolário 2.4.

Teorema 2.8 (Generalização e extensão de (1)) *Sejam λ, μ, ξ, η ordinais infinitos e X, Y espaços de Banach tais que X^* é isomorfo a um subespaço de ℓ_1, Y é um subespaço de ℓ_p com $1 < p < \infty$. Então*

$$\mathcal{N}(X^{\lambda}, Y^{\xi}) \not\hookrightarrow \mathcal{K}(X^{\mu}, Y^{\eta}).$$

Capítulo 3

Sobre o isomorfismo de $\mathcal{K}(X^\lambda, Y^\xi)$ em $\mathcal{N}(X^\mu, Y^\eta)$

Neste capítulo, trataremos do isomorfismo entre o espaço de operadores compactos $\mathcal{K}(X^\lambda, Y^\xi)$ e os subespaços dos espaços de operadores nucleares $\mathcal{N}(X^\mu, Y^\eta)$. Nosso objetivo principal nesta seção é provar que os espaços $\mathcal{K}(X^\lambda, Y^\xi)$ e $\mathcal{N}(X^\mu, Y^\eta)$ são de dimensão linear incomparável, para espaços de Banach X, Y tais que X^* é isomorfo a um subespaço de ℓ_1 e Y um subespaço de ℓ_p com $1 < p < \infty$.

Também vamos introduzir o conceito de $\mathcal{N}_0$-espaço. Este conceito é importante para o desenvolvimento dos teoremas principais de classificação isomorfa dos operadores nucleares, conforme estudaremos na próxima seção. Forneceremos alguns exemplos importantes destes espaços, conforme Bourgain-Delbaen [7] e Argyros-Haydon [3].

Na próxima proposição, vamos utilizar um argumento semelhante aquéle usado por Cembranos e Mendoza em [10, Proposição 3, pág. 4] para mostrar uma caracterização dos subespaços de $\ell_1(\mathbb{N}, X)$ isomorfos ao espaço $c_o(\ell_1)$.

Proposição 3.1 *Se $c_o(\ell_1)$ é isomorfo a um subespaço de $\ell_1(\mathbb{N}, X)$, então existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $c_o(\ell_1)$ é isomorfo a um subespaço de X^m.*

Prova. Seja $T : c_o(\ell_1) \longrightarrow \ell_1(\mathbb{N}, X)$ um isomorfismo sobre a imagem e tome $M > 0$ tal que

$$\frac{1}{M}\|x\| \leq \|Tx\| \leq M\|x\|,$$

e para cada $m \in \mathbb{N}$, consideremos $Q_m : \ell_1(\mathbb{N}, X) \longrightarrow \ell_1(\mathbb{N}, X)$ por $Q_m((x_n)_{n\geq 1}) = (y_n)_{n\geq 1}$, onde $y_n = x_n$ para cada $n \leq m$, e $y_n = 0$ para $n > m$. Suponhamos que para cada $n \in \mathbb{N}$,

$c_o(\ell_1)$ não seja isomorfo a um subespaço de X^n. Definimos $P_m : c_o(\ell_1) \longrightarrow c_o(\ell_1)$, por $P_m((x_i)_{i\geq 1}) = (y_i)_{i\geq 1}$; onde $y_n = x_n$ para cada $n \leq m$, e $y_n = 0$ para cada $n > m$. Temos que,

$$Q_m(\ell_1(\mathbb{N}, X)) \sim X^m, \tag{3.1}$$

para cada $m \in \mathbb{N}$. Seja I o operador identidade de $c_o(\ell_1)$. Pela definição de $c_o(\ell_1)$, segue que se $(x_n)_{n\geq 1}$ é uma seqüência em $c_o(\ell_1)$, então qualquer subseqüência de $(x_n)_{n\geq 1}$ também pertence a $c_o(\ell_1)$. Em particular, $(I - P_m)(x) = (x_j)_{j\geq m+1}$ pertence a $c_o(\ell_1)$. Portanto,

$$(I - P_m)(c_o(\ell_1)) \sim c_o(\ell_1).$$

Como $c_o(\ell_1)$ não é isomorfo a um subespaço de X^n para cada $n \in \mathbb{N}$, segue, pelo Isomorfismo 3.1, que $(Q_m \circ T)|_{(I-P_k)(c_o(\ell_1))}$ não é um isomorfismo sobre a imagem, para todo $m \in \mathbb{N}$ e $k \in \mathbb{N}$. Portanto, para $k_1 = \{1\}$ e $\epsilon = \min\left\{\frac{1}{4M}, \frac{1}{2}\right\}$ existe $y_1 \in (I - P_k)(c_o(\ell_1))$ com $\|y_1\| = 1$ tal que $\|Q_{m_1}(Ty_1)\| < \epsilon$. Como P_{k_1} é uma projeção, então $P_{k_1}(y_1) = P_{k_1}(I - P_{k_1})(y_1) = 0$. Logo,

$$\lim_{j\to\infty} P_j(y_1) = \lim_{j\to\infty} (P_j - P_{k_1})(y_1). \tag{3.2}$$

Isso implica que existe $k_2 > k_1$ tal que $\|(P_{k_2} - P_{k_1})(y_1) - y_1\| < \frac{1}{4}$. Pondo $z_1 = (P_{k_2} - P_{k_1})(y_1)$, temos que $\|z_1 - y_1\| < \frac{1}{4}$. Além disso, z_1 satisfaz as desigualdades

i) $\|z_1\| \geq \|y_1\| - \|z_1 - y_1\| = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

ii) $\|z_1\| \leq 1$.

iii) $\|Q_m(Tz_1)\| \leq \epsilon$.

Temos que $\|Tz_1\| \geq \frac{1}{M}\|z_1\| > \frac{3}{4M}$. Disso,

$$\|Tz_1 - Q_{m_1}(Tz_1)\| \geq \|Tz_1\| - \|Q_{m_1}(Tz_1)\| \geq \frac{3}{4M} - \frac{1}{4M} = \frac{1}{2M}. \tag{3.3}$$

Como $\lim_{m\to\infty} Q_m(Tz_1) = Tz_1$, segue que existe $m_2 > m_1$ tal que

$$\|Tz_1 - Q_{m_2}(Tz_1)\| < \min\left\{r, \frac{1}{4M}, \frac{1}{2^2}\right\}, \qquad \text{onde} \qquad r = \|Tz_1 - Q_{m_1}(Tz_1)\| - \frac{1}{2M}.$$

Logo, existe $m_2 > m_1$ tal que

$$\begin{aligned} \|Q_{m_2}(Tz_1) - Q_{m_1}(Tz_1)\| &> \|Q_{m_1}(Tz_1) - Tz_1\| - \|Q_{m_2}(Tz_1) - Tz_1\| \\ &\geq \|Tz_1 - Q_{m_1}(Tz_1)\| - r = \frac{1}{2M}. \end{aligned}$$

Podemos também escolher o $m_2 > m_1$ tal que

$$\|Tz_1 - Q_{m_2}(Tz_1)\| < \min\left\{\frac{1}{4M}, \frac{1}{2^2}\right\}. \tag{3.4}$$

Da mesma forma, tomando $\epsilon = \min\left\{\frac{1}{8M}, \frac{1}{2^3}\right\}, k_2, m_2$, vemos que existem $k_3 > k_2$, z_2 tal que $z_2 = (P_{k_3} - P_{k_2})(y_2)$ e $\frac{3}{4} < \|z_2\| \leq 1$ e $m_3 > m_2$ tais que

$$\|Tz_2 - Q_{m_3}(Tz_2)\| < \min\left\{\frac{1}{8M}, \frac{1}{2^3}\right\}.$$

Logo, usando indução segue que existem seqüências crescentes de inteiros $(k_j)_{j\geq 1}$, $(m_j)_{j\geq 1}$ e uma seqüência $(z_j)_{j\geq 1}$ em $c_o(\ell_1)$ tais que

1. $z_j = (P_{k_{j+1}} - P_{k_j})(y_j)$; $\quad \frac{3}{4} < \|z_j\| \leq 1$.

2. $\|Q_{m_{j+1}}(Tz_j)\| < \frac{1}{2^j}$.

3. $\|(Q_{m_{j+1}} - Q_{m_j})(Tz_j)\| > \frac{1}{2M}$.

4. $\|Tz_j - Q_{m_{j+1}}(Tz_j)\| < \frac{1}{2^{j+1}}$.

Considerando para cada $j \in \mathbb{N}$,

$$w_j = (Q_{m_{j+1}} - Q_{m_j})(Tz_j) \qquad \text{e} \qquad \mu_j = Tz_j - w_j. \tag{3.5}$$

Temos que $(w_j)_{j\geq 1}$ é uma seqüência disjuntamente suportada. Além disso, pelos ítens 2 e 3 do parágrafo acima, temos que $(w_j)_{j\geq 1}$ é uma seqüência semi normalizada, e portanto $(w_j)_{j\geq 1}$ é equivalente à base dos vetores unitários de ℓ_1. Denotamos por $\lambda > 0$ a constante básica de $(w_j)_{j\geq 1}$. Pelo ítem 1 do parágrafo acima, vemos que $(z_j)_{j\geq 1}$ também é uma seqüência disjuntamente suportada e semi normalizada de $c_o(\ell_1)$; portanto, pelo ítem 1 do Teorema 1.3.19 $(z_j)_{j\geq 1}$ é equivalente à base dos vetores unitários de c_o. Por outro lado, os ítens 2 e 4 do parágrafo acima implicam

$$\begin{aligned}\|\mu_j\| &= \|Tz_j - w_j\| \\ &\leq \|Tz_j - Q_{m_{j+1}}(Tz_j)\| + \|Q_{m_j}(Tz_j)\| \\ &\leq \frac{1}{2^{j+1}} + \frac{1}{2^j} < \frac{3}{2^{j+1}} < \frac{1}{2^{j-1}}.\end{aligned}$$

Logo, $\mu_j \to 0$ quando $j \to \infty$. Portanto, podemos escolher $\lambda_1 < \frac{1}{\lambda}$ tal que $\|\mu_j\| < \lambda_1$ para cada $j \in \mathbb{N}$. Temos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2M}\sum_{i=1}^{n}|a_i| &\geq \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i T z_i\right\| \\ &\geq \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i w_i\right\| - \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i (Tz_i - w_i)\right\| \\ &\geq \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}|a_i| - \delta_1\sum_{i=1}^{n}|a_i| \;\geq\; \delta\sum_{i=1}^{n}|a_i|,\end{aligned}$$

para quaisquer escalares $a_1, a_2, ..., a_n$. Isso nos permite concluir que $(Tz_j)_{j\geq 1}$ é uma seqüência equivalente à base canônica de ℓ_1, além disso T é um isomorfismo e $(z_j)_{j\geq 1}$ é equivalente à base canônica de c_o. Estas afirmações contradizem o Teorema 1.3.5. ∎

Podemos agora passar estudar a relação entre o espaço $\mathcal{K}(X^\lambda, Y^\xi)$ e os subespaços de $\mathcal{N}(X^\mu, Y^\eta)$. Para isso, introduzimos a seguinte definição.

Definição 3.2 Um espaço de Banach X é dito $\mathcal{N}_0$-espaço, se $\mathcal{N}(X, Y)$ é isomorfo a um subespaço de $\mathcal{N}(c_o, Y)$, para cada espaço de Banach Y.

Observação 3.3 O conceito de $\mathcal{N}_0$-espaço é inspirado na seguinte consideração. Seja X um $\mathcal{N}_0$-espaço e consideremos $Y = \mathbb{R}$. Temos que Y tem a propriedade de aproximação. Portanto, pela Proposição 1.4.17, vemos que

$$\mathcal{N}(X,Y) \sim X^*\hat{\otimes}_\pi\mathbb{R} \sim X^* \quad \text{e} \quad \mathcal{N}(c_o,Y) \sim c_o^*\hat{\otimes}_\pi\mathbb{R} \sim \ell_1.$$

Assim, como X é um $\mathcal{N}_0$-espaço, então X^* é isomorfo a um subespaço de ℓ_1. Nós, não sabemos se a recíproca é válida, isto é, se cada espaço de Banach X com $X^* \hookrightarrow \ell_1$ é um $\mathcal{N}_0$-espaço. Entretanto, se X é um espaço de Banach com X^* isomorfo ao espaço ℓ_1, então X é um $\mathcal{N}_0$-espaço. De fato,

$$\mathcal{N}(X,Y) \sim X^*\hat{\otimes}_\pi Y \sim \ell_1\hat{\otimes}_\pi Y \sim c_o^*\hat{\otimes}_\pi Y \sim \mathcal{N}(c_o,Y).$$

Exemplo 3.4 Como todo espaço de Banach X com X^* isomorfo ao espaço ℓ_1 é um $\mathcal{N}_0$-espaço, então o exemplo construído na Definição 1.6.12 (espaços de Bourgain-Delbaen) é um $\mathcal{N}_0$-espaço separável que não contém cópia de c_o nem ℓ_1. Também o espaço construído no Teorema 1.6.15 é um $\mathcal{N}_0$-espaço hereditariamente indecomponível (Argyros-Haydon). Portanto, o exemplo construído no Teorema 1.6.15 é um $\mathcal{N}_0$-espaço sem base incondicional.

Teorema 3.5 *Sejam λ, μ, ξ, η ordinais infinitos e X, Y espaços de Banach tais que X^* ou Y tem a propriedade de aproximação, X é um $\mathcal{N}_0$-espaço e Y não contém subespaço isomorfo a ℓ_1. Então*

$$\mathcal{K}(X^\lambda, Y^\xi) \not\hookrightarrow \mathcal{N}(X^\mu, Y^\eta).$$

Prova. Sejam X, Y espaços de Banach com X um $\mathcal{N}_0$-espaço e $\ell_1 \not\hookrightarrow Y$. Suponha que existem ordinais λ, μ, ξ, η tais que

$$\mathcal{K}(X^\lambda, Y^\xi) \hookrightarrow \mathcal{N}(X^\mu, Y^\eta).$$

Como X^* ou Y tem a propriedade de aproximação, o início do primeiro parágrafo da demonstração do Teorema 2.2 mostra que

$$\mathcal{K}(X^\lambda, Y^\xi) \sim \ell_1([0,\lambda], X^*)\hat{\otimes}_\epsilon Y^\xi \quad \text{e} \quad \mathcal{N}(X^\mu, Y^\eta) \sim \ell_1([0,\mu], X^*)\hat{\otimes}_\pi Y^\eta. \tag{3.6}$$

Dado que c_o é sempre isomorfo a um subespaço de Y^ξ (Observação 1.2.30), pelo ítem 4 da Proposição 1.3.4, vemos que

$$\ell_1\hat{\otimes}_\epsilon c_o \hookrightarrow \ell_1([0,\lambda])\hat{\otimes}_\epsilon Y^\xi \hookrightarrow \ell_1([0,\lambda], X^*)\hat{\otimes}_\epsilon Y^\xi.$$

Portanto, pelo Isomorfismo 1.5.3, temos que

$$c_o(\ell_1) \hookrightarrow \ell_1([0,\lambda], X^*)\hat{\otimes}_\epsilon Y^\xi. \tag{3.7}$$

Por outro lado, a Equação 1.4.5 implica que

$$\ell_1([0,\mu], X^*)\hat{\otimes}_\pi Y^\eta \sim \ell_1([0,\mu])\hat{\otimes}_\pi (X^*\hat{\otimes}_\pi Y^\eta) \sim \ell_1([0,\mu], X^*\hat{\otimes}_\pi Y^\eta). \tag{3.8}$$

Como X^* ou Y tem a propriedade de aproximação e X é um $\mathcal{N}_0$-espaço, então

$$X^*\hat{\otimes}_\pi Y^\eta \sim \mathcal{N}(X, Y^\eta) \hookrightarrow \mathcal{N}(c_o, Y^\eta) \sim \ell_1\hat{\otimes}_\pi Y^\eta.$$

Isto implica que,

$$X^*\hat{\otimes}_\pi Y^\eta \hookrightarrow \ell_1(\mathbb{N}, Y^\eta). \tag{3.9}$$

Usando as Relações 3.6, 3.8, 3.9, e o ítem 3 da Proposição 1.3.4, obtemos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}(X^\lambda, Y^\xi) &\sim \ell_1([0,\lambda], X^*)\hat{\otimes}_\epsilon Y^\xi \\
&\hookrightarrow \ell_1([0,\mu], X^*)\hat{\otimes}_\pi Y^\eta \\
&\sim \ell_1([0,\mu], X^*\hat{\otimes}_\pi Y^\eta) \\
&\hookrightarrow \ell_1([0,\mu], \ell_1(\mathbb{N}, Y^\eta)) \\
&\sim \ell_1([0,\mu], Y^\eta).
\end{aligned}$$

Já que $c_o(\ell_1) \hookrightarrow \mathcal{K}(X^\lambda, Y^\xi)$ então,

$$c_o(\ell_1) \hookrightarrow \ell_1([0,\mu], Y^\eta) \sim \ell_1([0,\mu])\hat{\otimes}_\pi Y^\eta.$$

Como $c_o(\ell_1)$ é separável, pela Proposição 1.4.13, existem subespaços Y_0 de Y^η e Z_0 de

$\ell_1([0,\mu])$, tais que Y_0, Z_0 são separáveis e

$$c_o(\ell_1) \hookrightarrow Z_0 \hat{\otimes}_\pi Y_0 \hookrightarrow \ell_1(\mathbb{N}) \hat{\otimes}_\pi Y^\eta \sim \ell_1(\mathbb{N}, Y^\eta).$$

Isso nos permite concluir, pela Proposição 3.1, que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$c_o(\ell_1) \hookrightarrow (Y^\eta)^m \sim Y^{\eta m}.$$

Portanto,

$$\ell_1 \hookrightarrow c_o(\ell_1) \hookrightarrow Y^{\eta m} = C([1, \eta m], Y).$$

Além disso, como c_o não é isomorfo a um subespaço de ℓ_1, então, pelo ítem 2 do Teorema 1.2.31 temos que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que ℓ_1 é isomorfo a um subespaço de Y^k. Portanto, ℓ_1 é isomorfo a um subespaço de Y (Observação 1.2.29), contrariando a hipóteses. ■

Como já observamos, podemos substituir no Teorema 3.5 a expressão X é um $\mathcal{N}_0$-espaço por a expressão X^* é isomorfo ao espaço ℓ_1. Além disso, como ℓ_p $(1 < p < \infty)$ não contém subespaço isomorfo ao espaço ℓ_1, então é possível aplicar o Teorema 3.5 para concluir o próximo teorema.

Teorema 3.6 (Generalização e extensão de (2)) *Sejam λ, μ, ξ, η ordinais infinitos e X, Y espaços de Banach tais que X^* é isomorfo ao espaço ℓ_1 e Y é um subespaço de ℓ_p com $1 < p < \infty$, então*

$$\mathcal{K}(X^\lambda, Y^\xi) \not\hookrightarrow \mathcal{N}(X^\mu, Y^\eta).$$

O Teorema 2.8 e o Teorema 3.6 implicam imediatamente o seguinte resultado.

Teorema 3.7 *Sejam λ, μ, ξ, η ordinais infinitos e X, Y espaços de Banach tais que X^* é isomorfo ao espaço ℓ_1 e Y é um subespaço de ℓ_p com $1 < p < \infty$. Então $\mathcal{N}(X^\lambda, Y^\xi)$ e $\mathcal{K}(X^\mu, Y^\eta)$ são espaços de dimensão linear incomparável.*

Capítulo 4

Sobre a classificação isomorfa dos espaços $\mathcal{N}(X^\lambda, Y^\xi)$

Neste capítulo, estabeleceremos a classificação isomorfa dos espaços de operadores nucleares $\mathcal{N}(X^\lambda, Y^\xi)$, para uma ampla classe de espaços de Banach X e Y, dando ênfase especial à classe dos espaços de Banach X cujo dual é isomorfo a um subespaço de ℓ_1, e para Y os subespaços de ℓ_p com $1 < p < \infty$. Também vamos introduzir os $\mathcal{N}_1$-espaços e $\mathcal{N}_\infty$-espaços; e discutiremos alguns aspectos importantes destes espaços.

Inicialmente, provaremos dois resultados úteis para entender a estrutura dos subespaços de $\ell_\infty(\Gamma, X)$, $\ell_1(\Gamma, X)$ e $c_o(\Gamma, X)$ isomorfos aos espaços $\ell_\infty(I)$, $\ell_1(I)$, $c_o(I)$, respectivamente, onde $|\Gamma| < |I|$.

Lema 4.1 *Sejam I, J conjuntos infinitos tais que I é não enumerável e $|I| > |J|$. Se $\ell_\infty(J, X)$ contém um subespaço isomorfo a $\ell_\infty(I)$, então existe um subconjunto Γ de I com $|\Gamma| = \aleph_1$ tal que $\ell_\infty(\Gamma)$ é isomorfo a um subespaço de X.*

Prova. Suponhamos primeiramente que $|I|$ seja um cardinal regular. Sejam $T : \ell_\infty(I) \longrightarrow \ell_\infty(J, X)$ um isomorfismo sobre a imagem, e $(e_i)_{i\in I}$ os vetores unitários de $\ell_\infty(I)$, isto é, $e_i(k) = 1$ para $i = k$ e $e_i(k) = 0$ para $i \neq k$. Temos que existe um $M > 0$ tal que $M \leq \|Tx\|$ para cada $x \in \ell_\infty(I)$ com $\|x\| = 1$. Fixado $t \in J$, definimos $I_t = \{i \in I : \frac{M}{2} < \|T(e_i)(t)\|\}$. Vemos que para $i \in I$ existe um $j_0 \in J$ tal que $\|Te_i(j_o)\| > \frac{M}{2}$. Portanto, $i \in \bigcup_{t\in J} I_t$. Logo, $I = \bigcup_{t\in J} I_t$. Como $|I|$ é regular, pela Proposição 1.1.3, existe um $t_0 \in J$ tal que $|I_{t_0}| = |I|$. Considerando a aplicação $P_{t_0} : \ell_\infty(J, X) \longrightarrow X$ dada por $P_{t_0}(\varphi) = \varphi(t_0)$, e a aplicação $L = P_{t_0} \circ T$, vemos que L é um operador linear limitado de $\ell_\infty(I)$ em X tal que $\|Le_i\| \geq \frac{M}{2}$

para todo $i \in I_{t_0}$. Portanto, o Teorema 1.3.2 implica que existe um subconjunto I_1 de I_{t_0} com $|I_1| = |I_{t_0}|$ tal que $L|_{I_1}$ é um isomorfismo sobre a imagem.

Suponhamos agora que o cardinal de I seja singular. Pela Proposição 1.1.4 existe um ordinal limite λ tal que $|I| = \aleph_\lambda$. Como $|J| < |I|$, vemos que existe um conjunto $\Lambda \subseteq I$ e um ordinal $\beta < \lambda$ tais que $|\Lambda| = \aleph_{\beta+1}$ e $|J| < \aleph_{\beta+1} < |I|$. Portanto,

$$\ell_\infty(\Lambda) \hookrightarrow \ell_\infty(I) \hookrightarrow \ell_\infty(J, X).$$

Já que $\aleph_{\beta+1}$ é regular (por a Proposição 1.1.4) podemos usar o caso regular para concluir que existe um subconjunto Λ_1 de Λ com $|\Lambda_1| = \aleph_1$ tal que $\ell_\infty(\Lambda_1)$ é isomorfo a um subespaço de X, como queríamos. ∎

O Lema anterior admite um correspondente no caso de $\ell_1(J, X)$ e $c_o(J, X)$.

Lema 4.2 *Sejam I, J conjuntos infinitos tais que I é não enumerável e $|I| > |J|$. São válidas:*

1. *Se $\ell_1(I)$ é isomorfo a um subespaço complementado de $\ell_1(J, X)$ então existe um subconjunto Γ de I com $|\Gamma| = \aleph_1$ tal que $\ell_1(\Gamma)$ é isomorfo a um subespaço complementado de X.*

2. *Se $c_o(I)$ é isomorfo a um subespaço de $c_o(J, X)$ então existe um subconjunto Γ de I com $|\Gamma| = \aleph_1$ tal que $c_o(\Gamma)$ é isomorfo a um subespaço de X.*

Prova. Se $\ell_1(I)$ é isomorfo a um subespaço complementado de $\ell_1(J, X)$ então, pelo Teorema 1.3.1, temos que $\ell_\infty(I)$ é isomorfo a um subespaço de $\ell_\infty(J, X^*)$. Pelo Lema 4.1, segue que existe um subconjunto Γ de I com $|\Gamma| = \aleph_1$ tal que $\ell_\infty(\Gamma)$ é isomorfo a um subespaço de X^*. Portanto, pelo Teorema 1.3.1 vemos que $\ell_1(\Gamma)$ é isomorfo a um subespaço complementado de X.

Provemos o ítem 2. Pelo Teorema 1.3.1, segue que $\ell_1(I)$ é isomorfo a um subespaço complementado de $\ell_1(J, X^*)$. Pelo ítem 1, temos que existe um subconjunto Γ de I com $|\Gamma| = \aleph_1$ tal que $\ell_1(\Gamma)$ é isomorfo a um subespaço complementado de X^*. Logo, $c_o(\Gamma)$ é isomorfo a um subespaço de X. ■

Observação 4.3 Observando a prova do Lema 4.2, vemos que no caso de $\ell_1(J, X)$ foi preciso utilizar a hipótese que $\ell_1(I)$ seja isomorfo a um subespaço complementado de $\ell_1(J, X)$. Nós não sabemos, se o resultado contínua válido se a hipótese de complementado for retirada. Entretanto, para nossos propósitos esta hipótese será sempre satisfeita.

Vamos agora provar que um subespaço de $\ell_1(\Gamma, X^\alpha)$ é, a não ser que contenha ℓ_1, um subespaço de uma potencia de X^α. Este resultado simples é muito importante no estudo dos $\mathcal{N}_1$-espaços e no estudo da classificação isomorfa dos espaços de operadores nucleares, como veremos nos próximos teoremas.

Proposição 4.4 *Sejam X, H espaços de Banach tal que H é isomorfo a um subespaço de $\ell_1(\Gamma, X^\alpha)$ com Γ qualquer conjunto infinito e α um ordinal não enumerável. Então ou ℓ_1 é isomorfo a um subespaço de H ou existe um $n \in \mathbb{N}$ tal que H é isomorfo a um subespaço de $(X^\alpha)^n$.*

Prova. Seja $T : H \longrightarrow \ell_1(\Gamma, X^\alpha)$ um isomorfismo sobre a imagem e tome $M > 0$ tal que $\frac{1}{M}\|x\| \leq \|Tx\| \leq M\|x\|$ para $x \in H$. Consideremos a aplicação $P_I : \ell_1(\Gamma, X^\alpha) \longrightarrow (X^\alpha)^{|I|}$ por $P_I(\varphi) = (\varphi(\gamma))_{\gamma \in I}$ onde I é qualquer subconjunto finito de Γ. Temos que P_I é um operador linear limitado com $\|P_I\varphi\| \leq \|\varphi\|$ para qualquer $\varphi \in \ell_1(\Gamma, X^\alpha)$. Vamos supor que $P_I \circ T$ não é um isomorfismo sobre a imagem para todo subconjunto finito I de Γ. Usando os mesmos argumentos feitos na prova da Proposição 3.2 (lembre que pela Proposição 1.3.4, $\lim_J P_J\varphi = \varphi$), segue que existe uma seqüência crescente $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos finitos de Γ e uma seqüência $(h_k)_{k\geq 1}$ em H com $\|h_k\| = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$, tais que

1. $\|P_{I_k}Th_k\| \leq \frac{1}{2^k}$.
2. $\left\|(P_{I_{k+1}} - P_{I_k})Th_k\right\| > \frac{1}{2M}$.
3. $\|Th_k - P_{I_{k+1}}Th_k\| < \frac{1}{2^{k+1}}$.

Tomando $X_k = Th_k$ e $Y_k = P_{I_{k+1}} - P_{I_k}$, temos que $\|X_k - Y_k\| < \frac{1}{2^k}$ e $\|Y_k\| > \frac{1}{2M}$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Se $(X_k)_{k\geq 1}$ for uma seqüência fracamente de Cauchy, como $\ell_1(\Gamma)$ tem a propriedade de Schur existe $z \in \ell_1(\Gamma, X^\alpha)$ tal que $X_k \to z$ em norma, e portanto, $Y_k \to z$ em norma. Como $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência disjuntamente suportada, então $z = 0$. Isto é uma contradição, pois $\|Th_k\| \geq \frac{1}{M}$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Portanto, $(X_k)_{k\geq 1}$ é equivalente à base canônica de ℓ_1, como queríamos. ∎

A Proposição 4.4 é particularmente interessante quando H é um espaço $\mathbb{R}^\beta$ para algum ordinal β. Vamos destacar este fato no próximo corolário.

Corolário 4.5 *Se $\mathbb{R}^\beta$ é isomorfo a um subespaço de $\ell_1(\Gamma, X^\alpha)$, então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathbb{R}^\beta$ é isomorfo a um subespaço de $(X^\alpha)^n$.*

Prova. De fato, pela Proposição 4.4, ou existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathbb{R}^\beta$ é isomorfo a um subespaço de $(X^\alpha)^n$ ou ℓ_1 é isomorfo a um subespaço de $\mathbb{R}^\beta$. Pelo ítem 2 do Teorema 1.2.10, segue que, existe um $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathbb{R}^\beta \hookrightarrow (X^\alpha)^n$. ∎

Vamos agora tratar de um conceito semelhante ao de $\mathcal{N}_0$-espaço.

Definição 4.6 Se Γ é um conjunto de cardinalidade $\aleph_1$ e Y é um espaço de Banach qualquer, dizemos que X é um $\mathcal{N}_1$-espaço se

$$\ell_1(\Gamma) \overset{c}{\hookrightarrow} \mathcal{N}(X, Y) \qquad \text{então} \qquad \ell_1(\Gamma) \overset{c}{\hookrightarrow} Y.$$

Observação 4.7 A pergunta natural que surge é se existe uma relação entre $\mathcal{N}_0$-espaço e $\mathcal{N}_1$-espaço. De fato, sejam X um $\mathcal{N}_0$-espaço e Γ um conjunto infinito de cardinalidade $\aleph_1$. Suponhamos que, $\ell_1(\Gamma)$ seja isomorfo a um subespaço complementado de $\mathcal{N}(X, Y)$. Como X é um $\mathcal{N}_0$-espaço então, segue que, $\ell_1(\Gamma) \overset{c}{\hookrightarrow} \mathcal{N}(c_o, Y)$, e lembrando que $\mathcal{N}(c_o, Y) \sim \ell_1 \hat{\otimes}_\pi Y \sim \ell_1(\mathbb{N}, Y)$, vemos que $\ell_1(\Gamma) \overset{c}{\hookrightarrow} \ell_1(\mathbb{N}, Y)$. Pelo ítem 1 do Lema 4.2, temos que $\ell_1(\Gamma)$ é isomorfo a um subespaço complementado de Y. Logo, X é um $\mathcal{N}_1$-espaço. Isso mostra que todo $\mathcal{N}_0$-espaço é um $\mathcal{N}_1$-espaço. Em particular cada espaço de Banach X tal que X^* é isomorfo ao espaço ℓ_1 é um $\mathcal{N}_1$-espaço.

Na próxima proposição vamos utilizar os $\mathcal{N}_1$-espaços para provar uma lei de cancelamento do produto tensorial $\ell_1([0,\lambda],X^*)\hat{\otimes}_\pi Y^\xi$.

Proposição 4.8 *Sejam λ,μ,ξ,η ordinais infinitos e X, Y espaços de Banach tais que X é um $\mathcal{N}_1$-espaço e Y não contém subespaço complementado isomorfo ao espaço $\ell_1(\Gamma)$ com $|\Gamma| = \aleph_1$. Suponhamos que X^* ou Y tem a propriedade de aproximação e que*

$$\ell_1([0,\lambda],X^*)\hat{\otimes}_\pi Y^\xi \sim \ell_1([0,\mu],X^*)\hat{\otimes}_\pi Y^\eta. \tag{4.1}$$

Então $\overline{\lambda} = \overline{\mu}$.

Prova. Suponhamos que $\overline{\lambda} \neq \overline{\mu}$ e podemos considerar $\overline{\lambda} < \overline{\mu}$ (para o caso $\overline{\mu} < \overline{\lambda}$, basta trocar $\overline{\lambda}$ por $\overline{\mu}$ na demonstração). Pelo ítem 4 da Proposição 1.3.4, temos que $\ell_1([0,\mu])$ é isomorfo a um subespaço complementado de $\ell_1([0,\mu],X^*)$. Como $Y^\xi \sim Y^\xi$ para todo ordinal ξ então, pelo ítem 1 da Proposição 1.4.7, vemos que

$$\ell_1([0,\mu])\hat{\otimes}_\pi Y^\eta \overset{c}{\hookrightarrow} \ell_1([0,\mu],X^*)\hat{\otimes}_\pi Y^\eta. \tag{4.2}$$

Pela Isomorfismo 1.4.5, vemos que

$$\ell_1([0,\lambda],X^*)\hat{\otimes}_\pi Y^\xi \sim \ell_1([0,\lambda])\hat{\otimes}_\pi (X^*\hat{\otimes}_\pi Y^\xi) \sim \ell_1([0,\lambda],X^*\hat{\otimes}_\pi Y^\xi). \tag{4.3}$$

Então, usando as Relações 4.1, 4.2 e 4.3, segue que

$$\ell_1([0,\mu]) \overset{c}{\hookrightarrow} \ell_1([0,\mu])\hat{\otimes}_\pi Y^\eta \overset{c}{\hookrightarrow} \ell_1([0,\mu],X^*)\hat{\otimes}_\pi Y^\eta \sim \ell_1([0,\lambda],X^*\hat{\otimes}_\pi Y^\xi). \tag{4.4}$$

Como, $\overline{\lambda} < \overline{\mu}$ pelo ítem 1 do Lema 4.2, temos que existe um subconjunto Γ de $[0,\mu]$ com $|\Gamma| = \aleph_1$ tal que

$$\ell_1(\Gamma) \overset{c}{\hookrightarrow} X^*\hat{\otimes}_\pi Y^\xi.$$

Além disso, como X^* ou Y tem a propriedade de aproximação, pela Proposição 1.4.17, segue que

$$\ell_1(\Gamma) \overset{c}{\hookrightarrow} \mathcal{N}(X, Y^\xi). \tag{4.5}$$

Portanto, já que X é um $\mathcal{N}_1$-espaço, temos que $\ell_1(\Gamma) \overset{c}{\hookrightarrow} Y^\xi$. Assim, usando o ítem 1 do Teorema 1.2.31 e o fato que $\ell_1(\Gamma)$ não contém subespaço isomorfo ao espaço c_o, vemos que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\ell_1(\Gamma) \overset{c}{\hookrightarrow} Y^m$. Logo, pelo Teorema 1.3.1 e pela Equação 1.5.5, temos que

$$\ell_\infty(\Gamma) \hookrightarrow (Y^m)^* \sim (Y^*)^m \sim \ell_\infty([1, 2, ..., m], Y^*). \tag{4.6}$$

Como $|\Gamma| > |\{1, 2, ..., m\}|$, segue do Lema 4.1 que $\ell_\infty(\Gamma) \hookrightarrow Y^*$. Portanto, $\ell_1(\Gamma) \overset{c}{\hookrightarrow} Y$, contrariando a hipótese. Logo, $\overline{\lambda} = \overline{\mu}$. ■

Observação 4.9 Uma maneira clássica de construir espaços de Banach com as hipóteses da Proposição 4.8 é o método de Bourgain-Delbaen. Este método foi ilustrado na Definição 1.6.12, na qual encontramos que para cada número real a existe um espaço de Banach Y_a separável, que não contém cópia de ℓ_1 (e portanto $\ell_1(\Gamma)$ para todo Γ) nem cópia de c_o cujo dual é isomorfo ao espaço ℓ_1. Outros exemplos clássicos são os espaços das funções contínuas definidas num intervalo de ordinais $[0, \alpha]$ a valores em $\mathbb{R}$. Sabemos que este espaço não contém ℓ_1 e tem a propriedade de aproximação. Além disso, observe que esta família contém os espaços das funções contínuas $C(K)$, onde K é um compacto métrico enumerável, conforme ao teorema de Mazurkiewicz e Sierpiński [48].

Vamos agora provar outra lei de cancelamento na Equação 4.1. Nosso objetivo é provar que se a Fórmula 4.1 é válida então ξ e η tem o mesmo cardinal. Para isso, será necessário introduzir o conceito de $\mathcal{N}_\infty$-espaço.

Definição 4.10 Sejam Y um espaço de Banach qualquer e α um ordinal infinito, dizemos que um espaço de Banach X é um $\mathcal{N}_\infty$-espaço se

$$C([0,\alpha]) \hookrightarrow \mathcal{N}(X,Y) \implies C([0,\alpha]) \hookrightarrow Y^m \quad \text{para algum } m \in \mathbb{N}.$$

Observação 4.11 Se X é um $\mathcal{N}_0$-espaço então X também é um $\mathcal{N}_\infty$-espaço. De fato, se $\mathbb{R}^\alpha \hookrightarrow \mathcal{N}(X,Y)$ então $\mathbb{R}^\alpha \hookrightarrow \mathcal{N}(c_o,Y)$. Como $\mathcal{N}(c_o,Y) \sim \ell_1\hat{\otimes}_\pi Y \sim \ell_1(\mathbb{N},Y)$, vemos que $\mathbb{R}^\alpha \hookrightarrow \ell_1(\mathbb{N},Y)$. Pelo Corolário 4.5, temos que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\mathbb{R}^\alpha \hookrightarrow Y^m$. Logo, X é um $\mathcal{N}_\infty$-espaço. Não é verdade em geral que se X é um $\mathcal{N}_\infty$-espaço então X é um $\mathcal{N}_0$-espaço. Vejamos um exemplo em que esta situação ocorre.

Exemplo 4.12 Seja I um conjunto com $|I| > \aleph_1$, e consideremos o espaço $X = c_o(I)$. Temos que $X^* \sim \ell_1(I)$. Como X^* tem a propriedade de aproximação, vemos que $\mathcal{N}(X,Y) \sim X^*\hat{\otimes}_\pi Y \sim \ell_1(I,Y)$. Logo, se $\mathbb{R}^\alpha \hookrightarrow \mathcal{N}(X,Y)$, então $\mathbb{R}^\alpha \hookrightarrow \ell_1(I,Y)$. Pelo Corolário 4.5, segue que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\mathbb{R}^\alpha \hookrightarrow Y^m$, e portanto, X é um $\mathcal{N}_\infty$-espaço. Entretanto, X não é um $\mathcal{N}_1$-espaço (e portanto, também não é um $\mathcal{N}_0$-espaço). De fato, existem espaços de Banach Y tais que $\ell_1(\Gamma) \overset{c}{\hookrightarrow} \ell_1(I,Y)$, onde Γ é um conjunto de $|\Gamma| = \aleph_1$ mas que $\ell_1(\Gamma)$ não é isomorfo a um subespaço complementado de Y^m para cada $m \in \mathbb{N}$ (por exemplo, tome $Y = \mathbb{R}^\alpha$ onde α é um ordinal qualquer e observe que $\ell_1(\Gamma) \overset{c}{\hookrightarrow} \ell_1(I) \hookrightarrow \ell_1(I,\mathbb{R}^\alpha)$ mas $\ell_1(\Gamma) \not\hookrightarrow \mathbb{R}^\alpha$.)

Podemos passar agora a provar uma lei de cancelamento.

Proposição 4.13 *Sejam λ, μ, ξ, η ordinais infinitos e X, Y espaços de Banach tais que X é um $\mathcal{N}_\infty$-espaço e Y não contém subespaço isomorfo a c_o e tem a propriedade de Mazur. Suponhamos que X^* ou Y têm a propriedade de aproximação e*

$$\ell_1([0,\lambda],X^*)\hat{\otimes}_\pi Y^\xi \sim \ell_1([0,\mu],X^*)\hat{\otimes}_\pi Y^\eta.$$

Então, $\overline{\xi} = \overline{\eta}$.

Prova. Suponhamos que $\overline{\xi} \neq \overline{\eta}$ e podemos considerar $\overline{\xi} < \overline{\eta}$ (o caso $\overline{\eta} < \overline{\xi}$ é análogo).

Como $Y^\eta \sim Y^\eta$ e $\mathbb{R}$ é isomorfo a um subespaço complementado de X^* então, pelo ítem 1 da Proposição 1.4.7, segue que

$$\mathbb{R}^\eta \hookrightarrow Y^\eta \sim \mathbb{R}\hat{\otimes}_\pi Y^\eta \overset{c}{\hookrightarrow} X^*\hat{\otimes}_\pi Y^\eta.$$

Logo, pela Relação 4.1 e pelo ítem 4 da Proposição 1.3.4, vemos que

$$\mathbb{R}^\eta \hookrightarrow Y^\eta \overset{c}{\hookrightarrow} X^*\hat{\otimes}_\pi Y^\eta \overset{c}{\hookrightarrow} \ell_1([0,\mu], X^*\hat{\otimes}_\pi Y^\eta) \sim \ell_1([0,\lambda], X^*\hat{\otimes}_\pi Y^\xi). \tag{4.7}$$

Além disso, de acordo com o Corolário 4.5, vemos que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\mathbb{R}^\eta \hookrightarrow (X^*\hat{\otimes}_\pi Y^\xi)^m$. Já que $(X^*\hat{\otimes}_\pi Y^\xi)^m \sim X^*\hat{\otimes}_\pi Y^{\xi.m}$, temos que

$$\mathbb{R}^\eta \hookrightarrow X^*\hat{\otimes}_\pi Y^{\xi.m}. \tag{4.8}$$

A Proposição 1.4.17 e a hipótese que X^* ou Y têm a propriedade de aproximação implicam que

$$\mathbb{R}^\eta \hookrightarrow \mathcal{N}(X, Y^{\xi.m})$$

Logo, como X é um $\mathcal{N}_\infty$-espaço, vemos que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mathbb{R}^\eta \hookrightarrow (Y^{\xi.m})^k \sim (Y^{m.k})^\xi \tag{4.9}$$

Entretanto, considerando α um ordinal inicial de cardinalidade $\overline{\eta}$, vemos que $\mathbb{R}^\alpha$ é isomorfo a um subespaço de $\mathbb{R}^\eta$. Logo, usando o Isomorfismo 4.9 obtemos que

$$\mathbb{R}^\alpha \hookrightarrow (Y^{m.k})^\xi \tag{4.10}$$

Portanto, pela Proposição 1.2.27, concluímos que $c_o \hookrightarrow Y^{m.k}$. (Lembremos que, se Y tem a propriedade de Mazur então $Y^{m.k}$ também tem a propriedade de Mazur, conforme ao ítem 3 do Corolário 5.2 de [40]). Logo, $c_o \hookrightarrow Y$, conforme à Proposição 1.2.28. Isto é uma contradição. Portanto, $\overline{\xi} = \overline{\eta}$. ∎

Agora temos todos os ingredientes necessários para provar o principal teorema desta seção, a classificação isomorfa dos espaços de operadores nucleares.

Teorema 4.14 *Sejam λ, μ, ξ, η ordinais infinitos e X, Y espaços de Banach tais que X é um $\mathcal{N}_1$-espaço e $\mathcal{N}_\infty$-espaço e Y tem a propriedade de Mazur, não contém subespaço isomorfo ao espaço c_o e não contém subespaço complementado isomorfo ao espaço $\ell_1(\Gamma)$, onde $|\Gamma| = \aleph_1$. Suponhamos que X^* ou Y têm a propriedade de aproximação. Então,*

1. $\mathcal{N}(X^\lambda, Y^\xi) \sim \mathcal{N}(X^\mu, Y^\eta)$ *se e só se*

2. $\mathbb{R}^\xi \sim \mathbb{R}^\eta$ ou, $\mathbb{R}^\xi \sim \mathbb{R}^{\alpha p}$ e $\mathbb{R}^\eta \sim \mathbb{R}^{\alpha q}$,

   para α algum ordinal inicial não enumerável, e p,q ordinais finitos .

Prova. Suponhamos que

$$\mathcal{N}(X^\lambda, Y^\xi) \sim \mathcal{N}(X^\mu, Y^\eta). \tag{4.11}$$

Como X^* ou Y têm a propriedade de aproximação, o início do primeiro parágrafo do Teorema 2.2 mostra que

$$\mathcal{N}(X^\lambda, Y^\xi) \sim \ell_1([0,\lambda], X^*)\hat{\otimes}_\pi Y^\xi \quad \text{e} \quad \mathcal{N}(X^\mu, Y^\eta) \sim \ell_1([0,\mu], X^*)\hat{\otimes}_\pi Y^\eta. \tag{4.12}$$

Logo,

$$\ell_1([0,\lambda], X^*)\hat{\otimes}_\pi Y^\xi \sim \ell_1([0,\mu], X^*)\hat{\otimes}_\pi Y^\eta. \tag{4.13}$$

As Proposições 4.8 e 4.13 implicam que $\overline{\lambda} = \overline{\mu}$ e $\overline{\xi} = \overline{\eta}$. Portanto, podemos supor que ξ, η são ordinais com a mesma cardinalidade e $\xi \leq \eta$. Consideremos α um ordinal inicial de cardinalidade $\overline{\xi}$. Faremos a prova em dois casos com relação ao ordinal α.

Primeiro caso. $\alpha = \omega$ ou α é um ordinal singular ou α é um ordinal não enumerável com $\xi \geq \alpha^2$. Vamos provar que $\eta < \xi^\omega$. Suponhamos que $\eta \geq \xi^\omega$. Vemos que $\mathbb{R}^{\xi^\omega}$ é isomorfo a um subespaço de $\mathbb{R}^\eta$. Vimos na Proposição 4.13 que $\mathbb{R}^\eta$ é isomorfo a um subespaço complementado de Y^η. Logo,

$$\mathbb{R}^\eta \overset{c}{\hookrightarrow} Y^\eta \hookrightarrow X^*\hat{\otimes}_\pi Y^\eta \hookrightarrow \ell_1([0,\mu], X^*\hat{\otimes}_\pi Y^\eta) \sim \ell_1([0,\lambda], X^*\hat{\otimes}_\pi Y^\xi). \tag{4.14}$$

Pelo Corolário 4.5, segue que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mathbb{R}^\eta \hookrightarrow (X^*\hat{\otimes}_\pi Y^\xi)^m \hookrightarrow (X^*\hat{\otimes}_\pi Y^{\xi m}).$$

Usando a hipótese que X^* ou Y têm a propriedade de aproximação, a Proposição 1.4.17 e o fato que X é um $\mathcal{N}_\infty$-espaço, segue, que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mathbb{R}^\eta \hookrightarrow (Y^{\xi m})^k \sim Y^{\xi(mk)} \sim Y^{(mk)\xi}. \tag{4.15}$$

Portanto,

$$\mathbb{R}^{\xi^\omega} \hookrightarrow \mathbb{R}^\eta \hookrightarrow Y^{(mk)\xi}.$$

Como Y tem a propriedade de Mazur, pela Proposição 1.2.26, concluímos que $c_o \hookrightarrow Y^{mk}$, e portanto, $c_o \hookrightarrow Y$, conforme à Proposição 1.2.28. A contradição prova que $\eta < \xi^\omega$. Logo, pelo ítem 1 do Teorema 1.2.14, segue que $\mathbb{R}^\eta \sim \mathbb{R}^\xi$.

Segundo caso. Agora, suponhamos que α é um ordinal regular não enumerável com $\xi < \alpha^2$. Vamos primeiro provar que $\eta < \alpha^2$. Suponhamos que $\eta \geq \alpha^2$. Como $\alpha < \xi < \alpha^2$, existem ordinais ξ', γ tais que $\xi = \alpha\xi' + \gamma$ e $\xi' < \alpha$, $\gamma < \alpha$. Portanto, pelo Isomorfismo 1.2.3, vemos que $\mathbb{R}^\xi \sim \mathbb{R}^{\alpha\xi'}$. Pela Proposição 1.5.1, segue que

$$Y^\xi \sim \mathbb{R}^\xi\hat{\otimes}_\epsilon Y \sim \mathbb{R}^{\alpha\xi'}\hat{\otimes}_\epsilon Y \sim Y^{\alpha\xi'}. \tag{4.16}$$

Usando os mesmos argumentos feitos na prova do primeiro caso encontramos uma relação semelhante à Equação 4.14 trocando Y^ξ por $Y^{\alpha\xi'}$, isto é

$$\mathbb{R}^\eta \overset{c}{\hookrightarrow} Y^\eta \hookrightarrow X^*\hat{\otimes}_\pi Y^\eta \overset{c}{\hookrightarrow} \ell_1([0,\mu], X^*)\hat{\otimes}_\pi Y^\eta \sim \ell_1([0,\lambda], X^*)\hat{\otimes}_\pi Y^{\alpha\xi'}. \tag{4.17}$$

Portanto, como no primeiro caso concluímos que existem $k \in \mathbb{N}$ e $m \in \mathbb{N}$ tais que $\mathbb{R}^\eta \hookrightarrow (Y^{(mk)})^{\alpha\xi'}$. Como $\eta \geq \alpha^2$, segue que $\mathbb{R}^{\alpha^2}$ é isomorfo a um subespaço de $\mathbb{R}^\eta$, e portanto,

$$\mathbb{R}^{\alpha^2} \hookrightarrow \mathbb{R}^\eta \hookrightarrow (Y^{mk})^{\alpha\xi'}. \tag{4.18}$$

Assim, as Relações 1.2.5, 4.18, implicam que

$$\frac{[\mathbb{R}^{\alpha^2}]_\alpha}{c\mathbb{R}^{\alpha^2}} \hookrightarrow \frac{[(Y^{mk})^{\alpha\xi'}]_\alpha}{c(Y^{mk})^{\alpha\xi'}}. \tag{4.19}$$

Portanto, pelo ítem 2 da Proposição 1.2.22, segue que existem conjuntos Γ_1, Γ_2 de cardinalidade $\overline{\alpha}$ e $\overline{\xi'}$, respectivamente, tais que

$$\frac{[\mathbb{R}^{\alpha^2}]_\alpha}{c\mathbb{R}^{\alpha^2}} \sim c_o(\Gamma_1) \quad \text{e} \quad \frac{[(Y^{mk})^{\alpha\xi'}]_\alpha}{c(Y^{mk})^{\alpha\xi'}} \sim c_o(\Gamma_2, Y^{mk}). \tag{4.20}$$

Usando 4.19 e 4.20, segue que

$$c_o(\Gamma_1) \hookrightarrow c_o(\Gamma_2, Y^{mk}).$$

Como $|\Gamma_2| < |\Gamma_1|$, pelo ítem 2 do Lema 4.2, segue que existe um subconjunto Γ de Γ_1 tal que $|\Gamma| = \aleph_1$ e $c_o(\Gamma) \hookrightarrow Y^{mk}$. Isto e a Proposição 1.2.28 implicam que $c_o \hookrightarrow Y$, é uma contradição. Assim $\eta < \alpha^2$.

Portanto, existem ordinais η', δ tais que $\eta = \alpha\eta' + \delta$ com $\eta' < \alpha$ e $\delta < \alpha$. Como α é um ordinal regular, pelo Isomorfismo 1.2.3, segue que $\mathbb{R}^\eta \sim \mathbb{R}^{\alpha\eta'}$. Usando o mesmo cálculo que fixemos para provar 4.17, com $Y^{\alpha\eta'}$ em lugar de Y^η, e $Y^{\alpha\xi'}$ em lugar de Y^ξ, concluímos que

$$\mathbb{R}^{\alpha\xi'} \hookrightarrow Y^{\alpha\xi'} \overset{c}{\hookrightarrow} X^*\hat{\otimes}_\pi Y^{\alpha\xi'} \overset{c}{\hookrightarrow} \ell_1([0,\lambda], X^*)\hat{\otimes}_\pi Y^{\alpha\xi'} \sim \ell_1([0,\mu], X^*)\hat{\otimes}_\pi Y^{\alpha\eta'}. \tag{4.21}$$

$$\mathbb{R}^{\alpha\eta'} \hookrightarrow Y^{\alpha\eta'} \overset{c}{\hookrightarrow} X^*\hat{\otimes}_\pi Y^{\alpha\eta'} \overset{c}{\hookrightarrow} \ell_1([0,\mu], X^*)\hat{\otimes}_\pi Y^{\alpha\eta'} \sim \ell_1([0,\lambda], X^*)\hat{\otimes}_\pi Y^{\alpha\xi'}. \tag{4.22}$$

As Relações 4.20, 4.21 e um argumento semelhante ao feito no primeiro caso nos permitem concluir que existem m, k, n, i em $\mathbb{N}$ tais que

$$\mathbb{R}^{\alpha\xi'} \hookrightarrow (Y^{mk})^{\alpha\eta'} \quad \text{e} \quad \mathbb{R}^{\alpha\eta'} \hookrightarrow (Y^{ni})^{\alpha\xi'}. \tag{4.23}$$

Como α é um ordinal regular, pelo ítem 2 da Proposição 1.2.22, segue que existem conjuntos I, J tais que $|I| = \overline{\xi'}$, $|J| = \overline{\eta'}$ e

$$\frac{[\mathbb{R}^{\alpha\xi'}]_\alpha}{c\mathbb{R}^{\alpha\xi'}} \sim c_o(I) \quad \text{e} \quad \frac{[(Y^{mk})^{\alpha\eta'}]_\alpha}{c(Y^{mk})^{\alpha\eta'}} \sim c_o(J, Y^{mk}). \tag{4.24}$$

$$\frac{[\mathbb{R}^{\alpha\eta'}]_\alpha}{c\mathbb{R}^{\alpha\eta'}} \sim c_o(J) \quad \text{e} \quad \frac{[(Y^{ni})^{\alpha\xi'}]_\alpha}{c(Y^{ni})^{\alpha\xi'}} \sim c_o(I, Y^{ni}). \tag{4.25}$$

Logo, usando as Relações 4.24, 4.25 e a Proposição 1.2.19, obtemos que

$$c_o(I) \sim \frac{[\mathbb{R}^{\alpha\xi'}]_\alpha}{c\mathbb{R}^{\alpha\xi'}} \hookrightarrow \frac{[(Y^{mk})^{\alpha\eta'}]_\alpha}{c(Y^{mk})^{\alpha\eta'}} \sim c_o(J, Y^{mk}). \tag{4.26}$$

$$c_o(J) \sim \frac{[\mathbb{R}^{\alpha\eta'}]_\alpha}{c\mathbb{R}^{\alpha\eta'}} \hookrightarrow \frac{[(Y^{ni})^{\alpha\xi'}]_\alpha}{c(Y^{ni})^{\alpha\xi'}} \sim c_o(I, Y^{ni}). \tag{4.27}$$

Assim, as Relações 4.26 e 4.27 implicam que $|J| < \aleph_0$ se e só se $|I| < \aleph_0$. De fato, suponhamos que $|J| < \aleph_0$ e $|I| \geq \aleph_0$. Pela Relação 4.26, temos que

$$c_o \hookrightarrow c_o(I) \hookrightarrow c_o(J, Y^{mk}) \sim Y^{mk|J|}$$

Portanto, $c_o \hookrightarrow Y$, contrariando a hipótese. Assim, $|J| < \aleph_0$ implica $|I| < \aleph_0$. Reciprocamente, se $|I| < \aleph_0$ e $|J| \geq \aleph_0$, pela Relação 4.27, temos que

$$c_o \hookrightarrow c_o(J) \hookrightarrow c_o(I, Y^{ni}) \sim Y^{ni|I|}$$

Logo, $c_o \hookrightarrow Y$. Isto prova que $|J| < \aleph_0$ se e só se $|I| < \aleph_0$. Neste caso, tomando $p = |I|$ e $q = |J|$, e pelo fato que $\mathbb{R}^\xi \sim \mathbb{R}^{\alpha\xi'}$ e $\mathbb{R}^\eta \sim \mathbb{R}^{\alpha\eta'}$, segue que $\mathbb{R}^\xi \sim \mathbb{R}^{\alpha p}$ e $\mathbb{R}^\eta \sim \mathbb{R}^{\alpha q}$ o que prova o ítem 2 do teorema. Caso $|I|$ seja infinito (e portanto, $|J|$ também é infinito), usando as Relações 4.26 e 4.27, o ítem 2 do Lema 4.2, e o fato que c_o não é isomorfo a um subespaço de Y^{mk}, podemos concluir que $|I| \leq |J|$ e $|J| \leq |I|$. Portanto, $|I| = |J|$. Logo $\overline{\xi'} = \overline{\eta'}$. Assim, pelo ítem 2 do Teorema 1.2.14, vemos que $\mathbb{R}^\xi \sim \mathbb{R}^\eta$, como queríamos provar.

Reciprocamente, suponhamos que $\mathbb{R}^\xi \sim \mathbb{R}^\eta$ ou, $\mathbb{R}^\xi \sim \mathbb{R}^{\alpha p}$ e $\mathbb{R}^\eta \sim \mathbb{R}^{\alpha q}$. Faremos a prova em dois casos.

Primeiro caso. $\mathbb{R}^\xi \sim \mathbb{R}^\eta$. Pela Proposição 1.5.1, temos

$$Y^\xi \sim Y\hat{\otimes}_\epsilon\mathbb{R}^\xi \sim Y\hat{\otimes}_\epsilon\mathbb{R}^\eta \sim Y^\eta. \tag{4.28}$$

Pela Proposição 4.8, temos que λ e μ tem o mesmo cardinal. Portanto,

$$\ell_1([0,\lambda], X^*) \sim \ell_1([0,\mu], X^*). \tag{4.29}$$

Assim, as Equações 4.28 e 4.29 implicam

$$\ell_1([0,\lambda],X^*)\hat{\otimes}_\pi Y^\xi \sim \ell_1([0,\lambda],X^*)\hat{\otimes}_\pi Y^\eta \sim \ell_1([0,\mu],X^*)\hat{\otimes}_\pi Y^\eta. \quad (4.30)$$

Logo, as Equações 4.11 e 4.30, segue que

$$\mathcal{N}(X^\lambda, Y^\xi) \sim \mathcal{N}(X^\mu, Y^\eta).$$

Segundo caso. $\mathbb{R}^\xi \sim \mathbb{R}^{\alpha p}$ e $\mathbb{R}^\eta \sim \mathbb{R}^{\alpha q}$. Usando o mesmo cálculo que fixemos para provar a Relação 4.28, com $\mathbb{R}^{\alpha p}$ em lugar de $\mathbb{R}^\eta$, concluímos que

$$Y^\xi \sim Y^{\alpha p} \quad \text{e} \quad Y^\eta \sim Y^{\alpha q}. \quad (4.31)$$

Portanto,

$$\ell_1([0,\lambda],X^*)\hat{\otimes}_\pi Y^\xi \sim \ell_1([0,\lambda],X^*)\hat{\otimes}_\pi Y^{\alpha p}. \quad (4.32)$$

$$\ell_1([0,\mu],X^*)\hat{\otimes}_\pi Y^\eta \sim \ell_1([0,\mu],X^*)\hat{\otimes}_\pi Y^{\alpha q}. \quad (4.33)$$

Como λ é um ordinal infinito e q é um ordinal finito, segue, pelo ítem 2 da Proposição 1.3.4, que

$$\ell_1([0,\lambda],X^*) \sim \ell_1([0,\lambda],X^*)^q. \quad (4.34)$$

Isto implica que

$$\ell_1([0,\lambda],X^*)\hat{\otimes}_\pi Y^{\alpha p} \sim \ell_1([0,\lambda],X^*)^q\hat{\otimes}_\pi Y^{\alpha p}.$$

Logo, usando a Relação 4.34 e o fato que o produto tensorial projetivo é distributivo, concluímos que

$$\ell_1([0,\lambda],X^*)^q\hat{\otimes}_\pi Y^{\alpha p} \sim (\ell_1([0,\lambda],X^*)\hat{\otimes}_\pi Y^{\alpha p})^q \sim \ell_1([0,\lambda],X^*)\hat{\otimes}_\pi (Y^{\alpha p})^q. \quad (4.35)$$

Pelo isomorfismo 1.5.4, temos que

$$(Y^{\alpha p})^q \sim Y^{\alpha(pq)} \sim (Y^{\alpha q})^p. \quad (4.36)$$

Usando as Relações 4.29, 4.35, e 4.36, concluímos que

$$\ell_1([0,\lambda],X^*)\hat{\otimes}_\pi Y^{\alpha p} \quad \sim \quad \ell_1([0,\lambda],X^*)^q\hat{\otimes}_\pi Y^{\alpha p}$$

$$\begin{aligned} &\sim (\ell_1([0,\lambda], X^*)\hat{\otimes}_\pi Y^{\alpha p})^q \\ &\sim (\ell_1([0,\mu], X^*)\hat{\otimes}_\pi Y^{\alpha q})^p \\ &\sim \ell_1([0,\mu], X^*)\hat{\otimes}_\pi Y^{\alpha q}. \end{aligned}$$

Disso, e das Relações 4.32 e 4.33, segue que

$$\ell_1([0,\lambda], X^*)\hat{\otimes}_\pi Y^\xi \sim \ell_1([0,\mu], X^*)\hat{\otimes}_\pi Y^\eta$$

Portanto,

$$\mathcal{N}(X^\lambda, Y^\xi) \sim \mathcal{N}(X^\mu, Y^\eta),$$

o que encerra a demonstração do teorema. ■

Como já comentamos, as Proposições 4.8 e 4.13 e o Teorema 4.14 continuam válidas se substituirmos X um $\mathcal{N}_1$-espaço e um $\mathcal{N}_\infty$-espaço por X^* isomorfo ao espaço ℓ_1, e se consideramos Y um subespaço de ℓ_p com $1 < p < \infty$. De fato, já provamos que se $X^* \sim \ell_1$ então X é um $\mathcal{N}_1$-espaço e um $\mathcal{N}_\infty$-espaço. Por outro lado, tomando Y um subespaço de ℓ_p com $1 < p < \infty$ temos que Y é separável, e portanto, Y tem a propriedade de Mazur. Além disso, Y não contém subespaço isomorfo a c_o nem a $\ell_1(\Gamma)$ com $|\Gamma| = \aleph_1$. Portanto, o próximo teorema está provado.

Teorema 4.15 (Generalização e extensão de (3)) *Sejam λ, μ, ξ, η ordinais infinitos e X, Y espaços de Banach tais que X^* é isomorfo ao espaço ℓ_1 e Y é um subespaço de ℓ_p com $1 < p < \infty$. Então,*

1. $\mathcal{N}(X^\lambda, Y^\xi) \sim \mathcal{N}(X^\mu, Y^\eta)$ *se e só se*
2. $\mathbb{R}^\xi \sim \mathbb{R}^\eta$ *ou,* $\mathbb{R}^\xi \sim \mathbb{R}^{\alpha p}$ e $\mathbb{R}^\eta \sim \mathbb{R}^{\alpha q}$,

   para α algum ordinal inicial não enumerável, e p,q ordinais finitos.

O Teorema 4.15 é particularmente interessante quando os espaços X e Y são o espaço real $\mathbb{R}$.

Teorema 4.16 *Sejam λ, μ, ξ, η ordinais infinitos. Então,*

1. $\mathcal{N}(\mathbb{R}^\lambda, \mathbb{R}^\xi) \sim \mathcal{N}(\mathbb{R}^\mu, \mathbb{R}^\eta)$ *se e só se*

2. $\mathbb{R}^\xi \sim \mathbb{R}^\eta$ *ou,* $\mathbb{R}^\xi \sim \mathbb{R}^{\alpha p}$ e $\mathbb{R}^\eta \sim \mathbb{R}^{\alpha q}$,

   para α algum ordinal inicial não enumerável, e p,q ordinais finitos.

Observação 4.17 Os Teoremas 4.15 e 4.16 generalizam um resultado de C. Samuel em [57, Teorema 5.2, pág. 970], pois não fazemos nenhuma hipótese sobre os ordinais λ, μ, ξ, η, como é o caso no referido artigo. O Teorema 4.15 mostra que os resultados de C. Samuel em [57] são válidos também para uma ampla classe de espaços de Banach X e Y, entre eles o espaço dado no Teorema 1.6.15, este espaço é de particular importância já que não tem base incondicional, lembrando que os resultados de C. Samuel em [57] são todos válidos para espaços com base incondicional.

Observação 4.18 O resultado 4.15 continua válido se substituirmos a expressão X^* é isomorfo ao espaço ℓ_1 por X^* isomorfo a um subespaço de ℓ_1 com a propriedade de aproximação e Y é um subespaço de ℓ_p com $1 < p < \infty$.

Capítulo 5

Sobre a classificação isomorfa dos espaços $\mathcal{K}(X^\lambda, Y^\xi)$

Neste capítulo trataremos do último assunto principal do nosso trabalho, a classificação isomorfa dos espaços de operadores compactos $\mathcal{K}(X^\lambda, Y^\xi)$. Ao contrário dos espaços de operadores nucleares, os espaços $\mathcal{K}(X^\lambda, Y^\xi)$ estão relacionados com o produto tensorial injetivo de dois espaços de Banach X e Y, e portanto, têm propriedades mais clássicas que as de operadores nucleares. Apesar disso, e de maneira um tanto surpreendente, vamos provar que os espaços de operadores compactos $\mathcal{K}(X^\lambda, Y^\xi)$ têm a mesma classificação isomorfa que os espaços de operadores nucleares $\mathcal{N}(X^\lambda, Y^\xi)$.

Primeiramente, introduzimos o conceito de $\mathcal{K}_0$-espaço o qual será muito útil mais adiante.

Definição 5.1 Um espaço de Banach X é dito um $\mathcal{K}_0$-espaço se para quaisquer conjuntos infinitos I e J tais que $\mathcal{K}(c_o(I), X)$ e $\mathcal{K}(c_o(J), X)$ têm a mesma dimensão linear, então $|I| = |J|$.

Daremos agora um exemplo importante de um $\mathcal{K}_0$-espaço.

Exemplo 5.2 Se X é um espaço de Banach separável então X é um $\mathcal{K}_0$-espaço. De fato, obviamente $c_o^*(I) \sim \ell_1(I)$, além disso, se I e J são conjuntos infinitos, pela Proposição 1.5.6, temos que

$$\mathcal{K}(c_o(I), X) \sim \ell_1(I) \hat{\otimes}_\epsilon X \quad \text{e} \quad \mathcal{K}(c_o(J), X) \sim \ell_1(J) \hat{\otimes}_\epsilon X.$$

Logo, se $\mathcal{K}(c_o(I), X)$ e $\mathcal{K}(c_o(J), X)$ têm a mesma dimensão linear então eles têm a mesma densidade. Assim, como X é um espaço de Banach separável, obtemos que

$$dens(\mathcal{K}(c_o(I), X) = |I| \quad \text{e} \quad dens(\mathcal{K}(c_o(J), X) = |J|.$$

Logo, $|I| = |J|$. Isto implica que X é um $\mathcal{K}_0$-espaço. Portanto, como os espaços de Banach construídos nas Definições 1.6.12 e no Teorema 1.6.15 são espaços de Banach separáveis, temos que estes exemplos são $\mathcal{K}_0$-espaços cujo dual é isomorfo ao espaço ℓ_1.

Vamos agora provar um critério simples e muito útil sobre a existência de subespaços do espaço $\ell_1(\Gamma, X^*)\hat{\otimes}_\epsilon Y$ que são isomorfo ao espaço c_o.

Lema 5.3 *Sejam X, Y espaços de Banach tais que X^* é isomorfo a um subespaço de ℓ_1 e Y não contém subespaço isomorfo ao espaço c_o. Então c_o não é isomorfo a um subespaço de $\ell_1(\Gamma, X^*)\hat{\otimes}_\epsilon Y$, para cada conjunto Γ.*

Prova. Sejam X, Y espaços de Banach com $X^* \hookrightarrow \ell_1$ e $c_o \not\hookrightarrow Y$. Suponhamos que exista um conjunto Γ tal que c_o seja isomorfo a um subespaço de $\ell_1(\Gamma, X^*)\hat{\otimes}_\epsilon Y$. Como X^* é isomorfo a um subespaço de ℓ_1, vemos pelo ítem 3 da Proposição 1.3.4, que $\ell_1(\Gamma, X^*)$ é isomorfo a um subespaço de $\ell_1(\Gamma)$. Portanto,

$$c_o \hookrightarrow \ell_1(\Gamma, X^*)\hat{\otimes}_\epsilon Y \hookrightarrow \ell_1(\Gamma)\hat{\otimes}_\epsilon Y. \tag{5.1}$$

Pela Proposição 1.4.13, como c_o é separável, existem Γ_0,Y_0, com Γ_0 um subconjunto enumerável de Γ e Y_0 um subespaço separável de Y tais que

$$c_o \hookrightarrow \ell_1(\Gamma_0)\hat{\otimes}_\epsilon Y_0.$$

Logo,

$$c_o \hookrightarrow \ell_1\hat{\otimes}_\epsilon Y.$$

Como ℓ_1 é isomorfo a um subespaço de $L_1[0,1]$, segue que

$$c_o \hookrightarrow L_1[0,1]\hat{\otimes}_\epsilon Y. \tag{5.2}$$

As Relações 5.2 e o Teorema 1.5.7 nos permitem concluir que c_o é isomorfo a um subespaço de Y, contrariando a hipótese. Logo $c_o \not\hookrightarrow \ell_1(\Gamma, X^*)\hat{\otimes}_\epsilon Y$ para todo Γ. ■

Como não caso de operadores nucleares, passemos agora provar uma lei de cancelamento do produto tensorial injetivo $\ell_1([0,\lambda], X^*)\hat{\otimes}_\epsilon Y^\xi$.

Proposição 5.4 *Sejam λ, μ, ξ, η ordinais infinitos e X, Y espaços de Banach tais que X^* é isomorfo a um subespaço de ℓ_1 e Y é um $\mathcal{K}_0$-espaço que não contém subespaço isomorfo ao espaço c_o. Se*

$$\ell_1([0,\lambda], X^*)\hat{\otimes}_\epsilon Y^\xi \sim \ell_1([0,\mu], X^*)\hat{\otimes}_\epsilon Y^\eta, \tag{5.3}$$

então $\overline{\lambda} = \overline{\mu}$.

Prova. Sejam X, Y espaços de Banach com Y um $\mathcal{K}_0$-espaço, $X^* \hookrightarrow \ell_1$ e $c_o \not\hookrightarrow Y$. Como $\ell_1([0,\lambda], X^*)\hat{\otimes}_\epsilon Y$ é isomorfo a um subespaço complementado de $\ell_1([0,\lambda], X^*)\hat{\otimes}_\epsilon Y^\xi$, pelo Isomorfismo 5.3, segue que

$$\ell_1([0,\lambda], X^*)\hat{\otimes}_\epsilon Y \overset{c}{\hookrightarrow} \ell_1([0,\mu], X^*)\hat{\otimes}_\epsilon Y^\eta$$

Pela Equação 1.5.6, vemos que

$$\ell_1([0,\mu], X^*)\hat{\otimes}_\epsilon Y^\eta \sim (\ell_1([0,\mu], X^*)\hat{\otimes}_\epsilon Y)^\eta$$

Logo,

$$\ell_1([0,\lambda], X^*)\hat{\otimes}_\epsilon Y \overset{c}{\hookrightarrow} [\ell_1([0,\mu], X^*)\hat{\otimes}_\epsilon Y]^\eta.$$

Usando o ítem 2 da Proposição 1.3.4 e o fato que o produto tensorial injetivo é distributivo, segue que $\ell_1([0,\lambda], X^*)\hat{\otimes}_\epsilon Y$ é isomorfo a seu quadrado. Além disso, pelo Lema 5.3 $\ell_1([0,\lambda], X^*)\hat{\otimes}_\epsilon Y$ não contém subespaço isomorfo ao espaço c_o. Portanto, segue, pelo ítem 1 do Teorema 1.2.31, que

$$\ell_1([0,\lambda], X^*)\hat{\otimes}_\epsilon Y \overset{c}{\hookrightarrow} \ell_1([0,\mu], X^*)\hat{\otimes}_\epsilon Y. \tag{5.4}$$

Usando o mesmo raciocínio trocando λ por μ, concluímos que

$$\ell_1([0,\mu], X^*)\hat{\otimes}_\epsilon Y \overset{c}{\hookrightarrow} \ell_1([0,\lambda], X^*)\hat{\otimes}_\epsilon Y. \tag{5.5}$$

Logo, as Relações 5.4, 5.5, o ítem 2 da Proposição 1.3.4 e o Teorema de descomposição de Pełczyński (veja [45, Proposição I.3.7]), implicam que

$$\ell_1([0,\mu], X^*)\hat{\otimes}_\epsilon Y \sim \ell_1([0,\lambda], X^*)\hat{\otimes}_\epsilon Y. \tag{5.6}$$

Como X^* é isomorfo a um subespaço de ℓ_1, segue, pelo ítem 3 da Proposição 1.3.4, que

$$\ell_1([0,\mu], X^*)\hat{\otimes}_\epsilon Y \hookrightarrow \ell_1([0,\mu], \ell_1)\hat{\otimes}_\epsilon Y \sim \ell_1([0,\mu])\hat{\otimes}_\epsilon Y. \tag{5.7}$$

$$\ell_1([0,\lambda], X^*)\hat{\otimes}_\epsilon Y \hookrightarrow \ell_1([0,\lambda], \ell_1)\hat{\otimes}_\epsilon Y \sim \ell_1([0,\lambda])\hat{\otimes}_\epsilon Y. \tag{5.8}$$

Usando as Relações 5.6, 5.7, 5.8, vemos que

$$\ell_1([0,\mu])\hat{\otimes}_\epsilon Y \hookrightarrow \ell_1([0,\lambda], X^*)\hat{\otimes}_\epsilon Y \hookrightarrow \ell_1([0,\lambda])\hat{\otimes}_\epsilon Y$$

$$\ell_1([0,\lambda])\hat{\otimes}_\epsilon Y \hookrightarrow \ell_1([0,\mu], X^*)\hat{\otimes}_\epsilon Y \hookrightarrow \ell_1([0,\mu])\hat{\otimes}_\epsilon Y$$

Assim os espaços $\ell_1([0,\lambda])\hat{\otimes}_\epsilon Y$ e $\ell_1([0,\mu])\hat{\otimes}_\epsilon Y$ têm a mesma dimensão linear. Como Y é um $\mathcal{K}_0$-espaço, segue que $\overline{\lambda} = \overline{\mu}$. ■

Agora temos as ferramentas adequadas para demonstrar a classificação isomorfa dos espaços de operadores compactos.

Teorema 5.5 *Sejam λ, μ, ξ, η ordinais infinitos com $\overline{\lambda}$ e $\overline{\mu}$ não mensuráveis e X, Y espaços de Banach tais que X^* é isomorfo a um subespaço de ℓ_1, e Y é um $\mathcal{K}_0$-espaço tendo a propriedade de Mazur e que não contém subespaço isomorfo ao espaço c_o. Suponhamos que X^* ou Y tenha a propriedade de aproximação. Então,*

1. $\mathcal{K}(X^\lambda, Y^\xi) \sim \mathcal{K}(X^\mu, Y^\eta)$ *se e só se*

2. $\mathbb{R}^\xi \sim \mathbb{R}^\eta$ *ou,* $\mathbb{R}^\xi \sim \mathbb{R}^{\alpha p}$ *e* $\mathbb{R}^\eta \sim \mathbb{R}^{\alpha q}$,

   para α algum ordinal inicial não enumerável, p e q ordinais finitos .

Prova. Suponha que

$$\mathcal{K}(X^\lambda, Y^\xi) \sim \mathcal{K}(X^\mu, Y^\eta).$$

Como X^* ou Y têm a propriedade de aproximação, pela Relação 2.3, temos que

$$\mathcal{K}(X^\lambda, Y^\xi) \sim (X^\lambda)^* \hat{\otimes}_\epsilon Y^\xi \sim \ell_1([0,\lambda], X^*)\hat{\otimes}_\epsilon Y^\xi. \tag{5.9}$$

$$\mathcal{K}(X^\mu, Y^\eta) \sim (X^\mu)^* \hat{\otimes}_\epsilon Y^\eta \sim \ell_1([0,\mu], X^*)\hat{\otimes}_\epsilon Y^\eta. \tag{5.10}$$

Logo,

$$\ell_1([0,\lambda], X^*)\hat{\otimes}_\epsilon Y^\xi \sim \ell_1([0,\mu], X^*)\hat{\otimes}_\epsilon Y^\eta. \tag{5.11}$$

Pela Proposição 5.4, vemos que $\overline{\lambda} = \overline{\mu}$. Consideremos o espaço $Z = \ell_1([0,\lambda], X^*)\hat{\otimes}_\epsilon Y$. Como X^* é separável e Y tem a propriedade de Mazur, segue que $X^*\hat{\otimes}_\epsilon Y$ tem a propriedade de Mazur, conforme ao ítem 3 do Corolário 5.2 de [40]. Pelo Teorema 1.3.25, temos que $\ell_1([0,\lambda])$ tem a propriedade de Mazur. Portanto, pelo Teorema 1.5.8, concluímos que o espaço Z tem a propriedade de Mazur. Pela Equação 1.5.6, vemos que

$$Z^\beta \sim \ell_1([0,\lambda], X^*)\hat{\otimes}_\epsilon Y^\beta. \tag{5.12}$$

Assim, as Relações 5.11 e 5.12 implicam

$$Z^\xi \sim Z^\eta. \tag{5.13}$$

Além disso, como Y não contém subespaço isomorfo ao espaço c_o, segue, pelo Lema 5.3, que Z não contém subespaço isomorfo ao espaço c_o. Logo, pelo ítem 1 da Proposição 1.2.25, concluímos que $\overline{\xi} = \overline{\eta}$. Portanto, podemos supor que ξ,η são ordinais com a mesma cardinalidade e $\xi \leq \eta$. Consideremos α um ordinal inicial não enumerável de cardinalidade $\overline{\xi}$. Distinguiremos dois casos conforme à Proposição 1.2.25 .

Primeiro caso. $\alpha = \omega$ ou α é um ordinal singular ou α é um ordinal regular não enumerável com $\alpha^2 \leq \xi$. Então, o ítem 2 da Proposição 1.2.25 e a Relação 5.13, implicam que $\eta < \xi^\omega$, e portanto, pelo Teorema 1.2.14 concluímos que $\mathbb{R}^\xi \sim \mathbb{R}^\eta$, o que prova o ítem 2 do teorema.

Segundo caso. Suponhamos que α seja um ordinal regular não enumerável com $\xi < \alpha^2$ e consideremos ordinais ξ', η', γ e δ com $\xi', \eta' \leq \alpha$ e $\gamma, \delta < \alpha$ tais que

$$\xi = \alpha\xi' + \gamma \quad \text{e} \quad \eta = \alpha\eta' + \delta.$$

Logo, pelo Isomorfismo 1.2.3, temos que

$$\mathbb{R}^\xi \sim \mathbb{R}^{\alpha\xi'} \text{ e } \mathbb{R}^\eta \sim \mathbb{R}^{\alpha\eta'}. \tag{5.14}$$

Como $Z^\xi \sim Z^\eta$, vemos, pelo ítem 3 da Proposição 1.2.25, que ou $\overline{\xi'}$ e $\overline{\eta'}$ são finitos ou $\overline{\xi'}$ e $\overline{\eta'}$ são infinitos com a mesma cardinalidade. Se $\overline{\xi'}$ e $\overline{\eta'}$ são finitos, então tomando $p = \overline{\xi'}$ e $q = \overline{\eta'}$ e usando a Relação 5.14 concluímos que

$$\mathbb{R}^\xi \sim \mathbb{R}^{\alpha p} \text{ e } \mathbb{R}^\eta \sim \mathbb{R}^{\alpha q}.$$

Provando o ítem 2. Caso $\overline{\xi'}$ e $\overline{\eta'}$ são infinitos com $\overline{\xi'} = \overline{\eta'}$, então pelo ítem 2 do Teorema 1.2.14, vemos que $\mathbb{R}^\xi \sim \mathbb{R}^\eta$, provando o ítem 2 do teorema.

Reciprocamente, suponhamos que $\mathbb{R}^\xi \sim \mathbb{R}^\eta$ ou, $\mathbb{R}^\xi \sim \mathbb{R}^{\alpha p}$ e $\mathbb{R}^\eta \sim \mathbb{R}^{\alpha q}$. Faremos a prova em dois casos.

Primeiro caso. $\mathbb{R}^\xi \sim \mathbb{R}^\eta$. Pela Relação 4.28, temos que $Y^\xi \sim Y^\eta$. Como λ e μ tem a mesma cardinalidade, segue que

$$\ell_1([0,\lambda], X^*) \sim \ell_1([0,\mu], X^*). \tag{5.15}$$

Logo,

$$\ell_1([0,\lambda], X^*)\hat{\otimes}_\epsilon Y^\xi \sim \ell_1([0,\mu], X^*)\hat{\otimes}_\epsilon Y^\eta.$$

Portanto,

$$\mathcal{K}(X^\lambda, Y^\xi) \sim \mathcal{K}(X^\mu, Y^\eta).$$

Segundo caso. $\mathbb{R}^\xi \sim \mathbb{R}^{\alpha p}$ e $\mathbb{R}^\eta \sim \mathbb{R}^{\alpha q}$. Usando o mesmo argumento que Usamos para provar a Relação 4.28, temos que

$$Y^{\xi} \sim Y^{\alpha p} \ \text{ e } \ Y^{\eta} \sim Y^{\alpha q}. \tag{5.16}$$

Portanto,

$$\ell_1([0,\lambda], X^*)\hat{\otimes}_\epsilon Y^{\xi} \sim \ell_1([0,\lambda], X^*)\hat{\otimes}_\epsilon Y^{\alpha p}. \tag{5.17}$$

$$\ell_1([0,\mu], X^*)\hat{\otimes}_\epsilon Y^{\eta} \sim \ell_1([0,\mu], X^*)\hat{\otimes}_\epsilon Y^{\alpha q}. \tag{5.18}$$

Como λ é um ordinal infinito e q um ordinal finito, segue, pelo ítem 2 da Proposição 1.3.4, que

$$\ell_1([0,\mu], X^*) \sim (\ell_1([0,\mu], X^*))^q. \tag{5.19}$$

Logo, usando a Relação 5.19 e o fato que o produto tensorial injetivo é distributivo, concluímos que

$$\ell_1([0,\lambda], X^*)^q\hat{\otimes}_\epsilon Y^{\alpha p} \sim (\ell_1([0,\lambda], X^*)\hat{\otimes}_\epsilon Y^{\alpha p})^q \sim \ell_1([0,\lambda], X^*)\hat{\otimes}_\epsilon (Y^{\alpha p})^q. \tag{5.20}$$

Pelo Isomorfismo 1.5.4, temos que

$$(Y^{\alpha p})^q \sim Y^{\alpha(pq)} \sim (Y^{\alpha q})^p. \tag{5.21}$$

Usando as Relações 5.15, 5.17, 5.20, e 5.21, concluímos que

$$\begin{aligned}
\ell_1([0,\lambda], X^*)\hat{\otimes}_\epsilon Y^{\alpha p} &\sim \ell_1([0,\lambda], X^*)^q\hat{\otimes}_\epsilon Y^{\alpha p} \\
&\sim (\ell_1([0,\lambda], X^*)\hat{\otimes}_\epsilon Y^{\alpha p})^q \\
&\sim (\ell_1([0,\mu], X^*)\hat{\otimes}_\epsilon Y^{\alpha q})^p \\
&\sim \ell_1([0,\mu], X^*)\hat{\otimes}_\epsilon Y^{\alpha q}.
\end{aligned}$$

Disso, e das Relações 5.17 e 5.18, segue que

$$\ell_1([0,\lambda], X^*)\hat{\otimes}_\epsilon Y^{\xi} \sim \ell_1([0,\mu], X^*)\hat{\otimes}_\epsilon Y^{\eta}$$

Portanto,

$$\mathcal{K}(X^{\lambda}, Y^{\xi}) \sim \mathcal{K}(X^{\mu}, Y^{\eta})$$

Isso encerra a demonstração do teorema. ■

Observação 5.6 Em [37, págs. 106-108], A. Kunumari prova que é relativamente consistente com ZFC que cardinais mensuráveis não existem. Portanto, é relativamente consistente com ZFC que o Teorema 5.5 é válido para λ e μ ordinais arbitrários.

Os resultados do Teorema 5.5 são verdadeiros se substituirmos Y um $\mathcal{K}_0$-espaço por Y um subespaço de ℓ_p com $1 < p < \infty$, e X um espaço de Banach com X^* isomorfo ao espaço ℓ_1. Para provar isto, basta observar que cada subespaço de ℓ_p com $1 < p < \infty$ é separável (e portanto um $\mathcal{K}_0$-espaço) e não contém subespaço isomorfo ao espaço c_o. Além disso $X^* \sim \ell_1$ implica que X^* tem a propriedade de aproximação. Portanto, do Teorema 5.5 temos o seguinte resultado bastante importante.

Teorema 5.7 (Generalização e extensão de (4)) *Sejam λ, μ, ξ, η ordinais infinitos com $\overline{\lambda}$ e $\overline{\mu}$ não mensuráveis e X, Y espaços de Banach tais que X^* é isomorfo ao espaço ℓ_1 e Y é um subespaço de ℓ_p com $1 < p < \infty$. Então,*

1. $\mathcal{K}(X^\lambda, Y^\xi) \sim \mathcal{K}(X^\mu, Y^\eta)$ *se e só se*

2. $\mathbb{R}^\xi \sim \mathbb{R}^\eta$ *ou,* $\mathbb{R}^\xi \sim \mathbb{R}^{\alpha p}$ e $\mathbb{R}^\eta \sim \mathbb{R}^{\alpha q}$,

   para α algum ordinal inicial não enumerável, p e q ordinais finitos e λ e μ são ordinais com cardinais não mensuráveis.

O Teorema 5.7 é particularmente interessante quando os espaços de Banach X e Y são o espaço real $\mathbb{R}$.

Teorema 5.8 *Sejam λ, μ, ξ, η ordinais infinitos com $\overline{\lambda}$ e $\overline{\mu}$ não mensuráveis. Então,*

1. $\mathcal{K}(\mathbb{R}^\lambda, \mathbb{R}^\xi) \sim \mathcal{K}(\mathbb{R}^\mu, \mathbb{R}^\eta)$ *se e só se*

2. $\mathbb{R}^\xi \sim \mathbb{R}^\eta$ *ou,* $\mathbb{R}^\xi \sim \mathbb{R}^{\alpha p}$ e $\mathbb{R}^\eta \sim \mathbb{R}^{\alpha q}$,

   para α algum ordinal inicial não enumerável, p e q ordinais finitos.

Observação 5.9 O Teorema 5.8 generaliza um resultado de C. Samuel em [57] (veja Teorema 3.3 de [57]), pois não fazemos nenhuma hipótese sobre os ordinais λ, μ, ξ, η como é no referido artigo. Além disso, o Teorema 5.7 mostra que este resultado é estendido para uma ampla classe de espaços de Banach X e Y.

Finalmente, usando os Teoremas 2.8, 3.7, 4.14, 5.7, concluímos que é relativamente consistente com ZFC

Teorema 5.10 (Teorema Principal) *Sejam λ, μ, ξ, η ordinais infinitos e X, Y espaços de Banach tais que X é um $\mathcal{N}_0$-espaço e X^* tem a propriedade de aproximação, e Y é um subespaço de ℓ_p com $1 < p < \infty$. Então, para quaisquer λ, μ, ξ, η*

1. $\mathcal{N}(X^\lambda, Y^\xi)$ e $\mathcal{K}(X^\mu, Y^\eta)$ *são de dimensão linear incomparável.*

   Além disso, se X é um $\mathcal{N}_1$-espaço então são equivalentes as seguintes afirmações

2. $\mathcal{N}(X^\lambda, Y^\xi) \sim \mathcal{N}(X^\mu, Y^\eta)$

3. $\mathcal{K}(X^\lambda, Y^\xi) \sim \mathcal{K}(X^\mu, Y^\eta)$

4. $\mathbb{R}^\xi \sim \mathbb{R}^\eta$ *ou,* $\mathbb{R}^\xi \sim \mathbb{R}^{\alpha p}$ *e* $\mathbb{R}^\eta \sim \mathbb{R}^{\alpha q}$,

   para α algum ordinal inicial não enumerável, p e q ordinais finitos. Além disso, λ e μ tem a mesma cardinalidade.

Capítulo 6

Algumas observações e problemas em aberto

Ao longo deste trabalho surgiram naturalmente diversos problemas elementares na geometria de espaços de Banach. Terminamos a tese destacando alguns deles.

Problema 6.1. *O Teorema 2.8 permanece válido quando se toma* $Y = \ell_1$?

Pelo Teorema 2.2 é claro que uma resposta positiva à seguinte pergunta daria uma resposta positiva para o Problema 6.1.

Problema 6.2. *É verdadeiro que*

$$(\sum_{n=1}^{\infty} \ell_\infty^n)_1 \not\hookrightarrow \ell_1 \hat{\otimes}_\epsilon \ell_1 \ ?$$

Problema 6.3. *Suponha que* X *é um* $\mathcal{N}_0$*-espaço.* X^* *é isomorfo ao espaço* ℓ_1*?*

Problema 6.4. *Seja* X *um espaço de Banach tal que* X^* *é isomorfo a um subespaço de* ℓ_1.

(a) X *é um* $\mathcal{N}_0$*-espaço?*

(b) X *é um* $\mathcal{N}_1$*-espaço?*

(c) X *é um* $\mathcal{N}_\infty$*-espaço?*

Problema 6.5. *Sejam* I, J *conjuntos infinitos com* $|I| > |J|$ *e* X *um espaço de Banach. Então,*

$$\ell_1(I) \hookrightarrow \ell_1(J, X) \Longrightarrow \ell_1(I) \hookrightarrow X \ ?$$

Problema 6.6. *Todo espaço de Banach X é um $\mathcal{K}_0$-espaço ?*

Problema 6.7. *Suponha que X é um espaço de Banach tal que existe um $m \in \mathbb{N}$ satisfazendo $c_o(\ell_1) \hookrightarrow X^m$. Segue que $c_o(\ell_1) \hookrightarrow X$?*

Referências Bibliográficas

[1] D. E. Alspach, *A quotient of $C(\omega^\omega)$ which is not isomorphic to a subspace $C(\alpha)$, $\alpha < \omega_1$.* Israel J. Math. **35** (1980), 1-2, 49-60.

[2] D. E. Alspach, Y. Benyamini, *A geometrical property of $C(K)$ spaces.* Israel J. Math. **64** (1988), 179-194.

[3] S. A. Argyros and R. G. Haydon, *A Hereditarily indecomposable $\mathfrak{L}_\infty$-space that solves the scalar-plus-compact-problem.* Preprint. archiv : 0903.3921v2 [math.FA] 23 Mar 2009.

[4] S. Banach, *Theory of linear operations.* Translated from the French by F. Jellett. With comments by A. Pełczyński and C. Bessaga. North-Holland Mathematical Library, **38**. North-Holland Publishing Co. Amsterdam, 1987.

[5] Y. Benyamini, J. Lindenstrauss, *A predual of ℓ_1 which is not isomorphic to a $C(K)$ space.* Israel J. Math. **13** (1972), 246-259.

[6] C. Bessaga, A. Pełczyński, *Spaces of continuous functions IV,* Studia Math. **XIX** (1960), 53-61.

[7] J. Bourgain, F. Delbaen, *A class of special $\mathfrak{L}^\infty$-spaces,* Acta Math. 145 (1960), 155-176.

[8] P. G. Casazza, *The Schroeder-Bernstein property for Banach spaces.* Banach space theory (Iowa city, IA, 1987), 61 - 77. Contemp Math, 85, Amer. Math-Sco. Providence, RI, 1989.

[9] P. G. Casazza, *Approximation properties.* Handbook of the geometry of Banach spaces I. North-Holland Publishing Co. Amsterdam, (2001), 271-316.

[10] P. Cembranos, J. Mendoza, *On the mutually non isomorphic $l_p(l_q)$ spaces* . Preprint.

[11] P. Cembranos, J. Mendoza, *Banach spaces of vector-valued functions.* Lect Notes Math. *1*676. Berlin Heidelberg New York, Springer 1997.

[12] P. Cembranos, J. Mendoza, $l_\infty(l_1)$ *and* $l_1(l_\infty)$ *are not isomorphic*, J. Math. Anal. Appl. *3*41 (2008), 1, 295-297.

[13] Johann Cigler, Viktor Losert, Peter Michor, *Modules and functors on categories of Banach spaces*, Lectures notes in pure and applied Mathematics, V.46, Marcel Derker, Inc, New York and Basel (1979).

[14] A. Defant and K. Floret, *Tensor norms and operators ideals*, Math. Studies **176**, North-Holland , Amsterdam, (1993).

[15] J. Diestel, *Sequences and series in Banach spaces.* Graduate texts in Math. 92. Springer-Verlag (1984).

[16] J. Diestel, J. J. R. Uhl, *Vector Measures*, Mathematical Surveys **15**, Amer. Math. Soc. Providence, RI (1977).

[17] J. Diestel, H. Jarchow, A. Tonge, *Absolutely summing operators.* Cambridge Studies in advanced Mathematics, 43. Cambridge University Press, Cambridge, (1995).

[18] J. Diestel, J. Fourier, J. Swart. *The Projective Tensor Product I.* Contemporary Math. **321** (2003) 37-65.

[19] N. Dunford and J. T. Schwartz, *Linear operators, I.* General theory, New York 1958.

[20] A. Dvoretzky, C. A. Rogers, *Absolute and unconditional convergence in normed linear spaces.* Proc. Nat. Sci USA. 36, 192-197 (1950).

[21] G. A. Edgar, *Measurability in a Banach space II,* Indiana Univ. Math. **28** (1977), 559-579.

[22] R. Engelking, *General topology.* Translated from the Polish by the author. Second edition. Sigma Series in Pure Mathematics, 6. Heldermann Verlag, Berlin, 1989. viii+529 pp. ISBN: 3-88538-006-4 (Reviewer: Gary Gruenhage). Berlin 1989.

[23] F. J. Freniche, *Embedding c_o in the space of Pettis integrable functions.* Quaest. Math. **21** (1998), 3-4, 261-267.

[24] F. J. Freniche, *Correction to the paper : "Embedding c_o in the space of Pettis integrable functions".* [Quaest. Math. **21**(1998), 3-4, 201-267]. Quaest. Math. **29**(2006), no 1, 133-134.

[25] E. M. Galego, *How to generate new Banach spaces non-isomorphic to their cartesian squares.* Bull. Polish Acad. Sci. Math. 47 (1999), 1, 21-25.

[26] E. M. Galego, *On subspaces and quotients of Banach spaces $C(K, X)$.* Monatsh. Math. 136 (2002), 2, 87-97.

[27] E. M. Galego, *On isomorphic classifications of compact operators.* Proc. Amer. Math. Soc. 137 (2009), 3335-3342.

[28] E. M. Galego, *Complete isomorphic classifications of some spaces of compact operators.* Proc. Amer. Math. Soc. 138 (2010), 725-736.

[29] R. J. Gardner, W. F. Pfeffer. *Borel measures.* Handbook of set-theoric topology . North-Holland , Amsterdam, (1984), 961-1043.

[30] A. Grothendieck, *Produits tensoriels topologiques et espaces nuclaires.* Mem. Amer. Math. Soc. 16 (1955).

[31] S. P. Gul'ko, A. V. Os'kin, *Isomorphic classification of spaces of continuous functions on totally ordered bicompacta.* Functional Anal. Appl. 9 (1975), 1, 56-57.

[32] S. Heinrich, *Approximation properties in tensor products.* Mat. Zametki. 17 (1975), 459-466.

[33] W. Hensgen, *A simple proof of Singer's representation theorem.* Proceedings of the American Mathematical society 124, (1996) 3211-3212.

[34] H. Jarchow, *Locally convex spaces.* Teubner Stuttgart 1981.

[35] W. B. Johnson, *On finite dimensional subspaces of Banach spaces with local unconditional structure.* Studia Math.51 (1974) , 225-240.

[36] W. B. Johnson, J. Lindenstrauss, *Examples of $\mathfrak{L}_1$ spaces.* Ark. Mat. 18 (1980), 1, 101-106.

[37] W. B. Johnson, J. Lindenstrauss, *Handbook of the geometry of Banach spaces.* North-Holland Publishing Co. Amsterdam. (2001), 1-84.

[38] H. Karel, T. Jech, *Introduction to set theory.* Third edition. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 220. Marcel Dekker, Inc., New York, 1999. xii+291 pp. ISBN: 0-8247-7915-0, 03-01 (03-02) PDF Clipboard Series Book.

[39] A. Kanamori, M. Magidor, *the evolution of large cardinal axioms in set theory.* Higher set theory (Proc.Conf, Math. Forschungsinst , Oberwolfach, 1977), Lecture Notes in Math , **669**, Springer, Berlin. (1978), 99-275.

[40] T. Kappeler, *Banach spaces with condition of Mazur's*, Math. Z. 191 (1986), 623-631.

[41] S. V. Kislyakov, *Classification of spaces of continuous functions of ordinals*, Siberian Math. J. **16** (1975), 2, 226-231.

[42] M. A. Labbé, *Isomorphism of continuous functions* Studia Math. **LII** (1975), 221-231.

[43] J. Lindenstrauss, *On a certain subspace of ℓ_1.* Bull. Acad. Polon, Sci. Sér. Sci. Math. Astronum. Phys.12 (1964), 539-542.

[44] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, *Classical Banach spaces I. Sequence Spaces*, Springer-Verlag, Berlin-New York. (1977).

[45] J. Lindestrauss, L. Tzafriri, *Classical Banach spaces.* Berling-Heidelberg-New York, 1973. Lecture Notes in Mathematics, vol 338.

[46] D. Leung, *Banach spaces with Mazur's property*, Glasgow Math. J. **33** (1991), 51-54.

[47] Lotz HP, Peck NT, Porta H, *Semi-embeddings of Banach space.* Proc Edinburgh Math Soc 22 (1979) 233-240.

[48] S. Mazurkiewicz, W. Sierpiński, *Contribution à la topologie des ensembles dénombrables.* Fund. Math. **1** (1920) 17-27.

[49] A. Pełczyński and Z. Semadeni, *Spaces of continuous functions (III).* Studia Mathematica T.XVII. (1959) 211- 222.

[50] A. Pietsch, *Nuclear locally convex spaces.* Translated from the second German edition by William H. Ruckle. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 66. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1972. ix+193 pp, 46AXX Academie-Verlag 1965.

[51] D. Puglissi, G. Saluzzo, *Stability on local unconditional structure and the Gordon-Lewis property in tensor products.* Quaest. Math. **31** (2008) 2, 141-150.

[52] H. P. Rosenthal, *On relatively disjoint families of measures, with some applications to Banach space theory.* Studia Math. **37** (1970) 13-36.

[53] H. P. Rosenthal, *On injective Banach spaces and the spaces $L^\infty(\mu)$ for finite measure μ.* Acta Math. 124 (1970) 205-248.

[54] H. P. Rosenthal, *A characterization of Banach spaces containing ℓ_1.* Proc. Nat. Acad. Sci, USA.71 (1974), 2411-2413.

[55] W. Rudin, *Continuous functions on compact spaces without perfect subsets*, Proc. AMS 8. (1957), 39-42.

[56] C. Samuel, *Sur la reproductibilite des espaces l_p.* Math. Scand. **45** (1979), 103-117.

[57] C. Samuel, *On spaces of operators on $C(Q)$ spaces (Q countable metric space).* Proc. Amer. Math. Soc. **137**(2009), 3, 965-970.

[58] F. C. Sánchez, J. M. F. Castillo, N. J. Kalton and D. T. Yost, *Twisted sums with $C(K)$ spaces.* Transactions of the American Mathematical Society. 355 (2003) 4523-4541.

[59] Z. Semadeni, *Banach spaces non-isomorphic to their Cartesian squares II*, Bull. Acad. Polon. Sci. Math. Astr. Phys. **8** (1960), 81-84.

[60] Z. Semadeni, *Banach spaces of continuos funtions.* Vol I. Monografie Matematyczne, Tom **55**. Warsaw, PWN-Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1971.

[61] A. Wilansky, *Mazur spaces*, Internat. J. Math. Math. Sci. **4** (1981), 39-53.

[62] P. Wojtaszczyk, *Banach spaces for analysts.* Cambridge University Press 1991.