

Teoria de ponto fixo  
para espaços homogêneos

Diego Franchini Kwiatkoski

DISSERTAÇÃO APRESENTADA  
AO  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA  
DA  
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
PARA  
OBTENÇÃO DO TÍTULO  
DE  
MESTRE EM CIÊNCIAS

Programa: Matemática  
Orientadora: Profa. Dra. Fernanda S. P. Cardona

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu  
auxílio financeiro do CNPq

São Paulo, janeiro de 2010



# Teoria de ponto fixo para espaços homogêneos

Esta versão definitiva da dissertação contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa realizada por Diego Franchini Kwiatkoski em 10/12/2010.

Comissão Julgadora:

- Profa. Dra. Fernanda Soares Pinto Cardona   IME - USP
- Profa. Dra. Alice Kimie Miwa Libardi    IGCE - UNESP
- Profa. Dra. Lucilia Daruiz Borsari       IME - USP



# Agradecimentos

Agradeço a Deus.

Agradeço, ainda, à minha família, aos meus amigos e aos meus professores.

Finalmente, agradeço aos professores Vanderlei do Nascimento Marcos, que foi meu primeiro orientador de iniciação científica, Alice Kimie Miwa Libardi, minha primeira orientadora em topologia, e Fernanda Soares Pinto Cardona, orientadora de mestrado, que sacrificou grande parte de seus fins de semana para me ajudar a chegar ao fim do trabalho.



# Resumo

O principal objetivo deste trabalho é estudar o artigo “Fixed-point theory for homogeneous spaces” de Peter Wong, cuja descrição é a seguinte. Seja  $G$  um grupo de Lie conexo e compacto,  $K$  um subgrupo fechado (não necessariamente conexo) e  $M = G/K$  o espaço homogêneo de classes laterais à esquerda. Suponha que  $M$  é orientável e  $p_* : H_n(G) \rightarrow H_n(M)$  é não nulo, onde  $n = \dim M$ . Neste trabalho, empregamos uma versão equivariante da teoria de raízes de Nielsen para mostrar que a recíproca do teorema do ponto fixo de Lefschetz é verdadeira para todas as autoaplicações sobre  $M$ . Mais ainda, se o número de Lefschetz de uma autoaplicação  $f : M \rightarrow M$  é não nulo, então o número de Nielsen de  $f$  coincide com o número de Reidemeister de  $f$ , que pode ser calculado algebricamente.

**Palavras-chave:** ponto fixo, raiz, teorema do ponto fixo de Lefschetz.





# Abstract

The main goal of this work is to study the paper “Fixed-point theory for homogeneous spaces” by Peter Wong, which description is the following. Let  $G$  be a compact connected Lie group,  $K$  a closed subgroup (not necessarily connected) and  $M = G/K$  the homogeneous space of left cosets. Assume that  $M$  is orientable and  $p_* : H_n(G) \rightarrow H_n(M)$  is nonzero, where  $n = \dim M$ . In this work, we employ an equivariant version of Nielsen root theory to show that the converse of the Lefschetz fixed-point theorem holds true for all selfmaps on  $M$ . Moreover, if the Lefschetz number of a selfmap  $f : M \rightarrow M$  is nonzero, then the Nielsen number of  $f$  coincides with the Reidemeister number of  $f$ , which can be computed algebraically.

**Keywords:** fixed point, root, Lefschetz fixed-point theorem.



# Sumário

Agradecimentos	iv
Resumo	vi
Abstract	viii
Introdução	2
<b>1 Elementos de topologia algébrica</b>	<b>6</b>
1.1 A junção de dois complexos . . . . .	6
1.2 Variedades de homologia . . . . .	8
1.3 O complexo bloco dual . . . . .	9
1.4 Dualidade de Poincaré . . . . .	13
1.5 Dualidade de Lefschetz . . . . .	17
<b>2 Teoria de ponto fixo para espaços homogêneos</b>	<b>22</b>
2.1 Pontos fixos . . . . .	23
2.2 Raízes . . . . .	23
2.3 O índice equivariante de raiz . . . . .	25
2.4 Uma classe de espaços homogêneos . . . . .	36
2.5 Recíproca do teorema do ponto fixo de Lefschetz . . . . .	48
2.6 Classes de Reidemeister equivariantes . . . . .	54



# Introdução

Seja  $M$  uma variedade compacta e conexa e  $f : M \rightarrow M$  uma autoaplicação. A recíproca do clássico teorema do ponto fixo de Lefschetz endereça o problema de saber se  $f$  é homotópica a uma aplicação livre de pontos fixos quando o número de Lefschetz  $L(f)$  é zero. Em geral,  $L(f) = 0$  não é suficiente para deformar  $f$  a uma aplicação livre de pontos fixos. Por outro lado, um resultado clássico de Wecken (vide [Br]) afirma que  $f$  é homotópica a uma aplicação com exatamente  $N(f)$  pontos fixos dado que  $\dim M \geq 3$ , onde  $N(f)$  denota o número de Nielsen de  $f$ , um limitante inferior para o número de pontos fixos de  $g$  para qualquer  $g$  homotópica a  $f$ . Segue que o anulamento de  $N(f)$  é suficiente para deformar  $f$  em uma aplicação livre de pontos fixos exceto para  $\dim M = 2$  ([J3]). Visto que o número de Nielsen é definido geometricamente, o cálculo de  $N(f)$  é em geral muito difícil e o problema de encontrar técnicas de cálculo úteis é um dos temas centrais na teoria de ponto fixo de Nielsen.

Em seu artigo [J1], B. Jiang estudou um certo subgrupo  $J(M)$  do grupo fundamental  $\pi_1(M)$ , agora conhecido como o subgrupo de Jiang, e considerou a condição quando  $J(M) = \pi_1(M)$ . Sob essa condição (de Jiang) sobre  $M$ , para toda aplicação  $f : M \rightarrow M$ ,

(C1) todas as classes de ponto fixo de  $f$  têm o mesmo índice de ponto fixo;

(C2)  $L(f) = 0 \Rightarrow N(f) = 0$ ;

(C3)  $L(f) \neq 0 \Rightarrow N(f) = R(f)$ ;

onde  $R(f)$  é o número de Reidemeister de  $f$ , que é definido algebricamente no nível de grupo fundamental. Se  $M$  satisfaz a condição de Jiang, então  $\pi_1(M)$  deve ser abeliano. A condição de Jiang é satisfeita por uma ampla classe de espaços, agora conhecidos como espaços de Jiang, que incluem espaços simplesmente conexos,  $H$ -espaços, espaços de lentes generalizados e espaços homogêneos da forma  $G/G_0$ , onde  $G$  é um grupo topológico e  $G_0$  é um subgrupo conexo e fechado. A essência da condição de Jiang é que classes de ponto fixo são relacionadas por homotopias de tal forma que seus índices de ponto fixo são iguais. Dessa forma, se  $\dim M \neq 2$  e  $M$  é um espaço de Jiang, então a recíproca do teorema do ponto fixo de Lefschetz é verdadeira e o número de Nielsen pode ser calculado algebricamente.

Dizemos que um espaço  $X$  é *tipo Jiang* se as condições (C2) e (C3) valem para todas as autoaplicações de  $X$ . Até o momento foram encontrados pouquíssimos espaços do tipo Jiang que não são espaços de Jiang. E. Fadell e S. Husseini mostraram (Corolário 6.38 de [FH]), empregando um traço generalizado de Lefschetz (vide também [Ha]), que (C2) e (C3) valem para todas as autoaplicações de espaços de órbitas de esferas ímpares sob ações livres de grupos finitos. Mais geralmente, Jiang (Teorema II.5.6 de [J2]) mostrou que se um grupo finito  $\pi$  age livremente sobre um poliedro compacto, conexo e simplesmente conexo  $X$  e trivialmente sobre a homologia racional de  $X$ , então o espaço de órbitas  $X/\pi$  é tipo Jiang. Mais recentemente, B. Norton-Odenthal [NO] reforçou um resultado de D. Anosov [An] e mostrou que nilvariedades são tipo Jiang.

Em [W], P. Wong aumentou a classe de variedades tipo Jiang. Especificamente, mostrou que uma certa classe de espaços homogêneos de grupos de Lie compactos e conexos são do tipo Jiang e que a recíproca do teorema do ponto fixo de Lefschetz vale para essas variedades. Assim, quando  $L(f) \neq 0$ , a igualdade  $N(f) = R(f)$  reduz o cálculo do número de Nielsen àquele do

número de Reidemeister. Seja  $G$  um grupo de Lie compacto e conexo,  $K$  um subgrupo fechado (não necessariamente conexo) e  $M = G/K$  o espaço homogêneo de classes laterais à esquerda. Suponha que  $M$  é orientável. Em [F], E. Fadell observou que  $G \times_K (M, M - eK)$  e  $(M \times M, M \times M - \Delta)$  são homeomorfos fibra a fibra como pares de fibrados sobre  $M$ , o que consequentemente transforma um problema de ponto fixo sobre  $M$  em um problema do tipo Borsuk-Ulam de uma aplicação equivariante de  $G$  em  $M$ . Essa visão tem sido usada para estudar coincidências de duas autoaplicações sobre uma nilvariedade compacta (vide [BW]). O objetivo de Wong foi explorar mais além essa conexão estendendo a teoria de Nielsen análoga para raízes, desenvolvida por R. Brooks [B1] (vide também [Ki]), para uma teoria de raízes de Nielsen equivariante. Usando suas técnicas, recuperou a maioria das consequências essenciais dos resultados de Jiang (incluindo a recíproca do teorema do ponto fixo de Lefschetz) para os espaços de lentes generalizados e espaços homogêneos da forma  $G/G_0$ , onde  $G$  é um grupo de Lie compacto e conexo e  $G_0$  é um subgrupo conexo e fechado (vide observação 2.6.8; note que os resultados de Jiang para espaços simplesmente conexos seguem da teoria clássica de Jiang-Wecken). Mais ainda, os resultados podem ser aplicados a uma ampla classe de variedades para as quais os resultados de [J1], [J2] e [FH] não são aplicáveis (vide exemplo 2.6.9).

Para estudarmos o trabalho de Wong foram necessários estudos de assuntos que não são abordados na disciplina Topologia Algébrica I. Assim, no Capítulo 1 foram incluídos diversos resultados de [M]. No Capítulo 2 ocorre o estudo do artigo propriamente dito. Alguns resultados, como o teorema 2.5.1, tiveram suas demonstrações ligeiramente alteradas, bem como algumas definições. Para maior clareza, diversos diagramas comutativos foram desenhados de maneira não usual. Além disso, foi feito um estudo detalhado da demonstração de o toro ser Wecken.





# Capítulo 1

## Elementos de topologia algébrica

Nesse capítulo tratamos de tópicos essenciais para a definição do Índice Equivariante de Raiz, ferramenta essencial na demonstração dos principais teoremas do trabalho, dada no capítulo 2. As três primeiras seções formam a base para as demonstrações principais do capítulo, a saber, as Dualidades de Poincaré e Lefschetz, e não serão utilizadas diretamente no capítulo 2. Já as seções 4 e 5, respectivamente, contêm os enunciados e demonstrações das dualidade citadas, que serão muito úteis no desenvolvimento do capítulo 2. O material contido nesse capítulo pode ser encontrado em [M].

### 1.1 A junção de dois complexos

Nessa seção introduzimos a noção de junção de dois complexos e estudamos um lema que nos será útil no futuro.

**Definição 1.1.1.** *Sejam  $K$  e  $L$  complexos não vazios em algum espaço euclidiano  $E^J$ . Sejam  $s = v_0 \dots v_m$  o simplexo geral de  $K$  e  $t = w_0 \dots w_n$*

o simplexo geral de  $L$ . Suponha que sempre que  $s \in K$  e  $t \in L$ , os pontos  $v_0, \dots, v_m, w_0, \dots, w_n$  são independentes. Então denotamos por  $s * t = v_0 \dots v_m w_0 \dots w_n$  o simplexo que eles geram. Se a coleção consistindo de todos os simplexos  $s * t$  e suas faces é um complexo simplicial, então esse complexo é chamado **junção** de  $K$  e  $L$ , e é denotado por  $K * L$ .

**Lema 1.1.2.** *Seja  $\sigma = v_0 \dots v_m w_0 \dots w_n$  um simplexo em  $E^J$ . Então  $\sigma$  é igual à união de todos os segmentos de reta ligando pontos de  $s = v_0 \dots v_m$  a pontos de  $t = w_0 \dots w_n$ ; dois tais segmentos de reta se intersectam em no máximo um ponto final em comum. Além disso,  $\text{Int } \sigma$  é igual à união de todos os segmentos de reta abertos ligando pontos de  $\text{Int } s$  a pontos de  $\text{Int } t$ .*

**Dem.:** Provaremos o enunciado sobre  $\text{Int } \sigma$  primeiro. Suponha  $p = \lambda x + (1 - \lambda)y$ , em que  $0 < \lambda < 1$ ,  $x \in \text{Int } s$  e  $y \in \text{Int } t$ . Então,  $x = \sum \alpha_i v_i$  e  $y = \sum \beta_j w_j$ , em que  $\alpha_i > 0$ ,  $\beta_j > 0$  e  $\sum \alpha_i = \sum \beta_j = 1$ . Daí,  $p = \sum (\lambda \alpha_i) v_i + \sum (1 - \lambda) \beta_j w_j$ , onde os coeficientes são positivos e sua soma é 1. Logo,  $p$  está em  $\text{Int } \sigma$ . Reciprocamente, suponha  $p \in \text{Int } \sigma$ , de tal forma que  $p = \sum \gamma_i v_i + \sum \delta_j w_j$ , onde  $\gamma_i > 0$ ,  $\delta_j > 0$  e  $\sum \gamma_i + \sum \delta_j = 1$ . Coloque  $\lambda = \sum \gamma_i$ ,  $\alpha_i = \frac{\gamma_i}{\lambda}$  e  $\beta_j = \frac{\delta_j}{1 - \lambda}$ . Então,  $p = \lambda \sum \alpha_i v_i + (1 - \lambda) \sum \beta_j w_j$ . Assim,  $p$  está no interior de um segmento de reta ligando um ponto de  $\text{Int } s$  e um ponto de  $\text{Int } t$ .

Agora provaremos o enunciado com respeito a  $\sigma$ . Visto que  $\sigma$  é convexo, ele contém todos os segmentos de reta ligando pontos de  $s$  a pontos de  $t$ . Reciprocamente, suponha que  $x \in \sigma$  e que  $x$  não está nem em  $s$  nem em  $t$ . Então,  $x$  é interior a uma face  $\sigma'$  de  $\sigma$  que tem vértices em comum com ambos  $s$  e  $t$ . Pelo resultado do parágrafo anterior,  $x$  está sobre um segmento de reta aberto ligando um ponto de  $\sigma' \cap s$  a um ponto de  $\sigma' \cap t$ .

Finalmente, mostraremos que quaisquer dois desses segmentos de reta se intersectam no máximo em um ponto final em comum. Suponha que  $p$  é um

ponto que está em dois tais segmentos de reta, isto é,

$$p = \lambda \sum \alpha_i v_i + (1 - \lambda) \sum \beta_j w_j = \lambda' \sum \alpha'_i v_i + (1 - \lambda') \sum \beta'_j w_j,$$

onde  $0 \leq \lambda, \lambda' \leq 1$ ,  $\alpha_i \geq 0$ ,  $\beta_j \geq 0$ ,  $\alpha'_i \geq 0$ ,  $\beta'_j \geq 0$ , e  $\sum \alpha_i = \sum \beta_j = \sum \alpha'_i = \sum \beta'_j = 1$ . Visto que a soma dos coeficientes em cada lado dessa equação é 1, concluímos da independência dos vértices de  $\sigma$  que  $\lambda \alpha_i = \lambda' \alpha'_i$ , e  $(1 - \lambda) \beta_j = (1 - \lambda') \beta'_j$ . Somando a primeira dessas, vemos que  $\lambda = \lambda'$ . Se  $\lambda = 0$  ou  $\lambda = 1$ , então  $p$  é um ponto final de cada segmento de reta. Caso contrário, essas duas equações implicam que  $\alpha_i = \alpha'_i$  e  $\beta_j = \beta'_j$ , e os dois segmentos de reta coincidem.  $\square$

**Definição 1.1.3.** *Seja  $s$  um simplexo do complexo  $K$ . A **estrela** de  $s$  em  $K$ , denotada por  $\text{St } s$ , é a união dos interiores de todos os simplexos de  $K$  que têm  $s$  como uma face. O fecho de  $\text{St } s$  é denotado por  $\overline{\text{St } s}$ ; ele é a união de todos os simplexos de  $K$  que têm  $s$  como uma face e é chamado de **estrela fechada** de  $s$  em  $K$ . O **elo** de  $s$  em  $K$ , denotado por  $\text{Lk } s$ , é a união de todos os simplexos de  $K$  que estão em  $\overline{\text{St } s}$  e que são disjuntos de  $s$ .*

## 1.2 Variedades de homologia

Nessa seção definimos variedades de homologia e enunciamos um lema que será útil no decorrer do capítulo. A classe de variedades de homologia inclui, entre outras coisas, todas as variedade topológicas, logo, é uma ampla e importante classe de espaços. As variedades de homologia triangularizáveis serão os objetos básicos envolvidos nos teoremas de dualidade.

**Definição 1.2.1.** *Um par topológico  $(X, A)$  é chamado de  **$n$ -variedade de homologia relativa** se para cada ponto  $x$  de  $X$  que não está em  $A$ , o grupo de homologia local  $H_i(X, X - x)$  se anula se  $i \neq n$  e é cíclico infinito se  $i = n$ . No caso em que  $A$  é vazio, nos referimos a  $X$  simplesmente como  **$n$ -variedade de homologia**.*

O lema a seguir será usado na próxima seção e sua demonstração pode ser encontrada em [M] (página 374 e anteriores).

**Lema 1.2.2.** *Seja  $s$  um  $k$ -simplexo do complexo  $\bar{K}$ . Seja  $\hat{s}$  seu baricentro. Então*

$$H_i(|K|, |K| - \hat{s}) \cong \begin{cases} \tilde{H}_{i-k-1}(\text{Lk } s) & \text{se } \text{Lk } s \neq \emptyset, \\ H_i(s, \text{Bd } s) & \text{se } \text{Lk } s = \emptyset. \end{cases}$$

### 1.3 O complexo bloco dual

Associada a uma variedade de homologia triangularizada  $X$  existe uma certa partição de  $X$  em subconjuntos que são (quase) células abertas, de tal forma que  $X$  se torna (quase) um complexo celular regular. Os subconjuntos na verdade não são células topológicas, mas apenas células homológicas. Visto que não podemos chamá-los de *células*, os chamaremos de *blocos*. E chamaremos a coleção desses blocos de *decomposição em blocos duais* de  $X$ . Assim como para complexos celulares, existe um complexo de cadeia associado a esse complexo de blocos que pode ser usado para calcular a homologia e a co-homologia de  $X$ . O chamaremos de *complexo de cadeia dual*; ele será uma ferramenta crucial na demonstração das dualidades.

**Definição 1.3.1.** *Seja  $X$  um complexo simplicial localmente finito, e denote por  $sd X$  sua primeira divisão baricêntrica. Os simplexes de  $sd X$  são da forma  $\hat{\sigma}_{i_1} \hat{\sigma}_{i_2} \dots \hat{\sigma}_{i_k}$ , onde  $\sigma_{i_1} \succ \sigma_{i_2} \succ \dots \succ \sigma_{i_k}$ . Podemos ordenar parcialmente os vértices de  $sd X$  diminuindo a dimensão dos simplexes de  $X$  dos quais eles são os baricentros; essa ordenação induz uma ordenação linear sobre os vértices de cada simplexo de  $sd X$ . Dado um simplexo  $\sigma$  de  $X$ , a união de todos os simplexes abertos de  $sd X$  dos quais  $\hat{\sigma}$  é o vértice inicial é  $\text{Int } \sigma$ . Definimos  $D(\sigma)$  como a união de todos os simplexes abertos de  $sd X$  dos quais  $\hat{\sigma}$  é o vértice final; esse conjunto é chamado **bloco dual** a  $\sigma$ .*

Os blocos  $D(\sigma)$  terão um papel análogo àquele das células abertas de um CW complexo. Chamamos o fecho  $\bar{D}(\sigma)$  de  $D(\sigma)$  de **bloco fechado dual** a  $\sigma$ . Ele é igual à união de todos os simplexes de  $sd X$  dos quais  $\hat{\sigma}$  é o vértice final; ele é o politopo de um subcomplexo de  $sd X$ . Seja  $\dot{D}(\sigma) = \bar{D}(\sigma) - D(\sigma)$ .

**Teorema 1.3.2.** *Seja  $X$  um complexo simplicial localmente finito que consiste inteiramente de  $n$ -simplexos e suas faces. Seja  $\sigma$  um  $k$ -simplexo de  $X$ . Então:*

- a) *os blocos duais são disjuntos e sua união é  $|X|$ ;*
- b)  *$\bar{D}(\sigma)$  é o politopo de um subcomplexo de  $sd X$  de dimensão  $n - k$ ;*
- c)  *$\dot{D}(\sigma)$  é a união de todos os blocos  $D(\tau)$  para os quais  $\tau$  tem  $\sigma$  como uma face própria; esses blocos têm dimensão menor que  $n - k$ ;*
- d)  *$\bar{D}(\sigma)$  é igual ao cone  $|\dot{D}(\sigma) * \hat{\sigma}|$ ;*
- e) *se  $H_i(X, X - \hat{\sigma}) \cong \mathbb{Z}$  para  $i = n$  e se anula caso contrário, então  $(\bar{D}(\sigma), \dot{D}(\sigma))$  tem a homologia de uma  $n - k$  célula módulo seu bordo.*

**Dem.:** a) Os simplexos abertos de  $sd X$  são disjuntos, e cada um está em precisamente um bloco  $D(\sigma)$  - a saber, aquele tal que  $\hat{\sigma}$  é seu vértice final.

b) Dado  $\sigma$  de dimensão  $k$ , seja  $\sigma'$  um  $n$ -simplexo de  $X$  que tem  $\sigma$  como uma face. Existe uma sequência de simplexos de  $X$ ,  $\sigma' = \sigma_n \succ \sigma_{n-1} \succ \dots \succ \sigma_k = \sigma$  tal que cada simplexo na sequência tem uma dimensão a menos que o simplexo precedente. Então o simplexo  $\hat{\sigma}_n \hat{\sigma}_{n-1} \dots \hat{\sigma}_k$  de  $sd X$  tem dimensão  $n - k$  e está em  $\bar{D}(\sigma)$ . Temos que nenhum simplexo de  $sd X$  de dimensão maior pode ter  $\sigma_k$  como seu vértice final, visto que  $X$  não tem simplexos de dimensão maior que  $n$ .

c) - d) Agora,  $\bar{D}(\sigma)$  é a união de todos os simplexos de  $sd X$  cujo vértice final é  $\hat{\sigma}$ ; eles são da forma  $\hat{\sigma}_{i_1} \dots \hat{\sigma}_{i_p} \hat{\sigma}$ . A intersecção de um tal simplexo com  $\dot{D}(\sigma)$  consiste da face desse simplexo obtida deletando  $\hat{\sigma}$ . Assim,  $\dot{D}(\sigma)$  consiste de todos os simplexos da forma  $\hat{\sigma}_{i_1} \dots \hat{\sigma}_{i_p}$  para os quais  $\sigma_{i_p} \succ \sigma$ . Agora, o interior de um tal simplexo está contido em  $D(\sigma_{i_p})$ ; e reciprocamente, qualquer simplexo aberto de  $sd X$  que está em  $D(\sigma_{i_p})$  é dessa forma.

Segue que  $\dot{D}(\sigma)$  é a união dos blocos  $D(\sigma_{i_p})$  para  $\sigma_{i_p} \succ \sigma$ . Segue também que  $|\bar{D}(\sigma)| = |\dot{D}(\sigma) * \hat{\sigma}|$ .

e) Se  $\dim \sigma = n$ , então  $D(\sigma)$  consiste do ponto  $\hat{\sigma}$ , que é uma 0-célula. Suponha que  $\dim \sigma = k < n$ . No complexo  $\text{sd } X$ , a estrela fechada  $\overline{\text{St}}(\sigma, \text{sd } X)$  é igual à união de todos os simplexes da forma  $\tau = \hat{\sigma}_{i_1} \dots \hat{\sigma}_{i_p} \hat{\sigma}_{i_{p+1}} \dots \hat{\sigma}_{i_q}$ , onde  $\sigma_{i_{p+1}} = \sigma$ , e  $\sigma_{i_j} \succ \sigma_{i_{j+1}}$  para todo  $j$ . A face de  $\tau$  gerada pelos vértices à esquerda de  $\hat{\sigma}$  na sequência é o simplexo típico de  $\dot{D}(\sigma)$ ; a face gerada por  $\hat{\sigma}$  e pelos vértices à direita nessa sequência é o simplexo típico de  $\text{sd } \sigma$ . Concluimos que  $\overline{\text{St}}(\hat{\sigma}, \text{sd } X) = \dot{D}(\sigma) * \text{sd } \sigma = \dot{D}(\sigma) * \hat{\sigma} * \text{sd}(\text{Bd } \sigma)$ . Agora, também é verdade que  $\overline{\text{St}}(\hat{\sigma}, \text{sd } X) = \hat{\sigma} * \text{Lk}(\hat{\sigma}, \text{sd } X)$ . Concluimos que  $\text{Lk}(\hat{\sigma}, \text{sd } X) = \dot{D}(\sigma) * \text{sd}(\text{Bd } \sigma)$ . Como  $\text{sd}(\text{Bd } \sigma)$  é topologicamente uma  $k - 1$  esfera (ou é vazio se  $k = 0$ ),  $\tilde{H}_{i+k}(\text{Lk}(\hat{\sigma}, \text{sd } X)) \cong \tilde{H}_i(\dot{D}(\sigma))$ . Visto que a homologia local de  $X$  em  $\hat{\sigma}$  é cíclica infinita em dimensão  $n$  e se anula caso contrário,  $\text{Lk}(\hat{\sigma}, \text{sd } X)$  é uma  $n - 1$  esfera de homologia, pelo lema 1.2.2. Portanto,  $\dot{D}(\sigma)$  é uma  $n - k - 1$  esfera de homologia.

Como  $\bar{D}(\sigma)$  é acíclico (sendo um cone), a sequência exata longa de homologia nos dá um isomorfismo  $H_i(\bar{D}(\sigma), \dot{D}(\sigma)) \cong \tilde{H}_{i-1}(\dot{D}(\sigma))$ . Concluimos que  $(\bar{D}(\sigma), \dot{D}(\sigma))$  tem a homologia de uma  $n - k$  célula módulo seu bordo.  $\square$

**Definição 1.3.3.** *Seja  $X$  um complexo localmente finito que é uma  $n$ -variedade de homologia. Então, o teorema anterior se aplica a cada simplexo  $\sigma$  de  $X$ . A coleção de blocos duais  $D(\sigma)$  será chamada de **decomposição por blocos duais** de  $X$ . A união dos blocos de dimensão no máximo  $p$  será denotada por  $X_p$ , e chamada de  **$p$ -esqueleto dual** de  $X$ . O **complexo de cadeia dual**  $\mathcal{D}(X)$  de  $X$  é definido sendo seu grupo de cadeias em dimensão  $p$  o grupo  $D_p(X) = H_p(X_p, X_{p-1})$ . Seu operador bordo é o homomorfismo  $\partial_*$  da sequência exata da terna  $(X_p, X_{p-1}, X_{p-2})$ .*

**Teorema 1.3.4.** *Seja  $X$  um complexo localmente finito que é uma  $n$ -variedade de homologia. Seja  $X_p$  o  $p$ -esqueleto dual de  $X$ . Seja  $\mathcal{D}(X)$  o complexo*

de cadeia dual de  $X$ . Então:

a) O grupo  $H_i(X_p, X_{p-1})$  se anula para  $i \neq p$  e é um grupo abeliano livre para  $i = p$ . Uma base quando  $i = p$  é obtida escolhendo geradores para os grupos  $H_p(\bar{D}(\sigma), \dot{D}(\sigma))$ , enquanto  $D(\sigma)$  varia sobre todos os  $p$ -blocos de  $X$ , e tomando suas imagens, sob o homomorfismo induzido por inclusão, em  $H_p(X_p, X_{p-1})$ .

b) O complexo de cadeia dual  $\mathcal{D}(X)$  pode ser usado para calcular a homologia de  $X$ . De fato,  $D_p(X)$  é igual ao subgrupo de  $C_p(\text{sd } X)$  consistindo daquelas cadeias carregadas por  $X_p$  cujos bordos são carregados por  $X_{p-1}$ . E a aplicação inclusão  $D_p(X) \rightarrow C_p(\text{sd } X)$  induz um isomorfismo em homologia; portanto, ela também induz isomorfismos em homologia e co-homologia com coeficientes arbitrários.

**Dem.:** a) Como  $\bar{D}(\sigma)$  é um cone com vértice  $\hat{\sigma}$ , sua base  $\dot{D}(\sigma)$  é um retrato por deformação de  $\bar{D}(\sigma) - \hat{\sigma}$ , para cada  $\sigma$ . Essas retrações por deformação induzem uma retração por deformação de  $X_p - \cup_p \hat{\sigma}$  sobre  $X_{p-1}$ , onde  $\cup_p \hat{\sigma}$  denota a união dos baricentros de todos os simplexes de  $\sigma$  de  $X$  de dimensão  $n - p$ .

Se  $\Sigma_p(\bar{D}(\sigma), \dot{D}(\sigma))$  denota a soma topológica dos  $p$ -blocos de  $X$ , temos o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccc} \Sigma_p(\bar{D}(\sigma), \dot{D}(\sigma)) & \longrightarrow & \Sigma_p(\bar{D}(\sigma), \bar{D}(\sigma) - \hat{\sigma}) & \longleftarrow & \Sigma_p(D(\sigma), D(\sigma) - \hat{\sigma}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow = \\ (X_p, X_{p-1}) & \longrightarrow & (X_p, X_p - \cup_p \hat{\sigma}) & \longleftarrow & \cup(D(\sigma), D(\sigma) - \hat{\sigma}) \end{array}$$

onde as aplicações horizontais induzem isomorfismos em homologia singular e as aplicações verticais são inclusões. O enunciado a) segue para teoria singular, e daí segue para teoria simplicial.

b) Temos que  $H_i(X_p, X_{p-1}) = 0$  se  $i \neq p$  pelo item a). Qualquer conjunto compacto em  $X$  está em um bloco dual de  $X$ , então está em  $X_i$  para algum  $i$ . Visto que  $X_p$  não contém blocos duais de dimensão  $p + 1$ , o grupo de

homologia  $H_p(X_p, X_{p-1})$  é igual ao grupo de  $p$ -ciclos relativos, que é o núcleo do homomorfismo

$$\frac{C_p(X_p)}{C_p(X_{p-1})} \xrightarrow{\partial} \frac{C_{p-1}(X_p)}{C_{p-1}(X_{p-1})}.$$

Como  $X_{p-1}$  não contém blocos duais de dimensão  $p$ , o denominador do lado esquerdo se anula. Logo,  $H_p(X_p, X_{p-1})$  é igual ao grupo de  $p$ -cadeias duais de  $X$  suportadas por  $X_p$  cujos bordos são suportados por  $X_{p-1}$ . Portanto,  $D_p(X)$  é igual ao subgrupo de  $C_p(\text{sd } X)$  consistindo daquelas cadeias suportadas por  $X_p$  cujos bordos são suportados por  $X_{p-1}$ .  $\square$

## 1.4 Dualidade de Poincaré

O teorema da dualidade de Poincaré é um dos mais importantes resultados em topologia. Em sua forma original, enunciava que para uma  $n$ -variedade triangularizada orientável compacta  $X$ , os números de Betti em dimensão  $k$  e  $n - k$  eram iguais e os números de torção em dimensão  $k$  e  $n - k - 1$  eram iguais. Hoje em dia, ele é enunciado em uma formulação diferente, mas equivalente, como um teorema que diz que os grupos de homologia e co-homologia de  $X$  em dimensão  $k$  e  $n - k$  são isomorfos.

**Definição 1.4.1.** *Seja  $X$  uma  $n$ -variedade de homologia triangularizada compacta. Dizemos que  $X$  é **orientável** se é possível orientar todos os  $n$ -simplexos  $\sigma_i$  de  $X$  de tal forma que a soma  $\gamma = \sum \sigma_i$  é um ciclo. Tal ciclo  $\gamma$  será chamado de **ciclo de orientação** para  $X$ .*

**Teorema 1.4.2.** *Seja  $X$  uma  $n$ -variedade de homologia compacta triangularizada. Se  $X$  é orientável, então para todo  $p$ , existe um isomorfismo  $H^p(X; G) \cong H_{n-p}(X; G)$ , onde  $G$  é um grupo arbitrário de coeficientes. Se  $X$  é não orientável, então, para todo  $p$  existe um isomorfismo  $H^p(X; \mathbb{Z}/2) \cong H_{n-p}(X; \mathbb{Z}/2)$ .*



**Dem.:** Usaremos o complexo de cadeia simplicial  $\mathcal{C}(X)$  de  $X$  para calcular a co-homologia de  $X$ , e o complexo de cadeia dual  $\mathcal{D}(X)$  de  $X$  para calcular a homologia de  $X$ . Existe uma correspondência um a um entre os  $p$ -simplexos de  $X$  e os  $n - p$  blocos duais de  $X$  que aplica cada simplexo em seu bloco dual. Daí os grupos abelianos livres,  $C^p(X)$  e  $D_{n-p}(X)$  são isomorfos, por um isomorfismo  $\phi$  que leva o elemento básico  $\sigma^*$  de  $C^p(X)$  (onde  $\sigma$  é um  $p$ -simplexo orientado) em um gerador de  $H_{n-p}(\bar{D}(\sigma), \dot{D}(\sigma))$ . Se  $X$  for orientável, mostraremos que o sinal de  $\phi(\sigma^*)$  pode ser escolhido de tal forma que o seguinte diagrama comute

$$\begin{array}{ccc} C^{p-1}(X) & \xrightarrow{\phi} & D_{n-p+1}(X) \\ \downarrow \delta & & \downarrow \partial \\ C^p(X) & \xrightarrow{\phi} & D_{n-p}(X) \end{array}$$

Isso provará a existência do isomorfismo da dualidade de Poincaré no caso de coeficientes inteiros.

Para definir  $\phi$ , procedemos como segue: primeiro, oriente os  $n$ -simplexos de  $X$  de tal forma que a soma deles,  $\gamma$ , seja um ciclo; oriente os outros simplexos de  $X$  arbitrariamente.

Começamos definindo  $\phi$  em dimensão  $n$ . Os  $n$ -simplexos orientados  $\sigma$  de  $X$  formam uma base para  $C_n(X)$ ; seus duais  $\sigma^*$  formam uma base para  $C^n(X)$ . O bloco dual  $\bar{D}(\sigma)$  do  $n$ -simplexo  $\sigma$  é a 0-célula  $\hat{\sigma}$ . Definimos  $\phi(\sigma^*) = \hat{\sigma}$ , notando que  $\hat{\sigma}$  é um gerador do grupo  $H_0(\hat{\sigma})$ . Assim, definimos um isomorfismo  $\phi : C^n(X) \rightarrow D_0(X)$ .

Agora definimos  $\phi$  em dimensão  $n - 1$ . Seja  $s$  um  $(n - 1)$ -simplexo orientado de  $X$ . Queremos definir  $\phi(s^*)$  de tal forma que  $\partial\phi(s^*) = \phi(\delta s^*)$ . Agora,  $s$  é uma face de exatamente dois  $n$ -simplexos  $\sigma_0$  e  $\sigma_1$  de  $X$ ; visto que  $\gamma$  é um ciclo, eles estão orientados de tal forma que  $\partial\sigma_0 + \partial\sigma_1$  tem coeficiente zero em  $s$ . Suponha que a indexação tenha sido escolhida de tal forma que  $\partial\sigma_0$  tenha coeficiente  $-1$  em  $s$  e  $\partial\sigma_1$  tenha coeficiente  $1$  em  $s$ . Então,  $\delta s^* = \sigma_1^* - \sigma_0^*$ ,

e daí  $\phi(\delta s^*) = \hat{\sigma}_1 - \hat{\sigma}_0$  por definição. O 1-bloco  $\bar{D}(s)$  é a união dos segmentos de reta de  $\hat{s}$  a  $\hat{\sigma}_0$  e  $\hat{\sigma}_1$ ; definimos  $\phi(s^*) = [\hat{\sigma}_0, \hat{s}] + [\hat{s}, \hat{\sigma}_1]$ . Então,  $\phi(s^*)$  é um ciclo fundamental para a 1-célula  $(\bar{D}(s), \dot{D}(s))$ , como queríamos, e  $\partial\phi(s^*) = \hat{\sigma}_1 - \hat{\sigma}_0 = \phi(\delta s^*)$ .

Em geral, suponha  $\phi$  definido em dimensão  $p+1 < n$ . Queremos defini-lo em dimensão  $p$  de tal forma que para cada  $p$ -simplexo orientado  $s$ ,  $\partial\phi(s^*) = \phi(\delta s^*)$ .

Dado o  $p$ -simplexo orientado  $s$ , calculamos  $\delta s^* = \sum \epsilon_i \sigma_i^*$ , onde a soma se estende sobre todos os  $(p+1)$ -simplexos  $\sigma_i$  dos quais  $s$  é uma face, e  $\epsilon = \pm 1$  é o coeficiente de  $s$  na expressão para  $\partial\sigma_i$ . Então,  $\phi(\delta s^*) = \sum \epsilon_i \phi(\sigma_i^*)$ . Provaremos que  $\phi(\delta s^*)$  é um ciclo fundamental para  $\dot{D}(s)$ .

A cadeia  $\phi(\sigma_i^*)$  é por hipótese um ciclo fundamental para o bloco  $\bar{D}(\sigma_i)$ , dual a  $\sigma_i$ , módulo  $\dot{D}(\sigma_i)$ . Esse bloco está em  $\dot{D}(s)$ , visto que  $\sigma_i \succ s$ . Assim,  $\phi(\sigma_i^*)$  é suportado por  $\dot{D}(s)$  para cada  $i$ . Então, a cadeia  $\phi(\delta s^*)$  também é suportada por  $\dot{D}(s)$ . Além disso,  $\phi(\delta s^*)$  é um ciclo, visto que  $\partial\phi(\delta s^*) = \phi(\delta\delta s^*)$  pela hipótese de indução. Agora,  $\dot{D}(s)$  é uma  $(n-p-1)$  esfera de homologia, onde  $n-p-1 > 0$ . O ciclo  $\phi(\delta s^*)$  é não trivial, e ele não é um múltiplo de um outro ciclo, pois sua restrição ao bloco  $\bar{D}(\sigma_i)$  é igual a  $\phi(\sigma_i^*)$ , que é um ciclo fundamental para esse bloco módulo  $\dot{D}(\sigma_i)$ . Daí,  $\phi(\delta s^*)$  representa um gerador de  $H_{n-p-1}(\dot{D}(s))$ , como afirmado.

Considere a seqüência exata

$$0 \longrightarrow H_{n-p}(\bar{D}(s), \dot{D}(s)) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-p-1}(\dot{D}(s)) \longrightarrow 0.$$

Por razões dimensionais, os grupos de homologia são iguais aos grupos de ciclos. Defina  $\phi(s^*)$  como o ciclo fundamental de  $(\bar{D}(s), \dot{D}(s))$  cujo bordo é igual ao gerador  $\phi(\delta s^*)$ . Então,  $\phi$  está definido para dimensão  $p$ , e  $\partial\phi(s^*) = \phi(\delta s^*)$ , como desejado.

Assim, o teorema está provado para o caso de coeficientes inteiros. Para

prová-lo para coeficientes arbitrários, note que os isomorfismos

$$\text{Hom}(C_p(X), G) \cong \text{Hom}(C_p(X), \mathbb{Z}) \otimes G \xrightarrow{\phi \otimes i_G} D_{n-p}(X) \otimes G$$

comutam com  $\delta$  e  $\partial$ .

Finalmente, consideramos o caso não orientável. Grosseiramente falando, fazemos a mesma demonstração. Definimos um isomorfismo

$$\text{Hom}(C_p(X), \mathbb{Z}/2) \xrightarrow{\phi} D_{n-p}(X) \otimes \mathbb{Z}/2$$

por indução. Se  $\sigma$  é um  $n$ -simplexo, denotamos por  $\sigma^*$  a co-cadeia cujo valor é  $[1] \in \mathbb{Z}/2$  sobre  $\sigma$ , e 0 sobre todos os outros simplexes. Definimos então  $\phi(\sigma^*) = \hat{\sigma} \otimes [1]$ . Se  $s$  é um  $(n-1)$ -simplexo que é uma face dos  $n$ -simplexos  $\sigma_0$  e  $\sigma_1$ , definimos  $\phi(s^*) = ([\hat{\sigma}_0, \hat{s}] + [\hat{s}, \hat{\sigma}_1]) \otimes [1]$ ; sinais não importam, pois o grupo de coeficientes é  $\mathbb{Z}/2$ . O restante da demonstração é igual, com a frase “ciclo fundamental” substituída por “único ciclo não trivial com coeficientes em  $\mathbb{Z}/2$ ”.  $\square$

**Corolário 1.4.3.** *Seja  $X$  uma  $n$ -variedade de homologia compacta triangulizada. Se  $X$  é conexo, então, para quaisquer dois  $n$ -simplexos  $\sigma, \sigma'$  de  $X$ , existe uma sequência  $\sigma = \sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_k = \sigma'$  de  $n$ -simplexos de  $X$  tal que  $\sigma_i \cap \sigma_{i+1}$  é um  $(n-1)$ -simplexo de  $X$ , para cada  $i$ .*

*Dem.:* Definimos  $\sigma \sim \sigma'$  se existe uma tal sequência conectando-os. Note que essa relação é de equivalência. A soma  $\sum \sigma_i$  dos  $n$ -simplexos em qualquer classe de equivalência é um ciclo se seu grupo de coeficientes é tomado como sendo  $\mathbb{Z}/2$ , pois, dado um  $(n-1)$ -simplexo  $s$  de  $X$ , os dois  $n$ -simplexos dos quais ele é face são equivalentes, então ou ambos aparecem nessa soma ou nenhum deles aparece; em qualquer caso,  $\partial(\sum \sigma_i)$  tem coeficiente  $[0] \in \mathbb{Z}/2$  sobre  $s$ .

Concluimos que existe apenas uma classe de equivalência, visto que caso contrário  $X$  teria mais do que um  $n$ -ciclo não trivial sobre  $\mathbb{Z}/2$ , contradizendo o fato que  $H_n(X; \mathbb{Z}/2) \cong H^0(X; \mathbb{Z}/2) \cong \mathbb{Z}/2$ .  $\square$

**Corolário 1.4.4.** *Seja  $X$  uma  $n$ -variedade de homologia compacta e triangularizada. Se  $X$  é conexa, então  $H_n(X) \cong \mathbb{Z}$  para  $X$  orientável e  $H_n(X) = 0$  para  $X$  não orientável.*

**Dem.:** Se  $X$  é orientável, então  $H_n(X) \cong H^0(X) \cong \mathbb{Z}$ . Reciprocamente, mostraremos que se  $H_n(X) \neq 0$ , então  $X$  é orientável. Oriente os  $n$ -simplexos de  $X$  arbitrariamente. Suponha que  $z$  é um  $n$ -ciclo não trivial de  $X$ , com coeficientes inteiros. Agora, se  $\sigma_i$  e  $\sigma_{i+1}$  são  $n$ -simplexos de  $X$  com uma  $(n-1)$ -face em comum, e se  $z$  tem coeficiente  $m$  sobre  $\sigma_i$ , ele deve ter coeficiente  $\pm m$  sobre  $\sigma_{i+1}$ . Em vista do corolário anterior,  $z$  deve ter o mesmo coeficiente, a menos de sinal, sobre cada  $n$ -simplexo de  $X$ . Suponha que esse coeficiente tenha valor absoluto  $m$ . Então, dividindo  $z$  por  $m$ , obtemos um ciclo de orientação para  $X$ .  $\square$

**Corolário 1.4.5.** *Seja  $X$  uma  $n$ -variedade de homologia compacta e triangularizada. Então,  $X$  é orientável se, e somente se, para cada componente  $X_i$  de  $X$ , temos  $H_n(X_i) \cong \mathbb{Z}$ .*  $\square$

## 1.5 Dualidade de Lefschetz

Como é de se esperar, o teorema da dualidade de Poincaré se generaliza para variedades de homologia relativas. A generalização é graças a Lefschetz, e a estudaremos nessa seção.

**Definição 1.5.1.** *Seja  $A$  um subcomplexo de um complexo  $X$ . Dizemos que  $A$  é um subcomplexo cheio de  $X$  se todo simplexo de  $X$  cujos vértices estão em  $A$  está em  $A$ .*

Em geral, um subcomplexo  $A$  de  $X$  não é cheio. Mas se passarmos à primeira subdivisão baricêntrica, podemos mostrar que  $\text{sd } A$  é um subcomplexo cheio de  $\text{sd } X$ . De fato, seja  $s = \hat{\sigma}_1 \dots \hat{\sigma}_k$  um simplexo de  $\text{sd } X$ , onde  $\sigma_1 \succ \sigma_2 \succ \dots \succ \sigma_k$ ; então,  $s \subset \sigma_1$ . Se cada vértice de  $s$  pertence a  $\text{sd } A$ ,

então em particular  $\hat{\sigma}_1 \in \text{sd } A$ , de tal forma que  $\text{Int } \sigma_1$  intersecta  $|A|$ . Segue que  $\sigma_1 \in A$ , de tal forma que  $s \subset \sigma_1 \subset |A|$ , como afirmado.

**Lema 1.5.2.** *Seja  $A$  um subcomplexo cheio do complexo simplicial finito  $X$ . Seja  $C$  igual à união de todos os simplexes de  $X$  que são disjuntos de  $|A|$ . Então,  $|A|$  é um retrato por deformação de  $|X| - |C|$ , e  $|C|$  é um retrato por deformação de  $|X| - |A|$ .*

**Dem.:** Primeiro, notamos que cada vértice de  $X$  pertence ou a  $A$  ou a  $C$ . Segundo, notamos que  $C$  é um subcomplexo cheio de  $X$ : se os vértices de  $\sigma$  estão em  $C$ , então o simplexo  $\sigma$  não pode intersectar  $|A|$ , daí está em  $C$ . Terceiro, notamos que  $A$  consiste de todos os simplexes de  $X$  disjuntos de  $|C|$ : todo simplexo de  $A$  é disjunto de  $|C|$ ; e, reciprocamente, se  $\sigma$  é disjunto de  $|C|$ , então cada vértice de  $\sigma$  está em  $A$ , daí  $\sigma$  pertence a  $A$ .

Por simetria, é suficiente mostrar que  $|A|$  é um retrato por deformação de  $|X| - |C|$ . Seja  $\sigma$  um simplexo de  $X$  que não pertence nem a  $A$  nem a  $C$ . Então,  $\sigma = s * t$ , onde  $s$  é gerado pelos vértices de  $\sigma$  que pertencem a  $A$  e  $t$  é gerado pelos vértices que pertencem a  $C$ . Então,  $s \in A$  e  $t \in C$ . Cada ponto  $x$  de  $\sigma - s - t$  está sobre um único segmento de reta que une um ponto de  $s$  a um ponto de  $t$ ; denotemos o ponto final desse segmento de reta (que está em  $|A|$ ) por  $f_\sigma(x)$ . Estendemos  $f_\sigma$  ao simplexo  $s$  fazendo  $f_\sigma$  igual à identidade sobre  $s$ ; então,  $f_\sigma$  é contínua sobre  $\sigma - t$  (de fato, se  $s = v_0 \dots v_p$  e  $t = v_{p+1} \dots v_n$  e  $x$  está em  $\sigma - t$ , então  $x = \sum_{i=0}^n \alpha_i v_i$  implica  $f_\sigma(x) = \sum_{i=0}^p \frac{\alpha_i}{\lambda} v_i$ , onde  $\lambda = \sum_{i=0}^p \alpha_i$ ; vide demonstração do lema 1.1.2).

Temos que quaisquer duas das funções  $f_\sigma$  são iguais sobre a parte comum de seus domínios. Portanto, podemos definir uma função contínua  $f : |X| - |C| \rightarrow |A|$  que retrai  $|X| - |C|$  sobre  $|A|$ , pelas equações:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in |A|, \\ f_\sigma(x) & \text{se } x \in \sigma - |C| \text{ e } \sigma \notin A. \end{cases}$$

A função  $F(x, t) = (1 - t)x + tf(x)$  é então a retração por deformação

exigida.  $\square$

**Teorema 1.5.3.** (*Dualidade de Lefschetz*) *Seja  $(X, A)$  uma  $n$ -variedade de homologia relativa triangularizada compacta. Se  $(X, A)$  é orientável, existem isomorfismos*

$$H^k(X, A; G) \cong H_{n-k}(|X| - |A|; G),$$

$$H_k(X, A; G) \cong H^{n-k}(|X| - |A|; G),$$

para todo  $G$ . Se  $(X, A)$  é não orientável, esses isomorfismos existem para  $G = \mathbb{Z}/2$ .

**Dem.:** Denote por  $X^*$  o subcomplexo da primeira subdivisão baricêntrica de  $X$  consistindo de todos os simplexos de  $\text{sd } X$  que são disjuntos de  $|A|$ . Agora,  $|A|$  é o politopo de um subcomplexo cheio de  $\text{sd } X$ . Pelo lema anterior,  $|X^*|$  é um retrato por deformação de  $|X| - |A|$ . Portanto, podemos substituir  $|X| - |A|$  por  $X^*$  no enunciado do teorema.

Consideraremos, como na demonstração da dualidade de Poincaré, a coleção de blocos  $D(\sigma)$  duais aos simplexos de  $X$ . Provaremos o seguinte:

O espaço  $|X^*|$  é igual à união de todos os blocos  $D(\sigma)$  duais a simplexos  $\sigma$  de  $X$  que não estão em  $A$ .

Para provar esse fato, seja  $s = \hat{\sigma}_1 \dots \hat{\sigma}_k$  um simplexo de  $\text{sd } X$ , onde  $\sigma_1 \succ \dots \succ \sigma_k$ . Então  $s$  está no bloco  $\bar{D}(\sigma_k)$ . Se  $s$  é disjunto de  $|A|$ , então o vértice  $\hat{\sigma}_k$  em particular não está em  $|A|$ ; daí, o simplexo  $\sigma_k$  não pertence a  $A$ . Reciprocamente, se  $\sigma_k$  não pertence a  $A$ , então também não pertencem a  $A$  os simplexos  $\sigma_1, \dots, \sigma_{k-1}$ , visto que eles têm  $\sigma_k$  como uma face. Logo,  $s$  não intersecta  $|A|$ .

Agora, para cada bloco  $D(\sigma)$  em que  $\sigma$  não está em  $A$ , o ponto  $\hat{\sigma}$  está em  $|X| - |A|$ , de tal forma que  $H_i(|X|, |X| - \hat{\sigma})$  é cíclico infinito para  $i = n$  e se anula caso contrário (pois  $(X, A)$  é uma  $n$ -variedade de homologia relativa). Segue que  $(\bar{D}(\sigma), \dot{D}(\sigma))$  é uma célula homológica de dimensão  $n - \dim \sigma$  (vide Teorema 1.3.2). Denote por  $\mathcal{D}(X^*)$  o complexo de cadeia

dual de  $X^*$ ; o grupo  $D_p(X^*)$  é gerado por ciclos fundamentais para as células homológicas  $(\bar{D}(\sigma), \dot{D}(\sigma))$  de dimensão  $p$  (vide Teorema 1.3.4). Assim como antes, a inclusão  $\mathcal{D}(X^*) \rightarrow \mathcal{C}(X^*)$  induz um isomorfismo em co-homologia e em homologia (vide Teorema 1.3.4).

Agora consideramos o caso em que  $(X, A)$  é orientável. Lembre que o grupo de co-homologia relativo  $C^k(X, A)$  pode ser naturalmente considerado como o subgrupo de  $C^k(X)$  consistindo de todas as co-cadeias de  $X$  que se anulam sobre simplexos de  $A$ . Portanto, ele é abeliano livre com uma base consistindo das cocadeias  $\sigma^*$ , com  $\sigma$  variando sobre todos os  $k$ -simplexos de  $X$  que não estão em  $A$ . O argumento usado na demonstração da dualidade de Poincaré se repete sem mudanças, para nos dar um isomorfismo  $C^k(X, A) \xrightarrow{\phi} D_{n-k}(X^*)$ , tendo a propriedade que  $\phi\delta = \partial\phi$ . Segue então a existência de um isomorfismo  $H^k(X, A) \cong H_{n-k}(X^*) \cong H_{n-k}(|X| - |A|)$ . Esse é o primeiro de nossos isomorfismos de dualidade.

Para obter o segundo isomorfismo de dualidade, lembramos que o grupo  $\text{Hom}(C^k(X, A), \mathbb{Z})$  é naturalmente isomorfo ao grupo  $C_k(X, A)$ . Visto que  $\phi$  é um isomorfismo, seu dual

$$\text{Hom}(C^k(X, A), \mathbb{Z}) \xleftarrow{\tilde{\phi}} \text{Hom}(D_{n-k}(X^*), \mathbb{Z})$$

também o é. Portanto, temos o isomorfismo

$$H_k(X, A) \xleftarrow{\phi^*} H^{n-k}(X^*) \cong H^{n-k}(|X| - |A|).$$

A demonstração para coeficientes arbitrários se  $(X, A)$  é orientável, ou para coeficientes em  $\mathbb{Z}/2$  se  $(X, A)$  é não orientável, segue como na demonstração da dualidade de Poincaré.  $\square$





## Capítulo 2

# Teoria de ponto fixo para espaços homogêneos

Nesse capítulo encontram-se os principais resultados do trabalho. Começamos com uma breve revisão sobre pontos fixos e raízes nas duas primeiras seções. Na seção 3 encontra-se a definição do Índice Equivariante de Raiz, que será a base de todos os principais resultados do trabalho. Na seção 4 define-se uma classe especial de espaços homogêneos, para os quais nossos resultados principais serão aplicáveis. Na seção 5, apresentamos a recíproca do teorema do ponto fixo de Lefschetz para essa classe especial de espaços. Finalmente, na seção 6 nos utilizamos da parte mais algébrica da teoria de ponto fixo para demonstrar que para a nossa classe especial de espaços vale o resultado que diz que se o número de Lefschetz de uma aplicação é diferente de zero, então os números de Nielsen e de Reidemeister dessa aplicação são iguais.

## 2.1 Pontos fixos

Aqui fazemos uma breve revisão de pontos da teoria de ponto fixo. O leitor interessado a conhecer mais a fundo a teoria pode encontrá-la em [J2].

Dada uma autoaplicação  $f : X \rightarrow X$  de um poliedro compacto e conexo  $X$ , o conjunto de pontos fixos  $\text{Fix}(f) = \{x \in X | f(x) = x\}$  pode ser particionado pela equivalência de Nielsen como segue. Para quaisquer  $x, y \in \text{Fix}(f)$ , dizemos que  $x$  e  $y$  são *Nielsen equivalentes* como pontos fixos com respeito a  $f$  se existe um caminho  $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$  com  $\alpha(0) = x, \alpha(1) = y$  tal que  $\alpha$  é homotópico a  $f \circ \alpha$  ( $\alpha \sim f \circ \alpha$ ) relativo aos pontos extremos. Denote por  $\mathcal{N}(f)$  o conjunto de classes de ponto fixo (classes de equivalência) de  $f$ . Uma classe de ponto fixo  $\gamma \in \mathcal{N}(f)$  é *essencial* se o índice de ponto fixo  $\text{ind}(f, \gamma)$  é não nulo e é *não essencial*, caso contrário. O *número de Nielsen*  $N(f)$  de  $f$  é definido como o número de classes de ponto fixo essenciais de  $f$ .

## 2.2 Raízes

Essa seção contém uma breve revisão da teoria de raízes. Para mais resultados indicamos [B1] e [B2].

Em [B1], R. Brooks introduziu uma teoria análoga à de Nielsen para estudar as soluções da equação  $\varphi(x) = a, a \in Y$ , onde  $\varphi : X \rightarrow Y$  é uma aplicação entre dois espaços topológicos. Duas soluções (*raízes*)  $x$  e  $y$  são *Nielsen equivalentes* como raízes com respeito a  $\varphi$  se existe um caminho  $C : [0, 1] \rightarrow X$  com  $C(0) = x, C(1) = y$  tal que  $f \circ C$  é homotópica relativa aos pontos extremos à aplicação constante em  $a, \bar{a}$ . Essa relação é de equivalência; uma classe de equivalência de raízes é chamada de *classe de raízes*. O conjunto de raízes de  $\varphi(x) = a$  é denotado por  $\Gamma(\varphi, a)$  e o conjunto de classes de raízes é denotado por  $\tilde{\Gamma}(\varphi, a)$ . Uma raiz  $x_0$  de  $F(x, 0) = a$  está *F-relacionada* a uma raiz  $x_1$  de  $F(x, 1) = a$ , onde  $F : X \times I \rightarrow Y$

é uma homotopia, se  $F_t \circ C$  é homotópica relativa aos pontos extremos à aplicação constante em  $a$ ,  $\bar{a}$ , para algum caminho  $C : I \rightarrow X$  de  $x_0$  a  $x_1$ . A  $F$ -relação entre raízes induz uma relação um a um entre classes de raízes. Dada uma classe de raízes (classe de equivalência)  $\alpha$  de  $\varphi$ , dizemos que  $\alpha$  é *essencial* se  $\alpha$  não desaparece sob nenhuma homotopia de  $\varphi$ , isto é, para qualquer homotopia  $F_t$  com  $F_0 = \varphi$ ,  $\alpha$  está  $F$ -relacionada a uma classe de raízes de  $F_1$ . Denote por  $N(\varphi, a)$  o número de classes de raízes essenciais de  $\varphi$ . Se  $x_0$  é uma raiz de  $\varphi(x) = a$ , então  $\varphi$  induz um homomorfismo  $\varphi_{\#} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, a)$  dos grupos fundamentais. O conjunto de classes laterais à direita da imagem de  $\varphi_{\#}$ ,  $\pi_1(Y, a)/\text{Im}\varphi_{\#}$ , é denotado por  $\text{Coker}\varphi_{\#}$  e o número de tais classes laterais é denotado por  $R(\varphi, a)$ .

**Definição 2.2.1.** *O índice de raiz de  $\alpha$  (ou de um conjunto isolado de raízes) com respeito a  $\varphi$  é o homomorfismo  $\omega(\varphi, \alpha)$  dado pelo homomorfismo composto  $\omega(\varphi, \alpha) = \varphi_* \circ j_*^{-1} \circ i_* : H_*(X) \rightarrow H_*(Y, Y - a)$  induzido por*

$$X \xrightarrow{i} (X, X - \alpha) \xleftarrow{j} (V, V - \alpha) \xrightarrow{\varphi} (Y, Y - a)$$

onde  $V$  é uma vizinhança fechada de  $\alpha$  que não contém outras raízes,  $j$  induz isomorfismo por excisão e  $H_*$  denota o grupo de homologia singular graduado,  $\bigoplus_{k=0}^{\infty} H_k$ .

Se  $Y$  é uma  $n$ -variedade compacta orientável e  $X$  é compacto, então

$$\omega(\varphi, \alpha) = \varphi_{*n} \circ j_{*n}^{-1} \circ i_{*n} : H_n(X) \rightarrow H_n(Y, Y - a)$$

pois nesse caso  $H_i(Y, Y - a) = 0$ ,  $\forall i \neq n$ . Além disso, nesse caso temos o seguinte resultado que se deve a R. Brooks (Corolário 2, Teorema 2 e observações após o Teorema 2 e o Corolário 4 de [B1]):

**Teorema 2.2.2.** *Sejam  $X, Y$  variedades compactas e conexas (não necessariamente de mesma dimensão) com  $Y$  orientável e sem bordo. Para*

quaisquer classes de raízes  $\alpha, \beta$  de  $\varphi$ ,  $\omega(\varphi, \alpha) = \omega(\varphi, \beta)$ . Além disso, se  $\varphi(x) = a$  tem uma classe de raízes essencial, então todas as classes de raízes são essenciais e  $N(\varphi, a) = R(\varphi, a)$ .

**Observação 2.2.3.** Se  $\omega(\varphi, \alpha) \neq 0$ , então  $\alpha$  é essencial. Entretanto, a recíproca não é verdadeira, por exemplo, a aplicação de Hopf  $p : S^3 \rightarrow S^2$ .

De fato, sejam  $p : S^3 \rightarrow S^2$  a aplicação de Hopf e  $a \in S^2$ . Como  $p$  é uma fibração, segue que  $p$  é sobrejetora, e assim  $\Gamma(p, a) \neq \emptyset$ . Mostremos que  $p$  não é homotópica a uma aplicação constante. Suponha  $p \sim cte$ . Nesse caso, teríamos que  $S^2$  seria contrátil, o que não ocorre. Agora, seja  $p' : S^3 \rightarrow S^2$  uma aplicação que não é sobrejetora. Então  $p'(S^3)$  é um subconjunto próprio e conexo por caminhos de  $S^2$ . Logo,  $p'(S^3)$  pode ser contraído em um ponto dentro da esfera. Daí,  $p'$  é homotópica a uma aplicação constante. Logo,  $p'$  não pode ser homotópica a  $p$ . Assim, qualquer aplicação homotópica a  $p$  deve ser sobrejetora e daí  $\Gamma(p', a) \neq \emptyset$  sempre que  $p' \sim p$ . Sejam  $x_0, x_1 \in \Gamma(p, a)$  e  $C$  um caminho em  $S^3$  de  $x_0$  a  $x_1$ . Como  $S^2$  é simplesmente conexo,  $p \circ C \sim \bar{a}$  relativo aos pontos extremos. Assim,  $\tilde{\Gamma}(p, a)$  tem exatamente um elemento, que denotaremos por  $\alpha$ , e daí  $N(p, a) \leq 1$ . Agora, seja  $F : S^3 \times I \rightarrow S^2$  uma homotopia de  $p$ . Temos que  $\tilde{\Gamma}(F_1(x), a) \neq \emptyset$ . Escolha  $x_0 \in \alpha$  e  $x_1 \in \beta \in \tilde{\Gamma}(F_1(x), a)$ , e seja  $C$  um caminho em  $S^3$  de  $x_0$  a  $x_1$ . Então, visto que  $S^2$  é simplesmente conexo,  $F_t \circ C \sim \bar{a}$  relativo aos pontos extremos, e daí  $\alpha$  está  $F$ -relacionada a  $\beta$ . Segue que  $\alpha$  é essencial. Assim,  $N(p, a) = 1$ . Note que  $H_2(S^3) = 0$ , e daí segue do teorema 2.2.2 que  $\omega(p, \alpha) = \varphi_{*2} \circ j_{*2}^{-1} \circ i_{*2} : H_2(S^3) \rightarrow H_2(S^2)$  é o homomorfismo nulo. Portanto,  $\alpha$  é essencial, mas  $\omega(p, \alpha) = 0$ .

## 2.3 O índice equivariante de raiz

Nessa seção, encontram-se a definição e os resultados que formam a base para os resultados principais do trabalho. Utilizamos aqui as teorias de ações de

grupos, grupos de Lie e espaços homogêneos, que podem ser encontradas em [Ka]. Usamos também um resultado que pode ser encontrado em [F] que faz uma ligação muito importante entre as teorias de raízes e de ponto fixo. A proposição 2.3.2 nos dá uma bijeção entre classes de ponto fixo e classes de raízes  $K$ -Nielsen, o lema 2.3.6 define uma igualdade muito interessante entre o índice equivariante de raiz e o índice de ponto fixo e a proposição 2.3.7 faz a ligação entre o índice de ponto fixo, o índice de raiz e o índice equivariante de raiz.

Daqui em diante,  $G$  sempre denotará um grupo de Lie compacto e conexo,  $K$  um subgrupo fechado de  $G$ ,  $M = G/K$  o espaço homogêneo de classes laterais à esquerda e assumimos que  $M$  é orientável e sem bordo. O subgrupo  $K$  age livremente sobre  $G$  via  $k \circ g = gk^{-1}$  e (não livremente) sobre  $M$  via  $k * gK = (kg)K$ .

Dada uma autoaplicação  $f : M \rightarrow M$ , associamos a ela uma aplicação  $K$ -equivariante  $\varphi : G \rightarrow M$  por  $\varphi(g) = g^{-1}f(gK)$ . Mostremos que  $\varphi$  é de fato  $K$ -equivariante. Sejam  $k \in K$  e  $g \in G$ . Temos:

$$\begin{aligned}\varphi(k \circ g) &= \varphi(gk^{-1}) = (gk^{-1})^{-1}f((gk^{-1})K) = \\ &= kg^{-1}f(gK) = k * g^{-1}f(gK) = k * \varphi(g).\end{aligned}$$

Reciprocamente, se  $\varphi : G \rightarrow M$  é uma  $K$ -aplicação, associamos a ela uma autoaplicação  $f : M \rightarrow M$  por  $f(gK) = g\varphi(g)$ . Segue de [F] que  $\varphi(g) = eK$  se, e somente se,  $f(gK) = gK$ , onde  $e \in G$  é o elemento identidade. Em outras palavras,  $g$  é uma raiz da equação  $\varphi(g) = eK$  se, e somente se,  $gK$  é um ponto fixo de  $f$ . Pela  $K$ -equivariância de  $\varphi$ , se  $g$  é uma raiz de  $\varphi$ , então  $k \circ g = gk^{-1}$  é também uma raiz de  $\varphi$  para todo  $k \in K$ . Assim, existe uma correspondência um a um entre as  $K$ -órbitas de raízes de  $\varphi$  e os pontos fixos de  $f$ .

Seja  $\Gamma_\varphi^K$  o conjunto de  $K$ -órbitas de raízes de  $\varphi$  e  $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \in \Gamma_\varphi^K$ . Dizemos que  $\mathcal{O}_1$  e  $\mathcal{O}_2$  são  $K$ -Nielsen equivalentes como órbitas de raízes se, e somente

se, existem  $g_1 \in \mathcal{O}_1$ ,  $g_2 \in \mathcal{O}_2$ , um caminho  $\alpha : [0, 1] \rightarrow G$  tal que  $\alpha(0) = g_1$ ,  $\alpha(1) = g_2$  e  $\varphi(\alpha) \sim \overline{eK}$  (aplicação constante em  $eK$ ) relativo aos pontos extremos. Denote por  $\tilde{\Gamma}_\varphi^K$  o conjunto de classes (de raízes)  $K$ -Nielsen de  $\varphi$ .

De [Wh] (p. 675), temos que a projeção natural  $p : G \rightarrow M$  é a projeção de um fibrado localmente trivial. E disso segue que:

**Corolário 2.3.1.** *A aplicação  $p : G \rightarrow M$  é uma fibração.*

Com isso, demonstramos o seguinte:

**Proposição 2.3.2.** *Existe uma correspondência um a um entre  $\tilde{\Gamma}_\varphi^K$  e  $\mathcal{N}(f)$ . Mais precisamente, se  $g_1, g_2$  são raízes de  $\varphi$ ,  $\mathcal{O}_1$  e  $\mathcal{O}_2$  são as órbitas correspondentes, então  $\mathcal{O}_1$  e  $\mathcal{O}_2$  são  $K$ -Nielsen equivalentes se, e somente se,  $g_1K$  e  $g_2K$  são Nielsen equivalentes como pontos fixos de  $f$ .*

**Dem.:** Suponha que  $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \in \Gamma_\varphi^K$  e são  $K$ -Nielsen equivalentes como órbitas de raízes. Então, existe  $\alpha : [0, 1] \rightarrow G$  tal que  $\alpha(0) = g_1$ ,  $\alpha(1) = k \circ g_2 = g_2 k^{-1}$  para algum  $k \in K$  com  $\varphi \circ \alpha \sim \overline{eK}$  relativo aos pontos extremos. Seja  $\bar{\alpha} = p(\alpha)$ , onde  $p : G \rightarrow G/K = M$  é a projeção natural. Então,  $\bar{\alpha}(s) = \alpha(s)K$ ,  $\bar{\alpha}(0) = g_1K$  e  $\bar{\alpha}(1) = (g_2 k^{-1})K = g_2K$ . Mais ainda,  $(f \circ \bar{\alpha})(s) = f(\bar{\alpha}(s)) = f(\alpha(s)K) = \alpha(s)\varphi(\alpha(s))$ . Visto que  $\varphi \circ \alpha \sim \overline{eK}$  relativo aos pontos extremos, temos  $f \circ \bar{\alpha} \sim \overline{\alpha eK} = \bar{\alpha}$  relativo aos pontos extremos. Portanto,  $g_1K$  e  $g_2K$  são Nielsen equivalentes como pontos fixos de  $f$ .

Reciprocamente, se  $\beta : [0, 1] \rightarrow M$  é tal que  $\beta(0) = g_1K$ ,  $\beta(1) = g_2K$  e  $f \circ \beta \sim \beta$  relativo aos pontos extremos, como  $p : G \rightarrow M$  é uma fibração, podemos levantar  $\beta$  a um caminho  $\tilde{\beta} : [0, 1] \rightarrow G$  tal que  $p \circ \tilde{\beta} = \beta$ . Então,  $\tilde{\beta}(0) \in \mathcal{O}_1$ ,  $\tilde{\beta}(1) \in \mathcal{O}_2$  e

$$\begin{aligned} (\varphi \circ \tilde{\beta})(s) &= \varphi(\tilde{\beta}(s)) = [\tilde{\beta}(s)]^{-1} f(\tilde{\beta}(s)K) = [\tilde{\beta}(s)]^{-1} f(\beta(s)) \sim [\tilde{\beta}(s)]^{-1} \beta(s) = \\ &= [\tilde{\beta}(s)]^{-1} \tilde{\beta}(s)K = \overline{eK}, \end{aligned}$$

ou seja,  $\varphi \circ \tilde{\beta} \sim \overline{eK}$  relativo aos pontos extremos. Portanto,  $\mathcal{O}_1$  e  $\mathcal{O}_2$  são  $K$ -Nielsen equivalentes.  $\square$

Os dois próximos resultados são sobre grupos de Lie. O primeiro pode ser encontrado em [Ka], o segundo pode ser encontrado em [AB]:

**Teorema 2.3.3.** *(Teorema da Vizinhança Tubular) Seja  $G$  um grupo de Lie compacto. Para uma subvariedade  $G$ -invariante  $A$  de uma  $G$ -variedade  $M$ , existe uma vizinhança tubular  $G$ -invariante de  $A$  em  $M$ .*

**Teorema 2.3.4.** *(Teorema das Vizinhanças Geradoras) Sejam  $G$  um grupo de Lie e  $G^0$  a componente conexa da identidade  $e \in G$ . Então,  $G^0$  é um subgrupo de Lie normal de  $G$  e as componentes conexas de  $G$  são da forma  $gG^0$ , para algum  $g \in G$ . Mais ainda, dada uma vizinhança aberta  $U$  de  $e$ , temos que  $G^0 = \cup_{n=1}^{\infty} U^n$ , onde  $U^n = \{g_1^{\pm 1} \cdots g_n^{\pm 1} : g_i \in U\}$ .*

Denote por  $K_1, \dots, K_m$  as componentes conexas de  $K$ ,  $\dim K = k$ ,  $\dim M = n$  e, daí,  $\dim G = n + k$ . Para um ponto fixo isolado  $\bar{g}K$  de  $f$ , com  $\bar{g}$  fixo, seja  $\mathcal{O}_{\bar{g}}$  a  $K$ -órbita de raízes isolada de  $\varphi$  contendo  $\bar{g}$ . Considere o diagrama

$$(G, G - K) \xrightarrow{\theta_{\bar{g}}} (G, G - \mathcal{O}_{\bar{g}}) \xleftarrow{i} (V, V - \mathcal{O}_{\bar{g}}) \xrightarrow{\varphi} (M, M - eK) \xleftarrow{j} M$$

onde  $V$  é uma vizinhança fechada  $K$ -invariante de  $\mathcal{O}_{\bar{g}}$  (cuja existência é garantida pelo teorema 2.3.3, onde no teorema  $G = K$ ,  $A = \mathcal{O}_{\bar{g}}$  e  $M = G$ ) e  $\theta_{\bar{g}}$  é o homeomorfismo induzido por  $\bar{g}$ . Isso induz o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} \bigoplus_{i=1}^m H_0(K_i) & \xleftarrow{\cong} & H^k(K) & \xrightarrow{\cong} & H_n(G, G - K) & \xrightarrow{\cong} & H_n(G, G - \mathcal{O}_{\bar{g}}) \\ & & & & & & \cong \uparrow i_* \\ & & & & H_n(M) & \xrightarrow{\cong} & H_n(M, M - eK) \xleftarrow{\varphi_*} H_n(V, V - \mathcal{O}_{\bar{g}}) \end{array}$$

onde  $H_n$  e  $H^n$  denotam homologia e co-homologia singulares inteiras, respectivamente, e  $D$  e  $A$  denotam os isomorfismos nas dualidades de Poincaré e Lefschetz, respectivamente. Note que  $i : (V, V - \mathcal{O}_{\bar{g}}) \rightarrow (G, G - \mathcal{O}_{\bar{g}})$  de fato induz um isomorfismo por excisão. Para isso, basta que  $\overline{G - V} \subseteq \text{int}(G - \mathcal{O}_{\bar{g}})$ . Mas como  $V$  é uma vizinhança de  $\mathcal{O}_{\bar{g}}$ , temos o resultado diretamente.





Para que  $i$  induza um isomorfismo por excisão, basta que  $\overline{G - V_i} \subseteq \text{int}(G - \mathcal{O}_{\bar{g}}^i)$ . Note que  $K_i$  é fechado em  $K$  e  $K$  é fechado em  $G$ . Daí,  $K_i$  é fechado em  $G$ . A aplicação  $\psi : K_i \rightarrow \mathcal{O}_{\bar{g}}^i$  dada por  $\psi(k) = \bar{g}k$  é um homeomorfismo, e assim a aplicação  $\theta_{\bar{g}} : (G, G - K_i) \rightarrow (G, G - \mathcal{O}_{\bar{g}}^i)$  também é um homeomorfismo. Então,  $\mathcal{O}_{\bar{g}}^i$  é fechado em  $G$ , e assim  $G - \mathcal{O}_{\bar{g}}^i$  é aberto em  $G$ , ou seja,  $\text{int}(G - \mathcal{O}_{\bar{g}}^i) = G - \mathcal{O}_{\bar{g}}^i$ . Note que  $V_i$  é uma vizinhança de  $\mathcal{O}_{\bar{g}}^i$  invariante por multiplicação à direita por elementos de  $K_i$ . Logo,  $\mathcal{O}_{\bar{g}}^i \subset \text{int}V_i$ . Daí,  $\overline{G - V_i} \subset \text{int}(G - \mathcal{O}_{\bar{g}}^i)$ . Logo,  $i : (V_i, V_i - \mathcal{O}_{\bar{g}}^i) \rightarrow (G, G - \mathcal{O}_{\bar{g}}^i)$  induz isomorfismo por excisão.

Visto que  $K_i$  é homeomorfo a  $K_j$  sob multiplicação por um elemento de  $K$  (pelo teorema 2.3.4) e  $\varphi$  é  $K$ -equivariante, segue que

$$\varphi_{i_*}(\mu_i) = \varphi_{j_*}(\mu_j) \quad \text{para } 1 \leq i, j \leq m,$$

e daí

$$\omega_K(\varphi, \mathcal{O}_{\bar{g}}) \cdot j_*(\mu_M) = m \cdot \varphi_{1_*}(\mu_1).$$

Definimos também o *índice equivariante de raiz da  $i$ -ésima componente*  $\mathcal{O}_{\bar{g}}^i$  como  $\omega_K(\varphi, \mathcal{O}_{\bar{g}}^i)$ , o inteiro tal que

$$\omega_K(\varphi, \mathcal{O}_{\bar{g}}^i) \cdot j_*(\mu_M) = \varphi_{i_*}(\mu_i) = \varphi_{1_*}(\mu_1).$$

Em outras palavras,

$$\omega_K(\varphi, \mathcal{O}_{\bar{g}}^i) = \omega_K(\varphi, \mathcal{O}_{\bar{g}}^j) \quad \text{para } 1 \leq i, j \leq m.$$

Analogamente, seus correspondentes índices de raiz ordinários são iguais, isto é,

$$\omega(\varphi, \mathcal{O}_{\bar{g}}^i) = \omega(\varphi, \mathcal{O}_{\bar{g}}^j) \quad \text{para } 1 \leq i, j \leq m.$$

Além disso, se  $R$  é uma união disjunta de órbitas de raízes de  $\varphi$ , definimos

$$\omega_K(\varphi, R) = \sum_i \omega_K(\varphi, \mathcal{O}_{g_i}),$$

onde  $R = \sqcup_i \mathcal{O}_{g_i}$ .

**Observação 2.3.5.** *No que segue, não fazemos uso direto da invariância homotópica equivariante de  $\omega_K$ . Ainda assim, verifiquemos que  $\omega_K$  possui as propriedades usuais. Seja  $H = \{h_t\} : \varphi \simeq \psi : U \rightarrow M$  uma homotopia  $K$ -equivariante tal que  $\cup_{t \in I} \text{Fix}(h_t)$  é compacto em  $U$ , onde  $U$  é uma vizinhança aberta  $K$ -invariante de  $\mathcal{O}_g^i$ . Note que como  $\varphi \simeq \psi$ , então  $\varphi_* = \psi_*$ . Daí, vem:*

$$\begin{aligned} \omega_K(\varphi, \mathcal{O}_g) \cdot j_*(\mu_M) &= \varphi_* \circ i_* \circ \theta_{g_*} \circ A \circ D^{-1}(\mu_1 \oplus \cdots \oplus \mu_m) = \\ &= \psi_* \circ i_* \circ \theta_{g_*} \circ A \circ D^{-1}(\mu_1 \oplus \cdots \oplus \mu_m) = \omega_K(\psi, \mathcal{O}_g) \cdot j_*(\mu_M) \end{aligned}$$

Além disso, podemos definir para um conjunto de raízes compacto arbitrário  $R$ ,  $\omega_K(\varphi, R) := \omega_K(\varphi', R')$ , onde  $\varphi$  e  $\varphi'$  estão relacionadas por uma  $K$ -homotopia  $\{F_t\} : U \times [0, 1] \rightarrow M$  sobre alguma vizinhança aberta  $K$ -invariante  $U$  de  $R$  tal que  $\cup_t F_t^{-1}(eK)$  é compacto em  $U$  e  $R'$  é isolado.

**Lema 2.3.6.** *Dada uma autoaplicação  $f : M \rightarrow M$  e sua correspondente  $K$ -aplicação  $\varphi : G \rightarrow M$ , se  $gK$  é um ponto fixo isolado de  $f$ , então  $\omega_K(\varphi, \mathcal{O}_g^1) = \text{ind}(f, gK)$ .*

**Dem.:** Considere o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} (G, G - K_1) & & M \\ \theta_g \downarrow & & j' \downarrow \\ (G, G - \mathcal{O}_g^1) & & (M, M - gK) \\ i \uparrow & & i' \uparrow \\ (V_1, V_1 - \mathcal{O}_g^1) & \xrightarrow{p} & (\bar{V}_1, \bar{V}_1 - gK) \\ (1, \varphi) \downarrow & & (f, 1) \downarrow \\ G \times (M, M - eK) & \xrightleftharpoons[s]{\Phi} M & \xleftarrow{pr_1} (M \times M, M \times M - \Delta) \end{array}$$

onde  $(1, \varphi)(\sigma) = (\sigma, \varphi(\sigma))$ ,  $(f, 1)(\sigma K) = (f(\sigma K), \sigma K)$ ,  $\Phi$  é a  $G$ -ação sobre  $M$ , isto é,  $\Phi(g, \hat{g}K) = (g\hat{g})K$ ,  $s(gK) = (e, gK)$ ,  $K_1$ ,  $\theta_g$ ,  $V_1$  e  $\mathcal{O}_g^1$  foram

definidos anteriormente,  $p$  é a restrição de  $p : G \rightarrow M$ ,  $p(V_1) = \bar{V}_1$ ,  $pr_1$  é a projeção na primeira coordenada,  $i$ ,  $i'$  e  $j'$  são inclusões. Note que esse diagrama é comutativo. De fato, seja  $\sigma \in V_1$ :

$$\begin{aligned}\Phi \circ (1, \varphi)(\sigma) &= \Phi(\sigma, \varphi(\sigma)) = \sigma\varphi(\sigma) = f(\sigma K) = pr_1(f(\sigma K), \sigma K) = \\ &= pr_1 \circ (f, 1)(\sigma K) = pr_1 \circ (f, 1) \circ p(\sigma)\end{aligned}$$

Como  $M$  é uma  $n$ -variedade, segue que  $H_i(M, M - eK) = 0$ , se  $i \neq n$ . Logo,  $H_n(G \times (M, M - eK)) \cong H_0(G) \otimes H_n(M, M - eK)$ . Daí, o diagrama acima induz o seguinte diagrama em homologia:

$$\begin{array}{ccc} H_n(G, G - K_1) & & H_n(M) \\ \theta_{g*} \downarrow \cong & & j'_* \downarrow \cong \\ H_n(G, G - \mathcal{O}_g^1) & & H_n(M, M - gK) \\ i_* \uparrow \cong & & i_* \uparrow \cong \\ H_n(V_1, V_1 - \mathcal{O}_g^1) & \xrightarrow{p_*} & H_n(\bar{V}_1, \bar{V}_1 - gK) \\ (1, \varphi)_* \downarrow & & (f, 1)_* \downarrow \\ H_0(G) \otimes H_n(M, M - eK) & \xleftarrow[\cong]{\Phi_*} H_n(M) \xleftarrow[\cong]{pr_{1*}} & H_n(M \times M, M \times M - \Delta) \end{array}$$

A inclusão  $s : M \rightarrow G \times (M, M - eK)$  induz  $s_* : H_n(M) \rightarrow H_n(G \times (M, M - eK)) \cong H_0(G) \otimes H_n(M, M - eK)$ , que leva  $\mu_M$  em  $\mu_G \otimes j_*(\mu_M)$ , onde  $\mu_G$  é o gerador de  $H_0(G)$  e  $j : M \rightarrow (M, M - eK)$  é a inclusão. Temos que  $\Phi \circ s(gK) = \Phi(e, gK) = (eg)K = gK$ , isto é,  $\Phi \circ s = 1_M$ . Logo,  $\Phi_* \circ s_* = (\Phi \circ s)_* = 1_{H_n(M)}$ ; daí,  $\Phi_*$  é um epimorfismo. Mas note que  $H_0(G) \otimes H_n(M, M - eK) \cong \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z} \cong H_n(M)$ , e como um epimorfismo de  $\mathbb{Z}$  em  $\mathbb{Z}$  é um isomorfismo, segue que  $\Phi_* : H_0(G) \otimes H_n(M, M - eK) \rightarrow H_n(M)$  é um isomorfismo que leva  $\mu_G \otimes j_*(\mu_M)$  em  $\mu_M$ .

Note que temos também:

$$H_0(K_1) \xleftarrow[\cong]{D} H^k(K_1) \xrightarrow[\cong]{A} H_n(G, G - K_1)$$

onde  $D$  e  $A$  são os isomorfismos das dualidades de Poincaré e Lefschetz, respectivamente.

Mostremos que a inclusão  $i' : (\bar{V}_1, \bar{V}_1 - gK) \rightarrow (M, M - gK)$  satisfaz as condições do teorema de excisão. Para isso, basta mostrar que o fecho de  $(M - \bar{V}_1)$  está contido em  $\text{int}(M - gK)$ , e para isso basta mostrar que  $gK \in \text{int } \bar{V}_1$ . Temos que  $gK$  é um ponto em  $M$ , logo, um conjunto fechado, pois  $M$  é Hausdorff. Daí,  $M - gK$  é aberto e  $\text{int}(M - gK) = M - gK$ . Agora, como  $p : G \rightarrow M$  é um fibrado, segue que  $p$  é uma aplicação aberta. Temos  $p(V_1) = \bar{V}_1$ ; daí,  $p(\text{int } V_1) \subset \bar{V}_1$  e  $p(\text{int } V_1)$  é aberto em  $M$ ; assim,  $p(\text{int } V_1) \subset \text{int } \bar{V}_1$ . Agora, note que  $\mathcal{O}_g^1 \subset \text{int } V_1$  e  $p(\mathcal{O}_g^1) = gK$ . Daí,  $gK \in \text{int } \bar{V}_1$ , como queríamos.

Agora, mostremos que  $p_*$  e  $pr_{1*}$  são epimorfismos, levando assim gerador em gerador.

Mostremos primeiro que  $V_1$  é homeomorfo a  $\bar{V}_1 \times K_1$ . Defina  $m : \bar{V}_1 \times K_1 \rightarrow V_1$  por  $m(\hat{g}K, k) = \hat{g}k$  e  $n : V_1 \rightarrow \bar{V}_1 \times K_1$  por  $n(\hat{g}k) = (\hat{g}K, k)$ . Aqui, note que se  $x \in V_1$ , então  $x \in \mathcal{O}_g^1$  para algum  $\hat{g} \in V$ , e daí  $x = \hat{g}k$ , para algum  $k \in K_1$ . Temos que  $m$  e  $n$  são contínuas e  $(m \circ n)(\hat{g}k) = m(\hat{g}K, k) = \hat{g}k$ ,  $(n \circ m)(\hat{g}K, k) = n(\hat{g}k) = (\hat{g}K, k)$ . Logo,  $m$  e  $n$  são homeomorfismos inversos entre si. Daí,  $V_1 \approx \bar{V}_1 \times K_1$ , e como  $\mathcal{O}_g^1 \approx K_1$ , segue que  $(V_1, V_1 - \mathcal{O}_g^1) \approx (\bar{V}_1 \times K_1, (\bar{V}_1 - gK) \times K_1) \approx (\bar{V}_1, \bar{V}_1 - gK) \times K_1$ . Considere o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} (V_1, V_1 - \mathcal{O}_g^1) & \xleftarrow{m} & (\bar{V}_1, \bar{V}_1 - gK) \times K_1 \\ p \downarrow & \swarrow \pi & \\ (\bar{V}_1, \bar{V}_1 - gK) & & \end{array}$$

onde  $p$  e  $m$  foram definidas anteriormente e  $\pi$  é a projeção na primeira coordenada. Note que esse diagrama é comutativo. De fato, seja  $(\hat{g}K, k) \in \bar{V}_1 \times K_1$ :

$$(p \circ m)(\hat{g}K, k) = p(m(\hat{g}K, k)) = p(\hat{g}k) = (\hat{g}k)K = \hat{g}K = \pi(\hat{g}K, k)$$

Agora, fixemos  $k \in K_1$  e definamos  $\alpha : (\bar{V}_1, \bar{V}_1 - gK) \rightarrow (\bar{V}_1, \bar{V}_1 - gK) \times K_1$  por  $\alpha(\hat{g}K) = (\hat{g}K, k)$ . Temos que  $\alpha$  é contínua e  $(\pi \circ \alpha)(\hat{g}K) = \pi(\hat{g}K, k) = \hat{g}K$ , e daí  $\pi_* \circ \alpha_* = (\pi \circ \alpha)_* = id_*$ . Portanto,  $\pi_*$  é um epimorfismo. Agora, note que  $H_n(\bar{V}_1, \bar{V}_1 - gK) \cong H_n(M, M - gK) \cong \mathbb{Z}$  e  $H_n((\bar{V}_1, \bar{V}_1 - gK) \times K_1) \cong H_n(\bar{V}_1, \bar{V}_1 - gK) \otimes H_0(K_1) \cong \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$ , e daí  $\pi_*$  é um isomorfismo. Voltando ao diagrama acima, temos que ele induz o seguinte diagrama comutativo em homologia:

$$\begin{array}{ccc} H_n(V_1, V_1 - \mathcal{O}_g^1) & \xleftarrow[\cong]{m_*} & H_n(\bar{V}_1, \bar{V}_1 - gK) \otimes H_0(K_1) \\ p_* \downarrow & \swarrow \cong_{\pi_*} & \\ H_n(\bar{V}_1, \bar{V}_1 - gK) & & \end{array}$$

Daí, note que  $\pi_* \circ m_*^{-1} = \pi_* \circ n_* = p_*$  e  $\pi_*$  e  $n_*$  são isomorfismos. Logo,  $p_*$  é um isomorfismo, levando, assim, gerador em gerador.

Agora,  $pr_1 : M \times M \rightarrow M$  dada por  $pr_1(gK, g'K) = gK$  é contínua e sobrejetora. Além disso,  $\delta : M \rightarrow (M \times M, M \times M - \Delta)$  dada por  $\delta(gK) = (gK, gK)$  é contínua e injetora. Note que  $pr_1 \circ \delta = 1_M$ . Assim, obtemos:

$$1_{M_*} = (pr_1 \circ \delta)_* = pr_{1*} \circ \delta_*.$$

Portanto,  $pr_{1*}$  é sobrejetora.

Agora, temos:

$$\begin{aligned} & [\Phi_* \circ (1, \varphi)_* \circ i_*^{-1} \circ \theta_{g_*} \circ A \circ D^{-1}](\mu_1) = \\ & = \Phi_*(i_*^{-1} \circ \theta_{g_*} \circ A \circ D^{-1}(\mu_1), \varphi_* \circ i_*^{-1} \circ \theta_{g_*} \circ A \circ D^{-1}(\mu_1)) = \\ & = \Phi_*(\mu_G \otimes \omega_K(\varphi, \mathcal{O}_g^1) \cdot j_*(\mu_M)) = \omega_K(\varphi, \mathcal{O}_g^1) \cdot \Phi_*(\mu_G \otimes j_*(\mu_M)) = \\ & = \omega_K(\varphi, \mathcal{O}_g^1) \cdot \mu_M \end{aligned}$$

Por outro lado:

$$[\Phi_* \circ (1, \varphi)_*] \circ i_*^{-1} \circ \theta_{g_*} \circ A \circ D^{-1}(\mu_1) = pr_{1*} \circ (f, 1)_* \circ [p_* \circ i_*^{-1} \circ \theta_{g_*} \circ A \circ D^{-1}(\mu_1)] =$$

$$\begin{aligned}
&= pr_{1*} \circ (f, 1)_*(\mu_{(\bar{V}_1, \bar{V}_1 - gK)}) = pr_{1*} \circ [(f, 1)_* \circ i_*^{-1} \circ j_*(\mu_M)] = \\
&= pr_{1*}(\text{ind}(f, gK) \cdot \mu_{(M \times M, M \times M - \Delta)}) = \text{ind}(f, gK) \cdot pr_{1*}(\mu_{(M \times M, M \times M - \Delta)}) = \\
&= \text{ind}(f, gK) \cdot \mu_M
\end{aligned}$$

onde  $\mu_{(\bar{V}_1, \bar{V}_1 - gK)}$  e  $\mu_{(M \times M, M \times M - \Delta)}$  são os geradores de  $H_n(\bar{V}_1, \bar{V}_1 - gK)$  e  $H_n(M \times M, M \times M - \Delta)$ , respectivamente. Portanto,

$$\omega_K(\varphi, \mathcal{O}_g^1) = \text{ind}(f, gK). \square$$

O índice de raiz ordinário, o índice equivariante de raiz e o índice de ponto fixo estão relacionados como segue.

**Proposição 2.3.7.** *Suponha que  $gK$  é uma classe de ponto fixo de Nielsen de  $f$ . Seja  $\mathcal{O}_g$  a correspondente classe  $K$ -Nielsen de  $\varphi$  e  $\alpha \subset \mathcal{O}_g$  uma classe de raiz ordinária de  $\varphi$ . Se  $\omega(\varphi, \alpha)$  é não nulo, então  $\omega_K(\varphi, \mathcal{O}_g) \neq 0$  e daí  $\text{ind}(f, gK) \neq 0$ .*

**Dem.:** Primeiro note que dois pontos em uma componente conexa  $\mathcal{O}_g^i$  são Nielsen equivalentes como raízes (ordinárias) com respeito a  $\varphi$ . Assim,  $\alpha = \sqcup_{i=1}^l \mathcal{O}_g^i$  (reenumerando se necessário) é simplesmente uma união disjunta de algumas das componentes em  $\mathcal{O}_g$ . Considere o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc}
G & \xrightarrow{i} & (G, G - K) & \xrightarrow{j_\alpha} & (G, G - \sqcup_{i=1}^l K_i) & \xrightarrow{\theta_\alpha} & (G, G - \alpha) \\
& & & & & & \uparrow i_\alpha \\
& & & & (M, M - eK) & \xleftarrow{\varphi} & (V_\alpha, V_\alpha - \alpha)
\end{array}$$

onde  $i : G \rightarrow (G, G - K)$ ,  $j_\alpha : (G, G - K) \rightarrow (G, G - \sqcup_{i=1}^l K_i)$  e  $i_\alpha : (V_\alpha, V_\alpha - \alpha) \rightarrow (G, G - \alpha)$  são inclusões e essa última induz isomorfismo por excisão,  $\theta_\alpha : (G, G - \sqcup_{i=1}^l K_i) \rightarrow (G, G - \alpha)$  dada por  $\theta_\alpha(x) = gx$  é um

homeomorfismo e  $V_\alpha = V - (\sqcup_{i=l+1}^m \mathcal{O}_g^i)$ . Note que então  $\theta_\alpha \circ j_\alpha \circ i$  é uma inclusão. Esse diagrama induz o seguinte em homologia:

$$H_n(G) \xrightarrow{j_*} H_n(G, G - \alpha) \xleftarrow[\cong]{i_{\alpha*}} H_n(V_\alpha, V_\alpha - \alpha) \xrightarrow{\varphi_*} H_n(M, M - eK)$$

onde  $j_* = (\theta_\alpha \circ j_\alpha \circ i)_*$  é induzida por inclusão. Esse diagrama nos dá o índice de raiz ordinário  $\omega(\varphi, \alpha)$ . Visto que  $\omega(\varphi, \alpha)$  é não nulo, o homomorfismo  $\varphi_* \circ i_{\alpha_*}^{-1} \circ j_* = \varphi_* \circ i_{\alpha_*}^{-1} \circ \theta_{\alpha_*} \circ j_{\alpha_*} \circ i_*$  é não nulo, e daí  $\varphi_* \circ i_{\alpha_*}^{-1} \circ \theta_{\alpha_*}$ , que nos dá  $\omega_K(\varphi, \alpha) = l \cdot \omega_K(\varphi, \mathcal{O}_g^1)$  com  $l$  igual ao número de componentes conexas de  $\alpha$ , é não nulo. Logo,  $\omega_K(\varphi, \mathcal{O}_g^1) \neq 0$ . A afirmação que  $\text{ind}(f, gK) \neq 0$  segue do lema 2.3.6.  $\square$

## 2.4 Uma classe de espaços homogêneos

Nessa seção, definimos uma classe especial de espaços para a qual nossos principais resultados serão aplicáveis, e demonstramos um resultado que diz que todo espaço dessa classe é Wecken.

Seja  $\mathcal{H}_0$  o conjunto de todos os espaços homogêneos (classes laterais) orientáveis  $G/K = M$  de grupos de Lie compactos e conexos  $G$  tais que a projeção canônica  $p : G \rightarrow M$  induz um homomorfismo não nulo  $p_* : H_n(G) \rightarrow H_n(M)$ , onde  $n = \dim M$ . Note que  $\mathcal{H}_0$  contém a classe de todos os grupos de Lie compactos e conexos, ou seja,  $\mathcal{H}_0$  contém todos os espaços homogêneos  $G/K$  com  $K = \{e\}$ , onde  $e$  é o elemento identidade de  $G$  e  $G$  é um grupo de Lie compacto e conexo. Mais ainda,  $\mathcal{H}_0$  contém os espaços de lentes generalizados (Exemplo 2.4.5) e espaços homogêneos  $G/K$ , onde  $K$  é finito (Exemplo 2.4.6). Dados  $M_1 = G_1/K_1$ ,  $M_2 = G_2/K_2 \in \mathcal{H}_0$ , o produto topológico  $M_1 \times M_2$  é um espaço de classes laterais de  $G_1 \times G_2$ , que está equipado com a estrutura de Grupo de Lie produto. Portanto, temos:

**Proposição 2.4.1.** *Se  $M_1, M_2 \in \mathcal{H}_0$ , então  $M_1 \times M_2 \in \mathcal{H}_0$ , isto é,  $\mathcal{H}_0$  é fechado sob produto topológico.*

A definição a seguir pode ser encontrada em [Ka].

Dado um grupo de Lie  $N$ , denote por  $\text{Aut}(N)$  o conjunto de todos os automorfismos de grupos de Lie de  $N$ . Então,  $\text{Aut}(N)$  forma um grupo com respeito à composição de aplicações. Definimos agora o conceito de que um homomorfismo de grupos  $\theta : G \rightarrow \text{Aut}(N)$  é suave como segue. Dada  $\theta$  como acima, definimos uma aplicação  $\theta' : G \times N \rightarrow N$  por  $\theta'(g, n) = \theta(g)(n)$ , para  $g \in G, n \in N$ . Se  $\theta'$  é uma aplicação suave da variedade produto  $G \times N$  em  $N$ , dizemos que  $\theta$  é suave.

Dado um homomorfismo suave  $\theta : G \rightarrow \text{Aut}(N)$ , definimos um novo grupo de Lie  $N \rtimes_{\theta} G$  (ou  $N \rtimes G$ ) como segue.

A estrutura de variedade sobre  $N \rtimes_{\theta} G$  é dada pela variedade produto  $N \times G$ , isto é, como variedade colocamos  $N \rtimes_{\theta} G = N \times G$ . A operação do grupo é dada por  $(n, g)(n', g') = (n\theta(g)(n'), gg')$  para  $n, n' \in N, g, g' \in G$ , onde  $\theta(g)(n') \in N$ , e  $n\theta(g)(n')$  e  $gg'$  denotam as multiplicações em  $N$  e  $G$ , respectivamente. Daí, fazendo uso da hipótese de que  $\theta$  é suave, podemos verificar que a operação do grupo é suave. Assim,  $N \rtimes_{\theta} G$  se torna um grupo de Lie, que é chamado de *produto semidireto de  $N$  e  $G$  com respeito a  $\theta$* .

Em [Ka] (p. 22 e 161), encontramos o seguinte:

**Corolário 2.4.2.** *Se  $A \cong N \rtimes_{\theta} G$ , então o quociente  $A/N$  é um grupo de Lie e  $A/N \cong G$ .*

Assim, podemos utilizar o produto semidireto de grupos de Lie para construir elementos de  $\mathcal{H}_0$ .

A próxima definição e o próximo resultado podem ser encontrados em [H] (p. 258):

**Definição 2.4.3.** *Para uma aplicação  $f : M \rightarrow N$  entre  $n$ -variedades conexas, fechadas e orientáveis com classes fundamentais  $[M]$  e  $[N]$ , o grau de  $f$  é definido como o inteiro  $d$  tal que  $f_*([M]) = d[N]$ , e daí o sinal do grau depende da escolha das classes fundamentais.*



**Proposição 2.4.4.** *Sejam  $M$  e  $N$  variedades orientáveis fechadas e conexas. Se  $f : M \rightarrow N$  é a projeção de um espaço de recobrimento a  $p$ -folhas, então  $f$  tem grau  $\pm p$ .*

**Dem.:** Seja  $y \in N$ . Como  $f$  é a projeção de um espaço de recobrimento a  $p$ -folhas, temos que  $f^{-1}(y)$  consiste de  $p$  pontos, digamos  $x_1, \dots, x_p$ . Sejam  $V$  uma vizinhança de  $y$  e  $U_1, \dots, U_p$  tais que  $x_i \in U_i$  e  $U_i$  é aplicado homeomorficamente por  $f$  sobre  $V$  para todo  $i$ . Então,  $f(U_i - x_i) = V - y$  para cada  $i$ , e temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & H_n(U_i, U_i - x_i) & \xrightarrow{f_*} & H_n(V, V - y) \\
 & \swarrow \cong & \downarrow k_i & & \downarrow \cong \\
 H_n(M, M - x_i) & \xleftarrow{p_i} & H_n(M, M - f^{-1}(y)) & \xrightarrow{f_*} & H_n(N, N - y) \\
 & \swarrow \cong & \uparrow j & & \uparrow \cong \\
 & & H_n(M) & \xrightarrow{f_*} & H_n(N)
 \end{array}$$

onde todas as aplicações são as naturais, em particular  $k_i$  e  $p_i$  são induzidas por inclusões.

Os dois isomorfismos na metade de cima do diagrama vêm de excisão, enquanto os dois isomorfismos na metade de baixo vêm de seqüências exatas de pares. Via esses quatro isomorfismos, os dois grupos no topo do diagrama podem ser identificados com  $H_n(M)$  e  $H_n(N)$ , respectivamente, e o homomorfismo de cima,  $f_*$ , se torna a multiplicação por um inteiro, chamado de grau local de  $f$  em  $x_i$ , denotado por  $\deg f|_{x_i}$ .

Lembremos que  $f$  aplica cada  $U_i$  homeomorficamente sobre  $V$ , e daí  $\deg f|_{x_i} = \pm 1$  para cada  $i$ . Note também que, por  $f$  ser a projeção de um espaço de recobrimento, o sinal de  $\deg f|_{x_i}$  é igual para todo  $i$ , pois  $f : U_i \rightarrow V$  tem a mesma orientação para todo  $i$ .

Por excisão, o termo central  $H_n(M, M - f^{-1}(y))$  no diagrama acima é a soma direta dos grupos  $H_n(U_i, U_i - x_i)$ , com  $k_i$  a inclusão do  $i$ -ésimo somando e  $p_i$  a projeção sobre o  $i$ -ésimo somando. A comutatividade do triângulo

de baixo nos diz que  $p_i j([M]) = [M_i]$ , daí  $j([M]) = ([M_1], \dots, [M_p]) = \sum_i k_i([M_i])$ . A comutatividade do quadrado de cima nos diz que o  $f_*$  do meio leva  $k_i([M_i])$  em  $\deg f|x_i \cdot [N_y] = \pm[N_y]$ , e daí a soma  $\sum_i k_i([M_i]) = j([M])$  é levada em  $\sum_i \deg f|x_i \cdot [N_y] = \pm p \cdot [N_y]$ . Por fim, a comutatividade do quadrado de baixo dá então  $\deg f = \pm p$ .  $\square$

**Exemplo 2.4.5.** O espaço de lentes clássico  $L_p^{2n-1}$  é o espaço de órbitas da esfera unitária  $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$  pela ação livre do grupo cíclico  $\mathbb{Z}_p = \langle \zeta \rangle$  de ordem  $p$  gerado por  $\zeta = e^{2\pi i/p}$  via  $\zeta \cdot (z_1, z_2, \dots, z_n) \mapsto (\zeta z_1, \zeta z_2, \dots, \zeta z_n)$ . Podemos também ver  $L_p^{2n-1}$  como um espaço homogêneo do grupo unitário  $U(n)$  como segue. Seja  $H = U(n-1)$  mergulhado em  $U(n)$  como o subgrupo das matrizes  $n \times n$  unitárias  $A$  com  $(A)_{nn} = 1$ ,  $(A)_{in} = 0 = (A)_{nj}$  para  $1 \leq i, j < n$ . Considere  $N_1 \cong \mathbb{Z}_p$ , o conjunto das matrizes diagonais  $n \times n$   $B_\zeta$  com  $(B_\zeta)_{ii} = \zeta$  para  $1 \leq i \leq n$  e  $(B_\zeta)_{jk} = 0$  para  $1 \leq j, k \leq n$  e  $j \neq k$ . Note que  $U(n)$  e  $U(n-1)$  são fechados em  $GL(n, \mathbb{C})$ , e  $N_1$  é finito. Então, o conjunto  $HN_1$  é um subgrupo fechado de  $U(n)$  consistindo de matrizes da forma

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha I & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha A & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

onde  $A \in U(n-1)$ ,  $I$  é a matriz identidade em  $U(n-1)$  e  $\alpha \in \mathbb{Z}_p$ . Portanto, no espaço de classes laterais  $U(n)/HN_1$ ,  $\mathcal{M}_1 HN_1 = \mathcal{M}_2 HN_1$  para  $\mathcal{M}_i \in U(n)$  se, e somente se,

$$\mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_1 \begin{pmatrix} \alpha A & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

para certos  $\alpha$  e  $A$ . Visto que  $S^{2n-1} = U(n)/U(n-1)$  sob a identificação  $[\mathcal{M}] \leftrightarrow \mathcal{M}e_n$ , onde  $e_n$  é o vetor  $(0, \dots, 0, 1)$  em  $\mathbb{C}^n$  e  $\mathcal{M} \in U(n)$ , temos que  $L_p^{2n-1} = S^{2n-1}/\mathbb{Z}_p = (U(n)/U(n-1))/N_1 = U(n)/HN_1$  como um espaço de classes laterais de  $U(n)$ .

Mais geralmente, tome inteiros  $l_1, \dots, l_{n-1}$  relativamente primos a  $p$ , e considere  $\mathbb{Z}_p \cong N_2 = \{C_\zeta | C_\zeta \text{ diagonal e } (C_\zeta)_{ii} = \zeta^{l_{i-1}}, l_0 = 1\}$  como um subgrupo de  $U(n)$ . Então, o espaço de classes laterais  $U(n)/HN_2$  é simplesmente o espaço de lentes generalizado  $L_p^{2n-1}(l_1, \dots, l_{n-1})$ , que é o espaço de órbitas de  $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$  pela ação livre do grupo cíclico  $\mathbb{Z}_p = \langle \zeta \rangle$  via  $\zeta \cdot (z_1, z_2, \dots, z_n) \mapsto (\zeta z_1, \zeta^{l_1} z_2, \dots, \zeta^{l_{n-1}} z_n)$ .

Note que a projeção  $U(n) \rightarrow L_p^{2n-1}(l_1, \dots, l_{n-1})$  se fatora como  $U(n) \rightarrow U(n)/U(n-1) \rightarrow L_p^{2n-1}(l_1, \dots, l_{n-1})$ , onde a segunda aplicação é um recobrimento a  $p$ -folhas. Assim, por 2.4.4, para mostrar que  $L_p^{2n-1}(l_1, \dots, l_{n-1}) \in \mathcal{H}_0$ , é suficiente mostrar que a aplicação  $p : U(n) \rightarrow U(n)/U(n-1) = S^{2n-1}$  induz um homomorfismo não nulo em dimensão  $2n-1$  em homologia. Em co-homologia inteira,  $p$  induz  $p^* : H^{2n-1}(S^{2n-1}) \rightarrow H^{2n-1}(U(n))$ . Um argumento elementar na sequência espectral de Leray mostra que o homomorfismo limite  $p^*$  é não nulo. Visto que  $H^{2n-1}(U(n))$  é livre de torção, temos  $H^{2n-1}(U(n)) \cong \text{Hom}(H_{2n-1}(U(n)), \mathbb{Z})$  e assim o homomorfismo  $p_* : H_{2n-1}(U(n)) \rightarrow H_{2n-1}(S^{2n-1})$  é não nulo. Mais ainda,  $p_*$  manda o elemento primitivo de dimensão  $2n-1$  da álgebra de Hopf  $H_*(U(n))$  no gerador de  $H_{2n-1}(S^{2n-1})$ .

**Exemplo 2.4.6.** Seja  $M = G/K$  um espaço homogêneo de um grupo de Lie compacto e conexo  $G$  e  $K$  um subgrupo finito de  $G$ . Então, a projeção  $p : G \rightarrow M$  é um recobrimento a  $|K|$ -folhas. Visto que  $G$  é orientável, segue de um resultado de grupos de Lie que  $M$  também o é. Assim, de 2.4.4 temos que  $M \in \mathcal{H}_0$ .

Temos que um espaço é Wecken se para toda aplicação  $f : M \rightarrow M$ ,  $N(f) = MF[f] := \min\{\#\text{Fix } g \mid g \sim f\}$ . Um resultado muito conhecido diz que variedades compactas e conexas de dimensão diferente de 2 são Wecken.

**Proposição 2.4.7.** Se  $M \in \mathcal{H}_0$ , então  $M$  é Wecken.

**Dem.:** Precisamos apenas considerar o caso em que  $\dim M = 2$ . Se  $\dim M = 2$ , então  $M$  é o toro. Isso segue do fato que se uma superfície fechada orientável  $M$  de característica de Euler negativa fosse um espaço de classes laterais de um grupo de Lie compacto e conexo, então seu grupo fundamental deve ser virtualmente abeliano e daí seria o grupo fundamental de uma variedade plana; mas uma superfície Riemanniana de genus  $g > 1$  certamente não é plana. Assim,  $M$  pode ser ou a 2-esfera ou o toro. Visto que  $S^2 = S^3/S^1$  e  $H_2(S^3) = 0$ , concluímos que  $S^2 \notin \mathcal{H}_0$  e  $M$  deve ser o toro.

Agora vamos mostrar que o Toró é Wecken. A demonstração colocada aqui é de [GK]. Para isso, dividiremos a prova em quatro partes.

**Primeira parte:** Se  $L(\bar{f}) = 0$ , então construiremos uma função  $\bar{g} : T \rightarrow T$ , homotópica a  $\bar{f}$ , sem pontos fixos.

Seja o toro  $T = S^1 \times S^1$ . Considere em  $\mathbb{R}^2$  a seguinte relação de equivalência:

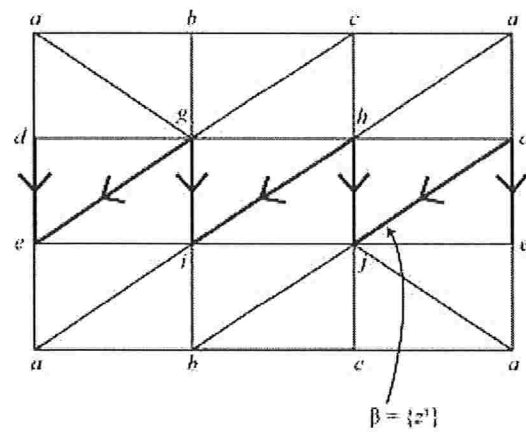
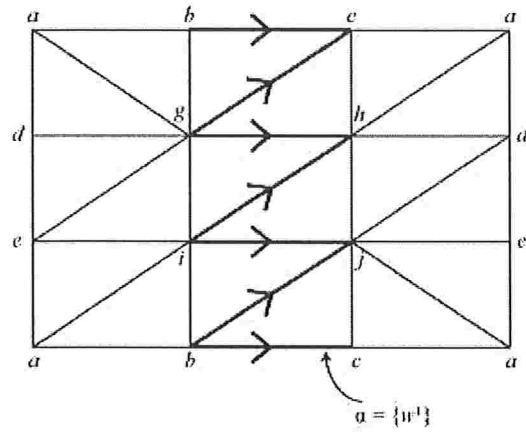
$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \quad \text{se} \quad x_1 \equiv x_2 \quad \text{e} \quad y_1 \equiv y_2 \pmod{\mathbb{Z}}.$$

O conjunto das classes de equivalência pode ser identificado com  $T$  e a projeção  $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow T$  é o recobrimento universal.

Seja  $\bar{f} : T \rightarrow T$  e seja  $\varphi : \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  a aplicação induzida por  $\bar{f}$  em  $\pi_1(T)$ , cuja matriz é

$$\begin{pmatrix} m & p \\ n & q \end{pmatrix}$$

em relação à base canônica de  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ . Denote por  $w^1$  e  $z^1$  os cociclos desenhados na figura a seguir. Temos que  $\alpha = \{w^1\}$  e  $\beta = \{z^1\}$  geram  $H^1(T) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ . Se orientarmos cada 2-simplexo no sentido horário, então  $\Lambda = \{\sigma^*\}$  gera  $H^2(T) \cong \mathbb{Z}$ , onde  $\sigma$  é qualquer 2-simplexo orientado de  $T$ .



Ordene os vértices de  $T$  alfabeticamente. Usando essa ordenação, calculamos o valor de  $w^1 \cup z^1$  sobre cada 2-simplexo orientado  $\sigma$ . Note que  $\langle w^1 \cup z^1, \sigma \rangle = 0$  a menos que uma face de  $\sigma$  esteja no suporte de  $w^1$  e uma face esteja no suporte de  $z^1$ . Assim, os únicos possíveis valores não nulos ocorrem quando  $\sigma = ghi$  ou  $\sigma = hij$ . Calculamos:

$$\langle w^1 \cup z^1, [g, h, i] \rangle = \langle w^1, [g, h] \rangle \cdot \langle z^1, [h, i] \rangle = 1 \cdot 1 = 1,$$

$$\langle w^1 \cup z^1, [h, i, j] \rangle = \langle w^1, [h, i] \rangle \cdot \langle z^1, [i, j] \rangle = -1 \cdot 0 = 0.$$

Assim,  $w^1 \cup z^1 = [g, h, i]^*$ . Agora, note que a orientação de  $[g, h, i]$  é horária. Portanto, em termos de nossos geradores padrão,  $\alpha \cup \beta = \Lambda$ .

Um cálculo similar mostra que:

$$\langle z^1 \cup w^1, [g, h, i] \rangle = 0 \cdot (-1) = 0,$$

$$\langle z^1 \cup w^1, [h, i, j] \rangle = 1 \cdot 1 = 1,$$

de tal forma que  $z^1 \cup w^1 = [h, i, j]^*$ . Assim,  $\beta \cup \alpha = -\Lambda$ .

Das propriedades do produto cup, temos  $\alpha \cup \alpha = -(\alpha \cup \alpha)$  e  $\beta \cup \beta = -(\beta \cup \beta)$ . Visto que  $H^2(T)$  não possui elementos de ordem 2, segue que  $\alpha \cup \alpha = \beta \cup \beta = 0$ . Agora, da definição de  $\varphi$  e do fato que  $\pi_1(T) \cong H_1(T) \cong H^1(T) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ , segue que  $\bar{f}^*(\alpha) = m\alpha + n\beta$  e  $\bar{f}^*(\beta) = p\alpha + q\beta$ . Como aplicações contínuas preservam produto cup, obtemos:

$$\begin{aligned} \bar{f}^*(\Lambda) &= \bar{f}^*(\alpha \cup \beta) = \bar{f}^*(\alpha) \cup \bar{f}^*(\beta) = (m\alpha + n\beta) \cup (p\alpha + q\beta) = \\ &= mp(\alpha \cup \alpha) + mq(\alpha \cup \beta) + np(\beta \cup \alpha) + nq(\beta \cup \beta) = \\ &= mq(\alpha \cup \beta) - np(\alpha \cup \beta) = (mq - np)(\alpha \cup \beta) = (mq - np)\Lambda. \end{aligned}$$

Como

$$L(\bar{f}) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \text{Tr}(\bar{f}^* | H_k(X, \mathbb{Q})),$$

temos que

$$L(\bar{f}) = 1 - (m + q) + mq - np$$

que pode ser interpretado como sendo

$$\det \begin{pmatrix} m-1 & p \\ n & q-1 \end{pmatrix}$$

Vamos supor que  $L(\bar{f}) = 0$ . Então, consideremos a aplicação  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por

$$g(a, b) = (ma + pb + \epsilon, na + qb)$$

onde  $\epsilon$  é um número irracional fixado.

Temos que  $g$  induz uma aplicação  $\bar{g} : T \rightarrow T$  e que  $\bar{g}$  é homotópica a  $\bar{f}$ . De fato, considere o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{p} & T \\ \downarrow g & & \downarrow \bar{g} \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{p} & T \end{array}$$

onde  $\bar{g} : T \rightarrow T$  é definida por  $\bar{g}([a, b]) = [(ma + pb + \epsilon, na + qb)]$ . Sejam  $[(a_1, b_1)], [(a_2, b_2)] \in T$  tais que  $[(a_1, b_1)] = [(a_2, b_2)]$ . Note que  $[(a_1, b_1)] = [(a_2, b_2)] \Leftrightarrow a_1 - a_2 \in \mathbb{Z}$  e  $b_1 - b_2 \in \mathbb{Z}$ . Temos:

$$\bar{g}([(a_1, b_1)]) = [(ma_1 + pb_1 + \epsilon, na_1 + qb_1)]$$

$$\bar{g}([(a_2, b_2)]) = [(ma_2 + pb_2 + \epsilon, na_2 + qb_2)]$$

e

$$ma_1 + pb_1 + \epsilon - ma_2 - pb_2 - \epsilon = m \cdot (a_1 - a_2) + p \cdot (b_1 - b_2) \in \mathbb{Z}$$

$$na_1 + qb_1 - na_2 - qb_2 = n \cdot (a_1 - a_2) + q \cdot (b_1 - b_2) \in \mathbb{Z}.$$

Logo,  $\bar{g}([(a_1, b_1)]) = \bar{g}([(a_2, b_2)])$ . Portanto,  $g$  induz uma aplicação  $\bar{g} : T \rightarrow T$ . Agora, considere  $F : \mathbb{R}^2 \times I \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por

$$F((a, b), t) = (ma + pb + t\epsilon, na + qb).$$

Temos que  $F$  é contínua,  $F((a, b), 0) = f(a, b) = (ma + pb, na + qb)$  e  $F((a, b), 1) = g(a, b)$ . Note que, assim como fizemos para  $g$ , podemos provar que  $F((a, b), t)$  induz uma aplicação de  $T$  em  $T$  para todo  $t \in I$ . Logo, existe  $\bar{F} : T \times I \rightarrow I$  induzida por  $F$  que é uma homotopia entre  $\bar{f}$  e  $\bar{g}$ .

Agora, vamos calcular o número de pontos fixos de  $\bar{g}$ . Para isto, basta resolver o sistema

$$ma + pb + \epsilon \equiv a \pmod{\mathbb{Z}}$$

$$na + qb \equiv b \pmod{\mathbb{Z}}$$

ou

$$(m-1)a + pb = k_1 - \epsilon, \text{ para algum } k_1 \in \mathbb{Z}$$

$$na + (q-1)b = k_2, \text{ para algum } k_2 \in \mathbb{Z}$$

Como  $L(f) = 0$ , temos que as linhas da matriz

$$\begin{pmatrix} m-1 & p \\ n & q-1 \end{pmatrix}$$

são proporcionais. Sem perda de generalidade, vamos assumir que existe  $r$  tal que

$$r \cdot (n, q-1) = (m-1, p).$$

Certamente  $r$  é um número racional. Logo

$$rna + r(q-1)b = rk_2$$

e

$$k_1 - \epsilon = rk_2,$$

o que é uma contradição, pois  $\epsilon$  é irracional. Portanto,  $\#\text{Fix}(\bar{g}) = 0$ .

**Segunda parte:** Dada  $f$  com  $L(f) \neq 0$ , construiremos  $\bar{g}$  homotópica a  $f$  com  $|L(f)|$  pontos fixos.

Considere a transformação linear  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por

$$g(a, b) = (ma + pb, na + qb).$$

Vamos calcular os pontos fixos da aplicação induzida  $\bar{g} : T \rightarrow T$ .

Seja o sistema

$$ma + pb \equiv a \pmod{\mathbb{Z}}$$

$$na + qb \equiv b \pmod{\mathbb{Z}}.$$

Assim,

$$(m-1)a + pb = k_1, \text{ para algum } k_1 \in \mathbb{Z}$$



$$na + (q - 1)b = k_2, \text{ para algum } k_2 \in \mathbb{Z}.$$

Seja  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a transformação linear dada pela matriz

$$\begin{pmatrix} m - 1 & p \\ n & q - 1 \end{pmatrix}.$$

Logo, uma solução para o sistema acima nada mais é do que um elemento de  $\varphi^{-1}(r, s)$ , onde  $(r, s) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ . Além disso, duas soluções  $(a_1, b_1)$  e  $(a_2, b_2)$  são equivalentes se, e somente se,  $(a_1, b_1) = (a_2, b_2) + (r, s)$ . Logo,

$$\varphi(a_1, b_1) - \varphi(a_2, b_2) \in \varphi(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}),$$

o que mostra que o número de soluções não equivalentes é no máximo a ordem do grupo quociente  $(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})/(\varphi(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}))$ .

Como

$$\det(\varphi) = \det \begin{pmatrix} m - 1 & p \\ n & q - 1 \end{pmatrix} = L(f) \neq 0$$

por hipótese, temos que  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é sobrejetora. Logo, o número de soluções não equivalentes é exatamente a ordem de  $(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})/(\varphi(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}))$ .

Por um teorema de álgebra, temos que este grupo tem ordem  $|\det(\varphi)| = |L(f)|$ . Logo,  $\bar{g}$  tem precisamente  $|L(f)|$  pontos fixos.

**Terceira parte:** Cada classe de Nielsen da função  $\bar{g}$  acima tem apenas um ponto fixo.

Seja  $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow T$  o recobrimento universal. Se  $x, y \in \text{Fix}(\bar{g})$  estão na mesma classe de Nielsen, então existe um caminho  $\gamma$  ligando  $x$  a  $y$  tal que

$$\gamma \simeq \bar{g} \cdot \gamma \quad \text{rel}\{0, 1\}.$$

Seja  $\tilde{\gamma}$  um levantamento de  $\gamma$  que tem ponto inicial  $\tilde{x}$ . Então,

$$g \cdot \tilde{\gamma} - g(\tilde{x}) + \tilde{x}$$

é um levantamento de  $\bar{g} \cdot \gamma$  com ponto inicial  $\tilde{x}$ . Logo, devemos ter

$$\tilde{\gamma}(1) = g(\tilde{\gamma}(1)) - g(\tilde{x}) + \tilde{x}$$

ou

$$(g - id)(\tilde{\gamma}(1) - \tilde{x}) = 0.$$

Isto contradiz o fato de  $(g - id)$  ser injetora, a menos que  $\tilde{\gamma}(1) = \tilde{x}$ , o que implica  $x = y$ .

**Quarta parte:** Os pontos fixos de  $\bar{g}$  têm o mesmo índice.

Sejam  $x, y \in \text{Fix}(\bar{g})$  e  $h_{x,y} : T \rightarrow T$  o homeomorfismo que leva  $x$  em  $y$ , dado pela equação

$$h_{x,y}(a) = yx^{-1}a.$$

Consideremos uma vizinhança aberta  $U$  de  $x$  tal que  $U \cap \text{Fix}(\bar{g}) = \{x\}$  e  $h_{x,y}(U) \cap \text{Fix}(\bar{g}) = \{y\}$ . Então, temos

$$i(\{x\}) = I(T, \bar{g}, U) = I(T, \bar{g}h_{x,y}^{-1} \circ h_{x,y}, U)$$

$$i(\{y\}) = I(T, \bar{g}, h_{x,y}(U)).$$

Pelo axioma da comutatividade, temos:

$$I(T, \bar{g}h_{x,y}^{-1}h_{x,y}, U) = I(T, h_{x,y}\bar{g}h_{x,y}^{-1}, h_{x,y}(U)).$$

Mas

$$h_{x,y}\bar{g}h_{x,y}^{-1}(a) = yx^{-1}\bar{g}(xy^{-1}a) = yx^{-1}\bar{g}(x)\bar{g}(y)^{-1}\bar{g}(a) = \bar{g}(a).$$

Logo,  $i(\{x\}) = i(\{y\})$ .

Portanto,  $|L(f)| = N(f) = \text{MF}[f]. \square$

**Corolário 2.4.8.** *Seja  $M = G/K \in \mathcal{H}_0$ . Para qualquer autoaplicação  $f : M \rightarrow M$ , existe uma aplicação  $f' \sim f$  tal que  $\#\text{Fix } f' = N(f)$ . Mais ainda, se  $\varphi' : G \rightarrow M$  é a  $K$ -aplicação correspondente a  $f'$ , então:*

(i) toda classe de raízes  $K$ -Nielsen de  $\varphi'$  é uma única  $K$ -órbita  $\mathcal{O}_g$  para algum  $gK \in \text{Fix } f'$ ;

(ii) toda classe de raiz ordinária de  $\varphi'$  está em uma única  $K$ -órbita.

**Dem.:** A primeira afirmação é apenas um re-enunciado da proposição 2.4.7. Visto que toda classe de ponto fixo de  $f'$  consiste de um único ponto, a proposição 2.3.2 afirma que uma classe  $K$ -Nielsen de  $\varphi'$  contém apenas uma  $K$ -órbita de raízes. A afirmação (ii) segue do fato que equivalência de raiz de Nielsen implica equivalência de raiz  $K$ -Nielsen.  $\square$

## 2.5 Recíproca do teorema do ponto fixo de Lefschetz

Nessa seção, mostramos que a recíproca do teorema do ponto fixo de Lefschetz vale para  $M = G/K \in \mathcal{H}_0$ . No caso quando  $K$  é finito, deduzimos uma fórmula simples relacionando o número de Lefschetz  $L(f)$  e o grau topológico de  $\varphi$ .

**Teorema 2.5.1.** *Seja  $M = G/K \in \mathcal{H}_0$ . Para qualquer autoaplicação  $f : M \rightarrow M$ , se  $\gamma, \gamma' \in \mathcal{N}(f)$ , então  $\text{ind}(f, \gamma) = 0$  se, e somente se,  $\text{ind}(f, \gamma') = 0$ , e  $L(f) = 0$  implica  $N(f) = 0$ . Mais ainda, se  $\varphi : G \rightarrow M$  é a  $K$ -aplicação correspondente, então*

$$L(f) = \frac{1}{m} \sum_{\mathcal{O}_g \in \tilde{\Gamma}_\varphi^K} \omega_K(\varphi, \mathcal{O}_g).$$

**Dem.:** Pelo corolário 2.4.8, podemos assumir sem perda de generalidade que  $\#\text{Fix } f = N(f)$ . Seja  $\mathcal{O}_g \in \tilde{\Gamma}_\varphi^K$  uma classe de raízes  $K$ -Nielsen de  $\varphi$ . Note que  $\mathcal{O}_g$  consiste de uma união disjunta de classes de raízes (ordinárias) de  $\varphi$ , e cada uma dessas é uma união disjunta  $\sqcup \mathcal{O}_g^i$ .

Considere o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc}
G & \xrightarrow{p} & M \\
\downarrow & & \downarrow \\
(G, G - K) & \xrightarrow{p} & (M, M - eK) \\
\downarrow \theta_g & & \downarrow \bar{\theta}_g \\
(G, G - \mathcal{O}_g) & \xrightarrow{p} & (M, M - gK) \\
\uparrow & & \uparrow \\
(V, V - \mathcal{O}_g) & \xrightarrow{p} & (\bar{V}, \bar{V} - gK) \\
\downarrow (1, \varphi) & & \downarrow (f, 1) \\
G \times (M, M - eK) & \xrightarrow{\Phi} M \xleftarrow{pr_1} (M \times M, M \times M - \Delta)
\end{array}$$

Visto que  $\omega_K(\varphi, \mathcal{O}_g^i) = \omega_K(\varphi, \mathcal{O}_g^j)$  para  $1 \leq i, j \leq m$ , pelo lema 2.3.6, temos:

$$\text{ind}(f, gK) = \frac{1}{m} \omega_K(\varphi, \mathcal{O}_g). \quad (2.1)$$

Se  $\text{ind}(f, gK) = 0$ , então a classe de ponto fixo  $gK$  é não essencial e portanto pode ser removida localmente via uma homotopia de  $f$ . Isso implica que  $\mathcal{O}_g$  pode ser removida equivariantemente via uma  $K$ -homotopia de  $\varphi$ . Visto que  $\mathcal{O}_g$  consiste de classes de raízes ordinárias de  $\varphi$ , concluímos pelo teorema 2.2.2 que todas as classes de raízes (ordinárias) de  $\varphi$  devem ser não essenciais. Logo,  $\omega(\varphi, \beta) = 0$  para todas as classes de raízes de  $\varphi$ . Seja  $g'K \in \text{Fix} f$  com  $g'K \neq gK$ . Pelo corolário 2.4.8, podemos encontrar uma classe de raízes ordinária  $\beta$  de  $\varphi$  contida na  $K$ -órbita  $\mathcal{O}_{g'}$ . Se  $\text{ind}(f, g'K) \neq 0$ , então, pela comutatividade do diagrama acima e o fato que  $p_*$  é não nulo, a linha da esquerda do diagrama junto com  $\Phi$  induz um homomorfismo não nulo no  $n$ -ésimo nível de homologia (segue o raciocínio da demonstração do lema 2.3.6). Em particular, o índice de raiz  $\omega(\varphi, \mathcal{O}_{g'}$ ) seria não nulo (segundo o raciocínio da demonstração da proposição 2.3.7). Segue da propriedade

aditiva do índice de raiz e do teorema 2.2.2 que  $\omega(\varphi, \beta) \neq 0$  para qualquer  $\beta \in \mathcal{O}_{g'}$ . Isso contradiz o fato de que todas as classes de raízes de  $\varphi$  são não essenciais. Logo,  $\text{ind}(f, g'K) = 0$ .

Escolha um gerador  $\mu \in H_n(G)$  tal que  $p_*(\mu) \neq 0$  e seja  $\alpha \in \mathcal{O}_g$  uma classe de raízes de  $\varphi$ . Note que, pela propriedade aditiva do índice de raiz,

$$\omega(\varphi, \alpha)(\mu) = \omega(\varphi, \mathcal{O}_g^1) \cdot \#C(\alpha)$$

e

$$\omega(\varphi, \beta)(\mu) = \omega(\varphi, \mathcal{O}_{g'}^1) \cdot \#C(\beta),$$

onde  $\#C(\gamma)$  denota o número de componentes conexas de  $\gamma$ . Visto que, pelo teorema 2.2.2,  $\omega(\varphi, \alpha)(\mu) = \omega(\varphi, \beta)(\mu)$ , segue que

$$\omega(\varphi, \mathcal{O}_g^1)(\mu) \cdot \omega(\varphi, \mathcal{O}_{g'}^1)(\mu) > 0.$$

A partir dessa informação, vamos mostrar que  $\text{ind}(f, gK) \cdot \text{ind}(f, g'K) > 0$ . Daí, concluímos que as classes de ponto fixo de Nielsen de  $f$  ou são todas não essenciais ou são todas essenciais com índice de ponto fixo de mesmo sinal. Observe o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & H_n(G) & & \\
 & & \downarrow j_* & & \\
 & & H_n(G, G - K_1) & & \\
 \theta_{g_*} \swarrow & & & & \searrow \theta_{g'_*} \\
 H_n(G, G - \mathcal{O}_g^1) & & & & H_n(G, G - \mathcal{O}_{g'}^1) \\
 \uparrow i_* & & & & \uparrow i'_* \\
 H_n(V_1, V_1 - \mathcal{O}_g^1) & & & & H_n(V'_1, V'_1 - \mathcal{O}_{g'}^1) \\
 \searrow \varphi_* & & & & \swarrow \varphi_* \\
 & & H_n(M, M - eK) & & 
 \end{array}$$

Temos:

$$\omega(\varphi, \mathcal{O}_g^1)(\mu) = (\varphi_* \circ i_*^{-1} \circ \theta_{g_*} \circ j_*)(\mu)$$

$$\omega(\varphi, \mathcal{O}_{g'}^1)(\mu) = (\varphi_* \circ i_*'^{-1} \circ \theta_{g_*'} \circ j_*)(\mu).$$

Observe também o diagrama abaixo:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & H_0(K_1) & & \\
 & & \uparrow D & & \\
 & & H^k(K_1) & & \\
 & & \downarrow A & & \\
 & & H_n(G, G - K_1) & & \\
 \theta_{g_*} \swarrow & & & & \searrow \theta_{g_*'} \\
 H_n(G, G - \mathcal{O}_g^1) & & & & H_n(G, G - \mathcal{O}_{g'}^1) \\
 \uparrow i_* & & & & \uparrow i_*' \\
 H_n(V_1, V_1 - \mathcal{O}_g^1) & & & & H_n(V_1', V_1' - \mathcal{O}_{g'}^1) \\
 \searrow \varphi_* & & & & \swarrow \varphi_* \\
 & & H_n(M, M - eK) & & \\
 & & \uparrow j_* & & \\
 & & H_n(M) & & 
 \end{array}$$

Temos:

$$(\varphi_* \circ i_*^{-1} \circ \theta_{g_*} \circ A \circ D^{-1})(\mu_1) = \omega_K(\varphi, \mathcal{O}_g^1) \cdot j_*(\mu_M)$$

$$(\varphi_* \circ i_*'^{-1} \circ \theta_{g_*'} \circ A \circ D^{-1})(\mu_1) = \omega_K(\varphi, \mathcal{O}_{g'}^1) \cdot j_*(\mu_M).$$

Suponha que  $\omega_K(\varphi, \mathcal{O}_g^1) \cdot \omega_K(\varphi, \mathcal{O}_{g'}^1) \leq 0$  e seja  $\mu_{G_1}$  o gerador de  $H_n(G, G - K_1)$ . Daí, obtemos:

$$\begin{aligned}
 \omega_K(\varphi, \mathcal{O}_g^1) \cdot \omega_K(\varphi, \mathcal{O}_{g'}^1) \leq 0 &\Rightarrow (i_*^{-1} \circ \theta_{g_*})(\mu_{G_1}) \cdot (i_*'^{-1} \circ \theta_{g_*'})(\mu_{G_1}) \leq 0 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow (i_*^{-1} \circ \theta_{g_*})(j_*(\mu)) \cdot (i_*'^{-1} \circ \theta_{g_*'})(j_*(\mu)) \leq 0 \Rightarrow \omega(\varphi, \mathcal{O}_g^1)(\mu) \cdot \omega(\varphi, \mathcal{O}_{g'}^1)(\mu) \leq 0.
 \end{aligned}$$

Logo,  $\omega_K(\varphi, \mathcal{O}_g^1) \cdot \omega_K(\varphi, \mathcal{O}_{g'}^1) > 0$ , o que implica, pelo lema 2.3.6,

$$\text{ind}(f, gK) \cdot \text{ind}(f, g'K) > 0.$$

Assim, as classes de ponto fixo de Nielsen de  $f$  ou são todas não essenciais ou são todas essenciais com índice de ponto fixo de mesmo sinal. Segue que  $L(f) = 0$  implica  $N(f) = 0$ , e de (2.1) que:

$$\frac{1}{m} \sum_{\mathcal{O}_g \in \hat{\Gamma}_\varphi^K} \omega_K(\varphi, \mathcal{O}_g) = \sum_{\mathcal{O}_g \in \hat{\Gamma}_\varphi^K} \frac{1}{m} \omega_K(\varphi, \mathcal{O}_g) = \sum_{gK \in \text{Fix} f} \text{ind}(f, gK) = L(f). \square$$

**Observação 2.5.2.** *Na demonstração do teorema 2.5.1, se o subgrupo  $K$  é conexo, então cada classe  $K$ -Nielsen de  $\varphi$  é uma classe de raízes ordinária. Segue que as classes de ponto fixo de Nielsen de  $f$  têm o mesmo índice de ponto fixo.*

O teorema a seguir é a recíproca do teorema do ponto fixo de Lefschetz para espaços homogêneos  $M \in \mathcal{H}_0$ .

**Teorema 2.5.3.** *(Recíproca do Teorema de Lefschetz) Seja  $M \in \mathcal{H}_0$ . Para qualquer  $f : M \rightarrow M$ , se  $L(f) = 0$ , então  $f$  é homotópica a uma aplicação livre de pontos fixos.*

**Dem.:** Isso segue diretamente do teorema 2.5.1 e do corolário 2.4.8.  $\square$

Em contraste à desigualdade  $N(f) \geq |L(f)|$  para autoaplicações de variedades solúveis compactas (espaços homogêneos de grupos de Lie solúveis) [Mc], obtemos, como uma consequência do teorema 2.5.1, o seguinte:

**Corolário 2.5.4.** *Suponha que  $M \in \mathcal{H}_0$ . Para qualquer autoaplicação  $f : M \rightarrow M$ ,  $N(f) \leq |L(f)|$ .*

**Dem.:** Sem perda de generalidade, podemos assumir que  $N(f) = \#\text{Fix}f$ . Visto que os índices das classes de ponto fixo de  $f$  têm o mesmo sinal, temos:

$$|L(f)| = \sum_{gK \in \text{Fix}f} |\text{ind}(f, gK)| \geq \#\text{Fix}f = N(f). \square$$

**Observação 2.5.5.** Pelo corolário 2.5.4, toda autoaplicação  $f$  é homotópica a uma aplicação  $f'$  com  $\#\text{Fix}f' = N(f) \leq |L(f)|$ . De fato, a desigualdade pode ser estrita. Por exemplo, tome uma autoaplicação  $f$  do espaço projetivo real  $\mathbb{R}P^{2n-1} = SO(2n)/O(2n-1)$  de tal forma que

$$f_* : H_{2n-1}(\mathbb{R}P^{2n-1}; \mathbb{Q}) \rightarrow H_{2n-1}(\mathbb{R}P^{2n-1}; \mathbb{Q})$$

é multiplicação por  $m \in \mathbb{Z} - \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ . Então,  $L(f) = 1 - m$ , mas  $N(f) \leq 2$ .

Em [D], H. Duan obteve a interessante fórmula a seguir

$$L(f) = \text{deg } \mu_f$$

para autoaplicações  $f : G \rightarrow G$  de um grupo de Lie compacto e conexo  $G$ , onde  $\mu_f(g) = g^{-1}f(g)$  e  $\text{deg}$  denota o grau topológico. Essa fórmula pode ser generalizada como segue no caso em que  $K$  é finito.

Seja  $\mathcal{O}_g$  uma órbita de raízes isolada de  $\varphi$ . Então,  $\mathcal{O}_g$  consiste de  $|K|$  pontos. Temos:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & H_n(G) \\ & & & & & & \cong \downarrow j_* \\ H_0(e) & \xleftarrow[\cong]{D} & H^k(e) & \xrightarrow[\cong]{A} & H_n(G, G - e) & \xrightarrow[\cong]{\theta_{g*}} & H_n(G, G - g) \\ & & & & & & \cong \uparrow i_* \\ & & & & H_n(M, M - eK) & \xleftarrow[\cong]{\varphi_*} & H_n(V_g, V_g - g) \end{array}$$

Assim, utilizando as definições e o Teorema 2.2.2, segue que  $\omega_K(\varphi, \mathcal{O}_g) = |K| \cdot \omega_K(\varphi, g) = |K| \cdot \tilde{\omega}(\varphi, g)$ , onde  $\tilde{\omega}(\varphi, g) = \omega(\varphi, g)(\mu_G)$  é o índice de raiz



ordinário (numérico) de  $g$ . Como um corolário do teorema 2.5.1, obtemos o seguinte:

**Corolário 2.5.6.** *Suponha que  $M = G/K$ , onde  $G$  é um grupo de Lie compacto e conexo e  $K$  é um subgrupo finito de ordem  $|K|$ . Então, para qualquer autoaplicação  $f : M \rightarrow M$ ,*

$$|K| \cdot L(f) = \deg \varphi,$$

onde  $\varphi : G \rightarrow M$  é a  $K$ -aplicação correspondente e  $\deg \varphi$  denota o grau topológico de  $\varphi$ .

**Dem.:** O exemplo 2.4.6 mostra que  $M \in \mathcal{H}_0$ . Pelo corolário 5 de [B1],

$$\sum_g \tilde{\omega}(\varphi, g) = \deg \varphi,$$

mas

$$\sum_g \tilde{\omega}(\varphi, g) = \sum_{\mathcal{O}_g \in \Gamma_\varphi^K} |K| \cdot \tilde{\omega}(\varphi, g) = \sum_{\mathcal{O}_g \in \Gamma_\varphi^K} \omega_K(\varphi, \mathcal{O}_g) = |K| \cdot L(f),$$

em que a última igualdade segue do teorema 2.5.1.  $\square$

## 2.6 Classes de Reidemeister equivariantes

A seguir, mostramos que  $N(f) = R(f)$  quando  $L(f) \neq 0$ . Visto que o número de Reidemeister é o número de classes de ponto fixo (incluindo as vazias) no sentido de levantamentos para o recobrimento universal, precisamos desenvolver os conceitos de classes de raízes e depois de classes de órbitas de raízes equivariantes via a visão por espaços de recobrimento. Primeiro vamos revisar a situação não equivariante.

Sejam  $\xi : X \rightarrow Y$  uma aplicação entre variedades compactas e conexas e  $a \in Y$ . Denote por  $\eta_X : \tilde{X} \rightarrow X$  e  $\eta_Y : \tilde{Y} \rightarrow Y$  as aplicações de recobrimento

universal de  $X$  e  $Y$ , respectivamente. Escolha pontos base  $x_0 \in X$ ,  $\tilde{x}_0 \in \eta_X^{-1}(x_0)$ ,  $y_0 = \xi(x_0)$ ,  $\tilde{y}_0 \in \eta_Y^{-1}(y_0)$ . Seja  $\tilde{\xi}$  o levantamento de  $\xi$  tal que  $\tilde{\xi}(\tilde{x}_0) = \tilde{y}_0$ . Denote por  $\text{Cov}(\eta_X)$  e  $\text{Cov}(\eta_Y)$  os grupos de transformações de recobrimento de  $\eta_X$  e  $\eta_Y$ , isto é,  $\text{Cov}(\eta_X) = \{\alpha : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X} | \eta_X \circ \alpha = \eta_X\}$  e  $\text{Cov}(\eta_Y) = \{\beta : \tilde{Y} \rightarrow \tilde{Y} | \eta_Y \circ \beta = \eta_Y\}$ . Vamos identificá-los com seus respectivos grupos fundamentais  $\pi_1(X)$  e  $\pi_1(Y)$ . Para qualquer levantamento  $\tilde{\xi}'$  de  $\xi$ ,  $\tilde{\xi}' = \beta\tilde{\xi}$  para algum  $\beta \in \text{Cov}(\eta_Y)$  ([J2,I.1.2.iv]). Para qualquer  $\alpha \in \text{Cov}(\eta_X)$ , existe um único  $\Xi(\alpha) \in \text{Cov}(\eta_Y)$  tal que  $\tilde{\xi}'\alpha = \Xi(\alpha)\tilde{\xi}$  ([J2,II.1.1]). Assim,  $\Xi : \pi_1(X) \rightarrow \pi_1(Y)$  é um homomorfismo de grupos e  $\pi_1(X)$  age sobre  $\pi_1(Y)$  via

$$\sigma \cdot \beta = \beta\Xi(\sigma)^{-1} \quad (2.2)$$

onde  $\sigma \in \pi_1(X)$ ,  $\beta \in \pi_1(Y)$ . Portanto, essa ação define uma relação de equivalência sobre o conjunto dos levantamentos de  $\xi$  como segue. Dois levantamentos  $\beta_1\tilde{\xi}$  e  $\beta_2\tilde{\xi}$  são equivalentes se, e somente se,  $\beta_2 = \beta_1\Xi(\sigma)^{-1}$  para algum  $\sigma \in \text{Cov}(\eta_X)$ . Em outras palavras, eles são equivalentes se, e somente se,  $\langle \beta_1 \rangle = \langle \beta_2 \rangle$ , onde  $\langle \beta \rangle$  é a órbita de  $\beta$  sob a ação de 2.2. Sejam  $[\beta\tilde{\xi}]$  a classe de equivalência do levantamento  $\beta\tilde{\xi}$  e  $\mathcal{R}(\beta\tilde{\xi}) = \{\tilde{x} \in \tilde{X} | \beta\tilde{\xi}(\tilde{x}) = \tilde{a}\}$ . O conjunto de classes de raízes de Reidemeister de  $\xi$  é  $\Lambda_\varphi = \{\eta_X\mathcal{R}(\beta\tilde{\xi}) | \beta \in \text{Cov}(\eta_Y)\}$ .

**Proposição 2.6.1.**  $\eta_X\mathcal{R}(\beta\tilde{\xi}) = \eta_X\mathcal{R}(\beta'\tilde{\xi})$  se, e somente se,  $[\beta\tilde{\xi}] = [\beta'\tilde{\xi}]$ .

**Dem.:** Suponha  $[\beta\tilde{\xi}] = [\beta'\tilde{\xi}]$ . Então,  $\beta' = \beta\Xi(\sigma)^{-1}$  para algum  $\sigma \in \text{Cov}(\eta_X)$ . Sejam  $x \in \eta_X\mathcal{R}(\beta'\tilde{\xi})$  e  $\tilde{x} \in \mathcal{R}(\beta'\tilde{\xi})$  tal que  $\eta_X(\tilde{x}) = x$ . Então,  $\beta'\tilde{\xi}(\tilde{x}) = \tilde{a} = \beta\Xi(\sigma)^{-1}\tilde{\xi}(\tilde{x}) = \beta\tilde{\xi}(\sigma^{-1}\tilde{x})$ . Isso implica  $\sigma^{-1}\tilde{x} \in \mathcal{R}(\beta\tilde{\xi})$ . Como  $\sigma^{-1} \in \text{Cov}(\eta_X)$ , segue que  $\eta_X(\sigma^{-1}\tilde{x}) = (\eta_X \circ \sigma^{-1})(\tilde{x}) = \eta_X(\tilde{x}) = x$ . Logo,  $x \in \eta_X\mathcal{R}(\beta\tilde{\xi})$ . Assim,  $\eta_X\mathcal{R}(\beta'\tilde{\xi}) \subseteq \eta_X\mathcal{R}(\beta\tilde{\xi})$ .

Agora, note que  $\beta = \beta'\Xi(\sigma)$  e sejam  $y \in \eta_X\mathcal{R}(\beta\tilde{\xi})$  e  $\tilde{y} \in \mathcal{R}(\beta\tilde{\xi})$  tal que  $\eta_Y(\tilde{y}) = y$ . Então,  $\beta\tilde{\xi}(\tilde{y}) = \tilde{a} = \beta'\Xi(\sigma)\tilde{\xi}(\tilde{y}) = \beta'\tilde{\xi}(\sigma\tilde{y})$ . Isso implica  $\sigma\tilde{y} \in \mathcal{R}(\beta'\tilde{\xi})$ . Como  $\sigma \in \text{Cov}(\eta_X)$ , segue que  $\eta_X(\sigma\tilde{y}) = (\eta_X \circ \sigma)(\tilde{y}) = \eta_X(\tilde{y}) = y$ . Logo,  $y \in \eta_X\mathcal{R}(\beta'\tilde{\xi})$ . Assim,  $\eta_X\mathcal{R}(\beta\tilde{\xi}) \subseteq \eta_X\mathcal{R}(\beta'\tilde{\xi})$ .

Portanto,  $\eta_X \mathcal{R}(\beta\tilde{\xi}) = \eta_X \mathcal{R}(\beta'\tilde{\xi})$ .

Suponha agora que  $\eta_X \mathcal{R}(\beta\tilde{\xi}) = \eta_X \mathcal{R}(\beta'\tilde{\xi})$ . Seja  $\tilde{x} \in \mathcal{R}(\beta\tilde{\xi})$  tal que  $\eta_X(\tilde{x}) = x \in \eta_X \mathcal{R}(\beta\tilde{\xi}) = \eta_X \mathcal{R}(\beta'\tilde{\xi})$ . Então, existe  $\tilde{x}' \in \mathcal{R}(\beta'\tilde{\xi})$  tal que  $\eta_X(\tilde{x}') = x$ . Seja  $\sigma \in \text{Cov}(\eta_X)$  tal que  $\sigma(\tilde{x}) = \tilde{x}'$ . Então:

$$\beta\tilde{\xi}(\tilde{x}) = \tilde{a} = \beta'\tilde{\xi}(\tilde{x}') = \beta'\tilde{\xi}(\sigma\tilde{x}) = \beta'\Xi(\sigma)\tilde{\xi}(\tilde{x}).$$

Logo,  $\beta = \beta'\Xi(\sigma)$ , ou seja,  $\beta' = \beta\Xi(\sigma)^{-1}$ , com  $\sigma \in \text{Cov}(\eta_X)$ . Portanto,  $[\beta\tilde{\xi}] = [\beta'\tilde{\xi}]$ .  $\square$

Agora temos uma correspondência um a um entre  $\{[\beta\tilde{\xi}]\}$ ,  $\{\langle\beta\rangle\}$  e  $\{\eta_X \mathcal{R}(\beta\tilde{\xi})\}$  e, portanto,  $R(\xi, a) = \#\{\langle\beta\rangle\} = \#\text{Coker}\Xi$ .

Retornamos agora à nossa situação de uma aplicação  $K$ -equivariante  $\varphi : G \rightarrow M$ . Seja  $\tilde{\varphi} : \tilde{G} \rightarrow \tilde{M}$  um levantamento de  $\varphi$ . Definimos as classes de órbitas de raízes  $K$ -Reidemeister como os conjuntos  $K$ -invariantes  $K\eta_G \mathcal{R}(\beta\tilde{\varphi})$ ,  $\beta \in \pi_1(M)$ . Para incorporar as  $K$ -ações sobre  $G$  e sobre  $M$ , consideramos os seguintes grupos de extensão cobrindo as  $K$ -ações. Sejam:

$$\Gamma_G = \{\tilde{\gamma} \in \text{Homeo}(\tilde{G}) \mid \eta_G \tilde{\gamma} = \gamma \eta_G, \text{ para algum } \gamma \in K\};$$

$$\Gamma_M = \{\tilde{\gamma} \in \text{Homeo}(\tilde{M}) \mid \eta_M \tilde{\gamma} = \gamma \eta_M, \text{ para algum } \gamma \in K\}.$$

Assim, temos as seguintes sequências exatas de grupos:

$$1 \longrightarrow \pi_1(G) \equiv \text{Cov}(\eta_G) \xrightarrow{i_G} \Gamma_G \xrightarrow{j_G} K \longrightarrow 1$$

e

$$1 \longrightarrow \pi_1(M) \equiv \text{Cov}(\eta_M) \xrightarrow{i_M} \Gamma_M \xrightarrow{j_M} K \longrightarrow 1,$$

onde  $i_G(\alpha) = \alpha$  e  $j_G(\tilde{\gamma}) = \gamma$ , onde  $\eta_G \tilde{\gamma} = \gamma \eta_G$ ; analogamente definimos  $i_M$  e  $j_M$ . Temos:

$$\alpha \in \text{Cov}(\eta_G) \Rightarrow \eta_G \alpha = \eta_G = e \eta_G \Rightarrow j_G(i_G(\alpha)) = j_G(\alpha) = e \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Im}(i_G) \subseteq \text{Ker}(j_G),$$

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma} \in \text{Ker}(j_G) &\Rightarrow j_G(\tilde{\gamma}) = e \Rightarrow \eta_G \tilde{\gamma} = e \eta_G \Rightarrow \tilde{\gamma} \in \text{Cov}(\eta_G) = \text{Im}(i_G) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \text{Ker}(j_G) \subseteq \text{Im}(i_G). \end{aligned}$$

Logo,  $\text{Ker}(j_G) = \text{Im}(i_G)$  e a primeira seqüência é exata. Analogamente,  $\text{Ker}(j_M) = \text{Im}(i_M)$  e a segunda seqüência é exata.

Por simplicidade, supomos  $\varphi(e) = eK$ , de modo que  $f(eK) = eK$ . Escolha pontos base  $\tilde{e} \in \eta_G^{-1}(e)$ ,  $\tilde{e}K \in \eta_M^{-1}(eK)$  e levantamentos  $\tilde{\varphi} : \tilde{G} \rightarrow \tilde{M}$ ,  $\tilde{p} : \tilde{G} \rightarrow \tilde{M}$ ,  $\tilde{f} : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$  e  $\tilde{\Phi} : \tilde{G} \times \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$  de  $\varphi$ ,  $p$ ,  $f$  e  $\Phi$ , respectivamente, de tal forma que  $\tilde{\varphi}(\tilde{e}) = \tilde{e}K$ ,  $\tilde{p}(\tilde{e}) = \tilde{e}K$ ,  $\tilde{f}(\tilde{e}K) = \tilde{e}K$  e  $\tilde{\Phi}(\tilde{e}, \tilde{e}K) = \tilde{e}K$ . Considere os seguintes diagramas:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\bar{\sigma}_G} & G \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ M & \xrightarrow{\bar{\sigma}_M} & M \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\bar{\sigma}_G} & G \\ p \downarrow & & \downarrow p \\ M & \xrightarrow{1_M} & M \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{1_M} & M \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ M & \xrightarrow{1_M} & M \end{array}$$

onde  $\bar{\sigma}_G : G \rightarrow G$  é dada por  $\bar{\sigma}_G(g) = \bar{\sigma} \circ g = g\bar{\sigma}^{-1}$ ,  $\bar{\sigma}_M : M \rightarrow M$  é dada por  $\bar{\sigma}_M(gK) = (\bar{\sigma}g)K$  e  $\bar{\sigma} \in K$ . Note que eles são comutativos:

$$\begin{aligned} (\varphi \circ \bar{\sigma}_G)(g) &= \varphi(\bar{\sigma}_G(g)) = \varphi(\bar{\sigma} \circ g) = \varphi(g\bar{\sigma}^{-1}) = (g\bar{\sigma}^{-1})^{-1} f(g\bar{\sigma}^{-1}K) = \\ &= \bar{\sigma}g^{-1} f(gK) = \bar{\sigma}\varphi(g) = (\bar{\sigma}_M \circ \varphi)(g) \\ (p \circ \bar{\sigma}_G)(g) &= p(g\bar{\sigma}^{-1}) = g\bar{\sigma}^{-1}K = gK = p(g) = (1_M \circ p)(g) \end{aligned}$$

Daí, por [J2,III.1.5], dados levantamentos  $\sigma$  de  $\bar{\sigma}_G$ ,  $\tilde{\varphi}$  de  $\varphi$  e  $\tilde{p}$  de  $p$ , existem únicos levantamentos  $\Psi(\sigma)$  de  $\bar{\sigma}_M$  e  $\epsilon(\sigma)$  de  $1_M$ , ou seja,  $\Psi(\sigma) \in \Gamma_M$  e  $\epsilon(\sigma) \in \text{Cov}(\eta_M)$ , tais que os diagramas a seguir comutam

$$\begin{array}{ccc} \tilde{G} & \xrightarrow{\sigma} & \tilde{G} \\ \tilde{\varphi} \downarrow & & \downarrow \tilde{\varphi} \\ \tilde{M} & \xrightarrow{\Psi(\sigma)} & \tilde{M} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \tilde{G} & \xrightarrow{\sigma} & \tilde{G} \\ \tilde{p} \downarrow & & \downarrow \tilde{p} \\ \tilde{M} & \xrightarrow{\epsilon(\sigma)} & \tilde{M} \end{array}$$

ou seja,  $\tilde{\varphi}\sigma = \Psi(\sigma)\tilde{\varphi}$  e  $\tilde{p}\sigma = \epsilon(\sigma)\tilde{p}$ . Agora, novamente por [J2,III.1.5], dados levantamentos  $\tilde{f}$  de  $f$  e  $\epsilon(\sigma)$  de  $1_M$ , existe um único levantamento  $\Omega(\epsilon(\sigma))$  de  $1_M$ , ou seja,  $\Omega(\epsilon(\sigma)) \in \text{Cov}(\eta_M)$ , tal que o diagrama a seguir comuta

$$\begin{array}{ccc} \tilde{M} & \xrightarrow{\epsilon(\sigma)} & \tilde{M} \\ \tilde{f} \downarrow & & \downarrow \tilde{f} \\ \tilde{M} & \xrightarrow{\Omega(\epsilon(\sigma))} & \tilde{M} \end{array}$$

ou seja,  $\tilde{f}\epsilon(\sigma) = \Omega(\epsilon(\sigma))\tilde{f}$ . Temos que  $\Psi : \Gamma_G \rightarrow \Gamma_M$ ,  $\epsilon : \Gamma_G \rightarrow \pi_1(M)$  e  $\Omega : \pi_1(M) \rightarrow \pi_1(M)$  são homomorfismos de grupos. Visto que  $\gamma * eK = eK$  para todo  $\gamma \in K$ , existe um único elemento  $\tau(\gamma) \in \Gamma_M$  tal que  $\tau(\gamma)(\tilde{e}\tilde{K}) = \tilde{e}\tilde{K}$  e  $\tau(\gamma)$  cobre  $\gamma$ . Em particular, se  $\gamma = e$ , então  $\tau(\gamma) = 1_{\tilde{M}}$ . Assim,  $\Gamma_G$  age sobre  $\pi_1(M)$  via

$$\sigma \cdot \beta = \tau(\bar{\sigma})\beta\Psi(\sigma)^{-1}, \quad (2.3)$$

onde  $\sigma \in \Gamma_G$ ,  $\bar{\sigma} \in K$  é coberto por  $\sigma$  e  $\beta \in \pi_1(M)$ . Note que  $\tau(\bar{\sigma})$  cobre  $\bar{\sigma}$  e que  $\sigma$  cobre  $\bar{\sigma}$ , daí, como  $\Psi(\sigma)$  é único no sentido que  $\tilde{\varphi}\sigma = \Psi(\sigma)\tilde{\varphi}$ ,  $\Psi(\sigma)$  cobre  $\bar{\sigma}$ . Logo:

$$\eta_M\tau(\bar{\sigma})\beta\Psi(\sigma)^{-1} = \bar{\sigma}\eta_M\beta\Psi(\sigma)^{-1} = \bar{\sigma}\eta_M\Psi(\sigma)^{-1} = \bar{\sigma}\bar{\sigma}^{-1}\eta_M = \eta_M$$

e a ação 2.3 é de fato de  $\Gamma_G$  sobre  $\pi_1(M)$ . Quando  $\sigma \in \pi_1(G)$ , a ação 2.3 se reduz à ação 2.2 de  $\pi_1(G)$  sobre  $\pi_1(M)$  (pois nesse caso  $\bar{\sigma} = e \in K$ ). Denote por  $\langle \beta \rangle_K$  a órbita de  $\beta$  sob a ação dada por 2.3. Note que

$$\begin{aligned} \langle \beta_1 \rangle_K = \langle \beta_2 \rangle_K &\Leftrightarrow \beta_2 = \tau(\bar{\sigma})\beta_1\Psi(\sigma)^{-1}, \text{ para algum } \sigma \in \Gamma(G) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \beta_2\tilde{\varphi} = \tau(\bar{\sigma})\beta_1\Psi(\sigma)^{-1}\tilde{\varphi}. \end{aligned}$$

Segue, como na proposição 2.6.1, que  $K\eta_G\mathcal{R}(\beta_1\tilde{\varphi}) = K\eta_G\mathcal{R}(\beta_2\tilde{\varphi})$  se, e somente se,  $\langle \beta_1 \rangle_K = \langle \beta_2 \rangle_K$ .

Sejam  $\Lambda_\varphi^K = \{K\eta_G\mathcal{R}(\beta\tilde{\varphi})\}$  e  $\mathcal{R}(f) = \{\eta_M\text{Fix}(\beta\tilde{f})\}$  as classes de órbitas de raízes  $K$ -Reidemeister de  $\varphi$  e as classes (de ponto fixo) de Reidemeister de  $f$ . Lembremos que existe uma bijeção entre  $\tilde{\Gamma}_\varphi^K$  e  $\mathcal{N}(f)$ . Sabemos também que existe uma injeção de  $\mathcal{N}(f)$  em  $\mathcal{R}(f)$ . Do lema 2.6.2 abaixo, temos que existe uma bijeção entre  $\Lambda_\varphi^K$  e  $\mathcal{R}(f)$ . Assim, temos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\Gamma}_\varphi^K & \xrightarrow{\text{bij.}} & \mathcal{N}(f) \\ \downarrow & & \downarrow \text{inj.} \\ \Lambda_\varphi^K & \xrightarrow{\text{bij.}} & \mathcal{R}(f) \end{array}$$

de onde concluímos que existe uma função injetiva de  $\tilde{\Gamma}_\varphi^K$  em  $\Lambda_\varphi^K$ . Para qualquer  $\beta \in \pi_1(M)$ , denote por  $(\beta)_f$  a classe de equivalência definida pela relação:

$$\beta' \sim \beta \Leftrightarrow \beta' = \alpha\beta\Omega(\alpha)^{-1},$$

para algum  $\alpha \in \pi_1(M)$ . É bem sabido (por exemplo, [J2,II.1.7]) que a correspondência  $\eta_M\text{Fix}(\beta\tilde{f}) \mapsto (\beta)_f$  é bijetiva. O número de Reidemeister  $R(f)$  é definido como o número de classes de equivalência  $\{(\beta)_f\}$  ou equivalentemente, o número de órbitas da ação de  $\pi_1(M)$  sobre  $\pi_1(M)$  dada por  $\alpha \cdot \beta \mapsto \alpha\beta\Omega(\alpha)^{-1}$ .

**Lema 2.6.2.** *A aplicação  $\zeta : \Lambda_\varphi^K \rightarrow \mathcal{R}(f)$  dada por  $K\eta_G\mathcal{R}(\beta\tilde{\varphi}) \mapsto \eta_M\text{Fix}(\beta\tilde{f})$  é uma bijeção.*

**Dem.:** É suficiente mostrar que para quaisquer  $\beta_1, \beta_2 \in \pi_1(M)$ ,  $\langle \beta_1 \rangle_K = \langle \beta_2 \rangle_K$  se, e somente se,  $(\beta_1)_f = (\beta_2)_f$ . Primeiro note que a relação entre  $\varphi$  e  $f$  é dada por  $f \circ p = \Phi(1, \varphi)$ . Considere os seguintes diagramas comutativos:

$$\begin{array}{ccccc}
\tilde{G} & \xrightarrow{\tilde{p}} & \tilde{M} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{M} \\
1_{\tilde{G}} \downarrow & & & & \downarrow 1_{\tilde{M}} \\
\tilde{G} & \xrightarrow{(1, \beta\tilde{\varphi})} & \tilde{G} \times \tilde{M} & \xrightarrow{\tilde{\Phi}(1 \times \beta^{-1})} & \tilde{M} \\
\sigma^{-1} \downarrow & & \downarrow (\sigma^{-1} \times \xi) & & \downarrow \Omega(\epsilon(\sigma^{-1})) \\
\tilde{G} & \xrightarrow{(1, \beta\tilde{\varphi})} & \tilde{G} \times \tilde{M} & \xrightarrow{\tilde{\Phi}(1 \times \beta^{-1})} & \tilde{M} \\
1_{\tilde{G}} \downarrow & & & & \downarrow 1_{\tilde{M}} \\
\tilde{G} & \xrightarrow{\tilde{p}} & \tilde{M} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{M}
\end{array}$$

e

$$\begin{array}{ccccccc}
\tilde{G} & \xrightarrow{\beta\tilde{\varphi}} & \tilde{M} & \xrightarrow{i_2} & \tilde{G} \times \tilde{M} & \xrightarrow{\tilde{\Phi}(1 \times \beta^{-1})} & \tilde{M} \\
\sigma^{-1} \downarrow & & \downarrow \xi & & \downarrow \widetilde{i_{\sigma^{-1}}} & & \downarrow \Omega(\epsilon(\sigma^{-1})) \\
\tilde{G} & \xrightarrow{\beta\tilde{\varphi}} & \tilde{M} & \xrightarrow{i_{\sigma^{-1}}} & \tilde{G} \times \tilde{M} & \xrightarrow{\tilde{\Phi}(1 \times \beta^{-1})} & \tilde{M}
\end{array}$$

onde  $\xi = \beta\Psi(\sigma^{-1})\beta^{-1}$ ,  $\widetilde{i_2}(\tilde{x}) = (\tilde{e}, \tilde{x})$  e  $\widetilde{i_{\sigma^{-1}}}(\tilde{x}) = (\sigma^{-1}\tilde{e}, \tilde{x})$  de tal forma que  $\widetilde{i_{\sigma^{-1}}} \circ \Psi(\sigma^{-1})$  cobre  $(\bar{\sigma}^{-1}, \bar{\sigma}^{-1})$ , onde  $(\bar{\sigma}^{-1}, \bar{\sigma}^{-1}) : M \rightarrow G \times M$  é dada por  $(\bar{\sigma}^{-1}, \bar{\sigma}^{-1})(gK) = (\bar{\sigma}^{-1} \circ e, \bar{\sigma}^{-1}(gK)) = (e\bar{\sigma}, \bar{\sigma}^{-1}(gK)) = (\bar{\sigma}, \bar{\sigma}^{-1}(gK))$ . De fato,  $\Psi(\sigma)^{-1}$  cobre  $\bar{\sigma}^{-1} : M \rightarrow M$  dada por  $\bar{\sigma}^{-1}(gK) = (\bar{\sigma}^{-1}g)K$  e  $\widetilde{i_{\sigma^{-1}}}$  cobre a aplicação  $i_{\bar{\sigma}^{-1}} : M \rightarrow G \times M$  dada por  $i_{\bar{\sigma}^{-1}}(gK) = (\bar{\sigma}, gK)$ . Como  $i_{\bar{\sigma}^{-1}} \circ \bar{\sigma}^{-1} = (\bar{\sigma}^{-1}, \bar{\sigma}^{-1})$ , segue que  $\widetilde{i_{\sigma^{-1}}} \circ \Psi(\sigma^{-1})$  cobre  $(\bar{\sigma}^{-1}, \bar{\sigma}^{-1})$ . Assim,  $\tilde{\Phi} \circ \widetilde{i_{\sigma^{-1}}} \circ \Psi(\sigma^{-1}) \in \text{Cov}(\eta_M)$ , pois  $\tilde{\Phi}$  cobre  $\Phi$  e  $\Phi \circ (\bar{\sigma}^{-1}, \bar{\sigma}^{-1})(gK) = \Phi(\bar{\sigma}, \bar{\sigma}^{-1}(gK)) = \bar{\sigma}\bar{\sigma}^{-1}(gK) = gK$ , ou seja,  $\tilde{\Phi} \circ \widetilde{i_{\sigma^{-1}}} \circ \Psi(\sigma^{-1})$  cobre  $e$ . Mostremos que de fato os diagramas são comutativos:

$$\begin{aligned}
(\tilde{f} \circ \tilde{p})(\tilde{e}) &= \tilde{f}(\tilde{p}(\tilde{e})) = \tilde{f}(\tilde{e}\tilde{K}) = \tilde{e}\tilde{K} = \tilde{\Phi}(\tilde{e}, \tilde{e}\tilde{K}) = \tilde{\Phi}(1 \times \beta^{-1})(\tilde{e}, \beta\tilde{e}\tilde{K}) = \\
&= [\tilde{\Phi}(1 \times \beta^{-1}) \circ (1, \beta\tilde{\varphi})](\tilde{e})
\end{aligned}$$

$$[(\sigma^{-1} \times \xi) \circ (1, \beta\tilde{\varphi})](\tilde{e}) = (\sigma^{-1} \times \xi)[(1, \beta\tilde{\varphi})(\tilde{e})] = (\sigma^{-1} \times \xi)(\tilde{e}, \beta\tilde{e}\tilde{K}) =$$

$$\begin{aligned}
&= (\sigma^{-1}\tilde{e}, \beta\Psi(\sigma^{-1})\widetilde{eK}) = (\sigma^{-1}\tilde{e}, \beta\Psi(\sigma^{-1})\tilde{\varphi}(\tilde{e})) = (\sigma^{-1}\tilde{e}, \beta\tilde{\varphi}\sigma^{-1}\tilde{e}) = \\
&= (1, \beta\tilde{\varphi})[\sigma^{-1}(\tilde{e})] = [(1, \beta\tilde{\varphi}) \circ \sigma^{-1}](\tilde{e})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\Omega(\epsilon(\sigma^{-1})) \circ \tilde{\Phi}(1 \times \beta^{-1})](\tilde{e}, \beta\widetilde{eK}) &= \Omega(\epsilon(\sigma^{-1})) \circ \tilde{\Phi}(\tilde{e}, \widetilde{eK}) = \Omega(\epsilon(\sigma^{-1}))(\widetilde{eK}) = \\
&= \Omega(\epsilon(\sigma^{-1}))(\tilde{f}(\widetilde{eK})) = \tilde{f}\epsilon(\sigma^{-1})(\widetilde{eK}) = \tilde{f}\epsilon(\sigma^{-1})(\tilde{p}(\tilde{e})) = \tilde{f} \circ \tilde{p}(\sigma^{-1}\tilde{e}) = \\
&= \tilde{\Phi}(1, \tilde{\varphi})(\sigma^{-1}\tilde{e}) = \tilde{\Phi}(\sigma^{-1}\tilde{e}, \tilde{\varphi}\sigma^{-1}(\tilde{e})) = \tilde{\Phi}(\sigma^{-1}\tilde{e}, \Psi(\sigma^{-1})\tilde{\varphi}(\tilde{e})) = \\
&= \tilde{\Phi}(\sigma^{-1}\tilde{e}, \Psi(\sigma^{-1})(\widetilde{eK})) = \tilde{\Phi}(1 \times \beta^{-1})(\sigma^{-1}\tilde{e}, \beta\Psi(\sigma^{-1})\widetilde{eK}) = \\
&= [\tilde{\Phi}(1 \times \beta^{-1}) \circ (\sigma^{-1} \times \xi)](\tilde{e}, \beta\widetilde{eK})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\xi \circ \beta\tilde{\varphi})(\tilde{e}) &= \xi(\beta\tilde{\varphi}(\tilde{e})) = \xi(\beta\widetilde{eK}) = \beta\Psi(\sigma^{-1})(\widetilde{eK}) = \beta\Psi(\sigma^{-1})\tilde{\varphi}(\tilde{e}) = \\
&= (\beta\tilde{\varphi} \circ \sigma^{-1})(\tilde{e})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\Omega(\epsilon(\sigma^{-1})) \circ \tilde{\Phi}(1 \times \beta^{-1}) \circ \tilde{i}_2](\beta\widetilde{eK}) &= \Omega(\epsilon(\sigma^{-1})) \circ \tilde{\Phi}(1 \times \beta^{-1})(\tilde{e}, \beta\widetilde{eK}) = \\
&= \Omega(\epsilon(\sigma^{-1})) \circ \tilde{\Phi}(\tilde{e}, \widetilde{eK}) = \Omega(\epsilon(\sigma^{-1}))(\widetilde{eK}) = \Omega(\epsilon(\sigma^{-1}))\tilde{f}(\widetilde{eK}) = \\
&= \tilde{f}\epsilon(\sigma^{-1})(\widetilde{eK}) = \tilde{f}\epsilon(\sigma^{-1})\tilde{p}(\tilde{e}) = \tilde{f} \circ \tilde{p}(\sigma^{-1}\tilde{e}) = \tilde{\Phi}(1, \tilde{\varphi})(\sigma^{-1}\tilde{e}) = \\
&= \tilde{\Phi}(\sigma^{-1}\tilde{e}, \tilde{\varphi}\sigma^{-1}(\tilde{e})) = \tilde{\Phi}(\sigma^{-1}\tilde{e}, \Psi(\sigma^{-1})\tilde{\varphi}(\tilde{e})) = \tilde{\Phi}(\sigma^{-1}\tilde{e}, \Psi(\sigma^{-1})\widetilde{eK}) = \\
&= \tilde{\Phi}(1 \times \beta^{-1})(\sigma^{-1}\tilde{e}, \beta\Psi(\sigma^{-1})\widetilde{eK}) = \tilde{\Phi}(1 \times \beta^{-1}) \circ \tilde{i}_{\sigma^{-1}}(\beta\Psi(\sigma^{-1})\widetilde{eK}) = \\
&= [\tilde{\Phi}(1 \times \beta^{-1}) \circ \tilde{i}_{\sigma^{-1}} \circ \xi](\beta\widetilde{eK})
\end{aligned}$$

Note que  $\tilde{i}_2$  é um levantamento de  $i_2 : M \rightarrow G \times M$  dado por  $i_2(gK) = (e, gK)$ . Logo,  $(1 \times \beta^{-1})\tilde{i}_2$  também é um levantamento de  $i_2$ . Além disso,  $\tilde{\Phi}$  é um levantamento de  $\Phi$ . Daí,  $\tilde{\Phi} \circ (1 \times \beta^{-1})\tilde{i}_2$  é um levantamento de



$\Phi \circ i_2 = 1_M$ . Logo,  $\tilde{\Phi}(1 \times \beta^{-1})\tilde{i}_2$  cobre  $\Phi \circ i_2 = 1_M$ , e manda  $\beta\tilde{eK}$  em  $\tilde{eK}$ , daí segue que  $\tilde{\Phi}(1 \times \beta^{-1})\tilde{i}_2 = \beta^{-1}$ . O segundo diagrama implica que

$$\Omega(\epsilon(\sigma^{-1}))\beta^{-1} = \tilde{\Phi}(1 \times \beta^{-1})\tilde{i}_{\sigma^{-1}}\xi \quad (2.4)$$

ou

$$\Omega(\epsilon(\sigma^{-1})) = \tilde{\Phi}(1 \times \beta^{-1})\tilde{i}_{\sigma^{-1}}\beta\Psi(\sigma^{-1}). \quad (2.5)$$

Note que a restrição  $\tilde{\Phi}|_{\tilde{G} \times \{\tilde{eK}\}}$  é um levantamento de  $\Phi|_{G \times \{eK\}} = p \circ pr_1|_{G \times \{eK\}}$ , que por sua vez é coberto por  $\tilde{p} \circ \tilde{pr}_1|_{\tilde{G} \times \{\tilde{eK}\}}$ , onde  $pr_1 : G \times M \rightarrow M$  e  $\tilde{pr}_1 : \tilde{G} \times \tilde{M} \rightarrow \tilde{G}$  são as projeções sobre o primeiro fator. Visto que  $\tilde{\Phi}(\tilde{e}, \tilde{eK}) = \tilde{eK} = \tilde{p} \circ \tilde{pr}_1(\tilde{e}, \tilde{eK})$ , temos  $\tilde{\Phi}|_{\tilde{G} \times \{\tilde{eK}\}} = \tilde{p} \circ \tilde{pr}_1|_{\tilde{G} \times \{\tilde{eK}\}}$  como levantamentos. Segue que:

$$\begin{aligned} \epsilon(\sigma) \circ \tilde{\Phi} \circ \tilde{i}_{\sigma^{-1}}(\tilde{eK}) &= \epsilon(\sigma) \circ \tilde{\Phi}(\sigma^{-1}\tilde{e}, \tilde{eK}) = \epsilon(\sigma) \circ \tilde{p} \circ \tilde{pr}_1(\sigma^{-1}\tilde{e}, \tilde{eK}) = \\ &= \epsilon(\sigma) \circ \tilde{p}(\sigma^{-1}\tilde{e}) = \tilde{p}\sigma\sigma^{-1}(\tilde{e}) = \tilde{p}(\tilde{e}) = \tilde{eK}. \end{aligned}$$

Por definição,  $\tau(\bar{\sigma})(\tilde{eK}) = \tilde{eK}$  e  $\tau(\bar{\sigma})$  cobre  $\bar{\sigma}$ . Também,  $\epsilon(\sigma)$  cobre  $1_M$ ,  $\tilde{\Phi}$  cobre  $\Phi$  e  $\tilde{i}_{\sigma^{-1}}$  cobre  $i_{\bar{\sigma}^{-1}}$ , e como  $1_M \circ \Phi \circ i_{\bar{\sigma}^{-1}}(gK) = 1_M \circ \Phi(\bar{\sigma}, gK) = \bar{\sigma}(gK)$ , segue que  $\epsilon(\sigma) \circ \tilde{\Phi} \circ \tilde{i}_{\sigma^{-1}}$  cobre  $\bar{\sigma}$ . Por unicidade de levantamentos,

$$\tau(\bar{\sigma}) = \epsilon(\sigma) \circ \tilde{\Phi} \circ \tilde{i}_{\sigma^{-1}}. \quad (2.6)$$

Agora, note que  $\beta\tilde{\Phi}(1 \times \beta^{-1})$  cobre  $\Phi$ . Daí, como  $\beta\tilde{\Phi}(1 \times \beta^{-1})\tilde{i}_2(\tilde{eK}) = \beta\beta^{-1}(\tilde{eK}) = \tilde{eK} = \tilde{\Phi}\tilde{i}_2(\tilde{eK})$ , segue que

$$\beta\tilde{\Phi}(1 \times \beta^{-1}) = \tilde{\Phi}. \quad (2.7)$$

Portanto, de 2.5, 2.6 e 2.7, obtemos:

$$\begin{aligned} \tau(\bar{\sigma})\beta\Psi(\sigma^{-1}) &= \epsilon(\sigma) \circ \tilde{\Phi} \circ \tilde{i}_{\sigma^{-1}}\beta\Psi(\sigma^{-1}) = \\ &= \epsilon(\sigma) \circ \beta\tilde{\Phi}(1 \times \beta^{-1}) \circ \tilde{i}_{\sigma^{-1}}\beta\Psi(\sigma^{-1}) = \epsilon(\sigma)\beta\Omega(\epsilon(\sigma^{-1})). \end{aligned}$$

Isso mostra que a aplicação  $\zeta$  está bem-definida.

Note que a aplicação  $\tilde{p}$  é uma fibração (pois  $p$  é uma fibração) e daí uma sobrejeção. Para qualquer  $\gamma \in \text{Cov}(\eta_M)$ ,  $\eta_M \gamma \tilde{p} = \eta_M \tilde{p} = p \eta_G = p \bar{\sigma} \eta_G = p \eta_G \sigma = \eta_M \tilde{p} \sigma$ , logo existe algum  $\sigma \in \Gamma_G$  tal que  $\tilde{p} \sigma = \gamma \tilde{p}$  e assim  $\gamma = \epsilon(\sigma)$ . Se  $(\beta')_f = (\beta)_f$ , então  $\beta' = \gamma \beta \Omega(\gamma^{-1})$ , para algum  $\gamma \in \pi_1(M)$ . Portanto,

$$\beta' = \gamma \beta \Omega(\gamma^{-1}) = \epsilon(\sigma) \beta \Omega(\epsilon(\sigma^{-1})) = \tau(\bar{\sigma}) \beta \Psi(\sigma^{-1}),$$

pelo cálculo anterior. Isso significa que  $(\beta')_f = (\beta)_f \Rightarrow \langle \beta' \rangle_K = \langle \beta \rangle_K$ . Agora, se  $\langle \beta' \rangle_K = \langle \beta \rangle_K$ , então  $\beta' = \tau(\bar{\sigma}) \beta \Psi(\sigma^{-1})$ , para algum  $\sigma \in \Gamma_G$ . Portanto,  $\beta' = \tau(\bar{\sigma}) \beta \Psi(\sigma^{-1}) = \epsilon(\sigma) \beta \Omega(\epsilon(\sigma^{-1}))$  pelo cálculo anterior. Como  $\epsilon : \Gamma_G \rightarrow \pi_1(M)$  e  $\Omega : \pi_1(M) \rightarrow \pi_1(M)$ , segue que  $\beta' = \gamma \beta \Omega(\gamma^{-1})$ , para algum  $\gamma \in \pi_1(M)$ . Isso significa que  $\langle \beta' \rangle_K = \langle \beta \rangle_K \Rightarrow (\beta')_f = (\beta)_f$ .

Portanto,  $(\beta')_f = (\beta)_f$  se, e somente se,  $\langle \beta' \rangle_K = \langle \beta \rangle_K$  e a aplicação  $\zeta : \Lambda_\varphi^K \rightarrow \mathcal{R}(f)$  dada por  $K \eta_G \mathcal{R}(\beta \tilde{\varphi}) \mapsto \eta_M \text{Fix}(\beta \tilde{f})$  é uma bijeção.  $\square$

O próximo resultado nos permite calcular o número de Nielsen algebricamente.

**Teorema 2.6.3.** *Seja  $M \in \mathcal{H}_0$ . Para qualquer autoaplicação  $f : M \rightarrow M$ , se  $L(f) \neq 0$ , então  $N(f) = R(f)$ .*

**Dem.:** Da demonstração do teorema 2.5.1,  $L(f) \neq 0$  implica que  $\omega_K(\varphi, \mathcal{O}_g) \neq 0$  para qualquer  $\mathcal{O}_g \in \tilde{\Gamma}_\varphi^K$  e, pelo teorema 2.2.2, todas as classes de raízes de Reidemeister em  $\Lambda_\varphi$  são essenciais, isto é, não há classes de raízes de Reidemeister vazias. Note que a função  $\Lambda_\varphi \rightarrow \Lambda_\varphi^K$  que manda  $\eta_G \mathcal{R}(\beta \tilde{\varphi})$  em  $K \eta_G \mathcal{R}(\beta \tilde{\varphi})$  é sobrejetora. Segue que  $\omega_K(\varphi, K \eta_G \mathcal{R}(\beta \tilde{\varphi})) \neq 0$  para toda classe de raízes  $K$ -Reidemeister  $K \eta_G \mathcal{R}(\beta \tilde{\varphi})$ , pois se duas raízes são  $K$ -Nielsen equivalentes, então pertencem à mesma classe de órbitas de raízes  $K$ -Reidemeister, o que implica que  $K \eta_G \mathcal{R}(\beta \tilde{\varphi}) = \sqcup \mathcal{O}_g$ , e do teorema 2.5.1 sabemos que  $\omega_K(\varphi, \mathcal{O}_g)$  têm o mesmo sinal, para qualquer  $\mathcal{O}_g \in \tilde{\Gamma}_\varphi^K$ . Pelo lema 2.6.2, como  $\zeta$  é bijeção,  $\omega_K(\varphi, K \eta_G \mathcal{R}(\beta \tilde{\varphi})) \neq 0$  implica que

$\text{ind}(f, \eta_M \text{Fix}(\beta \tilde{f})) \neq 0$ , e pelo teorema 2.5.1 temos que  $\text{ind}(f, \gamma) = 0$  se, e somente se,  $\text{ind}(f, \gamma') = 0$ . Portanto, toda classe de ponto fixo de Reidemeister  $(\beta)_f$  é essencial e daí  $N(f) = R(f)$ .  $\square$

**Exemplo 2.6.4.** *O teorema 2.6.3 nos permite calcular o número de Nielsen  $N(f)$  e assim o número mínimo de pontos fixos  $MF[f]$  calculando  $R(f)$ . Suponha que  $M \in \mathcal{H}_0$  tem grupo fundamental  $\pi$ . Seja  $\kappa : \pi \rightarrow \pi$  o homomorfismo induzido por  $f$  sobre o grupo fundamental. É bem sabido que se  $\pi$  é abeliano, ou, mais geralmente, se  $\kappa$  é eventualmente comutativo, então  $R(f) = \# \text{Coker}(1 - \kappa_{ab})$ , onde  $\kappa_{ab}$  é o homomorfismo induzido sobre a abelianização  $\pi/[\pi, \pi]$  (vide, por exemplo, [J2, II.2.5]). Mais ainda, se  $\pi$  é finito, então  $R(f)$  é igual ao número de classes de conjugação  $\langle \omega \rangle$  em  $\pi$  tal que  $\langle \kappa(\omega) \rangle = \langle \omega \rangle$  (vide [FeHi]).*

**Observação 2.6.5.** *Considere a aplicação identidade  $1_M$  sobre o não orientável espaço projetivo real de dimensão par*

$$M = \mathbb{R}P^{2n} \approx SO(2n + 1)/O(2n).$$

Como  $\chi(\mathbb{R}P^{2n}) \neq 0$ , então  $N(1_M) = 1$ . Considere o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} S^{2n} & \longrightarrow & S^{2n} \\ \eta \downarrow & & \downarrow \eta \\ \mathbb{R}P^{2n} & \xrightarrow{1_M} & \mathbb{R}P^{2n} \end{array}$$

onde  $\eta : S^{2n} \rightarrow \mathbb{R}P^{2n}$  é o recobrimento universal de  $\mathbb{R}P^{2n}$ . Como  $[x] \in \mathbb{R}P^{2n}$  vem de dois pontos de  $S^{2n}$  ( $x$  e  $-x$ ), sabemos que existem pelo menos dois levantamentos para  $1_M$ , a saber,  $1_{S^{2n}}$  e  $A$ , onde  $A : S^{2n} \rightarrow S^{2n}$  é a aplicação antípoda. Note que para  $\gamma : S^{2n} \rightarrow S^{2n}$  ser um levantamento de  $1_M$ , deve satisfazer a condição  $\eta\gamma = \eta$ . Seja  $x \in S^{2n}$ . Temos:

$$\eta\gamma(x) = [\gamma(x)] = \{\gamma(x), -\gamma(x)\}$$

$$\eta(x) = \{x, -x\}$$

$$\eta\gamma(x) = \eta(x) \Leftrightarrow \gamma(x) = \pm x.$$

Logo,  $1_{S^{2n}}$  e  $A$  são os únicos levantamentos de  $1_M$ . Agora, note que  $A \circ 1_{S^{2n}} \circ A^{-1} = 1_{S^{2n}}$  e  $1_{S^{2n}} \circ A \circ 1_{S^{2n}}^{-1} = A$ , de tal forma que  $1_{S^{2n}}$  e  $A$  estão em classes diferentes. Portanto,  $R(1_M) = 2$ . Note que  $p_* : H_{2n+1}(SO(2n+1)) \rightarrow H_{2n+1}(M)$  é nulo, pois  $H_{2n+1}(M) = 0$  e  $M$  é não orientável, e daí  $M \notin \mathcal{H}_0$ .

Combinando o corolário 2.4.8 e o teorema 2.6.3 obtemos o seguinte:

**Teorema 2.6.6.** *Seja  $M \in \mathcal{H}_0$ . Então,  $M$  é do tipo Jiang (isto é,  $L(f) = 0 \Rightarrow N(f) = 0$  e  $L(f) \neq 0 \Rightarrow N(f) = R(f)$  para toda autoaplicação  $f$  de  $M$ ), e a recíproca do teorema do ponto fixo de Lefschetz vale para todas as autoaplicações de  $M$ .*

**Observação 2.6.7.** *Devemos apontar que se  $M = G/K$ , onde  $G$  é um grupo de Lie compacto, conexo e simplesmente conexo, e  $K$  é um subgrupo finito, então o teorema 2.6.6 segue de [J2, II.5.6], visto que por [Ar] (página 100, teorema 5.13),  $\pi_1(M) = K$ , e  $K$  age trivialmente sobre a homologia racional de  $G$ .*

**Observação 2.6.8.** *(Espaços de Jiang Clássicos) Seja  $M = L_p^{2n-1}$  um espaço de lentes generalizado com  $p$  primo e  $f : M \rightarrow M$  uma autoaplicação. Usando o exemplo 2.4.5, podemos escrever  $M = G/K$  e  $K$  tem  $p$  componentes conexas. Visto que  $|\pi_1(M)| = p$  é primo,  $R(f) = \#\text{Coker}(1 - \kappa)$  e  $\#\text{Coker}(1 - \kappa)$  divide  $|\pi_1(M)|$ , segue que existem 1 ou  $p$  classes de raízes. Na demonstração do teorema 2.5.1, pode-se ver que se  $f$  tem mais do que uma classe de Nielsen essencial, então  $f$  tem exatamente  $p$  tais classes, e nesse caso, como  $R(f) = N(f)$ , toda classe de raízes  $K$ -Nielsen de  $\varphi$  contém exatamente uma classe de raízes ordinária. Isso implica que os índices de ponto fixo das classes de ponto fixo de Nielsen de  $f$  são iguais. Assim, junto*

com o teorema 2.6.6, temos que para as autoaplicações dos espaços de lentes generalizados valem:

- (i) todas as classes de ponto fixo de  $f$  têm o mesmo índice de ponto fixo;
- (ii)  $L(f) = 0 \Rightarrow N(f) = 0$ ;
- (iii)  $L(f) \neq 0 \Rightarrow N(f) = R(f)$ .

Para espaços homogêneos da forma  $M = G/G_0$  com  $G_0$  conexo, o teorema 2.6.6 e a observação 2.5.2 mostram que as condições (i), (ii) e (iii) valem para  $M$  dado que  $M \in \mathcal{H}_0$ .

A classe  $\mathcal{H}_0$  contém muitos espaços do tipo Jiang que não estavam previamente classificados, pois nem o trabalho de Jiang [J1], [J2] nem o de Fadell e Husseini [FH] se aplicam a espaços com grupo fundamental infinito e não abeliano.

**Exemplo 2.6.9.** *Sejam  $G = S^1 \times SO(3)$  e  $K = \{1\} \times A_5$ . Então,  $G/K \approx [S^1 \times SO(3)]/A_5$ , cujo grupo fundamental é  $\mathbb{Z} \times \text{Icos}$ , onde  $\text{Icos}$  denota o grupo icosaedral binário de ordem 120 (o grupo fundamental da 3-esfera de homologia de Poincaré). Do exemplo 2.4.6 e do teorema 2.6.6, segue que  $G/K$  é do tipo Jiang. Mas  $G/K$  não é um espaço de Jiang, pois seu grupo fundamental não é abeliano, visto que  $A_5$  é não abeliano. Por outro lado, visto que  $G/K$  tem grupo fundamental infinito, nem [FH,6.38] nem [J2,II.5.6] se aplicam.*

## Referências Bibliográficas

- [AB] M. M. Alexandrino e R. G. Bettiol, *Introduction to Lie groups adjoint action and its generalizations*, arXiv:0901.2374v2, 2009.
- [Ar] M. A. Armstrong, *Basic Topology*, Springer-Verlag, 1983.
- [An] D. Anosov, *The Nielsen number of maps of nilmanifolds*, Russian Math. Surveys 40 (1985), 149-150.
- [B1] R. Brooks, *Certain subgroups of the fundamental group and the number of roots of  $f(x) = a$* , Amer. J. Math. 95 (1973), 720-728.
- [B2] R. Brooks, *Coincidences, Roots and Fixed Points*, Doctoral Dissertation, Univ. of California, Los Angeles, 1967.
- [BW] R. Brooks and P. Wong, *On changing fixed points and coincidences to roots*, Proc. Amer. Math. Soc. 115 (1992), 527-533.
- [Br] R. F. Brown, *The Lefschetz Fixed Point Theorem*, Scott Foresman, Illinois, 1971.
- [D] H. Duan, *The Lefschetz number of selfmaps of Lie groups*, Proc. Amer. Math. Soc. 104 (1988), 1284-1286.
- [F] E. Fadell, *Two vignettes in fixed point theory*, in: Topological Fixed Point Theory and Applications (Tianjin, 1988), B. Jiang (ed.), Lecture Notes in Math. 1411, Springer, 1989, 46-51.

- [FH] E. Fadell e S. Husseini, *Fixed Point Theory for non-simply connected manifolds*, Topology 20 (1981), 53-92.
- [FeHi] A. Fel'shtyn e R. Hill, *The Reidemeister zeta function with applications to Nielsen theory and a connection with Reidemeister torsion*, K-Theory 8 (1994), 367-393.
- [GK] D. L. Gonçalves e J. C. de S. Kiihl, *Teoria do Índice*, 14º Colóquio Brasileiro de Matemática, Poços de Caldas (1983).
- [H] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2002.
- [Ha] E. Hart, *Computation of the local generalized H-Lefschetz number*, Topology Appl. 61 (1995), 115-135.
- [J1] B. Jiang, *Estimation of the Nielsen numbers*, Acta Math. Sinica 14 (1964), 304-312.
- [J2] B. Jiang, *Lectures on Nielsen Fixed Point Theory*, Contemp. Math., vol. 14, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1983.
- [J3] B. Jiang, *Fixed points and braids*, Invent. Math. 75 (1984), 69-74.
- [Ka] K. Kawakubo, *The Theory of Transformation Groups*, Oxford University Press, New York, 1991.
- [Ki] T. Kiang, *The Theory of Fixed Point Classes*, Springer-Verlag, Science Press, New York, Beijing, 1989.
- [M] J. Munkres, *Elements of algebraic topology*, Perseus Publishing, Cambridge, Massachusetts, 1930.

- [Mc] C. McCord, *Nielsen numbers and Lefschetz numbers on solv-manifolds*, Pacific J. Math. 147 (1991), 153-164.
- [NO] B. Norton-Odenthal, *A product formula for the generalized Lefschetz number*, Ph.D. thesis, University of Wisconsin, Madison, 1991.
- [W] P. Wong, *Fixed-point theory for homogeneous spaces*, Amer. J. Math. 120 (1998), 23-42.
- [Wh] G. Whitehead, *Elements of Homotopy Theory*, Springer-Verlag, New York, 1978.