Autovalores de alguns problemas elípticos em regiões simétricas

Marcus Antonio Mendonça Marrocos

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
DOUTOR EM CIÊNCIAS

Programa: Matemática
Orientador: Prof. Dr. Antonio Luiz Pereira

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES

São Paulo, 2011

Autovalores de alguns problemas elípticos em regiões simétricas

Este exemplar corresponde à redação
final da tese devidamente corrigida
e defendida por Marcus Antonio Mendonça Marrocos
e aprovada pela Comissão Julgadora.

Agradecimentos

Este trabalho é fruto de um projeto de muitos anos de dedicação. A lista de pessoas que contribuiram de forma determinante para a realização deste sonho é muito longa. Sabendo que é impossível citar a todos deixo, desde já, os meus mais sinceros agradecimentos para todos aqueles que não foram citados , mas que de alguma forma contribuíram com o meu trabalho.

Em primeiro lugar, agradeço a minha familia pelo apoio e incentivo a realização do meu objetivo desde o inicio: meus pais Glória Maria e Juarez, meu padrasto Paulinho que foi sempre um pai para mim e meu irmão Guto.

Agradeço pricipalmente à minha pequena princesa e esposa Roberta Maia Said pela paciência e dedicação nos longos dias de trabalho. Fornecendo o suporte necessário para que eu pudesse me dedicar exclusivamente aos estudos, tornando mais ameno o transcorrer do meu caminho na difícil tarefa de elaboração desta tese. Com carinho e amor incentivou-me sempre que alguma barreira parecia intransponível ou a fadiga tomava-me a vontade de continuar, sem ela este trabalho não se realizaria. Feliz aquele que a alma gemea encontra!

Ao meu orientador Antonio Luiz Pereira, que esteve sempre disposto e paciente para esclarecer todas as dúvidas indicando a melhor direção a ser seguida. Esta tese foi enormemente influenciandapor alguns de seus trabalhos anteriores.

A minha mamãe, pelo suporte, carinho e amor sempre incondicional.

Ao guto, muito mais que um irmão, um amigo e confidente estando presente em todos os instantes, além de suportar todo o mal humor em dias difíceis.

A todos meus primos e amigos pela a compania e conversas sempre reconfortantes, em particular ao Daniel que me recebeu em sua casa logo que cheguei a São Paulo, Théo pelas longas noites de conversa, Junior pelo apoio e conselhos sendo mais que um primo, um verdadeiro irmão; Rafão e

Jhames por me livrarem de vários apuros, Lalá pelo apoio e suporte desde a minha chegada a São Paulo.

Ao Paulinho, meu pai, pela confiança e longas discussões sobre que direção tomar, sempre desejando o melhor para mim.

Ao Tio Bá e tia Margarete que me receberam em sua casa com todo carinho e afeto.

Ao juarez, meu pai, pela ajuda sempre providencial em momentos de grande dificuldade.

A todos os professores que contribuiram para a minha formação, devo a eles o profissional que sou hoje. Em particular os professores Daniel Tausk pelas conversas sempre produtivas e José carlos Eidam pelas palavras de apoio sendo muitas vezes firme mas sempre atencioso e honesto.

Devo a Deus e a todas essas pessoas mais esta conquista em minha vida!

Resumo

Neste trabalho, usaremos a teoria de perturbação de fronteira, desenvolvida por Henry em [6], para investigar a situação genérica dos autovalores para os seguintes problemas elípticos, no conjunto das regiões regulares e simétricas: o Laplaciano com condição de fronteira de Dirichlet ou Neumann e o Bilaplaciano com condição de fronteira de Dirichlet.

Palavras-chave: Laplaciano, condição de Dirichlet, condição de Neumann, Bilaplaciano, autovalores, regiões simétricas, perturbação de fronteira

Abstract

In this work, we use the boundary perturbation theory, developed by Henry [6], to investigate the generic situation of the eigenvalues for the following elliptic problems, in the set of regular and symmetric regions:the Laplacian with Dirichlet or Neumann boundary condition and the Bilaplacian with Dirichlet boundary condition.

Keywords: Laplacian,Dirichlet boundary condition, Neumann boundary condition, Bilaplacian, eigenvalues, symmetric regions, boundary perturbation

Sumário

Capítulo 1

Introdução

A teoria de perturbação de fronteira (ou domínios de definição) para EDPs foi e continua sendo desenvolvida, em vários aspectos, por muitos autores entre os quais destacamos, J. Hadamard [5], J.W.S. Rayleigh [21], B. Rousselet [23], D. B. Henry [6], Sokolowski e P. Zolézio [26], J. Simon [25],P.D.Lamberti [11]. Podemos citar também os trabalhos de A. M. Micheletti [13], [14], Saut e Teman [24], nos quais propriedades genéricas, com relação a perturbação do domínio, de soluções de problemas de valor de contorno não linear e simplicidade de autovalores foram tratados.

Em [6], Henry desenvolveu uma espécie de cálculo diferencial onde a variável independente é o domínio de definição da equação diferencial. Com isso pode-se utilizar teoremas clássicos tais como Teorema da Função Implícita e o Método de Lyapunov-Schmit. Neste mesmo trabalho, Henry demonstrou uma versão generalizada do Teorema da Transversalidade de Thom e, como aplicação, obteve outros resultados de genericidade de soluções de equações elípticas com várias condições de fronteira.

Propriedades genéricas dos autovalores e autofunções para problemas elípticos foram investigados por vários autores. Entre outros podemos citar Henry [6], A.L.Pereira [16], [17], [18], M.C.Pereira [18], Driscoll [4], Tanikawa [27], Micheletti [14], Uhlenbeck [28]. Os trabalhos de A.L.Pereira [16], [17], [18], M.C.Pereira [18], [19], Driscoll [4] e Tanikawa [27] tratam mais especificamente da situação genérica dos autovalores de alguns problemas elípticos em regiões com simetria.

Existem na literatura pelo menos duas abordagens para estudar o problema de simplicidade genérica de autovalores de problemas elípticos: um deles é utilizar as expressões da derivada dos autovalores em função do domínio de definição da equação e o outro é utilizar o Teorema da Transversalidade. O primeiro foi utilizado, por exemplo, por Henry [6], Driscoll [4], Tanikawa [27], Micheletti [14];

ja o segundo por A.L.Pereira [16], [17], [18], M.C.Pereira [18],Uhlenbeck [28].

A. L. Pereira [16], [18] e M. C. Pereira [19], [18] utilizaram a teoria desenvolvida por Henry em [6] para demonstrar propriedades de genericidade dos autovalores em domínios com simetria, tanto para o Laplaciano com condição de fronteira de Dirichlet como para o Bilaplaciano e, nestas situações, o Teorema da Transversalidade generalizado de Henry foi utilizado.

Neste trabalho, consideraremos o problema de simplicidade genérica em regiões simétricas para os seguintes problemas elípicos: problema de Laplace com condição de fronteira de Dirichlet e Neumann e Bilaplaciano com condição de Dirichlet. O caso do problema de Laplace com condição de Dirichlet, mesmo já tendo sido vastamente estudado anteriormente, será revisitado aqui, pois algumas questões ainda permanecem não resolvidas. Mais adiante citaremos os avanços realizados neste trabalho para o problema de simplicidade genérica dos autovalores destes problemas.

Introduziremos nas próximas seções algumas notações e conceitos, deixando mais claro o problema proposto e o método que utilizaremos para resolvê-lo.

1.1 Considerações Preliminares

1.1.1 Perturbação de fronteira

Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$ com fronteira C^m regular. Uma perturbação C^m regular de Ω é dada por $\Omega_h = h(\Omega)$, onde h é uma aplicação C^m-regular de Ω em $\mathbb{R}^n$ tal que h é injetiva e $|deth'(x)|$ é limitado em Ω. Assim, definimos o conjunto das C^m-perturbações como

$$Diff^m(\Omega) = \{h \in C^m(\Omega, \mathbb{R}^n)/h \text{ é injetiva e } |deth'(x)| \text{ é limitado em } \Omega\}.$$

Considere os operadores diferenciais formais definidos em $C^m(\Omega)$ e $C^m(\partial\Omega)$ respectivamente e dados por

$$F_\Omega(u)(x) = f(x, Lu(x)), x \in \Omega$$
$$B_\Omega(u)(x) = b(x, Lu(x), MN_\Omega(x)), x \in \partial\Omega$$

onde L M são operadores diferenciais com coeficientes constantes; f e b são funções cujo número de variáveis é compatível com os operadores L e M; N_Ω é o campo normal unitário exterior em $\partial\Omega$. Um dos objetivos da teoria de perturbação de fronteira é estudar o comportamento das soluções do problema:

$$\begin{cases} F_{h(\Omega)}(u)(x) & = f(x, Lu(x)) & = 0, \quad x \in h(\Omega); \\ B_{h(\Omega)}(u)(x) & = b(x, Lu(x), MN_{h(\Omega)}(x)) & = 0, \quad x \in \partial h(\Omega); \end{cases}$$

quando se perturba o domínio, ou seja, quando se varia o parâmetro $h \in Diff^m(\Omega)$. Existe uma dificuldade grande em provar a regularidade do operador com relação ao parâmetro h, pois os espaços de funções variam com h. Para contornar este problema, pode-se utilizar uma mudança de variável para que o domínio permaneça fixo.

Mais precisamente, considera-se o *pull back* h^* de h

$$h^*u(x) = u(h(x))$$

onde a função u está definida em Ω.

Agora, se $F_{h(\Omega)}$ está definido em $h(\Omega)$, pode-se considerar o operador diferencial $h^*F_{h(\Omega)}h^{*-1}$ definido na região fixada Ω. Note-se que agora são os coeficientes do operador que variam com h.

Com este procedimento a tarefa de decidir a regularidade do operador perturbado com relação a h é mais fácil, porém executar o cálculo das derivadas torna-se extremamente complicado, principalmente se tentarmos calcular diretamente. Com "calcular diretamente" queremos dizer simplesmente aplicar a regra da cadeia em

$$\frac{\partial}{\partial t} f(h^{-1}(t, h(t,.)), Lu(t, h^{-1}(t,.))(h(t,.)))$$

onde $t \to (h(t,.), u(t,.)) \in Diff^m(\Omega) \times C^m(\Omega)$ é uma curva diferenciável em t. Até mesmo para operadores com coeficientes constantes, como por exemplo o Laplaciano, esse cálculo é extremamente longo (ver [13]). Assim, o cálculo para operadores com coeficientes variáveis ou com alguma não linearidade é possível, porém impraticável.

Neste ponto, Henry introduziu um artifício que facilita o cálculo com a região fixada. O truque é baseado na introdução da derivada *anti-convectiva*

$$D_t = \frac{\partial}{\partial t} - U(x,t)\frac{\partial}{\partial x}, U(x,t) = \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^{-1} \frac{\partial h}{\partial t}$$

que, quando aplicada ao operador $h^*(t,.)F_{h(\Omega)}h^{*-1}(t,.)$ numa região fixada é, de certa forma, equivalente à t-derivada aplicada ao operador $F_{h(t,\Omega)}$ numa região perturbada. O lema abaixo mostra com clareza o truque.

Lema 1.1. *Suponha que* $\psi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e* $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *são de classe* C^1 *e que para cada* t, $h(t,.)$ *é um difeomorfismo sobre sua imagem* $\Omega(t)$. *Então*

$$D_t(h^*\psi) = h^*\frac{\partial \psi}{\partial t}.$$

Com este lema, não é difícil provar os teoremas 2.6 e 2.8 do capítulo 2 que fornecem as expressões das derivadas dos operadores $h^* F_{h(\Omega)} h^{*-1}$ e $h^* B_{h(\Omega)} h^{*-1}$.

1.1.2 A simetria de Ω e a multiplicidade dos autovalores

Os autores Driscoll [4] e Tanikawa [27] já haviam notado que a simetria da região de definição da equação implica na presença de autovalores múltiplos, dependendo do grupo de simetria G de Ω. No entanto, foi A.L.Pereira [17] que investigou com mais detalhes as consequências da simetria da região sobre autovalores do Laplaciano com condição de Dirichlet.

Sejam Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$ e G um subgrupo do grupo ortogonal $O(n)$. Dizemos que Ω é G-simétrico ou G-invariante se $g\Omega = \Omega$ para todo $g \in G$. Podemos considerar a representação Γ de G em $L^2(\Omega)$ dada por

$$\Gamma_g u(x) = u \circ g^{-1}.$$

A representação Γ pode também ser chamada de ação de natural de G em $L^2(\Omega)$.

A representação Γ possui a propriedade fundamental, para nossos propósitos, de comutar com o Laplaciano e Bilaplaciano, isto é,

$$(\Gamma_g \circ \Delta)u = \Gamma_g(\Delta u) = (\Delta u) \circ g^{-1} = \Delta(u \circ g^{-1}) = (\Delta \circ \Gamma_g)u.$$

Assim, os auto-espaços $Ker(\Delta+\lambda)$ (resp $Ker(\Delta^2+\mu)$) são invariantes para Γ, pois se $\phi \in Ker(\Delta+\lambda)$ então $\Gamma_g\phi = \phi \circ g^{-1} \in Ker(\Delta + \lambda)$. Além disso, Γ induz uma decomposição ortogonal no espaço $L^2(\Omega)$, isto é,

$$L^2(\Omega) = \bigoplus_{\sigma \in \hat{G}} M_\sigma,$$

onde cada espaço M_σ e o Laplaciano (resp Bilaplaciano) deixa cada espaço M_σ invariante.

Supondo que G possua um ponto livre, A.L.Pereira [16], [17] mostrou que em regiões Ω G-

simétricas sempre existem autovalores múltiplos para o Laplaciano, exceto para subgrupos G isomorfos a $\mathbb{Z}_2 \oplus ... \oplus \mathbb{Z}_2$ (m vezes). Mais precisamente, os autovalores possuem multiplicidade tão grande quanto forem as dimensões das representações irredutíveis de G.

Portanto, na presença de simetria , a situação genérica esperada é: para um conjunto residual de regiões G-simétricas a ação de G em $Ker(\Delta + \lambda)$ é irredutível para todos os autovalores do Laplaciano (resp Bilaplaciano). Um determinado autovalor cuja ação de G em $Ker(\Delta + \lambda)$ (resp $Ker(\Delta^2 + \mu)$) é irredutível será chamado de autovalor G-simples.

Desta forma, pode-se formular a seguinte conjectura a respeito dos autovalores dos problemas de Laplace com condição de Dirichlet, Neumann e Bilaplaciano com condição de Dirichlet.

Conjectura 1. *Seja G um subgrupo compacto de $O(n)$. Em um conjunto residual de regiões G-simétricas do $\mathbb{R}^n$ todos os autovalores de qualquer um dos problemas citados acima são G-simples.*

Pode-se dividir a conjectura 1 em dois sub-problemas:

(I) Em um conjunto residual de regiões G-simétricas do $\mathbb{R}^n$ a ação de natural de G em $Ker(\Delta + \lambda) \cap M_\sigma$ (resp $Ker(\Delta^2 + \mu) \cap M_\sigma$) é irredutível.

(II) Em um conjunto residual de regiões G-simétricas do $\mathbb{R}^n$ não existem autovalores do Laplaciano (resp Bilaplaciano) com autofunções associadas pertencentes a dois M_σ distintos.

No que se segue diremos que um autovalor λ para o Laplaciano restrito aos espaços de simetria M_σ é G_σ-simples se a ação natural de G em $Ker(\Delta + \lambda) \cap M_\sigma$ é irredutível.

1.2 Resultados

Tanikawa [27] considerou apenas regiões do $\mathbb{R}^n$ com simetria $\mathbb{Z}_3$ e provou o resultado de genericidade para o Laplaciano com condição de Dirichlet restrito aos espaços de simetria M_σ, já Driscoll obteve em [4] uma resposta completa para a conjectura considerando o Laplaciano com condição de Dirichlet em regiões contidas em $\mathbb{R}^2$ com simetria $\mathbb{Z}_m$, para $2 \leq m \leq 4$. A.L.Pereira [17] mostrou que a conjectura é verdadeira para as classes de grupos comutativos finitos e subgrupos finitos de $O(2)$. Além disso, A.L.Pereira mostrou, neste trabalho, um resultado parcial considerando regiões do $\mathbb{R}^n$ cujo grupo de simetria é compacto comutativo infinito com dimensão $< n - 2$. Na verdade, foi estabelecida a etapa (I) da conjectura 1, ou seja, a G_σ-simplicidade dos autovalores do Laplaciano restrito aos espaços de simetria M_σ. Em todos esses trabalhos pode-se notar que a dificuldade em provar a conjectura ocorre quando a dimensão d_σ das representações irredutíveis de G é maior que 2.

Obtivemos, no presente trabalho, alguns resultados parciais para a conjectura considerando também o Laplaciano com condição de fronteira de Dirichlet. Mais precisamente, mostramos que em um conjunto residual de regiões C^2-regulares G-simétricas todos os autovalores do Laplaciano, restrito aos espaços de simetria M_σ, são G_σ-simples, onde G pode ser qualquer subgrupo compacto de $O(n)$.

M.C.Pereira [19], [18] mostrou que a conjectura 1 é verdadeira para o Bilaplaciano se o grupo de simetria for isomorfo a $\mathbb{Z}_2$. Pode-se notar, nesses trabalhos, que a ordem do operador torna o problema de simplicidade genérica bem mais delicado. Mostramos aqui que a conjectura, para o Bilaplaciano, é verdadeira para a classe de grupos comutativos . Além disso, foram provados todos os resultados parciais obtidos para o Laplaciano também para o Bilaplaciano.

Para provar todos os resultados citados acima, tanto para o Laplaciano com condição de Dirichlet como para o Bilaplaciano foi necessário calcular as expressões para as derivadas de curvas de autovalores onde o parâmetro é o domínio da equação. A existência de curvas analíticas de autovalores e autofunções, bem como a continuidade dos autovalores em relação a variação do domínio, podem ser obtidas da Teoria de Perturbação dos Operadores Lineares(ver [10]). Aparentemente a existência dessas curvas para o Laplaciano com condição de Neumman pode também ser extraída dos resultados de [10], porém preferimos seguir a linha apresentado por Henry [6], exemplos 4.1 e 4.4.

1.3 Organização do Trabalho

No Capítulo 2 apresentaremos de forma sucinta a teoria de perturbação de fronteira desenvolvida por Henry em [6].

No Capítulo 3 apresentaremos as definições e conceitos a respeito da teoria de representações de grupos compactos e as consequências da simetria da região Ω de definição das equações consideradas.

No Capítulo 4 revisitamos o problema da situação genérica dos autovalores do Laplaciano com condição de fronteira de Dirichlet apresentando a demonstração da conjectura 1 para as mesmas classes de grupos de simetria considerados por A.L.Pereira em [17], [16], provamos também alguns novos resultados parciais no presente trabalho.

No Capítulo 5 encontram-se os resultados obtidos para o Bilaplaciano. Mais precisamente todos os resultados provados para o Laplaciano a respeito da conjectura 1 tamém foram provados para o Bilaplaciano.

Os Capítulos 6, 7 contêm os resultados a respeito do Laplaciano com condição de Neumann. No primeiro estão os teoremas sobre a continuidade dos autovalores em relação ao domínio e a existência de curvas analíticas de autofunções. Esses resultados foram provados seguindo a mesma linha de raciocínio apresentada por Henry em [6], exemplo 4.4. No segundo estão os resultados da com relação à conjectura propriamente dita.

Por fim, no capítulo 8, encontram-se os cálculos para os operadores de fronteira que aparecem nos capítulos 4, 5 e 7.

O apêndice trará o Teorema de Puiseux que foi utilizado no capítulo 6.

Capítulo 2

Perturbação de Fronteira

Neste capítulo encontra-se uma apresentação sucinta da teoria de perturbação de fronteira desenvolvida por Henry [6].

2.1 Definições e resultados preliminares

Estabeleceremos aqui algumas definições e notações que serão utilizadas ao longo de todo o trabalho.

Pontos $x \in \mathbb{R}^n$ serão representados por uma n-upla de números reais $x = (x_1, ..., x_n)$. Utilizaremos a representação de multi-índice para derivadas parciais

$$\partial_x^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}$$

onde $\alpha = (\alpha_1, ...\alpha_n) \in \mathbb{N}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$. Denotaremos as derivadas parciais também da seguinte forma:

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \text{ e } D^\alpha = D_1^{\alpha_1} ... D_n^{\alpha_n}$$

Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é m-diferenciável no ponto x, então sua m-ésima derivada pode ser representada das seguintes formas:

- como a coleção das derivadas parciais de ordem m

$$D^m f(x) = \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha ; |\alpha| = m \right\}$$

- como uma forma m-linear simétrica em $\mathbb{R}^n$

$$h \mapsto D^m f(x) h^m$$

onde a norma pode ser definida por

$$|D^m f(x)| = \max_{|h| \leq 1} |D^m f(x) h^m|.$$

Denotaremos por Ω um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$ com fronteira $\partial\Omega$ e fecho $\overline{\Omega}$. Dado um espaço vetorial normado E, $C^m(\Omega, E)$ é o espaço das funções limitadas m-diferenciáveis $f : \Omega \to E$ com derivadas limitadas que também se estendem continuamente a $\overline{\Omega}$, com norma

$$||f||_{C^m(\Omega,E)} = \max_{0 \leq j \leq m} \sup_{x \in \Omega} |D^m f(x)|.$$

Se $E = \mathbb{R}$ então $C^m(\Omega, E)$ será apenas $C^m(\Omega)$. Desta forma, podemos definir os seguintes subespaços

- C_0^m é o subespaço das funções m-diferenciáveis com suporte compacto em Ω.
- C_{unif}^m é o subespaço fechado em $C^m(\Omega, E)$ das funções com a m-ésima derivada uniformemente contínua. Observe que se Ω é limitado esse conjunto é o próprio $C^m(\Omega, E)$.
- $C^{m,\alpha}(\Omega, E)$ é o espaço das funções cuja a m-ésima derivada é Holder contínua com expoente α, $0 < \alpha \leq 1$, e norma

$$||f||_{C^{m,\alpha}(\Omega,E)} = \max \left\{ ||f||_{C^m(\Omega,E)}, H_\alpha^\Omega(D^m f) \right\}$$

onde

$$H_\alpha^\Omega(f) = \sup \left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}; x \neq y \in \Omega \right\}.$$

Dizemos que um conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é C^m-regular ou possui fronteira C^m-regular se existir $\phi \in C^m(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, ou pelo menos C_{unif}^1, tal que

$$\Omega = \{x; \phi(x) > 0\}$$

e $\phi(x) = 0$ implica $|\nabla \phi(x)| \geq 1$.

Está provado em [6] que, para abertos limitados, a definição acima é equivalente às definições apresentadas em [3] e [2].

Além dos espaços de funções suaves acima faremos uso recorrente de espaços de funções de Sobolev. Apresentaremos as definições básicas desses espaços.

Sejam m um inteiro não negativo, $1 \leq p < \infty$ e Ω um aberto limitado. Para $u \in C^m(\Omega)$ definimos a norma

$$||u|| = \left(\int_\Omega \sum_{|\alpha| \leq m} |D^\alpha u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

O espaço vetorial $C^m(\Omega)$ não é completo quando equipado com essa norma. O completamento do espaço $C^m(\Omega)$ com a norma acima é denotado por $H^{m,p}(\Omega)$. Considere também o espaço $W^{m,p}(\Omega)$ das funções m vezes fracamente diferenciáveis cujas derivadas fracas de ordem menor ou igual a m pertencem a $L^p(\Omega)$. Prova-se que se $\partial\Omega$ é C^m-regular então $W^{p,m}(\Omega) = C^{p,m}(\Omega)$. Usaremos para $p = 2$ a notação $H^{p,m}(\Omega) = H^m(\Omega)$.

De modo análogo definiremos $H_0^m(\Omega)$ como o completamento do espaço $C_0^m(\Omega)$ e $W_0^m(\Omega)$ o espaços das funções cuja a m-ésima derivada fraca pertence a $L^p(\Omega)$ satisfazendo, para $|\alpha| \leq \frac{m}{2}$, $D^\alpha u = 0$ em $\partial\Omega$.

Para funções ϕ definidas sobre Ω introduziremos a classe de funções $W^{m-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$ de forma que ϕ é o valor de fronteira de funções $v \in W^m(\Omega)$ cuja a norma é dada por

$$||\phi|| = \inf ||v||_{W^{m,p}(\Omega)}$$

onde ínfimo é tomado sobre todas $v \in W^m(\Omega)$ tal que $v_{|\partial\Omega} = \phi$.

Por muitas vezes necessitaremos trabalhar com operadores diferenciais em hipersuperfícies do $\mathbb{R}^n$.

Sejam S uma hipersuperfície C^1 em $\mathbb{R}^n$ e $\phi : S \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Para uma curva suave $x(t)$ em S temos

$$\frac{d}{dt}\phi(x(t)) = \nabla_S \phi(x(t)) \cdot \dot{x}(t),$$

onde $\nabla_S \phi$ é um campo vetorial tangente em S.

Sejam S uma hipersuperfície C^2 em $\mathbb{R}^n$ e $\overrightarrow{a}$ um campo C^1 em S. Definimos $div_S \overrightarrow{a}: S \to \mathbb{R}$ como a função contínua tal que para toda função $\phi : S \to \mathbb{R}$ de classe C^1 com suporte compacto em S

$$\int_S \phi div_S \vec{a} = -\int_S \vec{a} \cdot \nabla\phi.$$

Sejam $u : S \to \mathbb{R}$ de classe C^2, então $\Delta_S u = div_S \nabla_S u$, ou equivalentemente, para toda função $\phi : S \to \mathbb{R}$ temos

$$\int_S \phi \Delta_S u = -\int_S \nabla_S \phi \cdot \nabla_S u.$$

Teorema 2.1. .

1. *Se S é uma hipersuperfície C^1 em $\mathbb{R}^n$ e $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^1 em uma vizinhança de S, então $\nabla_S \phi(x)$ é a componente tangencial de $\nabla\phi$ em S no ponto x, ou seja,*

$$\nabla_S \phi = \nabla\phi - N\frac{\partial\phi}{\partial N},$$

onde N é o campo vetorial normal exterior sobre S.

2. *Se S é de classe C^2, $\vec{a}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 definido em uma vizinhança de S, N o campo normal exterior a S. Então*

$$div_S \vec{a} = div\ \vec{a} - H(x)\ \vec{a} - \frac{\partial}{\partial N}(\vec{a} \cdot N)$$

sobre S, onde $H(x) = divN(x)$.

3. *Se S e $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ são de classe C^2, então*

$$\Delta_S u = \Delta u - divN\frac{\partial u}{\partial N} - \frac{\partial^2 u}{\partial N^2} + \nabla_S u \cdot \frac{\partial N}{\partial N},$$

sobre S, onde $H(x) = divN(x)$.

Demonstração. Ver [6].

□

Teorema 2.2. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, C^2-regular e $h(t,.)$ uma família de difeomorfismo tal que $\frac{\partial}{\partial t}h(t,x) = V(t,h(t,x))$, $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 h}{\partial t \partial x}$ são contínuas e $V \in C^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$. Se $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é de* *classe C^1, então para t próximo de zero, $t \mapsto \int_{\partial\Omega(t)} f(t,x)dA_x$ é classe C^1 e*

$$\frac{d}{dt}\int_{\partial\Omega(t)} f(t,x)dA_x = \int_{\partial\Omega(t)} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + V\cdot N\frac{\partial f}{\partial N} + HV\cdot Nf\right) dA_x,$$

N é o campo normal exterior a $\partial\Omega(t)$ e $H = divN$.

O Teorema de Unicidade de Cauchy será ferramenta fundamental na demonstração dos nossos resultados de separação.

Teorema 2.3. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, conexo, limitado, C^4-regular e B uma bola aberta em $\mathbb{R}^n$ com raio positivo tal que $B \cap \partial\Omega$ é uma hipersuperfície de classe C^4. Suponha que $u \in H^4(\Omega)$ satisfaça*

$$|\Delta^2 u| \leq C(|\Delta u| + |\nabla u| + |u|) \ q.t.p \text{ em } \Omega$$

para alguma constante C positiva e que

$$u = \frac{\partial u}{\partial N} = \Delta u = \frac{\partial(\Delta u)}{\partial N} = 0 \text{ em } B \cap \partial\Omega.$$

Então u é necessariamente nula em Ω.

Teorema 2.4. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, conexo, limitado, C^2-regular e B uma bola aberta em $\mathbb{R}^n$ com raio positivo tal que $B \cap \partial\Omega$ é uma hipersuperfície de classe C^2. Suponha que $u \in H^2(\Omega)$ satisfaça*

$$|\Delta u| \leq C(|\nabla u| + |u|) \ q.t.p \text{ em } \Omega$$

para alguma constante C positiva e que

$$u = \frac{\partial u}{\partial N} = 0 \text{ em } B \cap \partial\Omega.$$

Então u é necessariamente nula em Ω.

2.2 Perturbação de Fronteira

Consideremos o operador diferencial linear formal

$$Lu(x) = \left(u(x), \frac{\partial u}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}(x), \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x), \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1}(x), \ldots\right), \ x \in \mathbb{R}^n,$$

$Lu(x) \in \mathbb{R}^p$. Dada uma função $f : O \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, O conjunto aberto, podemos definir o operador diferencial formal por

$$v(x) = f(x, Lu(x)).$$

Para abertos Ω do $\mathbb{R}^n$ definimos o operador F_Ω por

$$F_\Omega = f(x, Lu(x)), \ x \in \Omega$$

para funções definidas em Ω suficientemente suaves tais que $(x, Lu(x)) \in O$, para todo $x \in \bar{\Omega}$. Por exemplo, se f for contínua, Ω limitado e o operador diferencial L for de ordem menor ou igual a m, então o domínio de F_Ω é um subconjunto aberto de $C^m(\Omega)$ e a imagem está contida em $C^0(\Omega)$. Isto é,

$$\begin{aligned} F_\Omega : D_{F_\Omega} \subset C^m(\Omega) &\to C^0(\Omega) \\ u &\mapsto f(x, Lu(x)). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Seja $h : \Omega \to \mathbb{R}^n$ difeomorfismo de classe C^m. Definimos a aplicação de composição por

$$h^*u(x) = (u \circ h)(x) = u(h(x)), \ x \in \Omega$$

onde u está definida em $h(\Omega)$.

Proposição 2.5. *A aplicação*

$$\begin{aligned} h^* : C^m(h(\Omega)) &\to C^m(\Omega) \\ u &\mapsto u \circ h \end{aligned}$$

é um isomorfismo com inversa $h^{*-1} = (h^{-1})^*$.

Demonstração. Se h é um difeomorfismo de classe C^m temos, pela regra da cadeia, que h^* está bem definido e é linear, injetiva e sobrejetiva. De fato, é também limitada, pois $||h^*u||_{C^m(\Omega)} = ||u \circ h||_{C^m(\Omega)} \leq c||u||_{C^m(h(\Omega))}$ para algum $c > 0$.

□

As perturbações regulares serão realizadas por difeomorfismos como o definido acima. Deste modo, podemos considerar o operador diferencial formal agindo em funções definidas na região perturbada $h(\Omega)$, ou seja,

$$F_{h(\Omega)} : D_{F_{h(\Omega)}} \subset C^m(h(\Omega)) \to C^0(h(\Omega)).$$

Essa forma de considerar o operador diferencial é chamada forma Euleriana, onde os coeficientes do operador é o mesmo, porém agindo em espaços de funções diferentes. Enquanto

$$h^* F_{h(\Omega)} h^{*-1} : h^* D_{F_{h(\Omega)}} \subset C^m(\Omega) \to C^0(\Omega)$$

é chamada forma Lagrangeana para o mesmo operador diferencial formal, neste caso os coeficientes do operador variam com h. O diagrama a seguir esclarece a relação entre as duas formas de representação.

$$\begin{tikzcd} C^m(h(\Omega)) \arrow[r, "F_{h(\Omega)}"] \arrow[d, "h^*"'] & C^0(h(\Omega)) \arrow[d, "h^*"] \\ C^m(\Omega) \arrow[r, "h^* F_{h(\Omega)} h^{*-1}"] & C^0(\Omega) \end{tikzcd}$$

A forma Euleriana é mais natural e em geral mais simples para fazer cálculos (ver, por exemplo, o corolário 6.5), já a forma Lagrangeana é utilizada para provar os teoremas (ver capítulo 6).

A vantagem da forma Lagrangeana está no fato dos espaços de funções não dependerem de h. Isso possibilita o uso de teoremas tais como Teorema das Funções Implícitas e Inversa. Entretanto, para podermos utilizarmos, de fato, esses teoremas precisamos garantir a diferenciabilidade de

$$(u, h) \mapsto h^* F_{h(\Omega)} h^{*-1}, \tag{2.2}$$

além de calcular as derivadas com relação a h. Em verdade, precisamos explicitar em que conjunto estamos tomando o parâmetro h. Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é aberto, limitado, com fronteira $\partial\Omega$ m-regular, então

$$Diff^m(\Omega) = \{h \in C^m(\Omega, \mathbb{R}^n)/h \text{ é injetivo e } |deth_x(x)|^{-1} \text{ é limitado em } \Omega\}.$$

Henry mostra em [6] que a aplicação dada em (2.2) é tão regular quanto for a função f que o define.

2.2.1 Cálculo na forma Lagrangeana

Vimos na seção anterior que

$$h \to h^* F_{h(\Omega)} h^{*-1} u$$

é derivável, para obter a expressão da derivada basta calcular a derivada de Gâteaux, isto é, a t-derivada ao longo de uma curva C^1 de difeomorfismos $t \to h(t,.)$. Nosso interesse é calcular

$$\frac{\partial}{\partial t} F_{\Omega(t)}(v)(y) = \frac{\partial}{\partial t} f(y, Lv(y))$$

com $y = (h(t,x))$ fixo em $\Omega(t) = h(t,\Omega)$. Para que y permaneça fixo devemos ter $x = x(t)$, $y = h(t,x(t))$ tal que

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x} x'(t) = 0,$$

ou equivalentemente

$$x'(t). = \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^{-1} \frac{\partial h}{\partial t}.$$

Ou seja, se $U(t,x) = \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^{-1} \frac{\partial h}{\partial t}$, $x(t)$ é a solução da equação diferencial $\frac{dx}{dt} = U(t,x(t))$, assim a derivada na forma Euleriana com $y = h(t,x)$ fixo corresponde à *derivada anti-convectiva* D_t da forma Lagrangeana na região de referência Ω

$$D_t = \frac{\partial}{\partial t} - U(t,x)\frac{\partial}{\partial x},\ U(x,t) = \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^{-1} \frac{\partial h}{\partial t}.$$

Os próximos teoremas, cujas demonstrações encontram-se em [6], permitem calcular as expressões para as derivadas.

Teorema 2.6. *Seja $f(t,y,\lambda)$ de classe C^1 num conjunto aberto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, L é um operador diferencial com coeficientes constantes de ordem menor ou igual m com $Lv(y) \in \mathbb{R}^p$. Para um conjunto aberto $Q \subset \mathbb{R}^n$ e funções v definidas em Q, seja $F_Q(t)v$ a aplicação definida por*

$$y \mapsto f(t,y,Lv(y)),\ y \in Q.$$

Suponhamos que $t \to h(t,.)$ é uma curva de difeomorfismo de um aberto $\Omega \subset Q$, $\Omega(t) = h(t,\Omega)$ e para $|j| \le m$, $|k| \le m+1, (t,x) \mapsto \partial_t \partial_x^j h(t,x), \partial_x^k h(t,x), \partial_x^k u(t,x)$ são contínuas em $\mathbb{R} \times \Omega$ numa vizinhança de $t = 0$ e que $h^{*-1}u(t,.)$ está no domínio de $F_{\Omega(t)}$. Então nos pontos de Ω

$$D_t(h^* F_{\Omega(t)}(t) h^{*-1}) = h^* \dot{F}_{\Omega(t)}(t) h^{*-1} u + h^* F'_{\Omega(t)}(t) h^{*-1} \cdot D_t u$$

onde D_t é a derivada anti-convectiva definida anteriormente,

$$\dot{F}_Q(t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, y, Lv)$$

e

$$F'_Q(t)v \cdot \omega(y) = \frac{\partial f}{\partial \lambda}(t, y, Lv(y)) \cdot L\omega(y), \ y \in Q$$

é a linearização de $y \to F_Q(t)v$.

Exemplo: Sejam $A = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(y)(\frac{\partial}{\partial y})^\alpha$ um operador diferencial linear de ordem m que não depende explicitamente de t e $h(t,x) = x + tV(t)$ é uma família de difeomorfismos numa vizinhança de $t = 0$ e $x \in \Omega$. Então, pelo teorema 2.6, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(h^* A h^{*-1})\big|_{t=0} &= D_t(h^* A h^{*-1})\big|_{t=0} + h_x^{-1} h_t \cdot \nabla(h^* A h^{*-1})\big|_{t=0} \\ &= A\left(\frac{\partial u}{\partial t} - V \cdot \nabla u\right) + V \cdot \nabla(Au) \\ &= A\frac{\partial u}{\partial t} + [V \cdot \nabla, A]u. \end{aligned}$$

$[V \cdot \nabla, A]$ é chamado comutador e embora $V \cdot \nabla A$ e $A(V \cdot \nabla)$ sejam operadores de ordem $m+1$ o comutador é de ordem m e portanto pode ser aplicado em funções de classe C^m.

As principais condições de fronteira que aparecerão ao longo deste trabalho serão: $u = 0$, $\frac{\partial u}{\partial N} = 0$, $(\frac{\partial}{\partial N} + \beta(x))u = 0$. Entretanto, a teoria desenvolvida por Henry permite tratar condições de fronteira mais gerais, tais como

$$b(t, y, Lv, MN_{\Omega(t)}(y)) = 0 \text{ para } y \in \partial\Omega(t),$$

onde L e M são operadores diferenciais com coeficientes constantes e $N_{\Omega(t)}$ é o campo vetorial normal exterior a $\partial\Omega(t)$, estendido suavemente a um campo vetorial em uma vizinhança de $\partial\Omega(t)$. Escolhendo alguma extensão para o campo N_Ω na região de referência definimos $N_{h(\Omega)}$ por

$$h^* N_{h(\Omega)}(x) = N_{h(\Omega)}(h(x)) = \frac{(h_x^{-1})^t N_\Omega}{||(h_x^{-1})^t N_\Omega||} \tag{2.3}$$

para x próximo à $\partial\Omega$, onde $(h_x^{-1})^t$ é a transposta inversa da matriz Jacobiana h_x e $||.||$ é a norma Euclideana. A extensão $N_{h(\Omega)}$ definida acima deve ser entendida da seguinte forma:
$b(t, y, Lv, MN_{\Omega(t)}(y)) = 0$ para $y \in \partial\Omega(t)$ está definido para $y \in \Omega$ próximo a $\partial\Omega$ e tem limite zero

quando quando $y \to \partial\Omega$, onde o limite depende dos espaços de funções empregados.

Lema 2.7. *Sejam Ω região C^2-regular, N_Ω campo normal exterior de classe C^1, e para uma função $h : \Omega \to \mathbb{R}^n$ defina $N_{h(\Omega)}$ sobre uma vizinhança de $h(\partial\Omega) = \partial h(\Omega)$ como em (2.3). Suponha que $h(t,.)$ é um difeomorfismo para cada t definido por*

$$\frac{\partial}{\partial t} h(t,.) = V(t, h(t,.)) \text{ para } x \in \Omega, \; h(0,x) = x,$$

$(t,y) \to V(t,y)$ aplicação de classe C^2, $\Omega(t) = h(t,\Omega)$. Então para x próximo a $\partial\Omega$ e $y = h(t,x)$ próximo a $\partial\Omega(t)$ podemos calcular a derivada $(\partial/\partial_t)_{y=constante}$ e, se $y \in \partial\Omega$,

$$\frac{\partial}{\partial t} N_{\Omega(t)}(y) = D_t(h^{*-1} N_{\Omega(t)})(x) = -\left(\nabla_{\partial\Omega}\sigma + \sigma \frac{N_\Omega}{N_\Omega}\right),$$

onde $\sigma(t) = V(t,y) \cdot N_{\Omega(t)}(y)$ e $\nabla_{\partial\Omega}$ é a derivada tangencial a $\partial\Omega$.

Teorema 2.8. *Sejam $b(t,y,\lambda,\mu)$ aplicação de classe C^1 sobre um subconjunto aberto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ e L, M operadores diferenciais com coeficientes constantes de ordem $\leq m$ com dimensões apropriadas para que $b(t,y,Lv(y), MN_\Omega(y))$ faça sentido. Assuma que Ω é uma região C^m-regular, N_Ω é o campo vetorial normal exterior a $\partial\Omega$ e defina $N_{h(\Omega)}$ como em (2.3) quando $h : \Omega \to \mathbb{R}^n$ é um difeomorfismo de classe C^{m+1}. Defina também $\mathcal{B}_{h(\Omega)}(t)$ por*

$$\mathcal{B}_{h(\Omega)}(t)v(y) = b(t,y,Lv(y), MN_{h(\Omega)}(y))$$

para y próximo à $\partial\Omega(t)$. Se $t \to h(t,.)$ é uma curva de difeomorfismos de Ω e para $|j| \leq m$, $|k| \leq m+1$, $(t,x) \to (\partial_t \partial_x^j h, \partial_x^k h, \partial_t \partial_x^j u, \partial_x^k u)(t,x)$ são contínuas sobre $\mathbb{R} \times \Omega$ próximo $t = 0$, então em pontos de Ω próximos à $\partial\Omega$

$$\begin{aligned} D_t(h^* \mathcal{B}_{h(\Omega)}(t) h^{*-1})(u) &= h^* \dot{\mathcal{B}}_{h(\Omega)}(t) h^{*-1} u + h^* \mathcal{B}'_{h(\Omega)}(t) h^{*-1}(u \cdot D_t u) \\ &\quad + \left(h^* \frac{\partial \mathcal{B}_{h(\Omega)}}{\partial N}(t) h^{*-1}\right) u \cdot D_t(h^* N_{\Omega(t)}), \end{aligned}$$

onde $h = h(t,.)$, $\dot{\mathcal{B}}$, $\mathcal{B}'_{h(\Omega)}(t)$ são dados como no teorema 2.6,

$$\frac{\partial \mathcal{B}_{h(\Omega)}}{\partial N}(t)(v) \cdot \eta(y) = \frac{\partial b}{\partial \mu}(t,y,Lv(y), MN_\Omega(y)) \cdot M\eta(y)$$

e $D_t(h^*N_{\Omega(t)})\big|_{\partial\Omega}$ *é dada como no lema 2.7.*

Exemplo: Vamos aplicar o teorema anterior para calcular a derivada da condição de fronteira $h^*(\frac{\partial}{\partial N_h}+\beta)h^{*-1}u$. Se $h(t,x)=x+tV(x)+o(t)$ é uma família de difeomorfismos, então

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}h^*(\frac{\partial}{\partial N}+\beta)h^{*-1}u\big|_{t=0} &= \left(D_t\left(h^*(\frac{\partial}{\partial N}+\beta)h^{*-1}u\right)\right)\big|_{t=0}+\\
&\quad +V\cdot\nabla\left(\frac{\partial}{\partial N}+\beta\right)u\\
&= \left(\frac{\partial}{\partial N}+\beta\right)D_tu\big|_{t=0}+D_t(h^*N_{h(\Omega)})\big|_{t=0}\cdot\nabla u\\
&= \left(\frac{\partial}{\partial N}+\beta\right)\left(\frac{\partial u}{\partial t}-V\cdot\nabla u\right)-\\
&\quad -\left(\nabla_{\partial\Omega}\sigma+\frac{\partial N}{\partial N}\right)\cdot\nabla u.
\end{aligned}$$

2.2.2 Diferenciabilidade na forma Euleriana

Com a forma Lagrangeana fica mais simples avaliar a regularidade do operador diferencial com relação ao parâmetro h, porém em muitas ocasiões será necessário utilizar a forma Euleriana não apenas para realizar os cálculos, mas também para fazer uma análise mais fina do comportamento do problema perturbado (ver teorema 5.1).

Considere a aplicação

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\ :\ & D_{\mathcal{F}}\subset H^m(\Omega)\times Diff^m(\Omega)\to H^{m-k}(\Omega)\\
& (h,u)\mapsto h^*F_{h(\Omega)}h^{*-1}u
\end{aligned}$$

onde $F_{h(\Omega)}$ é um operador diferencial formal definido em (2.1) com f suficientemente regular e $h^*D_{F_{h(\Omega)}}\subset H^m(\Omega)$. Suponha que exista uma curva diferenciável $h\mapsto u_h\in H^m(\Omega)$ tal que $\mathcal{F}(h,u_h)=h^*F_{h(\Omega)}h^{*-1}u_h=0$. Queremos mostrar que a curva definida por $h^*v_h=u_h$ é diferenciável em h, ou seja, a curva de soluções para o operador diferencial formal na forma Euleriana é diferenciável.

Faremos agora uma breve exposição de como obter a diferenciabilidade para a curva v_h. Começaremos com um teorema sobre extensão de funções definidas inicialmente em Ω para $\mathbb{R}^n$ mantendo a mesma regularidade.

Teorema 2.9. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto com fronteira $C^{m,\alpha}$ ou $(C^{m,\alpha+})$, $1 \leq m < \infty$. Existe um operador linear E_Ω que leva funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$ em funções $E_\Omega(u) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $E_\Omega(u) = u$ sobre Ω, para qualquer inteiro $0 \leq k \leq m$, e quaisquer p e β em $1 \leq p \leq \infty$, $0 \leq \beta \leq 1$, com $k + \beta \leq m + \alpha$,*

$$||u||_{W^{k,p}(\Omega)} \leq ||E_\Omega(u)||_{W^{k,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C_{m,\Omega}||u||_{W^{k,p}(\Omega)}$$

$$||u||_{C^{k,p}(\Omega)} \leq ||E_\Omega(u)||_{C^{k,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C_{m,\Omega}||u||_{C^{k,p}(\Omega)}$$

onde $C_{m,\Omega}$ é uma constante dependendo apenas de m e Ω. Se $\partial\Omega \in C^{k,\beta}$ e $u \in C^{k,\beta}$ então $E_\Omega u \in C^{k,\beta}(\mathbb{R}^n)$. Para qualquer $r_0 > 0$ nós podemos escolher uma r_0-vizinhança do suporte de u $(\subset\bar{\Omega})$ tal que $E_\Omega u$ fora de Ω depende apenas dos valores de u em uma r_0-vizinhança de $\partial\Omega$. Neste caso a constante $C_{m,\Omega}$ depende também de r_0. As constantes $C_{m,h(\Omega)}$ são limitadas quando h varia em uma $C^{m,\alpha}$-vizinhança da inclusão $i_\Omega : \Omega \to \mathbb{R}^n$. Se $\partial\Omega$ é C^∞_{loc} e $u = U_{|\Omega}$ para alguma $U \in C^\infty_{loc}(\mathbb{R}^n)$, então $E_\Omega u \in C^\infty_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Ver [6].

□

Lema 2.10. *Seja X um subconjunto convexo de $C^m(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ de aplicações H tais que $H(x) = x$ para $|x| \geq R_0$ (R_0 fixado) que são difeomorfismos com $D_jH(x)$ e $D_jH^{-1}(x)$ uniformemente limitadas para $0 \leq j \leq m$. Para cada j, $0 \leq j \leq m$, a aplicação*

$$\begin{aligned} \mathcal{I} \ &: \ X \subset C^m(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \to C^{m-j}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \\ &H \mapsto \mathcal{I}(H) = H^{-1} \end{aligned}$$

é de classe C^j e para $1 \leq p \leq \infty$ a aplicação

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \ &: \ W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \times X \to W^{m-j,p}(\mathbb{R}^n) \\ &(f, H) \mapsto \mathcal{F}(f, H) = f \circ H^{-1} \end{aligned}$$

é de classe C^j.

Demonstração. Ver [6].

□

Combinando os dois resultados acima obtém-se a regularidade de v_h. De fato, se E_Ω é o operador extensão dado pelo teorema 2.9, então a aplicação $h \mapsto E_\Omega(u_h)$ é derivável assim como $h \mapsto H = id_{\mathbb{R}^n} + E_\Omega(h - i_\Omega) \in C^m(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, e $H^{-1} \in C^m$ para h em alguma C^m-vizinhança de i_Ω. Definimos $v_h = (H^{-1})^* E_\Omega(u_h) \in H^m(\mathbb{R}^n)$, assim $F_{h(\Omega)} v_h \in H^{m-k}(\mathbb{R}^n)$ e $v_h|_{h(\Omega)} = h^{*-1} u_h$ é solução para o operador diferencial na forma Euleriana. Portanto, pelo Lema 2.10, temos que a aplicação $h \mapsto v_h \in H^j(\mathbb{R}^n)$ é de classe C^{m-j}.

Alguns exemplos onde serão realizados cálculos na forma Euleriana são:

$$\begin{cases} h^*(\Delta^2 + \lambda) h^{*-1} v = 0, & em \ \Omega; \\ v = \frac{\partial v}{\partial N} = 0, & em \ \partial\Omega; \end{cases}$$

na demonstração do teorema 5.1 e

$$\begin{cases} h^*(\Delta + \lambda) h^{*-1} u = 0, & em \ \Omega; \\ h^*(\frac{\partial}{\partial N_h}) h^{*-1} u = 0, & em \ \partial\Omega; \end{cases}$$

no cálculo da segunda derivada de autovalores múltiplos no corolário 6.5.

Capítulo 3

Consequências da simetria de Ω

3.1 Introdução

Apresentaremos neste capítulo algumas definições e resultados a respeito da Teoria de Representação de Grupos Compactos (ver [8] capítulo 3 seção 27 para detalhes e provas) necessários para se obter as principais consequências da simetria da região Ω. Entendemos por simetria de Ω o subgrupo G de $O(n)$ tal que $g\Omega = \Omega$ para todo $g \in G$. Diremos que Ω é G-simétrico ou G-invariante se existir um subgrupo não trivial de $O(n)$ tal que $g\Omega = \Omega$ para todo $g \in G$.

3.2 Preliminares Algébricas

Seja G um grupo compacto. Uma representação de G em um espaço de Hilbert H é um homomorfismo de grupo $V : G \to GL(H)$, onde $GL(H)$ é o grupo (com a operação de composição) dos operadores lineares contínuos inversíveis em H.

Considere H é um espaço de Hilbert complexo, uma representação V será chamada unitária se a imagem $V(g)$, que passaremos a denotar por V_g, for um operador unitário, para qualquer $g \in G$. Analogamente, se H for um espaço de Hilbert real a representação será chamada ortogonal se a imagem V_g for um operador ortogonal, para todo $g \in G$.

Definição 1. *Uma representação G é fortemente contínua se $\lim_{x \to e} V_x\xi = \xi$ para qualquer $\xi \in H$.*

Definição 2. *Sejam $V : G \to GL(H)$ e $V' : G \to GL(H')$ representações contínuas.*

1. *Diremos que V e V' são equivalentes se existir uma isometria linear $T : H \to H'$ tal que $V'_x \circ T = T \circ V_x$, para qualquer $x \in G$.*

2. *V é finita se H possui dimensão finita.*

3. *Um subespaço fechado $H_1 \subset H$ é invariante para V se $V_x H_1 \subset H_1$ para todo $x \in G$. A representação $V' : G \to GL(H_1)$ é denominada sub-representação de V e será indicada por $V|_{H_1}$.*

4. *V é irredutível se os únicos subespaços fechados invariantes para V são $\{0\}$ e H. Caso contrário, V é dita redutível.*

5. *Se $H = H_1 \oplus H_2 \oplus ... \oplus H_m$, onde os H_i são invariantes para V escrevemos $V = V|_{H_1} \oplus V|_{H_2} \oplus ... \oplus V_{H_m}$ e diremos que V é soma direta das representações $V|_{H_i}$.*

Teorema 3.1. *Toda representação unitária irredutível de G é de dimensão finita. G é abeliano se, e somente se toda representação irredutível de G possui dimensão 1.*

Seja V uma representação de dimensão finita de G. A função χ_V dada por $g \to trV_g$, onde tr denota o traço do operador V_g, é chamada caracter de V. Note que duas representações equivalentes possuem o mesmo caracter.

Seja G um subgrupo compacto do grupo ortogonal $O(n)$. O conjunto de todas as classes de equivalências de representações contínuas irredutíveis de G é chamado de *objeto dual* de G e será denotado por $\hat{G}$. Nós denotaremos por χ_σ o caracter de qualquer representação na classe $\sigma \in \hat{G}$ e por d_σ sua dimensão. Se H é um espaço de Hilbert e $V : G \to GL(H)$ é uma representação ortogonal de G, pode-se definir , para cada $\sigma \in \hat{G}$, o operador P_σ em H por

$$\langle P_\sigma, \eta \rangle = \int_G \langle V_g \xi, \eta \rangle \, d_\sigma \chi_\sigma(g) dg.$$

P_σ é uma projeção contínua (ver [8], Teorema 27.44). Chamaremos $P_\sigma H = M_\sigma$ de espaços de simetria.

O próximo teorema será fundamental para a seção seguinte e sua demonstração encontra-se em [16].

Teorema 3.2. *Seja G subgrupo compacto de $O(n)$ e V uma representação ortogonal de G em H. Para cada $\sigma \in \hat{G}$, seja P_σ o operador em H definido por:*

$$\langle P_\sigma \xi, \eta \rangle = \int_G \langle V_x \xi, \eta \rangle \, d_\sigma \chi_\sigma dx.$$

Então P_σ é um operador projeção em H. Façamos $P_\sigma H = M_\sigma$. Se $\sigma' \neq \sigma$ então $M_\sigma, M_{\sigma'}$ são subespaços ortogonais de H e $H = \oplus_{\sigma \in \hat{G}} M_\sigma$. Para cada $\sigma \in \hat{G}$, M_σ é 0 ou soma direta de m_σ subespaços invariantes $L_{\sigma,j}$ com $dim L_{\sigma,j} = d_\sigma$ e $V|_{L_{\sigma,j}} \in \sigma$.
O número cardinal m_σ pode ser finito ou infinito.
O subespaço M_σ é o menor subespaço fechado de H contendo todos os subespaços invariantes de H restrito aos quais V está em σ.
Essa soma é única no seguinte sentido:

$$Se\ H = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda,$$

onde N_λ é irredutível para todo $\lambda \in \Lambda$, então

$$\{N_\lambda | V|_{L_{N_\lambda}} \in \sigma\} = M_\sigma$$

e existem m_σ subespaços N_λ tais que $V_{|N_\lambda} \in \sigma$.

3.3 Consequências da simetria de Ω

Esta seção contém as principais consequências da simetria da região Ω sobre a multiplicidade dos autovalores do Laplaciano. O principal resultado apresentado aqui é devido a A.L.Pereira [17], [16]. Supondo que G possua um ponto livre, A.L.Pereira mostrou que em regiões Ω G-simétricas sempre existem autovalores múltiplos para o Laplaciano, exceto para subgrupos G isomorfos a $\mathbb{Z}_2 \oplus ... \oplus \mathbb{Z}_2$ (m vezes).

Se G é um subgrupo compacto de $O(n)$, existe uma ação natural de G em $\mathbb{R}^n$ dada por: $(g, x) \mapsto gx$. O subgrupo $G_x = \{g \in G : gx = x\}$ é chamado grupo de isotropia de $x \in \mathbb{R}^n$ e $G(x) = \{gx : g \in G\}$ é chamada órbita de x sobre essa ação. Um ponto $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $G_x = Id$ é chamado ponto livre.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, aberto, limitado, G-invariante e $\Gamma : G \to GL(L^2(\Omega))$ a representação de G definida por:

$$\Gamma_g u = u \circ g^{-1},\ \forall g \in G,\ \forall u \in L^2(\Omega).$$

Esta representação é ortogonal e possui a propriedade, fundamental, de comutar com o Laplaciano, isto é:

$$(\Gamma_g \circ \Delta)u = \Gamma_g(\Delta u) = (\Delta u) \circ g^{-1} = \Delta(u \circ g^{-1}) = (\Delta \circ \Gamma_g)u$$

para todo $u \in H^2(\Omega)$, e todo $g \in G$. Uma consequência imediata deste fato é que os auto-espaços do Laplaciano são invariantes pela representação Γ.

Para cada $\sigma \in \hat{G}$, seja P_σ a projeção definida no teorema 3.2:

$$\langle P_\sigma f, h\rangle = \int_G \langle \Gamma_g f, h\rangle \, d_\sigma \chi_\sigma dg.$$

O teorema 3.2 afirma que

$$L^2(\Omega) = \bigoplus_{\sigma \in \hat{G}} M_\sigma,$$

onde $M_\sigma = P_\sigma L^2(\Omega)$.

A próxima proposição mostra que os espaços M_σ são invariantes pelo Laplaciano e Bilaplaciano. Em verdade, é necessário definir um domínio para que o operador Laplaciano e o Bilaplaciano fiquem bem definidos. De fato, os domínios de nosso interesse são

$$\mathcal{D}_D = H^2 \cap H_0^1(\Omega),$$

$$\mathcal{D}_B = H^4 \cap H_0^2(\Omega)$$

e

$$\mathcal{D}_N = \{u \in H^2(\Omega) | \frac{\partial u}{\partial N} = 0, \; em \, \partial\Omega\}.$$

Esses domínios são determinados naturalmente pelas condições de fronteira de Dirichlet e Neumann, respectivamente. Em todo caso vale a seguinte

Proposição 3.3. *Os operadores Laplaciano e Bilaplaciano (com os domínios dados acima) são transformações lineares de $M_\sigma \cap \mathcal{D}$ em M_σ.*

Demonstração. Basta mostrarmos que $P_\sigma \Delta = \Delta P_\sigma$, o caso Δ^2 é inteiramente análogo. De fato, para quaisquer funções $u, v \in \mathcal{D}$ temos

$$\begin{aligned}
\langle P_\sigma \Delta u, v\rangle &= \int_G \langle (\Delta u)\circ g^{-1}, v\rangle\, d_\sigma \chi_\sigma dg. \\
&= \int_G \langle \Delta(u\circ g^{-1}), v\rangle\, d_\sigma \chi_\sigma dg. \\
&= \int_G \langle u\circ g^{-1}, \Delta v\rangle\, d_\sigma \chi_\sigma dg. \\
&= \langle P_\sigma u, \Delta v\rangle \\
&= \langle \Delta P_\sigma u, v\rangle .
\end{aligned}$$

Como cada um dos domínios $\mathcal{D}$ é denso em $L^2(\Omega)$ segue o resultado.

□

Com esse resultado e considerando a decomposição espectral do Laplaciano restrito aos espaços M_σ, pode-se provar que a dimensão dos auto-espaços são múltiplos de d_σ. Esse resultado segue diretamente da seguinte

Proposição 3.4. *Cada um dos espaços M_σ pode ser decomposto em soma direta de subespaços M_σ^i satisfazendo:*

1. *M_σ^i é invariante pela representação Γ e $\Gamma_{M_\sigma^i}$ é uma representação irredutível na classe σ.*

2. *M_σ^i é invariante pelo Laplaciano e $\Delta|_{M_\sigma^i}$ é um múltiplo da identidade, ou seja, M_σ^i é constituído de autofunções associadas a um mesmo autovalor λ.*

Demonstração. Considere a decomposição espectral do Laplaciano restrito ao espaço M_σ, ou seja, $M_\sigma = \oplus V_\lambda$ onde V_λ é o auto-espaço associado ao autovalor λ. Pela discussão realizada no início da seção o Laplaciano comuta com Γ, portanto os auto-espaços V_λ são invariantes por esta representação. O teorema 3.2 mostra que podemos decompor os espaços $V_\lambda = V_\lambda^1 \oplus \ldots \oplus V_\lambda^k$, onde cada V_λ^j são subespaços irredutíveis na classe σ. Portanto segue o resultado.

□

Corolário 3.5. *A multiplicidade de cada autovalor do Laplaciano restrito a M_σ é um múltiplo da dimensão de uma representação irredutível na classe σ.*

Demonstração. Segue imediatamente da proposição 3.4.

□

Nada do que foi dito até agora garante que os espaços M_σ sejam não vazios. Mesmo que G contenha representações irredutíveis com dimensão $d_\sigma > 1$ não podemos concluir que existam autovalores λ para o Laplaciano com multiplicidade maior que 1. Entretanto, considerando uma hipótese técnica adicional ao grupo G, pode-se garantir que a representação quase regular Γ contenha todas as classes de representações irredutíveis de G e portanto garantindo que nenhum dos espaços M_σ é vazio.

Teorema 3.6. *Se G é um subgrupo compacto de $O(n)$ que possui um ponto livre $x \in \Omega$, então para cada $\sigma \in \hat{G}$ existe um autovalor λ do Laplaciano e um subespaço H do auto-espaço associado V_λ tal que $\Gamma_{|_H}$ está na classe σ. Em particular, para todo $\sigma \in \hat{G}$, existem infinitos autovalores cuja a multiplicidade é um múltiplo não nulo da dimensão d_σ de qualquer representação irredutível de G na classe σ.*

Corolário 3.7. *Se G não é soma direta finita de grupos cíclicos de ordem 2 e possui um ponto livre, então sempre existe autovalores múltiplos do Laplaciano em toda região G-simétrica.*

Capítulo 4

Laplaciano com condição de Dirichlet em regiões simétricas

4.1 Introdução

Dedicamos o presente capítulo ao problema de genericidade dos autovalores simples para o problema de Laplace com condição de Dirichlet em regiões simétricas.

$$\begin{cases} (\Delta+\lambda)u=0, & em \ \ \Omega; \\ u=0, & em \ \ \partial\Omega; \end{cases} \tag{4.1}$$

Os resultados do capítulo anterior (ver corolário 3.7) mostram que, com exceção das regiões com simetria $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 ... \oplus \mathbb{Z}_2$, todos os outros tipos de simetria implicam na existência de autovalores múltiplos. Contudo, ainda existe uma multiplicidade mínima para os autovalores que está associada a características do grupo, mais precisamente à dimensão de suas representações reais[1] irredutíveis (ver proposição 3.4). Em termos das representações do grupo de simetria do domínio Ω, um autovalor λ possui multiplicidade mínima se a ação natural de G sobre $Ker(\Delta+\lambda)$ é irredutível (ver definição 3). Portanto, a situação genérica que podemos esperar é: para um conjunto residual de regiões G-simétricas a ação natural de G em $Ker(\Delta+\lambda)$ é irredutível para qualquer autovalor λ.

O conteúdo do principal teorema deste capítulo mostra que isto é verdade para subgrupos finitos de $O(n)$ cuja as representações irredutíveis possuam dimensão menor ou igual a dois. Como já citamos na introdução, esse teorema, foi demonstrado primeiramente por A.L.Pereira em [17], porém existem ao menos dois motivos para o apresentarmos neste trabalho. Primeiro por termos obtido

[1] Ao longo deste e dos próximos capítulos sempre que nos referimos a representações de G estaremos considerando representações reais

generalizações para alguns resultados apresentados em [17] (ver teorema 4.2 e os corolários 4.3, 4.9, 5.2),segundo, por utilizarmos um método diferente do argumento de transversalidade usado por A.L.Pereira. Como veremos a seguir o método de separação de autovalores usado aqui apresenta algumas vantagens sobre o Teorema da Transversalidade.

A simetria do domínio Ω tem implicações sobre o espaço de funções definidas em Ω . Se um aberto Ω do $\mathbb{R}^n$ é G-simétrico, onde G é um subgrupo compacto de $O(n)$ então, considerando a representação quase regular $\Gamma_g u = u \circ g^{-1}$, temos a seguinte decomposição

$$L^2(\Omega) = \bigoplus_{\sigma \in \hat{G}} M_\sigma,$$

onde $\hat{G}$ é o objeto dual do grupo G (ver teorema 3.2). Os espaços M_σ, que a partir de agora chamaremos de espaços de simetria, são caracterizados por possuírem uma base ortonormal $\{\phi_1^1, ..., \phi_{d_\sigma}^1, \phi_1^2, ..., \phi_{d_\sigma}^2, ...\}$ que satisfaz:

$$\begin{pmatrix} \phi_1^i \\ . \\ . \\ \phi_{d_\sigma}^i \end{pmatrix} \circ g = A_\sigma(g) \begin{pmatrix} \phi_1^i \\ . \\ . \\ \phi_{d_\sigma}^i \end{pmatrix}, \tag{4.2}$$

para todo $g \in G$ e $g \mapsto A_\sigma(g)$ é uma representação matricial ortogonal irredutível na classe σ de dimensão d_σ. Além disso, cada espaço M_σ é invariante pela ação do Laplaciano, ou seja, $\Delta(M_\sigma \cap H^2(\Omega)) \subset M_\sigma$ (ver proposição 3.3).

Com base na discussão acima temos a seguinte

Definição 3. *Um autovalor λ do operador $\Delta : H^2 \cap H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ será chamado G-simples se a ação natural de G em $Ker(\Delta + \lambda)$ é irredutível, ou seja, $g \mapsto \Gamma_g|_{Ker(\Delta+\lambda)}$ é irredutível.*

Portanto, podemos formular a conjectura[2]:

Conjectura 2. *Seja G um subgrupo compacto de $O(n)$. Em um conjunto residual de regiões G-simétricas do $\mathbb{R}^n$ todos os autovalores do problema de Laplace com condição de Dirichlet são G-simples.*

[2] Esta conjectura está enunciada exatamente da mesma forma em [16]

Desta forma, considerando a decomposição de $L^2(\Omega)$ e a invariância dos espaços M_σ pelo Laplaciano pode-se dividir a conjectura em duas etapas:

(I) Em um conjunto residual de regiões G-simétricas do $\mathbb{R}^n$ todos os autovalores do problema de Laplace com condição de Dirichlet restrito aos espaços de simetria M_σ são G-simples.

(II) Em um conjunto residual de regiões G-simétricas do $\mathbb{R}^n$ não existem autovalores do problema de Laplace com condição de Dirichlet com autofunções associadas pertencentes a dois M_σ distintos.

O que a etapa I está nos dizendo é: para um conjunto residual de regiões G-simétricas do $\mathbb{R}^n$ a ação natural de G em $ker(\Delta|_{M_\sigma} + \lambda) = Ker(\Delta + \lambda) \cap M_\sigma$ é irredutível, denotaremos tal autovalor por G_σ-simples. Entretanto, isso não quer dizer que a ação de G em $ker(\Delta + \lambda)$ seja irredutível, pode ocorrer que um mesmo autovalor possua autofunções associadas a M_{σ_1} e M_{σ_2} e a ação de G em $ker(\Delta|_{M_{\sigma_2}} + \lambda)$ e $ker(\Delta|_{M_{\sigma_1}} + \lambda)$ seja irredutível. Portanto, um autovalor λ do operador $\Delta_{|M_\sigma}$ ser G-simples não implica que também seja para o operador Δ. Motivado por esta observação temos a

Definição 4. *Dizemos que um autovalor λ está associado ao espaço de simetria M_σ se existir uma autofunção associada a λ pertencente a M_σ. Note que λ pode estar associado a mais de um espaço de simetria.*

Cada uma das etapas acima é, de certa forma, um problema independente e apresentam dificuldades particulares, como veremos nas próximas seções. O presente capítulo está organizado da seguinte forma. Na seção 4.2 encontra-se o resultado de separação para os autovalores do Laplaciano restrito aos espaços de simetria M_σ, onde $\sigma \in \hat{G}$ e G é um subgrupo compacto qualquer de $O(n)$. Já a seção 4.3 está dividida em duas subseções, em 4.3.1 encontra-se a demonstração de que é possível separar autovalores associados a dois espaços de simetria distintos, se G é subgrupo finito de $O(n)$ cuja representações irredutíveis tem dimensão menor ou igual a 2; em 4.3.2 encontra-se a prova da conjectura 2 com as mesmas hipóteses sobre o grupo G da seção anterior. Finalizamos o capítulo com uma pequena preparação para o estudo da conjectura 2 para o Bilaplaciano com condição de fronteira de Dirichlet e o Laplaciano com condição de froneira de Neumann.

4.2 Separação nos espaços M_σ

O problema de separação dos autovalores do Laplaciano restrito aos espaços de simetria é, de certo modo, análogo ao problema sem simetria. Na verdade a hipótese (que mostraremos ser contraditória) de não separabilidade por pequenas perturbações simétricas do domínio implica que o autovalor não varia com a perturbação do domínio. Além disso, as autofunções associadas a esse autovalor devem ser nulas em uma vizinhança aberta $(\subset \bar{\Omega})$ de $\partial\Omega$. Isto foi notado primeiramente por Henry para perturbação de domínios gerais (ver [6] exemplo 4.4). Esse comportamento aparece mais claramente quando estudamos o comportamento de um autovalor múltiplo aplicando a Teoria de Perturbação Analítica de Operadores Lineares apresentada por Kato em [10] ou o método de Henry utilizado no exemplo 4.4 de [6]. Desse modo, obtemos m curvas de autovalores (contando sua multiplicidade) também analíticas, para as quais podemos calcular as expressões da primeira e segunda derivadas utilizando o calculo diferencial desenvolvido por Henry em [6]. Os resultados de separação serão obtidos por meio da análise dessas derivadas.

Em linhas gerais, o argumento é o seguinte. Supondo a não separabilidade dos autovalores, teremos uma única curva de autovalor com multiplicidade m. As derivadas das curvas de autovalores são dadas pelos autovalores da matriz

$$\overset{\circ}{M}_{k,l}= \int_{\partial\Omega} V \cdot N \frac{\partial\varphi_l}{\partial N}\frac{\partial\varphi_k}{\partial N},$$

onde φ_j são autofunções associadas ao autovalor λ pertencentes a M_σ. A hipótese de não separabilidade implica imediatamente que a matriz $\overset{\circ}{M}$ é múltiplo da identidade. Supondo $m = rd_\sigma$, $r > 1$, teremos r conjuntos de autofunções $\{\phi_j^i\}_{j=1}^{d_\sigma}$ duas a duas ortogonais que satisfazem (4.2). Assim, para $i \neq k$

$$\int_{\partial\Omega} V \cdot N \frac{\partial\phi_j^i}{\partial N}\frac{\partial\phi_j^k}{\partial N}$$

é um elemento da matriz $\overset{\circ}{M}$ fora da diagonal e portanto igual zero. Segue do fato das autofunções $\{\phi_j^i\}_{j=1}^{d_\sigma}$ satisfazerem a relação (4.2) que a função dada por

$$\sum_{j=1}^{d_\sigma} \frac{\partial\phi_j^i}{\partial N}\frac{\partial\phi_j^k}{\partial N} \tag{4.3}$$

é G-invariante, logo

$$\int_{\partial\Omega} V \cdot N \left(\sum_{j=1}^{d_\sigma} \frac{\partial\phi_j^i}{\partial N}\frac{\partial\phi_j^k}{\partial N}\right) = 0$$

para todo campo V C^3-regular G-invariante.

Para concluirmos que

$$\sum_{j=1}^{d_\sigma} \frac{\partial \phi_j^i}{\partial N} \frac{\partial \phi_j^k}{\partial N} = 0 \ em \partial\Omega$$

precisamos do seguinte lema técnico.

Lema 4.1. *Sejam G subgrupo compacto de $O(n)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e N uma extensão contínua em Ω do campo normal unitário exterior em $\partial\Omega$. Se $\varphi : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ é uma função G-invariante contínua, então existe um campo $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^∞ equivariante, isto é, $V(gx) = gV(x)$ tal que $V \cdot N_{\partial\Omega}$ está arbitrariamente próximo a φ na topologia uniforme. (Se $\varphi \in L^p(\partial\Omega)$, a aproximação pode ser realizada na topologia de $L^p(\partial\Omega)$).*

Demonstração. Considere $W : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^∞ e próximo a φN na topologia uniforme. Defina $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ por

$$V(x) = \int_G g^{-1} W(gx) dg,$$

segue que V é equivariante. Além disso, temos

$$\begin{aligned} V(x) - \varphi(x)N(x) &= \int_G g^{-1} W(gx) - \varphi(x) g_{-1} N(gx) dg \\ &= \int_G g^{-1} (W(gx) - \varphi(x)N(gx)) dg. \end{aligned}$$

Portanto V está próximo a φN na topologia uniforme. □

Portanto a relação entre as autofunções dada em (4.3) deve ser nula na fronteira de Ω (ver lema 4.1). A dificuldade encontrada para provar o resultado está justamente em mostrar essa condição não pode correr. Essa dificuldade foi superada graças ao fato dos autovalores da matriz $\overset{\circ}{M}$ não dependerem da escolha das autofunções associadas, bastando apenas serem ortonormais. Como veremos na demonstração do teorema 4.2 é justamente esta liberdade na escolha das autofunções o principal ingrediente da demonstração.

O principal avanço com relação aos resultados de separação restrito aos espaços de simetria M_σ anteriores está justamente em não exigir nenhuma hipótese, além da compacidade, para o grupo G de simetria do domínio Ω. Este é o conteúdo do teorema 4.2 a seguir.

Teorema 4.2. *Sejam G subgrupo compacto de $O(n)$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, aberto, limitado, conexo com fronteira C^3-regular e G-simétrico. Se λ é um autovalor com multiplicidade md_σ, $m > 1$, para o operador:*

$$\Delta : M_\sigma \cap H^2 \cap H_0^1(\Omega) \to M_\sigma$$

onde $\sigma \in \hat{G}$. Então λ pode ser decomposto em m autovalores G_σ-simples por meio de pequenas perturbações G-simétricas de Ω. Mais precisamente, dado qualquer $\epsilon > 0$ existem $h \in Diff_G^2(\Omega)$, $||h - i_\Omega||_{C^2} < \epsilon$ e $\delta > 0$ tal que existem exatamente m autovalores $\lambda(h)$ G_σ-simples do operador $h^*\Delta h^{*-1} : M_\sigma \cap H^2 \cap H_0(\Omega) \to M_\sigma$ no interval $(\lambda - \delta, \lambda + \delta)$.

Observação 4.2.1. *Note que o teorema acima afirma que os autovalores do operador $\Delta|_{M_\sigma}$ quando separados são G-simples, ou seja, a ação natural de G no $Ker(\Delta|_{M_\sigma} + \lambda(h))$ é irredutível. Isto não implica que a ação de G em $Ker(\Delta + \lambda(h))$ é irredutível, ou seja, podem existir autofunções associadas pertencentes a outros espaços de simetria diferentes de M_σ, mesmo depois de perturbado.*

Demonstração. Suponha que a multiplicidade de λ não possa ser reduzida por pequenas perturbações de Ω. Então, dado $\epsilon > 0$, existe uma vizinhança $\mathcal{V}$ de i_Ω em $C^3(\Omega, \mathbb{R}^n)$ tal que para todo h nesta vizinhança existe apenas um autovalor $\lambda(h)$ com multiplicidade md_σ, $|\lambda(h) - \lambda| < \epsilon$.

Como estamos supondo que λ é autovalor para $\Delta_{|_{M_\sigma}}$ com auto-funções pertencentes a M_σ, então $ker(\Delta_{|_{M_\sigma}} + \lambda)$ é um subespaço do espaço M_σ invariante pela representação quase-regular Γ. Com isto, cada sub-representação irredutível em $ker(\Delta_{|_{M_\sigma}} + \lambda)$ é equivalente à representação matricial: $g \mapsto A_\sigma(g)$, onde $A_\sigma(g)$ é matriz ortogonal de dimensão d_σ. Portanto existe uma base ortonormal $\{\phi_j^i\}, j = 1, .., d_\sigma, i = 1, ..., m$ para $ker(\Delta_{|_{M_\sigma}} + \lambda)$ com a propriedade (4.2) para cada índice $i = 1, ..., m$.

Considere a seguinte curva de difeomorfismos $h(x,t) = x + tV(x)$, com $V \in C^3(\Omega, \mathbb{R}^n)$ e G-invariante. Assim, temos uma família de operadores

$$h^*(t,.)(\Delta)h^{*-1}(t,.) : M_\sigma \cap H^2 \cap H_0(\Omega) \to M_\sigma$$

analíticas no sentido de Kato. Segue do Teorema 3.9 (Kato, capítulo VII pag 392), a existência de $d_\sigma m$ curvas analíticas de autovalores $\mu_k(t)$, $\mu_k(0) = \lambda$, e $d_\sigma m$ curvas analíticas de autofunções $\psi_k(t)$ associadas, $\psi_k(0) \in ker(\Delta_{|_{M_\sigma}} + \lambda)$. Considerando nossa hipótese de não separabilidade, existe apenas uma curva de autovalores $\mu(t)$ com multiplicidade $d_\sigma m$. Portanto, tomando qualquer uma das curvas de autofunções $\psi(t) = \psi_k(t)$ temos:

$$\begin{cases} h^*(t,)(\Delta + \mu(t))h^{*-1}(t,)\psi(t) = 0, & em\ \ \Omega; \\ \psi(t) = 0, & em\ \ \partial\Omega; \end{cases} \tag{4.4}$$

Utilizando o teorema 2.6 segue

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial t}\left[h^*(\Delta + \mu(t))h^{*-1}\psi(t)\right]\Big|_{t=0} \\ &= D_t\left[h^*(\Delta + \mu(t))h^{*-1}\psi(t)\right]\Big|_{t=0} + V \cdot \nabla[(\Delta + \mu(0))\psi(0)] \\ &= D_t\left(h^*(t,)(\Delta + \mu(t))h^{*-1}(t,)\psi(t)\right)\Big|_{t=0} \\ &= (\Delta + \lambda)D_t(\psi(t))|_{t=0} + \dot{\mu}\ \psi(0) \\ &= (\Delta + \lambda)(\dot{\psi}\ (0) - V \cdot \nabla\psi(0)) + \dot{\mu}\ \psi(0) \end{aligned} \tag{4.5}$$

onde $\dot{\mu} = \frac{d}{dt}\mu(t)|_{t=0}$, $\dot{\psi}(0) = \frac{d}{dt}\psi(t)|_{t=0} = 0$. Como $\partial\Omega$ é de classe C^3 temos que $\psi(0) \in H^3(\Omega)$ e $V \cdot \nabla\psi(0) \in H^2(\Omega)$.

Vamos reindexar as autofunções $\{\phi_j^i\}$, $j = 1,..,d_\sigma, i = 1,..,m$, dadas inicialmente da seguinte forma:

$$\varphi_k = \phi_j^i, com\ \ k = (i-1)d_\sigma + j$$

ou seja, $k = 1, ..., d_\sigma m$. Lembrando que $\psi(0) = \sum_{j=1}^{d_\sigma m} c_j\varphi_k$ para c_k não todos nulos, multiplicando a equação (4.5) por φ_k e integrando, obtemos

$$\begin{aligned}
\dot{\mu} c_k &= \sum_{j=1}^{d_\sigma m} \int_\Omega c_j \varphi_j \varphi_k \\
&= -\int_\Omega \varphi_k (\Delta + \lambda)(\dot{\psi} - V \cdot \nabla \psi) \\
&= \int_\Omega (\dot{\psi} - V \cdot \nabla \psi)(\Delta + \lambda)\varphi_k - \varphi_k (\Delta + \lambda)(\dot{\psi} - V \cdot \nabla \psi) \\
&= \int_{\partial\Omega} \left(\dot{\psi} - V \cdot N \frac{\partial \psi}{\partial N}\right) \frac{\partial \varphi_k}{\partial N} - \varphi_k \frac{\partial}{\partial N}\left(\dot{\psi} - V \cdot N \frac{\partial \psi}{\partial N}\right) \\
&= -\int_{\partial\Omega} V \cdot N \frac{\partial \psi}{\partial N} \frac{\partial \varphi_k}{\partial N} \\
&= -\sum_{l=1}^{d_\sigma m} c_l \int_{\partial\Omega} V \cdot N \frac{\partial \varphi_l}{\partial N} \frac{\partial \varphi_k}{\partial N} \qquad (4.6)
\end{aligned}$$

Portanto a derivada das curvas de autovalores $\mu(t)$ são dadas pelos autovalores da matriz simétrica

$$\overset{\circ}{M}_{k,l} = \int_{\partial\Omega} V \cdot N \frac{\partial \varphi_l}{\partial N} \frac{\partial \varphi_k}{\partial N}$$

Como estamos supondo que os autovalores não se separam quando t varia, todos os autovalores de $\overset{\circ}{M}$ devem ser iguais, logo $\overset{\circ}{M} = \dot{\mu} I$ onde I é a matriz identidade. Assim devemos ter

$$\int_{\partial\Omega} V \cdot N \left(\frac{\partial \varphi_l}{\partial N}\right)^2 = \int_{\partial\Omega} V \cdot N \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial N}\right)^2, \qquad (4.7)$$

$$\int_{\partial\Omega} V \cdot N \frac{\partial \varphi_l}{\partial N} \frac{\partial \varphi_k}{\partial N} = 0,\ k \neq l, \qquad (4.8)$$

para todo campo V em $C^3(\Omega, \mathbb{R}^n)$ G-invariante. Observe que os elementos da matriz $\overset{\circ}{M}$ são dados pelo produto de

$$\frac{\partial \phi_j^i}{\partial N} \frac{\partial \phi_k^l}{\partial N}$$

para todos $i, l = 1, .., m$ e $j, k = 1, .., d_\sigma$. Além disto, a função

$$\sum_{j=1}^{d_\sigma} \frac{\partial \phi_j^i}{\partial N} \frac{\partial \phi_j^l}{\partial N}$$

é G-invariante para todo i, l, pois por um lado

$$\frac{\partial}{\partial N}(\phi_j^i \circ g)(x) = gN(x) \cdot \nabla\phi_j^i(gx) = N(gx) \cdot \nabla\phi_j^i(gx) = \frac{\partial \phi_j^i}{\partial N}(gx)$$

e por outro lado

$$\frac{\partial}{\partial N}(\phi_j^i \circ g)(x) = \sum_{j=1}^{d_\sigma} a_{kj}(g)\frac{\partial \phi_k^i}{\partial N}(x)$$

onde $a(g)_{k,j}$ são elementos da matriz $A(g)$. Portanto, pelo lema 4.1, (4.7) e (4.8), temos que

$$\sum_{j=1}^{d_\sigma} \left(\frac{\partial \phi_j^i}{\partial N}\right)^2 - \left(\frac{\partial \phi_j^l}{\partial N}\right)^2 = 0 \tag{4.9}$$

$$\sum_{j=1}^{d_\sigma} \frac{\partial \phi_j^i}{\partial N}\frac{\partial \phi_j^l}{\partial N} = 0 \tag{4.10}$$

em $\partial\Omega$.

A seguir mostraremos que as observações acima, aliadas ao fato dos autovalores da matriz $\overset{\circ}{M}$ não dependerem da escolha de ϕ_j^i implicam que $\frac{\partial \phi_j^i}{\partial N} = 0$ em $\partial\Omega$. Defina para todo $i = 1, ..., m$ as seguintes funções $v_i : \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$,

$$v_i(x) = \left(\frac{\partial \phi_1^i}{\partial N}, \frac{\partial \phi_2^i}{\partial N}, ..., \frac{\partial \phi_{d_\sigma}^i}{\partial N}\right).$$

Como $\phi_j^i \in M_\sigma$ satisfazem a propriedade (4.2), as funções definidas acima satisfazem,

$$v_i(gx) = A_\sigma(g)v_i(x)$$

para todo $g \in G$. Para cada $i = 1, ..., m$ e x em $\partial\Omega$ fixos onde $v_i(x) \neq 0$ temos que $\{v_i(gx)\}_{g\in G}$ gera o $\mathbb{R}^{d_\sigma}$. De fato, como $g \mapsto A_\sigma(g)$ é uma sub-representação irredutível de G na classe σ, segue que todo vetor não nulo de $\mathbb{R}^{d_\sigma}$ é cíclico pela ação da sub-representação portanto segue o resultado.

Note que tomando $i = 1$, $g \in G$ e substituindo as autofunções $\phi_1^1, .., \phi_{d_\sigma}^1$ por $\phi_1^1 \circ g, ..., \phi_{d_\sigma}^1 \circ g$ o novo conjunto ortonormal de autofunções formado por $\{\phi_j^1 \circ g\}_{j=1}^{d_\sigma} \cup \{\phi_j^i\}_{i=2,j=1}^{m,d_\sigma}$ constitui uma nova base para $ker(\Delta_{|M_\sigma} + \lambda)$. Agora como os autovalores da matriz $\overset{\circ}{M}$ não dependem da escolha das autofunções, as equações (4.9) e (4.10) valem para as novas funções. Portanto a partir da propriedade (4.2) e da equação (4.10) segue que

$$0=\sum_{j=1}^{d_\sigma}\frac{\partial}{\partial N}(\phi_j^1\circ g)(x)\frac{\partial\phi_j^l}{\partial N}(x)=\langle v_1(gx),v_l(x)\rangle$$

para cada $x\in\partial\Omega$, onde $\langle,\rangle$ denota o produto interno do $\mathbb{R}^{d_\sigma}$ e v_l como definido acima. Suponha que $v_1(x)\neq 0$ para algum x em $\partial\Omega$, então os vetores $\{v_1(gx)\}_{g\in G}$ geram o $\mathbb{R}^{d_\sigma}$, logo a equação acima mostra que $v_l(x)=0$ que resulta em $\frac{\partial\phi_j^l}{\partial N}=0$ em $\partial\Omega$ para todo $j=1,2,...,d_\sigma$ e todo $l\neq 1$. Consequentemente, por (4.9), $\frac{\partial\phi_j^i}{\partial N}(x)=0$ em $\partial\Omega$ para todo i,j. Decorre do Teorema de Unicidade de Cauchy que $\phi_j^i=0$ em Ω.

□

O corolário a seguir mostra que a etapa I da conjectura 2 é verdadeira para qualquer subgrupo compacto de $O(n)$. Isto é um avanço em direção à prova completa da conjectura, visto que até o presente momento, a validade dessa etapa havia sido comprovada apenas para subgrupos finitos de $O(n)$ cuja representações irredutíveis tem dimensão menor ou igual a dois e subgrupos comutativos infinitos com $dimG<n-2$.

Corolário 4.3. *Seja G subgrupo compacto de $O(n)$ e $\sigma\in\hat{G}$ tal que M_σ é não vazio. O subconjunto*

$$\begin{aligned}\mathcal{C} &= \{h\in Diff_G^2(\Omega)|\ \text{todos os autovalores do operador}\\ &\quad \Delta: M_\sigma\cap H^2\cap H_0^1(\Omega)\to M_\sigma\ \text{são}\ G_\sigma-\text{simples}\}\end{aligned}$$

é residual em $Diff_G^2(\Omega)$.

Demonstração. Considere o conjunto

$$\mathcal{C}_k=\{h\in Diff_G^2(\Omega)|\ \text{os autovalores}\ \lambda\ \text{do}\ \Delta_{|\mathrm{M}_\sigma},\ \lambda<\mathrm{k}\ \text{são}\ \mathrm{G}-\text{simples}\}.$$

Como $Diff_G^2(\Omega)$ é um espaço de Baire basta mostrar que $\mathcal{C}_k$ é aberto e denso em $Diff_G^2(\Omega)$, assim o conjunto $\mathcal{C}=\cap_{k\in\mathbb{N}}\mathcal{C}_k$ é residual em $Diff_G^2(\Omega)$. O teorema 4.2 garante que $\mathcal{C}_k$ é denso. Para ver que $\mathcal{C}_k$ é aberto basta mostrar que os autovalores G-simples do operador $h^*\Delta_{|_{M_\sigma}}h^{*-1}$ são contínuos com relação ao parâmetro h. De fato, o resultado segue dos Teoremas IV-3.16 e IV-2.14 de [10]. Assim dado um autovalor λ G_σ-simples para o operador $\Delta_{|_{M_\sigma}}$ existe uma vizinhança $\mathcal{V}$ de i_Ω em $Diff^2_G(\Omega)$ tal que para todo $h \in \mathcal{V}$ existem exatamente d_σ autovalores próximos a λ. Desta forma, tomando qualquer autofunção ϕ em $ker(h^*\Delta h^{*-1} + \lambda) \cap M_\sigma$ temos que $\{\Gamma_g \phi, g \in G\}$ gera d_σ autofunções linearmente independentes, isto é, a multiplicidade de $\lambda(h)$ é d_σ e portanto G-simples.

□

4.3 Separação entre espaços M_σ e a Prova da Conjectura

4.3.1 Separação entre espaços M_σ distintos

Separar autovalores que possuem autofunções associadas pertencentes a dois espaços de simetria distintos é, como veremos a seguir, a parte mais difícil da prova da conjectura 2. Isso se deve ao fato de que, supondo a não separabilidade dos autovalores, não conseguimos obter, usando a primeira derivada, informações análogas as obtidas anteriormente sobre as derivadas normais $\frac{\partial \phi_k}{\partial N}$ na fronteira $\partial\Omega$. Desta forma, somos levados a calcular a segunda derivada para as curvas de autovalores. Tais derivadas nos fornecem, ainda supondo a não separabilidade, que certos operadores de fronteira (ver teorema 8.4) são identicamente nulos. Esses operadores são os mesmos obtidos por A.L.Pereira em [16].

O passo seguinte é calcular a expansão desses operadores em certas funções especiais para obtermos mais informações sobre as autofunções na fronteira de Ω. Para isso A.L.Pereira em [16] utilizou o Método das Soluções "Rapidamente Oscilantes"desenvolvido por Henry e é precisamente nesse ponto que reside toda a dificuldade do problema.

Contudo, a barreira que realmente nos impede de obter o resultado de separação para grupos quaisquer, não está no cálculo dos termos da expansão, mas sim na manipulação dos mesmos. O principal impedimento, como veremos no lema 4.5, é o tamanho da dimensão das representações irredutíveis de G. Precisamente o que ocorre é o seguinte: supondo que exista um autovalor λ, que não se separa, associado a dois espaços de simetria M_{σ_1} e M_{σ_2} distintos (conforme definição 4), obteremos por meio da matriz da primeira derivada a relação

$$\frac{1}{d_{\sigma_1}} \sum_{j=1}^{d_{\sigma_1}} \left(\frac{\partial \phi^1_j}{\partial N} \right)^2 = \frac{1}{d_{\sigma_2}} \sum_{j=1}^{d_{\sigma_2}} \left(\frac{\partial \phi^2_j}{\partial N} \right)^2 \quad em\, \partial\Omega.$$

E importante observar que a condição (4.10) foi fundamental na demonstração do teorema 4.2, porém não é possível obter uma condição análoga quando estamos considerando um autovalor associado a dois espaços de simetria distintos. Desta forma, somos levados a calcular a segunda derivada para as curvas de autovalores. Ao fazê-lo nos depararemos com o operador de fronteira Θ (ver a demonstração do teorema 4.4):

$$\sigma \mapsto \frac{1}{d_{\sigma_1}} \sum_{j=1}^{d_{\sigma_1}} \frac{\partial \phi_j^1}{\partial N} \frac{\partial}{\partial N} \mathcal{B}_{\Delta+\lambda} \left(\sigma \frac{\partial \phi_j^1}{\partial N} \right) - \frac{1}{d_{\sigma_2}} \sum_{j=1}^{d_{\sigma_2}} \frac{\partial \phi_j^2}{\partial N} \frac{\partial}{\partial N} \mathcal{B}_{\Delta+\lambda} \left(\sigma \frac{\partial \phi_j^2}{\partial N} \right),$$

a hipótese de não separabilidade implicará que o operador acima deve ser nulo, consequentemente também serão todos os termos da expansão. Calculando as expressões para os termos obtém-se mais informações sobre as autofunções na fronteira de Ω. Utilizando o Método das Soluções "Rapidamente Oscilantes"encontra-se a seguinte expansão (ver teorema 8.4)
$\Theta(\sigma cos\omega\theta) = \frac{2}{\omega}\sigma C(\theta) cos\omega\theta + \mathcal{O}(\omega^{-2})$, onde $C(\theta)$ é dado por

$$C(\theta) = \sum_{j=1}^{d_{\sigma_1}} \frac{1}{d_{\sigma_1}} \left(|\nabla \frac{\partial \phi_j^1}{\partial N}|^2 - |\frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial \phi_j^1}{\partial N}|^2 \right) - \sum_{j=1}^{d_{\sigma_2}} \frac{1}{d_{\sigma_2}} \left(|\nabla \frac{\partial \phi_j^2}{\partial N}|^2 + |\frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial \phi_j^2}{\partial N}|^2 \right)$$

e θ é uma função suave G-invariante. Como, sob nossas hipóteses, o operador Θ é nulo devemos ter $C(\theta) \equiv 0$ em $\partial\Omega$ para toda função θ suave e G-invariante. Se G for finito o teorema 8.4 mostra que

$$\frac{1}{d_{\sigma_1}} \sum_{j=1}^{d_{\sigma_1}} |\frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial \phi_j^1}{\partial N}|^2 = \frac{1}{d_{\sigma_2}} \sum_{j=1}^{d_{\sigma_2}} |\frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial \phi_j^2}{\partial N}|^2 \tag{4.11}$$

para todo $\tau \in T_x(\partial\Omega)$. Com essa identidade e mais a obtida através da primeira derivada somente foi possível atingir a contradição com a hipótese adicional $d_{\sigma_i} \leq 2$ (ver lema 4.5).

Teorema 4.4. *Sejam G um subgrupo finito de $O(n)$ tal que $d_\sigma \leq 2$ para todo $\sigma \in \hat{G}$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, aberto, limitado, conexo, com fronteira C^4-regular e G-simétrico. Se λ é autovalor associado a M_{σ_1} e M_{σ_2} para o operador:*

$$\Delta : (M_{\sigma_1} \oplus M_{\sigma_2}) \cap H^2 \cap H_0^1(\Omega) \to (M_{\sigma_1} \oplus M_{\sigma_2})$$

tal que a ação de G em $ker(\Delta|_{M_{\sigma_1}} + \lambda)$ e $ker(\Delta|_{M_{\sigma_2}} + \lambda)$ é irredutível, então λ pode ser decomposto em dois autovalores G-simples por meio de pequenas perturbações G-simétricas de Ω. Mais precisamente, dado qualquer $\epsilon > 0$, existem $h \in Diff_G^2(\Omega)$, $||h - i_\Omega||_{C^2} < \epsilon$ e $\delta > 0$ tais que existem exatamente 2 *autovalores* $\lambda_1(h), \lambda_2(h)$ *pertencentes ao intervalo* $(\lambda-\delta, \lambda+\delta)$, *para o operador*

$$h^*\Delta h^{*-1} : (M_{\sigma_1} \oplus M_{\sigma_2}) \cap H^2 \cap H_0^1(\Omega) \to (M_{\sigma_1} \oplus M_{\sigma_2})$$

onde a ação de G *em* $ker(h^*\Delta h^{*-1}|_{(M_{\sigma_1}\oplus M_{\sigma_2})}+\lambda_1(h))$ *e* $ker(h^*\Delta h^{*-1}|_{(M_{\sigma_2}\oplus M_{\sigma_1})}+\lambda_2(h))$ *é irredutível.*

Demonstração. Mais uma vez vamos supor que não é possível separar o autovalor. Raciocinando como na demonstração do teorema 4.2, escolhemos uma base ortonormal $\{\phi_j^i\}$ para o auto-espaço associado que satisfaz $\phi_j^i \in M_{\sigma_i}$ e

$$\begin{pmatrix} \phi_1^i \\ . \\ . \\ \phi_{d_{\sigma_i}}^i \end{pmatrix} \circ g = A_{\sigma_i}(g) \begin{pmatrix} \phi_1^i \\ . \\ . \\ \phi_{d_{\sigma_i}}^i \end{pmatrix}. \tag{4.12}$$

Com isso, temos que matriz derivada $\overset{\circ}{M}$ para as curvas de autovalores é dada por

$$\overset{\circ}{M}_{k,l}= \int_{\partial\Omega} V \cdot N \frac{\partial \varphi_l}{\partial N}\frac{\partial \varphi_k}{\partial N}$$

onde $\varphi_k = \phi_k^i$, $i = 1$ se $0 \leq k \leq d_{\sigma_1}$ e $i = 2$ se $d_{\sigma_1} < k \leq d_{\sigma_1} + d_{\sigma_2}$. A hipótese de não separabilidade implica em $\overset{\circ}{M}= \dot{\mu} I$, ou seja, valem as relações (4.7) e (4.8), para todo campo V em $C^3(\Omega, \mathbb{R}^n)$ G-invariante.

Podemos apenas concluir de (4.7) que

$$\frac{1}{d_{\sigma_1}} \sum_{j=1}^{d_{\sigma_1}} \left(\frac{\partial \phi_j^1}{\partial N}\right)^2 = \frac{1}{d_{\sigma_2}} \sum_{j=1}^{d_{\sigma_2}} \left(\frac{\partial \phi_j^2}{\partial N}\right)^2 \quad em\, \partial\Omega. \tag{4.13}$$

Como obtemos por meio da matriz derivada somente a condição (4.13), não é possível aplicar o mesmo procedimento realizado na demonstração do teorema 4.2. Desta forma somos levados a calcular a segunda derivada para as curvas de autovalores. Calculamos a primeira derivada usando a forma Lagrangeana, porém para a segunda derivada a forma Euleriana é mais apropriada (ver capítulo 2, seção 2.2.2).

Seja $t \to h(t, .)$ uma família analítica de difeomorfismo de classe C^4 G-invariante. Como estamos supondo que o autovalor não se separa (a multiplicidade não muda quando variamos o parâmetro t) existe uma família ortonormal de autofunções $\{\varphi_k(t)\}_{j=1}^{m}$[3], analíticas em t, associadas a curva de autovalores $\mu(t)$. Desta forma, utilizando o teorema 2.9 e o lema 2.10 podemos estender as autofunções em todo o $\mathbb{R}^n$ de forma que $\xi_k(t,.)|_{h(t,\Omega)} = h^{*-1}(t,.)\varphi_k(t)$ satisfaz

$$\begin{cases} (\Delta + \mu(t))\xi_k(t,.) = 0, & em \ \ \Omega(t); \\ \xi_k(t,.) = 0, & em \ \ \partial\Omega(t). \end{cases} \tag{4.14}$$

A expressão encontrada para os elementos da matriz $\overset{\circ}{M}$ deve ser a mesma para todo domínio $\Omega(t)$ e como já vimos $\xi_k(t,.)$ é duas vezes diferenciável em t, segue então que

$$\overset{\circ}{M}_{k,l}(t) = \int_{\partial\Omega(t)} V \cdot N_t \frac{\partial \xi_l}{\partial N_t}(t,.) \frac{\partial \xi_k}{\partial N_t}(t,.)$$

é diferenciável na variável t. Fazendo $\sigma = V \cdot N$, derivando a expressão acima:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \overset{\circ}{M}_{k,l}(t)\Big|_{t=0} &= \int_{\partial\Omega} \frac{d}{dt}\left\{\sigma_t \frac{\partial \xi_l}{\partial N_t}(t,.)\frac{\partial \xi_k}{\partial N_t}(t,.)\right\}\Big|_{t=0} + \\ &+ \ \sigma\frac{\partial}{\partial N}\left\{\sigma\frac{\partial \xi_l}{\partial N}\frac{\partial \xi_k}{\partial N}\right\} + \sigma^2 H \frac{\partial \xi_l}{\partial N}\frac{\partial \xi_k}{\partial N} \end{aligned}$$

, supondo a não separabilidade temos que $\frac{d}{dt}\overset{\circ}{M}_{k,l}(t)\Big|_{t=0} = \ddot{\mu} I$. Note que

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \xi_l}{\partial N_t}(t,.)\Big|_{t=0} = \dot{N} \cdot \nabla \xi_k + \frac{\partial \dot{\xi}_k}{\partial N} = -\nabla_{\partial\Omega}\sigma \cdot N \frac{\partial \xi_k}{\partial N} + \frac{\partial \dot{\xi}_k}{\partial N} = \frac{\partial \dot{\xi}_k}{\partial N},$$

a igualdade $\dot{N} = -\nabla_{\partial\Omega}\sigma$ é dada pelo lema 2.7, considerando N tal que $\frac{\partial N}{\partial N} \equiv 0$ e

$$\frac{\partial^2 \xi_k}{\partial N^2} = -H\frac{\partial \xi_k}{\partial N},$$

onde a igualdade segue do teorema 2.1.

[3]Não é possível construir uma família ortonormal analítica em t se a multiplicidade varia com t, veja [10], pag

Dessas observações segue

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \overset{\circ}{M}_{k,l}(t)\Big|_{t=0} &= \int_{\partial\Omega} \left[\frac{\partial\sigma}{\partial t} + \sigma\frac{\partial\sigma}{\partial N} + H\sigma^2\right] \frac{\partial\varphi_l}{\partial N}\frac{\partial\varphi_k}{\partial N} \\ &+ \int_{\partial\Omega} \sigma \left\{ \frac{\partial\varphi_k}{\partial N}\frac{\partial\dot{\xi}_l}{\partial N} + \frac{\partial\varphi_l}{\partial N}\frac{\partial\dot{\xi}_k}{\partial N} \right\} \end{aligned} \tag{4.15}$$

Sabemos que as funções

$$\sum_{l=1}^{d_{\sigma_1}} \left(\frac{\partial\xi_l}{\partial N}\right)^2 = \sum_{l=1}^{d_{\sigma_1}} \left(\frac{\partial\phi_l^1}{\partial N}\right)^2 \tag{4.16}$$

$$\sum_{l=1+d_{\sigma_1}}^{d_{\sigma_1}+d_{\sigma_2}} \left(\frac{\partial\xi_l}{\partial N}\right)^2 = \sum_{l=1}^{d_{\sigma_2}} \left(\frac{\partial\phi_l^2}{\partial N}\right)^2 \tag{4.17}$$

definidas em $\partial\Omega$ são G-invariantes e satisfazem a relação (4.13). Além disso, as funções $\dot{\xi}_k$ são soluções para a equação

$$\begin{cases} (\Delta+\mu)\dot{\xi}_k + \dot{\mu}\xi_k = 0, & em\ \ \Omega(t); \\ \dot{\xi}_k = -V\cdot N\frac{\partial\xi_k}{\partial N}, & em\ \ \partial\Omega(t); \end{cases} \tag{4.18}$$

portanto

$$\sum_{l=1}^{d_{\sigma_1}} \frac{\partial\phi_l^1}{\partial N}\frac{\partial\dot{\xi}_l}{\partial N}\ , \quad \sum_{l=1}^{d_{\sigma_2}} \frac{\partial\phi_l^2}{\partial N}\frac{\partial\dot{\xi}_{l+d_{\sigma_1}}}{\partial N}$$

também são G-invariantes.

Agora note que

$$\frac{1}{d_{\sigma_1}}\sum_{l=1}^{d_{\sigma_1}} \frac{d}{dt}\overset{\circ}{M}_{ll} = \frac{1}{d_{\sigma_2}}\sum_{l=d_{\sigma_1}+1}^{d_{\sigma_1}+d_{\sigma_2}} \frac{d}{dt}\overset{\circ}{M}_{ll},$$

pois $\frac{d}{dt}\left.\overset{\circ}{M}_{k,l}(t)\right|_{t=0} = \dot{\mu} I$, ou seja,

$$\int_{\partial\Omega}\left[\frac{\partial\sigma}{\partial t}+\sigma\frac{\partial\sigma}{\partial N}+H\sigma^2\right]\frac{1}{d_{\sigma_1}}\sum_{l=1}^{d_{\sigma_1}}\left(\frac{\partial\phi_l^1}{\partial N}\right)^2+2\int_{\partial\Omega}\sigma\left\{\frac{1}{d_{\sigma_1}}\sum_{l=1}^{d_{\sigma_1}}\frac{\partial\phi_l^1}{\partial N}\frac{\partial\dot{\xi}_l}{\partial N}\right\}=$$
$$=\int_{\partial\Omega}\left[\frac{\partial\sigma}{\partial t}+\sigma\frac{\partial\sigma}{\partial N}+H\sigma^2\right]\frac{1}{d_{\sigma_1}}\sum_{l=1}^{d_{\sigma_1}}\left(\frac{\partial\phi_l^1}{\partial N}\right)^2+2\int_{\partial\Omega}\sigma\left\{\frac{1}{d_{\sigma_1}}\sum_{l=1}^{d_{\sigma_1}}\frac{\partial\phi_l^1}{\partial N}\frac{\partial\dot{\xi}_l}{\partial N}\right\},$$

para toda função σ definida em $\partial\Omega$ de classe C^5 G-invariante. Com isto e com (4.13), segue que

$$\frac{1}{d_{\sigma_1}}\sum_{l=1}^{d_{\sigma_1}}\frac{\partial\phi_l^1}{\partial N}\frac{\partial\dot{\xi}_l}{\partial N}-\frac{1}{d_{\sigma_2}}\sum_{l=1}^{d_{\sigma_2}}\frac{\partial\phi_l^2}{\partial N}\frac{\partial\dot{\xi}_{l+d_{\sigma_1}}}{\partial N}=0 \tag{4.19}$$

em $\partial\Omega$.

Como $\frac{\partial\dot{\xi}}{\partial N}=\frac{\partial}{\partial N}\mathcal{B}_{\Delta+\lambda}(\sigma\frac{\partial\xi}{\partial N})$ módulo posto finito (ver seção 8.4 do capítulo 8 para definição de $\mathcal{B}_{\Delta+\lambda}$) segue da igualdade acima que o operador de fronteira Θ definido por:

$$\sigma\mapsto\frac{1}{d_{\sigma_1}}\sum_{j=1}^{d_{\sigma_1}}\frac{\partial\phi_j^1}{\partial N}\frac{\partial}{\partial N}\mathcal{B}_{\Delta+\lambda}\left(\sigma\frac{\partial\phi_j^1}{\partial N}\right)-\frac{1}{d_{\sigma_2}}\sum_{j=1}^{d_{\sigma_2}}\frac{\partial\phi_j^2}{\partial N}\frac{\partial}{\partial N}\mathcal{B}_{\Delta+\lambda}\left(\sigma\frac{\partial\phi_j^2}{\partial N}\right), \tag{4.20}$$

deve ser identicamente nulo. Portando de acordo com o teorema 8.4 temos que

$$\frac{1}{d_{\sigma_1}}\sum_{j=1}^{d_{\sigma_1}}\left|\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{\partial\phi_j^1}{\partial N}\right|^2=\frac{1}{d_{\sigma_2}}\sum_{j=1}^{d_{\sigma_2}}\left|\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{\partial\phi_j^2}{\partial N}\right|^2 \tag{4.21}$$

para todo $\tau\in T_x(\partial\Omega)$.

O próximo passo agora é mostrar que as igualdades (4.13) e (4.21) não podem ocorrer simultaneamente, porém será possível fazê-lo apenas para $d_\sigma\leq 2$. Note que para cada $x\in\partial\Omega$ podemos definir dois pares de vetores do $\mathbb{R}^2$, da seguinte forma: se $d_{\sigma_i}=2$ para $i=1,2$

$$v_1(x)=\left(\frac{\partial\phi_1^1}{\partial N},\ldots,\frac{\partial\phi_{d_{\sigma_1}}^1}{\partial N}\right)$$

$$v_2(x) = \left(\frac{\partial \phi_1^2}{\partial N}, \dots, \frac{\partial \phi_{d_{\sigma 2}}^2}{\partial N}\right),$$

se caso um dos d_{σ_i} for igual a 1 basta repetir a coordenada $\frac{\partial \phi_1^i}{\partial N}$ para obtermos uma função vetorial de $\mathbb{R}^2$. Assim

$$\frac{\partial v_1}{\partial \tau}(x) = \left(\frac{\partial}{\partial \tau}\frac{\partial \phi_1^1}{\partial N}, \dots, \frac{\partial}{\partial \tau}\frac{\partial \phi_{d_{\sigma 1}}^1}{\partial N}\right)$$
$$\frac{\partial v_2}{\partial \tau}(x) = \left(\frac{\partial}{\partial \tau}\frac{\partial \phi_1^2}{\partial N}, \dots, \frac{\partial}{\partial \tau}\frac{\partial \phi_{d_{\sigma 2}}^2}{\partial N}\right)$$

Definindo os vetores dessa forma as igualdades (4.13) e (4.21) tornam-se $\langle v_1(x), v_1(x)\rangle = \langle v_2(x), v_2(x)\rangle$ e $\left\langle \frac{\partial v_1}{\partial \tau}(x), \frac{\partial v_1}{\partial \tau}(x)\right\rangle = \left\langle \frac{\partial v_2}{\partial \tau}(x), \frac{\partial v_2}{\partial \tau}(x)\right\rangle$ onde $\langle , \rangle$ denota o produto interno do $\mathbb{R}^d$. Supondo $d = 2$ mostraremos no lema[4] a seguir que existe uma transformação ortogonal T tal que $v_1(x) = Tv_2(x)$ em um aberto $V \subset \partial\Omega$, ou seja, $\frac{\partial \phi_i^1}{\partial N} = a_{i1}\frac{\partial \phi_1^2}{\partial N} + a_{i2}\frac{\partial \phi_2^2}{\partial N}$ em V, onde a_{ij} são os elementos da transformação T. Note que com essa condição de fronteira adicional para as autofunções, temos

$$\begin{cases} (\Delta + \lambda)(\phi_i^1 - a_{i1}\phi_1^2 - a_{i2}\phi_2^2) = 0 & em\ \ \Omega, \\ \phi_i^1 - a_{i1}\phi_1^2 - a_{i2}\phi_2^2 = 0 & em\ \ \partial\Omega, \\ \frac{\partial}{\partial N}(\phi_i^1 - a_{i1}\phi_1^2 - a_{i2}\phi_2^2) = 0 & em\ \ V \cap \partial\Omega. \end{cases}$$

Portanto pelo Teorema de Unicidade de Cauchy, $\phi_i^1 = a_{i1}\phi_1^2 + a_{i2}\phi_2^2$ em Ω. O que claramente não pode ocorrer, pois $\phi_i^1 \notin M_{d_{\sigma_2}}$.

Resta provar a existência de uma transformação ortogonal T com a propriedade acima.

Lema 4.5. *Sejam M uma variedade diferenciável e $F, G : M \longrightarrow \mathbb{R}^2$ funções diferenciáveis. Se $|F(x)| = |G(x)|$ e $|\frac{\partial F}{\partial \tau}| = |\frac{\partial G}{\partial \tau}|$ para todo $\tau \in T_xM$, então existe um aberto V em M e uma transformação ortogonal T de $\mathbb{R}^2$ tal que $F(x) = TG(x)$ em V.*

Como as funções F e G tomam valores no $\mathbb{R}^2$ podemos trabalhar no plano complexo. Desta foma, temos $F(x) = e^{i\theta(x)}G(x)$. Se $\theta(x)$ for constante podemos tomar a transformação T igual a uma rotação de θ radianos e o resultado está demonstrado. Consideremos então o caso onde

[4]Esse resultado foi provado primeiramente por A.L.Pereira em [16].

$\nabla_M\theta(x) \neq 0$. Escolhendo cartas locais $(x_1, ..., x_{n-1})$ em M e tomando $\tau = \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}$, segue da condição $|\frac{\partial F}{\partial \tau}| = |\frac{\partial G}{\partial \tau}|$ que

$$Re(\frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial \bar{F}}{\partial x_j}) = Re(\frac{\partial G}{\partial x_i}\frac{\partial \bar{G}}{\partial x_j}). \tag{4.22}$$

Como estamos supondo $F(x) = e^{i\theta(x)}G(x)$ temos,

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial \bar{F}}{\partial x_j} &= \left(i\frac{\partial\theta}{\partial x_i}e^{i\theta}G + e^{i\theta}\frac{\partial G}{\partial x_i}\right)\left(-i\frac{\partial\theta}{\partial x_j}e^{-i\theta}\,\bar{G} + e^{-i\theta}\frac{\partial \bar{G}}{\partial x_j}\right)\\ &= \frac{\partial\theta}{\partial x_i}\frac{\partial\theta}{\partial x_j}|G|^2 + i\left(\frac{\partial\theta}{\partial x_i}G\frac{\partial \bar{G}}{\partial x_j} - \frac{\partial\theta}{\partial x_j}\,\bar{G}\,\frac{\partial G}{\partial x_i}\right) + \frac{\partial G}{\partial x_i}\frac{\partial \bar{G}}{\partial x_j}.\end{aligned} \tag{4.23}$$

Observe que

$$\begin{aligned}&Re\left(\frac{\partial\theta}{\partial x_i}\frac{\partial\theta}{\partial x_j}|G|^2 + i\left(\frac{\partial\theta}{\partial x_i}G\frac{\partial}{\partial x_j}\,\bar{G} - \frac{\partial\theta}{\partial x_j}\,\bar{G}\,\frac{\partial}{\partial x_i}G\right)\right) =\\ &\quad\frac{\partial\theta}{\partial x_i}\frac{\partial\theta}{\partial x_j}|G|^2 - Im\left(\frac{\partial\theta}{\partial x_i}G\frac{\partial}{\partial x_j}\,\bar{G} - \frac{\partial\theta}{\partial x_j}\,\bar{G}\,\frac{\partial}{\partial x_i}G\right).\end{aligned} \tag{4.24}$$

Fazendo $G = g_1 + ig_2$,

$$G\frac{\partial}{\partial x_j}\,\bar{G} = g_1\frac{\partial g_1}{\partial x_j} + g_2\frac{\partial g_2}{\partial x_j} + i\left(g_2\frac{\partial g_1}{\partial x_j} - g_1\frac{\partial g_2}{\partial x_j}\right)$$

$$\bar{G}\,\frac{\partial}{\partial x_i}G = g_1\frac{\partial g_1}{\partial x_i} + g_2\frac{\partial g_2}{\partial x_i} + i\left(g_1\frac{\partial g_2}{\partial x_i} - g_2\frac{\partial g_1}{\partial x_i}\right)$$

segue

$$Im\left(\frac{\partial\theta}{\partial x_i}G\frac{\partial}{\partial x_j}\,\bar{G} - \frac{\partial\theta}{\partial x_j}\,\bar{G}\,\frac{\partial}{\partial x_i}G\right) = \frac{\partial\theta}{\partial x_i}\left(g_2\frac{\partial g_1}{\partial x_j} - g_1\frac{\partial g_2}{\partial x_j}\right) + \frac{\partial\theta}{\partial x_j}\left(g_2\frac{\partial g_1}{\partial x_i} - g_1\frac{\partial g_2}{\partial x_i}\right).$$

Tomando a parte real na identidade (4.23) usando as relações (4.22) e (4.24) obtemos

$$\frac{\partial\theta}{\partial x_i}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial\theta}{\partial x_j} + \frac{g_2\frac{\partial g_1}{\partial x_j} - g_1\frac{\partial g_2}{\partial x_j}}{|G|^2}\right) + \frac{\partial\theta}{\partial x_j}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial\theta}{\partial x_i} + \frac{g_2\frac{\partial g_1}{\partial x_i} - g_1\frac{\partial g_2}{\partial x_i}}{|G|^2}\right) = 0.$$

Supondo $g_2 \neq 0$ podemos reescrever mais uma vez a equação acima da seguinte forma,

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_i}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial \theta}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}\arctan\left(\frac{g_1}{g_2}\right)\right) + \frac{\partial \theta}{\partial x_j}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial \theta}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i}\arctan\left(\frac{g_1}{g_2}\right)\right) = 0 \quad (4.25)$$

Como estamos supondo $\nabla_{\partial\Omega}\theta \neq 0$, pelo menos uma componente $\frac{\partial \theta}{\partial x_k} \neq 0$. Fazendo $i = j = k$ em (4.25), obtemos

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\theta}{2} + \arctan\left(\frac{g_1}{g_2}\right)\right) = 0$$

Gostaríamos de concluir o mesmo para todo índice k, mas pode ocorrer que $\frac{\partial \theta}{\partial x_j} = 0$ para algum índice. Ainda assim, fazendo $i = k$ em (4.25) concluímos o mesmo fato acima para o índice j. Portanto $\theta = -2\arctan(\frac{g_1}{g_2}) + C$ e

$$\begin{aligned} F(x) &= e^{i\left(-2\arctan(\frac{g_1}{g_2})+C\right)}G(x) = e^{iC}\frac{G(x)}{\left(e^{i\arctan(\frac{g_1}{g_2})}\right)^2} \\ &= e^{iC}\frac{G(x)}{\left(\frac{G(x)}{|G(x)|}\right)^2} = e^{iC}\,\bar{G}\,(x) \end{aligned} \quad (4.26)$$

e a transformação ortogonal T é dada por $T = \begin{bmatrix} \cos C & -\sin C \\ \sin C & \cos C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

□

Observação 4.3.1. *Para provarmos o resultado de separação acima, sem impor restrições sobre a dimensão das representações irredutíveis de G, precisamos provar o lema 4.5 para funções F e G que tomam valores em $\mathbb{R}^m$ com $m > 2$. Porém as hipóteses consideradas no lema não parecem ser suficientes para tal.*

Os teoremas de separação 4.2 e 4.4 mostram que dado um autovalor λ com multiplicidade "alta"é possível separá-lo em $\lambda_1(h), \lambda_2(h), ..., \lambda_k(h)$ de forma que a ação de G em cada $Ker(\Delta + \lambda(h))$ seja irredutível. Isto é, cada autovalor $\lambda_i(h)$ está associado a apenas um espaço M_{σ_i} e sua multiplicidade é d_{σ_i}. Para provarmos a conjectura precisamos mostrar apenas que os autovalores G-simples do operador $\Delta : H^2 \cap H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ variam continuamente.

Um autovalor G-simples para o Laplaciano é um autovalor G_σ-simples do operador $\Delta_{|M_\sigma}$ para algum $\sigma \in \hat{G}$ que está associado apenas a M_σ. Sob esse ponto de vista, uma pequena extensão do teorema 4.4 pode ser provada se considerarmos espaços M_σ tais que $d_\sigma = 1$. Se temos um autovalor λ G_σ-simples do operador $\Delta_{|M_\sigma}$ que está associado a outros espaços de simetria, então podemos perturbar a região Ω de forma que $\lambda(h)$ está associado apenas a M_σ.

Teorema 4.6. *Sejam G um subgrupo finito de $O(n)$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, aberto, limitado, conexo, com fronteira C^2-regular e G-simétrico. Se λ é autovalor associado a M_{σ_1} e M_{σ_2}, onde $d_{\sigma_1} = 1$ para o operador:*

$$\Delta : H^2 \cap H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega),$$

então λ pode ser separado, por meio de pequenas perturbações G-simétricas de Ω, em dois autovalores onde um deles é simples. Mais precisamente, dado qualquer $\epsilon > 0$ exitem $h \in Diff_G^2(\Omega)$, $||h - i_\Omega||_{C^2} < \epsilon$ e $\delta > 0$ tal que um dos autovalores separados, pertencentes ao intervalo $(\lambda - \delta, \lambda + \delta)$, está associado apenas ao espaço M_{σ_1} e portanto é simples.[5]

Demonstração. De fato, se $d_{\sigma_2} = 1$ então seguindo os mesmos passos da demonstração do teorema anterior teremos que as autofunções associadas satisfazem as relações (4.13) e (4.21). E com isto, podemos também definir funções vetoriais

$$v_1(x) = \left(\frac{\partial \phi_1^1}{\partial N}, ..., \frac{\partial \phi_{d_{\sigma_1}}^1}{\partial N} \right) \quad e \quad v_2(x) = \frac{\partial \phi_1^2}{\partial N}(1, 1, ..., 1)$$

pertencentes a $\mathbb{R}^{d_{\sigma_1}}$ que satisfazem as relações

$$\langle v_1(x), v_1(x) \rangle = \langle v_2(x), v_2(x) \rangle = d_{\sigma_2} \left(\frac{\partial \phi_1^2}{\partial N} \right)^2$$

e

$$\left\langle \frac{\partial v_1}{\partial \tau}(x), \frac{\partial v_1}{\partial \tau}(x) \right\rangle = \left\langle \frac{\partial v_2}{\partial \tau}(x), \frac{\partial v_2}{\partial \tau}(x) \right\rangle = d_{\sigma_2} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial \phi_1^2}{\partial N} \right)^2, \tag{4.27}$$

para todo $x \in \partial\Omega$. Fazendo $(1, 1, ..., 1) = \overrightarrow{1}$ podemos escrever v_1 da seguinte forma

$$v_1(x) = \frac{\partial \phi_1^2}{\partial N} A(x) \overrightarrow{1},$$

[5] É importante observar que o fato da ação de G em $Ker(\Delta|_{M_{\sigma_1}} + \lambda)$ ser irredutível não garante que a ação em $Ker(\Delta + \lambda)$ também seja.

onde $A(x)$ é uma transformação ortogonal. Derivando a função v_1 temos

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial \phi_1^2}{\partial N}A(x)\vec{1} + \frac{\partial \phi_1^2}{\partial N}\frac{\partial}{\partial x_i}A(x)\vec{1}$$

segue da identidade (4.27) que

$$2\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial \phi_1^2}{\partial N}\frac{\partial \phi_1^2}{\partial N}\left\langle A(x)\vec{1}, \frac{\partial}{\partial x_i}A(x)\vec{1}\right\rangle + \left(\frac{\partial \phi_1^2}{\partial N}\right)^2 \left|\frac{\partial}{\partial x_i}A(x)\vec{1}\right|^2 = 0.$$

Note que $\left\langle A(x)\vec{1}, A(x)\vec{1}\right\rangle = \left\langle \vec{1}, \vec{1}\right\rangle$ então $\left\langle A(x)\vec{1}, \frac{\partial}{\partial x_i}A(x)\vec{1}\right\rangle = 0$, portanto

$$\left(\frac{\partial \phi_1^2}{\partial N}\right)^2 \left|\frac{\partial}{\partial x_i}A(x)\vec{1}\right|^2 = 0,$$

para $i = 1, 2, ..., n-1$. Como $\frac{\partial \phi_1^2}{\partial N} \neq 0$ em um conjunto aberto e denso de $\partial\Omega$, concluímos que $\nabla_{\partial\Omega}(A(x)\vec{1}) = 0$, consequentemente $A(x)\vec{1}$ é constante em $\partial\Omega$. Porém, isso implica que $\frac{\partial \phi_j^1}{\partial N} = a_j \frac{\partial \phi_1^2}{\partial N}$ em $\partial\Omega$ o que não pode ocorrer, pois $\phi_j^1 \notin M_{\sigma_2}$.

□

4.3.2 A prova da conjectura

Esta seção contém a prova da conjectura propriamente dita. Se considerarmos os autovalores para o operador $\Delta : H^2 \cap H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ contidos em um compacto da reta, então os resultados das seções anteriores mostram que a propriedade de todos os autovalores contidos neste compacto serem G-simples é densa no conjunto das regiões G-simétricas. Para concluirmos o resultado de genericidade é necessário mostrar que esta propriedade também é aberta. Para este fim, mostra-se

Proposição 4.7. *Sejam G subgrupo compacto de $O(n)$, Γ a representação quase regular de G em $L^2(\Omega)$ e $V_\lambda = Ker(\Delta + \lambda)$ com $dimV_\lambda = m$. Se $\Gamma|_{V_\lambda}$ é irredutível, então existe $\epsilon > 0$ tal que, se $||i_\Omega - h||_{C^2} < \epsilon$ e $h \in Diff_G^2(\Omega)$, $\Gamma|_{V_{\lambda_1(h)}\oplus \dots \oplus V_{\lambda_m(h)}}$ é irredutível.*

Demonstração. Se λ é um autovalor G-simples para $\Delta : H^2 \cap H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$, então está associado a um único M_σ e possui multiplicidade d_σ. Existe uma vizinhança $\mathcal{V}$ de i_Ω em $Diff_G^2(\Omega)$ tal que para todo $h \in \mathcal{V}$ existem exatamente d_σ autovalores do operador $h^*\Delta h^{*-1}$ próximos de λ. Como os autovalores do Laplaciano restrito ao espaço M_σ também variam continuamente segue que um dos autovalores próximos a λ está associado a M_σ e portanto todos estão. □

Com isto, temos provado, de fato, a conjectura 2 para grupos G tais que $d_\sigma \leq 2$ para todo $\sigma \in \hat{G}$.

Corolário 4.8. *Suponhamos que G é um subgrupo finito de $O(n)$ tal que $d_\sigma \leq 2$ para todo $\sigma \in \hat{G}$. Então, para um conjunto residual de regiões C^2-regulares e G-simétricas os autovalores do operador $\Delta : H^2 \cap H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ são G-simples.*

Demonstração. Considere o seguinte conjunto

$$\mathcal{C}_k = \{h \in Diff_G^2(\Omega)/\text{todos os autovalores } |\lambda| < k \text{ são G-simples}\}.$$

Os resultados acima mostram que $\mathcal{C}_k$ é aberto para todo $k \in \mathbb{N}$ e os teoremas 4.2 e 4.4 garantem que $\mathcal{C}_k$ também é denso. Sabendo que $Diff_G^2(\Omega)$ é um espaço topológico de Baire, temos que $\cap_{k>0}\mathcal{C}_k$ é um conjunto residual.

□

Observação 4.3.2. *Uma consequência imediata do teorema acima é que a conjectura 2 fica completamente estabelecida considerando regiões do plano (subconjuntos de $\mathbb{R}^2$) G-simétricas com G finito, pois não existem subgrupos de $O(2)$ cuja a dimensão das representações irredutíveis seja maior que 2. De fato, sabemos que todo subgrupo finito de $O(2)$ possui pontos livres, portanto, pelo teorema 3.6 a representação quase regular Γ contém todas as sub-representações irredutíveis de G. Sabemos também que os autovalores do Laplaciano no disco em $\mathbb{R}^2$ possui apenas autovalores duplos e simples, logo se existisse alguma representação irredutível de G com dimensão > 2, pelo corolário 3.7, deveria existir um autovalor cuja multiplicidade é um múltiplo não nulo da dimensão dessa representação*[6].

O teorema acima foi provado primeiramente por A.L.Pereira em [17] e até o presente momento é o resultado mais completo existente para a conjectura 2 considerando subgrupos finitos de $O(n)$.

Contudo, com o auxílio do teorema 4.6, ao menos um resultado parcial para subgrupos finito quaisquer de $O(n)$ pode ser demonstrado. O teorema 4.3 mostra que, genericamente no conjunto das regiões C^2-regulares e G-simétricas a ação de Γ em $Ker(\Delta + \lambda) \cap M_\sigma$ é irredutível, o que não implica

[6] O resultado acima não se encontra mencionado explicitamente em [16], porém segue facilmente dos resultados encontrados nesse trabalho.

que a mesma ação em $Ker(\Delta + \lambda)$ também seja, pois o autovalor pode estar associado a mais de um espaço de simetria. Porém, como veremos logo abaixo, se $d_\sigma = 1$ isto é necessariamente verdade. Ou seja, os autovalores associados aos espaços M_σ com $d_\sigma = 1$ são, de fato, genericamente simples.

Corolário 4.9. *Seja G subgrupo finito de $O(n)$ e $\sigma \in \hat{G}$ tal que $d_\sigma = 1$. O subconjunto*

$$\begin{aligned} \mathcal{C} = \{h \in Diff^2_G(\Omega)|\ &\text{todos os autovalores do operador} \\ &\Delta : H^2 \cap H^1_0(\Omega) \to L^2(\Omega)\,\text{associados a } \mathrm{M}_\sigma \text{ são simples}\} \end{aligned}$$

é residual em $Diff^2_G(\Omega)$.

Demonstração. Considere o conjunto

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_k = \{h \in Diff^2_G(\Omega)/&\text{todos os autovalores}\,|\lambda| < k\,\text{que estão associados a} \\ &M_\sigma\,\text{são simples}\} \end{aligned}$$

, mais uma vez a proposição 4.7 garante que $\mathcal{C}_k$ é aberto e o teorema 4.6 garante a densidade. Tomando a interseção de todos os $\mathcal{C}_k$, com $k \in \mathbb{N}$ segue o resultado.

□

4.4 Prelúdio para os Próximos Capítulos

Apresentamos neste capítulo os principais resultados a respeito da conjectura 2 para o problema de Laplace com condição de fronteira de Dirichlet. Podemos perceber que a dificuldade encontrada em prová-la para grupos compactos quaisquer não está associada unicamente a características do Laplaciano ou da condição de fronteira. Pelo menos para grupos finitos, a peça fundamental para a obtenção do resultado foi o lema 4.5, provado somente para dimensão 2 (ver observação 4.3.1). Ao considerarmos o problema de Laplace, com condição de fronteira de Neumann, em regiões simétricas também será necessário aplicarmos o lema 4.5, portanto a prova da conjectura estará limitada aos grupos finitos cuja as representações irredutíveis não possuam dimensão maior que 2.

O método geral que utilizamos no estudo da simplicidade genérica dos autovalores para o problema de Laplace em regiões simétricas foi estabelecido também neste capítulo, portanto, cabe neste momento, uma análise do alcance e limitações do nosso argumento. Em linhas gerais o que fizemos foi analisar as expressões para as derivadas de curvas de autovalores que começam em um autovalor com multiplicidade alta, sempre supondo que a multiplicidade deste autovalor não possa ser reduzida por pequenas perturbações simétricas da região Ω. A existência e suavidade das curvas de autovalores do problema de Laplace Dirichlet é garantida pela teoria de perturbação de operadores lineares apresentada por Kato em [10]. Com a hipótese de não separabilidade do autovalor a expressão da primeira derivada fornece uma nova condição para as autofunções na fronteira de Ω e espera-se obter uma contradição. Se com esta nova condição não for possível chegar a uma contradição, calcula-se a segunda derivada, onde nos deparamos com um certo tipo de operador de fronteira que deve ser nulo (ou mais geralmente de posto finito, ver demonstração do teorema 7.4). Para extrairmos mais informações sobre as autofunções na fronteira lançamos mão do Método das Soluções "Rapidamente Oscilantes". A rigor pode-se encontrar varias condições extras para as autofunções na fronteira utilizando este método, porém as dificuldades técnicas em executar o método, mesmo que meramente computacionais, dificultam seu uso.

No próximo capítulo, onde trataremos o análogo da conjectura 2 para o problema do Biaplaciano, seguiremos exatamente o mesmo reteiro seguido no presente capítulo. O fato do problema do Bilaplaciano ser de ordem quatro impõe dificuldades extras na prova da conjectura, porém mostraremos que supor a não de separabilidade de um autovalor com multiplicidade "alta"implicará que o autovalor não varia quando perturbamos a região Ω e as autofunções se anulam em uma vizinhança de $\partial\Omega$. Isto será suficiente para chegarmos a uma contradição.

Ao tratarmos o problema de Laplace com condição de Neumann em regiões simétricas o primeiro passo é garantir a existência e suavidade das curvas de autovalores, além de calcular as expressões para suas derivadas. Este tópico será desenvolvido no capítulo 6. Veremos que ao considerarmos essas condições de fronteira, nem mesmo a etapa I da conjectura poderá ser demonstrada somente coma análise da matriz da primeira derivada como foi feito para a condição de Dirichlet. Assim a análise da segunda derivada é naturalmente o próximo passo. Utilizando a segunda derivada pode-se mostrar também que os autovalores G-simples de Neumann variam quando aplicamos perturbações simétricas da região Ω, este fato será de grande importância na conclusão da etapa I para grupos infinitos. A mesma questão para o problema de Laplace com condição de Dirichlet segue trivialmente da análise da primeira derivada.

A expressão para a primeira derivada para autovalores múltiplos do problema de Laplace com condição de Neumann é dada por

$$\mathring{M}_{k,j} = \int_{\partial\Omega} \sigma(\nabla_{\partial\Omega}\phi_k \cdot \nabla_{\partial\Omega}\phi_j - \lambda_0\phi_k\phi_j)$$

onde ϕ_j são autofunções associadas a um mesmo autovalor λ (ver corolário 6.5). A hipótese de não separabilidade implica que as autofunções associadas são tais que

$$\sum_{j=1}^{d_\sigma} \nabla\phi_j^1 \cdot \nabla\phi_j^2 - \lambda_0\phi_j^1\phi_j^2 = 0$$

em $\partial\Omega$, onde as autofunções $\{\phi_j^i\}_{j=1}^{d_\sigma}$, $i = 1, 2$ satisfazem a propriedade (4.2). Seguindo com a análise da segunda derivada[7] obteremos, por meio do Método da Soluções "Rapidamente Oscilantes", outra condição de fronteira para as autofunções, a saber,

$$\sum_{j=1}^{d_\sigma} \frac{\partial\phi_j^1}{\partial\theta}\frac{\partial\phi_j^2}{\partial\theta} = 0,$$

$\frac{\partial}{\partial\theta} = \nabla_{\partial\Omega}\theta \cdot \nabla$, e θ G-invariante.

De fato, as duas condições adicionais na fronteira para as autofunções serão suficientes para provarmos os resultados. Entretanto, em virtude do método ,será necessário separar o caso dos grupos finitos e infinitos. E fundamental que a condição de fronteira acima seja verdadeira para todo $\tau \in \partial\Omega$, logo precisamos que para cada $\tau \in \partial\Omega$ exista uma função θ G-invariante tal que $\nabla_{\partial\Omega}\theta(x) = \tau$. Se G for finito isso é sempre verdade, pois sempre possui um ponto livre (ver lema 8.2). Se G é infinito teremos $\nabla_{\partial\Omega}\theta \perp T_x G(x)$ para qualquer função $\theta : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ G-invariante, assim ainda precisaremos analisar o que ocorre com as derivadas das autofunções na direção de $G(x)$.

A infinitude do grupo G impõe, portanto, algumas dificuldades ao método. Nesse caso será necessário considerar duas hipóteses extras sobre o grupo infinito (compacto) G, a saber, $dimG < n-1$ e deve existir um ponto livre pela ação de G em $\mathbb{R}^n$. Essas duas condições são necessárias primeiro porque para aplicarmos o método precisamos que $\nabla_{\partial\Omega}\theta \neq 0$ em algum ponto de $\partial\Omega$, segundo por garantir a existência de funções G-invariantes tais que dado qualquer vetor $\tau \in T_x^{\perp}(G(x))$, $\nabla_{\partial\Omega}\theta(x) = \tau$.

[7] A expressão para a matriz da segunda derivada é bem mais complicada que a de $\mathring{M}_{k,j}$ e, neste momento, não nos ajuda a visualizar a essência das dificuldades do problema, por isso não a apresentamos aqui.

Capítulo 5

Bilaplaciano com condição de Dirichlet em regiões simétricas

5.1 Introdução

Considere o seguinte problema de autovalor:

$$\begin{cases} (\Delta^2 + \lambda)u = 0 & em\, \Omega; \\ \frac{\partial}{\partial N}u = u = 0 & em\, \partial\Omega; \end{cases}$$

onde Ω é um aberto, limitado, conexo, C^4-regular.

Pode-se notar pelos trabalhos [18], [20], [19] de M.C.Pereira que a ordem do operador gera grandes dificuldades quando se trata de questões a respeito de genericidade, evidentemente o mesmo ocorre no estudo da situação genérica de autovalores em regiões simétricas. Até o presente momento, o análogo da conjectura 2 para operadores de ordem maiores foi provada apenas para o operador Biaplaciano em regiões $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_2$-simétricas[1]. Uma das principais dificuldades aparece devido a necessidade de calcular a expansão dos operadores de fronteiras associados ao problema utilizando o Método das Soluções "Rapidamente Oscilantes" que é extremamente ardiloso para operadores de ordem muito grande.

A conjectura 2 será estabelecida para o problema do Bilaplaciano com as mesmas hipóteses sobre o grupo G de simetria consideradas para o problema do Laplaciano com condição de Dirichlet, isto é, subgrupos finitos G de $O(n)$ cuja as representações irredutíveis possuam dimensão menor ou igual a dois. Além disso, o análogo ao teorema 4.9 também será obtido.

[1] A prova para este fato foi realizada em [18] apenas para o grupo $\mathbb{Z}_2$, mas a extensão para o caso acima é imediata.

O teorema 5.1 contém a parte mais difícil na prova da etapa (I) da conjectura 2 para o operador Bilaplaciano considerando qualquer subgrupo compacto de $O(n)$. A linha da demonstração é a mesma do teorema 4.2, onde a condição obtida com a primeira derivada da curva de autovalores agora será, como veremos na demonstração do teorema 5.1,

$$\sum_{j=1}^{d_\sigma} \frac{\partial^2 \phi_j^i}{\partial N^2} \frac{\partial^2 \phi_j^l}{\partial N^2} = 0 \; em \, \partial\Omega.$$

Isso acarreta em $\frac{\partial^2 \phi_j^l}{\partial N^2} = 0$ na fronteira de Ω, mas agora não podemos concluir diretamente que $\phi_j^i \equiv 0$ em Ω. No entanto, este fato sendo verdadeiro para toda autofunção associada a λ implica que $\dot{\lambda}(h) = 0$ para todo h suficientemente próximo a i_Ω, ou seja, o autovalor λ não se altera por pequenas perturbações simétricas da fronteira. Provaremos a seguir que isto implica que as autofunções do operador Bilaplaciano se anulam em uma vizinhança aberta de $\partial\Omega$, se supusermos a não separabilidade. Tal fato será suficiente para chegarmos ao resultado esperado.

Em mais detalhes o argumento passa primeiramente por encontrar uma condição para as autofunções para o operador Biaplaciano análogas a (4.9) e (4.10) encontradas para o Laplaciano e mostrar que, por conta dessas consequências da não separabilidade, todas as autofunções associadas a λ se anulam em uma vizinhança de $\partial\Omega$. Assim devemos mostrar que as derivadas até ordem 3 das autofunções se anulam na fronteira $\partial\Omega$ gerando mais uma vez um absurdo. A necessidade de saber que todas as derivadas até ordem 3 se anulam na fronteira vem do Teorema da Unicidade de Cauchy. Na verdade nossa intenção, como sempre, é utilizá-lo para concluirmos que as autofunções são identicamente nulas em Ω e com isso obter o absurdo. Desta forma, apenas saber que $\frac{\partial^2 \phi_j^l}{\partial N^2} = 0$ na fronteira não é suficiente (ver teorema ??).

A separação de autovalores associados a espaços de simetria distintos será novamente a parte mais delicada na prova da conjectura e será fundamental o uso do lema 4.5. Veremos na demonstração do teorema 5.4 que a hipótese de não separabilidade implicará mais uma vez que os autovalores não variam quando perturbamos o domínio Ω.

5.2 Separação nos espaços M_σ

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, limitado, C^4-regular e considere o problema de autovalores

$$\begin{cases} (\Delta^2+\lambda)v = 0 & em\, h(\Omega); \\ \frac{\partial}{\partial N} v = v = 0 & em\, \partial h(\Omega); \end{cases} \tag{5.1}$$

onde $h \in Diff^4(\Omega)$. Usando a teoreia descrita no capítulo 2 vemos que o problema equivalente na forma Lagrangeana é dado por

$$\begin{cases} h^*(\Delta^2+\lambda)h^{*-1}u = 0 & em\, \Omega; \\ h^*\frac{\partial}{\partial N_h} h^{*-1}u = u = 0 & em\, \partial\Omega; \end{cases}$$

onde $u = h^*v$. Porém, mostraremos a seguir que $h^*\frac{\partial}{\partial N_h}h^{*-1}u = 0 \Leftrightarrow u = \frac{\partial u}{\partial N} = 0$ em $\partial\Omega$. De fato, se $y = h(x)$ para $x \in \partial\Omega$

$$\begin{aligned}
\left(h^*\frac{\partial}{\partial N_h}h^{*-1}u\right)(x) &= \sum_{i=1}^{n}\left(h^*\frac{\partial}{\partial y_i}h^{*-1}u\right)(x)(N_h)_i(h(x)) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial y_i}(u\circ h^{-1})(h(x))(N_h)_i(h(x)) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_j}(h^{*-1}(y))\frac{\partial (h^{*-1})_j}{\partial y_i}(h(x))(N_h)_i(h(x)) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_j}(x)(h_x^{-1})_{ji}(x)(N_h)_i(h(x)) \\
&= N_h(h(x))\cdot(h_x^{-1})^t\nabla u(x),
\end{aligned}$$

observe que $\nabla u = 0$ em $\partial\Omega$ pois $u = 0$ e $\frac{\partial u}{\partial N} = 0$ em $\partial\Omega$. Portanto $h^*\frac{\partial}{\partial N_h}h^{*-1}u = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial N} = 0$. Desta forma, o problema (5.1) é equivalente a

$$\begin{cases} h^*(\Delta^2+\lambda)h^{*-1}u = 0 & em\, \Omega; \\ \frac{\partial}{\partial N} u = u = 0 & em\, \partial\Omega; \end{cases}$$

Teorema 5.1. *Sejam G subgrupo compacto de $O(n)$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, aberto, limitado, conexo com fronteira C^5-regular e G-simétrico. Se λ é um autovalor com multiplicidade md_σ, $m > 1$, para o* *operador:*

$$\Delta^2 : M_\sigma \cap H^4 \cap H_0^2(\Omega) \to M_\sigma$$

onde $\sigma \in \hat{G}$. *Então* λ *pode ser decomposto em* m *autovalores* G_σ*-simples (neste caso cada subespaço associado possui dimensão* d_σ*) por meio de pequenas perturbações de* Ω. *Mais precisamente, dado qualquer* $\epsilon > 0$ *existem*
$h \in Diff_G^{2m+1}(\Omega)$ *e* $\delta > 0$ *tal que existem exatamente* m *autovalores* $\lambda(h)$, G_σ*-simples, do operador* $h^*\Delta^2 h^{*-1} : M_\sigma \cap H^4 \cap H_0^2(\Omega) \to M_\sigma$ *no intervalo* $(\lambda - \delta, \lambda + \delta)$ *para* $||h - i_\Omega||_{C^5} < \epsilon$.

Demonstração. A demonstração segue exatamente o mesmo raciocínio do teorema 4.2. Suponha que a multiplicidade não possa ser reduzida por pequenas perturbações G-simétricas de Ω. Então dado $\epsilon > 0$ existe uma vizinhança $\mathcal{V}$ de i_Ω em $C^5(\Omega, \mathbb{R}^n)$ tal que para todo $h \in \mathcal{V}$ existe apenas um autovalor $\lambda(h)$ com multiplicidade md_σ, $|\lambda(h) - \lambda| < \epsilon$.

Considere uma base ortonormal $\{\phi_j^i\}, j = 1, .., d_\sigma, i = 1, ..., m$ para $ker(\Delta^2_{|M_\sigma} + \lambda)$ que satisfazem

$$\begin{pmatrix} \phi_1^i \\ . \\ . \\ \phi_{d_\sigma}^i \end{pmatrix} \circ g = A_\sigma(g) \begin{pmatrix} \phi_1^i \\ . \\ . \\ \phi_{d_\sigma}^i \end{pmatrix}, \tag{5.2}$$

para todo $g \in G$ e $g \mapsto A_\sigma(g)$ é uma representação matricial ortogonal irredutível na classe σ de dimensão d_σ . Considere a seguinte curva de difeomorfismos $h(x,t) = x + tV(x)$, com $V \in C^5(\Omega, \mathbb{R}^n)$ e G-invariante, assim temos uma família de operadores

$$h^*(t,)(\Delta^2)h^{*-1}(t,) : M_\sigma \cap H^4 \cap H_0^2(\Omega) \to M_\sigma$$

analíticas no sentido de Kato. Segue do Teorema 3.9 ([10], capítulo VII pag 392) a existência de $d_\sigma m$ curvas analíticas de autovalores $\mu_k(t)$, $\mu_k(0) = \lambda$ e $d_\sigma m$ curvas analíticas de autofunções $\psi_k(t)$ associadas, $\psi_k(0) \in ker(\Delta^2_{|M_\sigma} + \lambda)$. Considerando nossa hipótese de não separabilidade existe apenas uma curva de autovalores $\mu(t)$ com multiplicidade $d_\sigma m$. Portanto, tomando qualquer uma das curvas de autofunções $\psi(t) = \psi_k(t)$ temos:

$$\begin{cases} h^*(t,)(\Delta^2 + \mu(t))h^{*-1}(t,)\psi(t) = 0, & em \ \Omega; \\ \psi(t) = \frac{\partial\psi(t)}{\partial N} = 0, & em \ \partial\Omega; \end{cases} \tag{5.3}$$

Utilizando o teorema 2.6 segue

$$
\begin{aligned}
0 &= \tfrac{\partial}{\partial t}\left[h^*(\Delta^2+\mu(t))h^{*-1}\psi(t)\right]\big|_{t=0} \\
&= D_t\left[h^*(\Delta^2+\mu(t))h^{*-1}\psi(t)\right]\big|_{t=0} + V\cdot\nabla[(\Delta^2+\mu(0))\psi(0)] \\
&= D_t\left(h^*(t,)(\Delta^2+\mu(t))h^{*-1}(t,)\psi(t)\right)\big|_{t=0} \\
&= (\Delta^2+\lambda)D_t(\psi(t))|_{t=0}+\dot{\mu}\,\psi(0) \\
&= (\Delta^2+\lambda)(\dot{\psi}\,(0)-V\cdot\nabla\psi(0))+\dot{\mu}\,\psi(0)
\end{aligned}
\tag{5.4}
$$

onde $\dot{\mu}=\frac{d}{dt}\mu(t)|_{t=0}$, $\dot{\psi}(0)=\frac{d}{dt}\psi(t)|_{t=0}$ e segue da condição de fronteira de (5.3) que $\dot{\psi}=\frac{\partial\dot{\psi}}{\partial N}=0$ em $\partial\Omega$. Como $\partial\Omega$ é de classe C^5 temos que $\psi(0)\in H^5(\Omega)$ e $V\cdot\nabla\psi(0)\in H^4(\Omega)$.

Vamos reindexar as autofunções $\{\phi_j^i\}$, $j=1,..,d_\sigma, i=1,..,m$ dadas inicialmente da seguinte forma:

$$\varphi_k=\phi_j^i, com\ k=(i-1)d_\sigma+j$$

para $k=1,...,d_\sigma m$. Lembrando que $\psi(0)=\sum_{k=1}^{d_\sigma m}c_k\varphi_k$ para c_k não todos nulos, multiplicando a equação (5.4) por φ_k e integrando, obtemos

$$
\begin{aligned}
\dot{\mu}c_k &= -\int_\Omega \varphi_k(\Delta^2+\lambda)(\dot{\psi}-V\cdot\nabla\psi) \\
&= \int_\Omega (\dot{\psi}-V\cdot\nabla\psi)(\Delta^2+\lambda)\varphi_k-\varphi_k(\Delta^2+\lambda)(\dot{\psi}-V\cdot\nabla\psi) \\
&= \int_{\partial\Omega}\left\{\left(\dot{\psi}-V\cdot N\frac{\partial\psi}{\partial N}\right)\frac{\partial}{\partial N}(\Delta\varphi_k)-\Delta\varphi_k\frac{\partial}{\partial N}\left(\dot{\psi}-V\cdot N\frac{\partial\psi}{\partial N}\right)\right. \\
&\qquad \left.-\varphi_k\frac{\partial}{\partial N}\Delta\left(\dot{\psi}-V\cdot N\frac{\partial\psi}{\partial N}\right)+\frac{\partial\varphi_k}{\partial N}\Delta\left(\dot{\psi}-V\cdot N\frac{\partial\psi}{\partial N}\right)\right\} \\
&= \int_{\partial\Omega} V\cdot N\frac{\partial^2\psi}{\partial N^2}\Delta\varphi_k
\end{aligned}
$$

Segue do teorema 2.1 que $\Delta\varphi_k=\frac{\partial^2}{\partial N^2}\varphi_k$ em $\partial\Omega$, logo

$$\dot{\mu}c_k=\sum_{l=1}^{d_\sigma m}c_l\int_{\partial\Omega}V\cdot N\frac{\partial^2\varphi_l}{\partial N^2}\frac{\partial^2\varphi_k}{\partial N^2}$$

Portanto a derivada das curvas de autovalores $\mu(t)$ são dadas pelos autovalores da matriz simétrica

$$\overset{\circ}{M}_{k,l}= \int_{\partial\Omega} V \cdot N \frac{\partial^2 \varphi_l}{\partial N^2} \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial N^2}.$$

Como estamos supondo que os autovalores não se separam quando t varia, todos os autovalores de $\overset{\circ}{M}$ devem ser iguais, logo $\overset{\circ}{M}= \dot{\mu} I$ onde I é a matriz identidade. Assim, devemos ter

$$\int_{\partial\Omega} V \cdot N \left(\frac{\partial^2 \varphi_l}{\partial N^2}\right)^2 = \int_{\partial\Omega} V \cdot N \left(\frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial N^2}\right)^2 \tag{5.5}$$

$$\int_{\partial\Omega} V \cdot N \frac{\partial^2 \varphi_l}{\partial N^2} \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial N^2} = 0,\ k \neq l, \tag{5.6}$$

para todo campo V em $C^5(\Omega, \mathbb{R}^n)$ G-invariante. Argumentando como na demonstração do teorema 4.2, segue de (5.5) e (5.6) que

$$\sum_{j=1}^{d_\sigma} \left(\frac{\partial^2 \phi_j^i}{\partial N^2}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2 \phi_j^l}{\partial N^2}\right)^2 = 0 \tag{5.7}$$

$$\sum_{j=1}^{d_\sigma} \frac{\partial^2 \phi_j^i}{\partial N^2} \frac{\partial^2 \phi_j^l}{\partial N^2} = 0 \tag{5.8}$$

em $\partial\Omega$. Portanto, concluímos que $\frac{\partial^2 \phi_j^i}{\partial N^2} = 0$ em $\partial\Omega$.

Como consequência da nossa hipótese de não separabilidade vemos que $\dot{\mu}(t) = 0$ em uma vizinhança de 0, ou seja, o autovalor λ não se move através de pequenas perturbações G-simétricas de Ω e existe uma base ortonormal de auto-funções associadas a λ tal que $\frac{\partial^2 \phi_j^i}{\partial N^2}(x) = 0$ em $\partial\Omega$, isto é, $\phi_j^i \in H^4 \cap H_0^3(\Omega)$. Contudo ainda não temos a contradição esperada. Para alcançá-la mostraremos que existe uma base ortonormal que se anula em uma vizinhança de $\partial\Omega$.

Pelo argumento apresentado acima devemos ter $\mu_k(t) = \lambda$ para t pequeno e todo k, logo

$$\begin{cases} h^*(t,.)(\Delta^2 + \lambda) h^{*-1}(t,.)\psi_k(t) = 0, & em\ \ \Omega; \\ \psi_k(t) = \frac{\partial \psi_k}{\partial N}(t) = 0, & em\ \ \partial\Omega; \end{cases}$$

Considere as estensões $\xi_k(t,.) \in H^4(\mathbb{R}^n)$ das autofunções $\psi(t,.)$ dadas pelo teorema 2.9 tais que

$\xi_k(t,.)|_{\Omega(t)} = h^{*-1}(t,.)\psi_k(t,.)$ e satisfazem:

$$\begin{cases} (\Delta^2+\lambda)\xi_k(t,.) = 0, & em \ \ \Omega(t); \\ \xi_k(t,.) = \frac{\partial \xi_k}{\partial N_t}(t,.) = 0, & em \ \ \partial\Omega(t). \end{cases} \tag{5.9}$$

Como estamos supondo Ω C^5-regular e $h(t,.)$de classe C^5, o lema 2.10 garante que a aplicação $t \mapsto \xi_k(t,.) \in H^4(\mathbb{R}^n)$ é de classe C^1, portanto podemos derivar com relação a t a equação (5.9). Com isto, temos a seguinte expressão para a derivada da condição de fronteira:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt}(\xi_k(t,h(t,x))) = \dot{\xi}(t,h(t,x)) + \dot{h}(t,x)\cdot\nabla\xi_k(t,h(t,x)) \\ \Rightarrow &\quad \dot{\xi}_k(t,.) = \dot{h}(t,.)\cdot N_t\frac{\partial \xi_k}{\partial N_t}(t,x) = 0 \ \ em \ \ \partial\Omega(t) \\ 0 &= \frac{d}{dt}(N(t,h(t,x))\cdot\nabla\xi_k(t,h(t,x)) \\ 0 &= \left(\frac{d}{dt}N(t,h(t,x))\right)\cdot\nabla\xi_k(t,.) + N_t\cdot\nabla(\dot{\xi}_k(t,.) + \dot{h}(t,.)\cdot\nabla\xi_k(t,.)) \\ \Rightarrow &\quad \frac{\partial\dot{\xi}_k}{\partial N_t}(t,.) = -\dot{h}\cdot N_t\frac{\partial^2\xi_k}{\partial N_t^2}(t,.) = 0 \ \ em \ \ \partial\Omega(t). \end{aligned}$$

As duas últimas igualdades se justificam pelo fato de que $\xi_k(t,.) = \frac{\partial\xi_k}{\partial N}(t,.) = \frac{\partial^2\xi_k}{\partial N^2}(t,.) = 0$ em $\partial\Omega(t)$, pois sendo assim temos $\nabla\xi_k(t,.) = 0$ e

$$\frac{\partial}{\partial N_t}(\dot{h}\cdot\nabla\xi_k(t,.)) = \dot{h}\cdot\nabla\left(\frac{\partial\xi_k}{\partial N_t}(t,.)\right) = \dot{h}\cdot N_t\frac{\partial^2\xi_k}{\partial N_t^2}(t,.) = 0$$

em $\partial\Omega(t)$. Para a parte interior o resultado da derivada é:

$$(\Delta^2+\lambda)\dot{\xi}_k(t,.) = 0, em \ \ \Omega(t).$$

Portanto $\dot{\xi}_k(t,.) \in Ker(\Delta^2_{\Omega(t)} + \lambda)$ para todo $k = 1,...,md_\sigma$. Assim, existem números reais $a_{k,j}(t)$ tais que

$$\dot{\xi}_k(t,.) = \sum_{j=1}^{md_\sigma} a_{k,j}(t)\xi_j(t,.).$$

Escolha a matriz $B(t)$ de dimensão md_σ como sendo a solução para o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} \dot{B}(t) = -B(t)A(t), \\ B(0) = I, \end{cases}$$

Com tal escolha teremos uma nova base de autofunções

$$\eta_k(t,.) = \sum_{j=1}^{md_\sigma} b_{k,j}(t)\xi_j(t,.)$$

com a propriedade adicional $\dot{\eta}_k(t,x) = 0$ em $\Omega(t)$ para t pequeno.

Considere um campo V de classe C^5 G-invariante suficientemente próximo de N em $\partial\Omega$ e uma curva de difeomorfismo $h(t,x) = x + tV(x)$. Com isto existe $\delta > 0$ tal que $\Omega(t) \subset \Omega$ para $-\delta < t < 0$ e $\cup_{-\delta<t\leq 0}\partial\Omega(t)$ é uma vizinhança aberta de $\partial\Omega$ em $\overline{\Omega}$. Como consequência para todo $y \in \cup_{-\delta<t\leq 0}\partial\Omega(t)$ temos $0 = \eta_k(t,y) = \eta_k(0,y)$, assim $\eta_k(0,.)$ se anula nesta vizinhança. Com isto, todas as derivadas de $\eta_k(0,.)$ devem se anular em $\partial\Omega$, segue do teorema 2.3 que $\eta_k(0,.) = 0$ em Ω. Obtemos assim o absurdo esperado.

□

Corolário 5.2. *Seja G subgrupo compacto de $O(n)$ e $\sigma \in \hat{G}$ tal que M_σ é não vazio. O subconjunto*

$$\mathcal{C} = \{h \in Diff^4_G(\Omega) | \text{ todos os autovalores do operador } \Delta^2_{|M_\sigma} \text{ são G} - \text{simples}\}$$

é residual em $Diff^4_G(\Omega)$.

Demonstração. Inteiramente análoga a demonstração do corolário 4.3.

□

Veremos agora que um autovalor λ G-simples do Bilaplaciano varia quando perturbamos o domínio Ω. De fato, se supormos o contrário devemos ter que a primeira derivada

$$\dot{\lambda}(h)\dot{h} = \frac{1}{d_\sigma}\sum_{j=1}^{d_\sigma}\int_{\partial h(\Omega)} \dot{h} \cdot N \left(\frac{\partial^2\phi_j}{\partial N^2}\right)^2$$

é identicamente nula para todo campo $\dot{h}$ de classe C^5 equivariante e toda região $h(\Omega)$ próxima de

Ω. Logo $\sum_{j=1}^{d_\sigma}\left(\frac{\partial^2\phi_j}{\partial N^2}\right)^2 = 0$ em $\partial h(\Omega)$, portanto $\frac{\partial^2\phi_j}{\partial N^2} = 0$ em $\partial h(\Omega)$ para toda autofunção associada. Porém, como vimos na demonstração do teorema 5.1 isto não pode ocorrer. Com isto, temos

Teorema 5.3. *Seja G subgrupo compacto de $O(n)$. Se λ é autovalor G-simples associado ao espaço M_σ para o operador*

$$\Delta^2 : M_\sigma \cap H^4 \cap H_0^2(\Omega) \to M_\sigma,$$

então existem h em uma C^4-vizinhança de i_Ω tal que $|\lambda(h) - \lambda| \neq 0$.

5.3 Separação entre espaços M_σ e a Prova da Conjectura

Para mostrarmos que é possível separar, por meio de pequenas perturbações simétricas, autovalores do Bilaplaciano associados a espaços de simetria distintos teremos, como já citamos na introdução do capítulo, que calcular a segunda derivada para os autovalores, além de utilizar o Método das Soluções Rapidamente Oscilantes.

Teorema 5.4. *Sejam G um subgrupo finito de $O(n)$ tal que $d_\sigma \leq 2$ para todo $\sigma \in \hat{G}$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, aberto, limitado, conexo, com fronteira C^6-regular e G-simétrico. Se λ é autovalor associado a M_{σ_1} e M_{σ_2} para o operador:*

$$\Delta^2 : (M_{\sigma_1} \oplus M_{\sigma_2}) \cap H^4 \cap H_0^2(\Omega) \to (M_{\sigma_1} \oplus M_{\sigma_2})$$

tal que a ação de G em $ker(\Delta^2|_{M_{\sigma_1}} + \lambda)$ e $ker(\Delta^2|_{M_{\sigma_2}} + \lambda)$ é irredutível, então λ pode ser decomposto em dois autovalores G-simples por meio de pequenas perturbações G-simétricas de Ω. Mais precisamente, dado qualquer $\epsilon > 0$, existem $h \in Diff_G^6(\Omega)$, $||h - i_\Omega||_{C^6} < \epsilon$ e $\delta > 0$ tais que existem exatamente 2 autovalores $\lambda_1(h), \lambda_2(h)$ pertencentes ao intervalo $(\lambda - \delta, \lambda + \delta)$, para o operador

$$h^*\Delta^2 h^{*-1} : (M_{\sigma_1} \oplus M_{\sigma_2}) \cap H^4 \cap H_0^2(\Omega) \to (M_{\sigma_1} \oplus M_{\sigma_2})$$

onde a ação de G em $ker(h^*\Delta^2 h^{*-1}|_{(M_{\sigma_1} \oplus M_{\sigma_2})} + \lambda_1(h))$ e $ker(h^*\Delta^2 h^{*-1}|_{(M_{\sigma_2} \oplus M_{\sigma_1})} + \lambda_2(h))$ é irredutível.

Demonstração. Supondo λ associado a dois espaços de simetria $M_{\sigma_1}, M_{\sigma_2}$ com multiplicidade igual a $d_{\sigma_1} + d_{\sigma_2}$ escolhemos uma base $\{\phi_j^i\}$, $i = 1, 2$ e $j = 1, \ldots d_{\sigma_i}$ satisfazendo a relação (5.2). Com isso, temos que matriz derivada $\overset{\circ}{M}$ para as curvas de autovalores é dada por

$$\overset{\circ}{M}_{k,l}= \int_{\partial\Omega} V \cdot N \frac{\partial^2 \varphi_l}{\partial N^2} \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial N^2}$$

onde $\varphi_k = \phi_k^i$, $i = 1$ se $0 \leq k \leq d_{\sigma_1}$ e $i = 2$ se $d_{\sigma_1} < k \leq d_{\sigma_1} + d_{\sigma_2}$. A hipótese de não separabilidade implica em $\overset{\circ}{M}= \dot{\mu} I$, ou seja, valem as relações (5.5) e (5.6), para todo campo V em $C^3(\Omega, \mathbb{R}^n)$ G-invariante. Podemos apenas concluir de (5.5) que

$$\frac{1}{d_{\sigma_1}} \sum_{j=1}^{d_{\sigma_1}} \left(\frac{\partial^2 \phi_j^1}{\partial N^2} \right)^2 = \frac{1}{d_{\sigma_2}} \sum_{j=1}^{d_{\sigma_2}} \left(\frac{\partial^2 \phi_j^2}{\partial N^2} \right)^2 \quad em\, \partial\Omega. \tag{5.10}$$

Seja $t \to h(t, .)$ uma família analítica de difeomorfismo de classe C^6 G-invariante. Como estamos supondo que o autovalor não se separa (a multiplicidade não muda quando variamos o parâmetro t) existe uma família ortonormal de autofunções $\{\varphi_k(t)\}_{j=1}^{m}$[2], analíticas em t, associadas a curva de autovalores $\mu(t)$. Desta forma, utilizando o teorema 2.9 e o lema 2.10 podemos estender as autofunções em todo o $\mathbb{R}^n$ de forma que $\xi_k(t, .)|_{h(t,\Omega)} = h^{*-1}(t, .)\varphi_k(t)$ satisfaz

$$\begin{cases} (\Delta^2 + \mu(t))\xi_k(t, .) = 0, & em \;\; \Omega(t); \\ \frac{\partial}{\partial N_t}\xi_k(t, .) = \xi_k(t, .) = 0, & em \;\; \partial\Omega(t). \end{cases} \tag{5.11}$$

A expressão encontrada para os elementos da matriz $\overset{\circ}{M}$ deve ser a mesma para todo domínio $\Omega(t)$ e como já vimos $\xi_k(t, .)$ é duas vezes diferenciável em t, segue então que

$$\overset{\circ}{M}_{k,l}(t) = \int_{\partial\Omega(t)} V \cdot N_t \frac{\partial^2 \xi_l}{\partial N_t^2}(t, .) \frac{\partial^2 \xi_k}{\partial N_t^2}(t, .)$$

é diferenciável na variável t. Note que $\frac{\partial^2 v}{\partial N^2} = \Delta v$ em $\partial\Omega$, para toda função $v \in H^4 \cap H_0^2(\Omega)$. Fazendo $\sigma = V \cdot N$, derivando a expressão acima:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \overset{\circ}{M}_{k,l}(t)\Big|_{t=0} &= \int_{\partial\Omega} \left[\frac{\partial\sigma}{\partial t} + \sigma \frac{\partial\sigma}{\partial N} + H\sigma^2 \right] \Delta\varphi_l \Delta\varphi_k - \sigma^2 \frac{\partial}{\partial N}(\Delta\varphi_j \Delta\varphi_k) \\ &+ \int_{\partial\Omega} \sigma(\Delta\varphi_k \Delta\dot{\xi}_l + \Delta\varphi_l \Delta\dot{\xi}_k) \end{aligned} \tag{5.12}$$

[2]Não é possível construir uma família ortonormal analítica em t se a multiplicidade varia com t, veja [10], pag

as funções $\dot{\xi}_k$ são soluções para o problema

$$\begin{cases} (\Delta^2+\lambda)\dot{\xi}_k+\dot{\lambda}\xi_k=0, & em\ \Omega; \\ \dot{\xi}_k=0 & em\ \partial\Omega; \\ \frac{\partial}{\partial N}\dot{\xi}_k=-V\cdot N\Delta\xi_k, & em\ \partial\Omega; \end{cases} \tag{5.13}$$

Portanto, temos $\dot{\xi}=\mathcal{A}_{\Delta^2+\lambda}(\sigma\Delta\xi)$ módulo posto finito (o operador $\mathcal{A}_{\Delta^2+\lambda}$ está definido no capítulo 8 seção 8.5). Supondo a não separabilidade temos que $\frac{d}{dt}\overset{\circ}{M}_{k,l}(t)\Big|_{t=0}=\dot{\mu}I$. Observe que

$$\sum_{l=1}^{d_{\sigma_1}}(\Delta\xi_l)^2 = \sum_{l=1}^{d_{\sigma_1}}(\Delta\phi_l^1)^2 \tag{5.14}$$

$$\sum_{l=1+d_{\sigma_1}}^{d_{\sigma_1}+d_{\sigma_2}}(\Delta\xi_l)^2 = \sum_{l=1}^{d_{\sigma_2}}(\Delta\phi_l^2)^2 \tag{5.15}$$

definidas em $\partial\Omega$ são G-invariantes. Portanto

$$\sum_{l=1}^{d_{\sigma_1}}\Delta\phi_l^1\Delta\dot{\xi}_l \quad , \quad \sum_{l=1}^{d_{\sigma_2}}\Delta\phi_l^2\Delta\dot{\xi}_{l+d_{\sigma_1}}$$

também são G-invariantes.

Note que

$$\frac{1}{d_{\sigma_1}}\sum_{l=1}^{d_{\sigma_1}}\frac{d}{dt}\overset{\circ}{M}_{ll}=\frac{1}{d_{\sigma_2}}\sum_{l=d_{\sigma_1}+1}^{d_{\sigma_1}+d_{\sigma_2}}\frac{d}{dt}\overset{\circ}{M}_{ll},$$

pois $\frac{d}{dt}\overset{\circ}{M}_{k,l}(t)\Big|_{t=0}=\dot{\mu}I$, ou seja,

$$\int_{\partial\Omega}\left[\frac{\partial\sigma}{\partial t}+\sigma\frac{\partial\sigma}{\partial N}+H\sigma^2\right]\frac{1}{d_{\sigma_1}}\sum_{l=1}^{d_{\sigma_1}}(\Delta\phi_l^1)^2+2\int_{\partial\Omega}\sigma\left\{\frac{1}{d_{\sigma_1}}\sum_{l=1}^{d_{\sigma_1}}\Delta\phi_l^1\Delta\dot{\xi}_l\right\}=$$

$$=\int_{\partial\Omega}\left[\frac{\partial\sigma}{\partial t}+\sigma\frac{\partial\sigma}{\partial N}+H\sigma^2\right]\frac{1}{d_{\sigma_2}}\sum_{l=1}^{d_{\sigma_2}}(\Delta\phi_l^2)^2+2\int_{\partial\Omega}\sigma\left\{\frac{1}{d_{\sigma_2}}\sum_{l=1}^{d_{\sigma_2}}\Delta\phi_l^2\Delta\dot{\xi}_l\right\},$$

para toda função σ definida em $\partial\Omega$ de classe C^5 G-invariante. Com isto e com (5.10), segue que

$$\frac{1}{d_{\sigma_1}}\sum_{l=1}^{d_{\sigma_1}} \Delta\phi_l^1 \Delta\dot{\xi}_l - \frac{1}{d_{\sigma_2}}\sum_{l=1}^{d_{\sigma_2}} \Delta\phi_l^2 \Delta\dot{\xi}_{l+d_{\sigma_1}} = 0$$

em $\partial\Omega$. Segue da igualdade acima que o operador de fronteira Ψ definido por:

$$\begin{aligned}\sigma \quad \mapsto \quad & \frac{1}{d_{\sigma_1}}\sum_{j=1}^{d_{\sigma_1}} \sigma\frac{\partial}{\partial N}(\Delta\phi_j^1)^2 + 2\left[\Delta\phi_j^1 \Delta\mathcal{A}_{\Delta^2+\lambda}(\sigma\Delta\phi_j^1)\right] \\ & -\frac{1}{d_{\sigma_2}}\sum_{j=1}^{d_{\sigma_2}} \sigma\frac{\partial}{\partial N}(\Delta\phi_j^2)^2 + 2\left[\Delta\phi_j^2 \Delta\mathcal{A}_{\Delta^2+\lambda}(\sigma\Delta\phi_j^2)\right]. \qquad (5.16)\end{aligned}$$

deve ser identicamente nulo. Portando, de acordo com o teorema 8.8, temos que

$$\frac{1}{d_{\sigma_1}}\sum_{j=1}^{d_{\sigma_1}} |\frac{\partial}{\partial\tau}\Delta\phi_j^1|^2 - \frac{1}{d_{\sigma_2}}\sum_{j=1}^{d_{\sigma_2}} |\frac{\partial}{\partial\tau}\Delta\phi_j^2|^2 = 0 \qquad (5.17)$$

para todo $\tau \in T_x(\partial\Omega)$. Lembrando que $\frac{\partial^2\phi_j^i}{\partial N^2} = \Delta\phi_j^i$ em $\partial\Omega$, a condição acima torna-se

$$\frac{1}{d_{\sigma_1}}\sum_{j=1}^{d_{\sigma_1}} |\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{\partial^2\phi_j^i}{\partial N^2}|^2 - \frac{1}{d_{\sigma_2}}\sum_{j=1}^{d_{\sigma_2}} |\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{\partial^2\phi_j^i}{\partial N^2}|^2 = 0. \qquad (5.18)$$

De posse das condições (5.10) e (5.18) mostraremos, com o auxílio do lema 4.5, que $\frac{\partial^2\phi_j^i}{\partial N^2} = 0$ em $\partial\Omega$, para $i = 1, 2$ e $j = 1, 2, 3..., d_{\sigma_i}$. De fato, para cada $x \in \partial\Omega$ podemos definir dois pares de vetores do $\mathbb{R}^2$, da seguinte forma: se $d_{\sigma_i} = 2$ para $i = 1, 2$

$$v_1(x) = \left(\frac{\partial^2\phi_1^1}{\partial N^2}, ..., \frac{\partial^2\phi_{d_{\sigma_1}}^1}{\partial N^2}\right)$$

$$v_2(x) = \left(\frac{\partial^2\phi_1^2}{\partial N^2}, ..., \frac{\partial^2\phi_{d_{\sigma_2}}^2}{\partial N^2}\right),$$

se caso um dos d_{σ_i} for igual a 1 basta repetir a coordenada $\frac{\partial^2\phi_1^2}{\partial N^2}$. Assim

$$\frac{\partial v_1}{\partial \tau}(x) = \left(\frac{\partial}{\partial \tau}\frac{\partial^2\phi_1^1}{\partial N^2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \tau}\frac{\partial^2\phi_{d_{\sigma_1}}^1}{\partial N^2}\right)$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial \tau}(x) = \left(\frac{\partial}{\partial \tau}\frac{\partial^2\phi_1^2}{\partial N^2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \tau}\frac{\partial^2\phi_{d_{\sigma_2}}^2}{\partial N^2}\right)$$

Definindo os vetores dessa forma as igualdades (5.10) e (5.18) tornam-se $\langle v_1(x), v_1(x)\rangle = \langle v_2(x), v_2(x)\rangle$ e $\left\langle \frac{\partial v_1}{\partial \tau}(x), \frac{\partial v_1}{\partial \tau}(x)\right\rangle = \left\langle \frac{\partial v_2}{\partial \tau}(x), \frac{\partial v_2}{\partial \tau}(x)\right\rangle$ onde $\langle , \rangle$ denota o produto interno do $\mathbb{R}^2$. O lema 4.5 garante que existe uma transformação ortogonal T tal que $v_1(x) = Tv_2(x)$ em $\partial\Omega$, ou seja, $\frac{\partial^2\phi_i^1}{\partial N^2} = a_{i1}\frac{\partial^2\phi_1^2}{\partial N^2} + a_{i2}\frac{\partial^2\phi_2^2}{\partial N^2}$, onde a_{ij} são os elementos da transformação T. Como $\frac{\partial^2\phi_i^1}{\partial N^2} \notin M_{\sigma_2}$ devemos ter $\frac{\partial^2\phi_i^1}{\partial N^2} = 0$ em $\partial\Omega$ e portanto $\frac{\partial^2\phi_j^i}{\partial N^2} = 0$ para todo $i = 1, 2$ e $j = 1, 2, .., d_{\sigma_i}$. Desta forma, concluímos que a derivada $\dot\lambda$ é nula para todo domínio $h(\Omega)$ próximo á Ω, porém o teorema 5.3 garante que isto não pode ocorrer.

□

Corolário 5.5. *Suponhamos que G é um subgrupo finito de $O(n)$ tal que $d_\sigma \leq 2$ para todo $\sigma \in \hat{G}$. Então, para um conjunto residual de regiões C^4-regulares e G-simétricas todos os autovalores do operador $\Delta : H^4 \cap H_0^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ são G-simples.*

Teorema 5.6. *Sejam G um subgrupo finito de $O(n)$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, aberto, limitado, conexo, com fronteira C^5-regular e G-simétrico. Se λ é autovalor associado a M_{σ_1} e M_{σ_2}, onde $d_{\sigma_1} = 1$ para o operador:*

$$\Delta^2 : H^4 \cap H_0^2(\Omega) \to L^2(\Omega),$$

então λ pode ser separado, por meio de pequenas perturbações G-simétricas de Ω, em dois autovalores onde um deles é simples. Mais precisamente, dado qualquer $\epsilon > 0$ exitem $h \in Diff_G^5(\Omega)$, $||h - i_\Omega||_{C^5} < \epsilon$ e $\delta > 0$ tal que um dos autovalores separados, pertencentes ao intervalo $(\lambda - \delta, \lambda + \delta)$, está associado apenas ao espaço M_{σ_1} e portanto é simples.[3]

Demonstração. De fato, considerando podemos repetir o argumento do teorema anterior até obtermos

[3]E importante observar que o fato da ação de G em $Ker(\Delta^2|_{M_{\sigma_1}} + \lambda)$ ser irredutível não garante que a ação em $Ker(\Delta^2 + \lambda)$ também seja.

funções vetoriais da forma:

$$v_1(x) = \left(\frac{\partial^2 \phi_1^1}{\partial N^2}, \dots, \frac{\partial^2 \phi_{d_{\sigma_1}}^1}{\partial N^2}\right) \quad e \quad v_2(x) = \frac{\partial^2 \phi_1^2}{\partial N^2}(1, 1, \dots, 1)$$

pertencentes a $\mathbb{R}^{d_{\sigma_1}}$ que satisfazem as relações

$$\langle v_1(x), v_1(x)\rangle = \langle v_2(x), v_2(x)\rangle = d_{\sigma_2}\left(\frac{\partial \phi_1^2}{\partial N}\right)^2$$

e

$$\left\langle \frac{\partial v_1}{\partial \tau}(x), \frac{\partial v_1}{\partial \tau}(x)\right\rangle = \left\langle \frac{\partial v_2}{\partial \tau}(x), \frac{\partial v_2}{\partial \tau}(x)\right\rangle = d_{\sigma_2}\left(\frac{\partial}{\partial \tau}\frac{\partial \phi_1^2}{\partial N}\right)^2, \tag{5.19}$$

para todo $x \in \partial\Omega$. Agora argumentando como na demonstração do teorema 4.6 obtemos $\frac{\partial \phi_j^1}{\partial N} = a_j \frac{\partial^2 \phi_1^2}{\partial N^2}$ em $\partial\Omega$, porém como $\phi_j^1 \notin M_{\sigma_2}$ devemos ter $\frac{\partial^2 \phi_j^i}{\partial N^2} = 0$ em $\partial\Omega$.

$\square$

Corolário 5.7. *Seja G subgrupo finito de $O(n)$ e $\sigma \in \hat{G}$ tal que $d_\sigma = 1$. O subconjunto*

$$\mathcal{C} = \{h \in Diff_G^4(\Omega) |\ \text{todos os autovalores do operador,}$$
$$\Delta^2 : H^4 \cap H_0^2(\Omega) \to L^2(\Omega) \text{ associados a } M_\sigma, \text{ são simples}\}$$

é residual em $Diff_G^4(\Omega)$.

Capítulo 6

Continuidade e Existência de Curvas de Autovalores

6.1 Introdução

Neste capítulo apresentaremos os resultados sobre continuidade dos autovalores com relação à perturbação regular do domínio de definição do problema de Laplace com condição de fronteira de Robin, além da existência de curvas analíticas de autovalores e autofunções para o problema de Laplace com condição de fronteira de Neumann. A principal técnica utilizada para obter os resultados é o Método de Liapunov-Schmitd, seguindo a mesma linha apresentada por Henry em [6].

6.2 Continuidade

Considere o problema de Laplace com condição de Robin em uma região Ω do $\mathbb{R}^n$ aberta, limitada com fronteira regular

$$\begin{cases} (L+\lambda)u = 0, & em \ \ \Omega; \\ (\frac{\partial}{\partial N} + \beta(x))u = 0, & em \ \ \partial\Omega; \end{cases} \tag{6.1}$$

onde L é operador diferencial dado por $\Delta + c(x)$ e as funções c e β são de classe C^2.

O problema na forma Lagrageana associado ao dado acima é

$$\begin{cases} h^*(L+\lambda)h^{*-1}u = 0, & em \ \ \Omega; \\ h^*(\frac{\partial}{\partial N_h} + \beta(x))h^{*-1}u = 0, & em \ \ \partial\Omega; \end{cases} \tag{6.2}$$

onde $h \in Diff^3(\Omega)$. A regularidade do problema perturbado com relação ao parâmetro h depende da regularidade das funções c e β. Mais precisamente, considerando $h \in Diff^3(\Omega)$ e $u \in H^2(\Omega)$

temos:

$$(h,u) \longmapsto h^*(\Delta + c)h^{*-1}u \in L^2(\Omega),$$

de classe C^2 e

$$(h,u) \longmapsto h^*(\tfrac{\partial}{\partial N_h} + \beta)h^{*-1}u \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$$

de classe C^1, pois $(h,u) \longmapsto (\beta \circ h)u \in H^1(\Omega)$ é de classe C^1.

Teorema 6.1. *Seja λ_0 um autovalor com multiplicidade $m > 1$ para o problema (6.1). Dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $h \in Diff^3(\Omega)$, $||h - i_\Omega||_{C^3} < \delta$ existem exatamente m autovalores (contando suas multiplicidades) para o problema (6.2) no intervalo $(\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon)$.*

Demonstração. Sejam $\{\phi_j\}_{j=1}^m$ uma base ortonormal para o auto-espaço associado a λ_0 e $Pu = \sum_j^m \phi_j \int_\Omega \phi_j u$ projeção ortogonal sobre o auto-espaço. Com essa projeção temos a decomposição $L^2(\Omega) = \mathcal{R}(P) \oplus N(P)$, ou seja, qualquer função nesse espaço pode ser escrita de forma única como $u = \phi + \psi$ onde $\phi \in \mathcal{R}(P) = ker(\Delta + \lambda)$ e $\psi \in \mathcal{N}(P)$. Com isto, o problema perturbado (6.2) é equivalente às equações

$$\begin{cases} P(h^*(L+\lambda)h^{*-1}(\phi+\psi)) = 0, & em\ \Omega; \\ (I-P)(h^*(L+\lambda)h^{*-1}(\phi+\psi) = 0, & em\ \Omega; \\ h^*(\frac{\partial}{\partial N} + \beta(x))h^{*-1}(\psi+\phi) = 0, & em\ \partial\Omega; \end{cases} \tag{6.3}$$

Começaremos resolvendo o problema determinado pelas segunda e terceira equações acima. A parte da fronteira pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\left(\frac{\partial}{\partial N} + \beta\right)\psi + \left(h^*\left(\frac{\partial}{\partial N} + \beta\right)h^{*-1} - \left(\frac{\partial}{\partial N} + \beta\right)\right)(\psi+\phi) = 0.$$

Agora somando e subtraindo na segunda equação a parcela $(L+\lambda)\psi$ e observado que

$$
\begin{aligned}
PL\psi = P(L+\lambda)\psi &= \sum_{j=1}^{m} \phi_j \int_\Omega \phi_j (L+\lambda)\psi \\
&= \sum_{j=1}^{m} \phi_j \left(\int_\Omega \phi_j (L+\lambda)\psi - \psi (L+\lambda)\phi_j \right) \\
&= \sum_{j=1}^{m} \phi_j \left(\int_{\partial\Omega} \phi_j \frac{\partial \psi}{\partial N} - \psi \frac{\partial \phi_j}{\partial N} \right) \\
&= \sum_{j=1}^{m} \phi_j \left(\int_{\partial\Omega} \phi_j \left(\frac{\partial}{\partial N} + \beta \right) \psi - \psi \left(\frac{\partial}{\partial N} + \beta \right) \phi_j \right) \\
&= \sum_{j=1}^{m} \phi_j \int_{\partial\Omega} \phi_j \left(\frac{\partial}{\partial N} + \beta \right) \psi,
\end{aligned}
$$

e

$$
(L+\lambda)\psi = (I-P)[(L+\lambda)\psi] + \sum_{j=1}^{m} \phi_j \int_\Omega \phi_j (L+\lambda)\psi,
$$

obtemos

$$
(L+\lambda)\psi + (I-P)(h^* L h^{*-1} - L)(\psi+\phi) - \sum_{j=1}^{m} \phi_j \int_{\partial\Omega} \phi_j \left(\frac{\partial}{\partial N} + \beta \right) \psi = 0.
$$

Portanto a segunda e terceira equações são equivalentes a aplicação $F(h, \lambda, \phi, \psi)$

$$
\begin{aligned}
F \ : \ & Diff(\Omega) \times \mathbb{R} \times \mathcal{R}(P) \times H^2(\Omega) \cap \mathcal{N}(P) \longrightarrow \mathcal{N}(P) \times H^{\frac{3}{2}}(\Omega) \\
& F(h, \lambda, \phi, \psi) = (F_1(h, \lambda, \phi, \psi), F_2(h, \lambda, \phi, \psi))
\end{aligned}
$$

onde:

$$
\begin{cases}
F_1 = (L+\lambda)\psi + (I-P)(h^* L h^{*-1} - L)(\psi+\phi) - \sum_{j=1}^{m} \phi_j \int_{\partial\Omega} \phi_j (\frac{\partial}{\partial N} + \beta)\psi, \\
F_2 = (\frac{\partial}{\partial N} + \beta(x))\psi + (h^*(\frac{\partial}{\partial N} + \beta)h^{*-1} - (\frac{\partial}{\partial N} + \beta))(\psi + \phi).
\end{cases}
$$

Note que a aplicação F depende das variáveis λ, h e ψ, além de ϕ. Nossa intenção é mostrar, utilizando o Teorema das Funções Implícitas, que podemos resolver a equação $F(h, \lambda, \phi, \psi) = (0, 0)$ com ψ em função de λ, h e ϕ. Para este fim precisamos verificar a seguinte

Afirmação 6.2. *Para $h = i_\Omega, \lambda = \lambda_0, \psi = 0$ a aplicação*

$$\tfrac{\partial F}{\partial \psi}(i_\Omega, \lambda_0, 0, 0)\dot{\psi} = ((L + \lambda_0)\dot{\psi} - \textstyle\sum_{j=1}^m \phi_j \int_{\partial\Omega} \phi_j (\tfrac{\partial}{\partial N} + \beta)\dot{\psi}, (\tfrac{\partial}{\partial N} + \beta(x))\dot{\psi})$$

é um isomorfismo sobrejetor sobre os espaços $H^2(\Omega) \cap \mathcal{N}(P)$ e $\mathcal{N}(P) \times H^{\frac{1}{2}}(\Omega)$.

Demonstração. Ver [12] para uma prova considerando domínios C^∞. □

Pelo Teorema das Funções Implícitas existem vizinhanças $\mathcal{V}$ em $C^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ de i_Ω, $(\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon)$ de λ_0 e uma função $S(h, \lambda)\phi$ de classe C^1 nas variáveis (h, λ) tal que $F(h, \lambda, \phi, S(h, \lambda)\phi) = 0$ em $\mathcal{V}$. Além disto, $S(h, \lambda)\phi$ é analítica em λ e linear em ϕ.

Agora para resolver a primeira equação encontrada em (6.3) temos que $\phi \in \mathcal{R}(P)$, logo existem $c_1, c_2, ..., c_m$ números reais não todos nulos, tais que $\sum_{j=1}^m c_j \phi_j$ e então a equação (6.3) é equivalente ao sistema nas variáveis $c_1, ..., c_j$

$$\sum_{j=1}^m c_j \int_\Omega \phi_k h^*(L + \lambda) h^{*-1}(\phi_j + S(h, \lambda)\phi_j) = 0$$

para $k = 1, 2, ..., m$. Portanto λ é um autovalor para o problema (6.2) se, e somente se, $DetM(h, \lambda) = 0$ onde

$$M_{k,j}(h, \lambda) = \int_\Omega \phi_k h^*(L + \lambda) h^{*-1}(\phi_j + S(h, \lambda)\phi_j).$$

Além disto, as autofunções associadas são dadas por

$$u = \sum_{j=1}^m c_j(\phi_j + S(h, \lambda)\phi_j),$$

onde $c = (c_1, ..., c_m)$ satisfaz $Mc = 0$.

Afirmação 6.3. *Dado $\epsilon > 0$ existe uma vizinhança $\mathcal{U}$ de i_Ω tal que para cada h nesta vizinhança existem exatamente m raizes de $DetM(h, \lambda)$ no intervalo $(\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon)$.*

De fato, para $h = i_\Omega$, $DetM(i_\Omega, \lambda) = (\lambda - \lambda_0)^m$ e sabendo que $DetM(h, \lambda)$ é analítica em λ para cada h, considere as extensões naturais de $(\lambda - \lambda_0)^m$ e $DetM(h, \lambda)$ para λ complexo. Então pelo Teorema de Rouché's segue que $DetM(h, \lambda)$ tem exatamente m raizes para cada $h \in \hat{\mathcal{V}}$.

A conclusão do teorema segue da afirmação acima.

□

6.3 Existência de curvas analíticas

O próximo resultado garante a existência de curvas analíticas de autovalores e autofunções para o problema $(6.2)_{h(t,.)}$ quando $h(t, .)$ é uma curva analítica de difeomorfismos; β e c são identicamente nulas, ou seja, quando estamos considerando o problema de Laplace com condição de fronteira de Neumann.

Teorema 6.4. *Seja λ_0 um autovalor com multiplicidade $m > 1$ para o problema (6.1) considerando β e c funções identicamente nulas. Considere $h(t, .)$ uma família analítica de difeomorfismos de classe C^3 tal que $h(0, x) = x$. Então existem m curvas de autovalores $\mu_j(t)$ para o problema $(6.2)_{h(t,.)}$ e m curvas de autofunções $\phi_j(t)$ analíticas em t.*

Demonstração. Para provar a existência das curvas analíticas de autovalores bastaria considerar a equação $DetM(h(t, .), \lambda) = 0$ obtida na demonstração do teorema anterior e utilizar o Teorema de Puiseux para funções analíticas (ver apêndice). Porém a existência de uma curva analítica de autofunções associada não segue tão diretamente. A razão para isto é a seguinte: o teorema anterior mostra que as autofunções associadas a uma dada curva de autovalores $\lambda(t)$ são dadas por $u = \sum_{j=1}^{m} c_j(\phi_j + S(h(t, .), \lambda(t))\phi_j)$, onde $c = (c_1, ..., c_m) \in \mathbb{R}^m$ é um autovetor da matriz $M(h(t, .), \lambda(t))$ associado ao autovalor 0 e claramente c depende de t. Portanto, já que a função $S(h(t, .), \lambda(t))\phi_j$ é analítica em t, a curva de autofunções $u(t)$ é analítica se, e somente se $c(t)$ é analítica também. No entanto, como a matriz M não é simétrica não podemos obter o resultado diretamente da Teoria de Perturbação Analítica de Operadores Lineares em Dimensão Finita. Para contornarmos o problema faremos uma construção, seguindo a mesma linha do teorema anterior, de forma que a matriz M seja simétrica.

Sejam $\{\phi_j\}_{j=1}^m$ soluções para o problema (6.1) associadas a λ_0 que formam uma base ortonormal para o auto-espaço. Para cada $j = 1, ..m$ considere o seguinte problema:

$$\begin{cases} (\Delta+\lambda_0)u = 0, & em\ \Omega; \\ h^*\frac{\partial}{\partial N_h}h^{*-1}(\phi_j+u) = 0, & em\ \partial\Omega; \\ Pu = \sum_{j=1}^m \phi_j \int_\Omega \phi_j u = 0. \end{cases} \tag{6.4}$$

Mostraremos, para cada j, a existência de uma curva de soluções para o problema acima. De fato, considere aplicação

$$F : Diff^3(\Omega) \times H^2(\Omega) \longrightarrow [\phi_j]^\perp \cap \times \mathcal{R}(P) \times H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega) :$$

$$F(h,w) = ((\Delta+\lambda_0)w, Pw, h^*\frac{\partial}{\partial N_h}h^{*-1}(\phi_j+w)),$$

onde $[\phi_j]^\perp$ é complemento ortogonal de $ker(\Delta+\lambda_0)$ em $L^2(\Omega)$. O Teorema das Funções Implícitas garante a existência de uma vizinhança $\mathcal{V}$ de i_Ω e uma função analítica $w_j(h)$ definida em $\mathcal{V}$ tal que $F(h, w_j(h)) = 0$. É imediato ver que $\frac{\partial F}{\partial w}(i_\Omega, 0)$ é um isomorfismo.

Com isto, obtemos para cada h em $\mathcal{V}$ um conjunto $\{\varphi_j(h)\}_{j=1}^m$, $\varphi_j(h) = \phi_j + \omega_j(h)$, linearmente independente de funções que satisfazem a equação $(6.4)_h$. Utilizando o processo de ortonormalização de Gram-Schmidt com o produto interno $(u, v) = \int_\Omega uvdeth_x dx$ teremos um conjunto $\{\hat{\varphi}_j(h)\}_{j=1}^m$ tal que $(\hat{\varphi}_j(h), \hat{\varphi}_k(h)) = \delta_{jk}$. Note que as funções $\hat{\varphi}_j(h)$ estão no domínio do operador definido por $h^*\Delta h^{*-1}$ com domínio $D_h = \{u \in H^2(\Omega), h^*\frac{\partial}{\partial N_h}h^{*-1}u = 0\}$. Além disso, já que com o produto interno dado acima o operador é auto-adjunto, temos que a matriz dada por $\int_\Omega \hat{\varphi}_j h^*\Delta h^{*-1}\hat{\varphi}_k deth_x dx$ é simétrica.

Considere $V \in C^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $h(t,x) = x + tV(x)$ família de difeomorfismos para t suficientemente pequeno e a projeção

$$P(t)u = \sum_{j=1}^m \hat{\varphi}_j(t) \int_\Omega u\hat{\varphi}_j(t)deth_x(t,.)dx.$$

Defina a aplicação

$$G_j \ : \ (-\epsilon,\epsilon)\times\mathbb{R}\times H^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)\times H^{\frac{3}{2}}(\Omega)\times L^2(\Omega) \tag{6.5}$$

onde:

$$\begin{cases} G_1 = (I-P(t))(h^*(t,.)(\Delta+\lambda)h^{*-1}(t,.))(\omega+\hat{\varphi}_j(t)) \\ G_2 = h^*\frac{\partial}{\partial N_h}h^{*-1}\omega; \\ G_3 = P(t)\omega \end{cases}$$

,mais uma vez aplicando o Teorema das Funções Implícitas, existe uma vizinhança $\mathcal{U}$ de i_Ω e uma aplicação $\omega_j(t,\lambda)$ tal que $G_j(t,\lambda,\omega_j(t,\lambda)) = (0,0,0)$. Um número λ será autovalor para $(6.2)_{h(t,.)}$ se, e somente se existir $c=(c_1,...,c_m)$ não nulo tal que $M(t,\lambda)c=0$, onde

$$M_{ij}(t,\lambda) = \int_\Omega \hat{\varphi}_i(t)h^*(t,.)(\Delta+\lambda)h^{*-1}(t,.)(\hat{\varphi}_j(t)+\omega_j(t,\lambda))deth_x(t,.). \tag{6.6}$$

Isto é, λ é autovalor se, somente se $DetM(t,\lambda)=0$. Observe que agora a matriz M é simétrica. O teorema de Puiseux garante a existência de soluções analíticas $\lambda(t)$ para $DetM(t,\lambda)=0$. Como a matriz M é simétrica para cada curva de autovalores $\lambda(t)$ existe uma curva $c(t)\in\mathbb{R}^m$ analítica tal que $M(t,\lambda(t))c(t)=0$. Portanto $\psi(t)=\sum_{j=1}^m c_j(t)(\hat{\varphi}_j+\omega_j(t,\lambda(t)))$ é uma curva analítica de autofunções associadas a λ.

□

Observação 6.3.1. *A construção das soluções para o problema auxiliar (6.4) foi necessária pelo fato do domínio D_h do operador $h^*\Delta h^{*-1}$ variar com h. Não é possível obter uma matriz M simétrica usando diretamente a mesma construção apresentada por Henry em [6] exemplo 4.4.*

A partir do Teorema acima podemos obter expressões para as primeiras duas derivadas das curvas de autovalores utilizando a teoria desenvolvida por Henry em [6] e apresentada no capítulo 2.

Corolário 6.5. *Considere λ_0 autovalor para o problema (6.2), com $\beta=c=0$, e uma curva de difeomorfismos $h(t,.)$ dados como acima. Então temos que $\frac{d}{dt}\lambda|_{t=0}$, $\frac{d^2}{dt^2}\lambda|_{t=0}$ para cada uma das m*

curvas $\lambda(t)$ devem satisfazer as seguintes equações em $\mathbb{R}^m$:

$$
\begin{aligned}
&(\dot{\lambda}I + \overset{\circ}{M})c = 0\\
&(\ddot{\lambda}(0)I + \overset{\circ\circ}{M})c + 2(\dot{\lambda}I + \overset{\circ}{M})\dot{c} = 0
\end{aligned}
$$

As matrizes $\overset{\circ}{M}$, $\overset{\circ\circ}{M}$ são dadas por:

$$
\begin{aligned}
\overset{\circ}{M}_{k,j} &= \int_{\partial\Omega} \sigma(\nabla_{\partial\Omega}\phi_k \cdot \nabla_{\partial\Omega}\phi_j - \lambda_0\phi_k\phi_j)\\
\overset{\circ\circ}{M}_{k,j} &= \int_{\partial\Omega} 2\sigma\dot{Q}_{jk} + \sigma^2\frac{\partial}{\partial N}Q_{jk} + \left[\frac{\partial\sigma}{\partial t} + \sigma\frac{\partial\sigma}{\partial N} + H\sigma^2\right]Q_{jk},,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&Q_{jk} = \nabla_{\partial\Omega}\phi_j \cdot \nabla_{\partial\Omega}\phi_k - \lambda_0\phi_j\phi_k\\
&\dot{Q}_{jk} = \nabla_{\partial\Omega}\phi_k \cdot \nabla_{\partial\Omega}\dot{\phi}_j - \dot{\lambda}\phi_k\phi_j - \lambda\phi_k\dot{\phi}_j,
\end{aligned}
$$

onde $\{\phi_j\}_{j=1}^m$ formam uma base ortonormal para o auto-espaço associado a λ_0 e $\dot{\phi}_j$ satisfaz $\dot{\phi}_j \perp span[\phi_i]_1^m$,

$$
\begin{cases}
(\Delta + \lambda_0)\dot{\phi}_j \in span[\phi_i]_1^m,\\
\frac{\partial\dot{\phi}_j}{\partial N} = (div_{\partial\Omega}(\sigma\nabla_{\partial\Omega}\phi_j) + \lambda_0\sigma\phi_j), \quad em\ \partial\Omega.
\end{cases}
$$

Demonstração. Sabemos que cada par $(\lambda(t), v(t))$ constituído por autovalor e uma autofunção associada deve satisfazer:

$$
\begin{cases}
(\Delta + \lambda(t))v(t,.) = 0, & em\ \Omega_t;\\
\dfrac{\partial v(t,.)}{\partial N_{\Omega_t}} = 0, & em\ \partial\Omega_t;
\end{cases}
$$

Derivando com relação a t a equação em Ω_t, para $y = h(t,x) \in \Omega_t$, obtemos:

$$(\Delta + \lambda(t))\frac{\partial}{\partial t}v(t,y) + \frac{\partial}{\partial t}\lambda(t)v(t,y) = 0$$

A partir de agora usaremos sempre a notação $\dot{v}$ para a derivada $\frac{\partial}{\partial t}v(t,.)$ e analogamente para toda derivada em t.

Para a derivada da condição de fronteira temos, para todo $x \in \partial\Omega$

$$\frac{\partial v(t,.)}{\partial N_{\Omega_t}} = N_{\Omega_t}(t, h(t,x)) \cdot \nabla_y v(t, h(t,x)) = 0$$

onde ∇_y é a derivada na variável $y = h(t,x)$. derivando a expressão acima com relação a t:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial v(t,h(t,x))}{\partial N_{\Omega_t}}\right] &= \frac{d}{dt}[N_{\Omega_t}(t,h(t,x))] \cdot \nabla_y v(t,h(t,x)) \\
&\quad + N_{\Omega_t}(t,h(t,x)) \cdot \frac{d}{dt}[\nabla_y v(t,h(t,x))] \\
&= \dot{N}_{\Omega_t}(t,y) \cdot \nabla_y v(t,y) + N_{\Omega_t}(t,y) \cdot \nabla_y \dot{v}(t,y) + \\
&\quad \underbrace{N_{\Omega_t}(t,y) \cdot \nabla_y^2 v(t,y) V + (\nabla_y N_{\Omega_t}(t,y) V) \cdot \nabla_y v(t,y)}_{V(t,y)\cdot \nabla_y (N_{\Omega_t} \cdot \nabla_y v)}
\end{aligned}$$

De acordo com o lema 2.7,

$$\dot{N}_{\Omega_t} = -\nabla_{\partial\Omega t}\sigma - \sigma \frac{\partial N_{\Omega_t}}{\partial N_{\Omega_t}}$$

onde $\sigma = V(t,y) \cdot N_{\Omega_t}$. Lembrando que $\frac{\partial v}{\partial N_{\Omega_t}} = 0$ em $\partial\Omega_t$, segue

$$V \cdot \nabla_y \left(\frac{\partial v}{\partial N_{\Omega_t}}\right) = \sigma \frac{\partial}{\partial N_{\Omega_t}} \left(\frac{\partial v}{\partial N_{\Omega_t}}\right), \quad em \quad \partial\Omega_t.$$

Assim,

$$\frac{\dot{v}}{\partial N_{\Omega_t}} - \nabla_{\partial\Omega_t}\sigma \cdot \nabla_{\partial\Omega_t} v + \sigma \frac{\partial}{\partial N_{\Omega_t}} \left(\frac{\partial v}{\partial N_{\Omega_t}}\right) = 0 \quad em \quad \partial\Omega_t$$

Por fim, aplicando o teorema 2.1 obtemos

$$\frac{\partial \dot{v}}{\partial N_{\Omega_t}} = div_{\partial\Omega_t}(\sigma \nabla_{\partial\Omega_t} v) + \lambda(t)\sigma v, \quad em \quad \partial\Omega_t.$$

Portanto $\dot{v}$ deve satisfazer o seguinte problema:

$$\begin{cases} (\Delta+\lambda)\dot{v}+\dot{\lambda}(t)v=0, & em\ \Omega_t; \\ \frac{\partial \dot{v}}{\partial N_{\Omega_t}}=div_{\partial\Omega_t}(\sigma\nabla_{\partial\Omega_t}v)+\lambda(t)\sigma v, & em\ \partial\Omega_t; \end{cases} \tag{6.7}$$

Sabemos que $v(0,.)=\sum_{j=1}^{m}c_j\phi_j$ para c_j não todos nulos, multiplicando a equação (6.7) com $t=0$ por ϕ_k e integrando temos,

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}c_k &= -\int_{\Omega}\phi_k(\Delta+\lambda_0)\dot{v} \\ &= \int_{\Omega}\dot{v}(\Delta+\lambda_0)\phi_k-\phi_k(\Delta+\lambda_0)\dot{v} \\ &= -\int_{\partial\Omega}\phi_k(div_{\partial\Omega}(\sigma\nabla_{\partial\Omega}v)+\lambda_0\sigma v)) \\ &= \int_{\partial\Omega}\sigma(\nabla_{\partial\Omega}\phi_k\cdot\nabla_{\partial\Omega}v-\lambda_0\phi_k v) \\ &= \sum_{j=1}^{m}c_j\int_{\partial\Omega}\sigma(\nabla_{\partial\Omega}\phi_k\cdot\nabla_{\partial\Omega}\phi_j-\lambda_0\phi_k\phi_j) \end{aligned} \tag{6.8}$$

Definindo $c=(c_1,c_2,...,c_m)$ e

$$\mathring{M}_{k,j}=\int_{\partial\Omega}\sigma(\nabla_{\partial\Omega}\phi_k\cdot\nabla_{\partial\Omega}\phi_j-\lambda_0\phi_k\phi_j)$$

vemos que $(\mathring{M}-\dot{\lambda})c=0$, portanto a derivada para a curva $\lambda(t)$ de autovalores é um dos autovalores da matriz $\mathring{M}$.

Agora para o cálculo de $\ddot{\lambda}$ precisamos derivar a equação (6.7) mais uma vez. Começaremos calculando a derivada para a condição de fronteira, a saber

$$\frac{\partial\dot{v}}{\partial N_{\Omega_t}}-(div_{\partial\Omega_t}(\sigma\nabla_{\partial\Omega_t}v)+\lambda(t)\sigma v)=0 \tag{6.9}$$

A derivada em t de $f(t,h(t,x))=0$, $\forall x\in\partial\Omega$, onde f é uma função suficientemente suave, satisfaz:

$$\dot{f}(0,x)+\sigma\frac{\partial f}{\partial N}(0,x)=0,\quad em\,\partial\Omega.$$

Aplicando a fórmula acima para a equação (6.9), temos

$$\begin{aligned}
\dot{f}(0,x) &= \frac{\partial \ddot{v}}{\partial N} - \nabla_{\partial\Omega}\sigma \cdot \nabla_{\partial\Omega}\dot{v} - \left[\frac{\partial}{\partial t} div_{\partial\Omega_t}(\sigma\nabla_{\partial\Omega_t} v) + \frac{\partial}{\partial t}(\sigma\lambda v)\right] \\
\sigma\frac{\partial f}{\partial N}(0,x) &= \sigma\frac{\partial^2 \dot{v}}{\partial N^2} - \sigma\left[\frac{\partial}{\partial N} div_{\partial\Omega}(\sigma\nabla_{\partial\Omega} v) + \frac{\partial}{\partial N}(\sigma\lambda v)\right]
\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ddot{v}}{\partial N} &= \nabla_{\partial\Omega}\sigma \cdot \nabla_{\partial\Omega}\dot{v} - \sigma\frac{\partial^2 \dot{v}}{\partial N^2} + \sigma(\dot{\lambda} v + \lambda\dot{v}) + \left[\frac{\partial\sigma}{\partial t} + \sigma\frac{\partial\sigma}{\partial N}\right]\lambda v + \\
&+ \frac{\partial}{\partial t} div_{\partial\Omega_t}(\sigma\nabla_{\partial\Omega_t} v) + \sigma\frac{\partial}{\partial N} div_{\partial\Omega}(\sigma\nabla_{\partial\Omega} v).
\end{aligned}$$

Multiplicando a equação (6.9) por $-\sigma H$ e somando com a equação acima obtemos a seguinte condição de fronteira:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ddot{v}}{\partial N} &= div_{\partial\Omega}(\sigma\nabla_{\partial\Omega}\ddot{v}) + 2\sigma(\dot{\lambda} v + \dot{v}\lambda) + \left[\frac{\partial\sigma}{\partial t} + \sigma\frac{\partial\sigma}{\partial N} + \sigma^2 H\right]\lambda v + \\
& \frac{\partial}{\partial t} div_{\partial\Omega_t}(\sigma\nabla_{\partial\Omega_t} v) + \sigma\frac{\partial}{\partial N} div_{\partial\Omega}(\sigma\nabla_{\partial\Omega} v) + \sigma H div_{\partial\Omega}(\sigma\nabla_{\partial\Omega} v) \qquad (6.10)
\end{aligned}$$

Por fim, derivando a equação do interior de Ω,

$$(\Delta + \lambda_0)\ddot{v} + 2\dot{\lambda}\ddot{v} + \ddot{\lambda} v = 0. \qquad (6.11)$$

Como podemos observar para determinar a segunda derivada é necessário conhecer $\dot{v}$. De fato, existe uma única $\dot{\phi}_j \in H^2(\Omega)$, tal que $\dot{\phi}_j \perp [\phi_j]$

$$\begin{cases}
(\Delta + \lambda_0)\dot{\phi}_j \ \in span[\phi_i]_1^m \\
\dfrac{\partial \dot{\phi}_j}{\partial N} = (div_{\partial\Omega}(\sigma\nabla_{\partial\Omega}\phi_j) + \lambda_0\sigma\phi_j), \qquad em \ \ \partial\Omega.
\end{cases}$$

Logo, $\dot{v}|_{t=0} = \sum_{j=i}^m c_j\dot{\phi}_j + \dot{c}_j\phi_j$, onde os $\dot{c}_j$ não são todos nulos e c_j são como antes. Multiplicando a equação acima por ϕ_k e integrando em Ω, temos

$$\ddot{\lambda} c_k + 2\dot{\lambda}\dot{c}_k = -\int_{\partial\Omega} \phi_k \frac{\partial \ddot{v}}{\partial N},$$

onde

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega} \phi_k \frac{\partial \ddot{v}}{\partial N} &= \int_{\partial\Omega} \phi_k \left(div_{\partial\Omega}(\sigma \nabla_{\partial\Omega} \dot{v}) + 2\sigma(\dot{\lambda} v + \lambda \dot{v}) + \left[\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \sigma \frac{\partial \sigma}{\partial N} + \sigma^2 H \right] \lambda v \right) \\ &+ \int_{\partial\Omega} \phi_k \frac{\partial}{\partial t} div_{\partial\Omega}(\sigma \nabla_{\partial\Omega} v) + \phi_k \sigma \frac{\partial}{\partial N} div_{\partial\Omega}(\sigma \nabla_{\partial\Omega} v) + \\ &+ \sigma H \phi_k div_{\partial\Omega}(\sigma \nabla_{\partial\Omega} v) \end{aligned} \tag{6.12}$$

É conveniente encontrar uma forma mais apropriada para a expressão acima. Vamos dividir o cálculo em duas partes. A primeira integral será chamada de I e a segunda, pelo qual começaremos, II.

Note primeiramente que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left[\int_{\partial\Omega_t} \phi_k div_{\partial\Omega_t}(\sigma \nabla_{\partial\Omega_t} v) \right]\Big|_{t=0} &= \int_{\partial\Omega} \phi_k \frac{\partial}{\partial t} div_{\partial\Omega_t}(\sigma \nabla_{\partial\Omega_t} v)\big|_{t=0} \\ &+ \sigma \frac{\partial}{\partial N}(\phi_k div_{\partial\Omega}(\sigma \nabla_{\partial\Omega} v)) \\ &+ \sigma H \phi_k div_{\partial\Omega}(\sigma \nabla_{\partial\Omega} v) = II \end{aligned}$$

por outro lado

$$\int_{\partial\Omega_t} \phi_k div_{\partial\Omega_t}(\sigma \nabla_{\partial\Omega_t} v) = -\int_{\partial\Omega_t} \sigma \nabla_{\partial\Omega_t} \phi_k \cdot \nabla_{\partial\Omega_t} v$$

Portanto,

$$\begin{aligned} II &= -\frac{d}{dt}\left(\int_{\partial\Omega_t} \sigma \nabla_{\partial\Omega_t} \phi_k \cdot \nabla_{\partial\Omega_t} v \right)\Big|_{t=0} = -\int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial t}(\sigma \nabla_{\partial\Omega_t} \phi_k \cdot \nabla_{\partial\Omega_t} v)\Big|_{t=0} \\ &- \int_{\partial\Omega} \sigma \frac{\partial}{\partial N}(\sigma \nabla_{\partial\Omega} \phi_k \cdot \nabla_{\partial\Omega} v) - \sigma^2 H \nabla_{\partial\Omega} \phi_k \cdot \nabla_{\partial\Omega} v. \end{aligned}$$

Agora

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla_{\partial\Omega_t}\phi_k\cdot\nabla_{\partial\Omega_t}v\right)\Big|_{t=0} &= \left(\frac{\partial}{\partial t}\nabla_{\partial\Omega_t}\phi_k\Big|_{t=0}\right)\cdot\nabla_{\partial\Omega}v+\left(\frac{\partial}{\partial t}\nabla_{\partial\Omega_t}v\Big|_{t=0}\right)\cdot\nabla_{\partial\Omega}\phi_k\\
&= \left[\nabla_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial\phi_k}{\partial t}\right)-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\phi_k}{\partial N}\right)N-\frac{\partial\phi_k}{\partial N}\dot N\right]\cdot\nabla_{\partial\Omega}v+\\
&+ \left[\nabla_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v}{\partial N}\right)N-\frac{\partial v}{\partial N}\dot N\right]\cdot\nabla_{\partial\Omega}\phi_k\\
&= \nabla_{\partial\Omega}\dot v\cdot\nabla_{\partial\Omega}\phi_k.
\end{aligned}$$

Segue dai,

$$\begin{aligned}
II &= -\int_{\partial\Omega}\left[\frac{\partial\sigma}{\partial t}+\sigma\frac{\partial\sigma}{\partial N}+\sigma^2H\right]\nabla_{\partial\Omega}\phi_k\cdot\nabla_{\partial\Omega}v+\sigma^2\frac{\partial}{\partial N}(\nabla_{\partial\Omega}\phi_k\cdot\nabla_{\partial\Omega}v)\\
&\quad-\int_{\partial\Omega}\sigma\nabla_{\partial\Omega}\phi_k\cdot\nabla_{\partial\Omega}\dot v.
\end{aligned}$$

Observe que para o primeiro termo da integral I temos,

$$\int_{\partial\Omega}\phi_k div_{\partial\Omega}(\sigma\nabla_{\partial\Omega}\dot v)=-\int_{\partial\Omega}\sigma\nabla_{\partial\Omega}\phi_k\cdot\nabla_{\partial\Omega}\dot v.$$

Com isto,

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega}\phi_k\frac{\partial\ddot v}{\partial N} &= -\int_{\partial\Omega}2\sigma(\nabla_{\partial\Omega}\phi_k\cdot\nabla_{\partial\Omega}\dot v-\lambda_0\phi_k\dot v-\dot\lambda\phi_k v)\\
&\quad-\int_{\partial\Omega}\sigma^2\frac{\partial}{\partial N}(\nabla_{\partial\Omega}\phi_k\cdot\nabla_{\partial\Omega}v-\lambda_0\phi_k v)\\
&\quad-\int_{\partial\Omega}\left[\frac{\partial\sigma}{\partial t}+\sigma\frac{\partial\sigma}{\partial N}+\sigma^2H\right](\nabla_{\partial\Omega}\phi_k\cdot\nabla_{\partial\Omega}v-\lambda_0\phi_k v)
\end{aligned}$$

Lembrando que $\dot v|_{t=0}=\sum_{j=i}^m c_j\dot\phi_j+\dot c_j\phi_j$, $v=\sum_{j=1}^m c_j\phi_k$ e

$$\dot\lambda c_k+2\dot\lambda\dot c_k=-\int_{\partial\Omega}\phi_k\frac{\partial\dot v}{\partial N},$$

Concluímos que os valores para $\dot\lambda$ são determinados pelas seguintes equações em $\mathbb{R}^m$:

$$(\dot{\lambda}(0)I+ \overset{\circ\circ}{M})c + 2(\dot{\lambda}I+ \overset{\circ}{M})\dot{c} = 0$$
$$(\dot{\lambda}I+ \overset{\circ}{M})c = 0$$

onde $\overset{\circ}{M}$ foi dada acima e

$$\overset{\circ\circ}{M}_{j,k} = \int_{\partial\Omega} 2\sigma\dot{Q}_{jk} + \sigma^2\frac{\partial}{\partial N}Q_{jk} + \left[\frac{\partial\sigma}{\partial t} + \sigma\frac{\partial\sigma}{\partial N} + H\sigma^2\right] Q_{jk},$$

$$Q_{jk} = \nabla_{\partial\Omega}\phi_j \cdot \nabla_{\partial\Omega}\phi_k - \lambda_0\phi_j\phi_k$$
$$\dot{Q}_{jk} = \nabla_{\partial\Omega}\phi_k \cdot \nabla_{\partial\Omega}\dot{\phi}_j - \dot{\lambda}\phi_k\phi_j - \lambda\phi_k\dot{\phi}_j.$$

□

Observação 6.3.2. *A matriz* $\overset{\circ\circ}{M}_{j,k}$ *dada acima é simétrica. De fato, basta mostrar que a matriz formada pelos elementos* $\int_{\partial\Omega} 2\sigma\dot{Q}_{jk}$ *é simétrica. Como* $\dot{\phi}_j \perp span[\phi_k]_{k=1}^m$ *e satifaz*

$$\begin{cases} (\Delta + \lambda_0)\dot{\phi}_j \in span[\phi_i]_1^m \\ \dfrac{\partial\dot{\phi}_j}{\partial N} = (div_{\partial\Omega}(\sigma\nabla_{\partial\Omega}\phi_j) + \lambda_0\sigma\phi_j), \quad em \ \partial\Omega. \end{cases}$$

, logo

$$0 = \int_{\partial\Omega} \dot{\phi}_j(\Delta + \lambda_0)\dot{\phi}_k - \dot{\phi}_k(\Delta + \lambda)\dot{\phi}_j = \int_{\partial\Omega} \dot{\phi}_j\frac{\partial\dot{\phi}_k}{\partial N} - \dot{\phi}_k\frac{\partial\dot{\phi}_j}{\partial N}.$$

Portanto

$$
\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega} 2\sigma\dot{Q}_{jk} &= 2\int_{\partial\Omega}\sigma(\nabla_{\partial\Omega}\phi_k\cdot\nabla_{\partial\Omega}\dot{\phi}_j-\lambda\phi_k\dot{\phi}_j-\dot{\lambda}\phi_k\phi_j)\\
&= -2\int_{\partial\Omega}\dot{\phi}_j(div_{\partial\Omega}(\sigma\nabla\phi_k)+\sigma\lambda\phi_k)+\sigma\dot{\lambda}\phi_k\phi_j\\
&= -2\int_{\partial\Omega}\dot{\phi}_j\frac{\partial\dot{\phi}_k}{\partial N}+\sigma\dot{\lambda}\phi_k\phi_j\\
&= -2\int_{\partial\Omega}\dot{\phi}_k\frac{\partial\dot{\phi}_j}{\partial N}+\sigma\dot{\lambda}\phi_j\phi_k\\
&= -2\int_{\partial\Omega}\dot{\phi}_k(div_{\partial\Omega}(\sigma\nabla\phi_j)+\sigma\lambda\phi_j)+\sigma\dot{\lambda}\phi_j\phi_k\\
&= 2\int_{\partial\Omega}\sigma(\nabla_{\partial\Omega}\phi_j\cdot\nabla_{\partial\Omega}\dot{\phi}_k-\lambda\phi_j\dot{\phi}_k-\dot{\lambda}\phi_j\phi_k)\\
&= \int_{\partial\Omega}2\sigma\dot{Q}_{kj}
\end{aligned}
$$

Capítulo 7

Laplaciano com condição de Neumann em regiões simétricas

7.1 Introdução

Neste capítulo analisaremos a validade da conjectura 2 para o problema de Laplace com condição de fronteira de Neumann. Em virtude de dificuldades técnicas, os casos G finito e infinito serão tratados separadamente. De fato, ao considerarmos G infinito será necessário fazer uma hipótese adicional sobre o grupo, a saber, $dimG < n - 1$ e Ω deve conter um ponto livre pela ação de G. Assim estabeleceremos a etapa I da conjectura para subgrupos infinitos compactos G de $O(n)$. Além disso, também veremos que a conjectura é válida para subgrupos finitos que não possuam representações irredutíveis de dimensão maior que 2.

Outro aspecto que também será analisado no presente capítulo é o comportamento dos autovalores G-simples com relação a pequenas perturbações do domínio que preservam a simetria. Como podemos notar para os autovalores do problema de Laplace com condição de Dirichlet a análise da primeira derivada da curva de autovalores G-simples é suficiente para verificarmos que os autovalores G-simples variam com relação a perturbações simétricas do domínio. A situação é um pouco mais delicada para o problema com condição de Neumann, principalmente se o subgrupo G for infinito.

A abordagem apresentada é basicamente a mesma utilizada no capítulo 4 para o problema de Laplace com condição de fronteira de Dirichlet, isto é , o estudo do comportamento das derivadas dos autovalores na presença de simetria.

7.2 Grupos Finitos

7.2.1 Caso $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus ... \oplus \mathbb{Z}_2$

Iniciaremos o capítulo considerando domínios Ω do $\mathbb{R}^n$ com simetria $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus ... \oplus \mathbb{Z}_2$ (m vezes). Essa é a simetria mais simples em domínios Ω do $\mathbb{R}^n$ e basicamente o único caso que pode ser analisado usando apenas a primeira derivada das curvas de autovalores. Para todas as outras simetrias consideradas a segunda derivada se faz necessária. As seções seguintes seguem a mesma ordem do capítulo 2. Primeiro tratamos o problema restrito aos espaços de simetria depois em espaços de simetria distintos.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, limitado, conexo com fronteira C^3-regular e G-simétrico, onde G é um subgrupo de $O(n)$ isomorfo a $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus ... \oplus \mathbb{Z}_2$. Sabemos que a simetria do domínio Ω implica na decomposição do espaço $L^2(\Omega) = \bigoplus_{\chi \in \hat{G}} M_\chi$ onde $M_\chi = \{f \in L^2(\Omega) : f \circ g = \chi(g) f, \forall g \in G\}$ e $\chi(g) \in \{-1, 1\}$ para todo $g \in G$. Considere o seguinte problema de autovalores

$$\begin{cases} (\Delta + \lambda) u = 0, & em \ \Omega; \\ \frac{\partial u}{\partial N} = 0, & em \ \partial\Omega. \end{cases} \tag{7.1}$$

Dado um autovalor λ_0 com multiplicidade $m > 1$ mostraremos que esta multiplicidade pode ser reduzida a 1 por pequenas perturbações de Ω que preservam a simetria, onde o problema perturbado na forma Lagrangeana é seguinte

$$\begin{cases} h^*(\Delta + \lambda) h^{*-1} u = 0, & em \ \Omega; \\ h^* \frac{\partial}{\partial N} h^{*-1} u = 0, & em \ \partial\Omega; \end{cases} \tag{7.2}$$

O teorema 6.4 garante a existência de m curvas analíticas quando consideramos uma família analítica de difeomorfismos $t \to h(t, .) \in C^3$ e suas derivadas são dadas pelos autovalores da matriz (ver corolário 6.5)

$$\overset{\circ}{M}_{ij} = \int_{\partial\Omega} \sigma (\nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j - \lambda_0 \phi_i \phi_j)$$

Como sempre partimos da hipótese que os autovalores não podem ser separados por perturbações simétricas. Consequentemente temos que $\overset{\circ}{M} = \dot{\lambda}\, I$, isto é,

$$\int_{\partial\Omega} \sigma(|\nabla\phi_i|^2 - \lambda_0\phi_i^2 - (|\nabla\phi_j|^2 - \lambda_0\phi_j^2)) = 0 \tag{7.3}$$

$$\int_{\partial\Omega} \sigma(\nabla\phi_i \cdot \nabla\phi_j - \lambda_0\phi_i\phi_j) = 0,\ i \neq j \tag{7.4}$$

para toda função σ G-invariante. O autovalor λ_0 pode ou não estar associado a mais de um espaço de simetria M_χ, já que sua multiplicidade é maior que 1. Escolhendo uma base ortonormal $\{\phi_j\}_{j=1}^m$, onde cada $\phi_j \in M_{\chi_j}$ (os espaços M_{χ_j} não precisam ser todos distintos) temos duas situações para analisar:

i) $\chi_i = \chi_j$ para algum $i \neq j$.

ii) $\chi_i \neq \chi_j$.

A condição i) implica que existe mais de uma autofunção pertencente ao mesmo espaço de simetria M_χ. Desta forma, a expressão $\nabla\phi_i \cdot \nabla\phi_j - \lambda_0\phi_i\phi_j$ é uma função G-invariante em $\partial\Omega$, consequentemente a relação (7.4) nos fornece que $\nabla\phi_i \cdot \nabla\phi_j - \lambda_0\phi_i\phi_j = 0$ em $\partial\Omega$. A condição ii) implica que existem autofunções ϕ_i, ϕ_j pertencentes a espaços de simetria distintos. Como as funções $|\nabla\phi_i|^2 - \lambda_0\phi_i^2$ são G-invariantes para cada i a relação (7.3) garante que

$$\nabla(\phi_i + \phi_j) \cdot \nabla(\phi_i - \phi_j) - \lambda_0(\phi_i + \phi_j)(\phi_i - \phi_j) = |\nabla\phi_i|^2 - \lambda_0\phi_i^2 - (|\nabla\phi_j|^2 - \lambda_0\phi_j^2) = 0$$

em $\partial\Omega$. Chamando $\psi^+ = \phi_i + \phi_j$ e $\psi^- = \phi_i - \phi_j$ temos $\nabla\psi^+ \cdot \nabla\psi^- - \lambda_0\psi^+\psi^- = 0$, onde ψ^+ e ψ^- são autofunções associadas a λ_0. Desta forma, tanto para a condição i) como para a ii) temos que verificar que para autofunções distintas e não nulas a identidade

$$\nabla\psi \cdot \nabla\phi - \lambda_0\psi\phi = 0,\ \partial\Omega$$

não pode ocorrer. Este é o conteúdo do lema abaixo.

Lema 7.1. *Sejam λ número real positivo e f, g funções de classe C^2 definidas em $\partial\Omega$. Se*

$$\nabla_{\partial\Omega} f \cdot \nabla_{\partial\Omega} g - \lambda f g = 0,\ \text{em } \partial\Omega$$

então pelo menos uma delas é identicamente nula em $\partial\Omega$.

Antes de provarmos o lema vamos mostrar que ele, de fato, é suficiente para garantir a separabilidade de λ_0. De fato, as relações (7.3) e (7.4) não podem ocorrer simultaneamente para todo σ G-invariante, caso contrário pelo menos uma das autofunções seria nula, logo deve existir um campo V de classe C^3 de forma que a perturbação $h(t,x) = x + tV(x)$ reduza a multiplicidade de λ_0. Se para todo $t > 0$ (arbitrariamente pequeno) ainda houver algum autovalor múltiplo próximo a λ_0, então podemos repetir o processo até que todos os autovalores próximos a λ_0 sejam todos simples.

Demonstração. Considere a curva $x(t)$ em $\partial\Omega$ determinada pelo seguinte campo de classe C^1 $\nabla_{\partial\Omega} f(x(t)) = \dot{x}\ (t)$, como $\partial\Omega$ é compacta então $x(t)$ está definida para todo t. Note que também $\frac{d}{dt} f(x(t)) = |\nabla f(x(t))|^2 \geq 0$. Agora a função $g(x(t))$ satisfaz a equação diferencial ordinária $\dot{u}(t) = \lambda f(x(t))u(t)$, logo $g(x(t)) = g(x_0)exp(\lambda \int_0^t f(x(s))ds)$. Portanto se $g(x_0) \neq 0$ a função $g(x(t))$ seria ilimitada em $\partial\Omega$, porém isto não pode ocorrer, pois g é contínua e $\partial\Omega$ é compacta. □

Com isto, acabamos de provar o seguinte

Teorema 7.2. *Sejam G subgrupo de $O(n)$ isomorfo a $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus ... \oplus \mathbb{Z}_2$; $\Omega \in \mathbb{R}^n$, aberto, limitado, conexo, C^3 regular e G-simétrico. Considere λ_0 autovalor com multiplicidade $m > 1$ para o problema (7.1). Dado $\epsilon > 0$ existem $\delta > 0$ e $h \in C^3(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $||h - i_\Omega||_{C^3} < \epsilon$ tal que os autovalores para o problema (7.2) no intervalo $(\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta)$ são todos simples.*

Corolário 7.3. *Se G é subgrupo finito de $O(n)$ isomorfo a $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus ... \oplus \mathbb{Z}_2$, então para um conjunto residual de regiões Ω do $\mathbb{R}^n$, abertas, conexas, limitadas C^2-regulares e G-simétricas, todos os autovalores para o problema (7.1) são simples.*

Demonstração. Seja

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_k = \{ & h \in Diff^3_G(\Omega) : \text{os autovalores}\, \lambda \text{ de } (7.1)\,, \\ & \lambda < k, \text{são todos simles}\}. \end{aligned}$$

O teorema 7.2 garante que $\mathcal{C}_k$ é denso em $Diff^3_G(\Omega)$ e o resultado de continuidade do teorema 6.1 garante que também é aberto. Portanto $\cap_{k\geq 1}\mathcal{C}_k$ é residual.

□

7.2.2 Grupos finitos quaisquer

Como vimos no corolário 3.7, para quaisquer subgrupos G de $O(n)$ não isomorfos a $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus ... \oplus \mathbb{Z}_2$, existem autovalores múltiplos para o problema de Laplace em regiões G-simétricas. Para esses casos preferimos dividir a conjectura 2 em duas etapas. Veremos a seguir que a primeira etapa, separação em um mesmo espaço de simetria é verdadeira para qualquer grupo finito. Já a etapa de separação de autovalores entre espaços de simetria distintos foi possível apenas em alguns casos particulares. Mais precisamente, os autovalores λ associados a espaços de simetria M_σ tais que $d_\sigma \leq 2$ podem ser separados dos outros de forma que a ação natural de G em $ker(\Delta + \lambda)$ seja irredutível[1] .

Como já foi dito antes, o problema de separabilidade dos autovalores de Neumann é um pouco mais delicado mesmo quando restrito aos espaços de simetria M_σ. Na verdade o que ocorre é o seguinte: a expressão fornecida pela matriz $\overset{\circ}{M}$ da primeira derivada da curva de autovalores não nos fornece, ao menos aparentemente, uma contradição. Dessa forma, somos levados a calcular a segunda derivada, onde a condição de não separabilidade implica que um certo tipo de operador de fronteira é de posto finito. Nesse ponto utilizamos o Método da Soluções "Rapidamente Oscilantes"para obter mais informações sobre as autofunções na fronteira de Ω.

Teorema 7.4. *Sejam G um subgrupo finito de $O(n)$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, aberto, limitado, conexo, C^3-regular e G-invariante. Considere um autovalor λ_0 com multiplicidade md_σ, $m > 1$, para o problema (7.1) restrito ao espaço M_σ, onde $\sigma \in \hat{G}$. Dado $\epsilon > 0$ existem $\delta > 0$ e $h \in Diff^3_G(\Omega)$, $||h - i_\Omega||_{C^3} < \epsilon$ tais que existem exatamente m autovalores G_σ-simples para o problema (7.2) restrito a M_σ no intervalo $(\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta)$.*

Demonstração. Seja $\{\phi^i_j\}$, $i = 1, ..., m; j = 1, ..., d_\sigma$ uma base ortonormal para o auto-espaço associado a λ_0 que satisfaz a seguinte propriedade

$$\begin{pmatrix} \phi^i_1 \\ . \\ . \\ \phi^i_{d_\sigma} \end{pmatrix} \circ g = A_\sigma(g) \begin{pmatrix} \phi^i_1 \\ . \\ . \\ \phi^i_{d_\sigma} \end{pmatrix}, \tag{7.5}$$

para todo $g \in G$ e $g \mapsto A_\sigma(g)$ é uma representação matricial irredutível na classe σ de dimensão d_σ. Considere a seguinte reordenação das funções ϕ^i_j, $\varphi_k = \phi^i_j$ onde $k = (i-1)d_\sigma + j$. Assim temos a

[1]Note que a os resultados de separação da etapa I garantem apenas que a ação de G em $ker(\Delta|_{M_\sigma} + \lambda)$ é irredutível

seguinte ordem

$$\{\varphi_1 = \phi_1^1, ..., \varphi_{d_\sigma} = \phi_{d_\sigma}^1, \varphi_{d_\sigma+1} = \phi_1^2, ..., \varphi_{2d_\sigma} = \phi_{d_\sigma}^2, ..., \varphi_{md_\sigma} = \phi_{d_\sigma}^m\}.$$

Suponha que a multiplicidade do autovalor λ_0 não possa ser reduzida por pequenas perturbações simétricas. Então a matriz $\overset{\circ}{M}$ dada por:

$$\overset{\circ}{M}_{lk}= \int_{\partial\Omega} \sigma(\nabla\varphi_l \cdot \nabla\varphi_k - \lambda_0\varphi_l\varphi_k)$$

é tal que $\overset{\circ}{M}=\dot{\lambda}\, I$, isto é,

$$\int_{\partial\Omega} \sigma(|\nabla\varphi_k|^2 - \lambda_0\varphi_k^2) = \int_{\partial\Omega} \sigma(|\nabla\varphi_l|^2 - \lambda_0\varphi_l^2)) \tag{7.6}$$

$$\int_{\partial\Omega} \sigma(\nabla\varphi_k \cdot \nabla\varphi_l - \lambda_0\varphi_k\varphi_l) = 0,\ 1 \leq k, l \leq md_\sigma. \tag{7.7}$$

As relações acima individualmente não nos fornecem nenhuma informação nova, já que os integrandos não são funções G-invariantes. Como nos elementos da matriz $\overset{\circ}{M}$ aparecem expressões do tipo

$$\nabla\phi_j^i \cdot \nabla\phi_j^l - \lambda_0\phi_j^i\phi_j^l$$

para $1 \leq i, l \leq m$, ainda é possível extrair uma condição nova para as autofunções observando que as funções

$$\sum_{j=1}^{d_\sigma} \nabla\phi_j^i \cdot \nabla\phi_j^l - \lambda_0\phi_j^i\phi_j^l$$

$$\sum_{j=1}^{d_\sigma} |\nabla\phi_j^i|^2 - \lambda_0(\phi_j^i)^2$$

são G-invariantes em $\partial\Omega$. Para isto, mostraremos que a soma das parcelas que envolvem o gradiente é G-invariante, pois a outra soma é claramente G-invariante. De fato,

$$\phi_j^i \circ g^{-1}(x) = \sum_{k=1}^{d_\sigma} a_{j,k}(g)\phi_k^i,$$

onde $a_{jk}(g)$ são os elementos da representação matricial $g \to A_\sigma(g)$. Segue que

$$g^{-t}\nabla\phi_j^i(g^{-1}x) = \sum_{k=1}^{d_\sigma} a_{jk}(g)\nabla\phi_k^i(x)$$

$$\sum_{j=1}^{d_\sigma} \nabla\phi_j^i \cdot \nabla\phi_j^l(g^{-1}x) = \sum_{j,k,p}^{d_\sigma} a_{jk}(g)a_{jp}(g)\nabla\phi_k^i \cdot \nabla\phi_p^l(x).$$

Observe que $\sum_{j=1}^{d_\sigma} a_{j,k}(g)a_{j,p}(g) = \delta_{kp}$, logo

$$\sum_{j=1}^{d_\sigma} \nabla\phi_j^i \cdot \nabla\phi_j^l(g^{-1}x) = \sum_{k,p}^{d_\sigma} \delta_{kp}\nabla\phi_k^i \cdot \nabla\phi_p^l(x) = \sum_{j=1}^{d_\sigma} \nabla\phi_j^i \cdot \nabla\phi_j^l(x).$$

A demonstração que $\sum_{j=1}^{d_\sigma} |\nabla\phi_j^i|^2 - \lambda_0(\phi_j^i)^2$ é G-invariante em $\partial\Omega$ é inteiramente análoga.

Com isto, as relações (7.7) e (7.6) nos fornecem

$$\sum_{j=1}^{d_\sigma} |\nabla\phi_j^i|^2 - \lambda_0(\phi_j^i)^2 = \sum_{j=1}^{d_\sigma} |\nabla\phi_j^l|^2 - \lambda_0(\phi_j^l)^2$$

$$\sum_{j=1}^{d_\sigma} \nabla\phi_j^i \cdot \nabla\phi_j^l - \lambda_0\phi_j^i\phi_j^l = 0, \tag{7.8}$$

em $\partial\Omega$. Mesmo com essa nova informação sobre as autofunções na fronteira não foi possível chegar a uma contradição, então calculamos a segunda derivada da curva de autovalores. O corolário 6.5[2] nos fornece a seguinte expressão para a matriz da segunda derivada

$$\overset{\circ\circ}{M}_{k,j} = \int_{\partial\Omega} 2\sigma\dot{Q}_{jk} + \sigma^2\frac{\partial}{\partial N}Q_{jk} + \left[\frac{\partial\sigma}{\partial t} + \sigma\frac{\partial\sigma}{\partial N} + H\sigma^2\right]Q_{jk} \tag{7.9}$$

[2] O corolário 6.5 não é necessário para encontrarmos a expressão da matriz da segunda derivada, pois supondo a não separabilidade dos autovalores podemos derivar diretamente os termos da matriz da primeira derivada.

onde

$$Q_{jk} = \nabla_{\partial\Omega}\varphi_j \cdot \nabla_{\partial\Omega}\varphi_k - \lambda_0\varphi_j\varphi_k$$
$$\dot{Q}_{jk} = \nabla_{\partial\Omega}\varphi_k \cdot \nabla_{\partial\Omega}\dot{\varphi}_j - \dot{\lambda}\varphi_k\varphi_j - \lambda\varphi_k\dot{\varphi}_j,$$

e $\dot{\varphi}_j$ satisfaz

$$\begin{cases} (\Delta + \lambda_0)\dot{\varphi}_j \in span[\varphi_i]_1^m, \\ \frac{\partial\dot{\varphi}_j}{\partial N} = \nabla_{\partial\Omega}\sigma \cdot \nabla_{\partial\Omega}\varphi_j - \sigma\frac{\partial^2}{\partial N^2}\varphi_j, \quad em\ \partial\Omega \\ \dot{\varphi}_j \perp span[\varphi_i]_1^m. \end{cases} \tag{7.10}$$

Mais uma vez precisamos somar alguns elementos da matriz $\overset{\circ\circ}{M}$ para que o integrando seja uma função G-invariante. Na verdade, veremos que o integrando de $\sum_{j=1}^{d_\sigma} \overset{\circ\circ}{M}_{j,j+d_\sigma}$ é G-invariante. De fato, sabemos de (7.8) que

$$\sum_{j=1}^{d_\sigma} Q_{j,j+d_\sigma} = \sum_{j=1}^{d_\sigma} \nabla\phi_j^1 \cdot \nabla\phi_j^2 - \lambda_0\phi_j^1\phi_j^2 = 0,$$

e a função $\sum_{j=1}^{d_\sigma} \frac{\partial}{\partial N} Q_{j,j+d_\sigma}$ é G-invariante. Segue da observação 6.3.2 que

$$\int_{\partial\Omega} 2\sigma\dot{Q}_{jk} = \int_{\partial\Omega} \sigma(\dot{Q}_{jk} + \dot{Q}_{kj})$$

portanto para verificarmos que o integrando da expressão $\sum_{j=1}^{d_\sigma} \overset{\circ\circ}{M}_{j,j+d_\sigma}$ também é G-invariante basta mostrar que $\sum_{j=1}^{d_\sigma} \dot{Q}_{jj+d_\sigma} + \dot{Q}_{j+d_\sigma j}$ é G-invariante. Note que as autofunções ϕ_j^i dependem do parâmetro t da família de difeomorfismos utilizada para perturbar o domínio Ω. Além disso, para cada t (pequeno) $\phi_j^i(t)$ são autofunções associadas a $\lambda(t)$ para o problema $(7.2)_{\Omega(t)}$ pertencentes a M_σ. Com isto, $t \to \sum_{j=1}^{d_\sigma} Q_{j,j+d_\sigma}(t)$ é uma curva C^1 no espaço das funções G-invariantes, logo

$$\frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{d_\sigma} Q_{j,j+d_\sigma}(t)|_{t=0} = \sum_{j=1}^{d_\sigma} \dot{Q}_{jj+d_\sigma} + \dot{Q}_{j+d_\sigma j}$$

é uma função G-invariante.

Da não separabilidade dos autovalores segue $\sum_{j=1}^{d_\sigma} \overset{\circ\circ}{M}_{j,j+d_\sigma} = 0$ para toda função G-invariante σ, consequentemente

$$\sum_{j=1}^{d_\sigma} \dot{Q}_{jj+d_\sigma} + \dot{Q}_{j+d_\sigma j} + \sigma \frac{\partial}{\partial N} Q_{j+d_\sigma j} = 0. \tag{7.11}$$

Para simplificar introduzimos a notação $\mathcal{Q}(u,v) = \nabla v \cdot \nabla u - \lambda_0 vu$. Assim a expressão (7.11) pode ser escrita da seguinte forma

$$\sum_{j=1}^{d_\sigma} \sigma \frac{\partial}{\partial N} \mathcal{Q}(\phi_j^1, \phi_j^2) - \mathcal{Q}(\phi_j^1, \dot{\phi}_j^2) - \mathcal{Q}(\phi_j^2, \dot{\phi}_j^1) = \sum_{j=1}^{d_\sigma} \dot{\lambda}(\phi_j^1 \phi_j^2). \tag{7.12}$$

As soluções $\dot{\phi}_j^i$ do problema (7.10) definem um operador de fronteira que passaremos a denotar por

$$\dot{\phi}_j^i = \mathcal{C}(\nabla_{\partial\Omega}\phi_j^i \cdot \nabla_{\partial\Omega}\sigma - \sigma \frac{\partial^2 \phi_j^i}{\partial N^2})$$

(será provado no capítulo 8 que o operador $\mathcal{C}$ está bem definido). Mais uma vez para simplificar a notação introduzimos $M_j^i(\sigma) = \nabla_{\partial\Omega}\phi_j^i \cdot \nabla_{\partial\Omega}\sigma - \sigma \frac{\partial^2 \phi_j^i}{\partial N^2}$. Desta forma, a equação (7.12) define o operador de fronteira dado por:

$$\Xi(\sigma) = \sum_{j=1}^{d_\sigma} \sigma \frac{\partial}{\partial N} \mathcal{Q}(\phi_j^1, \phi_j^2) - \mathcal{Q}(\phi_j^1, \mathcal{C}(M_j^2 \sigma)) - \mathcal{Q}(\phi_j^2, \mathcal{C}(M_j^1 \sigma)) \tag{7.13}$$

onde σ é uma função G-invariante em $\partial\Omega$. A mesma expressão também nos diz que o operador Ξ é de posto finito. O teorema 8.4 fornece a seguinte condição necessária para o operador ser de posto finito,

$$\sum_{j=1}^{d_\sigma} \frac{\partial \phi_j^1}{\partial \tau} \frac{\partial \phi_j^2}{\partial \tau} = 0$$

em $\partial\Omega$ e $\tau \in T_x\partial\Omega$.

Argumentando como no problema de Dirichlet podemos refazer todo o processo considerando as autofunções $\phi_j^1 \circ g$. Interpretando a relação acima como o produto interno de vetores $v_i = (\frac{\partial \phi_1^i}{\partial \tau}, ..., \frac{\partial \phi_{d_\sigma}^i}{\partial \tau})$ do $\mathbb{R}^{d_\sigma}$ podemos notar $\langle A_\sigma(g)v_1, v_2\rangle = 0$ para todo $g \in G$, logo $\frac{\partial \phi_j^2}{\partial \tau} = 0$ para todo $x \in \partial\Omega$ e todo $\tau \in T_x(\partial\Omega)$. Portanto obtemos que $\nabla \phi_j^2 = 0$ em $\partial\Omega$. Lembrando que a condição obtida com a matriz da primeira derivada foi

$$\sum_{j=1}^{d_\sigma} \nabla\phi_j^1 \cdot \nabla\phi_j^2 - \lambda_0\phi_j^1\phi_j^2 = 0$$

segue que $\sum_{j=1}^{d_\sigma} \phi_j^1\phi_j^2 = 0$ em $\partial\Omega$. Podemos repetir todo o processo acima mais uma vez para concluir que $\phi_j^2 = 0$ em $\partial\Omega$. Como ϕ_j^2 também satisfaz $\frac{\partial\phi_j^2}{\partial N} = 0$ em $\partial\Omega$ o Teorema da Unicidade de Cauchy garante que $\phi_j^2 \equiv 0$ em Ω, levando ao absurdo esperado.

□

Corolário 7.5. *Seja G subgrupo finito de $O(n)$ e $\sigma \in \hat{G}$. O subconjunto*

$$\mathcal{C} = \{h \in Diff_G^2(\Omega)| \text{ todos os autovalores para o problema } (7.1), \text{ restrito a } M_\sigma, \text{ são } \mathrm{G}_\sigma - \text{simples}\}$$

é residual em $Diff_G^3(\Omega)$.

Demonstração. Seja

$$\mathcal{C}_k = \{h \in Diff_G^3(\Omega) : \text{os autovalores } \lambda \text{ de } (7.1) \text{ restrito a } M_\sigma, \lambda < k, \text{ são todos } \mathrm{G} - \text{simles}\}.$$

O teorema 7.4 garante que $\mathcal{C}_k$ é denso em $Diff_G^3(\Omega)$, portanto basta mostrar que também é aberto. O mesmo resultado de continuidade do teorema 6.1 também é válido se considerarmos apenas o problema (7.1) restrito a M_σ, logo $\mathcal{C}_k$ é aberto.

□

Não foi possível provar, utilizando a primeira derivada, que os autovalores G-simples para o problema de Neumann de fato variam quando se perturba o domínio mantendo a simetria, porém este resultado segue facilmente da análise da segunda derivada.

Teorema 7.6. *Se λ é autovalor G-simples associado ao espaço M_σ para o problema (7.1), então existem h em uma C^2-vizinhança de i_Ω tal que $|\lambda(h) - \lambda| \neq 0$.*

Demonstração. De fato, se λ é autovalor G-simples associado ao espaço de simetria M_σ, para o problema (7.1) que não se altera com pequenas perturbações simétricas de Ω, então a matriz da primeira derivada da curva de autovalor deve ser identicamente nula. Segue que

$$\overset{\circ}{M}_{kl} = \int_{\partial\Omega} \sigma(\nabla\phi_k \cdot \nabla\phi_l - \lambda_0\phi_k\phi_l) = 0,$$

$\{\phi_k\}_{k=1}^{d_\sigma}$ é uma base ortonormal associada a λ que satisfaz (7.5). Como vimos, na demonstração do teorema anterior, o intergrando de $\sum_{k=1}^{d_\sigma} \overset{\circ}{M}_{kk}$ é G-invariante, portanto podemos concluir que

$$\sum_{k=1}^{d_\sigma} |\nabla\phi_k|^2 - \lambda(\phi_k)^2 = 0 \tag{7.14}$$

em $\partial\Omega$. Como não fomos capazes de chegar a uma contradição com essa condição extra para as autofunções na fronteira calculamos a segunda derivada.

$$\overset{\circ\circ}{M}_{k,j} = \int_{\partial\Omega} 2\sigma\dot{Q}_{jk} + \sigma^2\frac{\partial}{\partial N}Q_{jk} + \left[\frac{\partial\sigma}{\partial t} + \sigma\frac{\partial\sigma}{\partial N} + H\sigma^2\right]Q_{jk} = 0$$

onde

$$Q_{kl} = \nabla_{\partial\Omega}\phi_l \cdot \nabla_{\partial\Omega}\phi_k - \lambda\phi_l\phi_k$$
$$\dot{Q}_{kl} = \nabla_{\partial\Omega}\phi_k \cdot \nabla_{\partial\Omega}\dot{\phi}_l - \dot{\lambda}\phi_k\phi_l - \lambda\phi_k\dot{\phi}_l,$$

e $\dot{\phi}_k$ satisfaz

$$\begin{cases} (\Delta + \lambda)\dot{\phi}_k \in span[\phi_l]_1^m, \\ \frac{\partial\dot{\phi}_k}{\partial N} = \nabla_{\partial\Omega}\sigma \cdot \nabla_{\partial\Omega}\phi_k - \sigma\frac{\partial^2}{\partial N^2}\phi_k, \qquad em \ \partial\Omega \\ \dot{\phi}_k \perp span[\phi_l]_1^m. \end{cases}$$

Note que $Q_{kk} = 0$ e $\dot{\lambda} = 0$ e $\sum_{k=1}^{d_\sigma} \dot{Q}_{kk}$ é G-invariante. Mais uma vez nos deparamos com um operador de fronteira

$$\Pi(\sigma) = \sum_{j=k}^{d_\sigma} \sigma\frac{\partial}{\partial N}\mathcal{Q}(\phi_k, \phi_k) - 2\mathcal{Q}(\phi_k, \mathcal{C}(M_k(\sigma))) \tag{7.15}$$

onde $M_k(\sigma) = \nabla_{\partial\Omega}\phi_k \cdot \nabla_{\partial\Omega}\sigma - \sigma\frac{\partial^2\phi_k}{\partial N^2}$ que deve ser nulo por conta da primeira e segunda derivada serem nulas. O teorema 8.4 nos fornece uma condição necessária para o operador ser de posto finito,

$$\sum_{j=1}^{d_\sigma}\left(\frac{\partial\phi_j}{\partial\tau}\right)^2=0$$

e $\tau \in T_x\partial\Omega$. Segue dessa relação que $\frac{\partial\phi_j}{\partial\tau}\equiv 0$ para todo $\tau \in T_x(\partial\Omega)$ e todo $j=1,...,d_\sigma$. A relação (7.14) torna-se $\sum_{j=1}^{d_\sigma}-\lambda(\phi_j)^2=0$ e dai segue que $\phi_j\equiv 0$ em $\partial\Omega$ o que não pode ocorrer pelo Teorema da Unicidade de Cauchy.

□

A validade do análogo da conjectura 2 para o problema de Laplace com condição de Neumann depende do Lema 4.5, assim como o problema de Dirichlet. Portanto o principal resultado de separação de autovalores de Neumann em espaços de simetria distintos será apresentado com a mesma hipótese, sobre o grupo G, usado no caso do problema de Dirichlet. Os grupos finitos considerados são tais que suas representações irredutíveis não possuem dimensão maior do que 2.

Teorema 7.7. *Sejam G um subgrupo finito de $O(n)$ tal que $d_\sigma \le 2$ para todo $\sigma\in\hat{G}$ e $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, aberto, limitado, conexo, com fronteira C^3-regular e G-simétrico. Se λ é autovalor associado a M_{σ_1} e M_{σ_2} para o problema (7.1) tal que a ação de G em $ker(\Delta|_{M_{\sigma_1}}+\lambda)$ e $ker(\Delta|_{M_{\sigma_2}}+\lambda)$ é irredutível, então dado qualquer $\epsilon>0$, exitem $h\in Diff^3_G(\Omega)$, $||h-i_\Omega||_{C^3}<\epsilon$ e $\delta>0$ tal que existem exatamente 2 autovalores $\lambda_1(h),\lambda_2(h)$ G-simples para o problema (7.2) restrito ao espaço $M_{\sigma_1}\oplus M_{\sigma_2}$, no intervalo $(\lambda-\delta,\lambda+\delta)$. Ou seja, a ação natural de G em $ker(h^*\Delta h^{*-1}|_{M_{\sigma_2}\oplus M_{\sigma_1}}+\lambda_1(h))$ e $ker(h^*\Delta h^{*-1}|_{M_{\sigma_2}\oplus M_{\sigma_1}}+\lambda_2(h))$ é irredutível.*

Demonstração. Como sempre partiremos da hipótese que o autovalor λ não pode ser separado por pequenas perturbações G-simétricas. Com isto, a matriz da primeira derivada $\overset{o}{M}$ deve ser múltipla da identidade. Logo

$$\int_{\partial\Omega}\sigma(|\nabla\varphi_k|^2-\lambda_0\varphi_k^2)=\int_{\partial\Omega}\sigma(|\nabla\varphi_l|^2-\lambda_0\varphi_l^2) \tag{7.16}$$

onde $\varphi_j=\phi_j^1$ se $1\le j\le d_{\sigma_1}$ e $\varphi_j=\phi^2_{j-d_{\sigma_1}}$ se $d_{\sigma_1}+1\le j\le d_{\sigma_1}+d_{\sigma_2}$ e as autofunções $\{\phi_j^1\}_{j=1}^{d_{\sigma_1}}$ e $\{\phi_j^2\}_{j=1}^{d_{\sigma_2}}$ satisfazem a relação (7.5). Já sabemos que os integrandos que aparecem na relação acima não são funções G-invariantes. Porém, as seguintes funções são , de fato, G-invariantes

$$\sum_{j=1}^{d_{\sigma_1}} |\nabla\varphi_j|^2 - \lambda(\varphi_j)^2 = \sum_{j=1}^{d_{\sigma_1}} |\nabla\phi_j^1|^2 - \lambda(\phi_j^1)^2$$

$$\sum_{j=1+d_{\sigma_1}}^{d_{\sigma_1}+d_{\sigma_2}} |\nabla\varphi_j|^2 - \lambda(\varphi_j)^2 = \sum_{j=1}^{d_{\sigma_2}} |\nabla\phi_j^2|^2 - \lambda(\phi_j^2)^2.$$

Portanto segue da relação (7.16)

$$\frac{1}{d_{\sigma_1}}\sum_{j=1}^{d_{\sigma_1}} |\nabla\phi_j^1|^2 - \lambda(\phi_j^1)^2 = \frac{1}{d_{\sigma_2}}\sum_{j=1}^{d_{\sigma_2}} |\nabla\phi_j^2|^2 - \lambda(\phi_j^2)^2. \tag{7.17}$$

Porém nada podemos concluir com essa relação. Calculando a segunda derivada para a curva de autovalores e seguindo como na demonstração do teorema 7.4, temos que o operador de fronteira

$$\begin{aligned}\Phi(\sigma) &= \frac{1}{d_{\sigma_1}}\sum_{j=k}^{d_{\sigma_1}} \sigma\frac{\partial}{\partial N}\mathcal{Q}(\phi_k^1,\phi_k^1) - 2(\mathcal{Q}(\phi_k^1,\mathcal{C}(M_k^1(\sigma))) \\ &\quad -\frac{1}{d_{\sigma_2}}\sum_{j=k}^{d_{\sigma_1}} \sigma\frac{\partial}{\partial N}\mathcal{Q}(\phi_k^1,\phi_k^1) - 2(\mathcal{Q}(\phi_k^1,\mathcal{C}(M_k^1(\sigma)))\end{aligned} \tag{7.18}$$

possui posto finito. Segue do teorema 8.5 que

$$\frac{1}{d_{\sigma_1}}\sum_{j=1}^{d_{\sigma_1}}\left(\frac{\partial\phi_j^1}{\partial\tau}\right)^2 = \frac{1}{d_{\sigma_2}}\sum_{j=1}^{d_{\sigma_2}}\left(\frac{\partial\phi_j^2}{\partial\tau}\right)^2 \tag{7.19}$$

para todo $\tau \in T_x(\partial\Omega)$. Considere agora uma base $\{\tau_i\}_{i=1}^{n-1}$ ortonormal para $T_x(\partial\Omega)$, com isso temos $\nabla\phi_j^i = \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{\partial\phi_j^i}{\partial\tau_k}\right)\tau_k$, logo $|\nabla\phi_j^i|^2 = \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{\partial\phi_j^i}{\partial\tau_k}\right)^2$. Substituindo essa expressão em (7.17) obtemos

$$\frac{1}{d_{\sigma_1}}\sum_{j=1}^{d_{\sigma_1}}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{\partial\phi_j^1}{\partial\tau_k}\right)^2 - \lambda(\partial\phi_j^1)^2 = \frac{1}{d_{\sigma_2}}\sum_{j=1}^{d_{\sigma_2}}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{\partial\phi_j^2}{\partial\tau_k}\right)^2 - \lambda(\phi_j^2)^2.$$

Utilizando a relação (7.19) segue

$$\frac{1}{d_{\sigma_1}}\sum_{j=1}^{d_{\sigma_1}}(\phi_j^1)^2 = \frac{1}{d_{\sigma_2}}\sum_{j=1}^{d_{\sigma_2}}(\phi_j^2)^2. \tag{7.20}$$

A partir de agora utilizaremos as relações (7.19) e (7.20) de forma a aplicarmos o lema 4.5 para chegarmos a contradição esperada, portanto devemos supor que $d_{\sigma_i} \leq 2$. Com efeito, defina as seguintes funções vetoriais definidas em $\partial\Omega$: se $d_{\sigma_i} = 2$ para $i = 1, 2$

$$F(x) = (\phi_1^1, ..., \phi_{d_{\sigma_1}}^1)$$

$$G(x) = (\phi_1^2, ..., \phi_{d_{\sigma_2}}^2)$$

se caso um dos d_{σ_i} for igual a 1 basta repetir a coordenada $\frac{\partial\phi_1^i}{\partial N}$ para obtermos uma função vetorial de $\mathbb{R}^2$.

Segue da relações (7.20) e (7.19) que $|F| = |G|$ e $|\frac{\partial F}{\partial\tau}| = |\frac{\partial G}{\partial\tau}|$. Lembrando que $d_{\sigma_i} \leq 2$, o lema 4.5 garante que em uma vizinhança V de x em $\partial\Omega$ existe uma transformação ortogonal T tal que $F(x) = TG(x)$ em V. Então temos, por exemplo, $\phi_1^1 = \alpha\phi_1^2 + \beta\phi_2^2$ em V e

$$\begin{cases} (\Delta + \lambda)(\phi_i^1 - \alpha\phi_1^2 - \beta\phi_2^2) = 0 & em \;\; \Omega, \\ \frac{\partial}{\partial N}(\phi_i^1 - \alpha\phi_1^2 - \beta\phi_2^2) = 0 & em \;\; \partial\Omega, \\ \phi_i^1 - \alpha\phi_1^2 - \beta\phi_2^2 = 0 & em \;\; V \cap \partial\Omega. \end{cases}$$

Portanto pelo Teorema de Unicidade de Cauchy, $\phi_i^1 = \alpha\phi_1^2 + \beta\phi_2^2$ em Ω. O que claramente não pode ocorrer, pois $\phi_i^1 \notin M_{d_{\sigma_2}}$.

□

Corolário 7.8. *Se G é subgrupo finito de $O(n)$ tal que para todo $\sigma \in \hat{G}$, $d_\sigma \leq 2$, então para um conjunto residual de regiões Ω do $\mathbb{R}^n$, abertas, limitadas C^2-regulares e G-simétricas, todos os autovalores para o problema (7.1) são G-simples.*

Demonstração. Seja

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_k = \{h \in Diff^4_G(\Omega) : &\text{os autovalores}\, \lambda \text{ de } (7.1)\,,\\ &\lambda < k, \text{são todos G} - \text{simples}\}.\end{aligned}$$

O teorema 7.7 garante que $\mathcal{C}_k$ é denso em $Diff^3_G(\Omega)$ e o resultado de continuidade do teorema 6.1, que pode ser aplicado ao problema (7.1) restrito a M_σ, garante que também é aberto. Portanto $\cap_{k\geq 1}\mathcal{C}_k$ é residual.

□

Podemos também estabelecer um resultado de genericidade análogo ao teorema 4.9 para o problema de Neumann, ou seja, os autovalores associados a espaços M_σ com $d_\sigma = 1$ são genericamente simples.

Teorema 7.9. *Sejam G um subgrupo finito de $O(n)$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, aberto, limitado, conexo, com fronteira C^2-regular e G-simétrico. Se λ é autovalor associado a M_{σ_1} e M_{σ_2}, onde $d_{\sigma_1} = 1$ para o problema (7.1), então λ pode ser separado, por meio de pequenas perturbações G-simétricas de Ω, em dois autovalores onde um deles é simples. Mais precisamente, dado qualquer $\epsilon > 0$ exitem $h \in Diff^2_G(\Omega)$, $||h - i_\Omega||_{C^2} < \epsilon$ e $\delta > 0$ tal que um dos autovalores separados, pertencentes ao intervalo $(\lambda - \delta, \lambda + \delta)$, está associado apenas ao espaço M_{σ_1} e portanto é simples.*[3]

Demonstração. Primeiramente seguindo os passos da demonstração do teorema 7.7 obtemos as seguintes funções vetoriais:

$$F(x) = \phi^1_1(1, ..., 1)$$

$$G(x) = (\phi^2_1, ..., \phi^2_{d_{\sigma_2}})$$

Agora podemos reproduzir linha por linha a demonstração do teorema 4.9.

□

Corolário 7.10. *Suponhamos que G é um subgrupo finito de $O(n)$ tal que $d_\sigma \leq 2$ para todo $\sigma \in \hat{G}$. Então, para um conjunto residual de regiões C^3-regulares e G-simétricas os autovalores do problema (7.1) são G-simples.*

[3]E importante observar que o fato da ação de G em $Ker(\Delta|_{M_{\sigma_1}} + \lambda)$ ser irredutível não garante que a ação em $Ker(\Delta + \lambda)$ também seja.

Demonstração. Seja

$$\mathcal{C}_k = \{h \in Diff^3_G(\Omega) : \text{os autovalores } \lambda \text{ de } (7.1) \text{ restrito a } M_\sigma,$$
$$\lambda < k, \text{ são todos G} - \text{simples}\}.$$

O teorema 7.9 garante que $\mathcal{C}_k$ é denso em $Diff^3_G(\Omega)$ e o teorema 6.1 garante que é aberto.

□

7.3 Grupos Infinitos

Se o grupo G de simetria do domínio Ω é compacto infinito, verificar que os autovalores variam quando perturbamos o domínio mantendo a simetria é mais complicada que no caso finito. Convém mencionar que podemos variar facilmente o autovalor se aplicarmos ao domínio uma homotetia, porém esta perturbação particular varia também o volume da região Ω e, para muitas aplicações, é importante saber o comportamento dos autovalores considerando perturbações que preservam o volume da região de definição da equação.

O fato dos autovalores variarem será ponto chave na demonstração dos resultados de separabilidade restrito aos espaços de simetria. A dificuldade reside no seguinte: se λ é um autovalor G simples associado ao espaço M_σ, a primeira derivada é dada por

$$\dot{\lambda}(i_\Omega)\dot{h} = \frac{1}{d_\sigma}\int_{\partial\Omega} N \cdot \dot{h}\sum_{j=1}^{d_\sigma} |\nabla\phi_j|^2 - \lambda(\phi_j)^2.$$

Assim, se $\lambda(h)$ é constante , devemos ter $\sum_{j=1}^{d_\sigma} |\nabla\phi_j|^2 - \lambda(\phi_j)^2 = 0$ em $\partial\Omega$. Calculando a segunda derivada e usando o Método das Soluções "Rapidamente Oscilantes"obteremos a relação

$$\sum_{j=1}^{d_\sigma}\left(\frac{\partial\phi_j}{\partial\tau}\right)^2 = 0, \; em\, \partial\Omega.$$

Contudo, se G é infinito a relação acima é verdadeira apenas para τ pertencentes a $T_x(G(x))^\perp$ (ver lema 8.2). Portanto, precisamos de informações sobre as derivadas das autofunções na direção de $G(x)$.

Teorema 7.11. *Seja G subgrupo compacto de $O(n)$ que possui ponto livre e $dimG < n - 1$. Se*

λ é autovalor G-simples associado ao espaço M_σ para o problema (7.1), então existem h em uma C^2-vizinhança de i_Ω tal que $vol(h(\Omega)) = vol(\Omega)$ e $|\lambda(h) - \lambda| \neq 0$.

Demonstração. Escolhendo uma base ortonormal de autofunções $\{\phi_j\}_{j=1}^{d_\sigma}$ e procedendo como na demonstração do teorema 7.6 chegamos a conclusão que $\sum_{j=1}^{d_{\sigma_1}} |\nabla\phi_j|^2 - \lambda(\phi_j)^2 = 0$ em $\partial\Omega$. Utilizando a segunda derivada e o teorema 8.4 obtemos $\frac{\partial\phi_j}{\partial\tau} = 0$ em $\partial\Omega$, porém apenas para τ ortogonal a $T_x(G(x))$.

Estudaremos a partir de agora o que ocorre com as derivadas na direção de $G(x)$. Sejam $x \in \partial\Omega$, $X \in T_e(G)$, $Xx = \tau$. Considere $g(t) = exp(tX)x$, $\phi = (\phi_1, ..., \phi_{d_\sigma})$ e $\phi \circ g(t)x = A_\sigma(g(t))\phi(x)$, onde $g \to A_\sigma(g)$ é a representação irredutível (matricial) ortogonal de G na classe σ. Assim,

$$\frac{\partial\phi}{\partial\tau}(x) = \frac{d}{dt}A_\sigma(g(t))\big|_{t=0}\phi(x).$$

Fazendo $\frac{d}{dt}A_\sigma(g(t))|_{t=0} = A'_\tau \in T_e(O(d_\sigma))$, temos que A'_τ é anti simétrica e

$$\sum_{j=1}^{d_\sigma}\left(\frac{\partial\phi_j}{\partial\tau}(x)\right)^2 = \langle A'_\tau\phi(x), A'_\tau\phi(x)\rangle = \langle -(A'_\tau)^2\phi(x), \phi(x)\rangle. \tag{7.21}$$

Tomando uma base τ_i ortonormal para $T_x(\partial\Omega)$ e utilizando a identidade (7.21), a relação $\sum_{j=1}^{d_\sigma} |\nabla\phi_j|^2 - \lambda(\phi_j)^2 = 0$ obtida com a primeira derivada torna-se:

$$\sum_{j=1}^{d_\sigma}\left(\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{\partial\phi_j}{\partial\tau_i}\right)^2\right) - \lambda(\phi_j)^2 = \left\langle\left(-\sum_{i=1}^{dimG}(A'_{\tau_i})^2 - \lambda\right)\phi(x), \phi(x)\right\rangle = 0. \tag{7.22}$$

Todo o argumento acima pode ser repetido utilizando as autofunções $\phi_j \circ g$ (que satisfazem a relação (7.5)), logo a identidade (7.22) é verdadeira para $A_\sigma(g)\phi(x)$ no lugar de $\phi(x)$. Sabendo que $A_\sigma\phi$ gera o $\mathbb{R}^{d_\sigma}$ e que $(A'_\tau)^2$ é simétrica concluímos $\sum_{i=1}^{dimG} -(A'_{\tau_i})^2 = \lambda I$. Note que essa propriedade está associada apenas ao grupo de simetria e não a características das autofunções.

Considere agora uma perturbação particular dada pelo difeomorfismo $H(x) = cx$, c constante positiva. A perturbação considerada é uma homotetia de centro na origem de $\mathbb{R}^n$ e não há perda de generalidade supor que $0 \in \Omega$. De fato, se ϕ_j é uma autofunção associada a λ, então $H^{*-1}\phi_j$ é autofunção para o problema $(7.2)_H$ associada ao autovalor $\frac{\lambda}{c^2}$. Considerando o mesmo problema de estabilidade partindo do autovalor $\frac{\lambda}{c^2}$ na região $H(\Omega)$ chegaremos a mesma conclusão anterior, $\sum_{i=1}^{dimG} -(A'_{\tau_i})^2 = \frac{\lambda}{c^2}I$. O que não pode ocorrer, pois A'_τ depende do grupo considerado.

□

O resultado acima foi demonstrado com duas hipóteses técnicas adicionais, a saber, $dimG < n-1$ e a existência de um ponto livre. O teorema de separabilidade a seguir também possui as mesmas hipóteses, o trabalho mais delicado na prova do resultado foi quase todo realizado no teorema 7.11 e no teorema 7.4.

Teorema 7.12. *Sejam G um subgrupo compacto de $O(n)$, $dimG \leq n-1$, e existe um ponto livre, e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, aberto, limitado, conexo, C^3-regular e G-invariante. Considere um autovalor λ_0 com multiplicidade md_σ, $m > 1$, para o problema (7.1) restrito a funções de M_σ, onde $\sigma \in \hat{G}$. Dado $\epsilon > 0$ existem $\delta > 0$ e $h \in Diff_G^3(\Omega)$, $||h - i_\Omega||_{C^3} < \epsilon$ tais que existem exatamente m autovalores G_σ-simples para o problema (7.2) restrito a M_σ no intervalo $(\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta)$.*

Demonstração. A demonstração do teorema 7.4 pode ser seguida linha por linha para concluir que $\frac{\partial \phi_j^2}{\partial \tau} = 0$ para $j = 1, 2, ..., d_\sigma$, τ ortogonal a $G(x)$. Escolhendo uma base ortonormal para $T_x(\partial\Omega)$ temos

$$\sum_{j=1}^{d_\sigma} \nabla\phi_j^1 \cdot \nabla\phi_j^2 - \lambda\phi_j^1\phi_j^2 = \sum_{j=1}^{d_\sigma}\sum_{k=1}^{dimG} \frac{\partial \phi_j^1}{\partial \tau_k}\frac{\partial \phi_j^2}{\partial \tau_k} - \lambda\phi_j^1\phi_j^2 = 0.$$

Analogamente ao que foi exposto no teorema 7.11, para $\tau \in T_x(G(x))$

$$\sum_{j=1}^{d_\sigma} \frac{\partial \phi_j^1}{\partial \tau}(x)\frac{\partial \phi_j^2}{\partial \tau}(x) = \langle A'_\tau\phi^1(x), A'_\tau\phi^2(x)\rangle = \langle -(A'_\tau)^2\phi^1(x), \phi^2(x)\rangle.$$

Logo

$$\sum_{k=1}^{dimG} \langle (-(A'_{\tau_k})^2 - \lambda)\phi^1(x), \phi^2(x)\rangle = 0$$

Mais uma vez todo o argumento pode ser repetido para funções $\phi_j^i \circ g$ e assim $\sum_{i=1}^{dimG} -(A'_{\tau_i})^2 = -\lambda I$. O que não pode ocorrer para toda região G-simétrica próxima a Ω, pois λ varia com h.

□

Corolário 7.13. *Seja G subgrupo de $O(n)$ tal que $dimG < n-1$ e existe um ponto livre pela ação* *de G. Então o subconjunto*

$$\mathcal{C} = \{h \in Diff^3_G(\Omega) | \text{ todos os autovalores para o problema } (7.1), \text{ restrito a } M_\sigma, \text{ são G - simples}\}$$

é residual em $Diff^3_G(\Omega)$.

Capítulo 8

Operadores de Fronteira

Ao longo deste trabalho nos deparamos com certos operadores (pseudo-diferenciais) de fronteira que, por hipótese, devem ser nulos ou de posto finito. Muitos destes operadores encontrados aqui são os mesmos encontrados também por A.L. Pereira [16], [17], [18] e M.C.Pereira [19], [18]. Na verdade, estes operadores especiais aparecem com frequência em problemas de perturbação de fronteira. Sabe-se, através da teoria dos operadores pseudo-diferenciais, que os símbolos de qualquer ordem destes operadores devem ser nulos. Assim, poderia-se imaginar que a teoria abstrata de operadores diferenciais fosse o caminho natural para obter os símbolos. Contudo, Henry [6] desenvolveu um método, independente da teoria dos operadores pseudo-diferenciais, que permite obter condições necessárias para que os operadores, que ocorrem em nossos problemas, tenham posto finito. O método é baseado no comportamento dos mesmos quando aplicados a funções rapidamente oscilantes (ver (8.2)).

Apresentaremos em mais detalhes o método e sua demonstração aplicado a equação de Laplace com condição de Neumann, porém enunciaremos os resultados obtidos por A.L.Pereira em [16] e M.C.Pereira em [19] para as equações de Laplace com condição de Dirichlet e Bilaplaciano respectivamente.

8.1 O Método

Ao longo desta seção trabalharemos com funções definidas em abertos do $\mathbb{R}^n$ assumindo valores complexos. Para qualquer operador linear T agindo em funções a valores complexos temos que

$$Tu = T[Re(u)] + iT[Im(u)]$$

onde $Re(u)$ e $Im(u)$ são as partes real e imaginária de u respectivamente.

Estamos interessados inicialmente em uma solução formal $u = e^{\omega S(x)} \sum_{k \geq 0} \frac{U_k(x)}{(2\omega)^k}$ de

$$\begin{cases} (\Delta + \lambda)u = (2\omega)F & em\ \Omega; \\ \frac{\partial u}{\partial N} = 2\omega G(x) & em\ \partial\Omega; \end{cases} \tag{8.1}$$

quando $\omega \to \infty$, onde U_k é uma função suave assumindo valores complexos; $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é aberto, limitado, conexo com fronteira regular; N é o campo normal unitário exterior a $\partial\Omega$;

$$F(x) = e^{\omega S(x)} \sum_{k \geq 0} \frac{F_k(x)}{(2\omega)^k}, \quad G(x) = e^{i\omega\theta(x)} \sum_{k \geq 0} \frac{F_k(x)}{(2\omega)^k}, \tag{8.2}$$

F_k e G_k são funções suaves assumindo valores complexos; $S|_{\partial\Omega} = i\theta$, $Re(\frac{\partial S}{\partial N}) > 0$ com $\theta : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ suave tal que $|\nabla_{\partial\Omega}\theta| = 1$ na região de interesse. Note que com as hipóteses sobre S existe uma vizinhança aberta de $\mathbb{R}^n$ tal que $Re(S) > 0$ em $V \cap \Omega$. Com isto, obtemos que as funções u e $(2\omega)e^{\omega S(x)}F$ tendem a zero rapidamente quando $\omega \to \infty$ (exceto sobre ou muito próximo à $\partial\Omega$).

Substituindo a solução formal na equação obtemos

$$\begin{aligned}
\Delta u - 2\omega e^{\omega S} F &= \Delta \left(e^{\omega S(x)} \sum_{k \geq 0} \frac{U_k}{(2\omega)^k} \right) - 2\omega e^{\omega S} \sum_{k \geq 0} \frac{F_k(x)}{(2\omega)^k} \\
&= \sum_{k \geq 0} \frac{U_k}{(2\omega)^k} \Delta(e^{\omega S}) + e^{\omega S} \frac{\Delta U_k}{(2\omega)^k} + \frac{2}{(2\omega)^k} \nabla(e^{\omega S}) \cdot \nabla U_k - 2\omega e^{\omega S} \frac{F_k(x)}{(2\omega)^k} \\
&= e^{\omega S} \left\{ \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(2\omega)^k} \left(\omega^2 (\nabla S)^2 U_k + \nabla S \cdot \nabla U_k + U_k \frac{\Delta S}{2} + (\Delta + \lambda) U_{k-1} - F_k \right) \right\} \\
&= e^{\omega S} \left\{ \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(2\omega)^k} \omega^2 (\nabla S)^2 U_k + \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(2\omega)^k} (\Lambda U_k + (\Delta + \lambda) U_{k-1} - F_k) \right\}
\end{aligned}$$

onde

$$\Lambda = \nabla S \cdot \nabla + \frac{1}{2} \Delta S \tag{8.3}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial N} - 2\omega e^{i\omega\theta} G &= \sum_{k\geq 0} \frac{1}{(2\omega)^k} \frac{\partial}{\partial N}(e^{i\omega\theta} U_k) \\ &= e^{i\omega\theta} \left\{ \frac{\partial U_{k-1}}{\partial N} + \frac{1}{2}\frac{\partial S}{\partial N} U_k - G_k \right\}. \end{aligned}$$

Escolhendo S de forma que $(\nabla S)^2 = \nabla S \cdot \nabla S = 0$ em uma vizinhança de $\partial\Omega$ em $\mathbb{R}^n$, temos para todo $k \geq 0$

$$\left\{ \begin{array}{lr} \Lambda U_k + (\Delta + \lambda) U_{k-1} = F_k & em\ \ \Omega; \\ \frac{\partial U_{k-1}}{\partial N} + \frac{1}{2}\frac{\partial S}{\partial N} U_k = G_k & em\ \ \partial\Omega; \end{array} \right. \tag{8.4}$$

com $U_{-1} = 0$.

Agora encontraremos soluções aproximadas para a equação (8.4) utilizando "coordenadas normais"em uma vizinhança de $\partial\Omega$ em $\mathbb{R}^n$. Pode-se encontrar um estudo detalhado dessas coordenadas em [6] (Teorema 1.5 e capítulo 8 seção 8.2). As coordenadas normais são dadas pelo difeomorfismo $(t, y) \to (y, tN(y))$ definido em $(-\delta, \delta) \times \partial\Omega$ onde $\delta > 0$ é suficientemente pequeno e $\partial\Omega$ é pelo menos de classe C^2. Nessas coordenadas y é o ponto de $\partial\Omega$ mais próximo de x e

$$t = \left\{ \begin{array}{ll} +dist(x, \partial\Omega), & se\ \ x \in \Omega^c \\ -dist(x, \partial\Omega), & se\ \ x \in \Omega \end{array} \right.$$

Se $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função suave em uma vizinhança de $\partial\Omega$, temos que

$$\nabla u(y + tN(y)) = (1 + tK(y))^{-1} \nabla_{\partial\Omega} u(y + tN(y)) + u_t(y + tN(y)) N(y)$$

e

$$\begin{aligned} \Delta u(y + tN(y)) &= u_{tt}(y + tN(y)) + \lambda_t(t, y) u_t(y + tN(y)) \\ &\quad + (1 + tK(y))^{-2} \lambda_y(t, y) \cdot u_y(y + tN(y)) \\ &\quad + div_{\partial\Omega}[(1 + tK(y))^{-2} u_y(y + tN(y))], \end{aligned}$$

onde

- $K(y) = DN(y)$, matriz curvatura no espaço tangente, $KN = 0$,

- $\lambda(t,y) = ln[det(1+tK)] = \sum_{m\geq 1} \frac{(-1)^{m-1}}{m} H_m(y)$ para t suficientemente pequeno,
- $H_m(y) =$traço$K^m(y)$,

ver [6] para mais detalhes.

Como aparecem as funções ∇S e ΔS na expressão de Λ em (8.3) devemos, então, escrever a função S, determinada por $S|_{\partial\Omega} = i\theta$ e $\nabla S \cdot \nabla S = 0$ em uma vizinhança de $\partial\Omega$, em coordenadas normais. Deste modo,

$$\bar{S}\,(t,y) = S(x(t,y)) = S(y+tN(y)) = \sum_{k\geq 0} \frac{S_k(y)t^k}{k!}.$$

Observe que

$$\bar{S}\,(0,y) = S(x(0,y)) = S_0(y) = i\theta(y)$$

e

$$Re\left(\frac{\partial}{\partial t}\bar{S}\,(0,y)\right) = Re\left(\frac{\partial S}{\partial N}(x(0,y))\right) > 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \nabla S(x(t,y)) &= \nabla S(y+tN(y)) \\ &= (1+tK(y))^{-1}\nabla_{\partial\Omega}S(y+tN(y)) + S_t(y+tN(y))N(y) \end{aligned}$$

e

$$(1+tK(y))^{-1} = 1 - tK(y) + t^2k^2(y) - t^3K^3(y) + ...$$

segue que

$$\begin{aligned} 0 &= (\nabla S(y+tN(y)))^2 \\ &= (\nabla_{\partial\Omega}S_0(y))^2 + (S_1(y))^2 \\ &\quad +t(2S_1(y)S_2(y) + 2\nabla_{\partial\Omega}S_0(y)\cdot\nabla_{\partial\Omega}S_1(y) + 2\nabla_{\partial\Omega}S_0(y)\cdot K(y)\nabla_{\partial\Omega}S_0(y)) + ... \end{aligned}$$

Como estamos supondo $|\nabla_{\partial\Omega}\theta| \equiv 1$ na região de interesse, obtemos recursivamente

$$\begin{aligned}
S_0(y) &= i\theta(y)\\
S_1(y) &= 1\\
S_2(y) &= -\nabla_{\partial\Omega}\theta(y)\cdot\nabla_{\partial\Omega}K(y)\nabla_{\partial\Omega}\theta(y),
\end{aligned}$$

assim podemos calcular quantos termos se fizer necessário. Com isto,

$$\nabla S(x(t,y)) = N + i\nabla_{\partial\Omega}\theta - t(iK\nabla_{\partial\Omega}\theta - S_2 N) + O(t^2)$$

$$\nabla S(y+tN(y))\cdot\nabla = i\nabla_{\partial\Omega}\theta\cdot\nabla_{\partial\Omega} + \frac{\partial}{\partial t} + t\left(-2iK\nabla_{\partial\Omega}\theta\cdot\nabla_{\partial\Omega} + S_2\frac{\partial}{\partial t}\right) + O(t^2)$$

$$\begin{aligned}
\Delta S(y+tN(y)) \;=\;& H_1 + S_2 + i\Delta_{\partial\Omega}\theta(y) +\\
& +t(S_3(y) + H_1S_2 + \frac{\partial}{\partial\theta}H_1(y) - 2idiv(K(y)\nabla_{\partial\Omega}\theta(y)) - H_2(y))\\
& +O(t^2)
\end{aligned}$$

onde $\frac{\partial}{\partial\theta} = \nabla_{\partial\Omega}\theta\cdot\nabla_{\partial\Omega}$.

Escrevendo

$$F_k(x(t,y)) = F_k(y+tN(y)) = F_k(y) + \dot{F}_k(y)t + \ddot{F}_k\frac{t^2}{2} + O(t^3) \tag{8.5}$$

$$G_k(x(t,y)) = G_k(y+tN(y)) = G_k(y) + \dot{G}_k(y)t + \ddot{G}_k\frac{t^2}{2} + O(t^3) \tag{8.6}$$

$$U_k(x(t,y)) = U_k(y+tN(y)) = U_k(y) + \dot{U}_k(y)t + \ddot{U}_k\frac{t^2}{2} + O(t^3) \tag{8.7}$$

e sabendo que

$$\begin{aligned}
(1+tK(y))^{-2} &= (1+tK(y))^{-1}(1+tK(y))^{-1}\\
&= (1-tK(y)+t^2K^2(y)...)(1-tK(y)+t^2K^2(y))...)\\
&= 1-2tK(y)+3t^2K^2(y)-4t^3K^3(y)+O(t^4), \qquad (8.8)
\end{aligned}$$

temos

$$
\begin{aligned}
\Lambda U_k &= i\nabla_{\partial\Omega}\theta \cdot \nabla_{\partial\Omega} U_k + \dot{U}_k + \frac{1}{2}(H_1 + S_2 + i\Delta_{\partial\Omega}\theta(y))U_k \\
& \quad t\begin{pmatrix} -2iK\nabla_{\partial\Omega}\theta \cdot \nabla_{\partial\Omega} U_k + S_2\dot{U}_k + \frac{1}{2}(S_3(y) + H_1 S_2)U_k \\ +\frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial\theta}H_1(y) - 2idiv(K(y)\nabla_{\partial\Omega}\theta(y)) - H_2(y))U_k \end{pmatrix} \\
& \quad +O(t^2) && (8.9) \\
(\Delta + \lambda)U_{k-1} &= H_1\frac{\partial}{\partial t}U_{k-1} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}U_{k-1} + i\Delta_{\partial\Omega}U_{k-1}(y) + \lambda U_{k-1} \\
& \quad +t\begin{pmatrix} \dddot{U}_k(y) + H_1\ddot{U}_k + \nabla_{\partial\Omega}U_k \cdot \nabla_{\partial\Omega}H_1(y) \\ -2idiv(K(y)\nabla_{\partial\Omega}U_k) - H_2(y)\dot{U}_k \end{pmatrix} \\
& \quad +O(t^2) && (8.10)
\end{aligned}
$$

Agora estamos preparados para obter os coeficientes de U_k para $k \geq 0$ substituindo as expressões (8.6) até (8.10) em (8.4).

- para $k = 0$ temos por (8.4)

$$
\begin{cases} \Lambda U_0 = F_0 & em \ \Omega; \\ \frac{1}{2}U_0 = G_0 & em \ \partial\Omega; \end{cases}
$$

  o que resulta em

$$
\begin{aligned}
U_0 &= 2G_0 && (8.11) \\
\dot{U}_0 &= -i\nabla_{\partial\Omega}\theta \cdot \nabla_{\partial\Omega}G_0 - \\
& \quad -\frac{1}{2}(H_1 - \nabla_{\partial\Omega}\theta(y) \cdot \nabla_{\partial\Omega}K(y)\nabla_{\partial\Omega}\theta(y) + i\Delta_{\partial\Omega}\theta(y))G_0
\end{aligned}
$$

- para $k = 1$

$$
\begin{cases} \Lambda U_1 + (\Delta + \lambda)U_0 = F_1 & em \ \Omega; \\ \frac{\partial U_0}{\partial N} + \frac{1}{2}U_1 = G_1 & em \ \partial\Omega; \end{cases}
$$

  resultando em

$$
U_1 = 2G_1 - 2F_0 + 4i\theta \cdot \partial_y G_0 + 2\sigma_0 G_0
$$

8.2 Demonstração do Método

Para demonstrar o método precisamos provar que a solução formal construída é uma aproximação para a "solução exata".

Sabemos que o operador $L = \Delta + \lambda$ de $H_{\mathcal{D}} = \{u \in H^2(\Omega, \mathbb{C}) : \frac{\partial u}{\partial N} = 0\}$ em $L^2(\Omega, \mathbb{C})$ é Fredholm de índice zero. Assim a imagem de L é um subespaço fechado de $L^2(\Omega, \mathbb{C})$ com codimensão finita.

Sejam $\{w_j\}_{j=1}^m$ uma base para um subespaço complementar de $\mathcal{R}(L)$ e $\{\phi_j\}_{j=1}^m$ uma base para $\mathcal{N}(L)$ com base dual associada $\{\tau_j\}_{j=1}^m$. Definimos

$$\mathcal{A}_L : L^p(\Omega, \mathbb{C}) \to W^2(\Omega, \mathbb{C})$$

$$\mathcal{C}_L : W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega, \mathbb{C}) \to W^{2,p}(\Omega, \mathbb{C}) \tag{8.12}$$

por

$$v = \mathcal{A}_L(f) + \mathcal{C}_L(g)$$

onde

$$Lv - f \in \{w_j\}_{j=1}^m$$
$$\frac{\partial v}{\partial N} = g \ em \ \partial\Omega$$

e

$$\int_\Omega v \ \bar{\tau}_j = 0 \ para \ todo \ j = 1, 2, ...m$$

Veremos que os operadores acima estão bem definidos. Sabemos que L é Fredholm de índice zero, então

$$L^p(\Omega, \mathbb{C}) = \mathcal{R}(L) \oplus [w_j]_{j=1}^m.$$

Portanto, dado $f = f_1 + f_2 \in L^p(\Omega, \mathbb{C})$ com $f_1 \in \mathcal{R}(L)$ e $f_2 \in [w_j]_{j=1}^m$ existe uma única $v \in W^{2,p}(\Omega, \mathbb{C})$ tal que $Lv = f_1$, $\frac{\partial v}{\partial N} = g$ em $\partial\Omega$ e $\int_\Omega v \ \bar{\tau}_j = 0$ para todo $j = 1, 2, ...m$. A unicidade segue de $\int_\Omega v \ \bar{\tau}_j = 0$ para todo $j = 1, 2, ...m$, para a existência ver [12].

Mostraremos agora que a solução formal encontrada para (8.1) é uma aproximação da solução

$$v = \mathcal{A}_L(f) + \mathcal{C}_L(g).$$

quando $\omega \to \infty$ em uma vizinhança de $\partial\Omega$ e quando as funções f e g são da forma (8.2).

De fato, suponha que

$$u(x) = e^{\omega S(x)} \sum_{k=0}^{N} \frac{U_k}{(2\omega)^k}$$

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{k=0}^{N} \frac{F_k}{(2\omega)^k} \\ G(x) &= \sum_{k=0}^{N} \frac{G_k}{(2\omega)^k} \end{aligned}$$

As funções U_k, F_k são de classe C^{2+N-k} e C^{1+N-k}, respectivamente e G_k de classe C^{2+N-k} em $\partial\Omega$; Ω e θ de classe C^{3+N} (em nossos problemas podemos supor Ω tão regulares quanto desejarmos). Assim, podemos escolher $S(y + tN(y))$ de classe C^{3+N} tal que para algum $\delta > 0$

$$(\nabla S)^2 = O(t^{2+N})$$

$$\begin{cases} \Lambda U_k + LU_{k-1} - F_k = O(t^{N+1-k}) & em\ \ \Omega; \\ \frac{\partial U_{k-1}}{\partial N} + \frac{1}{2}\frac{\partial S}{\partial N} U_k = G_k & em\ \ \partial\Omega; \end{cases}$$

uniformemente em $-\delta < t = dist(x, \partial\Omega) \leq \delta$.

Escolhemos uma função real χ de classe C^∞ com suporte compacto em $\mathbb{R}^n$, $\chi \equiv 1$ quando $-\delta < t = dist(x, \partial\Omega) \leq \delta$ com suporte contido em uma vizinhança deste conjunto.

Mostraremos que

$$||\chi u - v||_{W^{2,p}(\Omega)} < O(t^{-N})$$

quando $\omega \to \infty$ se

$$||f - \chi(2\omega)e^{\omega S(x)} \sum_{k=0}^{N} \frac{F_k}{(2\omega)^k}||_{L^p(\Omega,\mathbb{C})} < O(t^{-N})$$

$$||g - \chi(2\omega)e^{\omega S(x)} \sum_{k=0}^{N} \frac{G_k}{(2\omega)^k}||_{C^3(\partial\Omega,\mathbb{C})} < O(t^{-N}).$$

Com isto, temos que

$$Lu - (2\omega)e^{\omega S(x)} \sum_{k=0}^{N} \frac{F_k}{(2\omega)^k} =$$
$$\frac{e^{\omega S}}{(2\omega)^N} \left\{ (2t\omega)^{N+2} \frac{(\nabla S)^2}{4t^{N+2}} \sum_{k=0}^{N} \frac{U_k}{(2\omega)^k} + LU_N \right.$$
$$\left. \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{(2\omega)^{1-k+N}} \frac{\Lambda U_k + LU_{k-1} - F_k}{t^{N+1-k}} \right\}.$$

Como a função χ foi escolhida C^∞ com suporte compacto em uma vizinhança de $\partial\Omega$ existe uma constante positiva C tal que

$$|L[\chi(x)u(x)] - (2\omega)\chi(x)e^{\omega S(x)} \sum_{k=0}^{N} \frac{F_k}{(2\omega)^k}| \leq C\omega^{-N} e^{-\omega t/4},$$

portanto

$$L[\chi u] - f = O(\omega^{-N}) \tag{8.13}$$

uniformemente em Ω, $-\delta \leq t \leq 0$ quando $\omega \to \infty$.

Pela definição de $v = \mathcal{A}_L(f) + \mathcal{C}_L(g)$ existem escalares $\alpha_1, ..., \alpha_m \in \mathbb{C}$ tais que

$$Lv - f = \sum_{j}^{m} \alpha_j w_j.$$

Cada α_j está bem determinado. De fato, se σ_i é uma base para $\mathcal{N}(L^*)$ temos para cada $1 \leq j \leq m$

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \int_\Omega w_j \bar{\sigma}_i &= \int_\Omega (Lv - f)\, \bar{\sigma}_i \\
&= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial N} \bar{\sigma}_i - \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial \bar{\sigma}_i}{\partial N} - \int_\Omega f\, \bar{\sigma}_i \\
&= \int_{\partial\Omega} g\, \bar{\sigma}_i - \int_\Omega f\, \bar{\sigma}_i,
\end{aligned}$$

como as funções f, g, σ_i são dadas, os α_i estarão bem definidos se provarmos que a matriz $\int_\Omega w_j\ \bar{\sigma}_i$ é inversível. Se tal matriz não fosse inversível existiriam escalares ξ_j não todos nulos tais que $\sum_{j=1}^m \xi_j \int_\Omega w_j\ \bar{\sigma}_i = 0$ para todo $i = 1, 2, ...m$. Isto implica que $\sum_{j=1}^m \xi_j w_j \in [\sigma_i]^\perp = \mathcal{N}(L^*)^\perp = \mathcal{R}(L)$ o que claramente não pode ocorrer.

Seja

$$z = \chi u - v - \sum_{j=1}^{m} \beta \phi_j$$

onde os escalares $\beta_1, ..., \beta_m \in \mathbb{C}$ são escolhidos de forma que $\int_\Omega z\ \bar{\tau}_j = 0$ para todo $j = 1, ..., m$. Note que

$$\frac{\partial z}{\partial N} = \frac{\partial}{\partial N}(\chi u - v) = e^{i\omega\theta} \sum_{k=0}^{N} \frac{G_k}{(2\omega)^k} - g = O(\omega^{-N})$$

uniformemente em $\partial\Omega$ quando $\omega \to \infty$. Assim, pelo Lema de Riemann-Lebesgue, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \int_\Omega w_j \bar{\sigma}_i &= \int_{\partial\Omega} g\, \bar{\sigma}_i - \int_\Omega f\, \bar{\sigma}_i \\
&= \sum_{k=0}^{N} \int_{\partial\Omega} e^{i\omega\theta} \frac{G_k}{(2\omega)^k} \bar{\sigma}_i - \int_\Omega \chi(x) e^{\omega S(x)} \frac{F_k}{(2\omega)^k} \bar{\sigma}_i + O(\omega^{-N}) \\
&= +O(\omega^{-N}) \qquad (8.14)
\end{aligned}$$

e

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} \beta_i \int_\Omega \phi_i \,\bar{\tau_j} &= \int_\Omega \chi u \,\bar{\tau_j} - \int_\Omega v \,\bar{\tau_j} \\
&= \sum_{k=0}^{N} \int_\Omega \chi(x) e^{\omega S(x)} \frac{U_k}{(2\omega)^k} \,\bar{\tau}_j \\
&= O(\omega^{-N})
\end{aligned}
\tag{8.15}
$$

quando $\omega \to \infty$, pois F_k, G_k e U_k são respectivamente de classe C^{1+N-k}, C^{3+N-k} e C^{2+N-k}. Logo $|\alpha_i| = (\omega^{-N})$ e $|\beta_i| = (\omega^{-N})$ para todo $i = 1, ..., m$ quando $\omega \to \infty$. Como $Lz = L[\chi u] - Lv$ segue de (8.13), (8.14) que

$$
\begin{cases} Lz = O(\omega^{-N}) & em\ \Omega; \\ \frac{\partial z}{\partial N} = O(\omega^{-N}) & em\ \partial\Omega; \end{cases}
\tag{8.16}
$$

quando $\omega \to \infty$. Logo podemos concluir de (8.15) e (8.16) que

$$
||\chi u - v||_{W^{2,p}(\Omega,\mathbb{C})} = ||z - \sum_{j=1}^{m} \beta_j w_j||_{W^{2,p}(\Omega,\mathbb{C})} = O(\omega^{-N})
$$

8.3 Operadores Ξ, Π, Φ

Utilizaremos o Método das Soluções Rapidamente Oscilantes apresentado na seção anterior para obter uma condição necessária para os operadores Ξ, Π e Φ, definidos em (7.13),(7.15),(7.18) respectivamente, serem de posto finito. Para isto, necessitaremos do seguinte lema:

Lema 8.1. *Sejam S uma variedade C^1; A e $B \in L^2(S)$ com suporte compacto; θ uma função C^1 a valores reais definida em S com $\nabla_{\partial\Omega}\theta \neq 0$ na união dos suportes de A e B; $E \subset L^2(S)$ subespaço vetorial de dimensão finita e $u(\omega) \in E$ para todo $\omega \in \mathbb{R}$ onde*

$$
u(\omega) = Acos(\omega\theta) + Bsen(\omega\theta) + o(1) \text{ em } L^2(S)
$$

quando $\omega \to \infty$. Então $A = B = 0$ em S.

Demonstração. Ver [6].

□

Realizaremos os cálculos com todos os detalhes para o operador Ξ, os cálculos para Π e Φ são inteiramente análogos.

Seja Ξ o operador definido em (7.13) por

$$\Xi(\sigma) = \sum_{j=1}^{d_\sigma} \sigma \frac{\partial}{\partial N} \mathcal{Q}(\phi_j^1, \phi_j^2) - \mathcal{Q}(\phi_j^1, \mathcal{C}(M_j^2\sigma)) - \mathcal{Q}(\phi_j^2, \mathcal{C}(M_j^1\sigma)) \tag{8.17}$$

onde $\mathcal{C}$ foi definido em (8.12),

$$M_j^i(\sigma) = \nabla_{\partial\Omega}\phi_j^i \cdot \nabla_{\partial\Omega}\sigma - \sigma\frac{\partial^2\phi_j^i}{\partial N^2} \tag{8.18}$$

e

$$\mathcal{Q}(u, v) = \nabla v \cdot \nabla u - \lambda vu. \tag{8.19}$$

Com o Método das Soluções Rapidamente Oscilantes provaremos que

$$\Xi(\gamma cos(\omega\theta)) = \omega\gamma cos(\omega\theta) \sum_{j=1}^{d_\sigma} \frac{\partial\phi_j^1}{\partial\theta}\frac{\partial\phi_j^2}{\partial\theta} + O(\omega)$$

quando $\omega \to \infty$. Como estamos sempre supondo que o operador Ξ é de posto finito concluímos do lema 8.1 que

$$\sum_{j=1}^{d_\sigma} \frac{\partial\phi_j^1}{\partial\theta}\frac{\partial\phi_j^2}{\partial\theta} = 0 \; em \; \partial\Omega.$$

Usando a mesma notação da seção 8.1 temos que

$$\mathcal{C}(\nabla_{\partial\Omega}\phi_j^i \cdot \nabla_{\partial\Omega}\sigma - \sigma\frac{\partial^2\phi_j^i}{\partial N^2}) = e^{i\omega\theta}U_0^{i,j} + O(1).$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
(\nabla\phi_j^1\cdot\nabla-\lambda\phi_j^1)\mathcal{C}(\nabla_{\partial\Omega}\phi_j^2\cdot\nabla_{\partial\Omega}\sigma-\sigma\frac{\partial^2\phi_j^2}{\partial N^2}) &= \nabla_{\partial\Omega}\phi_j^1\cdot\nabla_{\partial\Omega}(e^{i\omega\theta}U_0^{2,j})-\lambda e^{i\omega\theta}U_0^{2,j}\phi_j^1\\
&= e^{i\omega\theta}\left\{i\frac{\partial\phi_j^1}{\partial\theta}U_0^{2,j}\omega+\mathcal{Q}(\phi_j^1,U_0^{2,j})\right\}\\
&= ie^{i\omega\theta}\frac{\partial\phi_j^1}{\partial\theta}U_0^{2,j}\omega+O(1),
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$\mathcal{Q}(\phi_j^1,\mathcal{C}(M_j^2\sigma))=i\omega e^{i\omega\theta}\frac{\partial\phi_j^1}{\partial\theta}U_0^{2,j}\omega+O(1).$$

Analogamente temos

$$\mathcal{Q}(\phi_j^2,\mathcal{C}(M_j^1\sigma))=i\omega e^{i\omega\theta}\frac{\partial\phi_j^2}{\partial\theta}U_0^{1,j}\omega+O(1).$$

Portanto

$$\Xi(\gamma e^{i\omega\theta}) = e^{i\omega\theta}\left\{\sum_{j=1}^{d_\sigma}-i\omega\left(\frac{\partial\phi_j^1}{\partial\theta}U_0^{2,j}+\frac{\partial\phi_j^2}{\partial\theta}U_0^{1,j}\right)+\gamma\frac{\partial}{\partial N}\mathcal{Q}(\phi_j^1,\phi_j^2)\right\}.$$

Determinando o termo $U_0^{i,j}$ da solução formal teremos o resultado desejado. Para isto, basta escrever a função $M_j^i(\gamma e^{i\omega\theta})$ na forma (8.2), ou seja,

$$M_j^i(\gamma e^{i\omega\theta})=2\omega e^{i\omega\theta}\sum_{k\geq 0}\frac{G_k}{(2\omega)^k}$$

e utilizar as relações obtidas em (8.12) . De fato,

$$
\begin{aligned}
M_j^i(\gamma e^{i\omega\theta}) &= \nabla_{\partial\Omega}(\gamma e^{i\omega\theta})\cdot\nabla_{\partial\Omega}\phi_j^i-\gamma e^{i\omega\theta}\frac{\partial^2\phi_j^i}{\partial N^2}\\
&= e^{i\omega\theta}\left(\nabla_{\partial\Omega}\gamma\cdot\nabla_{\partial\Omega}\phi_j^i+\omega i\gamma\frac{\partial\phi_j^i}{\partial\theta}-\gamma\frac{\partial^2\phi_j^i}{\partial N^2}\phi_j^i\right)\\
&= 2\omega e^{i\omega\theta}\left(i\gamma\frac{1}{2}\frac{\partial\phi_j^i}{\partial\theta}+\frac{1}{2\omega}M_j^i(\gamma)\right).
\end{aligned}
$$

Logo

$$G_0 = i\gamma \frac{1}{2}\frac{\partial \phi_j^i}{\partial \theta},\ G_1 = M_j^i(\gamma),$$

assim $U_0^{i,j} = i\gamma e^{i\omega\theta}\frac{1}{4}\frac{\partial \phi_j^i}{\partial \theta}$. Com isto,

$$\Xi(\gamma e^{i\omega\theta}) \quad = \quad \gamma e^{i\omega\theta}\omega \sum_{j=1}^{d_\sigma} \frac{\partial \phi_j^1}{\partial \theta}\frac{\partial \phi_j^2}{\partial \theta} + O(1).$$

Observe que

$$\Xi(\gamma cos(\omega\theta)) = \frac{1}{2} Re\left\{\Xi(\gamma e^{i\omega\theta}) + \Xi(\gamma e^{-i\omega\theta})\right\},$$

portanto

$$\Xi(\gamma cos(\omega\theta)) \quad = \quad \omega\gamma cos(\omega\theta) \sum_{j=1}^{d_\sigma} \frac{\partial \phi_j^1}{\partial \theta}\frac{\partial \phi_j^2}{\partial \theta} + O(1).$$

Como estamos supondo que o operador Ξ é de posto finito obtemos

$$\sum_{j=1}^{d_\sigma} \frac{\partial \phi_j^1}{\partial \theta}\frac{\partial \phi_j^2}{\partial \theta} = 0 \ em \ \partial\Omega. \tag{8.20}$$

Os próximos dois lemas são fundamentais para podermos concluir que a propriedade acima é válida para todo $\tau \perp T_x(G(x))$, em particular se o grupo G for finito a identidade é verdadeira para $\tau \in \partial\Omega$.

Lema 8.2. *Sejam G subgrupo compacto de $O(n)$ tal que existe $x \in \mathbb{R}^n$ livre pela ação de G; $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, aberto, limitado com fronteira regular e G-invariante. Se $u : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ é suave e G-invariante então $\nabla_{\partial\Omega} u \perp G(x)$.*

Demonstração. Seja $\gamma : \mathbb{R} \to G$ suave tal que $\frac{d}{dt}\gamma|_{t=0} x = \tau \in T_x(G(x))$. Note que $u(\gamma(t)x) = u(x)$, então

$$\begin{aligned}\nabla_{\partial\Omega} u \cdot \tau &= \frac{d}{dt}|_{t=0} u(\gamma(t)x) \\ &= \frac{d}{dt}|_{t=0} u(x) \\ &= 0\end{aligned}$$

□

Lema 8.3. *Seja V_ϵ é uma vizinhança do espaço normal a $G(x)$ no ponto $x \in \Omega$, Ω com a mesmas condições que no lema acima. Dada uma função contínua em V_ϵ é sempre possível estendê-la a uma função G-invariante em Ω. Como consequência ∇u pode ser qualquer vetor normal a $G(x)$.*

Demonstração. Ver [16]. □

Teorema 8.4. *Sejam G subgrupo compacto de $O(n)$ que possui um ponto livre; Ω aberto, conexo, limitado, C^3-regular e G-simétrica; $\{\phi_j^i\}_{j=1}^{d_\sigma}$, $i = 1, 2$ são autofunções para o problema (7.1), pertencentes ao espaço M_σ, que satisfazem*

$$\sum_{j=1}^{d_\sigma} \mathcal{Q}(\phi_j^1, \phi_j^2) = 0$$

em $\partial\Omega$, onde $\mathcal{Q}$ é dado em (8.19). Se o operador Ξ definido em (8.17) é de posto finito então

$$\sum_{j=1}^{d_\sigma} \frac{\partial\phi_j^1}{\partial\tau}\frac{\partial\phi_j^2}{\partial\tau} = 0$$

em uma vizinhança V de $\partial\Omega$, para todo $\tau \perp T_x(G(x))$. Em particular, para todo $\tau \in T_x(\partial\Omega)$, se G é finito.

Podemos facilmente obter um resultado análogo para os operadores de fronteira Π e Φ definidos em (7.15) e (7.18) por

$$\Pi(\sigma) = \sum_{j=k}^{d_\sigma} \sigma \frac{\partial}{\partial N} \mathcal{Q}(\phi_k, \phi_k) - 2\mathcal{Q}(\phi_k, \mathcal{C}(M_k(\sigma))) \tag{8.21}$$

$$\begin{aligned}\Phi(\sigma) &= \frac{1}{d_{\sigma_1}}\sum_{j=k}^{d_{\sigma_1}} \sigma \frac{\partial}{\partial N}\mathcal{Q}(\phi_k^1, \phi_k^1) - 2(\mathcal{Q}(\phi_k^1, \mathcal{C}(M_k^1(\sigma))) \\ &\quad - \frac{1}{d_{\sigma_2}}\sum_{j=k}^{d_{\sigma_1}} \sigma \frac{\partial}{\partial N}\mathcal{Q}(\phi_k^1, \phi_k^1) - 2(\mathcal{Q}(\phi_k^1, \mathcal{C}(M_k^1(\sigma))), \qquad (8.22)\end{aligned}$$

respectivamente.

Teorema 8.5. *Sejam G subgrupo compacto de $O(n)$ que possui um ponto livre; Ω aberto, conexo, limitado, C^3-regular e G-simétrica; $\{\phi_j\}_{j=1}^{d_\sigma}$, são autofunções para o problema (7.1), pertencente ao espaço M_σ ,que satisfazem*

$$\frac{1}{d_{\sigma_1}}\sum_{j=1}^{d_\sigma} \mathcal{Q}(\phi_j^1, \phi_j^1) = 0$$

em $\partial\Omega$, onde $\mathcal{Q}$ está definido em (8.19). Se o operador Π definido em (8.21) é de posto finito, então

$$\frac{1}{d_{\sigma_1}}\sum_{j=1}^{d_{\sigma_1}} \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial \tau}\right)^2 = 0$$

em uma vizinhança V de $\partial\Omega$, para todo $\tau \perp T_x(G(x))$. Em particular, $\tau \in T_x(\partial\Omega)$, se G é finito.

Teorema 8.6. *Sejam G subgrupo compacto de $O(n)$ que possui um ponto livre; Ω aberto, conexo, limitado, C^3-regular e G-simétrica; $\{\phi_j^i\}_{j=1}^{d_\sigma}$, $i = 1, 2$ são autofunções para o problema (7.1), pertencentes aos espaços M_{σ_i}, que satisfazem*

$$\frac{1}{d_{\sigma_1}}\sum_{j=1}^{d_\sigma} \mathcal{Q}(\phi_j^1, \phi_j^1) = \frac{1}{d_{\sigma_2}}\sum_{j=1}^{d_{\sigma_2}} \mathcal{Q}(\phi_j^2, \phi_j^2)$$

em $\partial\Omega$, onde $\mathcal{Q}$ está definido em (8.19). Se o operador Φ definido em (8.22) é de posto finito, então

$$\frac{1}{d_{\sigma_1}}\sum_{j=1}^{d_{\sigma_1}} \left(\frac{\partial \phi_j^1}{\partial \tau}\right)^2 = \frac{1}{d_{\sigma_2}}\sum_{j=1}^{d_{\sigma_2}} \left(\frac{\partial \phi_j^1}{\partial \tau}\right)^2$$

em uma vizinhança V de $\partial\Omega$, para todo $\tau \perp T_x(G(x))$. Em particular, pata todo $\tau \in T_x(\partial\Omega)$, se G é finito.

8.4 Operador Θ

Nesta seção encontra-se o resumo dos resultados obtidos por A.L.Pereira [16] para o operador Θ, porém a demonstração será apenas esboçada.

No capítulo 4 nos deparamos com o operador de fronteira Θ definido em (4.20) por

$$\sigma \mapsto \frac{1}{d_{\sigma_1}} \sum_{j=1}^{d_{\sigma_1}} \frac{\partial \phi_j^1}{\partial N} \frac{\partial}{\partial N} \mathcal{B}_{\Delta+\lambda} \left(\sigma \frac{\partial \phi_j^1}{\partial N} \right) - \frac{1}{d_{\sigma_2}} \sum_{j=1}^{d_{\sigma_2}} \frac{\partial \phi_j^2}{\partial N} \frac{\partial}{\partial N} \mathcal{B}_{\Delta+\lambda} \left(\sigma \frac{\partial \phi_j^2}{\partial N} \right), \tag{8.23}$$

onde as autofunções ϕ_j^i satisfazem a condição

$$\frac{1}{d_{\sigma_1}} \sum_{j=1}^{d_{\sigma_1}} \left(\frac{\partial \phi_j^1}{\partial N} \right)^2 - \frac{1}{d_{\sigma_2}} \sum_{j=1}^{d_{\sigma_2}} \left(\frac{\partial \phi_j^2}{\partial N} \right)^2 = 0 \ em \, \partial\Omega.$$

e o operador $\mathcal{B}_{\Delta+\lambda}$ é definido da seguinte forma: se $v = \mathcal{B}_{\Delta+\lambda} g$ então

$$(\Delta + \lambda) v \in Ker(\Delta + \lambda), \ v \perp Ker(\Delta + \lambda), \ v_{|\partial\Omega} = g.$$

Para completarmos a demonstração do teorema 4.4 precisamos mostrar que se Θ é identicamente nulo, então

$$\frac{1}{d_{\sigma_1}} \sum_{j=1}^{d_{\sigma_1}} \left| \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial \phi_j^1}{\partial N} \right|^2 = \frac{1}{d_{\sigma_2}} \sum_{j=1}^{d_{\sigma_2}} \left| \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial \phi_j^2}{\partial N} \right|^2 \tag{8.24}$$

para todo $\tau \in T_x(\partial\Omega)$.

Com isto, definimos o operador Θ dado por

$$\sigma \mapsto \frac{1}{d_{\sigma_1}} \sum_{j=1}^{d_{\sigma_1}} \frac{\partial \phi_j^1}{\partial N} \frac{\partial}{\partial N} \mathcal{B}_{\Delta+\lambda} \left(\sigma \frac{\partial \phi_j^1}{\partial N} \right) - \frac{1}{d_{\sigma_2}} \sum_{j=1}^{d_{\sigma_2}} \frac{\partial \phi_j^2}{\partial N} \frac{\partial}{\partial N} \mathcal{B}_{\Delta+\lambda} \left(\sigma \frac{\partial \phi_j^2}{\partial N} \right),$$

onde ϕ_j^i são autofunções do Laplaciano com condição de Dirichlet associadas a λ que também satisfazem

$$\frac{1}{d_{\sigma_1}} \sum_{j=1}^{d_{\sigma_1}} \left(\frac{\partial \phi_j^1}{\partial N} \right)^2 - \frac{1}{d_{\sigma_2}} \sum_{j=1}^{d_{\sigma_2}} \left(\frac{\partial \phi_j^2}{\partial N} \right)^2 = 0 \ em \, \partial\Omega. \tag{8.25}$$

Utilizando o Método das Soluções Rapidamente Oscilantes A.L.Pereira [16] provou que

$$\begin{aligned}\Theta(\sigma\cos\omega\theta) = \tfrac{2}{\omega}\sigma\cos\omega\theta\Bigg\{\tfrac{1}{d_{\sigma_2}}\left[\textstyle\sum_{j=1}^{d_{\sigma_1}}|\nabla_{\partial\Omega}\tfrac{\partial\phi_j^1}{\partial N}|^2-\left(\tfrac{\partial}{\partial\theta}\tfrac{\partial\phi_j^1}{\partial N}\right)^2\right]\\ -\tfrac{1}{d_{\sigma_1}}\left[\textstyle\sum_{j=1}^{d_{\sigma_2}}|\nabla_{\partial\Omega}\tfrac{\partial\phi_j^2}{\partial N}|^2-\left(\tfrac{\partial}{\partial\theta}\tfrac{\partial\phi_j^2}{\partial N}\right)^2\right]\Bigg\}+O(\omega^{-2})(\omega^2)\end{aligned} \tag{8.26}$$

Teorema 8.7. *Se G é um subgrupo finito de $O(n)$ e ϕ_j^i, $i=1,2$ e $j=1,2,...,d_{\sigma_i}$ são autofunções associadas as λ que satisfazem a condição (8.25). Então uma condição necessária para Θ ser nulo é*

$$\frac{1}{d_{\sigma_1}}\sum_{j=1}^{d_{\sigma_1}}|\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{\partial\phi_j^1}{\partial N}|^2-\frac{1}{d_{\sigma_2}}\sum_{j=1}^{d_{\sigma_2}}|\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{\partial\phi_j^2}{\partial N}|^2=0 \tag{8.27}$$

em $\partial\Omega$ para todo $\tau\in T_x(\partial\Omega)$.

Demonstração. Se $n>2$ então, por (8.26), uma condição necessária para que Θ seja nulo é

$$\frac{1}{d_{\sigma_1}}\left[\sum_{j=1}^{d_{\sigma_1}}|\nabla_{\partial\Omega}\frac{\partial\phi_j^1}{\partial N}|^2-\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial\phi_j^1}{\partial N}\right)^2\right]-\frac{1}{d_{\sigma_1}}\left[\sum_{j=1}^{d_{\sigma_2}}|\nabla_{\partial\Omega}\frac{\partial\phi_j^2}{\partial N}|^2-\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial\phi_j^2}{\partial N}\right)^2\right]=0$$

em $\partial\Omega$.

Podemos escrever

$$\nabla_{\partial\Omega}\frac{\partial\phi_j^i}{\partial N}=\sum_{l=1}^{n-1}\frac{\partial}{\partial\tau_l}\frac{\partial\phi_j^i}{\partial N}\tau_l,$$

onde $\{\tau_l\}$ é uma base ortonormal para $T_x(\partial\Omega)$. Além disto, pelo lema 8.3, qualquer vetor de $T_x(\partial\Omega)$ é gradiente de uma função G-invariante definida em $\partial\Omega$. Desta forma, temos

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_{l=1}^{n-1}\left[\tfrac{1}{d_{\sigma_1}}\sum_{j=1}^{d_{\sigma_1}}\left(\tfrac{\partial}{\partial\tau_l}\tfrac{\partial\phi_j^1}{\partial N}\right)^2-\tfrac{1}{d_{\sigma_1}}\sum_{j=1}^{d_{\sigma_2}}\left(\tfrac{\partial}{\partial\tau_l}\tfrac{\partial\phi_j^2}{\partial N}\right)^2\right]=\\ =\tfrac{1}{d_{\sigma_1}}\textstyle\sum_{j=1}^{d_{\sigma_1}}\left(\tfrac{\partial}{\partial\tau_k}\tfrac{\partial\phi_j^1}{\partial N}\right)^2-\tfrac{1}{d_{\sigma_2}}\sum_{j=1}^{d_{\sigma_2}}\left(\tfrac{\partial}{\partial\tau_k}\tfrac{\partial\phi_j^2}{\partial N}\right)^2\end{aligned}$$

para $k=1,2...,n-1$. Portanto $\frac{1}{d_{\sigma_1}}\sum_{j=1}^{d_{\sigma_1}}\left(\frac{\partial}{\partial\tau_k}\frac{\partial\phi_j^1}{\partial N}\right)^2-\frac{1}{d_{\sigma_2}}\sum_{j=1}^{d_{\sigma_2}}\left(\frac{\partial}{\partial\tau_k}\frac{\partial\phi_j^2}{\partial N}\right)^2=0.$

Agora, se $n=2$ segue de (8.26) que $\Theta(\sigma\cos\omega\theta)=O(\omega^{-2})$. Consequentemente é necessário calcular coeficientes de ω de ordem superior. Fazendo isto, o resultado obtido é

$$\Theta(\sigma\cos\omega\theta) = -\frac{\lambda\cos\omega\theta}{2\omega^3}\left[\frac{1}{d_{\sigma_1}}\sum_{j=1}^{d_{\sigma_1}}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial\phi_j^1}{\partial N}\right)^2 - \frac{1}{d_{\sigma_2}}\sum_{j=1}^{d_{\sigma_2}}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial\phi_j^2}{\partial N}\right)^2\right] + O(\omega^{-4})$$

□

8.5 Operador Ψ

Considere o operador de fronteira Ψ definido em (5.16) e dado por

$$\begin{aligned}\sigma \mapsto \;& \frac{1}{d_{\sigma_1}}\sum_{j=1}^{d_{\sigma_1}}\sigma\frac{\partial}{\partial N}(\Delta\phi_j^1)^2 + 2\left[\Delta\phi_j^1\Delta\mathcal{A}_{\Delta^2+\lambda}(\sigma\Delta\phi_j^1)\right] \\ & -\frac{1}{d_{\sigma_2}}\sum_{j=1}^{d_{\sigma_2}}\sigma\frac{\partial}{\partial N}(\Delta\phi_j^2)^2 + 2\left[\Delta\phi_j^2\Delta\mathcal{A}_{\Delta^2+\lambda}(\sigma\Delta\phi_j^2)\right],\end{aligned} \tag{8.28}$$

onde as autofunções ϕ_j^i satisfazem

$$\frac{1}{d_{\sigma_1}}\sum_{j=1}^{d_{\sigma_1}}\left(\frac{\partial^2\phi_j^1}{\partial N^2}\right)^2 = \frac{1}{d_{\sigma_2}}\sum_{j=1}^{d_{\sigma_2}}\left(\frac{\partial^2\phi_j^2}{\partial N^2}\right)^2 \quad em\,\partial\Omega. \tag{8.29}$$

e o operador

$$\mathcal{A}_{\Delta^2+\lambda} : W^{3-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega) \to W^4 \cap W_0^1(\Omega, \mathbb{C})$$

é definido da seguinte forma: se $v = \mathcal{A}_{\Delta^2+\lambda}g$ então

$$(\Delta^2+\lambda)v \in Ker(\Delta^2+\lambda),\; v\perp Ker(\Delta^2+\lambda),\; \frac{\partial v}{\partial N} = g.$$

Esse operador é semelhante ao operador que aparece em [18], onde foi provado que genericamente, no conjunto das regiões C^5-regulares e $\mathbb{Z}_2$-simétricas, todos os autovalores do Bilaplaciano com condição de fronteira de Dirichlet são simples. Neste mesmo trabalho M.C.Pereira utilizou o Método das Soluções Rapidamente Oscilantes para calcular alguns termos da expansão do operador $\Delta\mathcal{A}_{\Delta^2+\lambda}(g)$ quando aplicado em funções rapidamente oscilantes. Nós apresentaremos aqui as expressões obtidas, porém sem demonstração.

Usaremos a mesma notação utilizada na seção 8.1. Reuniremos abaixo as expressões calculadas por M.C.Pereira [19].

Seja $\mathcal{A}_{\Delta^2+\lambda}g = e^{i\omega\theta}\sum_{k\geq 0}\frac{U_k}{(2\omega)^k}$

- $\dot{U}_0 = G_0$;
- $\ddot{U}_0 = F_0 - \left(q - \alpha + 2i\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\dot{U}_0$;
-

$$\begin{array}{rcl} \dddot{U}_0 & = & \dot{F}_0 - (\alpha - 3q + 2i\dfrac{\partial}{\partial\theta})\ddot{U}_0 - \\ & & - \left(\begin{array}{cccccc} \frac{1}{4}\alpha^2 & +\frac{i}{2}\frac{\partial\alpha}{\partial\theta} & +\frac{3}{2}\beta & +i\alpha\frac{\partial}{\partial\theta} & +S_3 + q^2 \\ -6iK\frac{\partial}{\partial\theta} & -2iq\frac{\partial}{\partial\theta} & -\alpha q & -i\frac{\partial q}{\partial\theta} & -\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \end{array} \right)\dot{U}_0; \end{array}$$

- $\dot{U}_1 = G_1$;
-

$$\begin{array}{rcl} \ddot{U}_1 & = & F_1 - \left(q - \alpha - 2i\dfrac{\partial}{\partial\theta}\right)\dot{U}_1 - \\ & & - \left(\begin{array}{cccc} \alpha H_1 & +\beta - H_2 + 2\Delta_{\partial\Omega} & +2iH_1\frac{\partial}{\partial\theta} & \\ +S_3 & -4iK\nabla_{\partial\Omega}\theta\cdot\nabla & +i\frac{\partial H_1}{\partial\theta} & -H_1 q \end{array} \right)\dot{U}_0 - \\ & & -(\alpha + 2H_1 + 2i\dfrac{\partial}{\partial\theta} - 2q)\ddot{U}_0 - 2\dddot{U}_0; \end{array}$$

- $q = \nabla_{\partial\Omega}\theta(y)\cdot K(y)\nabla_{\partial\Omega}\theta(y)$;
- $S_3 = 3\nabla_{\partial\Omega}\theta(y)\cdot K^2(y)\nabla_{\partial\Omega}\theta(y) - q^2(y) + i\frac{\partial q}{\partial\theta}(y)$;
- $\alpha(y) = H_1(y) - q(y) + i\Delta_{\partial\Omega}\theta$;
- $\beta(y) = S_3(y) - H_1(y)q(y) + i\frac{\partial H_1}{\partial\theta} - 2idiv_{\partial\Omega}(K(y)\nabla_{\partial\Omega}\theta(y)) - H_2(y)$.

Agora

$$\Delta\mathcal{A}_{\Delta^2+\lambda}(e^{i\omega\theta}\Delta\phi_j^1) = e^{i\omega\theta}\left((2\omega)\dot{U}_0^{1,j} + H\dot{U}_0^{1,j} + \ddot{U}_0^{1,j}\right) + O(\omega^{-1})$$

$$\Delta\mathcal{A}_{\Delta^2+\lambda}(e^{i\omega\theta}\Delta\phi_j^2) = e^{i\omega\theta}\left((2\omega)\dot{U}_0^{2,j} + H\dot{U}_0^{2,j} + \dot{U}_0^{2,j}\right) + O(\omega^{-1}),$$

observe que os índices i e j dos termos $U_0^{i,j}$ são compatíveis com os índices da autofunção que aparece no argumento de $\Delta\mathcal{A}_{\Delta^2+\lambda}$. Logo

$$\frac{1}{d_{\sigma_1}}\sum_{j=1}^{d_{\sigma_1}} 2\left[\Delta\phi_j^1 \Delta\mathcal{C}_{\Delta^2+\lambda}(\sigma\Delta\phi_j^1)\right] - \frac{1}{d_{\sigma_2}}\sum_{j=1}^{d_{\sigma_2}} 2\left[\Delta\phi_j^2 \Delta\mathcal{C}_{\Delta^2+\lambda}(\sigma\Delta\phi_j^2)\right] =$$

$$= e^{i\omega\theta}\left\{\frac{1}{d_{\sigma_1}}\sum_{j=1}^{d_{\sigma_1}} 2\Delta\phi_j^1\left((2\omega)\dot{U}_0^{1,j} + H\dot{U}_0^{1,j} + \ddot{U}_0^{1,j}\right)\right.$$

$$\left. -\frac{1}{d_{\sigma_2}}\sum_{j=1}^{d_{\sigma_2}} 2\Delta\phi_j^2\left((2\omega)\dot{U}_0^{2,j} + H\dot{U}_0^{2,j} + \ddot{U}_0^{2,j}\right)\right\}.$$

O coeficiente do termo 2ω é

$$\frac{1}{d_{\sigma_1}}\sum_{j=1}^{d_{\sigma_1}} 2\Delta\phi_j^1\dot{U}_0^{1,j} - \frac{1}{d_{\sigma_2}}\sum_{j=1}^{d_{\sigma_2}} 2\Delta\phi_j^2\dot{U}_0^{2,j}$$

onde $\dot{U}_0^{1,j} = \Delta\phi_j^1$ e $\dot{U}_0^{2,j} = \Delta\phi_j^2$, segue da condição (8.29) que este coeficiente deve ser nulo. Já o coeficiente de $(2\omega)^0$ é dado por

$$\frac{1}{d_{\sigma_1}}\sum_{j=1}^{d_{\sigma_1}} 2\Delta\phi_j^1\ddot{U}_0^{1,j} - \frac{1}{d_{\sigma_2}}\sum_{j=1}^{d_{\sigma_2}} 2\Delta\phi_j^2\ddot{U}_0^{2,j} \tag{8.30}$$

onde

$$\ddot{U}_0^{1,j} = \left(q - \alpha + 2i\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\Delta\phi_j^1$$

$$\ddot{U}_0^{2,j} = \left(q - \alpha + 2i\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\Delta\phi_j^2$$

segue que

$$\frac{1}{d_{\sigma_1}}\sum_{j=1}^{d_{\sigma_1}} 2\Delta\phi_j^1\ddot{U}_0^{1,j} \;=\; \frac{1}{d_{\sigma_1}}\sum_{j=1}^{d_{\sigma_1}} (q-\alpha)(\Delta\phi_j^1)^2 - \nabla_{\partial\Omega}\theta\cdot\nabla(\Delta\phi_j^1)^2.$$

Mais uma vez, pela condição (8.29), temos que o coeficiente de $(2\omega)^0$ é nulo. Logo

$$\frac{1}{d_{\sigma_1}}\sum_{j=1}^{d_{\sigma_1}} 2\left[\Delta\phi_j^1 \Delta\mathcal{C}_{\Delta^2+\lambda}(\sigma\Delta\phi_j^1)\right] - \frac{1}{d_{\sigma_2}}\sum_{j=1}^{d_{\sigma_2}} 2\left[\Delta\phi_j^2 \Delta\mathcal{C}_{\Delta^2+\lambda}(\sigma\Delta\phi_j^2)\right] = O(\omega^{-1}).$$

Portanto uma condição necessária para o operador de fronteira Θ ser de posto é

$$\frac{1}{d_{\sigma_1}}\sum_{j=1}^{d_{\sigma_1}} \frac{\partial}{\partial N}(\Delta\phi_j^1)^2 - \frac{1}{d_{\sigma_2}}\sum_{j=1}^{d_{\sigma_2}} \frac{\partial}{\partial N}(\Delta\phi_j^2)^2 = 0. \tag{8.31}$$

Entretanto essa nova condição extra para as autofunções ainda não é suficiente para obtermos o resultado, assim devemos calcular o coeficiente do termo $(2\omega)^{-1}$. Considere

$$\begin{aligned}
\Delta\mathcal{A}_{\Delta^2+\lambda}(e^{i\omega\theta}\Delta\phi_j^1) &= e^{i\omega\theta}\Big\{\Big((2\omega)\dot{U}_0^{1,j} + H\dot{U}_0^{1,j} + \ddot{U}_0^{1,j}\Big) + \\
&\quad + \frac{1}{2\omega}\Big((2\omega)\dot{U}_1^{1,j} + H\dot{U}_1^{1,j} + \ddot{U}_1^{1,j}\Big) + O(\omega^{-2})\Big\} \\
&= e^{i\omega\theta}((2\omega)\dot{U}_0^{1,j} + H\dot{U}_0^{1,j} + \dot{U}_1^{1,j} + \frac{1}{2\omega}(H\dot{U}_1^{1,j} + \ddot{U}_1^{1,j})) \\
&+ O(\omega^{-2}).
\end{aligned}$$

$$\Delta\mathcal{A}_{\Delta^2+\lambda}(e^{i\omega\theta}\Delta\phi_j^2) = e^{i\omega\theta}((2\omega)\dot{U}_0^{2,j} + H\dot{U}_0^{2,j} + \dot{U}_1^{2,j} + \frac{1}{2\omega}(H\dot{U}_1^{2,j} + \ddot{U}_1^{2,j})) + O(\omega^{-2}).$$

Nosso interesse nesse estágio é calcular o coeficiente de $\frac{1}{\omega}$, assim

$$\begin{aligned}
\Psi(e^{i\omega\theta}) &= (coef)\omega^0 \\
&+ \frac{1}{2\omega}\left(\frac{1}{d_{\sigma_1}}\sum_{j=1}^{d_{\sigma_1}}\Delta\phi_j^1(H\dot{U}_1^{1,j} + \ddot{U}_1^{j}) - \frac{1}{d_{\sigma_2}}\sum_{j=1}^{d_{\sigma_2}}\Delta\phi_j^2(H\dot{U}_1^{2,j} + \ddot{U}_1^{2,j})\right) + O(\omega^{-2})
\end{aligned}$$

Observe que $\dot{U}_1^{1,j} = \dot{U}_1^{2,j} = G_1 = 0$, então

$$\Psi(e^{i\omega\theta}) = \frac{1}{2\omega}\left(\frac{1}{d_{\sigma_1}}\sum_{j=1}^{d_{\sigma_1}}\Delta\phi_j^1\dot{U}_1^{1,j} - \frac{1}{d_{\sigma_2}}\sum_{j=1}^{d_{\sigma_2}}\Delta\phi_j^2\dot{U}_1^{2,j}\right) + O(\omega^{-2}).$$

Como

$$
\begin{aligned}
\ddot{U}_1^{i,j} &= F_1 - \left(q - \alpha - 2i\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\dot{U}_1^{i,j} - \\
&- \begin{pmatrix} \alpha H_1 & +\beta - H_2 + 2\Delta_{\partial\Omega} & +2iH_1\frac{\partial}{\partial\theta} & \\ +S_3 & -4iK\nabla_{\partial\Omega}\theta\cdot\nabla & +i\frac{\partial H_1}{\partial\theta} & -H_1 q \end{pmatrix}\dot{U}_0^{i,j} - \\
&-(\alpha + 2H_1 + 2i\frac{\partial}{\partial\theta} - 2q)\ddot{U}_0^{i,j} - 2\dddot{U}_0^{i,j}
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\dddot{U}_0 &= \dot{F}_0 - (\alpha - 3q + 2i\frac{\partial}{\partial\theta})\ddot{U}_0^{i,j} - \\
&- \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\alpha^2 & +\frac{i}{2}\frac{\partial\alpha}{\partial\theta} & +\frac{3}{2}\beta & +i\alpha\frac{\partial}{\partial\theta} & +S_3 + q^2 \\ -6iK\frac{\partial}{\partial\theta} & -2iq\frac{\partial}{\partial\theta} & -\alpha q & -i\frac{\partial q}{\partial\theta} & -\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \end{pmatrix}\dot{U}i,j_0;
\end{aligned}
$$

Antes de substituirmos a expressão de $\ddot{U}_1^{1,j}$ e $\ddot{U}_1^{2,j}$ no coeficiente de $(2\omega)^{-1}$ note que se T é qualquer operador diferencial tangencial de ordem 1 ou zero temos, pela condição (8.29), que

$$
\frac{1}{d_{\sigma_1}}\sum_{j=1}^{d_{\sigma_1}}\Delta\phi_j^1 T(\Delta\phi_j^1) - \frac{1}{d_{\sigma_2}}\sum_{j=1}^{d_{\sigma_2}}\Delta\phi_j^1 T(\Delta\phi_j^1) = 0
$$

Com isto, e lembrando que $\dot{U}_0^{1,j} = \Delta\phi_j^1$, $\dot{U}_0^{2,j} = \Delta\phi_j^2$, $\dot{U}_1^{1,j} = \dot{U}_1^{2,j} = 0$, obtemos

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{d_{\sigma_1}}\sum_{j=1}^{d_{\sigma_1}}\Delta\phi_j^1\ddot{U}_1^{1,j} - \frac{1}{d_{\sigma_2}}\sum_{j=1}^{d_{\sigma_2}}\Delta\phi_j^2\ddot{U}_1^{2,j} = \\
&\frac{2}{d_{\sigma_1}}\sum_{j=1}^{d_{\sigma_1}} -\Delta\phi_j^1\Delta_{\partial\Omega}\Delta\phi_j^1 - \Delta\phi_j^1\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\Delta\phi_j^1 - \frac{2}{d_{\sigma_2}}\sum_{j=1}^{d_{\sigma_2}} -\Delta\phi_j^2\Delta_{\partial\Omega}\Delta\phi_j^2 - \Delta\phi_j^2\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\Delta\phi_j^2 \\
&\frac{1}{d_{\sigma_1}}\sum_{j=1}^{d_{\sigma_1}}\Delta\phi_j^1(-\alpha + 2H_1 - 2i\frac{\partial}{\partial\theta} + 2q)\ddot{U}_0^{1,j} - \frac{1}{d_{\sigma_2}}\sum_{j=1}^{d_{\sigma_2}}\Delta\phi_j^1(-\alpha + 2H_1 - 2i\frac{\partial}{\partial\theta} + 2q)\ddot{U}_0^{2,j} + \\
&+\frac{1}{d_{\sigma_1}}\sum_{j=1}^{d_{\sigma_1}}\Delta\phi_j^1(2\alpha - 6q + 4i\frac{\partial}{\partial\theta})\ddot{U}_0^{1,j} - \frac{1}{d_{\sigma_2}}\sum_{j=1}^{d_{\sigma_2}}\Delta\phi_j^2(2\alpha - 6q + 4i\frac{\partial}{\partial\theta})\ddot{U}_0^{2,j}.
\end{aligned}
$$

Mostraremos agora que as parcelas onde aparecem $\ddot{U}_0^{1,j}$ e $\ddot{U}_0^{2,j}$, sem derivadas $\frac{\partial}{\partial\theta}$, são nulas. De fato, sabemos que o coeficiente de $(2\omega)^0$, fornecido em (8.30), do operador Ψ é zero, isto é,

$$\frac{1}{d_{\sigma_1}}\sum_{j=1}^{d_{\sigma_1}} 2\Delta\phi_j^1 \ddot{U}_0^{1,j} - \frac{1}{d_{\sigma_2}}\sum_{j=1}^{d_{\sigma_2}} 2\Delta\phi_j^2 \ddot{U}_0^{2,j} = 0.$$

Portanto mais cancelamentos simplificam a expressão:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{d_{\sigma_1}}\sum_{j=1}^{d_{\sigma_1}} \Delta\phi_j^1 \ddot{U}_1^{1,j} - \frac{1}{d_{\sigma_2}}\sum_{j=1}^{d_{\sigma_2}} \Delta\phi_j^2 \ddot{U}_1^{2,j} &= \\
\frac{2}{d_{\sigma_1}}\sum_{j=1}^{d_{\sigma_1}} -\Delta\phi_j^1 \Delta_{\partial\Omega}\Delta\phi_j^1 - \Delta\phi_j^1 \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\Delta\phi_j^1 &- \frac{2}{d_{\sigma_2}}\sum_{j=1}^{d_{\sigma_2}} -\Delta\phi_j^2 \Delta_{\partial\Omega}\Delta\phi_j^2 - \Delta\phi_j^2 \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\Delta\phi_j^2 \\
+\frac{1}{d_{\sigma_1}}\sum_{j=1}^{d_{\sigma_1}} \Delta\phi_j^1 2i\frac{\partial}{\partial\theta}\ddot{U}_0^{1,j} &- \frac{1}{d_{\sigma_2}}\sum_{j=1}^{d_{\sigma_2}} \Delta\phi_j^2 2i\frac{\partial}{\partial\theta}\ddot{U}_0^{2,j}.
\end{aligned}$$

Agora para as parcelas onde aparecem $\frac{\partial}{\partial\theta}\ddot{U}_0^{1,j}$, $\frac{\partial}{\partial\theta}\ddot{U}_0^{2,j}$ e lembrando que

$$\ddot{U}_0^{1,j} = \left(-q + \alpha - 2i\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\Delta\phi_j^1$$

$$\ddot{U}_0^{2,j} = \left(-q + \alpha - 2i\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\Delta\phi_j^2,$$

temos

$$\frac{1}{d_{\sigma_1}}\sum_{j=1}^{d_{\sigma_1}}\Delta\phi_j^1 2i\frac{\partial}{\partial\theta}\ddot{U}_0^{1,j}-\frac{1}{d_{\sigma_2}}\sum_{j=1}^{d_{\sigma_2}}\Delta\phi_j^1 2i\frac{\partial}{\partial\theta}\ddot{U}_0^{2,j}=$$

$$2i\frac{\partial}{\partial\theta}(-q+\alpha)\left(\frac{1}{d_{\sigma_1}}\sum_{j=1}^{d_{\sigma_1}}(\Delta\phi_j^1)^2-\frac{1}{d_{\sigma_2}}\sum_{j=1}^{d_{\sigma_2}}(\Delta\phi_j^2)^2\right)+$$

$$+\frac{4}{d_{\sigma_1}}\sum_{j=1}^{d_{\sigma_1}}\Delta\phi_j^1\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ddot{U}_0^{1,j}-\frac{4}{d_{\sigma_2}}\sum_{j=1}^{d_{\sigma_2}}\Delta\phi_j^1\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ddot{U}_0^{2,j}$$

$$=\frac{4}{d_{\sigma_1}}\sum_{j=1}^{d_{\sigma_1}}\Delta\phi_j^1\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ddot{U}_0^{1,j}-\frac{4}{d_{\sigma_2}}\sum_{j=1}^{d_{\sigma_2}}\Delta\phi_j^1\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ddot{U}_0^{2,j}.$$

Assim temos

$$\frac{1}{d_{\sigma_1}}\sum_{j=1}^{d_{\sigma_1}}\Delta\phi_j^1\ddot{U}_1^{1,j}-\frac{1}{d_{\sigma_2}}\sum_{j=1}^{d_{\sigma_2}}\Delta\phi_j^2\ddot{U}_1^{2,j}=$$

$$\frac{2}{d_{\sigma_1}}\sum_{j=1}^{d_{\sigma_1}}-\Delta\phi_j^1\Delta_{\partial\Omega}\Delta\phi_j^1+\Delta\phi_j^1\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\Delta\phi_j^1-\frac{2}{d_{\sigma_2}}\sum_{j=1}^{d_{\sigma_2}}-\Delta\phi_j^2\Delta_{\partial\Omega}\Delta\phi_j^2+\Delta\phi_j^2\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\Delta\phi_j^2.$$

Observe que

$$\Delta_{\partial\Omega}(\Delta\phi_j^1)^2=2\Delta\phi_j^1\Delta_{\partial\Omega}\Delta\phi_j^1+2|\nabla_{\partial\Omega}\Delta\phi_j^1|^2$$

e

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(\Delta\phi_j^1)^2=2\Delta\phi_j^1\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\Delta\phi_j^1+2\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\Delta\phi_j^1\right)^2.$$

Utilizando a condição (8.29), obtemos

$$\frac{1}{d_{\sigma_1}}\sum_{j=1}^{d_{\sigma_1}}\Delta\phi_j^1U_1^2-\frac{1}{d_{\sigma_2}}\sum_{j=1}^{d_{\sigma_2}}\Delta\phi_j^2V_1^2=$$

$$\frac{1}{d_{\sigma_1}}\sum_{j=1}^{d_{\sigma_1}}|\nabla_{\partial\Omega}\Delta\phi_j^1|^2-\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\Delta\phi_j^1\right)^2-\frac{1}{d_{\sigma_2}}\sum_{j=1}^{d_{\sigma_2}}|\nabla_{\partial\Omega}\Delta\phi_j^1|^2-\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\Delta\phi_j^1\right)^2.$$

Portanto, para Ψ ser de posto finito é necessário

$$\frac{1}{d_{\sigma_1}}\sum_{j=1}^{d_{\sigma_1}}|\nabla_{\partial\Omega}\Delta\phi_j^1|^2-\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\Delta\phi_j^1\right)^2=\frac{1}{d_{\sigma_2}}\sum_{j=1}^{d_{\sigma_2}}|\nabla_{\partial\Omega}\Delta\phi_j^1|^2-\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\Delta\phi_j^1\right)$$

em $\partial\Omega$.

Teorema 8.8. *Seja $\Omega\subset\mathbb{R}^n, n>2$, aberto, limitado, conexo, com fronteira regular e G-simétrico. Se G é um subgrupo finito de $O(n)$ e ϕ_j^i, $i=1,2$ e $j=1,2,...,d_{\sigma_i}$ são autofunções associadas as λ que satisfazem as condições (8.29) e (8.31). Então uma condição necessária para Ψ ser nulo é*

$$\frac{1}{d_{\sigma_1}}\sum_{j=1}^{d_{\sigma_1}}|\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{\partial\phi_j^1}{\partial N}|^2-\frac{1}{d_{\sigma_2}}\sum_{j=1}^{d_{\sigma_2}}|\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{\partial\phi_j^2}{\partial N}|^2=0$$

em $\partial\Omega$ para todo $\tau\in T_x(\partial\Omega)$.

Demonstração. Podemos escrever

$$\nabla_{\partial\Omega}\Delta\phi_j^i=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\partial}{\partial\tau_k}\Delta\phi_j^i\tau_k$$

onde $\{\tau_k\}_{k=1}^{n-1}$ é uma base ortonormal para $T_x(\partial\Omega)$. Assim

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{d_{\sigma_1}}\sum_{j=1}^{d_{\sigma_1}}|\frac{\partial}{\partial\tau_k}\Delta\phi_j^1|^2-\frac{1}{d_{\sigma_2}}\sum_{j=1}^{d_{\sigma_2}}|\frac{\partial}{\partial\tau_k}\Delta\phi_j^1|^2\right)=$$
$$\frac{1}{d_{\sigma_1}}\sum_{j=1}^{d_{\sigma_1}}|\frac{\partial}{\partial\tau_l}\Delta\phi_j^1|^2-\frac{1}{d_{\sigma_2}}\sum_{j=1}^{d_{\sigma_2}}|\frac{\partial}{\partial\tau_l}\Delta\phi_j^1|^2$$

para todo $l=1,2,...,n-1$. Como estamos supondo $n>2$ obtemos

$$\frac{1}{d_{\sigma_1}}\sum_{j=1}^{d_{\sigma_1}}|\frac{\partial}{\partial\tau}\Delta\phi_j^1|^2-\frac{1}{d_{\sigma_2}}\sum_{j=1}^{d_{\sigma_2}}|\frac{\partial}{\partial\tau}\Delta\phi_j^1|^2=0$$

para todo $\tau\in T_x(\partial\Omega)$.

$\square$

Apêndice A

Apêndice

Aqui encontra-se o enunciado do Teorema de Puiseux que foi fundamental na demonstração da existência de curvas analíticas de autovalores do Laplaciano com condição de Neumann. A referência para este capítulo encontra-se em [29].

Definição 5. *Sejam $p(x, y)$ e $q(x, y)$ dois polinômios homogênenos de grau m e n, respectivamente. Considere $m + n$ polinômios homogêneos de grau $m + n - 1$ dados por*

$$x^{n-s-1}y^s p(x, y)\ (0 \leq s < n)\ x^{n-r-1}y^r q(x, y)\ (0 \leq r < m),$$

seus coeficientes formam uma matrix quadrada. O determinante dessa matrix, denotado por $R(p, q)$, é chamado resultante de p e q.

Definição 6. *Dado um polinômio homogêneo qualquer $k(x, y)$ define-se o discriminante de k por $D(k) = R(\frac{\partial k}{\partial x}, \frac{\partial k}{\partial y})$.*

Uma série de potência $\sum_{n,m} a_{n,m}x^m y^n$ em duas variáveis é dita convergente se existir duas constantes positivas S e R tais que os números $a_{m,n}R^m S^n$ são limitados. Neste caso, a série é convergente na região $|x| < R$ e $|y| < S$ e defini uma função holomorfa nesta região. Reciprocamente, uma função $f(x, y)$ é dita holomorfa em uma vizinhança do 0 se pode ser expandida como uma série de potências convergentes. O conjunto de tais séries é um anel e será denotado por $\mathbb{C}\{x, y\}$.

Uma função analítica $f(x, y)$ é dita regular em y de ordem m se podemos escrever $f(0, y) = y^m A(y)$ onde $A(0) \neq 0$ tal que $\frac{1}{A(y)}$ também é holomorfa.

Teorema A.1. *Seja $f(x, y)$ função analítica em x, y. Se $f(0, 0) = 0$ e $f(0, y) \neq 0$ para $y \neq 0$, então* *a equação $f(x,y) = 0$ admite pelo menos uma solução da forma $y = g(x^{\frac{1}{m_1}})$, onde g é analítica. Além disso, se f for regular de ordem m em y escrevemos $f = UF$ onde U é uma unidade em $\mathbb{C}\{x,y\}$ e F é um polinômio mônico de grau m em y, existem m soluções $g_j(x^{\frac{1}{m_j}})$ distintas a menos que o discriminante de F seja identicamente nulo e*

$$F(y) \equiv \prod_{j=1}^{m} (y - g_j(x^{\frac{1}{m_j}})).$$

Referências Bibliográficas

[1] V.I.Arnol'd, Modes and Quasimodes, Func. Anal. Appl.,6 (1972), pp. 94-101(translation)

[2] S. Agmon, A. Douglis and Nirenberg, Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfyng general boundary conditions, Comm. Pure Appl. Math., vol. 12 (1959), 623-727. American Journal Mathematics, vol. 98, No. 04 (1976), 1059-1078. 11

[3] E. Browder, Estimates and existence theorems for elliptic boundary value problems, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, vol. 45 (1959), 385-372. 11

[4] B. H. Driscoll, Eigenvalues on a Domain with Discrete Rotational Symmetry, SIAM J. Math. Analysis, v. 18, 941-953 (1987) 1, 4, 5

[5] J. Hadamard (1908), M'emoire sur le probl'eme d'analyse relatif 'a l'equilibre des plaques 'elastiques encastr'ees, Ouvres de J. Hadamard 2 ed. C.N.R.S. Paris (1968). 1

[6] D.B Henry, Perturbation of the Boundary in Boundary-Value Problems of Partial Differential Equations, Cambridge University Press,2005. v, vii, 1, 2, 6, 7, 9, 11, 12, 15, 16, 20, 32, 69, 75, 105, 107, 108, 115

[7] A. Henrot, Extremum Problems for Eigenvalues of Elliptic Operators, Frontiers in Mathematics, Birkhäuser Verlag, Basel (2006).

[8] E. Hewit and K. A. Ross, Abstract Harmonic Analysis vol. II, Springer Verlag (1970). 23, 24

[9] L. Hormander, Linear Partial Differential Operators, Springer-Verlag, Grundlehren 116 (1964).

[10] T. Kato, Perturbation Theory of Linear Operators,Springer-Verlag Grundlehren 132, 1966. 6, 32, 38, 42, 52, 58, 64

[11] P. D. Lamberti, A few spectral perturbation problems, Doctoral Dissertation, University of Padova, Italy, 2002. 1

[12] J. L. Lions and E. Megenes, Nonhomogeneous Boundary Value Problems and Applications, vol. 1, Springer-Verlag, New York (1972). 72, 111

[13] A. M. Micheletti, Perturbazione dello spettro dell operatore de Laplace in relazione ad una variazione del campo, Ann. Scuola Norm. Pisa 26(1972), 151-169. 1, 3

[14] A. M. Micheletti, Pertubazione dello spettro di un operatore ellittico di tipo variazionale, in relazione ad una variazone del campo, Ann. Mat. Pura Appl. 4, 97(1973), 267-281., Ann. Mat. Pura Appl. 4,97(1973), 267-281. 1

[15] A. M. Micheletti, Metrica per famiglie di domini limitati e propriet'a generiche degli autovalori, Annali della Scuola Norm. Sup. Pisa Ser. II, v. 26 (1972), 683-694.

[16] A. L.Pereira, Eigenvalues of the Laplacian on symmetric regions, NoDEA- Nonlinear Differential Equations and Applications 2 (1995) 63-109. 1, 2, 4, 6, 24, 25, 30, 39, 45, 50, 105, 119, 121, 122

[17] A. L.Pereira, Autovalores do Laplaciano em regiões simétricas, Instituto de Matemática e Estatistica da Universidade de São Paulo, São Paulo, Brasil (Tese de Doutorado). 1, 2, 4, 5, 6, 25, 29, 30, 50, 105

[18] A. L. Pereira ; M.C. Pereira, An eigenvalue problem for the biharmonic operator on Z2-symmetric regions. Journal of the London Mathematical Society, v. 122, p. 0.1112/jlms/jdm, 2008 1, 2, 6, 55, 105, 123

[19] M.C. Pereira, Perturbação de Contorno para o Problema de Dirichlet para o Bilaplaciano,Instituto de Matemática e Estatistica da Universidade de São Paulo, São Paulo, Brasil (Tese de Doutorado). 1, 2, 6, 55, 105, 124

[20] M. C. Pereira, Generic simplicity of the eigenvalues for a supported plate equation, Journal of Nonlinear Analysis, vol. 67 (2007), 889-900. 55

[21] J. W. S. Rayleigh, Theory of Sound, Dover (1945) (second edition of 1894). 1

[22] F. Rellich, Perturbation theory of eigenvalue problems, Gordon and Breach Science Publ., New York, 1969.

[23] B. Rousselet, Shape Design Sensitivity of a Membrane, J. Opt. Theory and Appl., 40 (1983), 595-623. 1

[24] Saut and Teman, Generic properties of nonlinear boundary value problems, Comm. Partial Differential Equations, 4(1979) no. 3, 293-319. 1

[25] J.Simon, Differentiation with respect to the domain in boundary value problems, Num. Funct. Anal. Optimz., 2 (1980) 649-687. 1

[26] J. Sokolowski, J.P. Zolesio, Introduction to shape optimization. Shape sensitivity analysis, Springer Ser. Comput. Math., 16, Springer-Verlag, Berlin, 1992. 1

[27] M. Tanikawa, The Spectrum of the Laplacian of a $\mathbb{Z}_3$ domain, Proc Japan Acad. 57, Ser. A, 13-18 (1981) 1, 4, 5

[28] K. Uhlenbeck, Generic Properties Eigenfunctions, American Journal Mathematics, vol.98, No. 04(1976), 1059-1078. 1, 2

[29] C.T.C Wall, Singular Points of Plane Curves, London Mathematical Society Student Texts (2004). 133