Categorias derivadas de categorias de funtores

Paula Olga Gneri

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
DOUTOR EM CIÊNCIAS

Programa: Matemática
Orientador: Prof. Dr. Marcos Benevenuto Jardim

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro do CNPq e da CAPES.

São Paulo, maio de 2011

Categorias derivadas de categorias de funtores

Esta tese contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa realizada por Paula Olga Gneri em 17/06/2011. O original encontra-se disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Marcos Benevenuto Jardim (orientador) - IMECC -UNICAMP
- Prof. Dr. Vyacheslav Futorny - IME - USP
- Prof. Dra. Ana Cristina López Martín - FC -Universidad de Salamanca
- Prof.Dr. Rogério Picanço - DMA - UFV
- Prof.Dr. Viktor Bekker - ICEx - UFMG

AGRADECIMENTOS

Ao meu marido, Rodolfo, pelo amor, enorme paciência e dedicação.

Aos meus pais, Maria Rosa e Mario, pelo amor e carinho, principalmente por me ensinar a lutar pelos meus direitos e nunca desistir de um mundo melhor.

Aos professores, funcionários do IME e do IMECC.

Em especial agradeço ao meu orientador Marcos, pela dedicação, paciência e competência para orientar a uma aluna que vinha de outra área. Principalmente pela sua amizade.

A los profesores de la Universidad de Salamanca por el apredizaje, en especial a Cristina y a Carlos que me recibieron con mucho cariño y atención y tuvieron una contribución esencial a mi formación.

À Comissão Julgadora pela leitura do trabalho e por suas sugestões.

A mis familiares, que siempre me incentivaron a seguir, tanto los que están cerca cuanto los que están lejos. En particular, agradezco a Lore y a Gabriel que cuidaron de todo con mucho cariño en los momentos en que estuvimos lejos de casa.

A minha nova família Lia, Wado, Mauro e João, que me acolheu com muito carinho e pela qual tenho muito amor.

Aos meus colegas de curso e grandes amigos Daniela, Dé, Gláucia, Beto, Ivan, Patricia, Pedro, Re, Ricardinho e Vitor pelo apoio e horas de estudo a meu lado, além dos bons momentos que me proporcionaram.

A meus amigos, em especial Cha, Tina, Dani, Jim, Lelé, Marte e Shayki pelo carinho, pelos momentos de diversão e muita alegria.

Agradeço a meus cachorros e gatos pela companhia e pelo carinho incondicional.

Ao CNPq e à CAPES pelo apoio financeiro.

Dedicatória

Dedico este trabalho a todos que lutaram e lutam pela liberdade na América Latina. Em particular, aos meus pais que sempre, e ainda hoje, continuam a lutar.

"Hermano dame tu mano,
vamos juntos a buscar
una cosa pequeñita
que se llama libertad.
Esta es la hora primera,
este es el justo lugar
abre la puerta que afuera
la tierra no aguanta más.

Mira adelante hermano
es tu tierra la que espera
sin distancias, ni fronteras
que pongas alta la mano.
Sin distancias, ni fronteras,
esta tierra es la que espera
que el clamor americano
le baje pronto la mano
al señor de las cadenas... "

Jorge Sosa - Damián Sánchez

RESUMO

Dadas $\mathcal{C}$ uma categoria pequena e $\mathcal{A}$ uma categoria qualquer, podemos considerar a categoria $\mathcal{C}(\mathcal{A})$, cujos objetos são funtores de $\mathcal{C}$ em $\mathcal{A}$ e cujos morfismos são transformações naturais. Seja $\mathcal{B}$ outra categoria, e novamente, consideramos a categoria $\mathcal{C}(\mathcal{B})$. Agora, dado um funtor $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ construímos o funtor induzido $F_{\mathcal{C}} : \mathcal{C}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathcal{B})$.

Acrescentando a hipótese de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ serem categorias abelianas temos que as categorias $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ e $\mathcal{C}(\mathcal{B})$ são também abelianas. Logo tem sentido falar da categoria derivada $D(\mathcal{C}(\mathcal{A}))$. Além disso, se $\mathcal{A}$ tem suficientes injetivos prova-se que $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ também tem suficientes injetivos, o que possibilita pensar no funtor derivado $R(F_{\mathcal{C}}) : D(\mathcal{C}(\mathcal{A})) \longrightarrow D(\mathcal{C}(\mathcal{B}))$.

Neste trabalho temos dois objetivos principais:

1. encontrar uma relação entre as categorias $D(\mathcal{C}(\mathcal{A}))$ e $\mathcal{C}(D(\mathcal{A}))$;

2. relacionar os funtores $R(F_{\mathcal{C}})$ e $(RF)_{\mathcal{C}} : \mathcal{C}(D(\mathcal{A})) \longrightarrow \mathcal{C}(D(\mathcal{B}))$.

Inicialmente demonstramos que $Kom(\mathcal{C}(\mathcal{A}))$ e $\mathcal{C}(Kom(\mathcal{A}))$ são categorias isomorfas, onde $Kom(\mathcal{A})$ denota a categoria dos complexos de $\mathcal{A}$. Mostramos também que se $\mathcal{Q}$ é uma categoria gerada por um quiver sem relações, $D(\mathcal{Q}(\mathcal{A}))$ é uma subcategoria plena de $\mathcal{Q}(D(\mathcal{A}))$.

Finalmente, mostramos que $D(\mathcal{C}(\mathcal{A}))$e $\mathcal{C}(D(\mathcal{A}))$ são categorias equivalentes se, e somente se, $\mathcal{C} = \mathcal{Q}$ e $\mathcal{Q}$ é uma categoria gerada por um *quiver* sem flechas.

Partindo para o segundo objetivo, mostramos que se o funtor $(RF)_{\mathcal{Q}}$ é uma equivalência de categorias então $R(F_{\mathcal{Q}})$ também é uma equivalência.

Como aplicação destes resultados temos uma versão do Teorema de Mukai para Q-feixes quase-coerentes.

Palavras-chave: categorias derivadas, categorias de funtores, Q-feixes quase-coerentes.

ABSTRACT

Let $\mathcal{C}$ be small category and $\mathcal{A}$ an arbitrary category. Consider the category $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ whose objects are functors from $\mathcal{C}$ in $\mathcal{A}$ and whose morphisms are natural transformations. Let $\mathcal{B}$ be other category, and again, consider the category $\mathcal{C}(\mathcal{B})$. Now, given a functor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ we construct the induced functor $F_{\mathcal{C}} : \mathcal{C}(\mathcal{A}) \to \mathcal{C}(\mathcal{B})$.

Assuming $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$ to be abelian categories we have the categories $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ and $\mathcal{C}(\mathcal{B})$ is also abelian. Therefore, it makes sense to talk about the derived category $D(\mathcal{C}(\mathcal{A}))$. Moreover, if $\mathcal{A}$ has enough injectives one can prove that $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ also has enough injectives, which guarantees the existence of the derived functor R $(F_{\mathcal{C}}) : D(\mathcal{C}(\mathcal{A})) \to D(\mathcal{C}(\mathcal{B}))$.

In this work we have two main goals:

1. to find a relationship between $D(\mathcal{C}(\mathcal{A}))$ and $\mathcal{C}(D(\mathcal{A}))$;

2. relate the functors $R(F_{\mathcal{C}})$ and $(RF)_{\mathcal{C}} : \mathcal{C}(D(\mathcal{A})) \to \mathcal{C}(D(\mathcal{B}))$.

Initially we show that $Kom(\mathcal{C}(\mathcal{A}))$ and $\mathcal{C}(Kom(\mathcal{A}))$ are isomorphic categories, where $Kom(\mathcal{A})$ denotes the category of complexes of $\mathcal{A}$. We also show that if $\mathcal{Q}$ is a category generated by a quiver without relations, then $D(\mathcal{Q}(\mathcal{A}))$ is a full subcategory of $\mathcal{Q}(D(\mathcal{A}))$. And finally, we show that $D(\mathcal{C}(\mathcal{A}))$ and $\mathcal{C}(D(\mathcal{A}))$ are equivalent categories if and only if $\mathcal{C} = \mathcal{Q}$, where $\mathcal{Q}$ is a category generated by a quiver without arrows.

Towards the second goal, we show that if the functor $(RF)_{\mathcal{Q}}$ is an equivalence of categories then $R(F_{\mathcal{Q}})$ is also an equivalence.

We use this results to prove a version of Mukai's Theorem for Q-quasi-coherent sheaves.

Keywords: derived categories, functor categories, Q-quasi-coherent sheaves.

Sumário

Introdução

Sabe-se que duas variedades projetivas são isomorfas se, e somente se, as categorias dos feixes coerentes sobre cada uma delas são equivalentes [3]. Naturalmente, estendemos o estudo para categorias derivadas de feixes coerentes, onde este mesmo resultado não é verdadeiro.

Nos anos 80, Shigeru Mukai [8] demonstra que sendo X uma variedade abeliana e $\widehat{X}$ a variedade dual, o funtor integral entre as categorias derivadas $D^b(X)$ e $D^b(\widehat{X})$, o qual se define por

$$\Phi^{\mathcal{P}}_{X \to \widehat{X}}(\mathcal{E}^\bullet) = R\pi_{\widehat{X}*}(\pi_X^* \mathcal{E}^\bullet \otimes \mathcal{P}),$$

é uma equivalência, onde $\mathcal{P}$ é o fibrado de Poincaré sobre $X \times \widehat{X}$. Anos depois, este funtor passa a ser chamado de transformada Fourier-Mukai [1].

Unindo o estudo de categorias derivadas com o estudo de representações de *quivers* surge de forma natural a idéia de olhar para a categoria derivada de Q-feixes. Lembrando que um *quiver* Q é uma quádrupla $Q = (Q_0, Q_1, t, h)$ onde Q_0 é o conjunto de vértices, Q_1 é o conjunto de flechas entre os vértices e t e h são mapas de Q_1 em Q_0 que determinam, respectivamente, o início e o término de cada flecha. Em resumo, um *quiver* nada mais é que um grafo orientado.

A cada *quiver* Q é possível associar uma categoria $\mathcal{Q}$, onde cada vértice é visto como um objeto e cada morfismo é um caminho em Q, isto é, uma concatenação de flechas do *quiver*, onde duas flechas só podem ser concatenadas se uma começa onde a outra termina. Dizemos então que a categoria $\mathcal{Q}$ é gerada pelo *quiver* Q.

Definimos um Q-feixe quase-coerente como um funtor entre as categorias $\mathcal{Q}$ e $\mathfrak{Qco}(X)$, analogamente definimos Q-feixe coerente. Esta definição generaliza varias noções de feixes com estruturas adicionais, como por exemplo os Fibrados de Higgs e as triplas holomorfas [9]. Temos portanto, como motivação para nosso trabalho verificar se a transformada de Fourier-Mukai entre $D^b(X)$ e $D^b(\widehat{X})$ induz uma equivalência entre as categorias derivada dos Q-feixes quase-coerentes sobre X e $\widehat{X}$.

De maneira mais geral teremos: sejam $\mathcal{C}$ uma categoria pequena e $\mathcal{A}$ uma categoria, podemos considerar a categoria $\mathcal{C}(\mathcal{A})$, cujos objetos são funtores de $\mathcal{C}$ em $\mathcal{A}$ e cujos morfismos são transformações naturais. Seja $\mathcal{B}$ outra categoria, e novamente, consideramos a categoria $\mathcal{C}(\mathcal{B})$. Agora, dado um funtor $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ construímos o funtor induzido $F_{\mathcal{C}} : \mathcal{C}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathcal{B})$. Acrescentando a hipótese de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ serem categorias abelianas podemos provar que as categorias $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ e $\mathcal{C}(\mathcal{B})$ são também abelianas. Logo tem sentido falar da categoria derivada $D(\mathcal{C}(\mathcal{A}))$. Além disso, se $\mathcal{A}$ tem suficientes injetivos prova-se que $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ também tem suficientes injetivos, o que possibilita pensar no funtor derivado $R(F_{\mathcal{C}}) : D(\mathcal{C}(\mathcal{A})) \longrightarrow D(\mathcal{C}(\mathcal{B}))$. Sendo assim nossa pergunta geral é:

> *Seja $RF : D(\mathcal{A}) \longrightarrow D(\mathcal{B})$ uma equivalência. Será que o funtor $R(F_{\mathcal{C}}) : D(\mathcal{C}(\mathcal{A})) \longrightarrow D(\mathcal{C}(\mathcal{B}))$ é também uma equivalência?*

O texto é dividido em cinco capítulos. O primeiro capítulo será destinado para uma introdução teórica. Começaremos com um breve resumo de teoria de categorias e de teoria de categorias aditivas e abelianas. O ponto central deste capítulo é o estudo das categorias derivadas, onde o principal teorema diz que a categoria derivada $D^+(\mathcal{A})$ de uma categoria abeliana $\mathcal{A}$ com suficientes injetivos é equivalente a categoria homotópica da subcategoria dos injetivos de $\mathcal{A}$, isto é, $D^+(\mathcal{A}) \equiv K^+(\mathcal{I})$. É a partir deste resultado que torna-se possível estender um funtor exato à esquerda entre categorias abelianas $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ para um funtor exato $RF : D(\mathcal{A}) \longrightarrow D(\mathcal{B})$ chamado de funtor derivado à direita. Pode-se fazer uma construção análoga quando $\mathcal{A}$ é uma categoria abeliana com suficientes projetivos e F é um funtor exato à direita, neste caso podemos construir o funtor derivado à esquerda.

Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria pequena e $\mathcal{A}$ uma categoria qualquer, definimos a categoria $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ cujos objetos são funtores de $\mathcal{C}$ em $\mathcal{A}$ e cujos morfismos são transformações naturais. O objetivo do segundo capítulo é estudar as principais características que a categoria $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ herda da categoria $\mathcal{A}$. Inicialmente provamos que se $\mathcal{A}$ é abeliana então $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ é também abeliana. No caso em que $\mathcal{A}$ tem suficientes injetivos, $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ herda esta propriedade sob a hipótese de $\mathcal{A}$ ser completa ou sob a hipótese de $\mathcal{C}$ ter um número finito de objetos e morfismos. Ainda neste capítulo definimos a noção de funtor induzido, isto é, dado um funtor $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$, definimos o funtor induzido $F_{\mathcal{C}} : \mathcal{C}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathcal{B})$ por $F_{\mathcal{C}}(G) = F \circ G$ para qualquer $G \in Ob(\mathcal{C}(\mathcal{A}))$ e $F_{\mathcal{C}}(\eta) = \{F(\eta_c) : c \in Ob(\mathcal{C})\}$ para qualquer $\eta \in Hom_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(G, H)$. Demonstramos também que existem pelo menos duas propriedades de F relacionadas com as mesmas duas propriedades $F_{\mathcal{C}}$. Ou seja,

1. F é um funtor exato se, e somente se, $F_{\mathcal{C}}$ é exato;

2. F é uma equivalência se, e somente se, $F_{\mathcal{C}}$ é equivalência.

Dado que a abelianidade de $\mathcal{A}$ é herdada por $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ tem sentido estudar a categoria $D(\mathcal{C}(\mathcal{A}))$ e surge um questionamento natural: Qual será a relação entre as categorias $D(\mathcal{C}(\mathcal{A}))$ e $\mathcal{C}(D(\mathcal{A}))$? Sendo assim, no terceiro capítulo, estudamos estas categorias bem como a relação entre elas. Primeiramente demonstramos que as categorias $Kom(\mathcal{C}(\mathcal{A}))$ e $\mathcal{C}(Kom(\mathcal{A}))$ são isomorfas. A partir deste isomorfismo, podemos garantir a existência de um funtor $T : D(\mathcal{C}(\mathcal{A})) \longrightarrow \mathcal{C}(D(\mathcal{A}))$, que passa a ser o objeto de nosso estudo. Demonstraremos então que quando tomamos $\mathcal{C} = \mathcal{Q}$, onde $\mathcal{Q}$ é a categoria gerada por um *quiver* finito Q sem relações, $T : D(\mathcal{Q}(\mathcal{A})) \longrightarrow \mathcal{Q}(D(\mathcal{A}))$ é pleno e fiel. Além disso, T é uma equivalência se, e somente se, Q é um *quiver* que não possui flechas.

No quarto capítulo estudamos a relação entre os funtores $R(F)_{\mathcal{C}} : D^+(\mathcal{C}(\mathcal{A})) \longrightarrow D^+(\mathcal{C}(\mathcal{B}))$ e $(RF)_{\mathcal{C}} : \mathcal{C}(D^+(\mathcal{A})) \longrightarrow \mathcal{C}(D^+(\mathcal{B}))$, onde $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ é um funtor exato à esquerda entre categorias abelianas tais que $\mathcal{A}$ tem suficientes injetivos e $F_{\mathcal{C}} : \mathcal{C}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathcal{B})$ é o funtor induzido de F que é também exato à esquerda. Temos então que $R(F)_{\mathcal{C}}$ é o derivado do funtor induzido enquanto que $(RF)_{\mathcal{C}}$ é o funtor induzido do funtor derivado RF. Provamos que o seguinte diagrama comuta quando $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ tem suficientes injetivos

$$\begin{tikzcd} D^+(\mathcal{C}(\mathcal{A})) \arrow[r, "R(F_{\mathcal{C}})"] \arrow[d, "T_{\mathcal{A}}"'] & D^+(\mathcal{C}(\mathcal{B})) \arrow[d, "T_{\mathcal{B}}"] \\ \mathcal{C}(D^+(\mathcal{A})) \arrow[r, "(RF)_{\mathcal{C}}"'] & \mathcal{C}(D^+(\mathcal{B})). \end{tikzcd}$$

Usando esta comutatividade e lembrando que $T_{\mathcal{A}}$ e $T_{\mathcal{B}}$ são fiéis e plenos quando $\mathcal{C} = \mathcal{Q}$, provamos o principal teorema desta tese: se RF é uma equivalência então $R(F_{\mathcal{Q}})$ é também uma equivalência.

No último capítulo concluímos que a transformada de Fourier-Mukai entre $D^b(X)$ e $D^b(\widehat{X})$ de fato induz uma equivalência entre as categorias derivada dos Q-feixes quase-coerentes sobre X e $\widehat{X}$. Ou seja, demonstramos o seguinte teorema:

Teorema de Mukai para Q-feixes quase-coerentes. *Seja $\mathcal{Q}$ a categoria gerada por um quiver finito Q sem relações. Então o funtor derivado $R(\widehat{\mathcal{S}}_{\mathcal{Q}})$ do funtor induzido $\widehat{\mathcal{S}}_{\mathcal{Q}} : \mathcal{Q}Q(X) \longrightarrow \mathcal{Q}Q(\widehat{X})$ é uma equivalência de categorias.*

Onde $\mathcal{Q}Q(X)$ é a categoria dos funtores de $\mathcal{Q}$ em $\mathfrak{Qco}(X)$ e $\widehat{\mathcal{S}} : \mathfrak{Qco}(X) \longrightarrow \mathfrak{Qco}(\widehat{X})$ esta definida por $\widehat{\mathcal{S}}(\mathcal{E}) = \pi_{\widehat{X}*}(\mathcal{P} \otimes \pi_X^* \mathcal{E})$.

Capítulo 1

Noções Básicas

Nosso objetivo neste primeiro capítulo é fazer uma breve introdução à álgebra homológica, que será nossa principal ferramenta no desenvolvimento deste trabalho.

Inicialmente, na primeira seção, faremos um resumo das definições e dos resultados que precisaremos em teoria de categorias, principalmente para poder fixar a notação que utilizaremos. Para um estudo mais aprofundado citamos [6], [7] e [12].

Na segunda seção apresentaremos as definições de categorias aditivas e abelianas. Veremos também como construir uma resolução injetiva/projetiva em uma categoria abeliana com suficientes injetivos/projetivos. Ver [1], [2] e [11].

Começaremos a terceira e última seção estudando a categoria de complexos e a categoria homotópica, conceitos importantes para definir a categoria derivada de uma categoria abeliana. Apresentaremos então uma construção da categoria derivada e a definição de funtor derivado. Utilizamos como base as referências [1], [5],[11], [12] e [13].

1.1 Categorias e Funtores

1.1.1 Categorias

Definição 1.1. *Uma categoria $\mathcal{C}$ consiste de:*

1. *Uma classe de objetos, $Ob(\mathcal{C})$;*

2. *Para cada par de objetos (X,Y) um conjunto denotado por $Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$, onde os elementos são chamados de morfismos com domínio em X e contradomínio em Y;*

3. *Para cada tripla ordenada de objetos (X,Y,Z) temos uma aplicação*

$$\begin{array}{rccc} \circ: & Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)\times Hom_{\mathcal{C}}(Y,Z) & \longrightarrow & Hom_{\mathcal{C}}(X,Z) \\ & (f,g) & \longmapsto & g\circ f \end{array}$$

   que é chamada de composição ou produto.

As seguintes condições devem ser satisfeitas:

C 1 *Se $(X,Y)\neq(Z,W)$ então $Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$ e $Hom_{\mathcal{C}}(Z,W)$ são disjuntos;*

C 2 *Associatividade: Se $f\in Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$, $g\in Hom_{\mathcal{C}}(Y,Z)$ e $h\in Hom_{\mathcal{C}}(Z,W)$ então $h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$;*

C 3 *Unidade: Para objeto X, temos um morfismo $1_X\in Hom_{\mathcal{C}}(X,X)$ tal que*

$$\begin{array}{ll} f\circ 1_X=f, & \forall f\in Hom_{\mathcal{C}}(X,Y), \\ 1_X\circ g=g, & \forall g\in Hom_{\mathcal{C}}(Y,X). \end{array}$$

Denotamos por $Mor(\mathcal{C})$ a classe de todos os morfismos de uma categoria $\mathcal{C}$, isto é,

$$Mor(\mathcal{C}):=\cup_{X,Y\in Ob(\mathcal{C})}Hom_{\mathcal{C}}(X,Y).$$

Notação. Se $f\in Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$, escrevemos $f:X\longrightarrow Y$.

Exemplo 1.1. *O exemplo mais intuitivo é a categoria dos conjuntos, Set.*

$Ob(Set)$ é a classe dos conjuntos, neste caso cada objeto é um conjunto e se A e B são objetos de Set então

$$Hom_{Set}(A,B)=\{f:A\longrightarrow B; f \text{ função}\}.$$

É facil verificar que a composição usual de mapas satisfaz os axiomas de categorias.

Exemplo 1.2. *Outro exemplo é a categoria dos grupos, Grp.*

Nesta categoria os objetos são grupos e os morfismos são os homomorfismos de grupos.

Exemplo 1.3. *Seja X um espaço topológico, definimos a categoria $\mathfrak{Top}(X)$ cujos objetos são os conjuntos abertos de X e cujos morfismos são apenas as funções de inclusão. Ou seja, dados U, V conjuntos abertos de X temos*

$$Hom_{\mathfrak{Top}(X)}(U,V) = \begin{cases} \{i_{UV}\}, & \text{se } U \subseteq V; \\ \emptyset, & \text{se } U \nsubseteq V. \end{cases}$$

Exemplo 1.4. *Chamaremos de $\mathbb{R}$ a categoria cujos objetos são os números reais , isto é, $Ob(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ e dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ definimos*

$$Hom_{\mathbb{R}}(\alpha,\beta) = \begin{cases} \{i^{\alpha,\beta}\} & \text{se } \alpha \geq \beta; \\ \emptyset & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

De forma mais geral, qualquer conjunto parcialmente ordenado X define uma categoria cujos objetos são os elementos do conjunto X e dados dois elementos x e y, um único morfismo entre eles é definido se $x \geq y$. Neste caso, a lei de composição é satisfeita pela transitividade da relação de ordem.

Exemplo 1.5. *Um quiver Q é uma quádrupla $Q = (Q_0, Q_1, t, h)$ onde*

- *Q_0 é o conjunto de vértices;*
- *Q_1 é o conjunto de flechas entre os vértices;*

e t e h são mapas chamados, respectivamente, de início e término:

$$\begin{array}{rccl} t: & Q_1 & \longrightarrow & Q_0 \\ & a & \longmapsto & t(a) = \text{vértice inicial;} \\ h: & Q_1 & \longrightarrow & Q_0 \\ & a & \longmapsto & h(a) = \text{vértice final.} \end{array}$$

Dados Q um quiver e $\mathcal{A}$ uma categoria, uma representação (V, ϕ), de Q em $\mathcal{A}$ consiste em

- *uma família $\{V_i \in Ob(\mathcal{A}) : i \in Q_0\}$;*
- *uma família $\{\phi_a \in Hom_{\mathcal{A}}(V_{t(a)}, V_{h(a)}) : a \in Q_1\}$.*

Podemos então definir uma nova categoria, a categoria das representações de um quiver Q sobre uma categoria $\mathcal{A}$, que denotaremos por $R(Q, \mathcal{A})$. Nesta categoria os objetos são representações de Q em $\mathcal{A}$ e, dadas (V, ϕ) e (W, ψ) duas representações, definimos um morfismo $f : (V, \phi) \to (W, \psi)$ como sendo *uma família* $f = \{f_i \in Hom_{\mathcal{A}}(V_i, W_i) : i \in Q_0\}$ *tal que, para cada flecha* $a \in Q_1$, *temos* $\psi_a \circ f_{t(a)} = f_{h(a)} \circ \phi_a$, *isto é, o seguinte diagrama comuta.*

$$\begin{tikzcd} V_{t(a)} \arrow[r, "\phi_a"] \arrow[d, "f_{t(a)}"'] & V_{h(a)} \arrow[d, "f_{h(a)}"] \\ W_{t(a)} \arrow[r, "\psi_a"'] & W_{h(a)} \end{tikzcd}$$

Exemplo 1.6. *Podemos associar a um dado quiver* Q, *uma categoria onde os objetos são os vértices do quiver e os morfismos são os caminhos do quiver. Denotaremos tal categoria por* $\mathcal{Q}$.

Definição 1.2. *Um categoria* $\mathcal{D}$ *chama-se subcategoria de outra categoria* $\mathcal{C}$ *se:*

i $Ob(\mathcal{D})$ *é uma subclasse de* $Ob(\mathcal{C})$;

ii $Hom_{\mathcal{D}}(X, Y) \subset Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$, *para todo* X, Y *objetos de* $\mathcal{D}$;

iii 1_X *de* $Hom_{\mathcal{C}}(X, X)$ *está em* $Hom_{\mathcal{D}}(X, X)$, *para todo* $X \in Ob(\mathcal{D})$.

Uma subcategoria $\mathcal{D}$ *de* $\mathcal{C}$ *é completa, ou plena, se* $Hom_{\mathcal{D}}(X, Y) = Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$, *para cada par* (X, Y) *de objetos de* $\mathcal{D}$.

Exemplo. A categoria Ab de grupos abelianos, isto é, a categoria cujos objetos são grupos abelianos e os morfismos são homomorfismos de grupos é uma subcategoria de Set e uma subcategoria plena de Grp.

Definição 1.3. *Um morfismo* $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ *em* $\mathcal{C}$ *é dito um isomorfismo se existe* $g \in Hom_{\mathcal{C}}(Y, X)$ *também em* $\mathcal{C}$ *tal que* $f \circ g = 1_Y$ *e* $g \circ f = 1_X$. *Neste caso, dizemos que os objetos* X *e* Y *são isomorfos.*

Definição 1.4. *Sejam* $\mathcal{C}$ *uma categoria e* f *um morfismo em* $\mathcal{C}$.

- *f é chamado mônico se é cancelável a esquerda, isto é,*

$$f \circ g = f \circ g_1 \Longrightarrow g = g_1;$$

- *f é chamado épico se é cancelável a direita, isto é,*

$$g \circ f = g_1 \circ f \Longrightarrow g = g_1,$$

onde g *e* g_1 *também são morfismos de* $\mathcal{C}$.

Proposição 1.5. *Um morfismo f em Set ou em Grp é mônico (épico) se, e somente se, f é injetivo (sobrejetivo).*

Proposição 1.6. *Seja $Ring$ a categoria cujos objetos são anéis e cujos morfismos são homomorfismos de anéis. Um morfismo f em $Ring$ é mônico se, e somente se, f é injetivo. Entretanto, existem morfismos épicos que não são sobrejetivos.*

Para uma demonstração destes resultados ver [6, 1.1] e [6, 1.2].

1.1.2 Funtores e Transformações Naturais

Definição 1.7. *Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ duas categorias. Um funtor covariante (contravariante) F de $\mathcal{C}$ em $\mathcal{D}$ consiste de :*

1. *Uma aplicação $X \longmapsto F(X)$ de $Ob(\mathcal{C})$ em $Ob(\mathcal{D})$;*

2. *Para cada par de objetos (X,Y) em $\mathcal{C}$ uma aplicação $f \longmapsto F(f)$ de $Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$ em $Hom_{\mathcal{D}}(F(X),F(Y))$ $(Hom_{\mathcal{D}}(F(Y),F(X)))$ tal que:*

F 1 *Se $g \circ f$ esta definido em $\mathcal{C}$ então $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ $(F(g \circ f) = F(f) \circ F(g))$;*

F 2 $F(1_X) = 1_{F(X)}$.

Notação. Um funtor F de $\mathcal{C}$ em $\mathcal{D}$ pode ser denotado por $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$.

Sejam $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ e $G : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{E}$ funtores então podemos definir sua composição pelo funtor

$$\begin{array}{rccc} GF: & \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ & X & \longmapsto & GF(X) \\ & X & \longmapsto & GF(X) \\ & {\scriptstyle f}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle GF(f)} \\ & Y & & GF(Y). \end{array}$$

Obs 1. *Usando a composição de funtores podemos definir a categoria CAT, a categoria de categorias. Isto é, uma categoria cujo objetos são categorias e cujos morfismo são funtores.*

Exemplo 1.7. *Dada uma categoria $\mathcal{C}$ temos o seguinte funtor chamado de identidade:*

$$\begin{array}{rccc} 1_{\mathcal{C}}: & \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathcal{C} \\ & X & \longmapsto & X \\ & X & \longmapsto & X \\ & f\big\downarrow & & \big\downarrow f \\ & Y & & Y. \end{array}$$

Exemplo 1.8. *Um funtor de Grp em Set: A cada grupo ele associa seu conjunto fundamental (ou seja, basta considerar o grupo sem sua operação) e a cada morfismo de grupo será a aplicação correspondente.*

Este funtor é chamado de funtor esquecimento.

Exemplo 1.9. *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria e X um objeto em $\mathcal{C}$. Podemos definir um funtor covariante:*

$$\begin{array}{rccc} Hom(X,-): & \mathcal{C} & \longrightarrow & Set \\ & Y & \longmapsto & Hom_{\mathcal{C}}(X,Y) \\ & Y & \longmapsto & Hom_{\mathcal{C}}(X,Y) \\ & f\big\downarrow & & \big\downarrow f^* \\ & Z & & Hom_{\mathcal{C}}(X,Z) \end{array}$$

onde $f^*(\varphi) = f \circ \varphi$, para qualquer $\varphi \in Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$.

Também podemos definir um funtor contravariante:

$$\begin{array}{rccc} Hom(-,X): & \mathcal{C} & \longrightarrow & Set \\ & Y & \longmapsto & Hom_{\mathcal{C}}(Y,X) \\ & Y & \longmapsto & Hom_{\mathcal{C}}(Y,X) \\ & f\big\downarrow & & f_*\big\uparrow \\ & Z & & Hom_{\mathcal{C}}(Z,X) \end{array}$$

onde $f_*(\psi) = \psi \circ f$ para qualquer $\psi \in Hom_{\mathcal{C}}(Z,X)$.

Exemplo 1.10. *Um pré-feixe de grupos abelianos $\mathscr{F}$ é um funtor contravari-*

ante da categoria $\mathfrak{Top}(X)$ *na categoria* Ab.

$$\begin{array}{cccc} \mathscr{F}: & \mathfrak{Top}(X) & \longrightarrow & Ab \\ & U & \longmapsto & \mathscr{F}(U) \end{array}$$

$$\begin{tikzcd} U \arrow[d, hook, "i"'] \arrow[r, mapsto] & \mathscr{F}(U) \\ V & \mathscr{F}(V) \arrow[u, "\mathscr{F}(i)"] \end{tikzcd}$$

Definição 1.8. *Um funtor* $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ *é fiel (pleno) se para cada par de objetos* (X, Y) *de* $\mathcal{C}$ *a aplicação*

$$Hom_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow Hom_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$$

é injetora (sobrejetora).

Definição 1.9. *Sejam* F *e* G *funtores de* $\mathcal{C}$ *em* $\mathcal{D}$. *Definimos uma transformação natural* η *de* F *em* G *como uma aplicação que a cada objeto* X *de* $\mathcal{C}$ *associa um morfismo* $\eta_X \in Hom_{\mathcal{D}}(F(X), G(X))$, *tal que para cada* $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ *o diagrama*

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(Y) \arrow[r, "\eta_Y"'] & G(Y) \end{tikzcd}$$

é comutativo na categoria $\mathcal{D}$.

Se para cada $X \in Ob(\mathcal{C})$, *temos que* η_X *é um isomorfismo então* η *chama-se isomorfismo natural.*

Podemos definir a composição de transformações naturais:

Sejam η tranformação natural de F em G e ν de G em E, onde F, G e E são funtores de $\mathcal{C}$ em $\mathcal{D}$. Para cada $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ temos

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(X) \arrow[r, "\nu_X"] \arrow[d, "G(f)"'] & E(X) \arrow[d, "E(f)"'] \\ F(Y) \arrow[r, "\eta_Y"'] & G(Y) \arrow[r, "\nu_Y"'] & E(Y) \end{tikzcd}$$

onde os dois retângulos pequenos são comutativos. Assim $\nu\eta$ é uma transformação natural entre F e E definida por $(\nu\eta)_X = \nu_X \eta_X$.

Obs 2. *No caso em que $\mathcal{C}$ é uma categoria pequena, usando a composição de transformações naturais, obtemos a categoria $\mathcal{C}(\mathcal{A})$, cujos objetos são funtores de $\mathcal{C}$ em $\mathcal{A}$ e cujos morfismos são as transformações naturais. Estudaremos esta categoria com detalhes no próximo capítulo.*

Definição 1.10. *Dizemos que duas categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são isomorfas se existem funtores $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ e $G : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ tais que $G \circ F = 1_{\mathcal{C}}$ e $F \circ G = 1_{\mathcal{D}}$.*

Pedir que duas categorias sejam isomorfas é uma condição muito forte e na maioria dos casos identificam-se as categorias isomorfas. Por exemplo, a categoria dos grupos abelianos Ab pode ser identificada com a categoria dos $\mathbb{Z}$-módulos $\mathbb{Z} - mod$.

Podemos dar uma noção, também interessante, enfraquecendo esta definição da seguinte forma:

Definição 1.11. *Duas categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são equivalentes se existirem funtores $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ e $G : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ tais que $GF \simeq 1_{\mathcal{C}}$ e $FG \simeq 1_{\mathcal{D}}$, onde $\simeq$ representa um isomorfismo natural. Sendo assim dizemos que F (ou G) determina uma equivalência de categorias.*

Proposição 1.12. *Seja $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ um funtor. Então F determina uma equivalência entre as categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ se, e somente se, F satisfaz as seguintes propriedades:*

1. *F é pleno e fiel;*
2. *F é essencialmente sobrejetora, isto é, para cada X' objeto de $\mathcal{D}$, existe X objeto de $\mathcal{C}$ tal que $F(X)$ e X' são isomorfos na categoria $\mathcal{D}$.*

Uma demonstração desta proposição pode ser encontrada em [6, 1.3, pág. 27].

Definição 1.13. *Dados funtores $R : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ e $L : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$, dizemos que L é adjunto a esquerda de R (e que R é adjunto a direita de L) se existe um isomorfismo funtorial $Hom_{\mathcal{D}}(Y, R(X)) \simeq Hom_{\mathcal{C}}(L(Y), X)$ para todo objeto X em $\mathcal{C}$ e Y em $\mathcal{D}$.*

Obs 3. *Quando falamos em isomorfismo funtorial estamos dizendo que se*

$h \in Hom_{\mathcal{C}}(X, X')$ *temos o seguinte diagrama comutativo:*

$$\begin{tikzcd} Hom_{\mathcal{D}}(Y, R(X)) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "(Rh)^*"'] & Hom_{\mathcal{C}}(L(Y), X) \arrow[d, "h^*"] \\ Hom_{\mathcal{D}}(Y, R(X')) \arrow[r, "\sim"] & Hom_{\mathcal{C}}(L(Y), X'), \end{tikzcd}$$

para todo $Y \in Ob(\mathcal{D})$.

1.1.3 Produto e Coproduto

Definição 1.14. *Sejam* $\mathcal{C}$ *uma categoria e* $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ *uma família de objetos de* $\mathcal{C}$. *Definimos o produto* $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ *como sendo um conjunto* $\{X, p_\alpha : \alpha \in I\}$ *onde* $X \in Ob(\mathcal{C})$ *e* $p_\alpha \in Hom_{\mathcal{C}}(X, X_\alpha)$, *para* $\alpha \in I$, *tais que para qualquer outro conjunto* $\{Y, f_\alpha : \alpha \in I\}$, *com* $Y \in Ob(\mathcal{C})$ *e* $f_\alpha \in Hom_{\mathcal{C}}(Y, X_\alpha)$, *para cada* $\alpha \in I$, *existe único morfismo* $f \in Hom_{\mathcal{C}}(Y, X)$ *tal que o diagrama*

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f_\alpha"'] & X \arrow[d, "p_\alpha"] \\ & X_\alpha \end{tikzcd}$$

é comutativo para cada $\alpha \in I$.

Proposição 1.15. *Seja* $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ *uma família de objetos de* $\mathcal{C}$. *Se o produto* $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ *existe em* $\mathcal{C}$ *então ele é único a menos de isomorfismo.*

Para uma demonstração desta proposição veja [6, 1., pag 33].

O conceito dual do conceito de produto é chamado *coproduto*, a definição em detalhes segue abaixo. No caso de coproduto temos uma proposição análoga a proposição 1.15, ou seja, a menos de isomorfismo o coproduto, quando existe, é único.

Definição 1.16. *Sejam* $\mathcal{C}$ *uma categoria e* $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ *uma família de objetos de* $\mathcal{C}$. *Definimos o coproduto de* $\coprod_{\alpha \in I} X_\alpha$ *como sendo um conjunto* $\{X, i_\alpha : \alpha \in I\}$ *onde* $X \in Ob(\mathcal{C})$ *e* $i_\alpha \in Hom_{\mathcal{C}}(X_\alpha, X)$, *para* $\alpha \in I$, *tais que para qualquer outro conjunto* $\{Y, f_\alpha : \alpha \in I\}$, *com* $Y \in Ob(\mathcal{C})$ *e* $f_\alpha \in Hom_{\mathcal{C}}(X_\alpha, Y)$, *para* $\alpha \in I$, *existe único morfismo* $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ *tal que o diagrama*

$$\begin{tikzcd} X_\alpha \arrow[d, "i_\alpha"'] \arrow[dr, "f_\alpha"] & \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

é comutativo para cada $\alpha \in I$.

1.2 Categorias Aditivas e Abelianas

Definição 1.17. *Uma categoria* $\mathcal{C}$ *é dita aditiva se satisfaz as seguintes condições:*

(i) *Dados* X *e* Y *dois objetos de* $\mathcal{C}$, *existe uma estrutura de grupo abeliano em* $Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ *tal que a função composição* $Hom_{\mathcal{C}}(X, Y) \times Hom_{\mathcal{C}}(Y, Z) \longrightarrow Hom_{\mathcal{C}}(X, Z)$ *é bilinear para qualquer* $Z \in Ob(\mathcal{C})$;

(ii) *Existe um objeto zero* 0 *tal que* $Hom_{\mathcal{C}}(0, 0)$ *é o grupo trivial. Isto implica que* $Hom_{\mathcal{C}}(0, X)$ *e* $Hom_{\mathcal{C}}(X, 0)$ *são também grupos triviais e que dados dois objetos zero eles são isomorfos;*

(iii) *Dados* X_1 *e* X_2 *objetos de* $\mathcal{C}$ *existe um objeto* X *e morfismos*

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, shift left, "i_1"] & X \arrow[l, shift left, "p_1"] \arrow[r, shift left, "p_2"] & X_2 \arrow[l, shift left, "i_2"] \end{tikzcd}$$

tais que:

$p_1 \circ i_1 = 1_{X_1}, \quad p_2 \circ i_2 = 1_{X_2}, \quad p_1 \circ i_2 = p_2 \circ i_1 = 0$ *e*

$i_1 \circ p_1 + i_2 \circ p_2 = 1_X$.

Definição 1.18. *Um funtor* $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ *entre duas categorias aditivas é dito aditivo se para qualquer par* $f, g \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ *temos que:*

$$F(f + g) = F(f) + F(g).$$

Definição 1.19. *Seja* $\mathcal{C}$ *uma categoria e* $\phi \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$. *Definimos o núcleo de* ϕ *pelo par* (K, i) *onde* $K \in Ob(\mathcal{C})$ *e* $i \in Hom_{\mathcal{C}}(K, X)$ *são tais que para cada* *objeto M de $\mathcal{C}$ a sequência de grupos abelianos*

$$0 \longrightarrow Hom_{\mathcal{C}}(M,K) \xrightarrow{i^*} Hom_{\mathcal{C}}(M,X) \xrightarrow{\phi^*} Hom_{\mathcal{C}}(M,Y)$$

é exata.

Esta definição equivale a dizer que $\phi \circ i = 0$ e que i satisfaz a seguinte propriedade universal:

para qualquer $i' \in Hom_{\mathcal{C}}(K',X)$ tal que $\phi \circ i' = 0$ existe único $h \in Hom_{\mathcal{C}}(K',K)$ tal que $i' = i \circ h$.

Definição 1.20. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria e $\phi \in Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$. Definimos o conúcleo de ϕ pelo par (C,p) onde $C \in Ob(\mathcal{C})$ e $p \in Hom_{\mathcal{C}}(Y,C)$ são tais que para cada objeto M de $\mathcal{C}$ a sequência de grupos abelianos*

$$0 \longrightarrow Hom_{\mathcal{C}}(C,M) \xrightarrow{p_*} Hom_{\mathcal{C}}(Y,M) \xrightarrow{\phi_*} Hom_{\mathcal{C}}(X,M)$$

é exata.

Equivalentemente, $p \circ \phi = 0$ e p satisfaz a seguinte propriedade universal:

para qualquer $p' \in Hom_{\mathcal{C}}(Y,C')$ tal que $p' \circ \phi = 0$ existe único $h \in Hom_{\mathcal{C}}(C,C')$ tal que $p' = h \circ p$.

Obs 4. *Notemos que o núcleo (conúcleo) de um morfismo, se ele existe, é único a menos de isomorfismo. Esta afirmação vem da propriedade universal de núcleo (conúcleo).*

Notação. Em geral, costumamos denotar o objeto K da definição de núcleo por $Ker(\phi)$ e o objeto C da definição de conúcleo por $Coker(\phi)$.

Definição 1.21. *Uma categoria aditiva $\mathcal{C}$ é dita abeliana se:*

Ab-1 *Todo morfismo tem núcleo e conúcleo;*

Ab-2 *Todo monomorfismo é núcleo de seu conúcleo;*

Ab-3 *Todo epimorfismo é conúcleo de seu núcleo;*

Ab-4 *Todo morfismo pode ser expresso como a composição de um epimorfismo com um monomorfismo.*

Exemplo 1.11. *A categoria dos grupos abelianos Ab é uma categoria abeliana.*

Exemplo 1.12. *A categoria dos anéis comutativos não é uma categoria aditiva. Pois para isso precisaríamos que produto e coproduto fossem isomorfo, porem nesta categoria, o produto é o produto cartesiano, já o coproduto é o produto tensorial mas*

$$\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z} \not\simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

Exemplo 1.13. *Dado R um anel comutativo, a categoria dos R-módulos é abeliana.*

Exemplo 1.14. *A categoria dos feixes de $\mathcal{O}_X$-módulos de um espaço anelado $(X, \mathcal{O}_X)$, $\mathfrak{Mod}(X)$, é abeliana.*

Exemplo 1.15. *A categoria de feixes quase-coerentes/coerentes de $\mathcal{O}_X$-módulos em uma variedade algébrica X, $\mathfrak{Qco}(X)$ / $\mathfrak{Coh}(X)$, é abeliana.*

Definição 1.22. *Sejam $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana e $f \in Hom_{\mathcal{A}}(X, Y)$ um morfismo. Definimos a imagem de f, $Im(f)$ como o núcleo do conúcleo de f.*

Definição 1.23. *Seja $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana. Um diagrama da forma*

$$\cdots \xrightarrow{f_{n-2}} X_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} X_n \xrightarrow{f_n} X_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} \cdots$$

é chamado de sequência exata se para cada três objetos consecutivos temos $Im(f_i) = Ker(f_{i+1})$. Às sequências exatas da forma

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} X'' \xrightarrow{g} X' \longrightarrow 0$$

damos o nome de sequência exata curta. Neste caso temos que f é monomorfismo, g é epimorfismo e $Im(f) = Ker(g)$.

Definição 1.24. *Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ categorias abelianas e $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ um funtor covariante. Dada uma sequência exata curta $0 \longrightarrow X \longrightarrow X'' \longrightarrow X' \longrightarrow 0$ em $\mathcal{A}$, dizemos que F é:*

1. ***exato a esquerda*** *se $0 \longrightarrow F(X) \longrightarrow F(X'') \longrightarrow F(X')$ é exato em $\mathcal{B}$;*
2. ***exato a direita*** *se $F(X) \longrightarrow F(X'') \longrightarrow F(X') \longrightarrow 0$ é exato em $\mathcal{B}$;*
3. ***exato*** *se for exato a esquerda e a direita.*

De maneira similar definimos para funtores contravariantes.

1.2.1 Resoluções Injetivas e Projetivas

Definição 1.25. *Um objeto I de uma categoria abeliana $\mathcal{A}$ é dito injetivo se o funtor $Hom(-,I)$, definido no exemplo 3 de funtor, é exato. Isto significa que dado um monomorfismo $f \in Hom_{\mathcal{A}}(X,Y)$ e um morfismo $g \in Hom_{\mathcal{A}}(X,I)$ existe um morfismo $h \in Hom_{\mathcal{A}}(Y,I)$ tal que o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[dl, dashed, "h"] \\ & I & \end{tikzcd}$$

Dualmente, definimos que um objeto P de $\mathcal{A}$ é projetivo se o funtor $Hom(P,-)$ é exato. Isto é, dado um epimorfismo $f \in Hom_{\mathcal{A}}(X,Y)$ e um morfismo $g \in Hom_{\mathcal{A}}(P,Y)$ existe um morfismo $h \in Hom_{\mathcal{A}}(P,X)$ tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "g"] & \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Temos a seguinte proposição de fácil demonstração.

Proposição 1.26. *Se $\{I_i\}_{i\in I}$ é uma família de objetos injetivos em uma categoria abeliana $\mathcal{A}$, então o produto $\prod_{i\in I} I_i$ (se existir em $\mathcal{A}$) é também injetivo.*

Para o caso de objetos projetivos temos um enunciado dual. Isto é coproduto de injetivos é injetivo.

Proposição 1.27. *Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ duas categorias abelianas. Se um funtor aditivo $R : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ adjunto a direita de um funtor exato $L : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ e I é um objeto injetivo de $\mathcal{B}$, então $R(I)$ é um objeto injetivo em $\mathcal{A}$.*

Dualmente, se $L : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ é adjunto a esquerda de um funtor exato $R : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ e P é um objeto projetivo em $\mathcal{A}$, então $L(P)$ é um objeto projetivo em $\mathcal{B}$.

Para uma demonstração desta veja [13, 2.3.10, pág. 41]

Definição 1.28. *Uma categoria abeliana $\mathcal{A}$ tem suficientes injetivos (projetivos) se para qualquer $X \in Ob(\mathcal{A})$ existe um monomorfismo $X \longrightarrow I$ onde I é um objeto injetivo de $\mathcal{A}$ (um epimorfismo $P \longrightarrow X$ onde P é um objeto projetivo de $\mathcal{A}$).*

Uma resolução injetiva de um objeto X de $\mathcal{A}$ é uma sequência exata

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow I^0 \longrightarrow I^1 \longrightarrow I^2 \longrightarrow I^3 \longrightarrow \dots$$

onde cada I^i é um objeto injetivo de $\mathcal{A}$.

Dualmente, uma resolução projetiva de um objeto X de $\mathcal{A}$ é uma sequência exata

$$\dots \longrightarrow P^3 \longrightarrow P^2 \longrightarrow P^1 \longrightarrow P^0 \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

onde cada P^i é um objeto projetivo de $\mathcal{A}$.

Exemplo 1.16. *A categoria de feixes quase-coerentes de $\mathcal{O}_X$-módulos em uma variedade algébrica X, $\mathfrak{Qco}(X)$ é uma categoria com suficientes injetivos.*

Exemplo 1.17. *A categoria $R - mod$, cujos objetos são R-bimódulos e cujos morfismos são homomorfismos de módulos, tem suficientes injetivos e suficientes projetivos.*

Proposição 1.29. *$\mathcal{A}$ é uma categoria abeliana com suficientes injetivos (projetivos) se, e somente se, todo objeto de $\mathcal{A}$ tem resolução injetiva (projetiva).*

Demonstração. Vamos mostrar o caso injetivo. O caso projetivo é dual.

($\Longrightarrow$) Seja X objeto de $\mathcal{A}$. Dado que $\mathcal{A}$ tem suficientes injetivos existe um objeto injetivo $I^0(X)$ em $\mathcal{A}$ e um monomorfismo
$f \in Hom_{\mathcal{A}}(X, I^0(X))$ logo temos a seguinte sequência exata:

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} I^0(X) \xrightarrow{p} \frac{X}{I^0(X)} \longrightarrow 0. \tag{1.1}$$

Chamemos $\frac{X}{I^0(X)} = X_1$ que é também um objeto de $\mathcal{A}$ e portanto existem um objeto injetivo $I^0(X_1)$ e um monomorfismo $f_1 \in Hom_{\mathcal{A}}(X_1, I^0(X_1))$, e chamando $\frac{X_1}{I^0(X_1)} = X_2$ temos a sequência exata

$$0 \longrightarrow X_1 \xrightarrow{f_1} I^0(X_1) \xrightarrow{p_1} X_2 \longrightarrow 0.$$

Recursivamente, temos as sequências exatas

$$0 \longrightarrow X_i \xrightarrow{f_i} I^0(X_i) \xrightarrow{p_i} X_{i+1} \longrightarrow 0,$$

onde $X_i = \frac{X_{i-1}}{I^0(X_{i-1})}$.

Notemos que todos estes X_i's dependem do X inicialmente escolhido, logo usaremos a notação $I^i(X) := I^0(X_i)$ e temos a seguinte sequência :

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} I^0(X) \longrightarrow I^1(X) \longrightarrow I^2(X) \longrightarrow \cdots \quad (1.2)$$

Obviamente cada $I^i(X)$ é um objeto injetivo de $\mathcal{A}$, logo para que esta sequência seja uma resolução de injetivos para X falta verificarmos que ela é exata.

De fato, vejamos que o pedaço $X \xrightarrow{f} I^0(X) \longrightarrow I^1(X)$ é exato. Para isso chamaremos o segundo morfismo de g, então temos que mostrar que $Im(f) = Ker(g)$:

Primeiramente devemos observar que $g = f_1 \circ p$, e pela sequência (1.1), $Im(f) = Ker(p)$ logo temos que $Im(f) \subset Ker(g)$. Reciprocamente , como f_1 é um monomorfismo, $Ker(f_1) = 0$ e portanto $Ker(f_1 \circ p) \subset Ker(p)$, mas este é a própria $Im(f)$.

Analogamente pode-se mostrar que cada três objetos consecutivos de (1.2) temos pedaços exatos. Portanto conseguimos encontrar uma resolução injetiva para qualquer objeto de $\mathcal{A}$.

($\Longleftarrow$) É natural. □

1.3 Teoria de Categorias Derivadas

1.3.1 As Categorias $Kom(\mathcal{A})$ e $K(\mathcal{A})$

Seja $\mathcal{A}$ uma categoria aditiva. Podemos definir um complexo $(K^\bullet, d_K)$ em $\mathcal{A}$ como uma sequência do tipo

$$\cdots \longrightarrow K^{n-1} \xrightarrow{d_K^{n-1}} K^n \xrightarrow{d_K^n} K^{n+1} \longrightarrow \cdots$$

onde $K^n \in$ ob($\mathcal{A}$), $n \in \mathbb{Z}$, e os morfismos d_K^n são morfismos em $\mathcal{A}$ tais que $d_K^{n+1} \circ d_K^n = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Estes morfismos d_K^n são chamados de diferenciais do complexo $(K^\bullet, d_K)$.

Definição 1.30. *A categoria dos complexos de $\mathcal{A}$, denotada por $Kom(\mathcal{A})$, é a categoria cujos objetos são complexos $(K^\bullet, d_K)$ em $\mathcal{A}$ e cujos morfismos $f : (K^\bullet, d_K) \to (L^\bullet, d_L)$ são famílias de morfismos em $\mathcal{A}$, $f = \{f_n \in$*

$Hom_{\mathcal{A}}(K^n, L^n) : n \in \mathbb{Z}\}$ *tais que cada quadrado do diagrama*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & K^{n-1} \arrow[r, "d_K^{n-1}"] \arrow[d, "f^{n-1}"'] & K^n \arrow[r, "d_K^n"] \arrow[d, "f^n"'] & K^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "f^{n+1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & L^{n-1} \arrow[r, "d_L^{n-1}"] & L^n \arrow[r, "d_L^n"] & L^{n+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

comuta, ou seja, $f^n \circ d_K^{n-1} = d_L^{n-1} \circ f^{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Proposição 1.31. *A categoria $Kom(\mathcal{A})$ é sempre aditiva. Além disso, se $\mathcal{A}$ é uma categoria abeliana, então $Kom(\mathcal{A})$ é também abeliana.*

Notação. Se não houver lugar a confusão denotaremos $(K^\bullet, d_K)$ por $K^\bullet$.

Obs 5. *Apartir de agora assumiremos que $\mathcal{A}$ é uma categoria abeliana.*

Definição 1.32. *Sejam $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana e $K^\bullet$ um objeto de $Kom(\mathcal{A})$. O $(n+1)$-ésimo objeto de cohomologia do complexo $K^\bullet$ é o objeto*

$$H^{n+1}(K^\bullet) = Coker(a^n) = Ker(b^{n+1}),$$

determinado pelo seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & Coker(d^n) \arrow[dr, "b^{n+1}"] & \\
K^n \arrow[r, "d^n"] \arrow[dr, "a^n"'] & K^{n+1} \arrow[u] \arrow[r, "d^{n+1}"] & K^{n+2} \\
 & Ker(d^{n+1}) \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

Dizemos que o complexo $K^\bullet$ é *acíclico* quando $H^i(K^\bullet) = 0$ para todo $i \in \mathbb{Z}$.

Para ver uma demonstração de que as duas definições coincidem, isto é, $Coker(a^n) = Ker(b^{n+1})$, consultar [11] página 123.

Um morfismo de complexos $f : K^\bullet \longrightarrow L^\bullet$ induz um morfismo entre os objetos de cohomologia $H^i(f) : H^i(K^\bullet) \longrightarrow H^i(L^\bullet)$ para cada $i \in \mathbb{Z}$. Além disso, $H^i(f \circ g) = H^i(f) \circ H^i(g)$. Logo podemos definir H^i como um funtor de $Kom(\mathcal{A})$ em $\mathcal{A}$, para cada $i \in \mathbb{Z}$. Estes funtores recebem o nome de ***funtores de cohomologia*** e tem a seguinte propriedade:

Proposição 1.33. *Sejam $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana e* $0 \longrightarrow A^\bullet \xrightarrow{f} B^\bullet \xrightarrow{g} C^\bullet \longrightarrow 0$ *uma sequência exata curta em $Kom(\mathcal{A})$ então a sequência longa*

$$\cdots \longrightarrow H^n(A^\bullet) \xrightarrow{H^n(f)} H^n(B^\bullet) \xrightarrow{H^n(g)} H^n(C^\bullet) \longrightarrow H^{n+1}(A^\bullet) \xrightarrow{H^{n+1}(f)} \cdots$$

é exata.

Definição 1.34. *Um morfismo $f : K^\bullet \longrightarrow L^\bullet$ em Kom($\mathcal{A}$) é dito um quase-isomorfismo se $H^n(f) : H^n(K^\bullet) \longrightarrow H^n(L^\bullet)$ é um isomorfismo para cada $n \in \mathbb{Z}$.*

Definição 1.35. *Seja $f \in Hom_{Kom(\mathcal{A})}(K^\bullet, L^\bullet)$. Dizemos que f é homotópico a zero (notação $f \sim 0$) se existe uma família de morfismos $h^n \in Hom_{\mathcal{A}}(K^n, L^{n-1})$ tal que $f^n = h^{n+1} \circ d_K^n + d_L^{n-1} \circ h^n$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. Como no seguinte diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & K^{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f^{n-1}"'] & K^n \arrow[r] \arrow[d, "f^n"'] \arrow[dl, "h^n"'] & K^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "f^{n+1}"] \arrow[dl, "h^{n+1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & L^{n-1} \arrow[r] & L^n \arrow[r] & L^{n+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Dizemos que dois morfismos $f, g \in Hom_{Kom(\mathcal{A})}(K^\bullet, L^\bullet)$ são homotópicos (notação $f \sim g$) se $f - g$ é homotópico a zero.

Dado que a soma de dois morfismo $f, g \in Hom_{Kom(\mathcal{A})}(K^\bullet, L^\bullet)$ homotópicos a 0 é homotópica a 0, obtemos que os morfismos de complexos homotópicos a 0 é um subgrupo, denotado por $H_t(K^\bullet, L^\bullet)$, de $Hom_{Kom(\mathcal{A})}(K^\bullet, L^\bullet)$. Além disso, vale que se $f \circ l$ é homotópico a 0 ou f ou l são homotópicos a 0, portanto os morfismos homotópicos a zero formam um ideal de $Mor(Kom(\mathcal{A}))$. Assim podemos definir:

Definição 1.36. *A categoria homotópica $K(\mathcal{A})$ é a categoria cujos objetos são os objetos de $Kom(\mathcal{A})$ e cujos morfismos são*

$$Hom_{K(\mathcal{A})}(K^\bullet, L^\bullet) = Hom_{Kom(\mathcal{A})}(K^\bullet, L^\bullet)/H_t(K^\bullet, L^\bullet).$$

Obs 6. *Mesmo partindo de uma categoria abeliana $\mathcal{A}$ a categoria $K(\mathcal{A})$ não é necessariamente abeliana.*

Proposição 1.37. *Um morfismo $f \in Hom_{Kom(\mathcal{A})}(K^\bullet, L^\bullet)$ tal que $f \sim 0$ induz nas cohomologias o morfismo zero, isto é, $H^n(f) = 0$. Portanto dois morfismos* *homotópicos induzem o mesmo morfismo nas cohomologias. Com isto, H^n é um funtor de $K(\mathcal{A})$ em $\mathcal{A}$.*

Obs 7. *É importante notar que se ϕ é um quase-isomorfismo, f e g são morfismos em $Kom(\mathcal{A})$ tais que $(f \circ \phi) \sim (g \circ \phi)$ (analogamente $(\phi \circ f) \sim (\phi \circ g)$) então $f \sim g$.*

De fato, sejam $(f \circ \phi) \sim (g \circ \phi)$ então $(f \circ \phi - g \circ \phi) \sim 0$ logo $((f - g) \circ \phi) \sim 0$. Sendo assim, ou $(f - g) \sim 0$ ou $\phi \sim 0$. Mas a segunda afirmativa não pode ocorrer pois ϕ é quase-isomorfismo logo $H^n(\phi) \neq H^n(0)$, pra todo $n \in \mathbb{Z}$. Temos portanto $f \sim g$.

1.3.2 Categorias Derivadas

Na literatura de modo geral surge a necessidade de identificar um objeto A de uma categoria abeliana com suas resoluções. Se uma categoria abeliana $\mathcal{A}$ tem suficientes injetivos (ou projetivos), podemos provar que dado um complexo $A^\bullet$ em $Kom^+(\mathcal{A})$ ($Kom^-(\mathcal{A})$) é possível encontrar um complexo de objetos injetivos $I^\bullet$ (projetivos $P^\bullet$) quase-isomorfo a $A^\bullet$. Assim, a idéia principal que nos leva ao estudo de categorias derivadas é a de transformar quase-isomorfismos em isomorfismo. Desta forma, podemos identificar os objetos com suas resoluções o que nos possibilita transformar funtores exatos à esquerda (ou à direita) em funtores exatos na categorias derivadas.

Definição 1.38. *Seja $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana. A categoria derivada da categoria $\mathcal{A}$, $D(\mathcal{A})$, e o funtor $Q : Kom(\mathcal{A}) \longrightarrow D(\mathcal{A})$ são caracterizados pelas seguintes propriedades:*

- *$Q(f)$ é um isomorfismo para qualquer quase-isomorfismo f;*
- *Qualquer funtor $F : Kom(\mathcal{A}) \longrightarrow D$ transformando quase-isomorfismos em isomorfismos pode ser fatorado por $D(\mathcal{A})$, isto é, existe um único funtor $G : D(\mathcal{A}) \longrightarrow D$ tal que $F = G \circ Q$.*

Como já comentamos, a idéia principal para a construção da categoria derivada é transformar quase-isomorfismos em isomorfismos. Para fazer isso copiaremos a idéia de localização de um anel, ou seja, dados A um anel comutativo e $S \subset A$ um sistema multiplicativo (isto é, $1 \in S$ e dados $s, t \in S$ então $s.t \in S$.) o objetivo é tornar os elementos $s \in S$ invertíveis em um novo anel. Definimos o anel localizado $S^{-1}A$ cujos elementos são classes de equivalência de pares $(a, s) \in A \times S$, onde $(a, s) \sim (a', s')$ se, e somente se, existe $t \in S$

tal que $t(as' - a's) = 0$. E as operações são :

$$\left[\frac{a}{s}\right] + \left[\frac{b}{t}\right] = \left[\frac{at+bs}{st}\right],$$

$$\left[\frac{a}{s}\right] \cdot \left[\frac{b}{t}\right] = \left[\frac{ab}{st}\right].$$

No anel localizado representamos $s \in S$ pela classe $[(s,1)] \in S^{-1}A$ cujo inverso é a classe $[(1,s)] \in S^{-1}A$.

Temos a seguinte propriedade universal:

Seja $j : A \longrightarrow S^{-1}A$ um homomorfismo de anéis tal que todo $s \in S$ é levado em $[(s,1)] \in S^{-1}A$ e seja $f : A \longrightarrow T$ outro homomoforfismo de anéis tal que se $s \in S$, $f(s)$ é invertível. Então existe único homomorfismo de anéis $g : S^{-1}A \longrightarrow T$ tal que $f = g \circ j$.

Para fazer um processo análogo na construção da categoria derivada precisamos definir o que faria o papel de "sistema multiplicativo" sobre os morfismos:

Definição 1.39. *Uma classe de morfismos $S \subset Mor(\mathcal{C})$ é dita localizada se satisfaz as seguintes condições:*

a) *S é fechada por composição:*

- $Id_X \in S$, *para todo* $X \in Ob(\mathcal{C})$,
- *se* $s, t \in S$ *então* $s \circ t \in S$ *sempre que a composição estiver definida.*

b) *Condição de extensão:*

Para todo $f \in Mor(\mathcal{C})$ e $s \in S$ existem $g \in Mor(\mathcal{C})$ e $t \in S$ tais que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, dashed, "g"] \arrow[d, dashed, "t"'] & Z \arrow[d, "s"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y. \end{tikzcd}$$

c) *Sejam $f, g \in Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$; A existência de $s \in S$ tal que $sf = sg$ equivale a existência $t \in S$ tal que $ft = gt$.*

Assim, partindo de uma categoria qualquer $\mathcal{C}$ com uma classe localizada S, podemos usar S como "sistema multiplicativo" e construir uma nova categoria $S^{-1}\mathcal{C}$ onde os morfismos pertencentes a classe localizada S são transformados em isomorfismos na nova categoria. Este processo é chamado de localização de $\mathcal{C}$ pelos morfismos de S e será descrito pelo lema a seguir.

Lema 1.40. *Seja S uma classe localizada de morfismos em uma categoria $\mathcal{C}$. Então $S^{-1}\mathcal{C}$ pode ser descrita por:*

$$Ob(S^{-1}\mathcal{C}) = Ob(\mathcal{C}),$$

e um morfismo em $Hom_{S^{-1}\mathcal{C}}(X,Y)$ é a classe de equivalência $[f/s]$, $f \in Mor(\mathcal{C})$ e $s \in S$ representada pelo "telhado":

$$\begin{tikzcd} & X' \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

onde $[f/s] \sim [g/t]$ se, e somente se, existem $r, u \in S$ tais que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} & & X'' \arrow[dl, "r"'] \arrow[dr, "u"] & & \\ & X' \arrow[dl, "s"'] \arrow[drrr, "f", near start] & & X'' \arrow[dlll, "t"', near start] \arrow[dr, "g"] & \\ X & & & & Y \end{tikzcd}$$

(i) *$Id : X \longrightarrow X$ é a classe $[Id_X, Id_X]$;*

(ii) *A composição de $[f/s] \circ [g/t]$ é a classe $[gf'/st']$:*

$$\begin{tikzcd} & & X'' \arrow[dl, dashed, "t'"'] \arrow[dr, dashed, "f'"] & & \\ & X' \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & & Y' \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "g"] & \\ X & & Y & & Z, \end{tikzcd}$$

*onde t' e f' são dados pelo item **b)** da definição de classe localizada.*

Também é possível mostrar que construindo o funtor

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] F: & \mathcal{C} \arrow[r] & S^{-1}\mathcal{C} & \\ & X \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"] & & X \arrow[dl, "Id"'] \arrow[dr, "f"] & \\ & Y & X & & Y, \end{tikzcd}$$

que obviamente leva todo $s \in S$ para um isomorfismo em $S^{-1}\mathcal{C}$, vale a propriedade universal, isto é, se $T : \mathcal{C} \longrightarrow D$ tal que $T(s)$ é um isomorfismo para todo $s \in S$ então existe único $G : S^{-1}\mathcal{C} \longrightarrow D$ tal que $T = G \circ F$.

Os quase-isomorfismos da categoria $Kom(\mathcal{A})$ não formam em geral uma classe localizada. Para contornar este problema, passamos para a categoria $K(\mathcal{A})$, onde é possível demonstrar que os quase-isomorfismos formam uma classe localizada. Temos então o seguinte teorema:

Teorema 1.41. *A localização de $K(\mathcal{A})$ por quase-isomorfismos é canonicamente isomorfa a categoria derivada $D(\mathcal{A})$.*

Obs 8. *Nesta última construção omitimos as demonstrações do Lema 1.40, da afirmação de que a classe de quase-isomorfismos é uma classe localizada em $K(\mathcal{A})$ e do Teorema 1.41. Estas demonstrações podem ser encontradas em [11] respectivamente nas páginas 148, 160 e 159.*

Resumindo, para construir a categoria derivada $D(\mathcal{A})$ de uma categoria abeliana $\mathcal{A}$ precisamos basicamente de dois passos, primeiramente identificamos os morfismos homotopicamente equivalentes de $Kom(\mathcal{A})$ passando para a categoria $K(\mathcal{A})$, pois em $K(\mathcal{A})$ a classe de quase-isomorfismos é uma classe localizada, e por último localizamos $K(\mathcal{A})$ por quase-isomorfismos. Além disso, pode-se provar que o funtor Q da definição 1.38 de categoria derivada tem a propriedade de que se $f \sim g$ em $Kom(\mathcal{A})$ então $Q(f) = Q(g)$. Assim ele fica definido como o funtor localização da seguinte forma:

$$\begin{tikzcd} Kom(\mathcal{A}) \arrow[rr] \arrow[dr] & & D(\mathcal{A}) \\ & K(\mathcal{A}) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Por abuso de notação também denominamos $Q : K(\mathcal{A}) \longrightarrow D(\mathcal{A})$. Temos então o seguinte resultado, cuja demonstração pode ser encontrada em [1] no

Apêndice A.

Proposição 1.42. *A categoria $D(\mathcal{A})$ é uma categoria aditiva e o funtor $Q : K(\mathcal{A}) \longrightarrow D(\mathcal{A})$ é um funtor aditivo.*

Definição 1.43. *Dois complexos $K^\bullet$ e $L^\bullet$ são quase-isomorfos se existem quase-isomorfismos $K^\bullet \longleftarrow S^\bullet \longrightarrow L^\bullet$.*

Obs 9. *É importante notar que um morfismo de complexos f é um quase-isomorfismo se, e somente se, o morfismo induzido na categoria derivada é um isomorfismo.*

Apesar de $D(\mathcal{A})$ não ser abeliana, existem diagramas na categoria derivada, chamados de triângulos exatos, que fornecem uma estrutura notável, que reflete as principais propriedades homológicas de $\mathcal{A}$. Para definir tais diagramas precisaremos de duas definições:

Definição 1.44. *Para qualquer inteiro n, podemos definir o funtor de translação $[n] : Kom(\mathcal{A}) \longrightarrow Kom(\mathcal{A})$ onde $K[n]^i = K^{n+i}$ com diferencial $d_{K^\bullet[n]} = (-1)^n d_{K^\bullet}$ e um morfismo $f : K^\bullet \longrightarrow L^\bullet$ é levado no morfismo $f[n] : K^\bullet[n] \longrightarrow L^\bullet[n]$ dado por $f[n]^i = f^{i+n}$.*

Definição 1.45. *Seja $f : K^\bullet \longrightarrow L^\bullet$ um morfismo de complexos. Definimos um complexo, chamado de cone de f e denotado por $Cone(f)$, por $Cone(f)^n = K^{n+1} \oplus L^n$ e os diferenciais*

$$\begin{pmatrix} -d_{K^\bullet}^{n+1} & 0 \\ f^{n+1} & d_{L^\bullet}^n \end{pmatrix}.$$

Para qualquer morfismo $f : K^\bullet \longrightarrow L^\bullet$ em $Kom(\mathcal{A})$ temos a sequência exata curta $K^\bullet \xrightarrow{f} L^\bullet \xrightarrow{g} Cone(f) \xrightarrow{h} K^\bullet[1]$, onde

$$\begin{array}{rccc} g: & L^\bullet & \longrightarrow & Cone(f), \\ & l & \longmapsto & (0,l) \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} h: & Cone(f) & \longrightarrow & K^\bullet[1]. \\ & (k,l) & \longmapsto & k \end{array}$$

Temos, também em $Kom(\mathcal{A})$, o seguinte diagrama

$$K^\bullet \xrightarrow{f} L^\bullet \xrightarrow{g} Cone(f) \xrightarrow{h} K^\bullet[1], \tag{1.3}$$

Tomando este diagrama na categoria homotópica $K(\mathcal{A})$ nota-se que a composição de dois morfismos consecutivos é zero.

Podemos então definir os triângulos exatos em $D(\mathcal{A})$:

Definição 1.46.

1. *Um triângulo em* $Kom^*(\mathcal{A}), K^*(\mathcal{A})$ *e* $D*(\mathcal{A})$ *é uma sequência*

$$K^\bullet \xrightarrow{u} L^\bullet \xrightarrow{v} M^\bullet \xrightarrow{w} K^\bullet[1]\ .$$

2. *Um morfismo de triângulos é um diagrama da forma:*

$$\begin{tikzcd}
K^\bullet \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"] & L^\bullet \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"] & M^\bullet \arrow[r, "w"] \arrow[d, "h"] & K^\bullet[1] \arrow[d, "f[1]"] \\
K'^\bullet \arrow[r, "u'"] & L'^\bullet \arrow[r, "v'"] & M'^\bullet \arrow[r, "w'"] & K'^\bullet[1].
\end{tikzcd}$$

Um morfismo de triângulos é um isomorfismo sempre que f *e* g *são isomorfismos.*

3. *Um triângulo é dito exato em* $D(\mathcal{A})$ *se é isomorfo a imagem pelo funtor de localização de um triângulo do tipo (1.3) em* $Kom^*(\mathcal{A})$.

Estes triângulos exatos tem uma propriedade homológica muito importante, que substitui as sequências exatas curtas da estrutura abeliana da categoria $\mathcal{A}$ em uma nova estrutura similar criada em $D(\mathcal{A})$:

Teorema 1.47. *Um triângulo exato*

$$K^\bullet \xrightarrow{u} L^\bullet \xrightarrow{v} M^\bullet \xrightarrow{w} K^\bullet[1]$$

em $D(\mathcal{A})$ *induz uma sequência exata longa*

$$\cdots \longrightarrow H^n(K^\bullet) \xrightarrow{H^n(u)} H^n(L^\bullet) \xrightarrow{H^n(v)} H^n(M^\bullet) \xrightarrow{H^n(w)}$$

$$\longrightarrow H^n(K^\bullet[1]) = H^{n+1}(K^\bullet) \longrightarrow \cdots$$

Proposição 1.48. *A coleção de triângulos exatos em* $D(\mathcal{A})$ *satisfaz as seguintes propriedades:*

(TR0) *Um triângulo isomorfo a um triângulo exato é exato;*

(TR1) *Para cada objeto $K^\bullet$ em $D(\mathcal{A})$, o triângulo* $K^\bullet \xrightarrow{Id} K^\bullet \longrightarrow 0 \xrightarrow{w} K^\bullet[1]$ *é exato.*

(TR2) *Todo morfismo $f : K^\bullet \longrightarrow L^\bullet$ em $D(\mathcal{A})$ pode ser completado a um triângulo exato* $K^\bullet \xrightarrow{f} L^\bullet \longrightarrow M^\bullet \longrightarrow K^\bullet[1]$.

(TR3) *Um triângulo* $K^\bullet \xrightarrow{u} L^\bullet \xrightarrow{v} M^\bullet \xrightarrow{w} K^\bullet[1]$ *é exato se, e somente se,* $L^\bullet \xrightarrow{v} M^\bullet \xrightarrow{w} K^\bullet[1] \xrightarrow{u[1]} L^\bullet[1]$ *é exato.*

(TR4) *Dados dois triângulos exatos* $K^\bullet \xrightarrow{u} L^\bullet \xrightarrow{v} M^\bullet \xrightarrow{w} K^\bullet[1]$ *e* $K'^\bullet \xrightarrow{u'} L'^\bullet \xrightarrow{v'} M'^\bullet \xrightarrow{w'} K'^\bullet[1]$ *e dois morfismos $f : K^\bullet \longrightarrow K'^\bullet$ e $g : L^\bullet \longrightarrow L'^\bullet$ tais que $g \circ u = u' \circ f$, existe $h : M^\bullet \longrightarrow M'^\bullet$ que completa o morfismo de triângulos:*

$$\begin{tikzcd}
K^\bullet \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & L^\bullet \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"] & M^\bullet \arrow[r, "w"] \arrow[d, dashed, "h"] & K^\bullet[1] \arrow[d, "f[1]"] \\
K'^\bullet \arrow[r, "u'"] & L'^\bullet \arrow[r, "v'"] & M'^\bullet \arrow[r, "w'"] & K'^\bullet[1].
\end{tikzcd}$$

h não necessariamente é único.

(TR5) *(Axioma do octaedro) Dados três triângulos exatos*

$$K^\bullet \xrightarrow{u} L^\bullet \longrightarrow M'^\bullet \longrightarrow K^\bullet[1]$$
$$L^\bullet \xrightarrow{v} M^\bullet \longrightarrow K'^\bullet \longrightarrow L^\bullet[1]$$
$$K^\bullet \xrightarrow{w} M^\bullet \longrightarrow L'^\bullet \longrightarrow K^\bullet[1]$$

existe um triângulo exato $M'^\bullet \longrightarrow L'^\bullet \longrightarrow K'^\bullet \longrightarrow M'^\bullet[1]$ *tal que* *o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{tikzcd}
K^\bullet \arrow[r, "u"] \arrow[d, "Id"] & L^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "v"] & M'^\bullet \arrow[r] \arrow[d] & K^\bullet[1] \arrow[d, "Id"] \\
K^\bullet \arrow[r, "w"] \arrow[d, "u"] & M^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "Id"] & L'^\bullet \arrow[r] \arrow[d] & K^\bullet[1] \arrow[d, "u[1]"] \\
L^\bullet \arrow[r, "v"] \arrow[d] & M^\bullet \arrow[r] \arrow[d] & K'^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "Id"] & L^\bullet[1] \arrow[d] \\
M'^\bullet \arrow[r] & L'^\bullet \arrow[r] & K'^\bullet \arrow[r] & M'^\bullet[1]
\end{tikzcd}$$

Esta demonstração encontra-se em [11] na página 251.

Definição 1.49. *Seja $\mathcal{D}$ uma categoria aditiva. A estrutura de uma categoria triangulada em $\mathcal{D}$ é dada por automorfismo $T : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}$, que será chamado funtor translação, e um conjunto de triângulos exatos*

$$K \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow T(K)$$

*que satisfazem as propriedades **(TR0)** até **(TR5)** da Proposição 1.48.*

Logo $K(\mathcal{A})$ é uma categoria triangulada se tomamos como triângulos exatos os triângulos isomorfos a algum triângulo definido pelo cone de um morfismo. Também, pela Proposição 1.48, temos que $D(\mathcal{A})$ é uma categoria triangulada.

Definição 1.50. *Um funtor $F : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{U}$, entre categorias trianguladas $\mathcal{D}$ e $\mathcal{U}$, é dito exato se F comuta com o funtor de translação, ou seja, se $F(T_{\mathcal{D}}(K)) = T_{\mathcal{U}}(F(K))$ e se cada triângulo exato em $\mathcal{D}$ tem como imagem um triângulo exato em $\mathcal{U}$.*

Teorema 1.51. *O funtor de localização $Q_A : K(\mathcal{A}) \longrightarrow D(\mathcal{A})$ é um funtor exato de categorias trianguladas.*

A demonstração pode ser encontrada em [11] na página 251.

Obs 10. *Podemos também considerar complexos em uma categoria abeliana $\mathcal{A}$ com varias condições de finitude:*

- *$Kom^+(\mathcal{A})$ é a categoria dos complexos acotados por baixo de $\mathcal{A}$, isto é, existe j tal que $X^i = 0$ para todo $i \leq j$;*

- $Kom^-(\mathcal{A})$ *é a categoria dos complexos acotados por cima de* $\mathcal{A}$*, isto é, existe* j *tal que* $X^i = 0$ *para todo* $i \geq j$*;*
- $Kom^b(\mathcal{A}) = Kom^+(\mathcal{A}) \cap Kom^-(\mathcal{A})$.

Todas elas são sub-cartegorias plenas de $Kom(\mathcal{A})$*. Identificando os morfismos homotópicos temos as categorias* $K^+(\mathcal{A})$*,* $K^-(\mathcal{A})$ *e* $K^b(\mathcal{A})$ *e ao localizar por quase-isomorfismos formam suas correspondentes categorias derivadas* $D^+(\mathcal{A})$*,* $D^-(\mathcal{A})$ *e* $D^b(\mathcal{A})$*. É importante notar que* $K^*(\mathcal{A})$ *e* $D^*(\mathcal{A})$ *são todas categorias trianguladas, onde* $* = +, -, b$*.*

Nota-se que não é fácil fazer cálculos explícitos na categoria derivada. Entretanto, para uma certa classe de complexos, os morfismos na categoria derivada e na categoria homotópica são os mesmos. Veremos então que sob determinadas condições de $\mathcal{A}$, cada complexo pode ser substituído por um complexo dessa certa classe.

Proposição 1.52. *Seja* $\mathcal{A}$ *uma categoria abeliana com suficientes injetivos. Então, dado* $A^\bullet$ *objeto de* $K^+(\mathcal{A})$*, existe* $I^\bullet$*, também em* $K^+(\mathcal{A})$*, onde cada* I^i *é um objeto injetivo de* $\mathcal{A}$ *tal que existe um quase-isomorfismo entre* $A^\bullet$ *e* $I^\bullet$*.*

Uma demonstração desta proposição pode ser encontrada em [5, pag. 39].

Notação. Tal complexo $I^\bullet$ associado ao complexo $A^\bullet$ será denotado por $I(A^\bullet)^\bullet$.

Lema 1.53. *Seja* $A^\bullet \xrightarrow{\varphi} B^\bullet$ *um quase-isomorfismo entre dois complexos* $A^\bullet$ *e* $B^\bullet$ *em* $K^+(\mathcal{A})$*; então para qualquer complexo* $I^\bullet \in Ob(K^+(\mathcal{A}))$*, onde cada* I^i *é um objeto injetivo de* $\mathcal{A}$ *temos que*

$$\begin{array}{ccc} Hom_{K^+(\mathcal{A})}(B^\bullet, I^\bullet) & \longrightarrow & Hom_{K^+(\mathcal{A})}(A^\bullet, I^\bullet) \\ f & \longmapsto & f \circ \varphi \end{array}$$

é uma bijeção.

Uma demonstração deste resultado pode ser encontrada em [5, pag. 40].

Obs 11. *Seja* $I^\bullet \xrightarrow{\varphi} J^\bullet$ *um quase-isomorfismo em* $K^+(\mathcal{A})$*, onde* $I^\bullet$ *e* $J^\bullet$ *são complexos tais que, para cada* i*,* I^i *e* J^i *são objetos injetivos de* $\mathcal{A}$*.*

Pelo último lema, temos que φ *é um isomorfismo na categoria de* $K^+(\mathcal{A})$*.*

De fato, pelo lema, existe único $\psi : J^\bullet \longrightarrow I^\bullet$ *tal que o seguinte diagrama comuta em* $K(\mathcal{A})$*:*

$$\begin{tikzcd} & I^\bullet \arrow[dl, "\varphi"'] \arrow[dr, "Id_{I^\bullet}"] & \\ J^\bullet \arrow[rr, "\psi"'] & & I^\bullet \end{tikzcd},$$

Logo temos que ψ é quase-isomorfismo e temos $(\psi \circ \phi) \sim Id_{I^\bullet}$. Por outro lado, como ψ é quase-isomorfismo e usando novamente o último lema, existe ξ tal que

$$\begin{tikzcd} & J^\bullet \arrow[dl, "\psi"'] \arrow[dr, "Id_{J^\bullet}"] & \\ I^\bullet \arrow[rr, "\xi"'] & & J^\bullet \end{tikzcd}$$

comuta em $K(\mathcal{A})$, logo $(\xi \circ \psi) \sim Id_{J^\bullet}$. Temos então o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd} I^\bullet \arrow[r, "Id_{I^\bullet}"] \arrow[d, "\varphi"'] & I^\bullet \arrow[d, "\xi"] \\ J^\bullet \arrow[r, "Id_{J^\bullet}"'] \arrow[ur, "\psi"] & J^\bullet \end{tikzcd}$$

de onde temos que $\varphi \sim \xi$, logo $(\varphi \circ \psi) \sim Id_{J^\bullet}$ e, portanto, φ é um isomorfismo em $K^+(\mathcal{A})$.

Concluímos então que, qualquer quase-isomorfismo entre complexos cujos objetos são injetivos é um isomorfismo.

Lema 1.54. *Sejam $A^\bullet$ e $I^\bullet$ em $Kom^+(\mathcal{A})$, onde cada I^i é injetivo. Então temos a bijeção*

$$Hom_{K(\mathcal{A})}(A^\bullet, I^\bullet) \xrightarrow{\sim} Hom_{D(\mathcal{A})}(A^\bullet, I^\bullet)\ .$$

Demonstração. Usando o funtor de localização temos uma função

$$Q : Hom_{K(\mathcal{A})}(A^\bullet, I^\bullet) \longrightarrow Hom_{D(\mathcal{A})}(A^\bullet, I^\bullet)$$

dada por $Q([f]) = [f/Id]$. Sejam $[f]$ e $[g]$ em $Hom_{K(\mathcal{A})}(A^\bullet, I^\bullet)$ tais que $Q([f]) = Q([g])$, então existe um quase-isomorfismo α tal que o seguinte diagrama é comutativo em $K(\mathcal{A})$:

$$
\begin{tikzcd}
 & & B^\bullet \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\alpha"] & & \\
 & A^\bullet \arrow[dl, "Id"'] \arrow[drrr, "g"] & & A^\bullet \arrow[dlll, "Id"'] \arrow[dr, "f"] & \\
A^\bullet & & & & I^\bullet
\end{tikzcd}
$$

logo, pela Observação 7, $f \sim g$ e portanto $[f] = [g]$. O que implica que Q é injetiva.

Vejamos que é sobrejetiva. Seja $[f/\alpha]$ a classe de morfismos em $D(\mathcal{A})$ representada por:

$$
\begin{tikzcd}
 & B^\bullet \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "f"] & \\
A^\bullet & & I^\bullet .
\end{tikzcd}
$$

Pelo Lema 1.53, como $B^\bullet \xrightarrow{\alpha} A^\bullet$ é quase-isomorfismo, existe único morfismo $A^\bullet \xrightarrow{h} I^\bullet$ tal que

$$
\begin{tikzcd}
 & B^\bullet \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "f"] & \\
A^\bullet \arrow[rr, "h"'] & & I^\bullet
\end{tikzcd}
$$

comuta em $K(\mathcal{A})$.

Logo $Q([h]) = [h/Id] = [f/\alpha]$ pois temos o seguinte diagrama comutativo:

$$
\begin{tikzcd}
 & & B^\bullet \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "Id"] & & \\
 & A^\bullet \arrow[dl, "Id"'] \arrow[drrr, "h"] & & B^\bullet \arrow[dlll, "\alpha"'] \arrow[dr, "f"] & \\
A^\bullet & & & & I^\bullet .
\end{tikzcd}
$$

$\square$

Seja $\mathcal{I}$ a subcategoria plena de $\mathcal{A}$ formada por todos os objetos injetivos de $\mathcal{A}$. E seja $K^+(\mathcal{I})$ a categoria de complexos de $\mathcal{I}$ limitados a esquerda cujo morfismos são morfismos de complexos módulo homotopia. Temos o seguinte teorema.

Teorema 1.55. *Seja $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana com suficientes injetivos então o funtor $\rho : K^+(\mathcal{I}) \longrightarrow D^+(\mathcal{A})$, induzido por Q, é uma equivalência.*

A demonstração destes resultados podem ser vistas em [5] nas páginas 39 até 42.

Podemos fazer uma construção análoga para $D^-(\mathcal{A})$ quando $\mathcal{A}$ tem suficientes projetivos.

Caso em que $\mathcal{A}$ é uma categoria abeliana semissimples

Existe um tipo de categoria abeliana para a qual é fácil caracterizar a categoria derivada:

Definição 1.56. *Uma categoria abeliana $\mathcal{A}$ é dita semissimples se toda sequência exata curta cinde. Isto é, se para qualquer sequência do tipo*

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$$

tivermos que $Y \simeq X \oplus Z$.

Denotaremos por $Kom_0(\mathcal{A})$ a subcategoria plena de $Kom(\mathcal{A})$ cujos objetos são complexos onde todos os diferenciais são nulos.

Seja $F : Kom(\mathcal{A}) \longrightarrow Kom_0(\mathcal{A})$ um funtor definido por, $F((K^\bullet, d_K^n)) = (H^n(K^\bullet), 0)$ e se $f \in Hom_{Kom(\mathcal{A})}(K^\bullet, L^\bullet)$, $F(f) = \{H^n(f); n \in \mathbb{Z}\}$. Pela própria definição deste funtor observa-se que ele leva quase-isomorfismo em isomorfismo, portanto existe um único funtor $G : D(\mathcal{A}) \longrightarrow Kom_0(\mathcal{A})$ tal que $F = G \circ Q$. Podemos então enunciar a Proposição III.4 da página 146 de [11]:

Notação. Quando não houver lugar a confusão, usaremos a notação $H^n(K^\bullet)$ para denotar o complexo $(H^n(K^\bullet), 0)$.

Proposição 1.57. *$\mathcal{A}$ é uma categoria semissimples se, e somente se, o funtor $G : D(\mathcal{A}) \longrightarrow Kom_0(\mathcal{A})$ definido acima é uma equivalência de categorias.*

A demonstração deste resultado está na própria referência e não será apresentada neste texto. A próxima proposição tem uma demonstração muito parecida.

Ainda sob a hipótese de $\mathcal{A}$ ser uma categoria semissimples, podemos definir um funtor de $K(\mathcal{A})$ em $Kom_0(\mathcal{A})$ compondo o funtor de localização

$Q : K(\mathcal{A}) \longrightarrow D(\mathcal{A})$ e o funtor G já definido. Chamaremos este funtor de G' e provaremos que o funtor R, definido pela composição

$$Kom_0(\mathcal{A}) \xrightarrow{i} Kom(\mathcal{A}) \xrightarrow{\sim} K(\mathcal{A}),$$

e G' são quase-inversos mutuamente. Assim teremos:

Proposição 1.58. *$\mathcal{A}$ é uma categoria semissimples se, e somente se, o funtor $G' : K(\mathcal{A}) \longrightarrow Kom_0(\mathcal{A})$ definido acima é uma equivalência de categorias.*

Lema 1.59. *Seja $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana triangulada. Então $\mathcal{A}$ é semissimples.*

Demonstração. (Proposição 1.58)

($\Longrightarrow$) Inicialmente apresentaremos os funtores G' e R:

$$\begin{array}{cccc} G' : & K(\mathcal{A}) & \longrightarrow & Kom_0(\mathcal{A}) \\ & K^\bullet & \longmapsto & H(K^\bullet) \\ & {\scriptstyle [f]}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle H(f)} \\ & L^\bullet & & H(L^\bullet) \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} R : & Kom_0(\mathcal{A}) & \longrightarrow & K(\mathcal{A}) \\ & K^\bullet & \longmapsto & K^\bullet \\ & {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle [f]} \\ & L^\bullet & & L^\bullet. \end{array}$$

Como $H^n(K^\bullet) = K^n$ para todo $K^\bullet \in Ob(Kom_0(\mathcal{A}))$, fica claro que $G' \circ R$ é isomorfo ao funtor identidade de $Kom_0(\mathcal{A})$. Vejamos agora que $R \circ G'$ é isomorfo a identidade em $K(\mathcal{A})$. Precisamos encontrar um isomorfismo natural γ tal que o seguinte digrama comuta em $K(\mathcal{A})$:

$$\begin{tikzcd} K^\bullet \arrow[r, "\gamma_K"] \arrow[d, "{[f]}"'] & R \circ G'(K^\bullet) \arrow[d, "R\circ G'([f])"] \\ L^\bullet \arrow[r, "\gamma_L"'] & R \circ G'(L^\bullet), \end{tikzcd}$$

onde $R \circ G'(K^\bullet) = H(K^\bullet)$, $R \circ G'(L^\bullet) = H(L^\bullet)$ e $R \circ G'([f]) = [H(f)] = H(f)$. Ou seja, estamos interessados na comutatidade de

$$\begin{tikzcd} K^\bullet \arrow[r, "\gamma_K"] \arrow[d, "{[f]}"'] & H(K^\bullet) \arrow[d, "H(f)"] \\ L^\bullet \arrow[r, "\gamma_L"'] & H(L^\bullet). \end{tikzcd}$$

Vamos construir tal γ.

Para cada complexo $(K^\bullet, d^\bullet)$ temos as seguintes sequências exatas curtas:

$$0 \longrightarrow Ker(d^n) \hookrightarrow A^n \xrightarrow{d^n} Im(d^n) \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow Im(d^{n-1}) \hookrightarrow Ker(d^n) \longrightarrow H^n(K^\bullet) \longrightarrow 0.$$

Logo, como $\mathcal{A}$ é semissimples, podemos escrever $K^n = Im(d^{n-1} \oplus H^n(K^\bullet) \oplus Im(d^n)$ e

$$\begin{array}{rccc} d^n: & Im(d^{n-1} \oplus H^n(K^\bullet) \oplus Im(d^n) & \longrightarrow & Im(d^n \oplus H^{n+1}(K^\bullet) \oplus Im(d^{n+1}) \\ & (x^{n-1}, h^n, x^n) & \longmapsto & (x^n, 0, 0) \end{array}$$

Definamos

$$\begin{array}{rccc} \alpha_K^n: & K^n & \longrightarrow & H^n(K^\bullet) \\ & (x^{n-1}, h^n, x^n) & \longmapsto & h^n, \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \beta_K^n: & H^n(K^\bullet) & \longrightarrow & K^n \\ & h^n & \longmapsto & (0, h^n, 0). \end{array} \tag{1.4}$$

Assim, α_K e β_K são mutuamente inversas em $K(\mathcal{A})$. Podemos então tomar $\gamma_K = [\alpha_K]$ para cada $K^\bullet$, de onde teremos que o digrama (1.4) comuta, visto que f pode ser aplicada coordenada a coordenada.

($\Longleftarrow$) Basta usar o Lema 1.59. Visto que $Kom_0(\mathcal{A}) \simeq K(\mathcal{A})$, $Kom_0(\mathcal{A})$ é abeliana e triangulada, portanto semissimples. Assim temos $\mathcal{A}$ semissimples.

□

A demonstração do Lema 1.59 encontra-se em [11], página 250.

Obs 12. *Pela forma como definimos os funtores G e G' temos o seguinte diagrama comutativo:*

$$\begin{tikzcd} K(\mathcal{A}) \arrow[r, "Q"] \arrow[rr, bend left, "G'"] & D(\mathcal{A}) \arrow[r, "G"] & Kom_0(\mathcal{A}). \end{tikzcd}$$

Além disso, Se $\mathcal{A}$ é uma categoria semissimples teremos que G e G' são equivalências e portanto temos que Q é uma equivalência.

De fato, pela definição de categoria derivada, Q funciona como uma identidade sobre os objetos, logo é essencialmente sobre. Resta verificar que Q é pleno e fiel, ou seja, $Hom_{K(\mathcal{A})}(K^\bullet, L^\bullet) \simeq Hom_{D(\mathcal{A})}(K^\bullet, L^\bullet)$.

Dado que G' é equivalência temos

$$Hom_{K(\mathcal{A})}(K^\bullet, L^\bullet) \simeq Hom_{Kom_0(\mathcal{A})}(H(K^\bullet), H(L^\bullet)),$$

e usando que G é também equivalência

$$Hom_{Kom_0(\mathcal{A})}(H(K^\bullet), H(L^\bullet)) \simeq Hom_{D(\mathcal{A})}(H(K^\bullet), H(L^\bullet)).$$

Agora, como γ_K e γ_L são isomorfismos em $K(\mathcal{A})$, temos que

$$Hom_{D(\mathcal{A})}(H(K^\bullet), H(L^\bullet)) \simeq Hom_{D(\mathcal{A})}(K^\bullet, L^\bullet).$$

Assim Q é pleno e fiel.

Concluímos portanto que se $\mathcal{A}$ é uma categoria semissimples teremos que $K(\mathcal{A}) \simeq D(\mathcal{A})$.

1.3.3 Funtor Derivado

Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ categorias abelianas tal que $\mathcal{A}$ tem suficientes injetivos (projetivos). Seja $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ um funtor aditivo exato a esquerda (direita), mostraremos que existe uma extensão $RF : D^+(\mathcal{A}) \longrightarrow D^+(\mathcal{B})$ ($LF : D^-(\mathcal{A}) \longrightarrow D^-(\mathcal{B})$),chamada de funtor derivado a direita (esquerda). Tal funtor é um funtor exato entre categorias trianguladas.

Primeiramente estendemos F para $C^*F : Kom^*(\mathcal{A}) \longrightarrow Kom^*(\mathcal{B})$ componente a componente. Como F é aditivo, esta extensão leva morfismo homotópicos em morfismos homópicos então temos o funtor $K^*F : K^*(\mathcal{A}) \longrightarrow K^*(\mathcal{B})$. Agora, usando que $\mathcal{A}$ tem suficientes injetivos e a equivalência $\rho : K^+(\mathcal{I}_{\mathcal{A}}) \longrightarrow D^+(\mathcal{A})$ temos o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
K^+(\mathcal{I}_{\mathcal{A}}) \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\sim", "\rho"'] & K^+(\mathcal{A}) \arrow[r, "KF"] \arrow[d, "Q_{\mathcal{A}}"] & K^+(\mathcal{B}) \arrow[d, "Q_{\mathcal{B}}"] \\
 & D^+(\mathcal{A}) & D^+(\mathcal{B}).
\end{tikzcd}$$

Então definimos o funtor derivado a direita de F, como

$$RF := Q_{\mathcal{B}} \circ KF \circ \rho^{-1} : D^+(\mathcal{A}) \longrightarrow D^+(\mathcal{B}).$$

Ou seja, dado um morfismo

$$\begin{tikzcd} & Z^\bullet \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X^\bullet & & Y^\bullet \end{tikzcd}$$

em $D^+(\mathcal{A})$ vejamos quem é $RF([f/\alpha])$.

O primeiro passo é aplicar ρ^{-1}, isto é, encontrar um morfismo $I(X^\bullet)^\bullet \xrightarrow{I([f/\alpha])} I(Y^\bullet)^\bullet$ em $K^+(\mathcal{I})$:

$$\begin{tikzcd} & Z^\bullet \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X^\bullet \arrow[d, "q-iso"'] & & Y^\bullet \arrow[d, "q-iso"] \\ I(X^\bullet)^\bullet \arrow[rr, "I([f/\alpha])"'] & & I(Y^\bullet)^\bullet. \end{tikzcd}$$

Agora aplicamos KF e temos $KF(I(X^\bullet)^\bullet) \xrightarrow{KF(I([f/\alpha]))} KF(I(Y^\bullet)^\bullet)$ em $K^+(\mathcal{B})$. O último passo é aplicar $Q_{\mathcal{B}}$, ou seja, localizar:

$$\begin{tikzcd} & KF(I(X^\bullet)^\bullet) \arrow[dl, "Id"'] \arrow[dr, "KF(I([f/\alpha]))"] & \\ KF(I(X^\bullet)^\bullet) & & KF(I(Y^\bullet)^\bullet). \end{tikzcd}$$

Notemos que RF esta bem definido.

De fato, sejam $[f/\phi] = [g/\psi]$ então teremos $I([f/\phi]) \sim I([g/\psi])$ e portanto $KF(I([f/\phi])) \sim KF(I([g/\psi]))$.

Obs 13. *Em princípio pode não ficar claro porque não podemos estender naturalmente F para um funtor $D(F)$ como no caso de $K(F)$. Esta extensão não pode ocorrer porque $K(F)$, em geral, não manda quase-isomorfismos em quase-isomorfismos. Só temos garantia de este fato quando F é um funtor exato.*

Definição 1.60. *Sejam $\mathcal{A}$ uma categoria com suficientes injetivos (projetivos) e $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ um funtor exato à esquerda (direita). Seja RF (LF) o funtor derivado à direita (esquerda) de F. O funtor $R^iF := H^i(RF)$ ($L^iF := H^i(LF)$) é chamado o i-ésimo funtor derivado de F.*

Exemplo 1.18. *Sejam $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana com suficientes injetivos e $X \in Ob(\mathcal{A})$. O funtor $Hom(X,\_)$ de $\mathcal{A}$ em Ab, definido no Exemplo 1.9 é um funtor exato à esquerda, logo podemos considerar seu funtor derivado $RHom(X,\_)$. Pode-se provar que*

$$Ext^i(X,\_) \simeq R^iHom(X,\_).$$

1.3.4 Outras propriedades das categorias derivadas

Definição 1.61. *Sejam $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana, A' e A'' objetos de $\mathcal{A}$. Uma extensão de A'' por A' é uma sequência exata curta de objetos de $\mathcal{A}$*

$$0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0.$$

Definição 1.62. *Seja $\mathcal{A}'$ uma subcategoria aditiva plena de $\mathcal{A}$. Dizemos que $\mathcal{A}'$ é uma subcategoria fechada por extensões se dados dois objetos em $\mathcal{A}'$ qualquer extensão deles em $\mathcal{A}$ está em $\mathcal{A}'$.*

Denotamos por $Kom_{\mathcal{A}'}(\mathcal{A})$ a categoria dos complexos em $\mathcal{A}$ cujos objetos de cohomologia estão em $\mathcal{A}'$. Apartir de $Kom_{\mathcal{A}'}(\mathcal{A})$ podemos construir a categoria homotópica $K_{\mathcal{A}'}(\mathcal{A})$ e a categoria derivada $D_{\mathcal{A}'}(\mathcal{A})$.

O funtor $K_{\mathcal{A}'}(\mathcal{A}) \longrightarrow D(\mathcal{A})$ induz um funtor $D_{\mathcal{A}'}(\mathcal{A}) \longrightarrow D(\mathcal{A})$ que é pleno e fiel, ou seja, $D_{\mathcal{A}'}(\mathcal{A})$ é equivalente a uma subcategoria de $D(\mathcal{A})$ onde os objetos são complexos em $\mathcal{A}$ cujos objetos de cohomologia estão em $\mathcal{A}'$.

Analogamente, podemos definir $K^+_{\mathcal{A}'}(\mathcal{A})$, $K^-_{\mathcal{A}'}(\mathcal{A})$ e $K^b_{\mathcal{A}'}(\mathcal{A})$ e ainda $D^+_{\mathcal{A}'}(\mathcal{A})$, $D^-_{\mathcal{A}'}(\mathcal{A})$ e $D^b_{\mathcal{A}'}(\mathcal{A})$.

Seja $\mathcal{A}'$ uma subcategoria de $\mathcal{A}$, com suficientes injetivos em $\mathcal{A}$, isto é, dado K um objeto em $\mathcal{A}'$, existe um monomorfismo $K \hookrightarrow I$, onde I é também objeto de $\mathcal{A}'$ o qual é injetivo em $\mathcal{A}$. Sob estas condições dizemos que $\mathcal{A}'$ tem suficientes $\mathcal{A}$-injetivos.

Se $\mathcal{A}'$ é abeliana, o funtor $K^*(\mathcal{A}') \longrightarrow D^*(\mathcal{A})$ leva quase-isomorfismos em isomorfismos, portanto fornece um funtor $D^*(\mathcal{A}') \longrightarrow D^*(\mathcal{A})$. Quando $\mathcal{A}'$ tem suficientes $\mathcal{A}$-injetivos, pode-se provar que, dados dois objetos $L^\bullet$ e $K^\bullet$

em $D^*(\mathcal{A}')$, $Hom_{D^*(\mathcal{A}')}(L^\bullet, K^\bullet) = Hom_{D^*(\mathcal{A})}(L^\bullet, K^\bullet)$. Mais ainda, podemos provar que a imagem de $D^*(\mathcal{A}') \longrightarrow D^*(\mathcal{A})$ é equivalente a categoria $D^*_{\mathcal{A}'}(\mathcal{A})$, ou seja, temos o seguinte resultado:

Proposição 1.63. *Se $\mathcal{A}'$ tem suficientes $\mathcal{A}$-injetivos, então o funtor*

$$D^*(\mathcal{A}') \longrightarrow D^*(\mathcal{A})$$

é pleno e fiel e induz uma equivalência de categorias $D^*(\mathcal{A}') \xrightarrow{\sim} D^*_{\mathcal{A}'}(\mathcal{A})$.

Capítulo 2

Categorias de Funtores

2.1 Definição

Definição 2.1. *Dizemos que uma categoria $\mathcal{C}$ é pequena se a classe de objetos $Ob(\mathcal{C})$ é um conjunto.*

Definição 2.2. *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria pequena e $\mathcal{A}$ uma categoria. Denotamos por $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ a categoria cujos objetos são funtores de $\mathcal{C}$ em $\mathcal{A}$ e cujos morfismos são as transformações naturais.*

Obs 14. *Se $\mathcal{C}$ é uma categoria pequena então*

$$Mor(\mathcal{C}) = \bigcup_{(A,B)\in Ob(\mathcal{C})\times Ob(\mathcal{C})} Hom_{\mathcal{C}}(A,B) \quad e \quad \prod_{(A,B)\in Ob(\mathcal{C})\times Ob(\mathcal{C})} Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$$

são conjuntos, o que nos garante que $Hom_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(F,G)$ seja também um conjunto para quaisquer $F, G \in Ob(\mathcal{C}(\mathcal{A}))$, condição necessária para que $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ seja uma categoria. Para mais detalhes ver [12].

2.2 Propriedades de $\mathcal{C}(\mathcal{A})$

Para nossa próxima proposição precisamos do seguinte lema, que se encontra enunciado e demonstrado em [7, pág. 195].

Lema 2.3. *Sejam $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana e f um morfismo em $\mathcal{A}$ com fatorização $f = m \circ e$, onde m é mônico e e é épico. Dada outra fatorização*

$f' = m' \circ e'$ e um diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "a"] \arrow[d, "f"'] & \bullet \arrow[d, "f'"] \\ \bullet \arrow[r, "b"'] & \bullet \end{tikzcd}$$

existe único morfismo k tal que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "a"] \arrow[d, "e"'] & \bullet \arrow[d, "e'"] \\ \bullet \arrow[r, "k"] \arrow[d, "m"'] & \bullet \arrow[d, "m'"] \\ \bullet \arrow[r, "b"'] & \bullet \end{tikzcd}$$

Proposição 2.4. *Se a $\mathcal{A}$ é uma categoria aditiva (abeliana) então $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ é também aditiva (abeliana).*

Demonstração. Primeiramente vamos demonstrar que $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ é aditiva, para isso precisamos mostrar **(i)** a **(iii)** da definição 1.17:

(i) Sejam $F, G \in Ob(\mathcal{C}(\mathcal{A}))$, vejamos que $Hom_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(F, G)$ é um grupo abeliano:

Sejam $\eta_1, \eta_2 \in Hom_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(F, G)$, ou seja, $\eta_i = \{(\eta_i)_C; C \in Ob(\mathcal{C})\}$, para $i = 1, 2$. Nestas condições, definimos a operação do grupo por:

$$\eta_1 + \eta_2 = \{(\eta_1 + \eta_2)_C = (\eta_1)_C + (\eta_2)_C; C \in Ob(\mathcal{C})\}.$$

Vamos mostrar que $\eta_1 + \eta_2$ é uma tranformação natural entre os funtores F e G. Para isso temos que verificar que $(\eta_1 + \eta_2)_C \circ F(f) = G(f) \circ (\eta_1 + \eta_2)_D$ para todo morfismo $f : C \longrightarrow D$ na categoria $\mathcal{C}$. Logo usando o fato de $\mathcal{A}$ ser aditiva temos:

$$\begin{aligned} (\eta_1 + \eta_2)_C \circ F(f) &= ((\eta_1)_C + (\eta_2)_C) \circ F(f) = \\ &= (\eta_1)_C \circ F(f) + (\eta_2)_C \circ F(f) = \\ &= G(f) \circ (\eta_1)_D + G(f) \circ (\eta_2)_D = \\ &= G(f) \circ ((\eta_1)_D + (\eta_2)_D) = \\ &= G(f) \circ (\eta_1 + \eta_2)_D. \end{aligned}$$

Portanto, acabamos de definir uma operação para a qual o conjunto

$Hom_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(F,G)$ é fechado. Falta verificar que ele é de fato um grupo:

$i)$ Existência de um elemento neutro:

O elemento neutro para a operação que acabamos de definir é :

$$\overline{0} = \{\overline{0}_C = 0 \in Hom_{\mathcal{A}}(F(C), G(C)); C \in Ob(\mathcal{C})\};$$

$ii)$ Para cada $\eta \in Hom_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(F,G)$ podemos definir seu inverso por:

$$-\eta = \{(-\eta)_C = -(\eta_C); C \in Ob(\mathcal{C})\}.$$

Onde 0 é o elemento neutro de $Hom_{\mathcal{A}}(F(C),G(C))$ e $-(\eta_C)$ é o elemento inverso de η_C também em $Hom_{\mathcal{A}}(F(C),G(C))$. Lembrando $Hom_{\mathcal{A}}(F(C),G(C))$ é um grupo pelo fato de $\mathcal{A}$ ser uma categoria aditiva.

A bilineariadade de $\circ : Hom_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(F,G) \times Hom_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(G,H) \longrightarrow Hom_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(F,H)$ com relação a operação definida, segue da bilinearidade de $\circ : Hom_{\mathcal{A}}(F(C),G(C)) \times Hom_{\mathcal{A}}(G(C),H(C)) \longrightarrow Hom_{\mathcal{A}}(F(C),H(C))$ para cada $C \in Ob(\mathcal{C})$.

(ii) Definimos o objeto 0_{Ob} para qual $Hom_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(0_{Ob},0_{Ob})$ é o grupo trivial da seguinte forma:

$$\begin{array}{rccc} 0_{Ob}: & \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ & C & \longmapsto & 0 \\ & f \in Hom_{\mathcal{C}}(C,D) & \longmapsto & 0 \in Hom_{\mathcal{A}}(0,0). \end{array}$$

Onde, por abuso de notação 0 é o objeto zero da categoria $\mathcal{A}$ e 0 é o único elemento do grupo trivial $Hom_{\mathcal{A}}(0,0)$, ambos existentes em $\mathcal{A}$ por sua aditividade.

Notemos que obviamente 0_{Ob} é um funtor e $Hom_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(0_{Ob},0_{Ob})$ é o grupo trivial.

(iii) Sejam $F,G \in Ob(\mathcal{C}(\mathcal{A}))$. Devemos definir o funtor $F \oplus G$.

Sejam C e D objetos de $\mathcal{C}$ e $f \in Hom_{\mathcal{C}}(C,D)$. Pelo fato de $\mathcal{A}$ ser uma categoria aditiva temos o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd} F(C) \arrow[r, "i_{F(C)}"] \arrow[dr, "a_f"'] & F(C) \oplus G(C) \arrow[d, dashed, "F\oplus G(f)"] & G(C) \arrow[l, "i_{G(C)}"'] \arrow[dl, "b_f"] \\ & F(D) \oplus G(D) & \end{tikzcd}$$

onde $a_f = i_{F(D)} \circ F(f)$, $b_f = i_{G(D)} \circ D(f)$ e $F \oplus G(f)$ é o único morfismo que faz o diagrama comutar pela definição de soma. Então podemos definir o funtor:

$$\begin{array}{rccc} F\oplus G: & \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ & C & \longmapsto & (F\oplus G)(C) := F(C)\oplus G(C) \end{array}$$

$$\begin{tikzcd} C \arrow[d, "f"'] \arrow[r, mapsto] & (F\oplus G)(C) \arrow[d, "F\oplus G(f)"] \\ D & (F\oplus G)(D) \end{tikzcd}$$

Definimos a transformação natural $i_F \in Hom_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(F, F\oplus G)$ por $i_F = \{(i_F)_C = i_{F(C)} \in Hom_{\mathcal{A}}(F(C), (F\oplus G)(C)); C \in \mathcal{C}\}$, onde cada $i_{F(C)}$ existe por $\mathcal{A}$ ser categoria aditiva.

Analogamente definimos as transformações naturais $i_G \in Hom_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(G, F\oplus G)$, $p_F \in Hom_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(F\oplus G, F)$, $p_G \in Hom_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(F\oplus G, G)$.

Afirmação. O funtor $F\oplus G$ e as transformações i_F, i_G, p_F e p_G são o produto e o coproduto dos funtores F e G.

De fato, começamos comprovando que $F\oplus G, i_F, i_G$ é o coproduto.

Sejam H em $\mathcal{C}(\mathcal{A})$, $\eta_F \in Hom_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(F, H)$ e $\eta_G \in Hom_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(G, H)$, para cada $C \in \mathcal{C}$ temos o seguinte diagrama em $\mathcal{A}$:

$$\begin{tikzcd} F(C) \arrow[r, "(i_F)_C"] \arrow[dr, "(\eta_F)_C"'] & (F\oplus G)(C) \arrow[d, "\eta_C"] & G(C) \arrow[l, "(i_G)_C"'] \arrow[dl, "(\eta_G)_C"] \\ & H(C) & \end{tikzcd}$$

Logo gostaríamos que $\eta = \{\eta_C \in Hom_{\mathcal{A}}((F\oplus G)(C), H(C)); C \in \mathcal{C}\}$ fosse tranformação natural, e portanto seria o único morfismo em $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "i_F"] \arrow[dr, "\eta_F"'] & F\oplus G \arrow[d, "\eta"] & G \arrow[l, "i_G"'] \arrow[dl, "\eta_G"] \\ & H & \end{tikzcd}$$

comuta, pois, a menos de isomorfismo, cada η_C é único. Assim mostraríamos o desejado. Então, para mostrar que η é transformação basta ver que para cada morfismo $f : C \longrightarrow D$ em $\mathcal{C}$ o diagrama

$$\begin{tikzcd}
(F \oplus G)(C) \arrow[r, "\eta_C"] \arrow[d, "(F\oplus G)(f)"'] & H(C) \arrow[d, "H(f)"] \\
(F \oplus G)(D) \arrow[r, "\eta_D"] & H(D)
\end{tikzcd}$$

comuta. Para isto precisamos usar que $(\eta_F)_C = \eta_C \circ (i_F)_C$, para todo $C \in \mathcal{C}$ e o Lema 2.3.

Analogamente prova-se que $F \oplus G, p_F, p_G$ é o produto. As propriedades que relacionam os morfismos i's e p's são de fácil verificação.

Logo mostramos que $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ é uma categoria aditiva. Vejamos agora que se $\mathcal{A}$ é abeliana então $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ é também abeliana, isto é, que temos satisfeitas **Ab-1** até **Ab-4** da definição 1.21:

Ab 1 Temos que provar que dado um morfismo $\eta \in Hom_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(F, G)$ ele tem núcleo e conúcleo. Verificaremos que qualquer morfismo tem núcleo, a verificação da existência do conúcleo é análoga.

Primeiramente devemos dizer quem é o candidato a núcleo de η:

Para cada C objeto de $\mathcal{C}$ temos um morfismo em $\mathcal{A}$, $\eta_C \in Hom_{\mathcal{A}}(F(C), G(C))$ que, pelo fato de $\mathcal{A}$ ser abeliana, possui núcleo (K_C, i_C). Assim, dado $f \in Hom_{\mathcal{C}}(C, D)$ temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
K_C \arrow[r, dashed, "K_f"] \arrow[d, "i_C"'] & K_D \arrow[d, "i_D"] \\
F(C) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\eta_C"'] & F(D) \arrow[d, "\eta_D"] \\
G(C) \arrow[r, "G(f)"] & G(D)
\end{tikzcd} \tag{2.1}$$

Queremos garantir a existencia e a unicidade de K_f no diagrama:

Notemos, que pelo diagrama $\eta_D \circ F(f) \circ i_C = G(f) \circ \eta_C \circ i_C$ e usando que (K_C, i_C) sabemos que $\eta_C \circ i_C = 0$ logo temos $F(f) \circ i_C \in Ker((\eta_D)^*)$. Agora, como (K_D, i_D) é núcleo de η_D a sequência

$$0 \longrightarrow Hom_{\mathcal{A}}(K_C, K_D) \xrightarrow{(i_D)^*} Hom_{\mathcal{A}}(K_C, F(D)) \xrightarrow{(\eta_D)^*} Hom_{\mathcal{A}}(K_C, G(D))$$

é exata, de onde $Ker(\eta_D^*) = Im((i_D)^*)$ logo existe $K_f \in Hom(K_C, K_D)$ tal que $i_D \circ K_f = F(f) \circ i_C$. Ainda usando que a sequência é exata temos $(i_D)^*$ injetora e portanto conseguimos a unicidade de K_f.

Sendo assim podemos definir o seguinte funtor:

$$\begin{array}{cccc} K: & \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ & C & \longmapsto & K(C) := K_C \\ & C & \longmapsto & K(C) \\ & {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle K(f) := K_f} \\ & D & & K(D) \end{array}$$

Obviamente $i = \{i_C; C \in \mathcal{C}\}$ é tranformação natural entre os funtor K e F, pois

$$\begin{tikzcd} K(C) \arrow[r, "i_C"] \arrow[d, "K(f)"'] & F(C) \arrow[d, "F(f)"] \\ K(D) \arrow[r, "i_D"'] & F(D) \end{tikzcd}$$

comuta, visto que $K(f)$ foi assim escolhido para a comutatividade de (2.1).

Notemos que (K, i) é núcleo de η. De fato, dado $M \in Ob(\mathcal{C}(\mathcal{A}))$ temos que demonstrar que a sequência

$$0 \longrightarrow Hom_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(M, K) \xrightarrow{i^*} Hom_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(M, F)) \xrightarrow{\eta^*} Hom_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(M, G)$$

é exata, isto é, $Ker(i^*) = 0$ e que $Im(i^*) = Ker(\eta^*)$.

Seja $\varphi \in Hom_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(M, K)$ talque $i^*(\varphi) = 0$ então $i \circ \varphi = 0$ portanto, para todo $C \in Ob(\mathcal{C})$, temos $(i \circ \varphi)_C = 0$, ou ainda $i_C \circ \varphi_C = 0$, o que significa que $\varphi_C \in Ker((i_C)^*)$. Mas , para cada $C \in \mathcal{C}$

$$0 \longrightarrow Hom_{\mathcal{A}}(M(C), K(C)) \xrightarrow{(i_C)_*} Hom_{\mathcal{A}}(M(C), F(C)) \xrightarrow{(\eta_C)_*} Hom_{\mathcal{A}}(M(C)), G(C)) \tag{2.2}$$

é exata, logo $Ker((i_C)^*) = 0$ então $\varphi_C = 0$ para todo objeto C de $\mathcal{C}$, de onde $\varphi = 0$ e portanto $Ker(i^*) = 0$.

Vejamos agora que $Im(i^*) = Ker(\eta^*)$:

Seja $\alpha \in Hom_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(M, F)$ tal que $\alpha \in Im(i^*)$. Então, existe $\alpha' \in Hom_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(M, K)$ tal que $\alpha = i \circ \alpha'$ logo $\alpha_C = i_C \circ \alpha'_C$. Por (2.2) temos $Im((i_C)^*) = Ker((\eta_C)^*)$ para todo $C \in Ob(\mathcal{C})$, daí $\eta_C \circ \alpha_C = 0$ para todo C, de onde $\eta \circ \alpha = 0$e portanto $\alpha \in Ker(\eta^*)$. Reciprocamente, seja $\alpha \in Ker(\eta^*)$ então $\eta \circ \alpha = 0$ o que implica que $\eta_C \circ \alpha_C = 0$ e portanto $\alpha_C \in Ker((\eta_C)^*)$, para todo $C \in Ob(\mathcal{C})$. Novamente pelo fato de (2.2) ser exata existe $\alpha'_C \in Hom_{\mathcal{A}}(M_C, K_C)$ tal que $\alpha_C = i_C \circ \alpha'_C$. Tomando $\alpha = \{\alpha_C; C \in Ob(\mathcal{C})\}$, temos $\alpha = i \circ \alpha'$. A demonstração de que α é de fato um morfismo em $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ decorre de que i e α' são morfismos nesta categoria.

Portanto concluímos nossa demonstração.

Ab 2 Sejam F e G objetos de $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ e $\eta \in Hom_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(F, G)$ um monomorfismo, queremos mostrar que η é núcleo de seu conúcleo. Ou seja, se (W, ρ) é conúcleo de η (notemos que a existencia do conúcleo é garantida por **Ab 1** queremos mostrar que (F, η) é núcleo de ρ.

De fato, queremos provar que, para qualquer $M \in Ob(\mathcal{C}(\mathcal{A}))$, a seguinte sequência é exata:

$$0 \longrightarrow Hom_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(M, F) \xrightarrow{\eta^*} Hom_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(M, G)) \xrightarrow{\rho^*} Hom_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(M, W). \tag{2.3}$$

Mas, notemos que para cada $C \in Ob(\mathcal{C})$ a sequência

$$0 \longrightarrow Hom_{\mathcal{A}}(M_C, F_C) \xrightarrow{(\eta_C)^*} Hom_{\mathcal{A}}(M_C, G_C)) \xrightarrow{(\rho_C)^*} Hom_{\mathcal{A}}(M_C, W_C)$$

é exata, o que, usando os argumentos do item anterior, garante que a sequência (2.3) é também exata.

Ab 3 Tem demonstração análoga a **Ab 2**.

Ab 4 Devemos mostrar que todo morfismo se escreve como a composição de um epimorfismo com um monomorfismo.

Sejam F e G objetos de $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ e $\eta \in Hom_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(F, G)$. Como $\mathcal{A}$ é abeliana, para cada $C \in Ob(\mathcal{C})$, $\eta_C \in Hom_{\mathcal{A}}(F(C), G(C))$ pode ser escrito por $\eta_C = \beta_C \circ \alpha_C$, onde $\alpha_C \in Hom_{\mathcal{A}}(F(C), H(C))$ é epimorfismo e $\beta_C \in Hom_{\mathcal{A}}(H(C), G(C))$ é monomorfismo. Sabemos que para

$f \in Hom_{\mathcal{C}}(C, D)$,

$$\begin{tikzcd} F(C) \arrow[r, "\eta_C"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(C) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(D) \arrow[r, "\eta_D"'] & G(D) \end{tikzcd}$$

Comuta, assim pelo Lema 2.3, para cada objeto C de $\mathcal{C}$ existem únicos $H(f) \in Hom(H(C), H(D))$ tal que o seguinte diagrama é comutivo:

$$\begin{tikzcd} F(C) \arrow[r, "\alpha_C"] \arrow[d, "F(f)"'] & H(C) \arrow[r, "\beta_C"] \arrow[d, "H(F)"] & G(C) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(D) \arrow[r, "\alpha_D"'] & H(D) \arrow[r, "\beta_D"'] & G(D) \end{tikzcd}$$

Portanto temos que H é funtor, $\alpha = \{\alpha_C; C \in Ob(\mathcal{C})\}$ e $\beta = \{\beta_C; C \in Ob(\mathcal{C})\}$ são transformações naturais tais que $\alpha \in Hom_{\mathcal{C}(\mathcal{A})(F,H)}$ é epimorfismo, $\beta \in Hom_{\mathcal{C}(\mathcal{A})(H,G)}$ é monomorfismo e $\eta = \beta \circ \alpha$, o que conclui a demonstração.

Assim provamos que a categoria $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ é abeliana. □

Definição 2.5. *Dizemos que uma categoria abeliana $\mathcal{A}$ é completa se dado uma família qualquer de objetos de $\mathcal{A}$, $\{A_j\}_{j \in J}$, seu produto, $\prod_{j \in J} A_j$, existe.*

Exemplo 2.1. *A categoria dos R-módulos é completa.*

Corolário 2.6. *Se $\mathcal{A}$ é uma categoria abeliana completa então $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ é também uma categoria abeliana completa.*

A demonstração deste corolário é análoga a demonstração de que $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ satisfaz a propriedade **(iii)** de aditividade sempre que $\mathcal{A}$ for aditiva.

Nem todas as propriedades de $\mathcal{A}$ são herdadas por $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ tão linearmente quanto a abelianidade. No caso em que $\mathcal{A}$ é uma categoria com suficientes injetivos, para garantir que $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ tenha também suficientes injetivos, precisamos pedir algumas hipóteses a mais sobre $\mathcal{A}$ e sobre $\mathcal{C}$. Temos então a próxima proposição:

Proposição 2.7. *Se $\mathcal{A}$ é uma categoria abeliana completa com suficientes injetivos então $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ também tem suficientes injetivos.*

Demonstração. Para mostrar que $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ tem suficientes injetivos usaremos a proposição 1.27 para isso temos que definir dois funtores adjuntos exatos entre $\mathcal{A}$ e $\mathcal{C}(\mathcal{A})$.

Para cada objeto K de $\mathcal{C}$, podemos definir um funtor K^* por

$$\begin{array}{cccc} K^*: & \mathcal{C}(\mathcal{A}) & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ & F & \longmapsto & F(K) \\ & {\scriptstyle\eta}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle\eta_K} \\ & G & & G(K) \end{array}$$

Facilmente vemos que K^* é exato. Agora, para cada A objeto de $\mathcal{A}$ definimos outro funtor $K_*A : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{A}$, onde para cada $C \in Ob(\mathcal{C})$,

$$K_*A(C) = \prod_{Hom_{\mathcal{C}}(C,K)} A,$$

e se $f : C \longrightarrow D$ é um morfismo em $\mathcal{C}$, $K_*A(f)$ é determinada por $f^* : Hom_{\mathcal{C}}(D, K) \longrightarrow Hom_{\mathcal{C}}(C, K)$, onde $f^*(\varphi) = \varphi \circ f$, para qualquer $\varphi \in Hom_{\mathcal{C}}(D, K)$. Ou seja, $K_*A(f)$ funciona como uma projeção onde cada fator A_ϕ do produto $K_*A(C)$ é projetado sobre o fator A_φ do produto $K_*A(D)$, onde $\phi \in Hom_{\mathcal{C}}(C, K)$ é da forma $\phi = f^*(\varphi)$ para algum $\varphi \in Hom_{\mathcal{C}}(D, K)$.

Agora, seja $g : A \longrightarrow B$ um morfismo em $\mathcal{A}$. Podemos definir $K_*g : K_*A \longrightarrow K_*B$ morfismo em $\mathcal{C}(\mathcal{A})$, onde cada $(K_*g)_C : K_*A(C) \longrightarrow K_*B(C)$ é $\prod_{Hom_{\mathcal{C}}(C,K)} g$. Logo K_* pode ser pensado como um funtor de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{C}(\mathcal{A})$:

$$\begin{array}{cccc} K^*: & \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{C}(\mathcal{A}) \\ & A & \longmapsto & K_*A \\ & {\scriptstyle g}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle K_*g} \\ & B & & K_*B. \end{array}$$

Além disso, pelas propriedades de produto, K_* é aditivo.

Afirmação. K_* é adjunto a direita de K^*.

De fato, temos que provar que $Hom_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(F, K_*A) \simeq Hom_{\mathcal{A}}(K^*(F), A)$, para qualquer F objeto de $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ e A objeto de $\mathcal{A}$.

Seja $\alpha : K^*(F) \longrightarrow A$, lembrando que $K^*(F) = F(K)$. Queremos definir $\eta : F \longrightarrow K_*A$, para tal precisamos definir η_C para cada objeto C de $\mathcal{C}$ e mostrar que dado um morfismo $h \in Hom_{\mathcal{C}}(C, D)$ o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} F(C) \arrow[r, "\eta_C"] \arrow[d, "F(h)"'] & K_*A(C) \arrow[d, "K_*A(h)"] \\ F(D) \arrow[r, "\eta_D"'] & K_*A(D). \end{tikzcd} \tag{2.4}$$

Para cada $m \in Hom_{\mathcal{C}}(C, K)$ temos

$$F(C) \xrightarrow{F(m)} F(K) \xrightarrow{\alpha} A.$$

Assim, como $K_*A(C) = \prod_{Hom_{\mathcal{C}}(C,K)} A$ para cada $C \in Ob(\mathcal{C})$, e usando a definição de produto, temos que existe único $\eta_C \in Hom_{\mathcal{A}}(F(C), K_*A(C))$ tal que

$$\begin{tikzcd} & A \\ F(C) \arrow[ur, "\alpha \circ F(m)"] \arrow[r, "\eta_C"'] & K_*A(C). \arrow[u, "p_m"'] \end{tikzcd}$$

Para ter que $\eta = \{\eta_C; c \in Ob(\mathcal{C})\}$ é uma transformação natural falta apenas verificar que (2.4) comuta. Tal comutatividade é verificável usando novamente a definição de produto.

Portanto provamos que dada $\alpha \in Hom_{\mathcal{A}}(K^*(F), A)$ existe única $\eta \in Hom_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(F, K_*A)$. Falta então mostrar que cada $\eta \in Hom_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(F, K_*A)$ vem de um $\alpha \in Hom_{\mathcal{A}}(K^*(F), A)$. Seja então $\eta : F \longrightarrow K_*A$, como $K \in Ob(\mathcal{C})$, existe $\eta_K : F(K) \longrightarrow K_*A(K)$. Notemos que $Id_K \in Hom_{\mathcal{C}}(K, K)$ então temos

$$F(K) \xrightarrow{\eta_K} K_*A(K) \xrightarrow{p_{Id_K}} A.$$

Usando $\alpha = p_{Id_K} \circ \eta_K$ temos o que procurávamos.

Sendo assim, pela proposição 1.27, o funtor K_* preserva injetivos.

Agora seja $F \in Ob(\mathcal{C}(\mathcal{A}))$. Para cada $K \in Ob(\mathcal{C})$ existe um monomorfismo $i_K : F(K) \hookrightarrow I_K$, onde I_K é um objeto injetivo em $\mathcal{A}$ e portanto K_*I_K é um objeto injetivo de $\mathcal{C}(\mathcal{A})$. Seja $G = \prod_{K \in Ob(\mathcal{C})} K_*I_K$, pelo corolário 2.6, G é objeto de $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ e por ser produto de injetivos é também injetivo. Mostraremos agora que existe um monomorfismo do funtor F para G.

Como K^* e K_* são adjuntos, $Hom_{\mathcal{A}}(F(K), I_K) \simeq Hom_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(F, K_*I_K)$ e portanto existe um morfismo correspondente a $i_K : F(K) \hookrightarrow I_K$ que chamaremos de $\eta^{(K)} : F \longrightarrow K_*I_K$.

Seja $p_K : G \longrightarrow K_*I_K$, tal que $(G, \{p_K\}_{K \in Ob(\mathcal{C})})$ é o produto dos K_*I_K.

Então, pela definição de produto, existe único ξ tal que o diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} F \arrow[d, "\xi"'] \arrow[dr, "\eta^{(K)}"] & \\ G \arrow[r, "p_K"'] & K_* I_K \end{tikzcd}$$

Notemos que se $\eta^{(K)}$ for um monomorfismo então ξ será um monomorfismo. Mas cada $\eta_K^{(K)}$ é monomorfismo pois temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} & I_K \\ F(K) \arrow[ur, "i_K"] \arrow[r, "\eta_K^{(K)}"'] & K_* I_K(K). \arrow[u, "p"'] \end{tikzcd}$$

Logo $\xi : F \hookrightarrow G$ é um monomorfismo e portanto $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ tem suficientes injetivos.

□

Corolário 2.8. *Sejam $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana com suficientes injetivos e $\mathcal{C}$ uma categoria com um número finito de objetos e morfismos. Então $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ tem suficientes injetivos.*

2.2.1 Outras propriedades de $\mathcal{C}(\mathcal{A})$

Proposição 2.9. *Seja $\mathcal{A}'$ uma subcategoria fechada por extensões de $\mathcal{A}$. Então $\mathcal{C}(\mathcal{A}')$ é uma subcategoria fechada por extensões de $\mathcal{C}(\mathcal{A})$.*

Demonstração. Sejam F e G objetos de $\mathcal{C}(\mathcal{A}')$, e portanto objetos de $\mathcal{C}(\mathcal{A})$. Seja H um objeto em $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ tal que a seguinte sequência é exata:

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow H \longrightarrow G \longrightarrow 0. \tag{2.5}$$

Logo, para cada morfismo $C \xrightarrow{t} D$ em $\mathcal{C}$ temos o diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & F(C) \arrow[r] \arrow[d, "F(t)"] & H(C) \arrow[r] \arrow[d, "H(t)"] & G(C) \arrow[r] \arrow[d, "G(t)"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & F(D) \arrow[r] & H(D) \arrow[r] & G(D) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \tag{2.6}$$

em $\mathcal{A}$, onde $F(C)$, $G(C)$, $F(D)$ e $G(D)$ são objetos de $\mathcal{A}'$. Como $\mathcal{A}'$ é fechada por extensões, $H(C)$ e $H(D)$ também são objetos de $\mathcal{A}'$. Mas $\mathcal{A}'$ é subcategoria plena e portanto $H(t)$ é um morfismo em $\mathcal{A}'$. Sendo assim, o diagrama (2.6) está em $\mathcal{A}'$, logo a sequência (2.5) está em $\mathcal{C}(\mathcal{A}')$.

Além disso, $\mathcal{C}(\mathcal{A}')$ é subcategoria plena de $\mathcal{C}(\mathcal{A})$.

De fato, sejam F e G em $Ob(\mathcal{C}(\mathcal{A}'))$ e seja $\eta \in Hom_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(F,G)$. Para cada $C \in Ob(\mathcal{C})$, $\eta_C \in Hom_{\mathcal{A}}(F(C),G(C)) = Hom_{\mathcal{A}'}(F(C),G(C))$. Então $\eta \in Hom_{\mathcal{C}(\mathcal{A}')}(F,G)$. □

Proposição 2.10. *Seja $\mathcal{A}'$ uma subcategoria de $\mathcal{A}$ tal que $\mathcal{A}'$ tem suficientes $\mathcal{A}$-injetivos. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria com número finito de objetos e morfismos. Então $\mathcal{C}(\mathcal{A}')$ tem suficientes $\mathcal{C}(\mathcal{A})$-injetivos.*

Demonstração. Seja $F \in Ob(\mathcal{C}(\mathcal{A}'))$, queremos provar que existe uma imersão $F \hookrightarrow I$ onde $I \in Ob(\mathcal{C}(\mathcal{A}'))$ tal que é injetivo em $\mathcal{C}(\mathcal{A})$. Para fazer esta construção usaremos a demonstração da Proposição 2.7

Como $\mathcal{A}'$ tem suficientes $\mathcal{A}$-injetivos, para cada $K \in Ob(\mathcal{C})$, existe um monomorfismo $F(K) \hookrightarrow I_K$, tal que $I_K \in Ob(\mathcal{A}')$ e $_K$ é injetivo em $\mathcal{A}$. Portanto $K_* I_K$ é um objeto em $\mathcal{C}(\mathcal{A}')$ injetivo em $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ (K_* está definido na demonstração da Proposição 2.7).

Defina

$$I = \prod_{K \in Ob(\mathcal{C})} K_* I_K,$$

logo $I \in Ob(\mathcal{C}(\mathcal{A}'))$ e i é injetivo em $\mathcal{C}(\mathcal{A})$). Além disso, pela Proposição 2.7, existe um monomorfismo $F \hookrightarrow I$. □

2.2.2 $\mathcal{A}$ como subcategoria plena de $\mathcal{C}(\mathcal{A})$

Seja $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana. Sejam $D \in Ob(\mathcal{C})$ e $A \in Ob(\mathcal{A})$, definimos o seguinte funtor $I_D(A)$ em $\mathcal{C}(\mathcal{A})$:

$$I_D(A)(C) = \begin{cases} 0 & \text{se } C \neq D \\ A & \text{se } C = D; \end{cases}$$

e dado $t \in Hom_{\mathcal{C}}(C,D)$ definimos:

$$I_D(A)(t) = \begin{cases} Id_A & \text{se } t = Id_D \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Dado $f \in Hom_{\mathcal{A}}(A_1, A_2)$ podemos definir uma transformação natural $\varphi = \{\varphi_C; C \in Ob(\mathcal{C})\}$ de $I_D(A_1)$ para $I_D(A_2)$:

$$\varphi_C = \begin{cases} f & \text{se } C = D \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Sendo assim temos o seguinte funtor:

$$\begin{array}{cccc} I_D: & \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{C}(\mathcal{A}) \\ & A_1 & \longmapsto & I_D(A_1) \\ & \Big\downarrow f & & \Big\downarrow \varphi \\ & A_2 & & I_D(A_2). \end{array}$$

Proposição 2.11. *O funtor I_D definido acima é pleno e fiel para cada $D \in Ob(\mathcal{C})$.*

Demonstração. Sejam A_1 e A_2 objetos de $\mathcal{A}$. Qualquer morfismo $f : A_1 \longrightarrow A_2$ gera uma única transformação natural φ como a definida acima. Além disso, dado que cada grupo $Hom_{\mathcal{A}}(0,0)$, $Hom_{\mathcal{A}}(0, A)$ e $Hom_{\mathcal{A}}(A, 0)$ é o grupo trivial para qualquer $A \in Ob(\mathcal{A})$, a escolha de uma transformação natural entre os funtores $I_D(A_1)$ e $I_D(A_2)$, determina um único morfismo em $Hom_{\mathcal{A}}(A_1, A_2)$. Portanto temos:

$$Hom_{\mathcal{A}}(A_1, A_2) \simeq Hom_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(I_D(A_1), I_D(A_2))$$

□

Proposição 2.12. *O funtor I_D definido acima é um funtor exato para cada $D \in Ob(\mathcal{C})$.*

Demonstração. Seja

$$0 \longrightarrow A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A'' \longrightarrow 0$$

uma sequência exata em $\mathcal{A}$. Queremos provar que

$$0 \longrightarrow I_D(A') \xrightarrow{I_D(f)} I_D(A) \xrightarrow{I_D(g)} I_D(A'') \longrightarrow 0$$

é exata em $\mathcal{C}(\mathcal{A})$.

De fato, $I_D(f)$ é monomorfismo pois $I_D(f)_C$ é monomorfismo para cada $C \in Ob(\mathcal{C})$, visto que $I_D(f)_D = f$ e f é monomorfismo. Analogamente prova-se que $I_D(g)$ é epimorfismo. Além disso, temos que $Ker(I_D(g)) = Im(I_D(f))$, pois $Ker(g) = Im(f)$, logo $Ker(I_D(g))_C = Im(I_D(f))_C$ para todo $C \in Ob(\mathcal{C})$.

Temos, portanto, que I_D é exato para todo $D \in Ob(\mathcal{C})$. □

2.3 Funtor Induzido

Sejam, agora, $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ duas categorias e seja $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ um funtor. Podemos definir um funtor induzido de F, $F_\mathcal{C}$ de $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ em $\mathcal{C}(\mathcal{B})$ por:

$$\begin{array}{rccc} F_\mathcal{C}: & \mathcal{C}(\mathcal{A}) & \longrightarrow & \mathcal{C}(\mathcal{B}) \\ & G & \longmapsto & F_\mathcal{C}(G) := F \circ G \end{array}$$

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "\eta"'] & F \circ G \arrow[d, "F_\mathcal{C}(\eta)"] \\ H & F \circ H \end{tikzcd}$$

Onde $F_\mathcal{C}(\eta) = \{(F_\mathcal{C}(\eta))_C := F(\eta_C) \in Hom_\mathcal{B}(F(G(C)), F(H(C))); C \in Ob(\mathcal{C})\}$.

Vejamos então que propriedades $F_\mathcal{C}$ herda de F.

Proposição 2.13. *Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ categorias aditivas e seja $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ um funtor aditivo . Então o funtor induzido $F_\mathcal{C}$ é aditivo.*

Demonstração. Sejam $\alpha, \beta \in Hom_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(R, S)$. devemos provar que

$$F_\mathcal{C}(\alpha + \beta) = F_\mathcal{C}(\alpha) + F_\mathcal{C}(\beta).$$

Por definição

$$F_\mathcal{C}(\alpha + \beta) = \{F(\alpha_C + \beta_C) \in Hom_{\mathcal{C}(\mathcal{B})}(F(R(C)), F(S(C)) : C \in Ob(\mathcal{C})\},$$

logo, como F é aditivo, $F(\alpha_C + \beta_C) = F(\alpha_C) + F(\beta_C)$ e

$$\begin{aligned} F_\mathcal{C}(\alpha+\beta) &= \{F(\alpha_C) + F(\beta_C) : C \in Ob(\mathcal{C})\} \\ &= \{F(\alpha_C) : C \in Ob(\mathcal{C})\} \bigcup \{F(\beta_C) : C \in Ob(\mathcal{C})\} \\ &= F_\mathcal{C}(\alpha) + F_\mathcal{C}(\beta). \end{aligned}$$

□

Proposição 2.14. *Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ categorias abelianas e seja $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ um funtor. Então F é exato se, e somente se, o funtor induzido $F_\mathcal{C}$ é também exato.*

Demonstração.

($\Longrightarrow$)Seja

$$0 \longrightarrow R' \xrightarrow{\eta} R \xrightarrow{\xi} R'' \longrightarrow 0 \tag{2.7}$$

uma sequência exata em $\mathcal{C}(\mathcal{A})$. Queremos provar que

$$0 \longrightarrow F_\mathcal{C}(R') \xrightarrow{F_\mathcal{C}(\eta)} F_\mathcal{C}(R) \xrightarrow{F_\mathcal{C}(\xi)} F_\mathcal{C}(R'') \longrightarrow 0 \tag{2.8}$$

é exata em $\mathcal{C}(\mathcal{B})$, ou seja, $F_\mathcal{C}(\eta)$ é monomorfismo, $F_\mathcal{C}(\xi)$ é epimorfismo e $Ker(F_\mathcal{C}(\xi)) = Im(F_\mathcal{C}(\eta))$.

Notemos que o fato de (2.7) ser uma sequência exata ocorre se, e somente se, para cada objeto C de $\mathcal{C}$, a seguinte sequência é também exata:

$$0 \longrightarrow R'(C) \xrightarrow{\eta_C} R(C) \xrightarrow{\xi_C} R''(C) \longrightarrow 0.$$

De fato, uma transformação natural μ é monomorfismo (epimorfismo) se, e somente se, μ_C é monomorfismo (epimorfismo). Além disso, pela definição de $Ker(\mu)$, temos que o núcleo de μ_C é $Ker(\mu)(C)$. Analogamente temos que $Im(\mu_C)$ é $Im(\mu)(C)$.

Assim, como F é um funtor exato a sequência

$$0 \longrightarrow F(R'(C)) \xrightarrow{F(\eta_C)} F(R(C)) \xrightarrow{F(\xi_C)} F(R''(C)) \longrightarrow 0.$$

é exata. Mas pela definição de $F_\mathcal{C}$, $F(R'(C)) = F_\mathcal{C}R'(C)$ e $F(\eta_C) = (F_\mathcal{C}(\eta))_C$, respectivamente para R, R'' e ξ. Logo, para cada $C \in Ob(\mathcal{C})$

$$0 \longrightarrow F_\mathcal{C}R'(C) \xrightarrow{(F_\mathcal{C}(\eta))_C} F_\mathcal{C}R(C) \xrightarrow{(F_\mathcal{C}(\xi))_C} F_\mathcal{C}R''(C) \longrightarrow 0.$$

é exata e portanto (2.8) é também exata.

($\Longleftarrow$) Seja

$$0 \longrightarrow A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A'' \longrightarrow 0$$

uma sequência exata em $\mathcal{A}$. Pela Proposição 2.12, temos que I_D é exato para todo $D \in Ob(\mathcal{C})$, logo temos a seguinte sequência eata em $\mathcal{C}(\mathcal{A})$:

$$0 \longrightarrow I_D(A') \xrightarrow{I_D(f)} I_D(A) \xrightarrow{I_D(g)} I_D(A'') \longrightarrow 0.$$

Por hipótese, $F_\mathcal{C}$ é um funtor exato, além disso,

$$\begin{aligned} F_\mathcal{C}(I_D(A)) &= F \circ I_D(A) = I_D(F(A)) \quad \text{e} \\ F_\mathcal{C}(I_D(f)) &= F \circ I_D(f) = I_D(F(f)), \end{aligned}$$

para todo $A \in Ob(\mathcal{A})$ logo temos

$$0 \longrightarrow I_D(F(A')) \xrightarrow{I_D(F(f))} I_D(F(A)) \xrightarrow{I_D(F(g))} I_D(F(A'')) \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata em $\mathcal{C}(\mathcal{B})$. Sendo assim, para cada $C \in Ob(\mathcal{C})$ a sequência

$$0 \longrightarrow (I_D(F(A')))_C \xrightarrow{(I_D(F(f)))_C} (I_D(F(A)))_C \xrightarrow{(I_D(F(g)))_C} (I_D(F(A'')))_C \longrightarrow 0$$

é exata em $\mathcal{B}$. em especial, quando tomamos $C = D$ temos

$$0 \longrightarrow F(A') \xrightarrow{F(f)} F(A) \xrightarrow{F(g)} F(A'') \longrightarrow 0$$

exata em $\mathcal{B}$. Logo temos que F é um funtor exato. □

Proposição 2.15. *Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ categorias e $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ uma equivalência de categorias. Então $F_\mathcal{C} : \mathcal{C}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathcal{B})$ também é uma equivalência.*

Demonstração. Pela proposição 2.16 F é uma equivalência se, e somente se,

i F é pleno e fiel, ou seja, dados A_1 e A_2 em $Ob(\mathcal{A})$, $F : Hom_\mathcal{A}(A_1, A_2) \longrightarrow Hom_\mathcal{B}(F(A_1), F(A_2))$ é bijetora;

ii F é essencialmente sobrejetor, ou seja, dado B objeto em $\mathcal{B}$, existe A objeto em $\mathcal{A}$ tal que $F(A) \simeq B$.

Para verificar que $F_\mathcal{C}$ é equivalência provaremos que $F_\mathcal{C}$ também satisfaz **i** e **ii** anteriores.

Vejamos primeiramente que $F_\mathcal{C}$ é pleno e fiel:

Sejam R_1 e R_2 em $Ob(\mathcal{C}(\mathcal{A}))$, queremos mostrar que $F_\mathcal{C} : Hom_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(R_1, R_2) \longrightarrow Hom_{\mathcal{C}(\mathcal{B})}(F_\mathcal{C}(R_1), F_\mathcal{C}(R_2))$ é sobrejetora e injetora.

Seja $\beta \in Hom_{\mathcal{C}(\mathcal{B})}(F_{\mathcal{C}}(R_1), F_{\mathcal{C}}(R_2))$ então, para cada C objeto de $\mathcal{C}$, $\beta_C \in Hom_{\mathcal{B}}(F(R_1(C)), F(R_2(C)))$, logo como F é pleno, existe $\alpha_C \in Hom_{\mathcal{A}}(R_1(C), R_2(C))$ tal que $F(\alpha_C) = \beta_C$.

Definamos $\alpha = \{\alpha_C; C \in Ob(\mathcal{C})\}$ queremos provar que α é tranformação natural de R_1 em R_2, ou seja, que dado um morfismo $f : C \longrightarrow D$ em $\mathcal{C}$ o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} R_1(C) \arrow[r, "\alpha_C"] \arrow[d, "R_1(f)"'] & R_2(C) \arrow[d, "R_2(f)"] \\ R_1(D) \arrow[r, "\alpha_D"'] & R_2(D). \end{tikzcd} \tag{2.9}$$

Sabemos que β é transformação natural de $F(R_1)$ em $F(R_2)$ e usando que $\beta_C = F(\alpha_C)$, para todo $C \in Ob(\mathcal{C})$,temos

$$\begin{tikzcd} F(R_1(C)) \arrow[r, "F(\alpha_C)"] \arrow[d, "F(R_1(f))"'] & F(R_2(C)) \arrow[d, "F(R_2(f))"] \\ F(R_1(D)) \arrow[r, "F(\alpha_D)"'] & F(R_2(D)) \end{tikzcd}$$

comuta, isto é,

$$F(R_2(f) \circ \alpha_C) = F(\alpha_D \circ R_1(f)).$$

Portanto, usando que F é fiel, $R_2(f) \circ \alpha_C = \alpha_D \circ R_1(f)$ provando a comutatividade de (2.9). Logo $F_{\mathcal{C}}$ é pleno.

Sejam $\alpha^{(1)}$ e $\alpha^{(2)}$ em $Hom_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(R_1, R_2)$ tais que $F_{\mathcal{C}}(\alpha^{(1)}) = F_{\mathcal{C}}(\alpha^{(2)})$. Então, para cada objeto C de $\mathcal{C}$, vale $(F_{\mathcal{C}}(\alpha^{(1)}))_C = (F_{\mathcal{C}}(\alpha^{(2)}))_C$, que por definição implica em $F(\alpha_C^{(1)}) = F(\alpha_C^{(2)})$. Assim, usando que F é fiel, temos $\alpha_C^{(1)} = \alpha_C^{(2)}$ para todo C, portanto $\alpha^{(1)} = \alpha^{(2)}$. Logo $F_{\mathcal{C}}$ é fiel.

Vejamos agora que F_C satisfaz o item **ii**:

Seja S objeto de $\mathcal{C}(\mathcal{B})$, queremos encontrar R em $Ob(\mathcal{C}(\mathcal{A}))$ tal que $F_{\mathcal{C}}(R) \simeq S$, isto é, existe um isomorfismo natural entre $F \circ R$ e S.

Dado que F é essencialmente sobre, para cada C em $Ob(\mathcal{C})$, existe R_C objeto de de $\mathcal{A}$ tal que $F(R_C) \simeq S(C)$ em $\mathcal{B}$. Então existe pelo menos um isomorfismo $\eta_C \in Hom_{\mathcal{B}}(F(R_C), S(C))$. Fixemos tal isomorfismo para cada C em $Ob(\mathcal{C})$ logo para cada $f : C \longrightarrow D$ morfismo em $\mathcal{C}$, temos o seguinte isomorfismo nos Hom's:

$$\begin{array}{ccc} Hom_{\mathcal{B}}(S(C), S(D)) & \simeq & Hom_{\mathcal{B}}(F(R_C), F(R_D)) \\ S(f) & \mapsto & \eta_D^{-1} \circ S(f) \circ \eta_C \end{array}$$

Agora, como F é fiel e pleno, existe único morfismo R_f de $Hom_{\mathcal{B}}(R_C, R_D)$ tal que $F(R_f) = \eta_D^{-1} \circ S(f) \circ \eta_C$.

Assim, pelo fato de η_C estar fixada para cada C, R é um funtor de $\mathcal{C}$ em $\mathcal{A}$ e temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd} F(R(C)) \arrow[r, "\eta_C"] \arrow[d, "F(R(f))"'] & S(C) \arrow[d, "S(f)"] \\ F(R(D)) \arrow[r, "\eta_D"'] & S(D)), \end{tikzcd}$$

de onde concluímos que η é um isomorfismo natural entre $F_{\mathcal{C}}(R)$ e S. Portanto $F_{\mathcal{C}}$ é essencialmente sobre, o que conclui nossa demonstração.

$\square$

Veremos na próxima proposição que com algumas hipóteses adicionais, a recíproca da ultima proposição também é verdadeira.

Proposição 2.16. *Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ categorias aditivas e $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ um funtor aditivo. Então F é uma equivalência de categorias se, e somente se, $F_{\mathcal{C}}$ é uma equivalência de categorias.*

Demonstração. A primeira implicação sai da proposição anterior. Vejamos a recíproca.

Seja $F_{\mathcal{C}} : \mathcal{C}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathcal{B})$ uma equivalência.

(i) Vejamos que F é essencialmente sobre:

Sejam $B \in Ob(\mathcal{B})$ e $D \in Ob(\mathcal{C})$, temos então o funtor $I_D(B) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{B}$ definido na Seção 2.2.2 deste mesmo Capítulo.

Como $F_{\mathcal{C}}$ é uma equivalência, existe $K \in Ob(\mathcal{C}(\mathcal{A}))$ tal que $F_{\mathcal{C}}(K) = I_D(B)$, ou seja $F \circ K \simeq I_D(B)$. Temos, portanto que existe um isomorfismo natural η entre $F \circ K$ e $I_D(B)$. Sendo assim, existe um isomorfismo $\eta_D \in Hom_{\mathcal{B}}(F \circ K(D), I_D(B)(D))$, logo $F(K(D)) \simeq I_D(B)(D) = B$ e $K(D) \in Ob(\mathcal{A})$. Temos portanto F essencialmente sobre.

(ii) Vejamos que F é pleno e fiel:

Sejam A_1 e A_2 objetos de $\mathcal{A}$. Visto na Proposição 2.11 que I_D é pleno e fiel, temos

$$Hom_{\mathcal{A}}(A_1, A_2) \simeq Hom_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(I_D(A_1), I_D(A_2)),$$

além disso, usando que $F_{\mathcal{C}}$ é equivalência

$$Hom_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(I_D(A_1), I_D(A_2)) \simeq Hom_{\mathcal{C}(\mathcal{B})}(F_{\mathcal{C}}(I_D(A_1)), F_{\mathcal{C}}(I_D(A_2))).$$

Mas $F_{\mathcal{C}}(I_D(A_i)) = F \circ I_D(A_i) = I_D(F(A_i))$ logo

$$\begin{aligned} Hom_{\mathcal{C}(\mathcal{B})}(F_{\mathcal{C}}(I_D(A_1)), F_{\mathcal{C}}(I_D(A_2))) &\simeq Hom_{\mathcal{C}(\mathcal{B})}(I_D(F(A_1)), I_D(F(A_2))) \\ &\simeq Hom_{\mathcal{B}}(F(A_1), F(A_2)) \end{aligned}$$

Temos, portanto,

$$Hom_{\mathcal{A}}(A_1, A_2) \simeq Hom_{\mathcal{B}}(F(A_1), F(A_2)).$$

$\square$

Capítulo 3

As Categorias $D(\mathcal{C}(\mathcal{A}))$ e $\mathcal{C}(D(\mathcal{A}))$

Dadas $\mathcal{C}$ uma categoria pequena e $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana já provamos que $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ é também abeliana, logo faz sentido pensar na categoria derivada da categoria de funtores $D(\mathcal{C}(\mathcal{A}))$. Nosso objetivo neste capítulo é comparar $D(\mathcal{C}(\mathcal{A}))$ com a categoria de funtores de $\mathcal{C}$ em $D(\mathcal{A})$, $\mathcal{C}(D(\mathcal{A}))$.

Provaremos que $D(\mathcal{C}(\mathcal{A}))$ não é em geral equivalente a $\mathcal{C}(D(\mathcal{A}))$. Inicialmente demonstraremos que as categorias $Kom(\mathcal{C}(\mathcal{A}))$ e $\mathcal{C}(Kom(\mathcal{A}))$ são isomorfas. Usando este isomorfismo podemos garantir a existência de um funtor $T : D(\mathcal{C}(\mathcal{A})) \longrightarrow \mathcal{C}(D(\mathcal{A}))$ tal que se definimos $\mathcal{Q}$ como a categoria gerada por um quiver finito sem relações, o funtor $T : D(\mathcal{Q}(\mathcal{A})) \longrightarrow \mathcal{Q}(D(\mathcal{A}))$ é pleno e fiel, ou seja, existe em $\mathcal{Q}(D(\mathcal{A}))$ uma subcategoria plena equivalente a $D(\mathcal{Q}(\mathcal{A}))$. Além disso, se o quiver Q não possui flechas teremos que T é uma equivalência.

3.1 O isomorfismo entre $Kom(\mathcal{C}(\mathcal{A}))$ e $\mathcal{C}(Kom(\mathcal{A}))$

Um objeto $(F^\bullet, d_F)$ em $Kom(\mathcal{C}(\mathcal{A}))$ é um complexo na categoria de funtores $\mathcal{C}(\mathcal{A})$, ou seja, é uma sequência do tipo

$$\cdots \longrightarrow F^{n-1} \xrightarrow{d_F^{n-1}} F^n \xrightarrow{d_F^n} F^{n+1} \longrightarrow \cdots$$

onde cada $F^i : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{A}$ é um funtor e cada morfismo d^i_F é uma transformação natural entre F^i e F^{i+1}, $i \in \mathbb{Z}$, isto é $d^i_F = \{(d^i_F)_C \in Hom_{\mathcal{A}}(F^i(C), F^{i+1}(C)); C \in Ob(\mathcal{C})\}$, onde, dado $C \xrightarrow{t} D$ morfismo em $\mathcal{C}$ temos $F^{i+1}(t) \circ (d^i_F)_C = (d^i_F)_D \circ F^i(t))$. Logo, para cada $C \in Ob(\mathcal{C})$, temos um objeto $(F(C)^\bullet, d_{F(C)})$ em $Kom(\mathcal{A})$:

$$\cdots \longrightarrow F^{n-1}(C) \xrightarrow{(d_F^{n-1})_C} F^n(C) \xrightarrow{(d_F^n)_C} F^{n+1}(C) \longrightarrow \cdots .$$

Um morfismo $\eta^\bullet \in Hom_{Kom(\mathcal{C}(\mathcal{A}))}((F^\bullet, d_F), (G^\bullet, d_G))$ é uma familia de transformações naturais $\eta^\bullet = \{\eta^i \in Hom_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(F^i, G^i)/ d^i_G \circ \eta^i = \eta^{i+1} \circ d^i_F; i \in \mathbb{Z}\}$. Ou seja, para cada morfismo $C \xrightarrow{t} D$ em $\mathcal{C}$ o cubo comutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & G^{i-1}(C) \arrow[drr, "(d_G^{i-1})_C"] \arrow[ddd, "G^{i-1}(t)"] & & \\
F^{i-1}(C) \arrow[ur, "\eta_C^{i-1}"] \arrow[drr, "(d_F^{i-1})_C"'] \arrow[ddd, "F^{i-1}(t)"] & & & G^i(C) \arrow[ddd, "G^i(t)"] \\
 & & F^i(C) \arrow[ur, "\eta_C^i"] \arrow[ddd, "F^i(t)"] & \\
 & G^{i-1}(D) \arrow[drr, "(d_G^{i-1})_D"] & & \\
F^{i-1}(D) \arrow[ur, "\eta_D^{i-1}"] \arrow[drr, "(d_F^{i-1})_D"'] & & & G^i(D) \\
 & & F^i(D) \arrow[ur, "\eta_D^i"] &
\end{tikzcd} \tag{3.1}$$

Fixada a notação temos o seguinte Lema:

Lema 3.1. *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria pequena e $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana. Então as categorias $Kom(\mathcal{C}(\mathcal{A}))$ e $\mathcal{C}(Kom(\mathcal{A}))$ são isomorfas.*

Demonstração. Queremos encontrar funtores $K : Kom(\mathcal{C}(\mathcal{A})) \longrightarrow \mathcal{C}(Kom(\mathcal{A}))$ e $K' : \mathcal{C}(Kom(\mathcal{A})) \longrightarrow Kom(\mathcal{C}(\mathcal{A}))$ tais que $K \circ K' = 1_{\mathcal{C}(Kom(\mathcal{A}))}$ e $K' \circ K = 1_{Kom(\mathcal{C}(\mathcal{A}))}$.

Primeiramente definiremos K:

Seja $(F^\bullet, d_F)$ um objeto em $Kom(\mathcal{C}(\mathcal{A}))$, definimos $K((F^\bullet, d_F))$ como sendo o funtor F de $\mathcal{C}$ em $Kom(\mathcal{A})$ definido por:

$$\begin{array}{rcll} F: & \mathcal{C} & \longrightarrow & Kom(\mathcal{A}) \\ & C & \longmapsto & (F(C)^\bullet, d_{F(C)}) \\ & \Big\downarrow t & & \Big\downarrow F(t)^\bullet \\ & D & & (F(D)^\bullet, d_{F(D)}) \end{array}$$

onde $F(t)^\bullet = \{(F(t))^i = F^i(t); i \in \mathbb{Z}\}$. Notemos que $F(t)^\bullet$ é um morfismo em $Kom(\mathcal{A})$. De fato, como cada d_F^i é uma transformação natural e cada F^i é um funtor, o diagrama

$$\begin{tikzcd} F^i(C) \arrow[r, "(d_F^i)_C"] \arrow[d, "F^i(t)"'] & F^{i+1}(C) \arrow[d, "F^{i+1}(t)"] \\ F^i(D) \arrow[r, "(d_F^i)_D"'] & F^{i+1}(D) \end{tikzcd}$$

comuta para todo $i \in \mathbb{Z}$ e para todo $C \xrightarrow{t} D$ morfismo em $\mathcal{C}$.

Seja agora $\eta^\bullet \in Hom_{Kom(\mathcal{C}(\mathcal{A}))}((F^\bullet, d_F), (G^\bullet, d_G))$, então temos:

$$\begin{aligned} \eta^\bullet &= \{\eta^i \in Hom_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(F^i, G^i) / d_G^i \circ \eta^i = \eta^{i+1} \circ d_F^i; i \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{(\eta^i)_C \in Hom_{\mathcal{A}}(F^i(C), G^i(C)) \text{ tal que} \\ &\quad (d_G^i \circ \eta^i)_C = (\eta^{i+1} \circ d_F^i)_C;\ i \in \mathbb{Z},\ C \in Ob(\mathcal{C})\}. \end{aligned}$$

Definimos

$$\begin{aligned} \eta := K(\eta^\bullet) &= \{(\eta_C)^\bullet \in Hom_{Kom(\mathcal{A})}(F(C)^\bullet, G(C)^\bullet); C \in Ob(\mathcal{C})\} \\ &= \{(\eta_C)^i \in Hom_{\mathcal{A}}(F(C))^i, (G(C))^i)) \text{tal que} \\ &\quad (d_G^i \circ \eta^i)_C = (\eta^{i+1} \circ d_F^i)_C; i \in \mathbb{Z}, C \in Ob(\mathcal{C})\}. \end{aligned}$$

Pelo cubo comutativo (3.1), temos que η é transformação natural entre os funtores $F = K((F^\bullet, d_F))$ e $G = K((G^\bullet, d_G))$.

Resumindo, temos que K é o seguinte funtor:

$$\begin{array}{rcll} K: & Kom(\mathcal{C}(\mathcal{A})) & \longrightarrow & \mathcal{C}(Kom(\mathcal{A})) \\ & (F^\bullet, d_F) & \longmapsto & F \\ & \Big\downarrow \eta^\bullet & & \Big\downarrow \eta \\ & (G^\bullet, d_G) & & G \end{array}$$

Vamos agora definir K':

Seja $F \in Ob(\mathcal{C}(Kom(\mathcal{A})))$. Então, para cada $C \in Ob(\mathcal{C})$, $F(C)$ é um complexo em $\mathcal{A}$ e para cada $t \in Hom_{\mathcal{C}}(C, D)$, $F(t)$ é um morfismo de complexos:

$$\begin{tikzcd}
F(C) = \arrow[d, "F(t)"] & \cdots \arrow[r] & F(C)^{n-1} \arrow[r, "d^{n-1}_{F(C)}"] \arrow[d, "F(t)^{n-1}"] & F(C)^n \arrow[r, "d^n_{F(C)}"] \arrow[d, "F(t)^n"] & F(C)^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "F(t)^{n+1}"] & \cdots \\
F(D) = & \cdots \arrow[r] & F(D)^{n-1} \arrow[r, "d^{n-1}_{F(D)}"] & F(D)^n \arrow[r, "d^n_{F(D)}"] & F(D)^{n+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Logo, por F ser um funtor de $\mathcal{C}$ em $Kom(\mathcal{A})$, temos facilmente cada F^i definido por

$$\begin{array}{cccc}
F^i: & \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathcal{A} \\
& C & \longmapsto & F^i(C) = F(C)^i \\
& \Big\downarrow t & & \Big\downarrow F^i(t)=F(t)^i \\
& D & & F^i(D) = F(D)^i
\end{array}$$

ou seja, cada F^i é um funtor de $\mathcal{C}$ em $\mathcal{A}$. Além disso, podemos definir para cada $i \in \mathbb{Z}$, $d^i_F = \{d^i_{F(C)} \in Hom_{\mathcal{A}}(F(C)^i, F(C)^{i+1}); C \in Ob(\mathcal{C})\}$ que, pela definição de F, é transformação natural satisfazendo $d^{i+1}_F \circ d^i_F = 0$, para todo $i \in \mathbb{Z}$. Portanto

$$\cdots \longrightarrow F^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}_F} F^n \xrightarrow{d^n_F} F^{n+1} \longrightarrow \cdots$$

é um objeto de $Kom(\mathcal{C}(\mathcal{A}))$ que será a imagem de F pelo funtor K'.

Seja agora η uma transformação natural entre F e G, logo

$$\begin{aligned}
\eta &= \{\eta_C \in Hom_{Kom(\mathcal{A})}(F(C)^\bullet, G(C)^\bullet); C \in Ob(\mathcal{C})\} \\
&= \{(\eta_C)^i \in Hom_{\mathcal{A}}(F(C))^i, (G(C))^i)\text{tal que} \\
&\quad (d^i_G \circ \eta^i)_C = (\eta^{i+1} \circ d^i_F)_C; i \in \mathbb{Z}, C \in Ob(\mathcal{C})\}.
\end{aligned}$$

Ou seja, $\eta = \{(\eta_C)^\bullet \in Hom_{Kom(\mathcal{A})}(F(C)^\bullet, G(C)^\bullet); C \in Ob(\mathcal{C})\}$.

Definamos

$$\begin{aligned}
\eta^\bullet = K'(\eta) &= \{(\eta_C)^\bullet \in Hom_{Kom(\mathcal{A})}(F(C)^\bullet, G(C)^\bullet); C \in Ob(\mathcal{C})\} \\
&= \{(\eta_C)^i \in Hom_{\mathcal{A}}(F(C))^i, (G(C))^i)\text{tal que} \\
&\quad (d^i_G \circ \eta^i)_C = (\eta^{i+1} \circ d^i_F)_C; i \in \mathbb{Z}, C \in Ob(\mathcal{C})\}.
\end{aligned}$$

Portanto, pela comutatividade do cubo (3.1), temos que $K'(\eta)$ é um morfismo em $Kom(\mathcal{C}(\mathcal{A}))$ de $(F^\bullet, d_F)$ em $(G^\bullet, d_G)$.

Resumindo K' é:

$$\begin{array}{cccc} K': & \mathcal{C}(Kom(\mathcal{A})) & \longrightarrow & Kom(\mathcal{C}(\mathcal{A})) \\ & F & \longmapsto & (F^\bullet, d_F) \\ & \Big\downarrow \eta & & \Big\downarrow \eta^\bullet \\ & G & & (G^\bullet, d_G). \end{array}$$

Sendo assim, temos que K manda $(\eta^i)_C \longmapsto (\eta_C)^i$ e K' manda $(\eta_C)^i \longmapsto (\eta^i)_C$. Portanto K e K' atuam como a identidade sobre os $Hom's$ pois é apenas uma mudaça da posição dos indices. Verifica-se facilmente que $K \circ K'$ e $K' \circ K$, sobre os objetos, são os funtores identidades das respectivas categorias $\mathcal{C}(Kom(\mathcal{A}))$ e $Kom(\mathcal{C}(\mathcal{A}))$.

Concluímos, portanto, que $\mathcal{C}(Kom(\mathcal{A}))$ e $Kom(\mathcal{C}(\mathcal{A}))$ são isomorfas. □

Devemos observar que, analogamente, prova-se que $Kom^*(\mathcal{C}(\mathcal{A}))$ e $\mathcal{C}(Kom^*(\mathcal{A}))$ também são categorias isomorfas, para $* = +, -$ ou b.

Seja a categoria $Kom_0(\mathcal{A})$ definida no Capítulo 1:

Corolário 3.2. *Sob as mesmas hipóteses do lema anterior,* $Kom_0(\mathcal{C}(\mathcal{A}))$ *e* $\mathcal{C}(Kom_0(\mathcal{A}))$ *são categorias isomorfas.*

3.2 Descrição das categorias $D(\mathcal{C}(\mathcal{A}))$ e $\mathcal{C}(D(\mathcal{A}))$

Esta seção será dedicada a entender as principais características das categorias $D(\mathcal{C}(\mathcal{A}))$ e $\mathcal{C}(D(\mathcal{A}))$. Para isso usaremos a equivalência K apresentada na seção anterior.

3.2.1 A categoria $D(\mathcal{C}(\mathcal{A}))$

Pela definição de categoria derivada, sabemos que os objetos de $D(\mathcal{C}(\mathcal{A}))$ são os mesmos objetos da categoria $Kom(\mathcal{C}(\mathcal{A}))$. Logo, usando a equivalência K, podemos pensar nos objetos de $D(\mathcal{C}(\mathcal{A}))$ como objetos de $\mathcal{C}(Kom(\mathcal{A}))$, ou seja, a cada $F^\bullet \in Ob(D(\mathcal{C}(\mathcal{A})))$ associamos um funtor $F : \mathcal{C} \longrightarrow Kom(\mathcal{A})$.

Um morfismo $F^\bullet \longrightarrow G^\bullet$ em $D(\mathcal{C}(\mathcal{A}))$ é uma classe de diagramas da forma:

$$\begin{tikzcd} & H^\bullet \arrow[dl, "{[\alpha]}"'] \arrow[dr, "{[f]}"] & \\ F^\bullet & & G^\bullet, \end{tikzcd} \tag{3.2}$$

onde $[f]$ e $[\alpha]$ são morfismos em $K(\mathcal{C}(\mathcal{A}))$.

Notemos que se $f \sim g$ em $Kom(\mathcal{C}(\mathcal{A}))$ então $f_C \sim g_C$ em $Kom(\mathcal{A})$, para todo $C \in Ob(\mathcal{C})$. Lembrando que a notação f_C vem, por abuso de notação, pensando na equivalência de $Kom(\mathcal{C}(\mathcal{A}))$ com $\mathcal{C}(Kom(\mathcal{A}))$.

Além disso, provaremos adiante que, se α é um quase-isomorfismo em $Kom(\mathcal{C}(\mathcal{A}))$ então α_C é um quase-isomorfismo em $Kom(\mathcal{A})$. Portanto, dado o diagrama (3.2) temos, para cada morfismo $C \in Ob(\mathcal{C})$, um diagrama em $D(\mathcal{A})$:

$$\begin{tikzcd} & H(C) \arrow[dl, "{[\alpha_C]}"'] \arrow[dr, "{[f_C]}"] & \\ F(C) & & G(C), \end{tikzcd}$$

onde $H(C), F(C)$ e $G(C)$ são objetos de $Kom(\mathcal{A})$ induzidos pela equivalência K. E para cada morfismo $C \xrightarrow{t} D$ em $\mathcal{C}$ temos o seguinte diagrama em $K(\mathcal{A})$, onde cada quadrado é comutativo:

$$\begin{tikzcd} & H(C) \arrow[rr, "H(t)"] \arrow[dl, "\alpha_C"'] \arrow[ddl, "f_C" near end] & & H(D) \arrow[dl, "\alpha_D"'] \arrow[ddl, "f_D"] \\ F(C) \arrow[rr, "F(t)" near start] & & F(D) & \\ G(C) \arrow[rr, "G(t)"'] & & G(D). & \end{tikzcd} \tag{3.3}$$

Vamos então demonstrar que um quase-isomorfismo α em $Kom(\mathcal{C}(\mathcal{A}))$ induz um quase-isomorfismo α_C em $Kom(\mathcal{A})$. Para este resultado, usaremos o seguinte lema, cuja demonstração pode ser encontrada em [12], Corolário 2.11.9, página 97.

Lema 3.3. *Seja* $\psi : S \longrightarrow T$ *um morfimos em* $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ *com núcleo* (θ, K)*. Então* $(\theta_C, K(C))$ *é núcleo de* $\psi_C : S(C) \longrightarrow T(C)$.

Proposição 3.4. *se α é quase-isomorfismo em $Kom(\mathcal{C}(\mathcal{A}))$ então α_C é quase-isomorfismo em $Kom(\mathcal{A})$.*

Demonstração. Seja $\alpha \in Hom_{Kom(\mathcal{C}(\mathcal{A}))}(F^\bullet, G^\bullet)$ um quase-isomorfismo, isto é, temos que $H^i(\alpha)$ é um isomorfismo em $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ para todo i. Temos portanto que $(H^i(\alpha))_C$ é isomorfismo para todo C em $\mathcal{C}$.

Pela equivalência K podemos considerar $\alpha : F \longrightarrow G$ em $\mathcal{C}(Kom(\mathcal{A}))$. Queremos provar que $\alpha_C : F(C) \longrightarrow G(C)$ em $Kom(\mathcal{A})$ é um quase-isomorfismo para todo $C \in Ob(\mathcal{C})$, isto é, $H^i(\alpha_C)$ é isomorfismo para todo $C \in Ob(\mathcal{C})$.

Por definição temos que $H^{n+1}(F^\bullet) = Coker(a^n)$ e que $H^{n+1}(G^\bullet) = Coker(b^n)$, onde a^n e b^n são:

$$\begin{tikzcd}
F^n \arrow[r, "d_F^n"] \arrow[dr, "a^n"'] & F^{n+1} \arrow[r, "d_F^{n+1}"] & \cdots \\
& Ker(d_F^{n+1}) \arrow[u, hook] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
G^n \arrow[r, "d_G^n"] \arrow[dr, "b^n"'] & G^{n+1} \arrow[r, "d_G^{n+1}"] & \cdots \\
& Ker(d_G^{n+1}). \arrow[u, hook] &
\end{tikzcd}$$

Assim, pelo Lema 3.3,

$$(H^{n+1}(F^\bullet))(C) = (Coker(a^n))(C) = Coker(a_C^n) = H^{n+1}(F(C))$$

e analogamente $(H^{n+1}(G^\bullet))(C) = H^{n+1}(G(C))$. Além disso, vale o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
F^n(C) \arrow[r, "(d_F^n)_C"] \arrow[rrr, bend left, "\alpha_C^n"] \arrow[dr, "a_C^n"'] & F^{n+1}(C) \arrow[r, "\alpha_C^{n+1}"] & G^{n+1}(C) & G^n(C) \arrow[l, "(d_G^n)_C"'] \arrow[dl, "b_C^n"] \\
& Ker((d_F^{n+1})_C) \arrow[u, hook] \arrow[r, "\alpha_C^{n+1}"] \arrow[d, "p_C"'] & Ker((d_G^{n+1})_C). \arrow[u, hook] \arrow[d, "q_C"] & \\
& H^{n+1}(F(C)) \arrow[r, dashed, "r_C"] & H^{n+1}(G(C)), &
\end{tikzcd}$$

onde $q \circ \alpha_C^{n+1} \circ a_C^n = q_C \circ b_C^n \circ \alpha_C^n$, mas $q_C \circ b_C^n = 0$ então $q_C \circ \alpha_C^{n+1} \circ a_C^n = 0$ pela definição de conúcleo, existe único morfismo r_C tal que $r_C \circ p = q \circ f^{n+1}$. Mas, tanto $(H^{n+1}(\alpha))_C$ quanto $H^{n+1}(\alpha_C)$ fazem o quadrado inferior no diagrama comutar, logo, pela unicidade, $(H^{n+1}(\alpha))_C = H^{n+1}(\alpha_C)$. Portanto $H^{n+1}(\alpha_C)$ é um isomorfismo, de onde α_C é um quase-isomorfismo para todo $C \in Ob(\mathcal{C})$. □

3.2.2 A categoria $\mathcal{C}(D(\mathcal{A}))$

Os objetos desta categoria são funtores de $\mathcal{C}$ em $D(\mathcal{A})$, logo se F é objeto de $\mathcal{C}(D(\mathcal{A}))$ e $C \xrightarrow{t} D$ é morfismo em $\mathcal{C}$ teremos que $F(t) = [F_D(t)/F_C(t)]$ é uma classe de diagramas:

$$\begin{tikzcd} & F_{CD} \arrow[dl, "F_C(t)"'] \arrow[dr, "F_D(t)"] & \\ F(C) & & F(D). \end{tikzcd}$$

Agora se $F \xrightarrow{\eta} G$ é um morfismo em $\mathcal{C}(D(\mathcal{A}))$, para cada $C \in Ob(\mathcal{C})$ temos $F(C) \xrightarrow{\eta_C} G(C)$, em $D(\mathcal{A})$, onde $\eta_C = [\eta_G/\eta_F]$ representa uma classe de diagramas:

$$\begin{tikzcd} & H_{\eta_C} \arrow[dl, "\eta_F"'] \arrow[dr, "\eta_G"] & \\ F(C) & & G(C). \end{tikzcd}$$

Como η é uma transformação natural entre F e G, dado um morfismo $C \xrightarrow{t} D$ em $\mathcal{C}$ temos o seguinte diagrama comutativo em $D(\mathcal{A})$:

$$\begin{tikzcd} F(C) \arrow[r, "\eta_C"] \arrow[d, "F(t)"'] & G(C) \arrow[d, "G(t)"] \\ F(D) \arrow[r, "\eta_D"'] & G(D). \end{tikzcd}$$

Ou podemos reescrever para o diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
 & F_{CD} \arrow[ddl, "F_C(t)"'] \arrow[ddddl, "F_D(t)"] & & & G_{CD} \arrow[dl, "G_C(t)"'] \arrow[ddddl, "G_D(t)"] \\
 & & H_{\eta_C} \arrow[dll, "\eta_{FC}"'] \arrow[dr, "\eta_{GC}"] & & \\
F(C) \arrow[rrr, dashed] \arrow[dd, dashed, two heads] & & & G(C) \arrow[dd, dashed, two heads] & \\
 & & H_{\eta_D} \arrow[dll, "\eta_{FD}"'] \arrow[dr, "\eta_{GD}"] & & \\
F(D) \arrow[rrr, dashed] & & & G(D). &
\end{tikzcd}
$$

3.3 O funtor T

Sendo $Q : Kom(\mathcal{A}) \longrightarrow D(\mathcal{A})$ o funtor de localização. Podemos definir o funtor induzido $Q_\mathcal{C}$:

$$
\begin{array}{cccc}
Q_\mathcal{C}: & \mathcal{C}(Kom(\mathcal{A})) & \longrightarrow & \mathcal{C}(D(\mathcal{A})) \\
 & F & \longmapsto & Q \circ F \\
 & \Big\downarrow{\scriptstyle \eta} & & \Big\downarrow{\scriptstyle Q_\mathcal{C}(\eta)} \\
 & G & & Q \circ G
\end{array}
$$

onde $Q_\mathcal{C}(\eta) = \{Q(\eta_C) \in Hom_{D(\mathcal{A})}(QF(C), QG(C)); C \in Ob(\mathcal{C})\}$. Lembrando que $QF(C) = F(C)$, $QG(C) = G(C)$ e $Q(\eta_C) = [\eta_C/Id]$, sendo representado pelo seguinte diagrama em $D(\mathcal{A})$:

$$
\begin{tikzcd}
 & F(C) \arrow[dl, "Id"'] \arrow[dr, "\eta_C"] & \\
F(C) & & G(C)
\end{tikzcd}
\tag{3.4}
$$

Proposição 3.5. *Seja $K : Kom(\mathcal{C}(\mathcal{A})) \longrightarrow \mathcal{C}(Kom(\mathcal{A}))$ a equivalência do Lema 3.1 e $Q_\mathcal{C}$ o funtor definido acima. Então $Q_\mathcal{C} \circ K$ leva quase isomorfismo em isomorfismos.*

Demonstração. Seja $\eta^\bullet \in Hom_{Kom(\mathcal{C}(\mathcal{A}))}((F^\bullet, d_F), (G^\bullet, d_G))$ um quase-isomorfismo. Isto significa que $H^i(\eta^\bullet) : H^i(F^\bullet) \longrightarrow H^i(G^\bullet)$ é um isomorfismo na categoria $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ para todo $i \in \mathbb{Z}$, logo $(H^i(\eta^\bullet))_C : (H^i(F^\bullet))(C) \longrightarrow (H^i(G^\bullet))(C)$ é isomorfismo na categoria $\mathcal{A}$ para cada $C \in Ob(\mathcal{C})$.

Queremos provar que $Q_\mathcal{C}(\eta)$ é um isomorfismo em $\mathcal{C}(D(\mathcal{A}))$, ou seja, que para cada $C \in Ob(\mathcal{C})$, η_C do diagrama (3.4) é um quase-isomorfismo em $Kom(\mathcal{A})$. Portanto, queremos provar que se $(H^i(\eta^\bullet))_C$ é isomorfismo então $H^i(\eta_C)$ também é um isomorfismo. Mas, esta afirmação já foi demonstrada na Proposição 3.4, de onde temos o resultado desejado. □

Seja $\overline{Q} : Kom(\mathcal{C}(\mathcal{A})) \longrightarrow D(\mathcal{C}(\mathcal{A}))$ o funtor de localização para a categoria $\mathcal{C}(\mathcal{A})$. Acabamos de demonstrar que o funtor $Q_\mathcal{C} \circ K : Kom(\mathcal{C}(\mathcal{A})) \longrightarrow \mathcal{C}(D(\mathcal{A}))$ leva quase-isomorfimos em isomorfismo. Portanto, pela definição de categoria derivada, existe único funtor $T : D(\mathcal{C}(\mathcal{A})) \longrightarrow \mathcal{C}(D(\mathcal{A}))$ tal que $T \circ \overline{Q} = Q_\mathcal{C} \circ K$, ou seja, existe único T tal que o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{tikzcd} Kom(\mathcal{C}(\mathcal{A})) \arrow[r, "\overline{Q}"] \arrow[d, "K"'] & D(\mathcal{C}(\mathcal{A})) \arrow[d, dashed, "T"] \\ \mathcal{C}(Kom(\mathcal{A})) \arrow[r, "Q_\mathcal{C}"] & \mathcal{C}(D(\mathcal{A})). \end{tikzcd} \tag{3.5}$$

Vejamos que tal T pode ser definido da seguinte forma:

$$T : \quad D(\mathcal{C}(\mathcal{A})) \longrightarrow \mathcal{C}(D(\mathcal{A}))$$

$$\begin{tikzcd} & H^\bullet \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "f"] & & T(F^\bullet) = Q_\mathcal{C}(F) \arrow[d, "T({[f/\alpha]})"] \\ F^\bullet & & G^\bullet & T(G^\bullet) = Q_\mathcal{C}(G), \end{tikzcd} \tag{3.6}$$

onde F e G são, respectivamente, as imagem de $F^\bullet$ e $G^\bullet$ pelo funtor K e $T([f/\alpha]) = \{(T([f/\alpha]))_C := [f_C/\alpha_C]; C \in Ob(\mathcal{C})\}$.

Primeiramente devemos verificar que T é de fato um funtor de $D(\mathcal{C}(\mathcal{A}))$ em $\mathcal{C}(D(\mathcal{A}))$.

Seja $F^\bullet \in Ob(D(\mathcal{C}(\mathcal{A})))$, definimos $T(F^\bullet) = Q_\mathcal{C}(F)$, onde $F = K(F^\bullet)$. Logo $F \in Ob(\mathcal{C}(Kom(\mathcal{A}))$ e portanto $T(F^\bullet)$ é um objeto de $\mathcal{C}(D(\mathcal{A}))$. Vejamos que $T([f/\alpha])$ é um morfismo em $\mathcal{C}(D(\mathcal{A}))$, ou seja, vejamos que $T([f/\alpha])$ é uma transformação natural. Para isso, basta verificar que dado um morfismo

$C \xrightarrow{t} D$ em $\mathcal{C}$ o diagrama

$$\begin{tikzcd}
F(C) \arrow[r, "{[f_C/\alpha_C]}"] \arrow[d, "{[F(t)/Id]}"'] & G(C) \arrow[d, "{[G(t)/Id]}"] \\
F(D) \arrow[r, "{[f_D/\alpha_D]}"'] & G(D)
\end{tikzcd}$$

comuta, ou seja, temos que verificar que

$$[G(t)/Id] \circ [f_C/\alpha_C] = [f_D/\alpha_D] \circ [F(t)/Id].$$

Notemos que cada lado da igualdade é representado por um dos triângulos abaixo

$$\begin{tikzcd}
 & & H(C) \arrow[dl, "Id"'] \arrow[dr, "f_C"] & & \\
 & H(C) \arrow[dl, "\alpha_c"'] \arrow[dr, "f_C"] & & G(C) \arrow[dl, "Id"'] \arrow[dr, "G(t)"] & \\
F(C) & & G(C) & & G(D)
\end{tikzcd}$$

logo $[G(t)/Id] \circ [f_C/\alpha_C] = [G(f) \circ f_C/\alpha_C]$ e

$$\begin{tikzcd}
 & & H(C) \arrow[dl, "\alpha_C"'] \arrow[dr, "H(t)"] & & \\
 & F(C) \arrow[dl, "Id"'] \arrow[dr, "F(t)"] \arrow[rr, phantom, "{[1]}"] & & H(D) \arrow[dl, "\alpha_D"'] \arrow[dr, "f_D"] & \\
F(C) & & F(D) & & G(D)
\end{tikzcd}$$

também $[f_D/\alpha_D] \circ [F(t)/Id] = [f_D \circ H(t)/\alpha_C]$.

A comutatividade do quadrado [1] e a igualdade $[G(t) \circ f_C/\alpha_C] = [f_D \circ H(t)/\alpha_C]$ vem de que o morfismo $F^\bullet \xrightarrow{[f/\alpha]} G^\bullet$ em $D(\mathcal{C}(\mathcal{A}))$ induz, para cada morfismo $C \xrightarrow{t} D$ na categoria $\mathcal{C}$, um diagrama em $K(\mathcal{A})$ como o diagrama (3.3).

Vejamos agora que T esta bem definido, isto é, dados $[f_1/\alpha_1] = [f_2/\alpha_2]$ temos que demonstrar que $T([f_1/\alpha_1]) = T([f_2/\alpha_2])$:

Sejam $[f_1/\alpha_1] = [f_2/\alpha_2]$, ou seja, que as seguintes classes de diagramas são equivalentes:

$$\begin{tikzcd} & H_1 \arrow[dl, "\alpha_1"'] \arrow[dr, "f_1"] & \\ F_1 & & G_1 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & H_2 \arrow[dl, "\alpha_2"'] \arrow[dr, "f_2"] & \\ F_2 & & G_2 \end{tikzcd}$$

então existem quase-isomorfismos $H_1^\bullet \xleftarrow{\gamma} R \xrightarrow{\delta} H_2^\bullet$ tais que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} & & R^\bullet \arrow[dl, "\gamma"'] \arrow[dr, "\delta"] & & \\ & H_1^\bullet \arrow[dl, "\alpha_1"'] \arrow[drrr, "f_1"' near end] & & H_2^\bullet \arrow[dlll, "\alpha_2" near end] \arrow[dr, "f_2"] & \\ F^\bullet & & & & G^\bullet. \end{tikzcd}$$

$T([f_1/\alpha_1]) = T([f_2/\alpha_2])$ se, e somente se, $[(f_1)_C/(\alpha_1)_C] = [(f_2)_C/(\alpha_2)_C]$ para cada $C \in Ob(\mathcal{C})$. Gostaríamos então de encontrar quase-isomorfismos $H_1(C) \xleftarrow{\gamma_C} R_C \xrightarrow{\delta_C} H_2(C)$ tais que

$$\begin{tikzcd} & & R_C \arrow[dl, "\gamma_C"'] \arrow[dr, "\delta_C"] & & \\ & H_1(C) \arrow[dl, "(\alpha_1)_C"'] \arrow[drrr, "(f_1)_C"' near end] & & H_2(C) \arrow[dlll, "(\alpha_2)_C" near end] \arrow[dr, "(f_2)_C"] & \\ F(C) & & & & G(C). \end{tikzcd}$$

comuta para C objeto de $\mathcal{C}$. Estes quase-isomorfismos são dados pelos quase-isomorfismos $H_1^\bullet \xleftarrow{\gamma} R \xrightarrow{\delta} H_2^\bullet$. Logo temos o que queríamos.

Faltam verificar as duas propriedades de funtor, e para estas demonstrações usaremos o seguinte lema:

Lema 3.6. *Dado o diagrama*

$$\begin{tikzcd}
& X'' \arrow[dl, "t"'] \arrow[ddl, "f"] \arrow[rr, dashed, "u''"] & & Y'' \arrow[dl, "s"'] \arrow[ddl, "g"] \\
X \arrow[rr, "u"] & & Y & \\
X' \arrow[rr, "u'"'] & & Y' &
\end{tikzcd}$$

em $K(\mathcal{A})$, fazendo uma mudança, se necessária, dos representantes dos morfismos $X \xleftarrow{t} X'' \xrightarrow{f} X'$ e $Y \xleftarrow{s} Y'' \xrightarrow{g} Y'$ em $D(\mathcal{A})$, podemos encontrar um morfismo
$X'' \xrightarrow{u''} Y''$ tal que os dois quadrados comutam em $K(\mathcal{A})$, isto é, $s \circ u'' = u \circ t$ e $g \circ u'' = u' \circ f$.

A demonstração deste pode ser encontrada na página 253 da referência [11]. Os autores usam este fato para demonstrar que a categoria derivada de uma categoria abeliana é triangulada.

Vejamos então que as duas propriedades de funtor valem para T:

(i) Sejam $F^\bullet \xrightarrow{[f/\alpha]} G^\bullet$ e $G^\bullet \xrightarrow{[g/\beta]} E^\bullet$ morfismos em $D(\mathcal{C}(\mathcal{A}))$. Devemos provar que $T([f/\alpha] \circ [g/\beta]) = T([f/\alpha]) \circ T([g/\beta])$.

Pela definição de composição de morfismos em uma categoria derivada, existem β' e f' tais que

$$T([f/\alpha] \circ [g/\beta]) = T([g \circ f'/\alpha \circ \beta']) := \{[g_C \circ f'_C/\alpha_C \circ \beta'_C]; C \in Ob(\mathcal{C})\}.$$

Por outro lado, para cada $C \in Ob(\mathcal{C})$, existem β''_C e f''_C tais que

$$T([f/\alpha]) \circ T([g/\beta]) = \{[g_C \circ f''_C/\alpha_C \circ \beta''_C]; C \in Ob(\mathcal{C})\}.$$

Pelo Lema 3.6, existe ϕ que torna os quadrados do diagrama

$$\begin{tikzcd}
& W_C \arrow[dl, "\alpha_C\circ\beta''_C"'] \arrow[ddl, "g_C\circ f''_C"] \arrow[rr, dashed, "\phi"] & & V(C) \arrow[dl, "\alpha_C\circ\beta'_C"'] \arrow[ddl, "g_C\circ f'_C"] \\
F(C) \arrow[rr, "Id"] & & F(C) & \\
E(C) \arrow[rr, "Id"'] & & E(C) &
\end{tikzcd}$$

comutativos. É importante notar que, neste caso, ϕ é um quase-isomorfismo e este fato se deve a construção da demonstração do Lema 3.6. Assim temos que

$$\begin{tikzcd}
& W_C \arrow[dl, "Id"'] \arrow[dr, "\phi"] & \\
W_C \arrow[d, "\alpha_C\circ\beta''_C"'] \arrow[dr, "g_C\circ f''_C", near end] & & V(C) \arrow[dll, "\alpha_C\circ\beta'_C", near end] \arrow[d, "g_C\circ f'_C"] \\
F(C) & & E(C)
\end{tikzcd}$$

comuta e portanto $[g_C \circ f''_C/\alpha_C \circ \beta''_C] = [g_C \circ f'_C/\alpha_C \circ \beta'_C]$.

Logo $T([f/\alpha] \circ [g/\beta]) = T([f/\alpha]) \circ T([g/\beta])$.

(ii) Para verificar que $T(Id_{F^\bullet}) = Id_{T(F^\bullet)}$ basta usar a definição de T.

É de imediata verificação que T definido em (3.6) faz o diagrama (3.5) comutar.

Notemos que também podemos garantir a existência do funtor T no caso de $D^*(\mathcal{C}(\mathcal{A}))$ e $\mathcal{C}(D^*(\mathcal{A}))$.

Em geral, o funtor T não é uma equivalência de categorias. Vejamos então a próxima seção:

3.3.1 Caso $\mathcal{A}$ semissimples

Apresentaremos um exemplo que mostra que, em geral, as categorias $D(\mathcal{C}(\mathcal{A}))$ e $\mathcal{C}(D(\mathcal{A}))$ não são equivalentes, ou seja que T não é uma equivalência. Além disso, mostraremos que se $\mathcal{A}$ é semissimples existem condições sobre $\mathcal{C}$ que fazem verdadeira a equivalência $D(\mathcal{C}(\mathcal{A})) \equiv \mathcal{C}(D(\mathcal{A}))$.

Seja $\mathcal{A}$ uma categoria semissimples. Então, pela Proposição 1.57, o funtor $G : D(\mathcal{A}) \longrightarrow Kom_0(\mathcal{A})$ é uma equivalência, logo, usando a proposição 2.15, o funtor induzido $G_{\mathcal{C}} : \mathcal{C}(D(\mathcal{A})) \longrightarrow \mathcal{C}(Kom_0(\mathcal{A}))$ é também uma equivalência.

Pergunta: Dada $\mathcal{A}$ semissimples, será que $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ é semissimples?

Resposta: Não necessáriamente, vejamos o exemplo a seguir.

Seja $\mathcal{C}$ uma categoria pequena com apenas dois objetos, $Ob(\mathcal{C}) = \{C_1, C_2\}$, e três morfismos $Mor(\mathcal{C}) = \{Id_{C_1}, Id_{C_2}, a : C_1 \to C_2\}$. Tomemos $\mathcal{A}$ sendo a categoria dos espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{C}$. Sem dúvidas temos que $\mathcal{A}$ é semissimples, mas $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ não é necessariamente semissimples.

De fato, definimos os seguintes funtores de $\mathcal{C}$ em $\mathcal{A}$, ou seja, objetos de $\mathcal{C}(\mathcal{A})$:

- F dado por $F(C_1) = \{0\}$, $F(C_2) = \mathbb{C}$ e $F(a) = i$, onde i é a inclusão;
- G dado por $G(C_1) = \mathbb{C}$, $G(C_2) = \{0\}$ e $G(a) = \{0\}$;
- H dado por $H(C_1) = \mathbb{C}$, $H(C_2) = \mathbb{C}$ e $H(a) = Id_{\mathbb{C}}$;

Temos então a seguinte sequência exata curta em $\mathcal{C}(\mathcal{A})$:

$$0 \longrightarrow F \xrightarrow{\eta} H \xrightarrow{\xi} G \longrightarrow 0$$

onde $\eta = \{\eta_1 = i : \{0\} \to \mathbb{C}, \eta_2 = Id_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\}$ e $\xi = \{\xi_1 = Id_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \xi_2 = 0 : \mathbb{C} \to \{0\}\}$. Logo podemos reescrever a sequência exata curta

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r] & \{0\} \arrow[r, "\eta_1 = i"] \arrow[d, "F(a)=i"] & \mathbb{C} \arrow[r, "\xi_1 = Id_{\mathbb{C}}"] \arrow[d, "H(a)=Id_{\mathbb{C}}"] & \mathbb{C} \arrow[r] \arrow[d, "G(a)=0"] & \{0\} \\
\{0\} \arrow[r] & \mathbb{C} \arrow[r, "\eta_2 = Id_{\mathbb{C}}"'] & \mathbb{C} \arrow[r, "\xi_2 = 0"'] & \{0\} \arrow[r] & \{0\}
\end{tikzcd}$$

Mas temos que $H \neq F \oplus G$ pois $H(a) \neq F(a) \oplus G(a)$. Portanto, neste exemplo $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ não é semissimples.

Sendo assim, e lembrando do Exemplo 1.6 temos o seguinte resultado:

Proposição 3.7. *Seja $\mathcal{A}$ semissimples. O funtor $T : D(\mathcal{Q}(\mathcal{A})) \longrightarrow \mathcal{Q}(D(\mathcal{A}))$ é uma equivalência se, e somente se, $\mathcal{Q}$ é a categoria gerada por um quiver Q sem flechas, isto é, $Q_1 = \emptyset$.*

Demonstração.

($\Longrightarrow$) Suponhamos por absurdo que o quiver Q tem pelo menos uma flecha. Então, cairíamos num exemplo análogo ao exemplo acima logo $\mathcal{Q}(\mathcal{A})$ não é uma categoria semissimples.

Pelo fato de $\mathcal{A}$ ser semissimples temos que $G_{\mathcal{Q}} : \mathcal{Q}(D(\mathcal{A})) \longrightarrow \mathcal{Q}(Kom_0(\mathcal{A}))$ é uma equivalência. Assim, pela comutatividade do diagrama

$$\begin{tikzcd}
Kom_0(\mathcal{Q}(\mathcal{A})) \arrow[r, hook] \arrow[d, "K"'] & Kom(\mathcal{Q}(\mathcal{A})) \arrow[r, "Q"] \arrow[d, "K"] & D(\mathcal{Q}(\mathcal{A})) \arrow[d, "T"] \arrow[ll, bend right, "\overline{G}"'] \\
\mathcal{Q}(Kom_0(\mathcal{A})) \arrow[r, hook] & \mathcal{Q}(Kom(\mathcal{A})) \arrow[r, "Q_{\mathcal{Q}}"'] & \mathcal{Q}(D(\mathcal{A})) \arrow[ll, bend left, "G_{\mathcal{Q}}"]
\end{tikzcd}$$

se tivéssemos que T é uma equivalência, teríamos que $\overline{G}$ é também uma equivalência, o que, pela Proposição 1.57, nos leva a um absurdo pois $\mathcal{Q}(\mathcal{A})$ não é semissimples.

($\Longleftarrow$) Por hipótese $\mathcal{A}$ é semissimples então $G_{\mathcal{Q}}$ é uma equivalência, assim se $\mathcal{Q}(\mathcal{A})$ for semissimples $\overline{G} : D(\mathcal{Q}(\mathcal{A})) \longrightarrow Kom_0(\mathcal{Q}(\mathcal{A}))$ é equivalência então teríamos T equivalência.

Afirmação. Se $\mathcal{Q}$ é uma categoria pequena tal que os únicos morfismos são as identidades e $\mathcal{Q}$ é uma categoria abeliana semissimples então $\mathcal{Q}(\mathcal{A})$ é semissimples.

De fato. Seja $\mathcal{Q}$ uma categoria cujo conjunto $Ob(\mathcal{Q})$ pode ser representado por um conjunto indexado $\{C_i; i \in I\}$ para algum I e cujos os morfismos sejam apenas as identidades. Então um objeto na categoria $\mathcal{Q}(\mathcal{A})$ pode ser considerado como um conjunto $V = \{V_i \in Ob(\mathcal{A}) : i \in I\}$.

Sejam $V, W, U \in Ob(\mathcal{Q}(\mathcal{A}))$ tais que a seguinte sequência exata curta é verdadeira:

$$0 \longrightarrow V \longrightarrow W \longrightarrow U \longrightarrow 0 \tag{3.7}$$

Queremos provar que $W = V \oplus U$, isto é, $W_i = V_i \oplus U_i$, para todo $i \in I$.

A sequência (3.7) induz para cada $i \in I$, i sequências em $\mathcal{A}$ do tipo

$$0 \longrightarrow V_i \longrightarrow W_i \longrightarrow U_i \longrightarrow 0\,, \qquad 1 \leq i \leq n.$$

Logo, como $\mathcal{A}$ é semissimples temos que $W_i = V_i \oplus U_i$, para todo $i \in I$. $\square$

3.4 Propriedades do funtor T

Nesta seção estamos interessados em estudar o funtor T.

Demonstraremos que, sob certas hipóteses, T pode ser pleno e fiel. Portanto, visto que T não pode ser uma equivalência, temos que T não é essencialmente sobre.

Concluiremos esta seção mostrando que é possível tirar a hipótese de $\mathcal{A}$ ser semissimples na Proposição 3.7.

3.4.1 Quando T é pleno e fiel

Definição 3.8. *Um caminho em Q é uma sequência $p = a_1a_2...a_n$, onde cada a_i é uma flecha em Q tais que $h(a_{i+1}) = t(a_i)$, lembrando que h e t foram definidas também no Exemplo 5. Dizemos que o caminho p começa em $t(a_n)$ e termina em $h(a_1)$.*

Para cada vértice $i \in Q_0$, denotamos por e_i o caminho trivial que começa e termina no vértice i.

Definição 3.9. *Seja k um corpo. A álgebra de caminhos kQ associada ao quiver Q é o k-espaço vetorial cuja base é o conjunto de todos os caminhos em Q, com o produto dado por concatenação, isto é, se $p = a_1...a_n$ e $q = b_1...b_m$ são caminhos em Q, temos*

$$pq = \begin{cases} a_1...a_nb_1..b_m & \text{se } t(p) = h(q) \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Também temos

$$e_ie_j = \begin{cases} e_i & \text{se } i = j \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$e_ip = \begin{cases} p & \text{se } h(p) = i \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$pe_j = \begin{cases} pe_i & \text{se } t(p) = i \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A álgebra de caminhos tem unidade $\sum_{i \in Q_0} e_i$.

Definição 3.10. *Uma relação R no quiver Q é uma soma de caminhos $p_i \in kQ$,* *que começa e termina nos mesmos vértices, isto é,*

$$R = \sum_{i=1}^{n} p_i,$$

com $(p_i) = t(p_j)$ e $h(p_i) = h(p_j)$, $i, j = 1, ..., n$.

Definição 3.11. *Sejam p_i^j caminhos em Q e sejam $R_j = \sum_{i=1}^{n_j} p_i^j$ relações, $j = 1, .., m$. Definimos a álgebra de caminhos do quiver com relações pelo quociente kQ/I, onde I é o ideal gerado por R_j, para cada $j = 1, ...m$.*

Definição 3.12. *Dizemos que um quiver Q é finito se ele tem um número finito de vértices e de flechas. Ou seja, se os conjuntos Q_0 e Q_1, já definidos no capítulo 1, são conjuntos finitos.*

Teorema 3.13. *Sejam Q um quiver sem relações e $\mathcal{Q}$ a categoria associada a ele. Então o funtor $T : D(\mathcal{Q}(\mathcal{A})) \longrightarrow \mathcal{Q}(D(\mathcal{A}))$ é pleno e fiel.*

Demonstração. Para mostrar que T é pleno e fiel, devemos mostrar que dados $F^\bullet$ e $G^\bullet$ em $D(\mathcal{Q}(\mathcal{A}))$, então $T : Hom_{D(\mathcal{Q}(\mathcal{A}))}(F^\bullet, G^\bullet) \longrightarrow Hom_{\mathcal{Q}(D(\mathcal{A}))}(T(F^\bullet), T(G^\bullet))$ é uma função bijetora. Lembrando que $T(F^\bullet) = Q_{\mathcal{Q}}(K(F^\bullet)) = Q \circ F$. Note que neste caso Q volta a denotar o funtor de localização $Q : Kom(\mathcal{A}) \longrightarrow D(\mathcal{A})$.

(i) Sejam $[f/\alpha]$ e $[g/\beta]$ em $Hom_{D(\mathcal{Q}(\mathcal{A}))}(F^\bullet, G^\bullet)$ dados por:

$$\begin{tikzcd} & E^\bullet \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "f"] & \\ F^\bullet & & G^\bullet \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & D^\bullet \arrow[dl, "\beta"'] \arrow[dr, "g"] & \\ F^\bullet & & G^\bullet \end{tikzcd}$$

respectivamente, tais que $T([f/\alpha]) = T([g/\beta])$. Ou seja,

$$\{[f_i/\alpha_i] : i \in Ob(\mathcal{Q})\} = \{[g_i/\beta_i] : i \in Ob(\mathcal{Q})\}.$$

Então temos, para cada $i \in Ob(\mathcal{Q})$, que $[f_i/\alpha_i] = [g_i/\beta_i]$, isto é, existem quase-isomorfismos $E(i)^\bullet \xleftarrow{\gamma_i} W(i)^\bullet \xrightarrow{\delta^i} D(i)^\bullet$ tais que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & W(i)^\bullet \arrow[dl, "\gamma_i"'] \arrow[dr, "\delta_i"] & & \\
 & E(i)^\bullet \arrow[dl, "\alpha_i"'] \arrow[drrr, "f_i" near end] & & D(i)^\bullet \arrow[dr, "g_i"] \arrow[dlll, "\beta_i"' near end] & \\
F(i)^\bullet & & & & G(i)^\bullet.
\end{tikzcd}$$

Seja $i \xrightarrow{p} j$ um morfismo em $\mathcal{Q}$. Pelo Lema 3.6, existe um $W(p)$ tal que os dois quadrados do diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & W(i)^\bullet \arrow[dl, "\gamma_i"'] \arrow[ddl, "\delta_i" near start] \arrow[rr, dashed, "W(p)"] & & W(j)^\bullet \arrow[dl, "\gamma_j"'] \arrow[ddl, "\delta_j"] \\
E(i)^\bullet \arrow[rr, "E(p)"'] & & E(j)^\bullet & \\
D(i)^\bullet \arrow[rr, "D(p)"'] & & D(j)^\bullet &
\end{tikzcd} \tag{3.8}$$

comutam. Logo podemos definir um funtor

$$\begin{array}{rccc}
W: & \mathcal{Q} & \longrightarrow & K(\mathcal{A}) \\
 & i & \longmapsto & W(i)^\bullet \\
 & \Big\downarrow p & & \Big\downarrow W(p) \\
 & j & & W(j)^\bullet
\end{array}$$

Observemos que, neste ponto, poderíamos ter um problema na definição do funtor W pois a escolha de $W(p)$ no diagrama (3.8) não é única. Logo se p, q e r fossem morfismos em $\mathcal{Q}$ tais que $p = q \circ r$, o funtor W deveria satisfazer $W(q \circ r) = W(q) \circ W(r)$ e portanto $W(p) = W(q) \circ W(r)$. Sendo assim $W(p)$ ficaria definida de duas formas diferentes o que deixa W mal definido como funtor. Tal problema não ocorre pois o quiver Q não tem relações e portanto não existem morfismos p, q e r em $\mathcal{Q}$ tais que $p = q \circ r$.

Logo a não unicidade da escolha de $W(p)$ não impede a boa definição de W como funtor, basta apenas fixar que se $i \xrightarrow{p} j \xrightarrow{q} k$ são morfismos em $\mathcal{Q}$, definimos $W(p \circ q) = W(p) \circ W(q)$.

A partir de W podemos criar um funtor $W' : \mathcal{Q} \longrightarrow Kom(\mathcal{A})$ escolhendo um representante da classe $W(p)$ em $Kom(\mathcal{A})$, que denotaremos por W'_p. Novamente, temos que a boa definição de W' vem do fato de Q ser um quiver sem relações. Assim:

$$\begin{array}{rccc} W' : & \mathcal{Q} & \longrightarrow & Kom(\mathcal{A}) \\ & i & \longmapsto & W'(i)^\bullet \\ & \Big\downarrow{\scriptstyle p} & & \Big\downarrow{\scriptstyle W(p)} \\ & j & & W'(j)^\bullet \end{array}$$

onde $W'(i)^\bullet = W(i)^\bullet$ para cada i objeto de $\mathcal{Q}$.

Além disso, pela comutatividade do diagrama (3.8), temos que

$$\gamma = \{\gamma_i \in Hom(W'(i)^\bullet, E(i)^\bullet); i \in Ob(\mathcal{Q})\} \text{ e}$$
$$\delta = \{\delta_i \in Hom(W(i)'^\bullet, D(i)^\bullet); i \in Ob(\mathcal{Q})\}$$

são transformações naturais, respectivamente, de W' em E, e de W em D. E, usando a equivalência K, temos em $D(\mathcal{C}(\mathcal{A}))$ o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd} & & W'^\bullet \arrow[dl, "\gamma"'] \arrow[dr, "\delta"] & & \\ & E^\bullet \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[rrd, "f"] & & D^\bullet \arrow[dr, "g"] \arrow[lll, "\beta"'] & \\ F^\bullet & & & & G^\bullet . \end{tikzcd}$$

Onde γ e δ são quase-isomorfismos, pelo fato de γ_i e δ_i serem quase-isomorfismos para cada $i \in Ob(\mathcal{Q})$. Todo temos que $[f/\alpha] = [g/\beta]$. Logo $T : Hom_{D(\mathcal{Q}(\mathcal{A}))}(F^\bullet, G^\bullet) \longrightarrow Hom_{\mathcal{Q}(D(\mathcal{A}))}(T(F^\bullet), T(G^\bullet))$ é uma função injetora.

(ii) Seja $f \in Hom_{\mathcal{Q}(D(\mathcal{A}))}(Q \circ F, Q \circ G)$, queremos definir $[h/\phi] \in Hom_{D(\mathcal{Q}(\mathcal{A}))}(F^\bullet, G^\bullet)$ tal que $T([h/\phi]) = f$. f é uma transformação natural entre os funtores $Q \circ F : \mathcal{Q} \longrightarrow D(\mathcal{A})$ e $Q \circ G : \mathcal{Q} \longrightarrow D(\mathcal{A})$. Podemos definir

$f = \{[f_i/\alpha_i]; i \in Ob(\mathcal{Q})\}$ tal que, dado $i \xrightarrow{p} j$, temos que o diagrama

$$\begin{CD} F(i) @>{[f_i/\alpha_i]}>> G(i) \\ @V{[F(p)/Id]}VV @VV{[G(p)/Id]}V \\ F(j) @>>{[f_j/\alpha_j]}> G(j), \end{CD} \tag{3.9}$$

comuta em $D(\mathcal{A})$, lembrando que $Q \circ F(i) = F(i)$ para todo $i \in Ob(\mathcal{Q})$, e $Q \circ F(p) = [F(p)/Id]$ para todo $p \in Mor(\mathcal{Q})$. Analogamente para $Q \circ G$.

Por outro lado, $[h/\phi]$ é da forma

$$\begin{tikzcd} & H^\bullet \arrow[dl, "\phi"'] \arrow[dr, "h"] & \\ F^\bullet & & G^\bullet \end{tikzcd}$$

em $D(\mathcal{Q}(\mathcal{A}))$, e como já vimos anteriormente, para cada morfismo $i \xrightarrow{p} j$ em $\mathcal{Q}$, teríamos:

$$\begin{tikzcd} & H(i)^\bullet \arrow[rr, "H(p)"] \arrow[dl, "\phi_i"'] \arrow[ddl, "h_i"] & & H(j)^\bullet \arrow[dl, "\alpha_j"'] \arrow[ddl, "h_j"] \\ F(i)^\bullet \arrow[rr, "F(p)"] & & F(j)^\bullet & \\ G(i)^\bullet \arrow[rr, "G(p)"'] & & G(j)^\bullet & \end{tikzcd} \tag{3.10}$$

Logo, para definir $[h/\phi]$, podemos definir $h_i = f_i$, $\phi_i = \alpha_i$ e $H(i) = H_i$ para todo $i \in Ob(\mathcal{Q})$, faltaria apenas dizer quem seria $H(p)$, para poder definir $H^\bullet$. Mas usando o Lema (3.6) e o fato do quiver Q ser um quiver sem relações, pelo mesmo argumento usado para definir $W(p)$ anteriormente, garantimos a existência de $H(p)$. Novamente, podemos tomar $H : \mathcal{Q} \longrightarrow Kom(\mathcal{A})$. Desta forma, $[h/\phi]$ assim definido é tal que $T([h/\phi]) = f$.

□

Observemos que o mesmo teorema vale quando $T : D^*(\mathcal{Q}(\mathcal{A})) \longrightarrow \mathcal{Q}(D^*(\mathcal{A}))$, a construção é análoga.

3.4.2 Quando T é uma equivalência

Corolário 3.14. *$T : D(\mathcal{Q}(\mathcal{A})) \longrightarrow \mathcal{Q}(D(\mathcal{A}))$ é uma equivalência de categorias se, e somente se, a categoria $\mathcal{Q}$ é gerada por um quiver Q que não possui flechas.*

Demonstração. Mesmo no caso em que Q possui uma única flecha, a categoria $\mathcal{Q}$ gerada por ele tem um morfismo diferente da identidade. Já vimos que, neste caso, T não é essencialmente sobre e portanto não é uma equivalência.

Reciprocamente, pelo Teorema 3.13 temos que T é pleno e fiel, falta mostrar que T é essencialmente sobre.

Seja $F \in Ob(\mathcal{C}(D(\mathcal{A}))$. Como $\mathcal{C}$ não tem morfismos diferentes da identidade, para determinar T basta determinar cada complexo $T(C)^\bullet$em $\mathcal{A}$, para cada $C \in Ob(\mathcal{C})$. Ou seja, para cada objeto C de $\mathcal{C}$ exibir um diagrama da forma

$$\cdots \longrightarrow F(C)^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}_{F(C)}} F(C)^n \xrightarrow{d^n_{F(C)}} F(C)^{n+1} \longrightarrow \cdots$$

Definamos $(F^\bullet, d_F)$ em $D(\mathcal{C}(\mathcal{A}))$ onde cada F^i é um funtor de $\mathcal{C}$ em $\mathcal{A}$ definido por $F^i(C) = F(C)^i$ e $(d^i_F)_C = d^i_{F(C)}$.

Sendo assim, $T(F^\bullet) = F$ e temos T essencialmente sobre. □

Novamente, fazemos a observação de que este corolário é válido quando $T : D^*(\mathcal{Q}(\mathcal{A})) \longrightarrow \mathcal{Q}(D^*(\mathcal{A}))$.

Capítulo 4

Funtor derivado

Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ categorias abelianas tal que $\mathcal{A}$ tem suficientes injetivos. Seja $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ um funtor aditivo exato à esquerda, logo, pelas Proposições 2.13 e 2.14, ambas do Capitulo 2, temos que o funtor induzido $F_{\mathcal{C}} : \mathcal{C}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathcal{B})$ é também aditivo e exato à esquerda. Além disso, sob certas condições, já apresentadas no segundo capítulo, podemos considerar que $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ também tem suficientes injetivos, o que garante a existência da extensão $RF_{\mathcal{C}} : D^{+}(\mathcal{C}(\mathcal{A})) \longrightarrow D^{+}(\mathcal{C}(\mathcal{B}))$.

Por outro lado, partindo do mesmo $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ aditivo e exato à esquerda, temos sua extensão $RF : D^{+}(\mathcal{A}) \longrightarrow D^{+}(\mathcal{B})$ e podemos definir o funtor induzido $(RF)_{\mathcal{C}} : \mathcal{C}(D^{+}(\mathcal{A})) \longrightarrow \mathcal{C}(D^{+}(\mathcal{B}))$. Surge então um questionamento natural: Qual é a relação entre o funtor $(RF)_{\mathcal{C}}$ e o funtor $R(F)_{\mathcal{C}}$?

Primeiramente, vamos demonstrar que se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são categorias semissimples, onde $\mathcal{A}$ tem suficientes injetivos, e se RF é uma equivalências de categorias então F também será equivalência. Sendo assim, para o caso em que $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ tem suficientes injetivos, temos que $R(F_{\mathcal{C}})$ também é equivalência.

De maneira mais geral, mostraremos que para quaisquer categorias abelianas $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ tais que $\mathcal{A}$ e $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ tem suficientes injetivos o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd}
D^{+}(\mathcal{C}(\mathcal{A})) \arrow[r, "R(F_{\mathcal{C}})"] \arrow[d, "T_{\mathcal{A}}"'] & D^{+}(\mathcal{C}(\mathcal{B})) \arrow[d, "T_{\mathcal{B}}"] \\
\mathcal{C}(D^{+}(\mathcal{A})) \arrow[r, "(RF)_{\mathcal{C}}"'] & \mathcal{C}(D^{+}(\mathcal{B})),
\end{tikzcd}$$

onde $T_{\mathcal{A}}$ e $T_{\mathcal{B}}$ representam o funtor T descrito no Capítulo 3, respectivamente, para as categorias $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$.

Assim, pela comutatividade do diagrama acima e sabendo que $T_{\mathcal{A}}$ e $T_{\mathcal{B}}$ são funtores plenos e fiéis quando $\mathcal{C} = \mathcal{Q}$, onde $\mathcal{Q}$ é gerada por um *quiver* Q sem relações, mostraremos que se RF é uma equivalência de categorias e uma das seguintes hipóteses é satisfeita:

- Q é um *quiver* finito;
- $\mathcal{A}$ é uma categoria completa;

então $R(F)_{\mathcal{Q}}$ também será equivalência. Lembrando que a presença de uma destas duas últimas hipóteses é necessária apenas para garantir que $\mathcal{Q}(\mathcal{A})$ tenha suficientes injetivos e portanto garantir a existência do funtor derivado $R(F)_{\mathcal{Q}}$.

Devemos notar que todas estas construções e resultados podem ser analogamente obtidos quando $\mathcal{A}$ é uma categoria com suficientes projetivos e $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ é exato à direita. Neste caso teríamos $L(F_{\mathcal{C}}) : D^-(\mathcal{C}(\mathcal{A})) \longrightarrow D^-(\mathcal{C}(\mathcal{B}))$ e $(LF)_{\mathcal{C}} : \mathcal{C}(D^-(\mathcal{A})) \longrightarrow \mathcal{C}(D^-(\mathcal{B}))$.

4.1 Caso particular: $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ semissimples

Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ duas categorias abelianas semissimples. Logo teremos:

$$D(\mathcal{A}) \xrightarrow[\sim]{G_{\mathcal{A}}} Kom_0(\mathcal{A}) \ ;$$
$$D(\mathcal{B}) \xrightarrow[\sim]{G_{\mathcal{B}}} Kom_0(\mathcal{B}) \ .$$

Proposição 4.1. *Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ categorias abelianas semissimples, onde $\mathcal{A}$ tem suficientes injetivos. Seja $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ um funtor exato a esquerda tal que $RF : D^+(\mathcal{A}) \longrightarrow D^+(\mathcal{B})$ é uma equivalência. Então F também é uma equivalência.*

Demonstração. Tendo $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ semissimples temos o seguinte diagrama, onde $Q_{\mathcal{A}}$, $Q_{\mathcal{B}}$ e RF são equivalências:

$$\begin{tikzcd} K^+(\mathcal{A}) \arrow[r, "KF"] \arrow[d, "Q_{\mathcal{A}}"'] & K^+(\mathcal{B}) \arrow[d, "Q_{\mathcal{B}}"] \\ D^+(\mathcal{A}) \arrow[r, "RF"'] & D^+(\mathcal{B}). \end{tikzcd}$$

Logo temos que KF é também uma equivalência e a comutatividade de

$$\begin{tikzcd} K(\mathcal{A}) \arrow[r, "G'_{\mathcal{A}}", "\sim"'] \arrow[d, "KF"', "\sim"] & Kom_0(\mathcal{A}) \arrow[d, dashed, "\tilde{F}"] \\ K(\mathcal{B}) \arrow[r, "G'_{\mathcal{B}}", "\sim"'] & Kom_0(\mathcal{B}), \end{tikzcd}$$

garante que $\tilde{F}$ é uma equivalência, onde $\tilde{F} = G'_{\mathcal{B}} \circ KF \circ (G'_{\mathcal{A}})^{-1}$ e G e G' estão definidos na Obs 12 dada no Capítulo 1.

Lembrando que $(G'_{\mathcal{A}})^{-1}$ é um abuso de notação, pois este funtor é quase-inverso ao funtor $G'_{\mathcal{A}}$.

Seja $B \in Ob(\mathcal{B})$ logo temos que $\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow B \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$ é um objeto de $Kom_0(\mathcal{B})$, que denotaremos por $B^\bullet$. Como $\tilde{F}$ é equivalência, existe $A^\bullet$ objeto em $Kom_0(\mathcal{A})$ tal que $\tilde{F}(\mathcal{A}^\bullet) \simeq B^\bullet$. Assim temos

$$\begin{aligned} G'_{\mathcal{B}} \circ KF \circ (G'_{\mathcal{A}})^{-1}(A^\bullet) &\simeq B^\bullet \\ KF \circ (G'_{\mathcal{A}})^{-1}(A^\bullet) &\simeq (G'_{\mathcal{B}})^{-1}(B^\bullet) \\ KF(A^\bullet) &\simeq B^\bullet \end{aligned}$$

Logo, existe um isomorfismo $f \in Hom_{Kom_0(\mathcal{B})}(KF(A^\bullet), B^\bullet)$:

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "f^{n-1}"] & B \arrow[r] \arrow[d, "f^n"] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "f^{n+1}"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & F(A^{n-1}) \arrow[r] & F(A^n) \arrow[r] & F(A^{n+1}) \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

ou seja, cada f^i é um isomorfismo em $\mathcal{B}$.

Portanto, encontramos uma objeto A^n em $\mathcal{A}$ tal que $F(A^n) \simeq B$. Logo temos que o funtor F é essencialmente sobre.

Vejamos então que F é pleno e fiel: Seja $A \in Ob(\mathcal{A})$ e seja $A^\bullet$ o objeto de $Kom_0(\mathcal{A})$ $\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow A \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$ então temos:

$$\begin{aligned} \tilde{F}(A^\bullet) &\simeq G'_{\mathcal{B}} \circ KF \circ (G'_{\mathcal{A}})^{-1}(A^\bullet) \\ &\simeq G'_{\mathcal{B}} \circ KF(A^\bullet) \\ &\simeq G'_{\mathcal{B}}(F(A)^\bullet) \end{aligned}$$

mas $F(A)^\bullet$ é $\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow F(A) \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$. Logo $H(F(A)^\bullet = F(A)^\bullet$ então $G'_{\mathcal{B}}(F(A)^\bullet) = F(A)^\bullet$ portanto $\tilde{F}(A^\bullet) = F(A)^\bullet$ e teremos

$$\begin{aligned} Hom_{\mathcal{A}}(A_1, A_2) &\simeq Hom_{Komo(\mathcal{A})}(A_1^\bullet, A_2^\bullet) \\ &\simeq Hom_{Komo(\mathcal{B})}(\tilde{F}(A_1^\bullet), \tilde{F}(A_2^\bullet)) \\ &\simeq Hom_{Komo(\mathcal{B})}(F(A_1)^\bullet, F(A_2)^\bullet) \\ &\simeq Hom_{\mathcal{B}}(F(A_1), F(A_2)). \end{aligned}$$

Então temos que F equivalência. □

Resumindo, se $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ é um funtor aditivo exato a esquerda entre duas categorias abelianas semissimples tal que $RF : D^+(\mathcal{A}) \longrightarrow D^+(\mathcal{B})$ é uma equivalência, demonstramos que $KF : K^+(\mathcal{A}) \longrightarrow K^+(\mathcal{B})$ e F são também equivalências. Assim, pela Proposição 2.16, $F_{\mathcal{C}}$ é também equivalência e portanto $R(F_{\mathcal{C}})$ é equivalência. Ou seja, se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são categorias semissimples tais que $\mathcal{A}$ e $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ tem suficientes injetivos e $(RF)_{\mathcal{C}}$ é equivalência teremos que $R(F_{\mathcal{C}})$ também será.

4.2 Caso geral

Nesta seção temos como objetivo mostrar a comutatividade do diagrama apresentado na introdução deste capítulo e apartir desta, usando que $T_{\mathcal{A}}$ e $T_{\mathcal{B}}$ são plenos e fiéis provar que se $(RF)_{\mathcal{Q}}$ é equivalência de categorias, $R(F_{\mathcal{Q}})$ também será equivalência.

Obs 15. *Suponhamos $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ com suficientes injetivos, ou seja, ou $\mathcal{C}$ tem um número finito de objetos e morfismos ou a categoria $\mathcal{A}$ é completa. Sendo assim temos:*

Seja $A^\bullet$ um objeto em $D(\mathcal{C}(\mathcal{A}))$. Pelo fato de $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ ter suficientes injetivos, existe um quase-isomorfismo $\alpha : A^\bullet \longrightarrow I(A^\bullet)^\bullet$, onde $I(A^\bullet)^\bullet$ é um complexo de objetos injetivos. Ou seja, temos o seguinte isomorfismo em $D(\mathcal{C}(\mathcal{A}))$:

$$\begin{tikzcd} & A^\bullet \arrow[dl, "Id"'] \arrow[dr, "\alpha"] & \\ A^\bullet & & I(A^\bullet)^\bullet \end{tikzcd}$$

Aplicando o funtor $T_{\mathcal{A}}$ sobre $[\alpha/Id]$ temos a transformação natural em $\mathcal{C}(D(\mathcal{A}))$

$$T_{\mathcal{A}}([\alpha/Id]) : Q_{\mathcal{A}} \circ A \longrightarrow Q_{\mathcal{A}} \circ I(A^\bullet),$$

onde A *e* $I(A^\bullet)$ *representam, respectivamente, as imagem de* $A^\bullet$ *e* $I(A^\bullet)$ *pelo funtor* $K_{\mathcal{A}} : Kom(\mathcal{C}(\mathcal{A})) \longrightarrow \mathcal{C}(Kom(\mathcal{A}))$ *e lembrando que* $Q_{\mathcal{A}}$ *é o funtor de localização, de* $Kom(\mathcal{A})$ *para* $D(\mathcal{A})$*. Ou seja,*

$$T_{\mathcal{A}}([\alpha/Id]) = \{[\alpha_C/Id] \in Hom_{D(\mathcal{A})}(A(C), I(A^\bullet)(C)) : C \in Ob(\mathcal{C})\}$$

tais que o seguinte diagrama é comutativo para cada morfismo $C \xrightarrow{t} D$ *em* $\mathcal{C}$*:*

$$\begin{tikzcd} A(C) \arrow[r, "{[\alpha_C/Id]}"] \arrow[d, "{[A(t)/Id]}"'] & I(A^\bullet)(C) \arrow[d, "{[I(A^\bullet)(t)/Id]}"] \\ A(D) \arrow[r, "{[\alpha_D/Id]}"'] & I(A^\bullet)(D). \end{tikzcd}$$

Agora podemos aplicar sobre o morfismo $T_{\mathcal{A}}([\alpha/Id]) : Q \circ A \longrightarrow Q \circ I(A^\bullet)$ *o funtor* $(RF)_{\mathcal{C}}$*, e teremos uma transformação natural*

$$(RF)_{\mathcal{C}}(T_{\mathcal{A}}([\alpha/Id])) : RF \circ Q_{\mathcal{A}} \circ A \longrightarrow RF \circ Q_{\mathcal{A}} \circ I(A^\bullet)$$

em $\mathcal{C}(D(\mathcal{B}))$*.*

Assim, dado $C \xrightarrow{t} D$ *um morfismo em* $\mathcal{C}$*, teremos* $RF \circ Q_{\mathcal{A}} \circ A(\ C \xrightarrow{t} D\ )$ *descrito por:*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[d, "t"'] & \arrow[r, mapsto, "Q_{\mathcal{A}} \circ A"] & {} & A(C) \arrow[dl, "Id"'] \arrow[dr, "A(t)"] & \\ D & & A(C) & & A(D) \end{tikzcd}$$

e aplicando RF *como na Seção 1.3.3 do primeiro capítulo:*

$$\begin{tikzcd} & A(C) \arrow[dl, "\alpha_C"'] \arrow[dr, "\alpha_D \circ A(t)"] & \\ I(A(C))^\bullet \arrow[rr, "I(A(t))"] & & I(A(D))^\bullet \end{tikzcd}$$

e finalmente

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & KF(I(A(C))^{\bullet}) \arrow[dl, "Id"'] \arrow[dr, "KF(I(A(t)))"] & \\ KF(I(A(C))^{\bullet}) & & KF(I(A(D))^{\bullet}). \end{tikzcd}$$

Analogamente temos $RF \circ Q_{\mathcal{A}} \circ I(A^{\bullet})(\ C \xrightarrow{t} D\ )$*:*

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & KF(I(A^{\bullet})(C)) \arrow[dl, "Id"'] \arrow[dr, "KF(I(A^{\bullet})(t))"] & \\ KF(I(A^{\bullet})(C)) & & KF(I(A^{\bullet})(D)). \end{tikzcd}$$

E finalmente temos $(RF)_{\mathcal{C}}(T_{\mathcal{A}}([\alpha/Id])) = \{RF([\alpha_C/Id]) : C \in Ob(\mathcal{C})\}$*, isto é,*

$$(RF)_{\mathcal{C}}(T_{\mathcal{A}}([\alpha/Id])) = \{[KF(I(\alpha_C))/Id] : C \in Ob(\mathcal{C})\},$$

ou seja, para cada C*, determinamos* $I(\alpha_C)$ *por:*

$$\begin{tikzcd} & A(C) \arrow[dl, "Id"'] \arrow[dr, "\alpha_C"] & \\ A(C) \arrow[d, "q_{A(C)}"'] & & I(A^{\bullet})(C) \arrow[d, "Id"] \\ I(A(C))^{\bullet} \arrow[rr, "I(\alpha_C)"'] & & I(A^{\bullet})(C), \end{tikzcd} \tag{4.1}$$

portanto $(RF)_{\mathcal{C}}(T_{\mathcal{A}}([\alpha/Id])) = \{[KF(I(\alpha_C))/Id] : C \in Ob(\mathcal{C})\}$ *tais que o dia-*

grama

$$\begin{tikzcd}
KF(I(A(C))^{\bullet}) \arrow[r, "{[KF(I(\alpha_C))/Id]}"] \arrow[d, "{[KF(I(A(t))/Id]}"'] & KF(I(A^{\bullet})(C)) \arrow[d, "{[KF(I(A^{\bullet})(t))/Id]}"] \\
KF(I(A(D))^{\bullet}) \arrow[r, "{[KF(I(\alpha_D))/Id]}"'] & KF(I(A^{\bullet})(D))
\end{tikzcd} \tag{4.2}$$

é comutativo, ou seja, temos o seguinte diagrama comutativo em $K(\mathcal{B})$*:*

$$\begin{tikzcd}
 & & W^{\bullet} \arrow[dl, "\gamma"'] \arrow[dr, "\gamma"] & & \\
 & KF(I(A(C))^{\bullet}) \arrow[dl, "Id"'] \arrow[drrr, "(1)"' near end] & & KF(I(A(C))^{\bullet}) \arrow[dlll, "Id" near end] \arrow[dr, "(2)"] & \\
KF(I(A(C))^{\bullet}) & & & & KF(I(A^{\bullet})(D)),
\end{tikzcd}$$

onde $(1) = KF(I(A^{\bullet})(t)) \circ KF(I(\alpha_C))$ *e* $(2) = KF(I(\alpha_D)) \circ KF(I(A(t)))$. *Portanto, usando a Observação 7 do primeiro capítulo, temos*

$$\Big(KF(I(\alpha_D)) \circ KF(I(A(t)))\Big) \sim \Big(KF(I(A^{\bullet})(t)) \circ KF(I(\alpha_C))\Big) \tag{4.3}$$

Cabe observar neste ponto que $I(\alpha_C)$ *é um quase-isomorfismo entre complexos de objetos injetivos e, pela Observação 11,* $I(\alpha_C)$*, e consequentemente* $KF(I(\alpha_C))$*, são isomorfismos para todo* $C \in Ob(\mathcal{C})$*.*

Lema 4.2. *Sejam* $\mathcal{A}$ *uma categoria abeliana com suficientes injetivos e* $\mathcal{C}$ *uma categoria pequena, tais que, ou* $\mathcal{A}$ *esta sob as hipóteses da Proposição 2.7 ou* $\mathcal{C}$ *esta sob as hipóteses do Corolário 2.8. Então para todo funtor* $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ *exato a esquerda o seguinte diagrama é comutativo:*

$$\begin{tikzcd}
D^{+}(\mathcal{C}(\mathcal{A})) \arrow[r, "R(F_{\mathcal{C}})"] \arrow[d, "T_{\mathcal{A}}"'] & D^{+}(\mathcal{C}(\mathcal{B})) \arrow[d, "T_{\mathcal{B}}"] \\
\mathcal{C}(D^{+}(\mathcal{A})) \arrow[r, "(RF)_{\mathcal{C}}"'] & \mathcal{C}(D^{+}(\mathcal{B}))
\end{tikzcd} \tag{4.4}$$

Demonstração. Faremos a demonstração em duas etapas. Na primeira etapa, mostraremos que (4.4) comuta nos objetos. A segunda etapa, consistirá em mostrar que (4.4) comuta nos morfismos.

1º etapa: Seja $A^\bullet \in Ob(D(\mathcal{C}(\mathcal{A})))$ então teremos $T_{\mathcal{A}}(A^\bullet) = Q_{\mathcal{A}} \circ A : \mathcal{C} \longrightarrow D(\mathcal{A})$ dado por:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[d, "t"'] & \longmapsto & & A(C) \arrow[dl, "Id"'] \arrow[dr, "A(t)"] & \\ D & & A(C) & & A(D), \end{tikzcd}$$

onde $A = K_{\mathcal{A}}(A^\bullet) \in Ob(\mathcal{C}(Kom(\mathcal{A}))$.

Aplicando $(RF)_{\mathcal{C}}$ em $T_{\mathcal{A}}(A^\bullet)$ temos um funtor de $\mathcal{C}$ em $D(\mathcal{B})$ definido por

$$\begin{tikzcd} C \arrow[d, "t"'] & \longmapsto & & KF(I(A(C))^\bullet) \arrow[dl, "Id"'] \arrow[dr, "KF(I(A(t)))"] & \\ D & & KF(I(A(C))^\bullet) & (I) & KF(I(A(D))^\bullet). \end{tikzcd}$$

Por outro lado,

$$R(F_{\mathcal{C}})(A^\bullet) = K(F_{\mathcal{C}})(I(A^\bullet)^\bullet) = (F_{\mathcal{C}}(I(A^\bullet)))^\bullet = (F \circ I(A^\bullet))^\bullet$$

em $Ob(D(\mathcal{C}(\mathcal{B}))$. Assim, definindo $F \circ I(A^\bullet) = K_{\mathcal{B}}((F \circ I(A^\bullet))^\bullet)$, temos

$$T_{\mathcal{B}} \circ R(F_{\mathcal{C}})(A^\bullet) = Q_{\mathcal{B}} \circ (F \circ (I(A^\bullet)) : \mathcal{C} \longrightarrow D(\mathcal{B})$$

$$\begin{tikzcd} C \arrow[d, "t"'] & \longmapsto & & (F \circ I(A^\bullet))(C) \arrow[dl, "Id"'] \arrow[dr, "(F \circ I(A^\bullet))(t)"] & \\ D & & (F \circ I(A^\bullet))(C) & & (F \circ I(A^\bullet))(D). \end{tikzcd}$$

Notemos que $(F \circ I(A^\bullet))(C) = KF(I(A^\bullet)(C))$ e $(F \circ I(A^\bullet))(t) = KF(I(A^\bullet)(t))$, para todo C objeto de $\mathcal{C}$ e para todo t morfismo de $\mathcal{C}$. Logo $T_{\mathcal{B}} \circ R(F_{\mathcal{C}})(A^\bullet)$ fica definido por:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[d, "t"'] & \longmapsto & & KF(I(A^\bullet)(C)) \arrow[dl, "Id"'] \arrow[dr, "KF(I(A^\bullet)(t))"] & \\ D & & KF(I(A^\bullet)(C)) & (II) & KF(I(A^\bullet)(D)). \end{tikzcd}$$

Sendo assim, basta verificar que os telhados (I) e (II) são equivalentes.

Notemos que o telhado (I) é equivalente ao telhado:

$$\begin{tikzcd}
& KF(I(A(C))) \arrow[dl, "KF(I(\alpha_C))"'] \arrow[dr, "KF(I(A(t)))\circ KF(I(\alpha_D))"] & \\
KF(I(A^\bullet)(C)) & & KF(I(A^\bullet)(D)),
\end{tikzcd}$$

pois $KF(I(\alpha_C))$ e $KF(I(\alpha_D))$ são isomorfismos. Logo, usando (4.3), temos que o seguinte diagrama é comutativo em $K(\mathcal{B})$:

$$\begin{tikzcd}
& KF(I(A(C))) \arrow[dl, "Id"'] \arrow[dr, "KF(I(\alpha_C))"] & \\
KF(I(A(C))) \arrow[d, "KF(I(\alpha_C))"'] \arrow[ddrr, "KF(I(A(t))\circ KF(I(A(D))"] & & KF(I(A^\bullet)(C)) \arrow[dll, "Id"'] \arrow[dd, "KF(I(A^\bullet(t))"] \\
KF(I(A^\bullet)(C)) & & \\
& & KF(I(A^\bullet)(D)).
\end{tikzcd}$$

Portanto (4.4) comuta nos objetos.

2º etapa: Seja $[f/\phi]$ um morfismo em $D(\mathcal{C}(\mathcal{A}))$ representado por:

$$\begin{tikzcd}
& L^\bullet \arrow[dl, "\phi"'] \arrow[dr, "f"] & \\
E^\bullet & & G^\bullet
\end{tikzcd}$$

então, $T_{\mathcal{A}}([f/\phi]) = \{[f_C/\phi_C] : C \in Ob(\mathcal{C})\}$ tal que, para qualquer morfismo $C \xrightarrow{t} D$ em $\mathcal{C}$, o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd}
E(C) \arrow[r, "{[f_C/\phi_C]}"] \arrow[d, "{[E(t)/Id]}"'] & G(C) \arrow[d, "{[G(t)/Id]}"] \\
E(D) \arrow[r, "{[f_D/\phi_D]}"'] & G(D).
\end{tikzcd}$$

Agora, aplicando $(RF)_{\mathcal{C}}$ temos

$$(RF)_{\mathcal{C}} \circ T_{\mathcal{A}}([f/\phi]) = \{RF([f_C/\phi_C]) : C \in Ob(\mathcal{C})\}.$$

Isto significa que para cada objeto C de $\mathcal{C}$ podemos construir $I(f_C/\phi_C)$,

$$\begin{tikzcd}
 & L(C) \arrow[dl, "\phi_C"'] \arrow[dr, "f_C"] & \\
E(C) \arrow[d, "q-iso"'] & & G(C) \arrow[d, "q-iso"] \\
I(E(C)) \arrow[rr, "I(f_C/\phi_C)"'] & & I(G(C)),
\end{tikzcd}$$

e finalmente $(RF)_{\mathcal{C}} \circ T_{\mathcal{A}}([f/\phi]) = \{[KF(I(f_C/\phi_C))/Id] : C \in Ob(\mathcal{C})\}$, isto é, para cada C temos a classe representada por

$$\begin{tikzcd}
 & KF(I(E(C))) \arrow[dl, "Id"'] \arrow[dr, "KF(I(f_C/\phi_C))"] & \\
KF(I(E(C))) & & KF(I(G(C))).
\end{tikzcd}$$

Por outro lado, aplicando $R(F_{\mathcal{C}})$ sobre $[f/\phi]$ temos

$$\begin{tikzcd}
 & L^\bullet \arrow[dl, "\phi"'] \arrow[dr, "f"] & \\
E^\bullet \arrow[d, "q-iso"'] & & G^\bullet \arrow[d, "q-iso"] \\
I(E^\bullet) \arrow[rr, "I(f/\phi)"'] & & I(G^\bullet)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & K(F_{\mathcal{C}})(I(E^\bullet)) \arrow[dl, "Id"'] \arrow[dr, "K(F_{\mathcal{C}})(I(f/\phi))"] & \\
K(F_{\mathcal{C}})(I(E^\bullet)) & & K(F_{\mathcal{C}})(I(G^\bullet)),
\end{tikzcd}$$

Lembrando que $K(F_{\mathcal{C}})(I(E^\bullet)) = (F \circ I(E^\bullet))^\bullet$ e $K(F_{\mathcal{C}})(I(f/\phi)) = [F_{\mathcal{C}}(I(f/\phi))]$. Logo, podemos rescrever:

$$\begin{tikzcd}
 & (F \circ I(E^\bullet))^\bullet \arrow[dl, "Id"'] \arrow[dr, "{[F_{\mathcal{C}}(I(f/\phi))]}"] & \\
(F \circ I(E^\bullet))^\bullet & & (F \circ I(G^\bullet))^\bullet,
\end{tikzcd}$$

na categoria $D(\mathcal{C}(\mathcal{B}))$. Agora, aplicando $T_{\mathcal{B}}$:

$$T_{\mathcal{B}}([F_{\mathcal{C}}(I(f/\phi))/Id]) = \{[(F_{\mathcal{C}}(I(f/\phi)))_C/Id] : C \in Ob(\mathcal{C})\}.$$

Mas por definição de $F_{\mathcal{C}}$, $(F_{\mathcal{C}}(I(f/\phi)))_C = (F((I(f/\phi))_C)^{\bullet} = KF((I(f/\phi))_C)$ logo,

$$T_{\mathcal{B}}([F_{\mathcal{C}}(I(f/\phi))/Id]) = \{[KF((I(f/\phi))_C)/Id] : C \in Ob(\mathcal{C})\}.$$

Sendo assim, para ter $(RF)_{\mathcal{C}} \circ T_{\mathcal{A}}([f/\phi]) = T_{\mathcal{B}} \circ R(F)_{\mathcal{C}}([f/\phi])$, falta provar que

$$KF(I(f_C/\phi_C)) \sim KF((I(f/\phi))_C).$$

Sejam $\xi : E^{\bullet} \longrightarrow I(E^{\bullet})$ e $\theta : G^{\bullet} \longrightarrow I(G^{\bullet})$ os quase-isomorfismos naturais. Temos os seguintes diagramas comutativos determinados como em (4.1):

$$\begin{tikzcd} & E(C) \arrow[dl, "q_{E(C)}"'] \arrow[dr, "\xi_C"] & \\ I(E(C))^{\bullet} \arrow[rr, "I(\xi_C)"'] & & I(E^{\bullet})(C) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & G(C) \arrow[dl, "q_{G(C)}"'] \arrow[dr, "\theta_C"] & \\ I(G(C))^{\bullet} \arrow[rr, "I(\theta_C)"'] & & I(G^{\bullet})(C), \end{tikzcd}$$

onde $q_{E(C)}, q_{G(C)}, \xi_C, \theta_C$ são quase-isomorfismos enquanto que $I(\xi_C)$ e $I(\theta_C)$ são isomorfismos. E, usando as definições de $I(f/\phi)$ e de $I(f_C/\phi_C)$, temos o diagrama comutativo em $K(\mathcal{A})$:

$$\begin{tikzcd} & L(C) \arrow[dl, "\phi_C"'] \arrow[dr, "f_C"] & \\ E(C) \arrow[d, "q_{E(C)}"] \arrow[dd, bend right=60, "\xi_C"'] & & G(C) \arrow[d, "q_{G(C)}"'] \arrow[dd, bend left=60, "\theta_C"] \\ I(E(C)) \arrow[rr, "I(f_C/\phi_C)"'] \arrow[d, "I(\xi_C)"] & & I(G(C)) \arrow[d, "I(\theta_C)"'] \\ I(E^{\bullet})(C) \arrow[rr, "(I(f/\phi))_C"'] & & I(G^{\bullet})(C). \end{tikzcd}$$

Portanto, $I(f_C/\phi_C) \sim (I(f/\phi))_C$ e, consequentemente,

$$KF(I(f_C/\phi_C)) \sim KF((I(f/\phi))_C).$$

□

Observemos que para ter $T_{\mathcal{A}}$ e $T_{\mathcal{B}}$ plenos e fiéis teremos que tomar $\mathcal{C} = \mathcal{Q}$ onde $\mathcal{Q}$ é a categoria gerada por um *quiver* Q sem relações. Sob estas condições temos então o seguinte resultado:

Teorema 4.3. *Sejam $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana com suficientes injetivos, $\mathcal{Q}$ a categoria gerada por um quiver Q finito sem relações e $RF : D^+(\mathcal{A}) \longrightarrow D^+(\mathcal{B})$ uma equivalência. Então $R(F)_{\mathcal{Q}} : D^+(\mathcal{Q}(\mathcal{A})) \longrightarrow D^+(\mathcal{Q}(\mathcal{B}))$ é também uma equivalência.*

Obs 16. *A hipótese do quiver Q ser finitos esta sendo usada para poder garantir que $\mathcal{Q}(\mathcal{A})$ tenha suficientes injetivos. Portanto ela pode ser substituída pela hipótese de $\mathcal{A}$ ser uma categoria completa.*

Demonstração. Por hipótese temos que RF é equivalência logo, pela Proposição 2.15, $(RF)_{\mathcal{Q}}$ é também equivalência e portanto é pleno e fiel. Além disso, já demonstramos que $T_{\mathcal{A}}$ e $T_{\mathcal{B}}$ são funtores plenos e fiéis. Assim, usando a comutatividade do diagrama (4.4), concluímos que $R(F_{\mathcal{Q}})$ é um funtor pleno e fiel. Portanto, para terminar a demonstração deste teorema, é necessário e suficiente demonstrar que $R(F_{\mathcal{Q}})$ é essencialmente sobre.

Seja $B^\bullet \in Ob(D^+(\mathcal{Q}(\mathcal{B}))$, logo $B^\bullet \in Ob(Kom^+(\mathcal{Q}(\mathcal{B}))$ e pela equivalência $K_{\mathcal{B}}$, temos um funtor $B : \mathcal{Q} \longrightarrow Kom(\mathcal{B})$ associado a $B^\bullet$.

Para cada i objeto de $\mathcal{Q}$, $B(i) \in Ob(D^+(\mathcal{B}))$ então, dado que RF é essencialmente sobre, existe um objeto $A_i^\bullet$ em $D^+(\mathcal{A})$ tal que $RF(A_i^\bullet) \simeq B(i)$, isto é, $KF(I(A_i^\bullet)) \simeq B(i)$ em $D^+(\mathcal{B})$.

Seja $i \xrightarrow{p} j$ um morfismo em $\mathcal{Q}$, logo temos $B(i) \xrightarrow{B(p)} B(j)$ um morfismo em $Kom^+(\mathcal{B})$ que gera um morfismo

$$\begin{tikzcd} & B(i) \arrow[dl, "Id"'] \arrow[dr, "{[B(p)]}"] & \\ B(i) & & B(j) \end{tikzcd}$$

em $D(\mathcal{B})$ e, como $Hom_{D(\mathcal{B})}(B(i), B(j)) \simeq Hom_{D(\mathcal{B})}(KF(I(A_i^\bullet)), KF(I(A_j^\bullet)))$, existe um morfismo $[g/\psi] \in Hom_{D(\mathcal{B})}(KF(I(A_i^\bullet)), KF(I(A_j^\bullet)))$ correspondente a $[B(p)/Id]$.

Dado que RF é pleno e fiel,

$$RF : Hom_{D(\mathcal{A})}(A_i^\bullet, A_j^\bullet) \longrightarrow Hom_{D(\mathcal{B})}(KF(I(A_i^\bullet)), KF(I(A_j^\bullet)))$$

é bijetora e portanto existe único $[f/\phi] \in Hom_{D(\mathcal{A})}(A_i^\bullet, A_j^\bullet)$ tal que $RF([f/\phi]) = [g/\psi]$, ou seja, $Q \circ KF(I([f/\phi])) = [g/\psi]$.

Nosso objetivo é definir um funtor de $\mathcal{Q}$ em $Kom^+(\mathcal{A})$. Lembrando que $I([f/\phi])$ é um morfismo em $K^+(\mathcal{A})$, seja $A(p)$ um representante em $Kom^+(\mathcal{A})$, isto é, $[A(p)] = I([f/\phi])$. Definamos o seguinte funtor:

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
A: & \mathcal{Q} \arrow[r] & Kom^+(\mathcal{A}) \\
& i \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "p"'] & A(i) = A_i^\bullet \arrow[d, "A(p)"] \\
& j & A(j) = A_j^\bullet.
\end{tikzcd}$$

Observemos que este funtor esta bem definido pois a categoria $\mathcal{Q}$ é gerado por um quiver finito sem relações.

Como $K_{\mathcal{A}}$ é equivalência, existe $A^\bullet \in Ob(D^+(\mathcal{Q}(\mathcal{A})))$ tal que $K_{\mathcal{A}}(A^\bullet) = A$. Falta, então, demonstrar que $R(F)_{\mathcal{Q}}(A^\bullet) \simeq B^\bullet$. Isto significa que devemos encontrar quase-isomorfismos $R(F)_{\mathcal{Q}}(A^\bullet) \xleftarrow{\alpha} C^\bullet \xrightarrow{\beta} B^\bullet$.

Por definição temos que $K(F_{\mathcal{Q}})(I(A^\bullet) = (F \circ I(A^\bullet)^\bullet$, logo, para cada $i \in Ob(\mathcal{Q})$,

$$K(F_{\mathcal{Q}})(I(A^\bullet)(i) = (F \circ I(A^\bullet)(i))^\bullet = KF(I(A^\bullet)(i)).$$

Mas, pela Observação 15, $KF(I(A^\bullet)(i)) \simeq KF(I(A(i)))$ em $K(\mathcal{B})$. Por outro lado, $KF(I(A(i)) \sim B(i)$ em $D(\mathcal{B})$, logo existem quase-isomorfismos $(R(F)_{\mathcal{Q}}(A^\bullet))(i) \xleftarrow{\alpha_i} C_i \xrightarrow{\beta_i} B(i)$. E dado $i \xrightarrow{p} j$ temos o diagrama:

$$\begin{tikzcd}
& C_i \arrow[rr, dashed, "C_p"] \arrow[dl, "\alpha_i"'] \arrow[ddl, "\beta_i"] & & C_j \arrow[dl, "\alpha_j"'] \arrow[ddl, "\beta_j"] \\
R(F)_{\mathcal{Q}}(A^\bullet))(i) \arrow[rr, "R(F)_{\mathcal{Q}}(A^\bullet))(p)"'] & & R(F)_{\mathcal{Q}}(A^\bullet))(j) & \\
B(i) \arrow[rr, "B(p)"'] & & B(j). &
\end{tikzcd}$$

Onde a existência de C_p esta garantida pelo Lema 3.6. Assim, usando os mesmos argumentos da demonstração do Teorema 3.13 temos os quase-isomorfismos

$$\begin{tikzcd} & C^\bullet \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta"] & \\ R(F)_{\mathcal{Q}}(A^\bullet) & & B^\bullet. \end{tikzcd}$$

Como queríamos demonstrar. □

É importante notar que o Lema 4.2 e o Teorema 4.3 também são válidos quando substituímos D^+ por D^b. Isto é, também podemos garantir a comutatividade de

$$\begin{tikzcd} D^b(\mathcal{C}(\mathcal{A})) \arrow[r, "R(F_{\mathcal{C}})"] \arrow[d, "T_{\mathcal{A}}"'] & D^b(\mathcal{C}(\mathcal{B})) \arrow[d, "T_{\mathcal{B}}"] \\ \mathcal{C}(D^b(\mathcal{A})) \arrow[r, "(RF)_{\mathcal{C}}"'] & \mathcal{C}(D^b(\mathcal{B})) \end{tikzcd}$$

e portanto, sob as mesmas hipótese do Teorema 4.3, se $RF : D^b(\mathcal{A}) \longrightarrow D^b(\mathcal{B})$ é uma equivalência teremos que $R(F)_{\mathcal{Q}} : D^b(\mathcal{Q}(\mathcal{A})) \longrightarrow D^b(\mathcal{Q}(\mathcal{B}))$ também será equivalência.

Estes resultados se devem ao fato de que $D^b(\mathcal{A})$ é equivalente a uma subcategoria de $D^+(\mathcal{A})$, para qualquer categoria abeliana $\mathcal{A}$.

Capítulo 5

Teorema de Mukai para $\mathcal{Q}$-feixes

Neste último capitulo temos como objetivo demonstrar uma versão do Teorema de Mukai no caso de Q-feixes quase-coerentes.

O Teorema de Mukai é principalmente usado na classificação de variedades abelianas e afirma que o funtor integral $\Phi^{\mathcal{P}}_{X\to\widehat{X}} : D^b(X) \longrightarrow D^b(\widehat{X})$ é uma equivalência de categorias, onde X denota uma variedade abeliana, $\widehat{X}$ denota a variedade dual e $\mathcal{P}$ é o fibrado de Poincaré sobre $X \times \widehat{X}$. Este funtor coincide com o funtor derivado do funtor $\widehat{\mathcal{S}} : \mathfrak{Coh}(X) \longrightarrow \mathfrak{Coh}(\widehat{X})$ definido por $\widehat{\mathcal{S}}(\mathcal{E}) = \pi_{\widehat{X}*}(\mathcal{P} \otimes \pi_X^*\mathcal{E})$, onde π_X e $\pi_{\widehat{X}}$ são as projeções de $X \times \widehat{X}$ sobre, respectivamente, X e $\widehat{X}$.

A transformada de Fourier-Mukai pode ser estendida para a categoria de feixes quase-coerentes, logo temos $D^b(\mathfrak{Qco}(X)) \simeq D^b(\mathfrak{Qco}(X))$.

Dado uma categoria $\mathcal{Q}$ gerada por um quiver Q, um Q-feixe quase-coerente é um funtor de $\mathcal{Q} \longrightarrow \mathfrak{Qco}(X)$. A categoria cujos objetos são estes funtores é denotada por $\mathcal{Q}Q(X)$. Como $\mathfrak{Qco}(X)$ é abeliana, temos que $\mathcal{Q}Q(X)$ é abeliana, logo podemos pensar na categoria derivada que será denotada por $D(\mathcal{Q}Q(X))$. Analogamente, definimos a categoria dos Q-feixes coerentes $\mathcal{Q}C(X)$ que também é abeliana e definimos $D(\mathcal{Q}(X)) := D_{\mathcal{Q}C(X)}(\mathcal{Q}Q(X))$.

Provaremos que $R(\widehat{\mathcal{S}})_{\mathcal{Q}} : D^b(\mathcal{Q}Q(X)) \longrightarrow D^b(\mathcal{Q}Q(\widehat{X}))$ é uma equivalência. Para esta demonstração aplicaremos a teoria desenvolvida nos capítulos anteriores, usando como principal resultado o Teorema 4.3.

5.1 Teorema de Mukai

Dadas X e Y duas variedades projetivas não singulares sobre um corpo $\mathbb{K}$, definimos π_X e π_Y sendo as projeções do produto cartesiano $X \times Y$ sobre os respectivos fatores. Definimos o funtor $\Phi^{K^\bullet}_{X\to Y} : D^-(X) \longrightarrow D^-(Y)$ por:

$$\Phi^{K^\bullet}_{X\to Y}(\mathcal{E}^\bullet) = R\pi_{Y*}(\pi_X^*\mathcal{E}^\bullet \otimes^L K^\bullet),$$

onde $K^\bullet$ é um objeto de $D^-(X \times Y)$ que chamaremos de núcleo do funtor. O funtor $\Phi^{K^\bullet}_{X\to Y}$ recebe o nome de *funtor integral.*

Quando um funtor integral é uma equivalência de categorias, ele será chamado de *funtor de Fourier-Mukai.* Se, além disso, o núcleo $K^\bullet$ pode ser reduzido a um único feixe coerente em $X \times Y$, o funtor integral é chamado de *transformada de Fourier-Mukai.*

Sejam X uma variedade abeliana sobre um corpo $\mathbb{K}$ de característica zero, $\widehat{X}$ sua variedade abeliana dual e $\mathcal{P}$ o fibrado de Poincaré em $X \times \widehat{X}$ então:

Teorema de Mukai. *O funtor integral* $\Phi^{\mathcal{P}}_{X\to\widehat{X}} : D^b(X) \longrightarrow D^b(\widehat{X})$ *é uma transformada de Fourier-Mukai.*

Neste caso podemos escrever a transforma de Fourier-Mukai como o funtor derivado do funtor $\widehat{\mathcal{S}}(\mathcal{E}) = \pi_{\widehat{X}*}(\mathcal{P} \otimes \pi_X^*\mathcal{E})$.

A transformada de Fourier-Mukai pode ser estendida para a categoria de feixes quase-coerentes, logo temos a equivalência:

$$R(\widehat{\mathcal{S}}) : D^b(\mathfrak{Qco}(X)) \longrightarrow D^b(\mathfrak{Qco}(X)).$$

5.2 Q-feixes

Definição 5.1. *Seja Q um quiver. Um Q-feixe quase-coerente em X é um funtor de $\mathcal{Q} \longrightarrow \mathfrak{Qco}(X)$. Denotaremos por $\mathcal{Q}Q(X)$ a categoria $\mathcal{Q}(\mathfrak{Qco}(X))$ dos Q-feixes quase-coerentes em X.*

Analogamente, definimos um Q-feixe coerente em X como um funtor de $\mathcal{Q} \longrightarrow \mathfrak{Coh}(X)$. Denotaremos por $\mathcal{Q}C(X)$ a categoria $\mathcal{Q}(\mathfrak{Coh}(X))$ dos Q-feixes coerentes em X.

Lembrando que $\mathcal{Q}$ é a categoria gerada pelo quiver Q definida na Seção 3.4 do Capítulo 3.

Lema 5.2. *As categorias $\mathcal{Q}Q(X)$ e $\mathcal{Q}C(X)$ definidas acima são abelianas.*

Além disso, se Q for um quiver finito e se X for um esquema noetheriano então $\mathcal{Q}Q(X)$ também tem suficientes injetivos.

Demonstração. A primeira afirmação vem do fato que as categorias $\mathfrak{Qco}(X)$ e $\mathfrak{Coh}(X)$ são abeliana, logo usando a Proposição 2.4 do segundo capítulo temos $\mathcal{Q}Q(X)$ e $\mathcal{Q}C(X)$ abelianas.

Quando X é um esquema noetheriano temos que $\mathfrak{Qco}(X)$ é uma categoria com suficientes injetivos. Logo tomando Q um quiver finito temos, pelo Corolário 2.8, que $\mathcal{Q}Q(X)$ tem suficientes injetivos. □

Teorema de Mukai para Q-feixes. *Seja $\mathcal{Q}$ a categoria gerada por um quiver Q sem relações. Então o funtor derivado $R(\widehat{S})_{\mathcal{Q}}$ do funtor induzido $\widehat{S}_{\mathcal{Q}} : \mathcal{Q}Q(X) \longrightarrow \mathcal{Q}Q(\widehat{X})$ é uma equivalência de categorias.*

Demonstração. Como vimos anteriormente temos $\widehat{S} : \mathfrak{Coh}(X) \longrightarrow \mathfrak{Coh}(\widehat{X})$ definida por $\widehat{S}(\mathcal{E}) = \pi_{\widehat{X}*}(\mathcal{P} \otimes \pi_X^* \mathcal{E})$ e que pode ser estendida para $\widehat{S} : \mathfrak{Qco}(X) \longrightarrow \mathfrak{Qco}(\widehat{X})$.

Pelo Teorema de Mukai,

$$R\widehat{S} : D^b(\mathfrak{Qco}(X)) \longrightarrow D^b(\mathfrak{Qco}(\widehat{X}))$$

é uma equivalência. Logo, pela Proposição 2.15, temos a equivalência

$$(R\widehat{S})_{\mathcal{Q}} : \mathcal{Q}(D^b(\mathfrak{Qco}(X))) \longrightarrow \mathcal{Q}(D^b(\mathfrak{Qco}(\widehat{X}))).$$

Então, pelo Teorema 4.3

$$R(\widehat{S}_{\mathcal{Q}}) : D^b(\mathcal{Q}Q(X)) \longrightarrow D^b(\mathcal{Q}Q(\widehat{X}))$$

é também equivalência. □

Referências Bibliográficas

[1] D. H. Ruiperez. C. Bartocci, U. Bruzzo. *Fourier-Mukai and Nahm Transforms in Geometry and Mathematical Physics*, volume 276. Birkhaüser Verlag, 2009.

[2] P. Freyd. *Abelian Categories An Introduction to the Theory of Functors*. Raper and Row, 1966.

[3] P. Gabriel. Des catégories abéliennes. *Bull.Soc. Math. France*, (90):323 – 448, 1962.

[4] Alexander Grothendieck. Sur quelques points d'algèbre homologique. *The Tohoku Mathematical Journal*, Second Séries 9:119 221, 1957.

[5] D. Huybrechts. *Fourier-Mukai Transforms in Algebraic Geometry*. Oxford Mathematical Monographs. Oxford University Press, 2006.

[6] N. Jacobson. *Basic Algebra II*. W.H. Freeman and Company, 1910.

[7] S. MacLane. *Categories for working mathematician*, volume 5 of *Graduate Texs in Mathematics*. Springer- Verlag, 1971.

[8] Shigeru Mukai. Duality between d(x) e d($\hat{x}$) with its application to picard sheaves. *Nagoya Math. J.*, (81):153 – 175, 1981.

[9] Alastair. D. King Peter. B. Gothen. Homological algebra of twisted quiver bundles. *J. London Math. Soc.*, 71:85–99, 2005.

[10] D. M. Prata. Representações torcidas de quivers. Master's thesis, IMECC-UNICAMP, 2008.

[11] YU. I. Manin S.I. Gelfand. *Methods of Homological Algebra*. Springer Monographs in Mathematics. Springer Verlag, second edition edition, 2003.

[12] V.S. Vargas. Elementos de álgebra homológica en categorias abelianas y el teorema de inmersión en la categoria de grupos abelianos. Master's thesis, Facultad de Ciencias - Universidad Nacional Autonoma de Mexico, www.matem.unam.mx/omendoza/tesis/TesisLicValente.pdf, 2007.

[13] C.A. Weibel. *An Introduction to Homological Algebra*, volume 38 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics.* Cambridge University Press, 1995.

[14] K. Yokogawa. Infinitesimal deformation of parabolic higgs sheaves. *International Journal of Mathematics*, 6(1):125 – 148, 1995.