

**Homologia O-minimal:**  
aspectos topológicos de estruturas O-minimais

Henrique Meretti Camargo

DISSERTAÇÃO APRESENTADA  
AO  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA  
DA  
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
PARA  
OBTENÇÃO DO TÍTULO  
DE  
MESTRE EM CIÊNCIAS

Programa: Matemática  
Orientador: Prof. Dr. Ricardo Bianconi

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro do CNPq

São Paulo, abril de 2013

# Homologia O-minimal: aspectos topológicos de estrutura O-minimais

Esta dissertação contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa realizada por Henrique Meretti Camargo em 07/06/2013. O original encontra-se disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Ricardo Bianconi(orientador) - IME-USP
- Prof. Dr. Francisco Miraglia Neto - IME-USP
- Prof. Dr. Marcelo Esteban Coniglio - CLE-UNICAMP

---

## Agradecimentos

Gostaria de agradecer ao meu orientado Ricardor Bianconi por ter me ajudado durante esse processo. Gostaria também de agradecer a todos os professores e pesquisadores, tanto do IME-USP como de outros institutos, por todo o conhecimento que tiveram a gentileza de compartilhar comigo. Agradeço também o CNPQ e meus pais pelo ajuda financeira.

Também não posso deixar de mencionar meus familiares e amigos por todo o apoio e paciência durante esses anos.



---

## Resumo

Apresentamos aqui um estudo sobre estruturas  $O$ -minimais com um enfoque em propriedades topológicas. Começamos com as definições relevantes e os principais exemplos, como corpos reais fechados e suas extensões por funções analíticas restritas a compactos, ou pela função exponencial; discutimos brevemente como são os conjuntos definíveis em tais estruturas. Seguimos com os resultados fundamentais da teoria de estruturas  $O$ -minimais apresentando o teorema de decomposição em células além de definições e resultados envolvendo conceitos como dimensão, curvas, conjuntos fechados e limitados e conjuntos definivelmente conexos. Em seguida apresentamos o teorema de triangularização, obtido através do lema de boas coordenadas e resultados sobre fibras de conjuntos definíveis. Utilizamos o teorema de compacidade da teoria de modelos para obter o teorema de trivialização. Por fim usamos o teorema de triangularização para desenvolver a teoria de homologia. Apresentamos dois funtores satisfazendo versões apropriadas dos axiomas de Eilenberg-Steenrod, o primeiro desses é o funtor de homologia simplicial definido sobre conjuntos definíveis fechados e limitados enquanto o segundo, o funtor de homologia singular, está definido sobre quaisquer conjuntos definíveis. Concluímos o texto utilizando essa teoria para provar versões análogas de teoremas clássicos da topologia algébrica, como o teorema do ponto fixo de Brouwer.

**Palavras-chave:** Estruturas  $O$ -minimais, Homologia  $O$ -minimal, Teorema de Triangularização, Teorema de Trivialização, Homologia Singular, Homologia Simplicial, Ponto Fixo de Brouwer, Invariância de Domínio, Separação de Jordan.



---

## Abstract

Here we present a study on  $O$ -minimal structures with a focus on topological properties. We begin with the relevant definitions and key examples, such as real closed fields and their extensions by analytic functions restricted to compact domains, or by the exponential function; we briefly discuss the sets definable in such structures. We follow with the fundamental results on the theory of  $O$ -minimal structures, presenting the cell decomposition theorem besides definitions and results involving concepts such as dimension, curves, closed and bounded sets and definable connected sets. Then we present the theorem of triangulation, obtained by the lemma of good coordinates. We use the compactness theorem of model theory to obtain the trivialization theorem. Finally we use the triangulation theorem for developing the theory of homology. We present two functors satisfying appropriate versions of the Eilenberg-Steenrod axioms, the first of these is the simplicial homology functor defined on definable closed and bounded sets while the second, the singular homology functor, is defined on any definable set. We conclude the text using this theory to prove analogous versions of classical theorems of algebraic topology, such as the Brouwer fixed point theorem.

**Keywords:**  $O$ -minimal Structures,  $O$ -minimal Homology, Triangulation Theorem, Trivialization Theorem, Singular Homology, Simplicial Homology, Brouwer Fixed Point, Invariance of domain, Jordan's Separation Theorem.



# Sumário

<b>0</b>	<b>Introdução</b>	<b>3</b>
<b>1</b>	<b>Exemplos e Definições</b>	<b>9</b>
1.1	Estruturas e Conjuntos Definíveis . . . . .	9
1.1.1	Estruturas . . . . .	9
1.1.2	Fórmulas e Conjuntos definíveis . . . . .	10
1.2	Estruturas Ordenadas . . . . .	14
1.2.1	Ordens Lineares . . . . .	14
1.2.2	Grupos Ordenados . . . . .	15
1.2.3	Corpos Ordenados . . . . .	17
1.3	Estruturas O-minimais . . . . .	21
1.3.1	O-minimalidade e Ordens Lineares . . . . .	21
1.3.2	Grupos Ordenados Divisíveis . . . . .	24
1.3.3	Corpos Reais Fechados . . . . .	25
1.3.4	Expansões O-minimais de Corpos Reais . . . . .	28
<b>2</b>	<b>Propriedades Gerais</b>	<b>33</b>
2.1	Monotonicidade e Decomposição em Célula . . . . .	33
2.1.1	Monotonicidade e Finitude . . . . .	33
2.1.2	Células e Suas Propriedades . . . . .	37
2.1.3	O Teorema de Decomposição em Células . . . . .	39
2.2	Dimensão e Propriedades Topológicas . . . . .	45
2.2.1	Dimensão . . . . .	45
2.2.2	Escolha Definível e Seleção de Curvas . . . . .	50
2.2.3	Conjuntos Definivelmente Conexos . . . . .	53
2.3	Triangularização . . . . .	57
2.3.1	Boas Coordenadas . . . . .	57
2.3.2	Simplexos, Complexos e Suas Propriedades . . . . .	59
2.3.3	Triangularização de Conjuntos Definíveis . . . . .	63
2.3.4	Propriedades de Fibras e o Teorema de Trivialização . . . . .	69
<b>3</b>	<b>Homologia</b>	<b>77</b>
3.1	Homologia Simplicial . . . . .	79
3.1.1	Homologia em Complexos Simpliciais . . . . .	79
3.1.2	Estendendo o Funtor de Homologia a Conjuntos Definíveis . . . . .	82
3.1.3	Os Axiomas de Eilenberg-Steenrod . . . . .	92
3.2	Homologia Singular . . . . .	95
3.2.1	Definindo o Funtor de Homologia . . . . .	95
3.2.2	Divisão Baricêntrica . . . . .	97
3.2.3	O Axioma de Excisão . . . . .	103

2	SUMÁRIO	-1.0
3.3	Aplicações . . . . .	107
3.3.1	Calculando Homologia . . . . .	107
3.3.2	Três Teoremas Clássicos . . . . .	112
A	Apêndice	115
	Referências Bibliográficas	121

## Capítulo 0

### Introdução

O estudo de estruturas  $O$ -minimais pode ser dividido em duas partes, por um lado existe a busca por estruturas satisfazendo a condição de  $O$ -minimalidade enquanto por outro existe o interesse em descobrir novas propriedades de tais estruturas, obviamente resultados em qualquer um dos lados aumenta o interesse sobre o outro. A maior parte dos resultados desse texto trata de propriedades topológicas comuns a uma grande parte de estruturas  $O$ -minimais, ou seja, resultados na segunda parte de tal divisão.

Obviamente estudar propriedades de um tipo qualquer de estrutura é tão relevante quanto são relevantes os exemplos de tais estruturas. Tendo isso em vista dedicamos um rápido primeiro capítulo para a apresentação de algumas estruturas, sendo essas os principais exemplos da teoria que vamos desenvolver. No segundo capítulo desenvolvemos resultados gerais sobre estruturas  $O$ -minimais com um enfoque em teoremas relacionados à topologia como o teorema de triangularização. Por fim no terceiro e último capítulo apresentamos a teoria de homologia  $O$ -minimal, uma teoria desenvolvida por A. A. Woerheide que define em uma estrutura  $O$ -minimal extendendo um corpo um conceito análogo aos clássicos funtores de homologia da topologia algébrica.

A exposição que faremos no primeiro capítulo é um tanto informal, no sentido que não estaremos interessados em apresentar definições e demonstrações precisas de todos os conceitos e resultados envolvidos. Já no segundo e terceiro capítulo, ao estudarmos as propriedades de estruturas  $O$ -minimais e a teoria de homologia, seremos bastante rigorosos com todas as definições e demonstrações.

Apresentamos aqui um desenvolvimento completo da teoria de estruturas  $O$ -minimais (no sentido que provaremos todas as afirmações relevantes sem nos utilizar de resultados não demonstrados), partindo das definições e resultados básicos, e chegando em alguns dos resultados mais recentes da área. Essencialmente todos os resultados encontrados nesse texto são conhecidos. Porém, em muitos casos, as demonstrações apresentadas diferem de maneira essencial das encontradas em textos clássicos. Em outros casos temos demonstrações baseadas naquelas encontradas em tais textos, porém apresentadas aqui de forma mais detalhada e completa.

#### Definições e Exemplos

Começamos o texto apresentando a linguagem necessária para tratarmos estruturas  $O$ -minimais. A discussão apresentada nessa parte do texto não tem como objetivo apresentar definições e resultados de maneira precisa e completa, mas apenas esclarecer a notação e o contexto em que estamos trabalhando.

Definimos primeiramente aquilo que chamamos de estruturas através da abordagem usual da teoria de modelos. Usamos símbolos como  $\mathcal{R}$  e  $\mathcal{Q}$  para denotar estruturas com domínios  $R$  e  $Q$  respectivamente. Apresentamos também uma rápida discussão sobre fórmulas de primeira ordem e conjuntos definíveis, sendo que um conjunto definível em uma estrutura  $\mathcal{R}$  nada mais é do que o conjunto dos pontos de  $R^n$  satisfazendo uma fórmula de primeira ordem  $\phi(a_1, \dots, a_k, x_1, \dots, x_n)$ , com  $a_i \in R$ , da linguagem associada a estrutura  $\mathcal{R}$ . Falamos ainda que uma função é definível se seu gráfico é definível. Os elementos  $a_i \in R$  acima são conhecidos como parâmetros, e conjuntos definíveis dessa maneira são as vezes conhecidos como conjuntos definíveis com parâmetros, enquanto o termo "conjuntos definíveis" ou "conjuntos 0-definíveis" são

reservados aqueles que podem ser definidos sem a utilização de tais parâmetros. No nosso caso porém não faremos nenhuma distinção de nomenclatura desse tipo, diremos apenas que tais conjuntos são definíveis.

Um fato importante sobre conjuntos e funções definíveis de uma estrutura é que esses formam uma categoria, e o nosso interesse estará sempre em estudar os objetos de tal categoria.

Estruturas  $O$ -minimais são uma classe específica de estruturas ordenadas, e por esse motivo dedicamos parte do texto a estruturas ordenadas. A relação de ordem que nos interessa é na verdade bem específica: ordens lineares densas sem extremos; denotamos a teoria de primeira ordem associada a tais ordens por  $D.L.O.$ . Um fato importante sobre estruturas do tipo  $(R, \leq, \dots)$  onde  $\leq$  é uma ordem linear densa é que o conjunto de intervalos abertos de tal estrutura forma a base de uma topologia sobre  $R$ . Essa topologia é conhecida como a topologia da ordem e é sobre essa topologia que trabalhamos durante todo o texto.

Exemplos de  $D.L.O.$  de particular interesse para nós são grupos ordenados e corpos ordenados. Um grupo ordenado nada mais é do que uma estrutura  $(R, \leq, +, 0, \dots)$  estendendo uma  $D.L.O.$ , tal que  $(R, +)$  é um grupo, e, dados  $0 < x$  e  $0 < y$ , temos  $x + y > 0$ . Um corpo ordenado é uma estrutura do tipo  $(R, \leq, +, \cdot, 0, 1, \dots)$ , tal que  $(R, \leq, +, 0)$  é um grupo ordenado e dado  $x > 0$  e  $y_1 < y_2$  temos  $x \cdot y_1 < x \cdot y_2$ . Exemplos padrões de corpos e grupos ordenados são  $\mathbb{R}$  e  $\mathbb{Q}$  com as operações e ordem usual, temos por outro lado alguns exemplos menos usuais como  $\mathbb{R}(x)$ , o corpo de funções racionais com coeficientes reais.

É importante notar que ao acrescentar funções e relações à uma estrutura nós aumentamos a classe de conjuntos definíveis, e portanto enriquecemos a categoria sobre a qual estamos lidando. Ao trabalharmos com um corpo ordenado, por exemplo, temos que diferentes conjuntos como bolas e esferas e até mesmo a diferencial de uma função definível (para uma noção apropriada de diferencial) se tornam definíveis. Noções essas que não podem ser definidas em uma  $D.L.O$  qualquer.

Uma estrutura  $O$ -minimal não é nada mais do que uma estrutura  $\mathcal{R}$  estendendo uma  $D.L.O.$ , tal que os conjuntos definíveis de  $R$  são uniões finitas de pontos e intervalos.

O  $O$  no nome  $O$ -minimal se refere a ordem. Note que em uma  $D.L.O.$   $\mathcal{Q} = (Q, \leq)$  os conjuntos definíveis de  $Q$  são precisamente uniões finitas de intervalos e pontos. Podemos entender assim que em uma estrutura  $O$ -minimal  $\mathcal{R}$  os conjuntos definíveis de  $R$  são precisamente aqueles que podem ser definidos somente com a relação de ordem, justificando assim o nome.

Por outro lado em  $R^n$  para  $n > 1$  os conjuntos definíveis podem ser muitos diferentes daqueles definíveis em uma  $D.L.O.$ . Note que, como mencionamos anteriormente, ao acrescentarmos funções e relações em uma estrutura nos aumentamos a classe de conjuntos definíveis. Assim uma extensão de uma estrutura  $O$ -minimal não precisa ser  $O$ -minimal, de onde surge o problema em encontrar estruturas  $O$ -minimais.

Uma propriedade particularmente interessante da definição acima é que dado uma estrutura  $O$ -minimal  $\mathcal{R}$ , todas as estruturas elementarmente equivalentes a  $\mathcal{R}$  também são  $O$ -minimais. Esse resultado pode ser usado juntamente de exemplos conhecidos para obter novas estruturas  $O$ -minimais, em particular temos que modelos não standard de todos os exemplos que vamos apresentar são estruturas  $O$ -minimais.

Para provarmos que uma dada estrutura é  $O$ -minimal precisamos entender como são os conjuntos definíveis de tal estrutura. Uma maneira possível de entender tais conjuntos é simplificando a forma das fórmulas da teoria de primeira ordem de tal estrutura. Existem algumas maneiras possíveis de caracterizar fórmulas de primeira ordem, no texto apresentamos caracterizações feitas através de eliminação de quantificadores ou provando que certas teorias são modelos completas. Conseguimos provar por exemplo que a teoria de  $D.L.O.$  admite eliminação de quantificadores, o que nos dá uma caracterização bastante simples de seus conjuntos, levando naturalmente a  $O$ -minimalidade de seus modelos.

Ao analisarmos a teoria de grupos ordenados vemos que nem todos os modelos dessa teoria são estruturas  $O$ -minimais. Por isso buscamos uma caracterização dos modelos que possuem essa propriedade. Não é difícil provar que de fato todos os modelos  $O$ -minimais da teoria de grupos são grupos divisíveis. Por outro lado quando adicionamos a condição de divisibilidade a teoria obtemos a eliminação de quantificadores e com isso conseguimos caracterizar os conjuntos definíveis de tal teoria e mostrar que seus modelos são de fato estruturas  $O$ -minimais, tal teoria é conhecida como  $ODAG$ .

No caso de corpos ordenados temos um fenômeno parecido. Conseguimos ver facilmente que nem todos os corpos ordenados são estruturas  $O$ -minimais (por exemplo  $\mathbb{Q}$  como corpo não é uma estrutura  $O$ -minimal). Provamos que um corpo ordenado é uma estrutura  $O$ -minimal se e somente se esse for um corpo real fechado (chamamos tal teoria de  $RCF$ ). O resultado que nos permite concluir a  $O$ -minimalidade de corpos reais fechados é o conhecido teorema de Seidenberg-Tarski, um teorema que garante a eliminação de quantificadores para  $RCF$ . Com esse resultado conseguimos caracterizar os conjuntos definíveis em um corpo real fechado como os conjuntos semialgêbricos, uma classe de conjuntos amplamente estudada em geometria algébrica real. Exemplos de corpos reais fechados são  $\mathbb{R}$  e o conjunto de números reais algébricos sobre  $\mathbb{Q}$ , denotado por  $\mathbb{Q}_{al}$ .

Outros exemplos conhecidos de estruturas  $O$ -minimais são algumas extensões de corpos reais fechados. Um exemplo particularmente interessante é  $\mathbb{R}_{exp}$  a estrutura dado por  $(\mathbb{R}, \leq, +, \cdot, e, 0, 1)$  onde  $e$  é a função exponencial. A demonstração de que essa é uma estrutura  $O$ -minimal é bastante complicada e pode ser vista com consequência de um resultado conhecido como teorema de Wilkie. Outra extensão  $O$ -minimal de  $(\mathbb{R}, \leq, +, \cdot, 0, 1)$  é obtida acrescentando a essa estrutura a restrição de toda função analítica ao intervalo  $[0, 1]$ . Os conjuntos definíveis em tal estruturas são conhecidos como conjuntos finitamente subanalíticos, tais conjuntos desempenham um papel importante em uma área da geometria conhecida como geometria analítica.

A grande parte dos resultados que vamos desenvolver no texto se aplicam somente a estruturas  $O$ -minimais estendendo corpos. Por isso esses três últimos exemplos são os de maior importância no nosso caso.

### Propriedades Gerais.

Embora a definição de uma estrutura  $O$ -minimal seja simples as suas propriedades não são nada triviais. Vamos assim fixar uma estrutura  $O$ -minimal  $\mathcal{R}$  e ver algumas de suas propriedades. O primeiro resultado relevante que provamos sobre tais estruturas é o teorema de monotonicidade:

**Teorema 0.1.** *Dada  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  uma função definível existem pontos  $a = a_0 < a_1 < \dots < a_k < a_{k+1} = b$  tais que  $f|_{(a_i, a_{i+1})}$  é contínua e estritamente monótona ou  $f$  é constante.*

Esse resultado, embora simples, ilustra bem o bom comportamento das funções definíveis. Pois, para uma estrutura cujo topologia é dada pela ordem, continuidade e monotonicidade são propriedades fundamentais. Além disso segue diretamente dele que muitas funções não podem ser definíveis, como por exemplo  $\text{sen}(1/x)$  para  $x \in (0, 1)$  em  $\mathbb{R}$ .

O próximo resultado que provamos é, em certo sentido, uma generalização do teorema de monotonicidade para mais dimensões. Embora o conceito de monotonicidade não se aplique a funções com domínio em  $\mathbb{R}^n$  esse resultado nos dá uma partição do domínio de uma função definível em conjuntos extremamente simples, de forma que tal função seja contínua em todo conjunto de tal partição.

Células são conjuntos definíveis de natureza bastante simples definidos indutivamente: uma 0-célula é um ponto de  $\mathbb{R}$ , enquanto uma 1-célula é um intervalo aberto. Uma  $(1, 0)$ -célula é o gráfico de uma função definível com o domínio em uma 1-célula, ou seja um intervalo aberto, enquanto uma  $(0, 0)$ -célula é o gráfico de uma função definível com domínio uma 0-célula, ou seja um ponto de  $\mathbb{R}$ . Uma  $(i, 1)$ -célula é a região entre duas funções definíveis com domínio uma  $(i)$ -célula, e assim por diante.

O que o teorema de divisão em células nos diz é essencialmente o seguinte:

**Teorema 0.2.** *Dados conjuntos definíveis  $A_1, \dots, A_k$  de  $\mathbb{R}^n$  e uma função definível de  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  existe uma partição  $\mathcal{M}$  de  $\mathbb{R}^n$  em células  $M_1, \dots, M_l$ , tal que cada  $M_i$  está, ou contida em  $A_j$ , ou é disjunta de tal conjunto, e a restrição de  $f$  a qualquer  $M_i$  é contínua.*

Dizemos nesse caso que  $\mathcal{M}$  é compatível com os conjuntos  $A_i$  e a função  $f$ .

Como pode-se imaginar esse teorema é a ferramenta fundamental no estudo de conjuntos e funções definíveis em estruturas  $O$ -minimais.

Quando apresentamos o conceito de células vimos que todas elas possuem um índice da forma  $(i_1, \dots, i_k)$  onde todo  $i_j = 0$  ou  $1$ , dizemos que a somatória desses índices é a dimensão da célula. Note por exemplo que uma célula de dimensão  $0$  é um ponto enquanto uma célula de  $\mathbb{R}^n$  com dimensão  $n$  é um conjunto aberto. Usamos essa noção para dar a seguinte definição:

**Definição 0.3.** A dimensão de um conjunto definível  $X \subset \mathbb{R}^n$  é a dimensão da maior célula contida em  $X$  em uma partição em células qualquer do  $\mathbb{R}^n$ , compatível com  $X$ .

A noção de dimensão acima não só está bem definida como satisfaz várias das propriedades que gostaríamos que tal noção satisfizesse. Uma particularmente interessante é que tal noção é preservada por bijeções definíveis, ou seja, se existe uma bijeção definível entre dois conjuntos  $A$  e  $B$ , então tais conjuntos possuem a mesma dimensão; note que não fazemos nenhuma hipótese de continuidade aqui.

Outro resultado que veremos é que a dimensão do bordo de um conjunto definível é estritamente menor que a dimensão do conjunto. Um resultado curioso pois esse não é sempre o caso, se tomarmos por exemplo o bordo do gráfico de nossa função  $\text{sen}(1/x)$  esse é homeomorfo ao intervalo  $[0, 1]$ , e tais conjuntos devem ter a mesma dimensão para um conceito apropriado de dimensão que se aplique a eles.

Alguns conceitos usuais de topologia não se comportam da maneira esperada, temos por exemplo que em  $\mathbb{Q}_{\text{al}}$  o intervalo  $[0, 1]$  não é nem conexo e nem compacto. Podemos no entanto substituir tais conceitos por noções similares que se comportem da maneira desejada em uma estrutura  $O$ -minimal. Podemos substituir, por exemplo, compacidade por fechado e limitado. Sabemos pelo teorema de Heine-Borel que essas são noções equivalente em  $\mathbb{R}$  mas, como vimos, esse não precisa ser o caso em uma estrutura  $O$ -minimal. A importância de conjuntos fechados e limitados está no fato de que muitos resultados análogos a teoremas sobre compactos se aplicam a tais conjuntos quando nos restringimos à categoria dos conjuntos e funções definíveis. Temos por exemplo:

**Teorema 0.4.** *Se  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma função contínua e definível e  $X$  um conjunto definível fechado e limitado, então  $f(X)$  é fechada e limitada.*

No caso de conexidade nos concentramos não na noção usual, mas sim em uma versão análoga que chamamos de conexidade definível. Dizemos que um conjunto  $A$  é definivelmente conexo se ele não pode ser escrito como a união de dois abertos  $C, D$  definíveis, tais que  $A \cap C \cap D = \emptyset$ . Essa simples modificação não só torna o intervalo  $[0, 1]$  definivelmente conexo como permite que provemos vários resultados surpreendentes sobre conjuntos definíveis. Temos por exemplo:

**Teorema 0.5.** *Todo conjunto possui um número finito de componentes definivelmente conexas, e cada uma dessas é definivelmente conexa por caminho.*

As definições de componente definivelmente conexas e definivelmente conexo por caminhos podem ser adivinhadas pelo leitor (elas são apresentadas de maneira precisa no texto).

Um resultado bastante forte sobre estruturas  $O$ -minimais é o teorema de triangularização. Como de costume definimos uma triangularização como um homeomorfismo entre um conjunto  $X$  e um complexo  $K$ , exceto que no nosso caso tomamos o complexo  $K$  como um subconjunto do domínio  $R$  da estrutura em questão e pedimos que o homeomorfismo seja definível. Dizemos ainda que uma triangularização é compatível com um subconjunto definível  $X_0 \subset X$  se  $X_0$  é homeomorfo a um subcomplexo  $K_0$  de  $K$  via  $\phi$ . O que o teorema nos diz é:

**Teorema 0.6.** *Dado um conjunto definível  $X$  e subconjuntos definíveis  $X_0, \dots, X_k$  de  $X$  existe uma triangularização  $(K, \phi)$  de  $X$  compatível com cada um desses conjuntos.*

Tal teorema não só é extremamente surpreendente como é muito útil. Através dele podem se obter diferentes resultados sobre conjuntos definíveis; é possível por exemplo caracterizar quando existe uma bijeção definível entre dois conjuntos definíveis quaisquer.

Uma outra consequência que pode ser obtida de tal teorema, juntamente do teorema de compacidade da teoria de modelos, é o teorema de trivialização. Uma trivialização de uma função  $f : X \rightarrow A$  pode ser visto como um homeomorfismo definível  $h : X \rightarrow A \times C$ , tal que  $f(x) = \pi(h(x))$ . O teorema de trivialização nos diz não só que dada uma função definível  $f : X \rightarrow A$  podemos encontrar uma partição de  $X$  em conjuntos definíveis, tal que a restrição de  $f$  a cada conjunto de tal partição seja trivial, como nos garante que tal trivialização pode obdecer certas condições de compatibilidade com subconjuntos de  $A$ .

## Homologia

O último capítulo do texto se dedica ao desenvolvimento da teoria de homologia para estruturas  $O$ -minimais; para tanto utilizamos os resultados desenvolvidos no segundo capítulo.

Por uma homologia  $O$ -minimal queremos dizer uma sequência de funtores  $H_n$  saindo de uma categoria de conjuntos definíveis, ou pares de conjuntos definíveis, e chegando na categoria de grupos abelianos. No nosso caso iremos tratar diretamente da homologia de pares e usaremos o que é usualmente conhecido como homologia reduzida. Pedimos ainda que tais funtores satisfaçam versões apropriadas dos axiomas de Eilenberg-Steenrod:

1. Axioma da Dimensão: Se  $X$  é um conjunto unitário, então a homologia  $H_n(X)$  é o grupo trivial para todo  $n$ .
2. Axioma de Exatidão: Existe uma sequência de transformações naturais  $d_n : H_n \rightarrow H_{n-1} \circ G$ , onde  $G$  é o funtor que leva um par  $(X, X')$  em  $(X', \emptyset)$ , tal que para todo par  $(X, X')$  a seguinte sequência é exata:

$$\dots \longrightarrow H_n(X', \emptyset) \xrightarrow{H_n(i)} H_n(X, \emptyset) \xrightarrow{H_n(j)} H_n(X, A) \xrightarrow{d_{(X,A),n}} H_{n-1}(A, \emptyset) \longrightarrow \dots$$

onde  $i$  e  $j$  são as respectivas inclusões

3. Axioma de Homotopia: Se  $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  são morfismos na categoria de pares em questão, e  $f$  é definivelmente homotópica a  $g$ , então  $H_n(f) = H_n(g)$  para todo  $n$ .
4. Axioma de Excisão: Dado um par  $(X, X')$  e um subconjunto  $U$  de  $X$ , tal que  $cl(U) \subset int(X')$  todos na categoria em questão temos que se  $i$  é a inclusão de  $(X - U, X' - U)$  em  $(X, A)$ , então  $H_n(i)$  é um isomorfismo para todo  $n$ .

A primeira teoria semelhante a que vamos apresentar foi desenvolvida por Hans Delfs e pode ser encontrado em [Del91]. Nesse texto é apresentada uma teoria de homologia para conjuntos e funções semialgêbricos, porém tal teoria é extremamente complicada. Em sua dissertação de doutorado [Woe96] Woerheide apresentou uma teoria de homologia para conjuntos e funções definíveis em uma estrutura  $O$ -minimal baseada no teorema de triangularização, tal teoria é muito mais simples do que a encontrada em [Del91]. Em [Art08] o autor apresenta resultados que nos permitem concluir que quaisquer duas teorias de homologia em uma estrutura  $O$ -minimal sobre a categoria de conjuntos definíveis e funções definíveis contínuas (ou sobre a categoria de conjuntos definíveis fechados e limitados e as mesmas funções) com o mesmo grupo de coeficientes e satisfazendo os axiomas de Eilenberg-Steenrod são isomorfas. Tal resultado implica que a teoria de homologia que vamos apresentar é isomorfa a teoria apresentada por Hans Delfs quando nos restringimos a corpos reais fechados.

O primeiro funtor que definimos é o funtor de homologia simplicial, esse porém somente definido sobre pares de conjuntos fechados e limitados.

A estratégia nesse caso gira em torno do teorema de triangularização. Podemos usar a abordagem usual de topologia algébrica para associar complexos de cadeia a complexos simpliciais, de onde podemos obter grupos de homologia. Vamos denotar os grupos de homologia de um complexo  $K$  obtidos por tal procedimento por  $H_n(K)$ . Com isso podemos usar o teorema de triangularização para tentar definir homologia sobre conjuntos definíveis. A grande dificuldade nessa abordagem esta em dizer como tal funtor deve se

comportar com respeito as funções definíveis entre tais pares. Para contornar esse problema procedemos em vários passos, começando com o funtor na categoria dos complexos simpliciais com morfismos os mapas de vértices, em seguida estendemos tal funtor a algumas categorias intermediárias até chegarmos em um funtor de homologia cujo domínio é a categoria de pares de conjuntos definíveis, com funções contínuas como morfismos. Esse funtor também é denotado por  $H_n$ , porém qualquer ambiguidade pode ser esclarecida olhando o argumento de  $H_n$ , já que o primeiro funtor que mencionamos está definido sobre complexos simpliciais enquanto esse último está definido sobre conjuntos definíveis de  $R^n$ . Apesar de todas essas dificuldades obtemos o seguinte resultado central nessa teoria:

**Teorema 0.7.** *Dado um conjunto definível  $X$  e uma triangularização  $(K, \phi)$  de  $X$ , então os grupos de homologia simplicial  $H_n(X)$  são isomorfos aos grupos  $H_n(K)$  do complexo simplicial  $K$ .*

Através desse resultado conseguimos provar os axiomas de Eilenberg-Steenrod "importando" resultados análogos sobre a homologia de complexos simpliciais.

Em seguida apresentamos a teoria de homologia singular. Embora essa seja a teoria de maior interesse nas aplicações, muitos de seus resultados estão ligados à teoria de homologia simplicial de maneira tão essencial que não existiria nenhum ganho em apresentar tal teoria sem antes desenvolvermos a homologia simplicial.

As definições de homologia singular são feitas de maneira completamente análoga às definições clássicas e tal funtor também é denotado por  $H_n$  (utilizamos as notações  $H_n^{sing}$  e  $H_n^{simp}$  quando precisamos diferenciar entre homologia singular e simplicial).

Tomamos  $S_n(X)$  como o grupo livre gerado por funções definíveis contínuas de  $\Delta^n$  em  $X$ , onde  $\Delta^n$  é o simplexo padrão de dimensão  $n$ . Em seguida usamos funções  $e_i^n$  levando  $\Delta^{n-1}$  na face oposta ao vértice  $i$  de  $\Delta^n$  para definir o operador de bordo em  $S_n(X)$ , obtendo assim um complexo de cadeia, o que gera naturalmente grupos de homologia.

Para obter os axiomas de Eilenberg-Steenrod procedemos de maneira análoga ao caso clássico, porém tal procedimento falha para o axioma de excisão. A demonstração usual de tal axioma depende da existência do número de Lebesgue em  $\mathbb{R}$  e de algumas propriedades decorrentes de esse ser um número real. Em uma estrutura  $O$ -minimal qualquer não conseguimos garantir uma propriedade análoga.

De um ponto de vista geométrico o problema constitui em dada uma função  $f : \Delta^n \rightarrow X$  e uma cobertura de  $X$  por abertos  $X_1$  e  $X_2$  obter uma partição de  $\Delta^n$ , tal que a imagem de cada conjunto de tal partição esteja contido ou em  $X_1$  ou em  $X_2$ . Obter uma partição nessas condições não é um problema; porém tal partição não pode ser tomada de maneira qualquer, já que devemos associar a essa um automorfismo do complexo de cadeia  $S_*(X)$ . No caso clássico essa partição é obtida, graças ao número de Lebesgue, tomando sucessivas divisões baricêntricas de  $\Delta^n$ . No nosso caso porém precisamos tomar uma triangularização de  $\Delta^n$  compatível com a pré imagem dos conjuntos  $X_1$  e  $X_2$  seguida de uma divisão baricêntrica. Tal procedimento, embora funcione, torna a álgebra envolvida um tanto complexa.

Apesar de todas as dificuldades a teoria de homologia obtida tem resultados bastante agradáveis. Por exemplo ao calcularmos o grupo de homologia de certos conjuntos nos deparamos com resultados análogos a resultados clássicos. Temos que a homologia  $H_i(S^n)$  da esfera de dimensão  $n$  é isomorfa a  $\mathbb{Z}$  quando  $i = n$  e  $0$  nos outros casos (lembre que estamos tratando de homologia reduzida). Temos ainda que se  $X$  é isomorfo a  $[0, 1]^r$  para  $r < n$  tanto a sua homologia como a de  $S^n - X$  são triviais. Com isso conseguimos provar de maneira simples resultados análogos a teoremas famosos de topologia algébrica como o teorema de separação de Jordan, a invariância de domínio e o ponto fixo de Brouwer.

## Capítulo 1

### Exemplos e Definições

O objetivo desse capítulo é apresentar a definição e os principais exemplos de estruturas  $O$ -minimais. Para isso vamos apresentar primeiramente definições relativas a estruturas e conjuntos definíveis. Em seguida faremos uma breve discussão sobre ordens lineares densas, apresentando alguns dos principais exemplos dessa teoria. O nosso interesse em tais estruturas se deve ao fato de estruturas  $O$ -minimais serem extensões delas. Poderemos assim destacar em tais estruturas algumas propriedades, de forma a motivar a definição de estruturas  $O$ -minimais.

Terminaremos o capítulo com a definição e alguns dos principais exemplos de estruturas  $O$ -minimais. Apresentaremos alguns exemplos de estruturas ordenadas, isolando dentre essas aquelas satisfazendo a definição de  $O$ -minimalidade. Os últimos exemplos que vamos apresentar, extensões de corpos reais, são os de maior interesse no nosso caso, já que vários dos resultados que desenvolveremos no segundo e terceiro capítulo se aplicam somente a tais estruturas.

#### 1.1 Estruturas e Conjuntos Definíveis

##### 1.1.1 Estruturas

O conceito de estrutura no contexto de teorias  $O$ -minimais está ligado a ideias oriundas da teoria de modelos. Muitos autores porém evitam mencionar linguagens de primeira ordem e a teoria de modelos; para isso introduzem uma noção de estrutura sem nenhuma referência a linguagens de primeira ordem, não existe porém nenhum ganho ou perda em tal abordagem (exceto, talvez, de simplicidade). Nesse texto vamos apresentar ambas as definições, chamaremos a primeira de estrutura modelo teórica e a última simplesmente de estrutura.

Para definirmos o que são tais estruturas, independentemente da abordagem, precisamos primeiro dizer o que são assinaturas. Uma assinatura  $L$  nada mais é do que uma tripla ordenada  $(A, F, C)$ , onde  $A, F, C$  são conjuntos tais que cada elemento de  $A$  é uma dupla  $(r, n_r)$  e cada elemento de  $F$  é uma dupla  $(f, n_f)$  onde  $n_r$  e  $n_f$  são números naturais. Intuitivamente devemos pensar em um elemento  $(r, n_r)$  de  $A$  como um símbolo  $r$  de uma relação  $n_r$ -ária,  $(f, n_f)$  um símbolo  $f$  de uma função  $n_f$ -ária e um elemento  $c \in C$  como um símbolo para uma constante.

Com isso em mente podemos dar a seguinte definição.

**Definição 1.1.** Dado uma assinatura  $L = (A, F, C)$  dizemos que uma  $L$ -estrutura modelo teórica  $\mathcal{R}$  é uma quadrupla  $(R, A^{\mathcal{R}}, F^{\mathcal{R}}, C^{\mathcal{R}})$  onde  $R$  é um conjunto,  $A^{\mathcal{R}}$  uma função que associa para cada  $(r, n_r) \in A$  uma relação  $n_r$ -ária de  $R$  (que denotaremos por  $r^{\mathcal{R}}$ ),  $F^{\mathcal{R}}$  associa para cada elemento  $(f, n_f) \in F$  uma função  $n_f$ -ária de  $R$  (denotada por  $f^{\mathcal{R}}$ ) e  $C^{\mathcal{R}}$  associa para cada elemento  $c \in C$  um elemento de  $c^{\mathcal{R}} \in R$ .

Embora essa definição seja precisa ela é um pouco inconveniente. Na prática trataremos usualmente de estruturas com assinatura finita, e apresentaremos essas simplesmente indicando quem são as funções, relações e constantes relevantes. Ou seja uma estrutura cuja assinatura possui uma relação binária e uma constante será denotada simplesmente por algo da forma  $(R, <, r_0)$ . Embora tal notação deixe espaço para

ambiguidades (no caso, por exemplo, de termos mais de uma relação com aridade  $n_0$ ) o contexto sempre deixará claro qual símbolo está sendo interpretado por cada relação, função ou constante.

Exemplos simples de estruturas que vemos cotidianamente em matemática são grupos, nesse caso temos apenas uma função binária e, possivelmente, uma constante na assinatura; e anéis, aonde temos duas funções binárias e duas constantes na assinatura. Alguns objetos matemáticos não se enquadram diretamente nesse tipo de definição; espaços vetoriais por exemplo possuem dois domínios distintos, o corpo de base e os elementos do espaço vetorial, e portanto não possuem uma representação óbvia da forma desejada. Em muitos casos tais diferenças podem ser contornadas, porém não entraremos em maiores detalhes já que os exemplos que nos interessam podem ser tratados naturalmente.

Dadas duas assinaturas  $L, L'$  com  $L' \subset L$  e uma  $L$ -estrutura modelo teórica  $\mathcal{R} = (R, L^R)$  podemos definir uma  $L'$ -estrutura modelo teórica  $\mathcal{R}'$  com o mesmo domínio de  $\mathcal{R}$  que associa a cada símbolo  $s$  de  $L'$  o mesmo que é associado por  $\mathcal{R}$ , i.e.  $s^{R'} = s^R$ . Nesse caso dizemos que  $\mathcal{R}$  estende  $\mathcal{R}'$ , ou que  $\mathcal{R}'$  é uma restrição de  $\mathcal{R}$ .

Vale notar que definimos apenas o que são  $L$ -estruturas modelo teóricas, porém, como na maioria dos casos a assinatura  $L$  estará fixada, abreviaremos a nomenclatura por estrutura modelo teórica.

### 1.1.2 Fórmulas e Conjuntos definíveis

A discussão abaixo é bastante informal e tem como principal objetivo estabelecer a notação que será usada, caso o leitor não tenha familiaridade com tais noções é recomendável consultar um livro introdutório de lógica como [Sho67].

Dado uma estrutura modelo teórica  $\mathcal{R}$  existe uma classe de subconjuntos de  $R^n$  que queremos destacar, a classe dos conjuntos definíveis. Para isso precisamos de outro conceito da teoria de modelos (ou de lógica em geral), o de fórmulas de primeira ordem.

A cada assinatura  $L$  vamos associar um conjunto  $\mathcal{L}$  que chamaremos a linguagem de primeira ordem associada a  $L$ . Os elementos de  $\mathcal{L}$  são chamados de  $L$ -fórmulas (usualmente apenas fórmulas, pois  $L$  costuma estar implícito). A associação de  $\mathcal{L}$  a  $L$  é feita descrevendo indutivamente todos os elementos de  $\mathcal{L}$ , não daremos aqui tal descrição porém ela pode ser encontrada em qualquer livro introdutório de lógica. Um exemplo típico de uma fórmula de primeira ordem para uma assinatura contendo um símbolo de função binária  $f$  e uma relação unária  $\theta$  é

$$\exists x[f(x, y) = x \wedge \theta(x)].$$

No exemplo acima dizemos que  $y$  é uma variável livre pois aparece fora do escopo de quantificadores. Usualmente denotamos por  $\phi(\bar{x})$  fórmulas que possuem como variáveis livres  $\bar{x}$ , onde  $\bar{x}$  é uma sequência  $x_1, \dots, x_n$  de variáveis. Uma fórmula sem variáveis livres é dita uma sentença.

Em princípio uma  $L$ -fórmula  $\phi(\bar{x})$  é apenas uma sequência de símbolos, porém dada uma  $L$ -estrutura modelo teórica  $\mathcal{R}$  e um elemento  $\bar{a} \in R^n$  existe uma interpretação para  $\phi(\bar{a})$  em  $\mathcal{R}$ . Temos por exemplo que a interpretação da fórmula acima em uma estrutura  $(R, f^R, \theta^R)$  com  $a$  no lugar de  $y$  é: existe  $x \in R$ , tal que  $f^R(x, a) = x$  e  $x$  satisfaz  $\theta$ .

Usaremos os conectivos lógicos  $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$  e  $\neg$  que devem ser interpretados respectivamente como "e", "ou", "implica", "se e somente se" e "não". Usaremos também os quantificadores  $\exists$  e  $\forall$  que devem ser interpretados como "existe" e "para todo". Além disso lembramos que sempre seguido de um quantificador deve aparecer uma variável e que essa por sua vez será sempre interpretada variando sobre todos os elementos do domínio, o que significa que não podemos quantificar objetos como funções e subconjuntos.

Os símbolos descritos no parágrafo acima são chamados de símbolos lógicos. Os únicos símbolos não lógicos que podem aparecer em uma fórmula são o símbolo de igualdade, parênteses, símbolos para variáveis e símbolos da assinatura; uma fórmula que não possui símbolos lógicos é chamada atômica.

No caso da interpretação de uma fórmula  $\phi(\bar{x})$  em uma estrutura  $\mathcal{R}$  com  $\bar{a}$  no lugar de  $\bar{x}$  ser verdadeira dizemos que  $\bar{a}$  satisfaz  $\phi$  em  $\mathcal{R}$  e denotamos isso por  $\mathcal{R} \models \phi(\bar{a})$ . Além disso dizemos que  $\mathcal{R}$  verifica  $\phi$  e

denotamos  $\mathcal{R} \models \phi$  se  $\mathcal{R} \models \phi(\bar{a})$  para todo  $\bar{a} \in R^n$ . Em particular dado uma estrutura  $\mathcal{R}$  e uma sentença  $\phi$  temos que ou  $\mathcal{R} \models \phi$  ou  $\mathcal{R} \models \neg\phi$ .

Em certas teorias, como grupos e anéis, temos, além de uma assinatura fixada, um conjunto de propriedades que as estruturas devem satisfazer (como a existência de um elemento neutro ou a associatividade das operações), tais propriedades são usualmente chamadas de axiomas. No caso dos exemplos mencionados esses axiomas podem ser expressos por sentenças de primeira ordem (por exemplo a associatividade é expressa por  $\forall x \forall y \forall z (f(x, f(y, z)) = f(f(x, y), z))$ ), nesse casos dizemos que temos uma teoria de primeira ordem. Se denotarmos um conjunto de axiomas por  $A$ , dizemos que uma estrutura  $\mathcal{R}$  é um modelo de  $A$  se satisfaz todas as sentenças de  $A$ , denotamos  $\mathcal{R} \models A$ . Usualmente identificamos o conjunto de axiomas  $A$  com o nome da teoria. Dizemos ainda que uma teoria  $A$  satisfaz uma sentença  $\phi$ , ou que  $\phi$  é um teorema de  $A$ , se todo modelo de  $A$  satisfaz  $\phi$ , denotamos isso por  $A \models \phi$ .

Com a notação introduzida acima estamos em condições de descrever o que chamamos de conjuntos definíveis.

**Definição 1.2.** Um subconjunto  $A$  de  $R^m$ , onde  $R$  é o domínio de uma  $L$ -estrutura modelo teórica  $\mathcal{R}$ , é dito definível (em  $\mathcal{R}$ ) se existe uma  $L$ -fórmula  $\phi(y_1, \dots, y_n, x_1, \dots, x_m)$  e um elemento  $\bar{a} \in R^n$ , tal que

$$A = \{\bar{x} \in R^m : \mathcal{R} \models \phi(\bar{a}, \bar{x})\}$$

Dizemos que  $\phi(\bar{a}, \bar{x})$  define  $A$ .

O que chamamos de conjuntos definíveis acima são também chamados de conjuntos definíveis com parâmetros, sendo esses  $\bar{a}$ . Como os parâmetros utilizados na definição de cada conjunto não terão nenhuma importância para nós diremos apenas que o conjunto  $A$  é definível, além disso iremos omitir quais as constantes estão sendo usadas e dizer apenas que  $\phi(\bar{x})$  define  $A$ .

Como mencionamos anteriormente o nosso interesse nesse texto será estudar o comportamento de tais conjuntos em certas estruturas. O lema abaixo nos dá algumas propriedades gerais de conjuntos definíveis.

**Lema 1.3.** *Sejam  $A, B \subset R^n$  definidos por  $\phi(\bar{x})$ ,  $\psi(\bar{x})$ , e  $C \subset R^m$  também definível. Então:*

1.  $A \cap B$ ,  $A \cup B$  e  $R^n - A$  são definíveis
2.  $\pi(A)$  é definível, onde  $\pi$  denota alguma projeção.
3.  $R^k \times A$  é definível
4. Seja  $\sigma : n \rightarrow n$  e tome  $f_\sigma : R^n \rightarrow R^n$  que manda  $(a_1, \dots, a_n)$  em  $(a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(n)})$ , temos que a imagem de  $A$  por  $f_\sigma$  é definível.
5.  $A \times C$  é definível.

*Demonstração.* Vamos demonstrar cada caso separadamente.

- No primeiro caso note que  $\phi \wedge \psi$ ,  $\phi \vee \psi$  e  $\neg\phi$  definem respectivamente  $A \cap B$ ,  $A \cup B$  e  $R^n - A$ .
- Sejam  $i_1, \dots, i_k$  as coordenadas de  $A$  que são omitidas em  $\pi(A)$ , então  $\pi(A)$  é definido por

$$\exists x_{i_1} \exists x_{i_2} \dots \exists x_{i_k} [\phi(\bar{x})].$$

- Nesse caso temos que  $x_1 = x_1 \wedge \dots \wedge x_k = x_k \wedge \phi(x_{k+1}, \dots, x_{n+k})$  define  $R^k \times A$ .
- A fórmula que define a imagem de  $A$  por  $f_\sigma$  é  $\phi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$ . Vale notar que  $\sigma(k)$  é apenas um número natural que está sendo usado como índice das variáveis e que  $\sigma$  não é um símbolo da fórmula.

- $A \times C = (A \times R^m) \cap (R^n \times C)$ , portanto segue das observações acima que é definível.

□

Dissemos anteriormente que é possível tratar da teoria de estruturas e conjuntos definíveis sem utilizar linguagens de primeira ordem. O que vamos apresentar abaixo é uma possível maneira de se fazer isso.

**Definição 1.4.** Uma estrutura em um conjunto  $R$  não vazio, é uma sequência de conjuntos  $\mathcal{S} = (S_m)_{m \in \mathbb{N}}$ , tal que para cada  $m \in \mathbb{N}$  temos  $S_m \subset \mathcal{P}(R^m)$  (onde  $\mathcal{P}$  denota partes) e valem as seguintes propriedades:

- $S_m$  é fechado por intersecção, união e complementar.
- A projeção de um elemento de  $S_{m+1}$  pertence a  $S_m$ .
- Se  $A \in S_m$ , então  $R \times A \in S_{m+1}$ .
- $\{(x_1, \dots, x_m) \in R^m : x_1 = x_m\} \in S_m$ .

Note que se considerarmos  $S_m$  como a família dos conjuntos definíveis em uma estrutura modelo teórica  $\mathcal{R}$ , o lema 1.3 nos garante que as três primeiras propriedades acima são satisfeitas. Além disso o conjunto em questão no último item é definido pela fórmula

$$x_1 = x_m \wedge x_2 = x_2 \wedge x_3 = x_3 \wedge \dots \wedge x_{m-1} = x_{m-1}$$

Assim a família dos conjuntos definíveis em uma estrutura modelo teórica (indexada apropriadamente) nos dá uma estrutura do tipo acima.

Não é difícil verificar que toda estrutura pode ser obtida da maneira que acabamos de descrever a partir de uma estrutura modelo teórica. Basta considerar a estrutura que tem como assinatura um símbolo de relação  $n$ -ária para cada elemento de  $S^n$  e que interpreta tais símbolos justamente como os conjuntos aos quais eles estão associados. Por esse motivo abandonaremos nas próximas seções a diferença de nomenclatura e usaremos apenas a expressão estrutura.

Um ponto interessante da definição acima é que ela não faz nenhuma referência a linguagens artificiais, e nem mesmo a assinaturas. No entanto essa é uma definição extremamente artificial quando apresentada independentemente.

Vimos que dada uma  $L$ -estrutura  $\mathcal{R}$  existe uma classe de subconjuntos de  $R^n$  que chamamos de conjuntos definíveis. Queremos agora, como de costume, construir uma categoria baseada nesses conjuntos; para isso precisamos dizer quem são os morfismos. É claro que existem muitas funções entre tais conjuntos, estamos interessados porém naquelas que possuam alguma ligação com a assinatura escolhida, temos a seguinte definição.

**Definição 1.5.** Uma função  $f : R^n \rightarrow R^m$ , onde  $R$  é o domínio de uma estrutura  $\mathcal{R}$ , é dita definível (em  $\mathcal{R}$ ) se seu gráfico  $\tau(f) \subset R^{n+m}$  é definível.

O lema abaixo nos dá algumas propriedades simples porém importantes de funções definíveis.

**Lema 1.6.** *Sejam  $f : R^n \rightarrow R^m$  e  $g : R^m \rightarrow R^k$  funções definíveis e  $A \in R^n$  um conjunto definível, temos que:*

- Se  $\pi : A \rightarrow R^l$  é uma projeção, então  $\pi$  é definível.
- A composta  $g \circ f$  é definível.
- A imagem e o domínio de  $f$  são definíveis.

*Demonstração.* No primeiro caso note que  $\tau(\pi) = \{(x, y) \in R^n : x \in A \wedge y \in \pi(A)\} = A \times \pi(A)$ , mas já vimos que  $\pi(A)$  é definível e que o produto de conjuntos definíveis é definível, logo  $\pi$  é definível.

No segundo caso note que o gráfico de  $g \circ f$  é dado pelo conjunto

$$\{(a, b) \in R^{n+k} : \text{existe } c \in R^m, \text{ tal que } (a, c) \in \tau(f) \text{ e } (c, b) \in \tau(g)\}$$

Assim se o gráfico de  $f$  é definido por  $\phi_1$  e o gráfico de  $g$  por  $\phi_2$  temos que o gráfico de  $g \circ f$  é definido por

$$\psi(\bar{x}, \bar{y}) = \exists \bar{z}[\phi_1(\bar{x}, \bar{z}) \wedge \phi_2(\bar{z}, \bar{y})]$$

onde  $\exists \bar{z}$  é uma abreviação para  $\exists z_1 \dots \exists z_m$ .

No último item o domínio de  $f$  é projeção de  $\tau(f)$  nas  $n$  primeiras coordenadas, sua imagem é a projeção nas  $m$  últimas coordenadas, e em ambos os casos sabemos que obtemos conjuntos definíveis. □

Uma consequência interessante desse lema é que a família dos conjuntos definíveis juntamente com as funções definíveis de uma estrutura formam uma categoria.

Estruturas diferentes também podem ser comparadas de diferentes formas, podemos definir por exemplo um morfismo entre duas estruturas  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  com a mesma assinatura como uma função  $f : A \rightarrow B$ , tal que

- Se  $g$  é um símbolo de função  $n$ -ária da assinatura, então  $g^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n) = g^{\mathcal{B}}(f(a_1), \dots, f(a_n))$ .
- Se  $k$  é um símbolo de constante da assinatura, então  $k^{\mathcal{A}} = k^{\mathcal{B}}$
- Se  $r$  é um símbolo de relação  $n$ -ária e  $\mathcal{A} \models r(a_1, \dots, a_n)$ , então  $\mathcal{B} \models r(f(a_1), \dots, f(a_n))$

Quando  $f$  é injetora e sua inversa é um morfismo dizemos que  $f$  é um isomorfismo.

Essas definições coincidem em casos conhecidos, como o de grupos ou anéis, com as definições usuais. Podemos igualmente dar definições de monomorfismo e epimorfismos.

Um critério de comparação entre estruturas mais fraco que isomorfismos é a chamada equivalência elementar. Dizemos que duas estruturas com a mesma assinatura  $\mathcal{L}$  são elementarmente equivalentes quando satisfazem as mesmas sentenças de primeira ordem da linguagem associada a  $\mathcal{L}$ . Apresentaremos nas próximas seções exemplos de estruturas elementarmente equivalentes que não são isomorfas, porém não é difícil verificar que a implicação inversa é sempre verdadeira.

## 1.2 Estruturas Ordenadas

Nesse texto estamos interessados em um certo tipo de estruturas, as estruturas  $O$ -minimais. Essas, por sua vez, são um tipo específico de estruturas ordenadas. Por esse motivo nesse capítulo trataremos rapidamente de estruturas ordenadas, apresentando exemplos e algumas de suas propriedades.

### 1.2.1 Ordens Lineares

Começamos definindo o tipo de ordem que estamos interessados.

**Definição 1.7.** Uma ordem em um conjunto  $R$  é uma relação binária  $\leq$  satisfazendo as seguintes propriedades.

- Para todo  $a \in R$  temos  $a \leq a$ .
- Se  $a \leq b$  e  $b \leq c$ , então  $a \leq c$ .
- Para  $a, b \in R$  ou  $a \leq b$  ou  $b \leq a$

Dizemos ainda que uma ordem é linear se satisfaz

- Se  $a \leq b$  e  $b \leq a$ , então  $a = b$ .

Definimos  $a < b$  como  $a \leq b$  e  $a \neq b$ . Uma ordem satisfazendo a condição abaixo é dita densa.

- Dados  $a, b \in R$  com  $a < b$  existe  $c \in R$  tal que  $a < c < b$ .

Por último uma ordem não possui extremos se satisfaz:

- Para todo  $a \in R$  existem  $b, c \in R$  com  $b < a < c$ .

Uma ordem satisfazendo todas essas propriedades é dita uma ordem linear densa sem extremidades, o que abreviamos por D.L.O..

Exemplos comuns de D.L.O. são  $\mathbb{R}$  e  $\mathbb{Q}$  com suas ordens usuais.

Uma característica importante de D.L.O. é que todas as condições acima podem ser expressas como sentenças de primeira ordem (a condição de densidade é expressa por  $\forall a \forall b \exists c (a < b \rightarrow a < c \wedge c < b)$  por exemplo). Assim podemos ver as condições acima como axiomas de uma teoria de primeira, com um único símbolo de relação binária em sua assinatura, abreviamos essa teoria também por D.L.O..

Um pergunta natural quando temos uma teoria de primeira ordem é "quais são as sentenças válidas (teoremas formais) dessa teoria?". No caso de D.L.O. temos uma resposta bastante satisfatória, as sentenças válidas são exatamente aquelas que são válidas em um modelo qualquer de D.L.O. (como  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{Q}$ , a prova de tal afirmação pode ser encontrada em [Mar02]). Teorias com essas propriedades são chamadas completas, e em teorias completas temos que todos os modelos são elementarmente equivalentes, já que a validade das sentenças em um dado modelo depende apenas da sua validade em um modelo fixado.

Embora D.L.O. seja uma teoria completa existem muitas propriedades que podem variar de um modelo da teoria para outro. Por exemplo em  $\mathbb{R}$  sabemos que todo subconjunto limitado possui supremo, enquanto esse não é o caso em  $\mathbb{Q}$ . Tal fenômeno é possível pois a existência de supremo para todo subconjunto limitado não pode ser expressa na linguagem de primeira ordem; tal afirmação envolve uma quantificação sobre subconjuntos da estrutura. É importante ter em mente que, embora muitas das propriedades da teoria sejam iguais em todos modelos, existem diferenças importantes entre modelos diferentes.

Vamos fixar  $R$  como um modelo qualquer de D.L.O. (isto é uma, uma estrutura com uma única relação binária, satisfazendo os axiomas de uma D.L.O.). Dizemos que um subconjunto  $X$  de  $R$  é um intervalo aberto se  $X = (a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ , para algum par de elementos  $a, b \in R \cup \{-\infty, \infty\}$ ; intervalos fechados são definidos com as mudanças usuais e são denotados por  $[a, b]$ . Em certas estruturas, como

$\mathbb{Q}$ , conjuntos como  $(0, \sqrt{2})$  são também chamados de intervalos, porém tais conjuntos não satisfazem a condição acima ( $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ ) e por esse motivo não consideramos tais conjuntos como intervalos.

Podemos usar intervalos para definir uma topologia conhecida como topologia da ordem:

**Definição 1.8.** Em uma estrutura ordenado  $\mathcal{R}$  definimos a topologia da ordem como a topologia que tem como base o conjunto dos intervalos abertos, denotamos tal topologia por  $\tau$ .

No restante do texto todas as estruturas que vamos levar em consideração são ordenadas e sempre vamos associar a tais estruturas a topologia da ordem, a menos que seja especificado o contrário.

Dizer que  $\tau$  é gerada pelos intervalos abertos é o mesmo que dizer que os elementos de  $\tau$  são uniões quaisquer de intervalos abertos. Para verificar que esse conjunto de fato é uma topologia precisamos apenas verificar que a intersecção finita de intervalos abertos é um intervalos aberto, mas isso é imediato. Como sempre associamos a  $R^n$  a topologia produto, ou seja a topologia que tem como base as "caixas abertas", i.e.  $I_1 \times \dots \times I_n$  onde  $I_i$  é um intervalo.

O lema abaixo, embora bastante simples, mostra como podemos usar a linguagem de primeira ordem para obter resultados em estruturas ordenadas; tal resultado será usado durante o texto freqüentemente.

**Lema 1.9.** Se  $A \subset R^n$  é definível, então  $cl(A)$ ,  $int(A)$  e  $\delta(A) = cl(A) - A$  (respectivamente o fecho topológico o interior e a fronteira de  $A$ ) são definíveis.

*Demonstração.* Se  $A$  é definido por uma fórmula  $\phi$ , temos que  $cl(A)$  é definido pela seguinte fórmula:

$$\begin{aligned} \phi_{cl(A)}(x_1, \dots, x_n) = & \forall y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_n \exists \bar{w}_1, \dots, \bar{w}_n [(y_1 < x_1 < z_1 \wedge \dots \wedge y_n < x_n < z_n) \\ & \rightarrow (y_1 < \bar{w}_1 < z_1 \wedge \dots \wedge y_n < \bar{w}_n < z_n \wedge \phi(\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_n))] \end{aligned}$$

A fórmula acima nos diz que se  $\bar{x}$  pertence a caixa  $B = (y_1, z_1) \times \dots \times (y_n, z_n)$ , então existe um  $\bar{w} \in B \cap A$ , como todas as caixas são obtidas dessa maneira variando  $\bar{y}$  e  $\bar{z}$  os elementos que satisfazem tal propriedade são exatamente aqueles que pertencem ao fecho de  $A$ . Analogamente a sentença abaixo nos dá o interior de  $A$ .

$$\begin{aligned} \phi_{int(A)}(x_1, \dots, x_n) = & \exists y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_n \forall \bar{w}_1, \dots, \bar{w}_n [(y_1 < x_1 < z_1 \wedge \dots \wedge y_n < x_n < z_n \\ & \wedge y_1 < \bar{w}_1 < z_1 \wedge \dots \wedge y_n < \bar{w}_n < z_n) \rightarrow (\phi(\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_n))] \end{aligned}$$

Obviamente a fronteira  $\delta(A)$  é definível por  $\phi_{cl(A)}(\bar{x}) \wedge \neg\phi(\bar{x})$

□

Embora a linguagem de primeira ordem não nos permita quantificar sobre subconjuntos de  $R$  o truque utilizado acima em  $\bar{y}$  e  $\bar{z}$  funciona como uma quantificação sobre as caixas de  $R^n$ . Usaremos truques análogos em outras partes do texto para quantificar, por exemplo, sobre polinômios.

### 1.2.2 Grupos Ordenados

Muitas das estruturas utilizadas no texto possuem, além da ordem, funções e relações adicionais. De particular interesse para nos são estruturas estendendo corpos (de maneira compatível com a ordem), porém antes de introduzirmos essas vamos analisar os chamados grupos ordenados.

**Definição 1.10.** Um grupo ordenado (abeliano) é uma estrutura  $\mathcal{R} = (R, \leq, +, 0)$  onde  $(R, \leq)$  é uma D.L.O.,  $(R, +, 0)$  um grupo abeliano e além disso a condição abaixo, que relaciona a operação do grupo com a ordem, é satisfeita.

Se  $a < b$  para  $a, b \in R$ , então  $a + c < b + c$  para qualquer  $c \in R$ .

Sempre denotaremos a operação de grupo por  $+$  assim como usaremos  $0$  para o elemento neutro, reservando  $\cdot$  e  $1$  para o produto e seu elemento neutro em corpos. A definição acima poderia ser feita para grupos não abelianos com uma pequena modificação, porém todos os exemplos relevantes para nós são de grupos abelianos e por isso vamos nos ater a esse caso. Exemplos de grupos ordenados familiares são  $\mathbb{Q}$  e  $\mathbb{R}$  com a operação de soma e ordem usual. Note que embora a condição relacionando a ordem com a soma é satisfeita em  $\mathbb{Z}$  essa estrutura não se enquadra na definição pois não estende uma D.L.O. ( $\mathbb{Z}$  é discreto); muitas vezes estruturas desse tipo são consideradas grupos ordenados porém nós não estamos interessados em tais casos. Um exemplo conhecido de um grupo que não pode ser ordenado (em nenhum sentido possível da expressão) são os números complexos.

O lema abaixo relaciona a operação de grupo com a topologia da ordem.

**Proposição 1.11.** *A operação  $+$  :  $R^2 \rightarrow R$  é contínua em um grupo ordenado.*

*Demonstração.* Tome  $(a, b) \subset R$  e  $(c, d) \in R^2$  um ponto da pré-imagem (a notação aqui é ambígua,  $(a, b)$  é um intervalo, enquanto  $(c, d)$  é um par ordenado), vamos encontrar uma vizinhança de  $(c, d)$  cuja imagem está contida em  $(a, b)$ . Temos

$$a < c + d < b \Rightarrow a - d < c < b - d$$

Usando a densidade da ordem existem  $c_0$  e  $c_1$  satisfazendo  $a - d < c_0 < c < c_1 < b - d$ . Analogamente podemos encontrar  $d_0^0, d_1^0, d_0^1, d_1^1$  com

$$a - c_0 < d_0^0 < d < d_1^0 < b - c_0$$

$$a - c_1 < d_0^1 < d < d_1^1 < b - c_1$$

E tomando  $d_0 = \max\{d_0^0, d_0^1\}$  e  $d_1 = \min\{d_1^0, d_1^1\}$  vemos  $(c_0, c_1) \times (d_0, d_1)$  é o intervalo que procurávamos, pois se  $(x, y) \in (c_0, c_1) \times (d_0, d_1)$ , então  $x + y < c_1 + d_1 < b$  e  $x + y > c_0 + d_0 > a$ .

□

Quando tratamos de grupos ordenados podemos nos utilizar da operação de soma para adaptar várias definições usuais de  $\mathbb{R}$ . Temos por exemplo:

**Definição 1.12.** Se  $\mathcal{R}$  é uma estrutura estendendo um grupo, definimos o módulo de um elemento  $x \in R$  como:

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{se } x < 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \\ x & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Dados  $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n), \bar{y} = (y_1, \dots, y_n) \in R^n$  definimos

$$d'(\bar{x}, \bar{y}) = \max\{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\}$$

Para  $\bar{x} \in R^n$  e  $r \in R$  definimos ainda  $B'_r = \{\bar{y} \in R^n : d'(\bar{x}, \bar{y}) < r\}$ .

A função  $d' : R^2 \rightarrow R$  funciona de maneira similar a métrica do supremo em  $\mathbb{R}$ ; a diferença é que nesse caso o contradomínio é  $R$ , não necessariamente igual a  $\mathbb{R}$ , e portanto não é uma métrica no sentido usual da palavra. Apesar disso podemos verificar que várias propriedades da métrica usual continuam válidas, em particular é fácil ver que  $\{B'_r(x) \subset R^n : r \in R, x \in R^n\}$  é uma base de abertos da topologia produto de  $R^n$ .

Nesse contexto podemos dar uma definição de limite análoga a de  $\mathbb{R}$ . Dada  $f : R^n \rightarrow R^m$  dizemos que o limite de  $f$  tendendo a  $a$  é  $b$  e escrevemos  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  se é verdade que

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \bar{y} \in R^n [(\bar{y} \in B'_\delta(a) \wedge \bar{y} \neq a) \rightarrow d'(f(\bar{y}), b) < \epsilon]$$

onde a linguagem formal está sendo usada apenas como abreviação. No caso de  $f$  ser uma função definível é imediato que existe uma sentença formal expressando a condição acima.

Quando tratarmos de funções cujo contradomínio é  $\mathbb{R}$ , usaremos a notação  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$  com o sentido usual.

Quando introduzimos uma topologia sobre as estruturas ordenadas, definimos, conseqüentemente, uma noção de continuidade. Por outro lado também é possível definir continuidade através da noção de limite (da maneira como é feito em livros de cálculo). O lema abaixo mostra que não existe diferença entre tais possíveis definições.

**Proposição 1.13.** *Uma função  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  é contínua se e somente se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$  para todo elemento  $a$  do domínio de  $f$ .*

*Demonstração.* Se  $f$  é contínua e  $a$  pertence ao domínio de  $f$ , então dado  $\epsilon$  podemos tomar  $B'_\epsilon(f(a)) \subset \mathbb{R}^m$ , esse conjunto é aberto e portanto sua pré-imagem também o é. Agora  $a \in f^{-1}(B'_\epsilon(f(a)))$ , logo existe uma vizinhança de  $a$  nesse conjunto, e em particular existe um  $\delta$  com  $B'_\delta(a) \subset f^{-1}(B'_\epsilon(f(a)))$ , assim  $d'(f(x), f(a)) < \epsilon$  para todo  $x \in B'_\delta(a)$  e portanto  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

Por outro lado se  $f$  não é contínua, então existe um aberto  $B \subset \mathbb{R}^m$  cuja pré-imagem não é aberta, em particular existe um ponto  $a \in f^{-1}(B)$  tal que nenhuma vizinhança  $A$  de  $a$  satisfaz  $f(A) \subset B$ . Mas  $B$  é aberto e portanto existe um  $\epsilon$  com  $B'_\epsilon(f(a)) \subset B$ , por outro lado nenhuma caixa do tipo  $B'_\delta(a)$  satisfaz  $f(B'_\delta(a)) \subset B$  e em particular  $f(B'_\delta(a)) \not\subset B'_\epsilon(f(a))$  o que implica  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$ .  $\square$

Vale notar que a demonstração acima é exatamente igual a demonstração feita em  $\mathbb{R}^n$ , o que não é surpreendente já que tanto a topologia como a noção de limite são dadas de maneira semelhantes as de  $\mathbb{R}$ .

### 1.2.3 Corpos Ordenados

Assim como fizemos com grupos ordenados, podemos adicionar funções e constantes a uma D.L.O. de forma a obter um corpo, no qual as operações de soma e produto respeitam a ordem; tais estruturas são chamadas corpos ordenados.

**Definição 1.14.** Um corpo ordenado é uma estrutura  $\mathcal{R} = (R, <, +, \cdot, 0, 1)$  tal que  $(R, <, +, 0)$  é um grupo ordenado,  $(R, +, \cdot, 0, 1)$  é um corpo e a seguinte condição é verificada

Se  $0 < x$  e  $a < b$ , então  $a \cdot x < b \cdot x$ .

Assim como no caso da operação de grupo, podemos verificar sem maiores dificuldades que o produto é contínuo em um grupo ordenado.

Nesse caso passamos diretamente de grupos para corpos sem nos preocupar com estruturas intermediárias. Poderíamos igualmente definir um anel ordenado exigindo que  $(R, +, \cdot, 0, 1)$  fosse apenas um anel. Tal definição é de fato usada, porém na próxima seção vamos fazer uma hipótese adicional sobre nossas estruturas (a de  $O$ -minimalidade) e veremos que todo anel ordenado satisfazendo essa definição deve ser um corpo.

Novamente temos  $\mathbb{R}$  e  $\mathbb{Q}$  como os exemplos naturais de corpos ordenados. Vamos nos ocupar agora em apresentar alguns novos exemplos, assim como encontrar critérios para decidir quando um corpo pode ser ordenado, isto é, quando existe uma relação de ordem que transforma um dado corpo em um corpo ordenado. Começamos com um dos principais exemplos de corpos ordenados.

Denotamos por  $\mathbb{R}[x]$  o anel de polinômios sobre  $\mathbb{R}$ . Temos que tal anel é um domínio de integridade, isto é o produto de dois elementos é zero se e somente se um dos dois elementos é zero. Nesse caso podemos tomar o corpo de frações de  $\mathbb{R}[x]$ , denotado por  $\mathbb{R}(x)$ , e conhecido como o corpo de funções racionais. Os elementos de tal corpo são razões entre polinômios, e as operações são definidas da maneira usual:

$$\frac{f_1}{f_2} + \frac{g_1}{g_2} = \frac{f_2 g_1 + g_2 f_1}{f_2 g_2} \qquad \frac{f_1}{f_2} \cdot \frac{f_2}{g_2} = \frac{f_1 f_2}{f_2 g_2}$$

Não é difícil verificar que de fato temos um corpo. Detalhes dessa construção podem ser encontrados em livros introdutórios de álgebra como [Lan05]. O que queremos agora é encontrar uma ordem que torne  $R(x)$  um corpo ordenado; na verdade existem infinitas opções para a escolha de tal ordem, vamos considerar primeiro a mais usual.

**Definição 1.15.** Sejam  $p_1 = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$  e  $p_2 = b_0 + \dots + b_mx^m$  polinômios de  $R[x]$ , completando possivelmente alguns dos  $a_i$  e  $b_i$  com zeros caso eles não tenham o mesmo grau, caso eles sejam diferentes tome  $n_0 = \min\{0 \leq i \leq n : a_i \neq b_i\}$  definimos a relação  $<$  em  $R[x]$  por:

Se  $p_1 \neq p_2$ , então  $p_1 < p_2$  se e só se  $a_{n_0} < b_{n_0}$ . Se  $p_1 = p_2$  a relação não vale.

Para estender essa relação a  $\mathbb{R}(x)$  usamos o seguinte critério

$$\frac{p_1}{p_2} > 0 \text{ se e só se } p_1p_2 > 0$$

$$\frac{p_1}{p_2} > \frac{f_1}{f_2} \text{ se e só se } \frac{p_1}{p_2} - \frac{f_1}{f_2} > 0$$

Precisamos verificar que essa ordem de fato é adequada para os nossos propósitos, isto é que respeita a adição e a multiplicação. Antes disso note que um polinômio é maior do que zero se e só se o coeficiente do menor termo não nulo for maior do que zero.

**Proposição 1.16.**  $(\mathbb{R}(x), <, +, \cdot, 0, 1)$  é um corpo ordenado, onde  $<$  é a ordem descrita acima.

*Demonstração.* Vamos checar apenas o caso do produto, a soma não sendo muito diferente.

Verificamos primeiro que o produto de polinômios positivos é positivo, tome  $p_1 = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$  e  $p_2 = b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m$  dois polinômios positivos, tome  $a_i$  e  $b_j$  o menor coeficiente não nulo de cada polinômio, esses números devem ser positivos já que  $p_1$  e  $p_2$  são positivos. Temos então que o menor termo não nulo de  $p_1p_2$  é  $a_ib_jx^{i+j}$ , mas o coeficiente desse termo é o produto de dois números positivos e portanto é positivo como precisávamos.

Suponha agora

$$\frac{p_1}{p_2} < \frac{g_1}{g_2} \quad \text{e} \quad \frac{f_1}{f_2} > 0$$

ou seja  $f_1f_2 > 0$  e  $(p_1g_2 - g_1p_2)(p_2g_2) > 0$ , mas

$$\frac{p_1f_1}{p_2f_2} - \frac{g_1f_1}{g_2f_2} = \frac{p_1g_2f_1 - g_1p_2f_1}{p_2g_2f_2}$$

E  $(p_1g_2f_1 - g_1p_2f_1)(p_2g_2f_2) = [(p_1g_2 - g_1p_2)(p_2g_2)](f_1f_2)$ , o produto de polinômios positivos, mas já vimos que isso é positivo e portanto temos  $\frac{p_1f_1}{p_2f_2} - \frac{g_1f_1}{g_2f_2} > 0$  como precisávamos. □

Na ordem definida acima temos  $0 < x < r$  para qualquer número real  $r$  positivo, elementos com essa propriedade são muitas vezes chamados de infinitesimais. Todo corpo com um elemento infinitesimal é não arquimediano, pois se  $\epsilon$  é tal elemento, então  $1/\epsilon$  é maior que todo número real e, conseqüentemente, que todo número natural.

Dado uma ordem definimos  $x_- = \{y \in \mathbb{R} : y < x\}$  e  $x_+ = \{y \in \mathbb{R} : x < y\}$ . De acordo com a ordem utilizada acima temos  $x_- = (-\infty, 0]$  e  $x_+ = (0, \infty)$ . Esses dois conjuntos determinam completamente a posição de  $x$  em relação a  $\mathbb{R}$ , ou seja dizem exatamente quais são os números menores e maiores que  $x$ . Porém, se quisermos encontrar outras possíveis ordens para  $R(x)$  poderíamos tomar para qualquer  $a \in \mathbb{R}$ ,  $x_- = (-\infty, a]$  e  $x_+ = (a, \infty)$ , ou  $x_- = (-\infty, a)$  e  $x_+ = [a, \infty)$ , ou até mesmo  $x_- = \mathbb{R}$  e  $x_+ = \emptyset$  ou ainda  $x_- = \emptyset$  e  $x_+ = \mathbb{R}$ . É possível mostrar que em cada um desses casos existe sempre uma única maneira de estender a ordem para todo  $\mathbb{R}(x)$ , além disso tais ordens são obviamente diferentes, o que nos dá uma

quantidade não enumerável de ordens possíveis para  $\mathbb{R}(x)$ . Mais detalhes podem ser encontrados em [Mar98].

A estrutura descrita acima não é elementarmente equivalente a  $\mathbb{R}$  como corpo ordenado, porém existem muitas estruturas não arquimedianas com essa propriedade. Essas são usualmente chamadas de modelos não-standard de  $\mathbb{R}$ ; adiante veremos um exemplo de tal estrutura.

Voltamos agora para a seguinte questão: "Dado um corpo quando existe uma ordem compatível com as operações de soma e multiplicação?". Encontraremos sem grandes dificuldades uma resposta bastante satisfatória.

**Definição 1.17.** Um cone próprio sobre um corpo  $\mathcal{R} = (R, +, \cdot)$  é um subconjunto  $C$  de  $R$  satisfazendo

- Se  $x, y \in C$ , então  $x + y \in C$  e  $x \cdot y \in C$
- Se  $x \in R$ , então  $x^2 \in C$
- $-1 \notin C$

Um conjunto satisfazendo apenas as duas primeiras propriedades é dito um cone.

Quando  $(R, +, \cdot)$  é a restrição de um corpo ordenado podemos obter um cone próprio chamado cone positivo de  $\mathcal{R}$  tomando  $C(\mathcal{R}) = \{x \in R : x \geq 0\}$ . Note que nesse caso temos que  $C(\mathcal{R}) \cup -C(\mathcal{R}) = R$ , onde  $-C = \{x \in R : -x \in C\}$ , chamamos um cone com essa propriedade de completo.

**Lema 1.18.** Se  $C$  é um cone próprio completo de  $\mathcal{R}$  e a relação  $\leq$  é definida por  $a \leq b$  se e somente se  $b - a \in C$ , então  $(R, +, \cdot, \leq)$  é um corpo ordenado.

*Demonstração.* Se  $a < b$  e  $c \in R$  então  $a - b \in C$ , agora  $a - b = (a + c) - (b + c) \in R$  de onde segue que  $a + c < b + c$ , se  $c > 0$ , então  $c \in R$  e assim  $(a - b)c = ac - bc \in R$  de onde  $ac < bc$ .

Falta verificarmos que  $<$  é de fato uma ordem linear densa. Claramente  $a \leq a$ , se  $a \leq b$  e  $b \leq c$ , então  $a - b \in C$  e  $b - c \in C$  de onde  $(a - b) + (b - c) = a - c \in C$  e assim  $a \leq c$ .

Se  $a \leq b$  e  $b \leq a$  e  $a \neq b$ , então  $b - a \in C$  e  $a - b = -(b - a) \in C$ , e com isso  $-(b - a)^2 \in C$ , por outro lado  $1/(b - a)^2 \in C$  logo  $-(b - a)^2[1/(b - a)^2] = -1 \in C$ . Assim  $a \leq b$  e  $b \leq a$  implica  $a = b$ .

Por último dados  $a, b \in R$  como  $C$  é completo ou  $a - b \in C$  ou  $-(a - b) = b - a \in C$  de onde  $a \leq b$  ou  $b \leq a$ .

□

Com isso vemos que a possibilidade de ordenar  $\mathcal{R}$  é equivalente à existência de um cone próprio completo; vamos tornar esse resultado ainda mais fino.

Dado um cone  $C$  qualquer sabemos que todo elemento do tipo  $x^2$  pertence a  $C$ , além disso  $C$  é fechado por soma e portanto qualquer soma de quadrados deve pertencer a  $C$ . Consideremos o conjunto  $\sum R^2 = \{x_1^2 + \dots + x_n^2 : x_i \in R\}$ , esse conjunto é fechado por produto, pois:

$$(a_1^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + \dots + b_k^2) = a_1^2 b_1^2 + \dots + a_n^2 b_k^2 = (a_1 b_1)^2 + \dots + (a_n b_k)^2$$

além disso obviamente é fechado por soma e contém todos os quadrados, e portanto é um cone. A própria maneira como obtivemos esse cone mostra que ele está contido em qualquer outro cone, tendo isso em mente vamos provar o resultado que queríamos.

**Teorema 1.19.** Um corpo  $\mathcal{R}$  pode ser ordenado se e somente se  $-1 \notin \sum R^2$ ; ou seja se e somente se  $-1$  não pode ser escrito como soma de quadrados.

*Demonstração.* No caso em que  $\mathcal{R}$  pode ser ordenado temos  $-1 \notin C(\mathcal{R})$  pois  $C(\mathcal{R})$  é um cone próprio completo e como  $\sum R^2 \subset C(\mathcal{R})$  temos  $-1 \notin \sum R^2$ .

No caso em que  $-1 \notin \sum R^2$  temos de imediato que  $\sum R^2$  é um cone próprio. Seja  $P$  a família de cones próprios sobre  $\mathcal{R}$ ,  $P$  é não vazio pois  $\sum R^2 \in P$  e  $P_0 \subset P$  um subconjunto totalmente ordenado pela inclusão, é fácil verificar que a união de todos os elementos de  $P_0$  é um cone próprio, pelo lema de Zorn segue que  $P$  possui um elemento maximal  $C$ , vamos verificar que esse cone próprio  $C$  é completo.

Dado um elemento  $a \notin C$  tome  $C[a] = \{x - ay : x, y \in C\}$ , vamos mostrar que esse conjunto é um cone próprio, nesse caso temos que  $C \subset C[a]$  e como  $C$  é maximal  $C = C[a]$  mas  $-a = 0 - 1a \in C[a] = C$  e portanto  $C$  é completo. Verificar que  $C[a]$  é fechado por produto e soma é imediato, se  $-1 \in C[a]$ , então  $-1 = x - ay$  com  $x, y \in C$ ,  $y$  deve ser diferente de 0 pois caso contrário teríamos  $-1 \in C$ , e assim

$$ay = x + 1 \Rightarrow a = x + 1/y \Rightarrow a = y(x + 1)/y^2$$

Mas esse último termo pertence a  $C$  o que contradiz  $a \notin C$  e portanto  $-1 \notin C[a]$ .

Assim vemos que  $C[a]$  é um cone próprio e portanto  $C$  é um cone próprio completo, mas já vimos no lema acima que a todo cone próprio completo maximal está associada uma ordem compatível com as operações do corpo.

□

Antes de encerrarmos a discussão sobre corpos ordenados vamos apresentar um exemplo de como podemos usar a linguagem mais rica dessa teoria para definir outros conceitos. Definições dessa forma aparecerão constantemente durante o texto e nessa seção nos atemos a um exemplo simples de caráter puramente ilustrativo, já que não desenvolveremos tais ideias no restante do texto.

Dada uma função  $f : R \rightarrow R$  podemos definir a derivada de  $f$  em um ponto  $a \in R$  como

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(a) - f(x)}{a - x}.$$

É claro da definição que nem sempre tal limite existe, e sabemos de casos familiares em  $\mathbb{R}$  que exigir que a derivada de uma função esteja definida em todos os pontos é de fato uma condição bastante restritiva.

Existem muitos resultados sobre diferenciabilidade de funções nas estruturas que vamos considerar, porém nenhum deles é de particular interesse para o que vamos desenvolver, e por isso não vamos tratar de tal assunto. O único propósito dessa definição é ilustrar como podemos usar propriedades de corpos para estender conceitos familiares em  $\mathbb{R}$  para outras estruturas ordenadas.

### 1.3 Estruturas O-minimais

O objetivo dessa seção é apresentar a definição e alguns dos principais exemplos de estruturas  $O$ -minimais. Na última seção nós apresentamos alguns exemplos de estruturas ordenadas, e, como mencionamos, estruturas  $O$ -minimais são um caso particular de tais estruturas. Assim vamos caracterizar dentre as estruturas que apresentamos anteriormente quais são  $O$ -minimais. Iremos por exemplo argumentar que um grupo ordenado é uma estrutura  $O$ -minimal se e somente se ele é um grupo divisível. Daremos além disso alguns exemplos de estruturas  $O$ -minimais que estendem corpos ordenados.

#### 1.3.1 $O$ -minimalidade e Ordens Lineares

Na última seção vimos alguns exemplos de estruturas densas linearmente ordenadas e usamos tal ordem, entre outras coisas, para definir uma topologia. Nosso objetivo agora é encontrar estruturas nas quais propriedades topológicas dos conjuntos definíveis sejam bem comportadas, em um certo sentido.

Para isso vamos primeiro analisar os conjuntos definíveis nas estruturas ordenadas mais simples que estamos considerando, as D.L.O.. A definição geral de conjunto definível é muito abrangente e pouco informativa; para conseguirmos algum progresso vamos precisar de certos critérios sobre as fórmulas de D.L.O. que nos ajudem a tratar desse problema.

Para isso vamos começar considerando as chamadas formas normais disjuntivas, uma forma normal disjuntiva é uma fórmula de uma linguagem formal da seguinte forma:

$$\phi(\bar{x}) = \exists \bar{x}_1 \forall \bar{x}_2 \dots \forall \bar{x}_k \bigvee_{l \in J} \left( \bigwedge_{i \in I} (\psi_i(\bar{x}, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k)) \right)$$

Onde a ordem dos quantificadores iniciais não importa (podendo começar com universais, terminar com existenciais ou mesmo nem possuir quantificadores) e  $\psi_i$  não possui nenhum símbolo lógico sem ser a negação (é uma fórmula atômica ou a negação de uma). No caso das D.L.O. temos que as únicas opções de  $\psi_i(x, y)$  são  $x < y$ ,  $\neg(x < y)$ ,  $x = y$  e  $\neg(x = y)$ , e as variantes com as duas variáveis iguais. Além disso não podem ocorrer mais de duas variáveis em cada  $\psi_i$ .

Um resultado conhecido da lógica é que toda fórmula é equivalente a uma fórmula em forma normal disjuntiva, isto é dado uma fórmula  $\psi(\bar{x})$  existe  $\phi(\bar{x})$  em forma normal disjuntiva, tal que

$$\models \forall \bar{x} [\psi(\bar{x}) \leftrightarrow \phi(\bar{x})]$$

Estamos interessados em formas normais disjuntivas pois tal apresentação das fórmulas torna mais fácil o problema de descrevermos os conjuntos definíveis, porém temos ainda um problema, os quantificadores. Ao analisarmos o conjunto definido por uma fórmula sabemos que disjunções  $\vee$  correspondem a uniões, conjunções  $\wedge$  correspondem a intersecções e a negação  $\neg$  ao complementar, conceitos bastante fáceis de serem analisados. Por outro lado existenciais  $\exists$  correspondem a projeções, e sabemos que descrever projeções de conjuntos pode ser uma tarefa complicada; isso sem mencionar o caso universal no qual nem sequer existe um nome padrão para a operação correspondente. Felizmente algumas teorias, como as D.L.O. e outras que vamos considerar, não precisam tratar desses problemas, pois podemos eliminar os quantificadores das fórmulas.

**Definição 1.20.** Dizemos que uma teoria de primeira ordem  $T$  possui eliminação de quantificadores se para toda fórmula  $\psi(\bar{x})$  da linguagem de  $T$  existe uma fórmula sem quantificadores  $\phi(\bar{x})$  satisfazendo

$$T \models \forall \bar{x} [\psi(\bar{x}) \leftrightarrow \phi(\bar{x})]$$

**Proposição 1.21.** A teoria das ordens lineares densas sem extremos (DLO) possui eliminação de quantificadores.

A demonstração desse resultado, embora interessante, será omitida. Ela pode ser encontrado em livros de teoria dos modelos como [Mar02].

Por outro lado é imediato que a forma normal disjuntiva de uma sentença sem quantificadores não possui quantificadores.

Com isso temos que toda fórmula  $\phi(\bar{x}, \bar{y})$  de D.L.O. é equivalente a uma fórmula da seguinte maneira:

$$\phi(\bar{x}, \bar{y}) = \bigvee_{I \in J} \left( \bigwedge_{i \in I} \star_i(\alpha_i, \beta_i) \right)$$

Onde  $\star_i$  é  $\leq$ ,  $\not\leq$ , = ou  $\neq$  e cada  $\alpha_i$  e  $\beta_i$  é uma das variáveis de  $\bar{x}$  ou  $\bar{y}$ . Assim em uma estrutura  $\mathcal{R} \models DLO$ . os conjuntos definíveis são definidos por fórmulas como  $\phi$ , com parâmetros  $\bar{a}$  no lugar de  $\bar{y}$ , ou seja são da forma:

$$\bigcup_{I \in J} \bigcap_{i \in I} \{x \in R^n : \star_i(\alpha_i, \beta_i)\} \quad (1.1)$$

Onde  $\star$  é o mesmo que acima e  $\alpha$  e  $\beta$  são uma variável de  $\bar{x}$  ou um parâmetro de  $\bar{a}$ . Se os dois argumento em  $\star_i$  são parâmetros(ou a mesma variável  $x_i$ ) temos que a relação  $\star_i a_j, a_l$  será válida ou não, e portanto o conjunto em que ela aparece será vazio ou todo o  $R^n$ , tais casos não acrescentam nada a descrição dos conjuntos e por isso serão ignorados.

Em particular quando  $n = 1$  um conjunto do tipo  $\{x \in R : \star(x, a_k)\}$  é:

- O intervalo  $(-\infty, a_k]$  se  $\star$  é  $\leq$
- O intervalo  $(a_k, \infty)$  se  $\star$  é  $\not\leq$ .
- Um ponto se  $\star$  é =.
- A união  $(-\infty, a_k) \cup (a_k, \infty)$  se  $\star$  é  $\neq$ .

Em todos os casos são uniões finitas de intervalos e pontos; por outro lado os conjuntos definíveis em uma D.L.O. são uniões finitas de intersecções finitas de conjuntos como os mencionados acima, mas é imediato que tanto intersecções finitas como uniões finitas de uma união finita de intervalos e pontos ainda é uma união finita de intervalos e pontos. Concluimos assim que se  $\mathcal{R}$  é uma D.L.O. os conjuntos definíveis de  $R$  são uniões finitas de intervalos e pontos.

Claramente os conjuntos acima devem ser definíveis em qualquer estrutura estendendo uma D.L.O.. Por outro lado se considerarmos as extensões mencionadas anteriormente, como corpos ordenados, vemos que nesses casos muitos dos conjuntos definíveis não são da forma 1.1, por exemplo o gráfico da multiplicação em  $\mathbb{R}$ . Embora esse seja o caso para conjuntos definíveis de  $\mathbb{R}^n$  veremos adiante que os conjuntos definíveis de  $\mathbb{R}$ (como corpo) ainda são uniões finitas de intervalos e pontos; com isso em mente damos a seguinte definição:

**Definição 1.22.** Uma estrutura  $\mathcal{R}$  é dita *O-minimal* se ela estende uma ordem linear densa sem extremidades e os conjuntos definíveis de  $R$  são uniões finitas de intervalos e pontos.

Acabamos de argumentar acima que todo modelo de uma DLO deve ser *O-minimal*.

No restante dessa seção nos ocuparemos de discutir novos exemplos. Mas antes disso vamos provar algumas propriedades importantes, porém simples, de estruturas *O-minimais* que serão constantemente usadas no restante do texto.

Denotaremos por  $\mathcal{R}$  uma estrutura *O-minimal* qualquer. Lembramos que intervalos devem ter sempre os extremos na estrutura em questão(não podemos ter coisas como  $(0, \sqrt{2})$  em  $\mathbb{Q}$ ).

**Lema 1.23.** *Todo conjunto definível e limitado  $X$  de  $R$  tem supremo e ínfimo.*

*Demonstração.* Como  $X$  é definível  $X$  é uma união finita de pontos e intervalos abertos disjuntos, portanto existe ou um ponto que é máximo em  $X$  e nesse caso ele é o supremo ou existe um intervalo cujos pontos são maiores do que quaisquer outros pontos de  $X$  (um intervalo a "direita" de todos), tal intervalo é deve ser da forma  $(a, b)$  por hipótese temos assim que  $b$  é o supremo de  $X$ . O ínfimo é obtido analogamente.  $\square$

O primeiro resultado de fato interessante que podemos obter sobre estruturas  $O$ -minimais é análogo ao conhecido teorema do valor intermediário de  $\mathbb{R}$ .

**Teorema 1.24.** *Teorema do Valor Intermediário*

Dada uma função contínua definível  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , e pontos  $a < b \in I$  tais que  $f(a) < f(b)$  e dado  $f(a) < c < f(b)$  existe  $a < x_0 < b$  com  $f(x_0) = c$

*Demonstração.* Tome o conjunto definível  $I_0 = \{x \in I : f(x) \leq c\}$ , suponha que nenhum ponto desse conjunto satisfaça  $f(x) = c$  mas então pela continuidade de  $f$  podemos obter um  $\epsilon$ , tal que  $f(y) < c$  para todo  $x - \epsilon < y < x + \epsilon$ , ou seja esse conjunto é aberto, por outro lado é imediato que ele é fechado já que é pré-imagem por  $f$  do conjunto fechado  $\{x \in \mathbb{R} : x \leq c\}$ , logo temos que ele é definível aberto e fechado, mas  $I_0$  é definivelmente conexo e portanto  $I_0 = I$  o que contradiz  $c < f(b)$ .  $\square$

Em  $\mathbb{R}$  esse resultado é válido para toda função contínua. Porém no caso geral de uma estrutura  $O$ -minimal o comportamento de funções não definíveis pode ser bastante excêntrico, e por isso precisamos da hipótese adicional no teorema. Por outro lado, veremos ao longo do texto que as funções definíveis possuem um comportamento surpreendentemente simples.

A maneira usual de se trabalhar em estruturas  $O$ -minimais é modificando conceitos usuais adicionando hipóteses de definibilidade. Na proposição anterior fizemos isso com funções, agora vamos fazer com conjuntos conexos.

**Definição 1.25.** Dizemos que um conjunto definível  $A \subset \mathbb{R}^n$  é definivelmente conexo se para quaisquer dois conjuntos definíveis e abertos  $X_1, X_2$  de  $\mathbb{R}^n$  tais que  $X_1 \cap X_2 = \emptyset$  e  $A \subset X_1 \cup X_2$  temos que  $A \subset X_1$  ou  $A \subset X_2$ .

A definição acima será usada constantemente durante o texto, pois em muitas estruturas  $O$ -minimais a noção de conexidade não se comporta da maneira que gostaríamos. Veremos por exemplo várias estruturas nas quais os intervalos não são conexos, porém o lema abaixo nos garante que eles sempre são definivelmente conexos. Veremos ainda, no próximo capítulo, que em uma estrutura na qual os intervalos são conexos os conceitos coincidem. Mostraremos também que conjuntos definivelmente conexos se comportam, em relação a funções definivelmente contínuas, da mesma maneira que conjuntos conexos se comportam em relação a funções contínuas. Resultados dessa forma serão frequentes durante o texto.

**Proposição 1.26.** *Em uma estrutura  $O$ -minimal temos que:*

- Intervalos são definivelmente conexos.
- Se  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  é contínua e definível e  $X$  é definivelmente conexo, então  $f(X)$  é definivelmente conexo.

*Demonstração.* Para o caso de um intervalo  $I$  suponha que  $X_1$  e  $X_2$  são abertos definíveis de  $\mathbb{R}$  com  $I \subset X_1 \cup X_2$ , nesse caso eles são uniões finitas de intervalos abertos disjuntos, seja  $(a, b)$  um desses intervalos, tal que  $I \cap (a, b) \neq \emptyset$ , temos que nem  $a$  e nem  $b$  podem pertencer a outros intervalos (pois são intervalos abertos disjuntos), logo se existe  $x_0 \in I$  com  $x_0 \leq a$  temos que  $a \in I$  mas  $a \notin X_1 \cup X_2$  o que é um absurdo e portanto todo elemento de  $I$  é maior que  $a$ , de maneira análoga temos que todo elemento de  $I$  é maior que  $b$ , e com isso  $I \subset (a, b)$  e  $(a, b)$  está contido em  $X_1$  ou  $X_2$ .

Para o segundo caso note que se tivermos abertos disjuntos definíveis  $X_1$  e  $X_2$  com  $f(X) \subset X_1 \cup X_2$ , então  $X \subset f^{-1}(X_1) \cup f^{-1}(X_2)$ , mas esses conjuntos são abertos, pois  $f$  é contínua, e definíveis, pois  $f$  é definível. Assim um desses conjuntos, digamos  $f^{-1}(X_1)$ , não intersecta  $X$ , mas isso implica  $X_1$  não intersecta  $f(X)$  como queríamos. □

Outro fato interessante sobre estruturas  $O$ -minimais é que toda estrutura elementarmente equivalente a uma estrutura  $O$ -minimal também é  $O$ -minimal (embora a demonstração de tal resultado seja simples não vamos apresentá-la no texto, pois precisaríamos de alguns resultados que não iremos desenvolver). Como consequência desse resultado temos que modelos não-standard de todos os exemplos apresentados nessa seção são estruturas  $O$ -minimais.

### 1.3.2 Grupos Ordenados Divisíveis

Na última sessão vimos algumas propriedades de grupos ordenados, agora estamos interessados em saber quais desses grupos geram estruturas  $O$ -minimais. A resposta que vamos encontrar nos diz exatamente quem são esses grupos e, além disso, fornece informações sobre o comportamento de estruturas  $O$ -minimais estendendo grupos.

Começamos mostrando um resultado simples sobre subgrupos definíveis.

**Lema 1.27.** *Dada  $\mathcal{R} = (R, \leq, +, 0, \dots)$  uma estrutura  $O$ -minimal estendendo um grupo, temo que os únicos subgrupos definíveis (em  $\mathcal{R}$ ) de  $(R, +, 0)$  são  $\{0\}$  e  $R$ .*

*Demonstração.* Que esse dois grupos são definíveis é imediato. Suponha então  $G_0$  um subgrupo definível de  $(R, +)$ , vamos mostrar que  $G_0$  é convexo (i.e. dados  $a, b \in G_0$ , então se  $a < c < b$  temos  $c \in G_0$ ).

Suponha que não seja esse o caso, e tome  $a < c < b$  com  $a, b \in G_0$  e  $c \notin G_0$ , agora ou  $0 < c < b$  ou  $a < c < 0$ , no segundo caso temos  $0 < -c < -a$  com  $-c \notin G_0$  e  $-a \in G_0$ , podemos assim supor  $0 < c < b$ . Temos assim que

$$0 < c < b < c + b < 2b < c + 2b < 3b < c + 3b \dots$$

Note que os elementos da forma  $c + kb \notin G_0$  enquanto  $kb \in G_0$ , mas  $G_0$  é definível e portanto uma união finita de intervalos e pontos, assim não podemos ter uma sequência alternada de pontos pertencentes a  $G_0$  e seu complementar.

Tomando agora  $G_0 \neq \{0\}$  podemos tomar  $s = \sup(G_0)$ , com isso  $s > 0$  e  $(0, s) \subset G_0$ , se  $s = \infty$ , então  $G_0 = R$ , vamos ver que esse deve ser o caso. Suponha  $s < \infty$ , então dado  $0 < g < s$  temos  $-g < 0$  logo  $(s - g) < s$  e  $(s - g) \in G_0$ , por outro lado  $g \in G_0$  e assim  $(s - g) + g + g \in G_0$  mas  $(s - g) + g + g = s + g > s$  o que contradiz  $s = \sup(G_0)$ . □

Na seção anterior dissemos que os grupos que nos interessam são abelianos, isso ocorre pois mesmo sem exigir que  $(R, +, 0)$  seja abeliano o resultado acima é válido; nesse caso dado um elemento  $g \in R$  temos que o centralizador de  $g$ ,  $C_g = \{x \in R : xg = gx\}$ , é um subgrupo de  $R$  que contém  $g$  e portanto deve ser  $R$ , mas isso implica que  $g$  comuta com todos os elementos de  $R$ . Como  $g$  é arbitrário obtemos que  $(R, +)$  deve ser abeliano. Assim grupos definíveis em uma estrutura  $O$ -minimal são abelianos.

Lembramos que um grupo  $G$  é dito divisível se dado um elemento  $g \in G$  e um número natural  $n_0$  existe  $g_{n_0} \in G$ , tal que  $n_0 g_{n_0} = g$ , além disso um grupo é dito livre de torção se dados  $k \in \mathbb{N}$  e  $g \in G$  com  $k \cdot g = 0$ , então  $g = 0$ . Com isso podemos encontrar as condições que desejávamos.

**Proposição 1.28.** *O grupo  $(R, +)$  é divisível e livre de torção.*

*Demonstração.* O fato de  $(R, +)$  ser livre de torção segue de ser um grupo ordenado, pois dado  $g > 0$  temos que  $0 < g < 2g < \dots < kg < \dots$  e assim  $kg \neq 0$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Se  $g < 0$  basta fazer o mesmo para  $-g$  e como  $k(-g) \neq 0$  temos  $kg = -(k(-g)) \neq 0$ .

Para ver que é divisível tome  $g \in R$  e  $n \in \mathbb{N}$  e considere  $D_n = \{nx \in R : x \in R\}$ , esse conjunto é um subgrupo definível não trivial de  $R$  e portanto deve ser igual a  $R$ , mas isso implica  $g \in D_n$  ou seja existe  $g_n \in R$  com  $ng_n = g$  como queríamos.  $\square$

Vamos agora analisar quando um grupo ordenado  $\mathcal{R} = (R, \leq, +)$  gera uma estrutura  $O$ -minimal. Já vimos que para a estrutura ser  $O$ -minimal é necessário que o grupo seja divisível abeliano; vamos mostrar agora que essas são condições suficientes.

Naturalmente podemos axiomatizar a teoria dos grupos abelianos divisíveis primeira ordem com os axiomas de grupos ordenados, mais as sentenças

$$\forall x \exists y [ny = x]$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$  (onde  $ny$  é uma abreviação para  $y + \dots + y$  com  $y$  aparecendo  $n$  vezes). Chamaremos essa teoria de grupos abelianos ordenados divisíveis e abreviaremos por ODAG. Exemplos simples de tais grupos são  $\mathbb{Q}$  e  $\mathbb{R}$  com a operação usual de soma.

Assim como no caso de ordens lineares não é difícil mostrar que essa teoria é completa e possui eliminação de quantificadores, esses resultados podem também ser encontrados em [Mar02].

Assim como no caso de grupos ordenados a eliminação de quantificadores nos garante a  $O$ -minimalidade de tais estruturas. Para ver isso note que dada uma fórmula  $\phi_0(x, \bar{y})$  qualquer, podemos tomar uma fórmula equivalente em forma normal disjuntiva sem quantificadores  $\phi(x, \bar{y})$ . Essa fórmula pode ser escrita como:

$$\phi(x, \bar{y}) = \bigvee_{I \in J} \left( \bigwedge_{i \in I} p_i(x, \bar{y}) \star_i 0 \right)$$

Onde  $p_i(x, \bar{y}) = n_i x + m_{1i} y_1 + \dots + m_{li} y_l$  com  $n_i, m_{ji} \in \mathbb{N}$ , e  $\star_i$  sendo  $\leq, \not\leq, =$  ou  $\neq$ . Nesses casos sabemos que quando  $n_i \neq 0$  temos

$$\mathbb{Q} \models \forall \bar{y} \exists! x [p_i(x, \bar{y}) = 0]$$

onde  $\exists! x$  é uma abreviação para existe um único  $x$ ; como ODAG é completa temos que todos seus modelos satisfazem essa fórmula.

Com isso em um modelo qualquer  $G$  de ODAG, dados parâmetros  $\bar{a}$  o conjunto definido por  $p_i(x, \bar{a}) \star_i 0$  é ou um ponto ou um intervalo. E assim como vimos no caso de DLO o conjunto definido por  $\phi(x, \bar{a})$  é uma união finita de intervalos e pontos disjuntos como queríamos. Acabamos de verificar a seguinte proposição:

**Proposição 1.29.** *Todo modelo de ODAG é  $O$ -minimal.*

Além disso é imediato que todo modelo não trivial  $\mathcal{R}$  de ODAG deve possuir uma cópia de  $\mathbb{Q}$ . Pois dado um elemento positivo qualquer  $a \in R$  podemos definir um monomorfismo  $f$  de  $\mathbb{Q}$  em  $\mathcal{R}$  tomando  $f(1) = a$  e  $f(p/q)$  o único elemento  $a$  de  $R$  que satisfaz  $qf(p/q) = pa$ . Mais do que isso podemos dar a  $\mathcal{R}$  uma estrutura de  $\mathbb{Q}$  espaço vetorial, definindo a multiplicação de  $p/q$  por  $r \in R$  como o único elemento  $r_{p/q}$  de  $R$  que satisfaz  $qr_{p/q} = pr$ .

### 1.3.3 Corpos Reais Fechados

Assim como encontramos condições que toda estrutura  $O$ -minimal estendendo grupos devem satisfazer, vamos procurar condições para estruturas estendendo corpos.

Temos como consequência do teorema do valor intermediário 1.24 que toda função definível em uma estrutura  $O$ -minimal assumindo valores positivos e negativos deve se anular. Sabemos também que se essa estrutura estende um corpo polinômios são definíveis. Porém se olharmos para  $\mathbb{Q}$  como um corpo ordenado temos que  $x^2 - 2$  não possui essa propriedade. Isso nos diz que a estrutura gerada por  $\mathbb{Q}$  como

um corpo ordenado não pode ser  $O$ -minimal, e mais do que isso nos diz que toda estrutura  $O$ -minimal estendendo um corpo ordenado deve satisfazer a seguinte propriedade:

Todo polinômio assumindo valores negativos e positivos possui uma raiz. (1.2)

Quando um corpo ordenado satisfaz a propriedade 1.2 dizemos que ele é um corpo real fechado.

Essas observações simples nos dão a seguinte condição necessário sobre estruturas  $O$ -minimais estendendo corpos.

**Proposição 1.30.** *Se  $\mathcal{R} = (R, \leq, +, \cdot, \dots)$  é uma estrutura  $O$ -minimal, tal que  $(R, +, \cdot)$  é um corpo, então  $(R, \leq, +, \cdot)$  é um corpo real fechado.*

A definição acima de corpos reais fechados, embora seja de grande valor prático, não é a única encontrada. Na verdade temos o seguinte resultado:

**Proposição 1.31.** *Dado um corpo ordenado  $\mathcal{R} = (R, \leq, +, \cdot)$  qualquer as seguintes condições são equivalentes:*

- $\mathcal{R}$  é um corpo real fechado .
- Nenhuma extensão algébrica de  $(R, +, \cdot)$  pode ser ordenada.
- $\mathcal{R}[i] = \mathcal{R}[x]/(x^2 + 1)$  é um corpo algebricamente fechado.
- Todo polinômio de grau ímpar ou da forma  $x^2 - a$  para  $a > 0$  em  $\mathcal{R}$ , possui raiz em  $\mathcal{R}$ .

Embora a demonstração de tais equivalências não seja difícil ela será omitida, podendo ser encontrada em [Mar98]. Muitas vezes a segunda ou terceira condição acima são usadas como definição por não fazerem nenhuma referência explícita à ordem.

Nenhuma das quatro proposições equivalentes acima pode ser diretamente traduzida para primeira ordem, porém a teoria de corpos reais fechados pode sim ser axiomatizada em primeira ordem. Para isso usamos os axiomas de corpos ordenados juntamente das seguintes sentenças, para todo  $n \in \mathbb{N}$ :

$$\phi_n = \forall y_0, \dots, y_n \forall z_1 z_2 \exists x [(y_0 + y_1 z_1 + \dots + y_n z_1^n < 0 < y_0 + y_1 z_2 + \dots + y_n z_2^n) \rightarrow (y_0 + y_1 x + \dots + y_n x^n = 0)]$$

A sentença acima nos diz que todo polinômio de grau menor ou igual a  $n$  assumindo valores positivos e negativos se anula. É imediato que uma estrutura satisfazendo todas essas sentenças deve satisfazer a condição 1.2, abreviaremos essa teoria por RCF.

Note que o problema de não podermos quantificar sobre polinômios foi contornado, quantificando sobre os coeficientes de cada termo em uma soma. Um truque análogo será usado no próximo capítulo para quantificar sobre caixas.

Vimos acima que  $\mathbb{Q}$  não é um corpo real fechado, temos também que  $\mathbb{R}(x)$  não é real fechado pois o polinômio  $y^2 - x$  de  $\mathbb{R}(x)[y]$  assume valores negativos (no 0 por exemplo) valores positivos (em 1) mas não se anula; pois suponha que  $[p(x)/q(x)]^2 = x$  com  $p(x)$  e  $q(x)$  primos entre si, isso implica  $x = [p(x)/q(x)]^2 = p(x)^2/q(x)^2$  o que implica  $xq(x)^2 = p(x)^2$  de onde  $q(x)^2$  divide  $p(x)^2$  e assim  $q(x)$  deve dividir  $p(x)$  mas como esses são primos entre si obtemos  $q(x) = 1$ , o que implica  $p(x)^2 = x$  e sabemos que isso não ocorre.

Com isso o único exemplo de um corpo real fechado que temos por enquanto é  $\mathbb{R}$ , o resultado abaixo nos garante a existência de outros exemplos. Mas antes disso lembramos que um corpo real fechado  $\mathcal{R}$  é dito o fecho real de um corpo ordenado  $\mathcal{Q}$  se  $\mathcal{R}$  é uma extensão algébrica de  $\mathcal{Q}$  cuja ordem estende a de  $\mathcal{Q}$ .

**Proposição 1.32.** *Todo corpo ordenado  $\mathcal{Q}$  possui um fecho real, além disso se  $\mathcal{R}_1$  e  $\mathcal{R}_2$  são fechos reais de  $\mathcal{Q}$  existe um isomorfismo de  $\mathcal{R}_1$  em  $\mathcal{R}_2$  fixando os elementos de  $\mathcal{Q}$ .*

A demonstração desse fato não   de muito interesse para o que será desenvolvido nesse texto e pode ser encontrada em [Mar98].

Dizemos que um elemento  $r$  de um corpo  $\mathcal{R}$    algébrico sobre um conjunto  $A \subset \mathcal{R}$  se  $r$    raiz de um polinômio com coeficientes em  $A$ . Em particular o conjunto dos elementos de  $\mathbb{R}$  alg bricos sobre  $\mathbb{Q}$  forma um corpo (usando a restri o das opera es de  $\mathbb{R}$ ); esse   conhecido como o corpo dos números alg bricos sobre  $\mathbb{Q}$  e será denotado por  $\mathbb{Q}_{al}$ . Não   difícil de verificar que esse   o fecho real de  $\mathbb{Q}$ . Detalhes sobre  $\mathbb{Q}_{al}$  podem ser encontrados em livros de  lgebra como [Lan05].

No caso de  $\mathbb{R}(x)$  o fecho algébrico não possui uma descri o tão simples. Uma maneira possível de ver esse objeto   como um subconjunto do chamado corpo de séries de Puiseux sobre  $\mathbb{R}$ ; a descri o de tais objetos pode ser encontrado em [Mar98]. Temos com isso dois novos exemplos de corpos reais fechados.

Podemos nos perguntar têm quando um corpo ordenado   uma estrutura  $O$ -minimal. Vimos que   necessário que esse seja um corpo real fechado, vamos novamente usar o método de elimina o de quantificadores para mostrar que essa condi o têm   suficiente.

**Proposi o 1.33.** *RCF   uma teoria completa que admite elimina o de quantificadores.*

RCF  , historicamente, um dos primeiros exemplos não triviais de teorias com elimina o de quantificadores. O resultado foi originalmente obtido por Alfred Tarski em um contexto que ficará claro adiante. Quanto   demonstr o desse fato existem diferentes abordagens possíveis, uma delas sendo um estudo direto das condi es de sinais sobre conjuntos de polinômios através de um teorema conhecido como Seidenberg-Tarski; tal demonstr o pode ser encontrada em [vdD98] ou [Mar98]. Uma abordagem alternativa pode ser encontrada em [Mar02] na qual o autor obt m o resultado estudando imersões entre modelos de RCF.

O fato de RCF ser completa significa que podemos avaliar a validade de suas sentenças de primeira ordem RCF olhando apenas para um modelo (normalmente utilizaremos  $\mathbb{R}$ ). Tal demonstr o têm pode ser encontrada em [Mar02].

A próxima defini o será bastante útil quando formos descrever os conjuntos definíveis de RCF.

**Defini o 1.34.** Dado  $\mathcal{R}$  um corpo real, um conjunto  $X \in R^m$    dito semialgébrico se

$$\begin{aligned} X &= \bigcup_{i \in I} X_i = \bigcup_{i \in I} \bigcap_{0 \leq j \leq l_i} Y_{ij} \\ X_i &= \{ \bar{x} \in R^m : f_i(\bar{x}) = 0 \wedge g_{i1}(\bar{x}) > 0 \wedge \dots \wedge g_{il_i}(\bar{x}) > 0 \} \\ Y_{i0} &= \{ \bar{x} \in R^m : f_i(\bar{x}) = 0 \}, Y_{ij} = \{ \bar{x} \in R : g_{ij}(\bar{x}) > 0 \} \end{aligned}$$

Onde  $I$    um conjunto finito e todos  $f_i, g_{i,j}$  são polinômios.

Conjuntos que podem ser obtidos como zeros de polinômios,  $X = \{x \in R : p(x) = 0\}$ , são chamados alg bricos. Os conjuntos descritos acima são uma generaliza o desses e por isso recebem o nome de semialg bricos.

Quando escrevemos  $X$  em termos dos  $Y_{ij}$  vemos imediatamente que  $X$    definido por uma fórmula do tipo

$$\phi(\bar{x}, \bar{y}) = \bigvee_{i \in I} \bigwedge_{0 \leq j \leq l_i} \star_{ij}(\bar{x}, \bar{y}) \quad (1.3)$$

tal que ao trocarmos  $\bar{y}$  pelas constantes apropriadas  $\bar{a}$  temos que  $\star_{i0}(\bar{x}, \bar{y})$     $f_i(x) = 0$  e  $\star_{ij}(\bar{x}, \bar{y})$     $g_{ij}(x) > 0$ .

Segue portanto que conjuntos semialg bricos são definíveis. Por outro lado usando elimina o de quantificadores, a forma normal disjuntiva e trocando rela es do tipo  $f(x) \leq 0$  por  $f(x) = 0$  e  $-f(x) > 0$  (e o análogo para os outros casos) vemos que toda fórmula de RCF   do tipo 1.3. Ou seja, todo conjunto definível de RCF   semialgébrico.

Já sabemos que a projeção de um conjunto definível também é definível, de onde segue que a projeção de conjuntos semialgéblicos também é semialgéblico. A busca por esse resultado foi o que levou Tarski a encontrar a eliminação de quantificadores em RCF. Atualmente é comum a utilização do método de eliminação de quantificadores como uma técnica para investigar estabilidade sobre projeção em certas classes de conjuntos.

Com isso em mente, para saber se  $\mathcal{R}$  gera uma estrutura  $O$ -minimal basta sabermos quais são os conjuntos semialgéblicos de  $R$ . Quando  $m = 1$  temos imediatamente que os conjuntos  $Y_{i0}$  são coleções finitas de pontos pois são os zeros de  $f_i$ . Um conjuntos da forma  $Y_{ij}$  deve ser uma união finita de intervalos abertos disjuntos; pois se  $b_1, \dots, b_k$  são todos os zeros de  $g_{ij}$  sabemos que o sinal de  $g_{ij}$  é constante nos intervalos  $(b_l, b_{l+1})$  e portanto, ou esses intervalos são disjuntos de  $Y_{ij}$ , ou estão contidos nele. Vemos com isso que cada  $Y_{ij}$  é uma união finita de pontos e intervalos disjuntos e, como já observamos anteriormente, isso é o suficiente para garantir que a estrutura gerada por  $\mathcal{R}$  é  $O$ -minimal.

Para terminar essa seção vamos dar alguns exemplos de funções e conjuntos que podem ser definidos em RCF. Obviamente polinômios são definíveis, temos também que as funções  $y = \sqrt[m]{x}$  são definidas pelas formulas  $y^m = x$ ; para ver que de fato o conjunto definido por essa fórmula é um gráfico de função lembre que RCF é completo e

$$\mathbb{R} \models \forall y (y > 0 \rightarrow [\exists! x (x > 0 \wedge y^m = x)])$$

. Além disso a função  $y = 1/x$  é definível por  $yx = 1$ . Já vimos que a composta de funções definíveis é definível. Temos portanto que qualquer função expressa utilizando apenas frações, raízes soma e produto é definível em RCF. Analogamente conjuntos definidos a partir de tais funções são definíveis.

#### 1.3.4 Expansões $O$ -minimais de Corpos Reais

Vimos que estruturas  $O$ -minimais estendendo corpos devem ser tais que suas restrições são corpos reais fechados, nosso objetivo agora será dar uma breve descrição de alguns exemplos bastante conhecidos de tais estruturas. Podemos usar  $\mathbb{R}$  para dar novas definições de estruturas adicionando símbolos a nossa linguagem cuja interpretação em  $\mathbb{R}$  são funções conhecidos. Temos por exemplo:

- $\mathbb{R}_{exp} = (\mathbb{R}, \leq, +, \cdot, e)$  onde  $e$  é a função unária que leva  $x$  em  $e^x$ .
- $\mathbb{R}_{fan} = (\mathbb{R}, \leq, \mathbf{A}_f)$  onde  $\mathbf{A}_f$  representa todas as funções analíticas de  $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  para qualquer  $m \in \mathbb{N}$ .
- $\mathbb{R}_{an} = (\mathbb{R}, \leq, +, \cdot, \mathbf{A})$  onde os elementos de  $\mathbf{A}$  são todas as funções  $\tilde{f}$  de  $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  tais que existe uma função  $f \in \mathbf{A}_f$  com  $f|_{[0,1]^m} = \tilde{f}|_{[0,1]^m}$  e  $\tilde{f}$  é constantee igual a 0 fora dessa caixa. Podemos pensar em  $\sim$  como uma função que leva  $f$  em  $\tilde{f}$ .
- $\mathbb{R}_{exp,an} = (\mathbb{R}_{an}, e)$ , a estrutura sobre  $\mathbb{R}$  que possui as mesmas funções de  $\mathbb{R}_{an}$  além da função exponencial definida globalmente.

É imediato da definição que  $\mathbb{R}_{fan}$  não é uma estrutura  $O$ -minimal, já que o conjunto  $\{x \in \mathbb{R} : \text{sen}(x) = 0\}$ , que consiste de uma coleção infinita de pontos isolados, é definível em tal estrutura. Por isso vamos nos restringir aos outros casos, que de fato consistem de estruturas  $O$ -minimais, como vamos argumentar brevemente. A demonstração de tais fatos é bastante complicado e a grande parte das demonstrações serão omitidas.

A estrutura  $\mathbb{R}_{an}$  foi o primeiro exemplo conhecido de uma extensão  $O$ -minimal de um corpo, como apontado por van den Dries em [vdD86]. Por outro lado  $\mathbb{R}_{exp}$  e  $\mathbb{R}_{exp,an}$  são considerados os exemplos mais importantes de estruturas  $O$ -minimais; a demonstração de tais resultados se deve essencialmente ao trabalho de Wilkie em [Wi96].

Essas estruturas não estão sendo apresentadas como modelos de nenhuma teoria. Porém dada uma estrutura qualquer podemos associar a ela a teoria cujos axiomas consistem de todas as sentenças válidas nessa estrutura. Apresentar axiomatizações para teorias dadas de tal maneira pode ser complicado; no

caso de  $\mathbb{R}_{exp}$  tal axiomatização é desconhecida, enquanto em  $\mathbb{R}_{an}$  uma axiomatização pode ser encontrada em [Dav94]. Essa axiomatização difere significativamente das apresentadas anteriormente já que consiste, entre outras coisas, de um conjunto infinito de axiomas para cada função analítica, enquanto as axiomatizações apresentadas foram dadas de maneira recursiva. Uma axiomatização de  $\mathbb{R}_{exp,an}$  pode ser obtida através da axiomatização de  $\mathbb{R}_{an}$ , ela também pode ser encontrada em [Dav94].

A teoria associada a uma estrutura é obviamente completa, o que significa que quaisquer modelos de tais estruturas são elementarmente equivalentes. Isso nos garante que modelos quaisquer das teorias associadas a  $\mathbb{R}_{exp}$ ,  $\mathbb{R}_{an}$  e  $\mathbb{R}_{exp,an}$  devem ser  $O$ -minimais (como, por exemplo, modelos não standard de  $\mathbb{R}$  restritos a essas assinaturas). Além disso em [Dav94] os autores mostram, como consequência da axiomatização apresentada, que se  $A$  é uma subestrutura de  $\mathbb{R}_{an}$ , tal que a restrição de  $A$  as funções soma e produto é um corpo real fechado, então  $A$  é elementarmente equivalente a  $\mathbb{R}_{an}$ , e em particular  $O$ -minimal. Assim a estrutura gerada por  $\mathbb{Q}_{al}$  juntamente com a restrição de cada função de  $A$  ao domínio de  $\mathbb{Q}_{al}$  também é  $O$ -minimal.

Vamos tratar os três casos separadamente, descrevendo os conjuntos definíveis e mostrando (quando possível) como tal descrição implica na  $O$ -minimalidade de cada estrutura.

Para descrever os conjuntos definíveis em  $\mathbb{R}_{an}$  vamos precisar de algumas definições de geometria subanalítica. A descrição abaixo é bastante breve, detalhes podem ser encontrados em [vdD86] e [Pie00].

**Definição 1.35.** Dado um subconjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$  dizemos que:

1.  $A$  é semianalítico em um ponto  $x \in \mathbb{R}^n$  se existe uma vizinhança aberta  $U$  de  $x$ , tal que

$$U \cap A = \bigcup_{i \leq k} \left( \bigcap_{j \leq n_i} Y_{ij} \right), \text{ com } Y_{ij} = \{x \in \mathbb{R}^m : f_{ij}(x) = 0\} \text{ ou } Y_{ij} = \{x \in \mathbb{R}^m : f_{ij}(x) > 0\}$$

onde  $f_{ij} \in A$ .

2.  $A$  é subanalítico em um ponto  $x \in \mathbb{R}^n$  se existe uma vizinhança aberta  $U$  de  $x$  e um conjunto semianalítico limitado  $S \subset \mathbb{R}^{n+m}$ , tal que  $A \cap U = \pi(S)$ , onde  $\pi$  é a projeção de  $\mathbb{R}^{n+m}$  em  $\mathbb{R}^n$ .
3.  $A$  é semianalítico se é semianalítico em todo ponto de  $\mathbb{R}^n$ .
4.  $A$  é subanalítico se é subanalítico em todo ponto de  $\mathbb{R}^n$ .
5. Seja  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  a função que leva  $(x_1, \dots, x_n)$  em  $(x_1/\sqrt{1+x_1^2}, \dots, x_n/\sqrt{1+x_n^2})$ . Dizemos que  $A$  é finitamente subanalítico se  $h(A)$  é subanalítico.

Note que a definição de semianalítico é análoga a definição de semialgébrico, trocando polinômios por funções analíticas e exigindo que a representação seja apenas local. No caso semialgébrico a eliminação de quantificadores nos garante que a projeção de um conjunto semialgébrico é semialgébrico; como no caso de funções analíticas não temos esse resultado, introduzimos os conjuntos subanalíticos. Nos itens 3 e 4 pedimos que  $A$  seja semianalítico em todo ponto de  $\mathbb{R}^n$  e não apenas nos pontos de  $A$ , esse é um detalhe importante pois pontos em  $\bar{A}$  são de particular interesse.

No último item da definição note que  $h$  é um isomorfismo analítico de  $\mathbb{R}^n$  em  $(-1, 1)^n$ , portanto se  $h(A)$  é subanalítica  $A = h^{-1}h(A)$  também deve ser. Porém alguns conjuntos, como o gráfico de função seno, podem ser subanalíticos sem serem finitamente subanalíticos (o conjunto  $\{(t/\sqrt{1+t^2}, \sin(t)/\sqrt{1+\sin^2(t)}) : t \in \mathbb{R}\}$  não é subanalítico em  $(1,0)$ ).

Temos abaixo uma caracterização dos conjuntos definíveis em  $\mathbb{R}_{an}$ ; apresentaremos apenas parte da demonstração.

**Proposição 1.36.** Os conjuntos definíveis da estrutura  $\mathbb{R}_{an}$  (em qualquer dimensão) são precisamente os conjuntos finitamente subanalíticos.

*Demonstração.* É fácil ver que um conjunto finitamente subanalítico  $X \subset \mathbb{R}^n$  é definível em  $\mathbb{R}_{an}$ , pois  $cl(h(X)) \subset [0, 1]^n$  é compacto, por outro lado todo ponto  $x \in cl(h(X))$  possui uma vinhança de  $A_x$ , tal que  $h(X) \cap A_x$  é a projeção de um conjunto semianalítico, e é imediato que esses conjuntos são definíveis por formulas em forma normal disjuntiva. Temos portanto que

$$h(X) = \bigcup_{x \in cl(h(X))} h(X) \cap A_x = \bigcup_{x \in I} h(X) \cap A_x$$

onde  $I \subset cl(h(X))$  é finito(estamos usando aqui a compacidade de  $cl(h(X))$ ), vemos assim que  $h(X)$  é união finita de conjuntos definíveis e portanto é definível, por outro lado  $h$  é obviamente uma função definível e assim  $X = h^{-1}h(X)$  deve ser definível.

A implicação contrária é consideravelmente mais difícil de se verificar. Uma maneira possível de se fazer isso é mostrando que a família de conjuntos finitamente subanalíticos é uma estrutura(no sentido de 1.4) contendo os conjuntos definíveis sem quantificadores em  $\mathbb{R}_{an}$ , o que por sua vez é suficiente para garantir que contém todos os definíveis. A dificuldade em tal demonstração está em provar que o complementar de um conjunto finitamente subanalítico é finitamente subanalítico, esse resultado é uma consequência direta de um teorema conhecido como teorema do complementar de Gabrielov, que afirma o mesmo para conjuntos analíticos. □

Para vermos que esse resultado de fato implica a  $O$ -minimalidade de  $\mathbb{R}_{an}$  precisamos de algumas observações sobre conjuntos subanalíticos que podem ser encontradas em [Loj]:

- Todo conjunto subanalítico de  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{R}^2$  é semianalítico.
- Todo conjunto semi-analítico limitado possui um número finito de componentes conexas, essas por sua vez também sendo semi-analíticas.

Com isso temos:

**Proposição 1.37.** *A estrutura  $\mathbb{R}_{an}$  é  $O$ -minimal.*

*Demonstração.* Tome  $A$  um subconjunto de  $\mathbb{R}$  definível em  $\mathbb{R}_{an}$ , sabemos que  $A$  é finitamente subanalítico e portanto  $h(A) \subset [-1, 1]$  é um conjunto sub-analítico. Pelas observações acima vemos que  $h(A)$  possui um número finito de componentes conexas, por outro lado sabemos que  $h$  é um isomorfismo e com isso temos que  $A$  possui um número finito de componentes conexas, mas os conjuntos conexos de  $\mathbb{R}$  são exatamente pontos e intervalos de onde segue que  $A$  é uma união finita de pontos e intervalos como queríamos. □

Vamos agora nos concentrar em  $\mathbb{R}_{exp}$ . Para descrever os conjuntos definíveis nessa estrutura usamos um resultado conhecido como teorema de Wilkie; a demonstração desse teorema é bastante complicada e pode ser encontrada em [Wil96].

**Proposição 1.38** (Teorema de Wilkie). *Todo conjunto definível em  $\mathbb{R}_{exp}$  é definível por uma fórmula do tipo:*

$$\exists y_1, \dots, y_k [f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_k, e^{x_1}, \dots, e^{x_n}, e^{y_1}, \dots, e^{y_k}) = 0]$$

onde  $f$  é um polinômio com coeficientes em  $\mathbb{R}$ .

Funções do tipo  $f(x_1, \dots, y_k, e^{x_1}, \dots, e^{y_k})$ , onde  $f$  é um polinômio, são conhecidas como polinômios exponenciais, o conjunto dos zeros de uma função dessa forma é dito uma variedade exponencial. O que o teorema diz é que todo conjunto definível em  $\mathbb{R}_{exp}$  é a projeção de uma variedade exponencial.

Existem diferentes enunciados para o teorema acima; sendo que o apresentado está em um formato bastante conveniente para o que desejamos. Uma versão comum do enunciado diz simplesmente que toda fórmula de  $\mathbb{R}_{exp}$  é equivalente a uma fórmula existencial pura(ou equivalentemente que  $\mathbb{R}_{exp}$  é uma estrutura modelo completa).

Para derivar a  $O$ -minimalidade de  $\mathbb{R}_{exp}$  a partir da caracterização dos seus conjuntos definíveis precisamos do seguinte resultado:

**Proposição 1.39.** *Se  $f$  é um polinômio exponencial, então  $f^{-1}(0)$  possui um número finito de componentes conexas.*

Esse resultado é um caso particular de um teorema que afirma o mesmo para funções pffafianas, e pode ser encontrado em [Kho91](não é difícil verificar que polinômios exponenciais são funções pffafianas). Com isso podemos provar o seguinte:

**Teorema 1.40.** *A estrutura gerada por  $\mathbb{R}_{exp}$  é  $O$ -minimal.*

*Demonstração.* Dado que estamos tratando de uma estrutura sobre  $\mathbb{R}$  tudo que precisamos provar é que os conjuntos definíveis em uma variável possuem finitas componentes conexas. Sabemos que os conjuntos definíveis são projeções de variedades exponenciais e a proposição acima nos diz que essas possuem finitas componentes conexas, como a projeção é uma função contínua obtemos o resultado. □

O último exemplo que vamos apresentar é  $\mathbb{R}_{exp,an}$ . Uma descrição dos conjuntos definíveis pode ser dada através do seguinte resultado encontrado em [Dav94].

**Proposição 1.41.** *A teoria associada a  $(\mathbb{R}_{an}, e, \log)$  possui eliminação de quantificadores.*

Onde  $\log$  é a função  $\log(x)$  em  $x > 0$  e constante igual a 0 para  $x \leq 0$ .

É imediato que os conjuntos definíveis em  $(\mathbb{R}_{an}, e, \log)$  são os mesmos de  $\mathbb{R}_{exp,an}$ , pois a função  $\log(x)$  é definível nessa estrutura; porém a eliminação de quantificadores em  $(\mathbb{R}_{an}, e, \log)$  não implica na eliminação de quantificadores em  $\mathbb{R}_{exp,an}$ , pois nada nos garante que não introduziremos quantificadores ao traduzir fórmulas de uma linguagem para a outra(é conhecido que  $\mathbb{R}_{exp,an}$  não possui eliminação de quantificadores).

Com esse resultado em mãos sabemos que todo conjunto definível de  $\mathbb{R}_{exp,an}$  é da forma

$$\bigcup_{0 \leq i \leq k} \left( \bigcap_{0 \leq j \leq l_i} t_{i,j}(\bar{x}) * 0 \right)$$

onde  $*$  é  $=$  ou  $<$  e  $t_{i,j}$  é um termo da linguagem de  $(\mathbb{R}_{an}, e, \log)$ .

Embora a caracterização acima seja consideravelmente simples não é fácil extrair dela a  $O$ -minimalidade de  $\mathbb{R}_{exp,an}$ . Existem diferentes abordagens para se obter esse resultado, uma em particular pode ser encontrada [Dav94] na qual os autores relacionam estruturas  $O$ -minimais com corpos de Hardy.



## Capítulo 2

# Propriedades Gerais

Fixamos por todo o capítulo uma estrutura  $O$ -minimal  $\mathcal{R}$ ; vamos nos dedicar por hora a estudar algumas das principais propriedades de seus conjuntos e funções definíveis.

Começamos por dois dos principais resultados sobre estruturas  $O$ -minimais, o teorema de monotonicidade e o de decomposição em células; nessa primeira seção não faremos nenhuma hipótese adicional sobre a estrutura  $\mathcal{R}$ . Na segunda seção exploramos os conceitos de dimensão e vemos o papel desempenhado por conjuntos fechados e limitados, curvas definíveis e conjuntos definivelmente conexos; vamos supor nessa seção que  $\mathcal{R}$  estende um grupo. Por fim na última seção obtemos o teorema de triangularização e o teorema de trivialização, dois dos resultados mais fortes conhecidos sobre estruturas  $O$ -minimais; nessa seção supomos que  $\mathcal{R}$  estende um corpo.

Em todo esse capítulo muitas das demonstrações que vamos realizar são baseadas em propriedades das fibras de conjuntos definíveis. Fibras de fato possuem um comportamento simples que nos permitirá proceder indutivamente em inúmeras demonstrações e por isso dedicamos algum esforço ao estudo de tais conjuntos.

### 2.1 Monotonicidade e Decomposição em Célula

Nessa seção temos como objetivo obter o teorema de decomposição em células. Para isso vamos primeiramente demonstrar o teorema de monotonicidade, um resultado que nos permite decompor o domínio de funções definíveis em partes contínuas e monótonas.

O teorema de decomposição em células em certo sentido generaliza o resultado de monotonicidade para mais dimensões decompondo o domínio de uma função em partes contínuas. A decomposição é feita dividindo o domínio no que chamamos de células e exigindo que  $f$  seja contínua em cada uma dessas células, o teorema também diz como decompor conjuntos definíveis em células.

Em toda a seção não faremos nenhuma exigência sobre a estrutura  $\mathcal{R}$  além dessa ser  $O$ -minimal.

#### 2.1.1 Monotonicidade e Finitude

O teorema de Monotonicidade tem como objetivo produzir, para uma função definível com domínio  $(a, b)$ , uma partição desse intervalo em subintervalos  $(a, a_1)$   $(a_1, a_2)$  ...  $(a_k, b)$ , de forma que a função se comporte de maneira simples em cada pedaço; i.e. seja contínua e monótona.

Esse teorema, embora simples, já mostra de forma clara o bom comportamento de funções definíveis. Pois de modo geral não é verdade que nem mesmo funções analíticas apresentam tal comportamento, como por exemplo a função  $\sin(x)$  em  $\mathbb{R}$ .

Fixemos  $f : (a, b) \rightarrow R$ , vamos demonstrar algumas propriedades preliminares que nos levarão ao teorema.

**Lema 2.1.** *Existe um subintervalo de  $(a, b)$  no qual  $f$  é injetora ou constante.*

*Demonstração.* Temos dois casos para avaliar. Primeiro suponha que  $f^{-1}(r)$  é infinito para algum  $r \in R$ , nesse caso sabemos que  $f^{-1}(r)$  é definível e infinito, e portanto contém um intervalo  $I$ , temos assim que

$f|_I$  é constante.

No caso em que  $f^{-1}(r)$  é finito para todo  $r \in R$  temos que  $f((a,b))$  é infinito e que para cada  $x \in f((a,b))$  temos  $f^{-1}(x)$  finito, logo podemos definir  $g : f((a,b)) \rightarrow (a,b)$  com  $g(x) = \min\{y \in (a,b) : f(y) = x\}$ , assim  $g$  é claramente definível e injetora, e portanto possui imagem infinita contendo um intervalo  $I$ , e pela definição de  $g$  obtemos que  $f|_I$  é injetora.  $\square$

Vale notar que foi usado na demonstração o fato de subconjuntos infinitos de  $R$  conterem intervalos, o que é uma propriedade essencial das teorias o-minimais.

**Lema 2.2.** *Se  $f$  é injetora então  $f$  é estritamente monótona em um subintervalo de  $(a,b)$ .*

*Demonstração.* Seja  $x \in (a,b)$ , usando a injetividade de  $f$  podemos particionar o subintervalo  $(a,x)$  em dois conjuntos:

$$\{y \in (a,x) : f(y) > f(x)\} \cup \{y \in (a,x) : f(y) < f(x)\} = (a,x)$$

Com isso podemos obter  $c_1$  tal que ou para todo  $y \in (c_1,x)$  temos  $f(y) < f(x)$  ou para todo  $y \in (c_1,x)$  temos  $f(y) > f(x)$  (Isso é verdade pois os dois conjuntos são definíveis e portanto podem ser escritos como união finita de intervalos disjuntos, basta pegarmos o intervalo "mais a direita").

Procedendo de maneira análoga para  $(x,b)$  obtemos  $c_2$  tal que ou para todo  $y \in (x,c_2)$  temos  $f(y) < f(x)$  ou para todo  $y \in (x,c_2)$  temos  $f(y) > f(x)$ .

Temos assim que todo  $x \in (a,b)$  satisfaz uma das fórmulas:

$$\phi_{++}(x) = \exists c_1, c_2 \in (a,b)[x \in (c_1, c_2) \wedge \forall y \in (c_1, x)(f(y) > f(x)) \wedge \forall y \in (x, c_2)(f(y) > f(x))]$$

$$\phi_{+-}(x) = \exists c_1, c_2 \in (a,b)[x \in (c_1, c_2) \wedge \forall y \in (c_1, x)(f(y) > f(x)) \wedge \forall y \in (x, c_2)(f(y) < f(x))]$$

$$\phi_{-+}(x) = \exists c_1, c_2 \in (a,b)[x \in (c_1, c_2) \wedge \forall y \in (c_1, x)(f(y) < f(x)) \wedge \forall y \in (x, c_2)(f(y) > f(x))]$$

$$\phi_{--}(x) = \exists c_1, c_2 \in (a,b)[x \in (c_1, c_2) \wedge \forall y \in (c_1, x)(f(y) < f(x)) \wedge \forall y \in (x, c_2)(f(y) < f(x))]$$

Logo obtemos uma partição de  $(a,b)$  em 4 conjuntos definíveis e assim pelo menos um deles contém um intervalo  $I$ . Note que  $\phi_{++}(x)$  (respectivamente  $\phi_{--}(x)$ ) diz que  $x$  é um mínimo(máximo) local. Pode-se demonstrar que não existem intervalos onde todos os pontos possuem essa propriedade, e podemos portanto descartar esses casos(detalhes em [vdD98]).

Suponha então que esse intervalo esteja contido no conjunto definido por  $\phi_{-+}$ (o caso  $\phi_{+-}$  é tratado de maneira análoga trocando crescente por decrescente).

Tome  $x, y \in I$  com  $x < y$ , considere  $s = \sup\{w \in (x, c_2) : \forall(z) \in (x, w)(f(x) < f(z))\}$ , sabemos que por  $\phi_{-+}(x)$  que algum elemento satisfaz essa propriedade e podemos concluir que  $s = c_2$  pois caso fosse menor teríamos uma vizinhança de  $s$  onde  $w < s$  implicaria  $f(w) < f(s)$  (como  $s < c_2$   $s$  satisfaz  $\phi_{-+}$ ) o que contradiz a definição de  $s$ . Mas assim temos que  $x < y < s$  e portanto  $f(x) < f(y)$  e  $f$  é estritamente crescente em  $I$ .  $\square$

**Lema 2.3.** *Se  $f$  é estritamente monótona então  $f$  é contínua em um subintervalo de  $(a,b)$ .*

*Demonstração.* Suponha  $f$  estritamente crescente(o caso decrescente é tratado analogamente), então  $f$  é injetora, logo  $f((a,b))$  é infinito e contém um intervalo, sejam  $r < s$  pontos desse intervalo e  $c, d$  suas respectivas pré imagens. Como  $f(c) = r < s = f(d)$  e  $f$  é estritamente crescente temos que  $c < d$ .

Agora  $f((c,d)) = (r,s)$  pois temos que  $(r,s) \subset f((a,b))$ , e se  $t \in (r,s)$  sabemos que existe  $e \in (a,b)$  com  $f(e) = t$ . Mas assim temos  $f(c) < f(e) < f(d) \Rightarrow (c < e < d)$  e portanto  $e \in (c,d)$ .

Temos então que  $f : (c,d) \rightarrow (r,s)$  é uma bijeção que preserva a ordem e portanto contínua.  $\square$

Com esses 3 lemas vamos finalmente enunciar e provar o teorema de monotonicidade.

**Teorema 2.4.** *Teorema da Monotonicidade*

Seja  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  uma função definível, existem pontos  $a = a_0 < a_1 < \dots < a_k < a_{k+1} = b$  tais que  $f|_{(a_i, a_{i+1})}$  é contínua e estritamente monótona ou  $f$  é constante.

*Demonstração.* Considere a seguinte fórmula

$$\phi(x) = \exists y, z (y < x < z \wedge [\phi_{\text{cont}}(f|_{(y,z)}) \vee \exists k \forall w ((y < w < z) \rightarrow f(w) = k)])$$

Ela define o seguinte conjunto  $X$

$$X = \{x \in (a, b) : \text{tal que em uma vizinhança de } x, f \text{ é constante ou monótona e contínua}\}$$

Como  $X$  é definível temos que seu complementar é definível. Suponha que esse contém um intervalo(ou seja, que é infinito). Pelos 3 lemas que acabamos de provar, existe um subintervalo contido em  $X$  onde  $f$  é estritamente monótona e contínua; o que é implicaria que tal intervalo pertence a  $X$ , claramente uma contradição. Segue que o complementar de  $X$  é um conjunto finito de pontos.

Assim  $X$  é uma união finita de intervalos. Com isso basta provarmos o resultado para cada um desses intervalos(no fim podemos simplesmente ordenar as sequências obtidas em cada intervalo com o complemento de  $X$  para obter a sequência do enunciado), e podemos simplesmente supor que todos pontos no domínio de  $f$  satisfazem  $\phi$ . Esse domínio ainda pode ser particionado em 2 conjuntos definíveis, um onde  $f$  é constante na vizinha de cada ponto e outro onde  $f$  é contínua e estritamente monótona na vizinhança de cada ponto. Como o domínio de  $f$  satisfaz  $\phi$  esses conjuntos são aberto, e portanto uma união finita de intervalos. Assim novamente basta analisarmos em cada um desses intervalos, e podemos com isso supor que  $f$  é contínua e estritamente monótona, ou constante.

No caso em que  $f$  é constante na vizinhança de cada ponto vemos que, dado  $x \in (a, b)$  e  $k$  tal que  $f(x) = k$

$$\sup\{y \in (x, b) : f(y) = k\} = b$$

Pois, caso  $s < b$ , teríamos uma vizinhança de  $s$  em  $(a, b)$  onde  $f$  seria constante igual a  $k$ , o que contradiria  $s$  ser o supremo do conjunto acima. Podemos fazer o mesmo para concluir que

$$\inf\{y \in (a, x) : f(y) = k\} = a$$

Com isso vemos que  $f$  é constante em  $(a, b)$ .

No caso de  $f$  ser estritamente monótona e contínua na vizinhança de cada ponto vemos, de maneira análoga, que  $f$  é estritamente crescente em todo intervalo  $(a, b)$ (a continuidade no intervalo é óbvia), e com isso concluímos a prova. □

Podemos tirar algumas conclusões desse teorema; por exemplo a existência de limites laterais para funções definíveis. Para obtermos

$$\lim_{x \downarrow c} f(x)$$

com  $c$  no fecho do domínio de  $f$  basta decompormos o domínio de acordo com o teorema 2.4, tomarmos o intervalo contendo  $c$  ou, caso  $c$  não esteja em um intervalo, o primeiro intervalo à esquerda de  $c$ , e usarmos a continuidade de  $f$  em tal intervalo(note que tal limite pode ser  $\pm\infty$ ).

Outra consequência, menos trivial e que precisaremos adiante, é o lema de finitude. Um resultado que nos dá um limitante para a cardinalidade das fibras de um subconjunto definível de  $\mathbb{R}^2$ . Antes de enunciá-lo, porém, precisamos da definição abaixo, ela será utilizada frequentemente durante o texto.

**Definição 2.5.** Fibras.

Dado um conjunto definível  $A \subset R^{m+n}$  definimos para um dado  $x \in R^m$  o conjunto

$$A_x = \{y \in R^n : (x, y) \in A\}$$

Chamamos  $A_x$  a fibra de  $A$  em  $x$ .

É imediato que fibras são definíveis.

O próximo resultado é apenas um dentre muitos que determinam o bom comportamento desses conjuntos. É graças a tal comportamento que conseguiremos provar a maior parte de nossos resultados.

**Lema 2.6.** *Lema de Finitude.*

Seja  $S \subset R^2$  um conjunto definível tal que para todo  $x \in R$  temos  $S_x$  finito, então existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  que limita a cardinalidade de  $S_x$  para todo  $x$ .

*Demonstração.* Para demonstrar esse teorema vamos definir alguns conceitos auxiliares, começando por pontos normais.

Um ponto  $(a, b) \in R \times R_\infty$  é dito normal (em relação a  $S$ ) se existe uma caixa  $I \times J$  satisfazendo uma das condições abaixo.

- $I \times J \cap S = \emptyset$  (i.e.  $a \notin \bar{S}$ )
- $(a, b) \in S$  e  $I \times J \cap S = \tau(f)$  para alguma função contínua definível (nesse caso  $b = f(a)$ ).

Dizemos ainda que  $(a, \infty)$  é normal se existem intervalos  $a \in I$  e  $J = (k, \infty)$  com  $I \times J \cap S = \emptyset$  (chamamos  $I \times J$  de uma vizinhança de  $(a, \infty)$ ). E para  $(a, -\infty)$  normalidade é definida analogamente com  $J = (-\infty, k)$ .

Além disso temos que os conjuntos abaixo são claramente definíveis

$$\begin{aligned} & \{(a, b) \in R^2 : (a, b) \text{ é normal} \} \\ & \{a \in R : (a, -\infty) \text{ é normal} \} \\ & \{a \in R : (a, \infty) \text{ é normal} \} \end{aligned} \tag{2.1}$$

Podemos ainda definir uma sequência  $f_1, \dots, f_n, \dots$  de funções tais que o domínio de cada  $f_i$  é dado por  $\{x \in R : S_x \text{ possui pelo menos } i \text{ elementos}\}$  e  $f_i(x)$  é o  $i$ -ésimo elemento de  $S_x$ . Também é imediato que cada  $f_i$  é definível (podendo ter domínio vazio).

Seja  $a \in R$  e  $n \in \mathbb{N}$  máximo tal que  $f_n$  é definida e contínua em uma vizinhança de  $a$  para todo  $m < n$  (note que tal  $n$  é no máximo a cardinalidade de  $S_a$ ). Dizemos que  $a$  é apropriado caso  $a$  não pertença ao fecho do domínio de  $f_{n+1}$ , e inapropriado caso contrário. O conjunto dos pontos apropriados vai ser denotado por  $A$  e o de pontos inapropriados por  $I$ . Um ponto  $p \in R$  apropriado nos interessa pois satisfaz as duas propriedades abaixo.

$$|A_p| \text{ é constante em uma vizinhança de } p \tag{2.2}$$

$$(a, b) \text{ é normal para todo } b \in R_\infty. \tag{2.3}$$

Antes de concluirmos a demonstração precisamos primeiro mostrar que os conjuntos  $I$  e  $A$  são definíveis e que  $I$  é finito. A definibilidade dos conjuntos não é de forma alguma trivial já que usamos um parâmetro  $n \in \mathbb{N}$  que dependia de  $a$  para definir os conjuntos.

Vamos provar agora que:

$$a \in I \text{ implica que existe } b \in R_\infty \text{ tal que } (a, b) \text{ não é normal.} \tag{2.4}$$

Juntando 2.1 e 2.4 obtemos claramente que  $I$  e  $A$  são definíveis.

Para verificar 2.4 notemos que se  $a \in I$  então  $a \in \text{cl}(\text{dom}(f_{n+1}))$  ou  $f_{n+1}(a)$  está definido ou um dos limites laterais de  $f_{n+1}$  em  $a$  está definido (em  $R_\infty$ ), e assim podemos tomar  $\beta(a)$  como o mínimo desses valores. Vejamos que  $\beta(a)$  é o mínimo valor de  $x \in R_\infty$  tal que  $(a, x)$  não é normal.

Note que no caso de  $\beta(a)$  ser finito temos que  $(a, \beta(a))$  não é normal pois  $f_{n+1}$  não está definida em nenhuma vizinhança de  $a$ . No caso  $\beta(a) = \infty$  também é imediato que  $(a, \beta(a))$  não é normal pois toda vizinhança de  $(a, \infty)$  intersecta  $\tau(f_{n+1})$ . Vemos assim que 2.4 é válida.

Vamos provar agora que o conjunto  $I$  é finito. Suponha que não seja e considere as duas fórmulas

$$\phi_-(x) = \exists y(y < \beta(a) \wedge (x, y) \in S)$$

$$\phi_+(x) = \exists y(y > \beta(a) \wedge (x, y) \in S)$$

Obviamente todo  $x \in I$  satisfaz uma única das quatro fórmulas

- $\phi_-(x) \wedge \phi_+(x)$
- $\phi_-(x) \wedge \neg\phi_+(x)$
- $\phi_+(x) \wedge \neg\phi_-(x)$
- $\neg\phi_-(x) \wedge \neg\phi_+(x)$

E portanto um subconjunto infinito de  $I$  satisfaz pelo menos uma das fórmulas. Qualquer um dos casos leva a uma contradição; vamos analisar apenas o caso em que  $\phi_+(x) \wedge \neg\phi_-(x)$  define um subconjunto infinito de  $I$ , que denotaremos por  $I'$ .

Definimos em  $I'$  a função  $\beta_+(x) = \min(y : y > \beta(a) \wedge (x, y) \in S)$ , note que  $\beta_+$  é definível e  $\beta_+(x) > \beta(x)$  por definição, pelo teorema da monotonicidade podemos refinar  $I'$  de modo a ambas funções serem contínuas. Podemos separar  $I'$  ainda mais, no conjunto  $\{x \in I' : (x, \beta(x)) \in S\}$  e seu complementar. Um desses conjuntos deve conter um intervalo e trocando  $I'$  por tal intervalo vemos que ou  $\tau(\beta|_{I'}) \subseteq S$  ou  $\tau(\beta|_{I'}) \cap S = \emptyset$ .

Sabemos que  $(a, \beta(a))$  não é normal para nenhum  $a \in I'$ , temos os dois casos acima para analisar vamos apenas discutir quando  $\tau(\beta|_{I'}) \cap S = \emptyset$ , o argumento pode ser adaptado para o outro caso.

$\beta_+ > \beta$  e ambas são contínuas, logo conseguimos uma vizinhança de  $(a, \beta(a))$  onde essas funções não se interceptam mas como  $\phi_-$  é válida em  $I'$  essa vizinhança não pode intersectar  $A$  em nenhum ponto  $(x, y)$ , pois esse ponto não pode satisfazer  $y = \beta(x)$  nem  $y > \beta(x)$  e tão pouco  $y < \beta(x)$ . Mas isso implica  $(a, \beta(a))$  normal, o que é um absurdo, concluindo a demonstração de que  $I$  é finito.

Podemos com isso finalmente concluir a demonstração do lema.

Seja  $I = \{a_1, \dots, a_k\}$ , com  $a_i < a_{i+1}$  e tome  $a_0 = -\infty$ ,  $a_{k+1} = \infty$ . Em um intervalo  $(a_i, a_{i+1})$  temos que todos os pontos são apropriados. Tome  $n = |S_y|$  para algum  $y$  em tal intervalo, por 2.2 o conjunto dos  $x \in (a_i, a_{i+1})$  com  $|S_x| = n$  é aberto, mas pelo mesmo argumento vemos que seu complementar também é aberto, porém ambos conjuntos são definíveis e sabemos que intervalos são definivelmente conexos. Segue que o complementar de  $\{x \in (a_i, a_{i+1}) : |S_x| = n\}$  é vazio, e portanto as fibras tem cardinalidade constante em cada intervalo. Como temos um número finito de intervalos particionando  $R$  basta tomarmos o máximo de tais cardinalidades em todos intervalos e todos pontos  $a_i$  para obtermos  $n_0$ .

□

### 2.1.2 Células e Suas Propriedades

Vamos agora definir e estudar algumas propriedades das células. Células são subconjuntos definíveis de  $R^n$  de natureza bastante simples, que desempenham um papel análogo ao dos pontos e intervalos de  $R$ ,

decompondo subconjuntos e domínios de funções definíveis de maneira bastante conveniente. Porém antes de nos concentrarmos em tais decomposições vamos primeiro estudar propriedades das células.

Para descrevermos as células precisaremos introduzir alguma notação:

**Definição 2.7.** Seja  $X \subset R^n$  definimos  $C(X) = \{f : X \rightarrow R : f \text{ é definível}\}$  e dados  $f < g$  em  $C(X)$  definimos.

- $(f, g)_X = \{(x, y) \in R^{n+1} : (x \in X) \wedge (f(x) < y < g(x))\}$
- $(f, \infty)_X = \{(x, y) \in R^{n+1} : (x \in X) \wedge (f(x) < y)\}$
- $(-\infty, f)_X = \{(x, y) \in R^{n+1} : (x \in X) \wedge (y < g(x))\}$

Claramente esses 3 conjuntos são definíveis. Quando o contexto permitir escreveremos apenas  $(f, g)$  e não  $(f, g)_X$ .

Com isso estamos em condições de apresentar a seguinte definição:

**Definição 2.8.** Uma célula do  $R^n$  é definida indutivamente em  $n$ , juntamente com a célula é dada uma sequência de tamanho  $n$  formada por 0 e 1 que indica como a célula foi obtida.

1. Uma (0)–célula é um ponto de  $R$ , uma (1)–célula é um intervalo.
2. Se  $X$  é uma  $(a_1, \dots, a_n)$ -célula em  $R^n$  e  $f \in C(X)$  dizemos que  $\tau(f)$  é uma  $(a_1, \dots, a_n, 0)$ -célula em  $R^{n+1}$ . Se  $f < g$  pertencem a  $C(X)$  dizemos que  $(f, g)$  é uma  $(a_1, \dots, a_n, 1)$ -célula

Chamamos  $(1, 1, \dots, 1)$ -células de células abertas(justamente por serem as únicas células que são abertas).

Uma consequência imediata é que a projeção de uma célula ainda é uma célula. Denotaremos a projeção(de  $R^n$  em  $R^{n-1}$ , omitindo a última coordena) por  $\pi$ . Células são definidas indutivamente, e por isso é comum que suas propriedades sejam obtidas através de indução, como podemos ver no exemplo abaixo.

**Lema 2.9.** *Toda célula é definivelmente conexa.*

*Demonstração.* O resultado é imediato para células de  $R$ , ou seja, pontos e intervalos. Para uma célula  $E$  de  $R^{n+1}$  podemos assumir que é verdade para células de  $R^n$ , e em particular para  $\pi(E)$ . Agora as fibras  $E_x$  com  $x \in \pi(E)$  são pontos ou intervalos, vamos assumir que sejam intervalos.

Suponha que  $E \subset A \cup B$  com  $A$  e  $B$  abertos definíveis e  $p \in A \cap E$ . Temos que  $\{\pi(p)\} \times E_{\pi(p)} \subset A$  pois caso contrário  $A$  e  $B$  formariam uma desconexão da fibra, vemos assim que um ponto  $p \in E$  pertence a  $A$  se e só se  $\{\pi(p)\} \times E_{\pi(p)} \subset A$ , e analogamente o mesmo vale para  $B$ . Podemos assim dividir  $\pi(E)$ , em dois conjuntos:

$$\{x \in \pi(E) : E_x \subset A\} \text{ e } \{x \in \pi(E) : E_x \subset B\}$$

Esses conjuntos são abertos, já que dado  $(x, a) \in A \cap E$  existe uma vizinhança desse ponto em  $E$  que está contida em  $A$  e assim se projeta em uma vizinhança de  $x$  em  $\{x \in \pi(E) : E_x \subset A\}$ . Como  $\pi(E)$  é conexo temos que  $\{x \in \pi(E) : E_x \subset B\}$  deve ser vazio, mas isso implica  $B \cap E$  vazio como queríamos.  $\square$

Por fim, outra propriedade de células que usaremos com frequência, é que toda célula é definivelmente homeomorfa a uma célula aberta; tal homeomorfismo é uma simples projeção em certas coordenadas.

Mais especificamente seja  $E$  uma  $l$ -célula onde  $l = (a_1, \dots, a_n)$  é uma sequência de 0 e 1, tome  $|l| = \sum a_i$ . Defina  $p_l : R^n \rightarrow R^{|l|}$  a função que leva  $(x_1, \dots, x_n)$  em  $(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(|l|)})$ , onde  $\sigma(i)$  é o  $i$ -ésimo índice de  $l$  com valor 1. Não é difícil verificar por indução em  $n$  que  $p_l$  é um homeomorfismo de  $E$  em uma célula aberta.

Tendo esses resultados em mãos estamos prontos para provar o teorema de decomposição em células.

### 2.1.3 O Teorema de Decomposição em Células

Dado um subconjunto de  $R^n$ , ou uma função definível com domínio em  $R^n$ , o teorema de decomposição tem como objetivo particionar o  $R^n$  em células, respeitando o conjunto em questão, ou decompondo o domínio de tal função de modo que ela se torne contínua em cada célula.

Existe claramente uma semelhança entre esse resultado e o teorema de monotonicidade 2.4, mas é claro que a condição de monotonicidade não faz sentido em  $R^n$  e tudo que pedimos é a continuidade.

O resultado dessa seção pode ser melhorado pedindo-se propriedades adicionais de tal decomposição. Um resultado notável é que se a estrutura  $\mathcal{R}$  estende um corpo podemos definir diferenciabilidade de funções; nesse caso o resultado dessa seção pode ser refinado para garantir que as células sejam suaves e que a restrição da função em questão a cada célula se torne diferenciável. Não vamos tratar aqui de tais assuntos; detalhes podem ser encontrados no sétimo capítulo de [vdD98].

Antes de enunciar o teorema vamos definir qual o tipo de partição do  $R^n$  nos interessa, chamaremos tal partição de uma decomposição.

**Definição 2.10.** Uma decomposição do  $R^n$  é definida indutivamente em  $n$  da seguinte forma:

- Uma decomposição de  $R$  é uma partição de  $R$  em um número finito de pontos e intervalos abertos disjuntos.
- Uma decomposição do  $R^n$  é uma partição do  $R^n$  em um conjunto finito de células  $Q$  disjuntas de modo que a projeção de  $Q$ , i.e.  $\pi(Q) = \{\pi(A) : A \in Q\}$ , é uma decomposição do  $R^{n-1}$ .

Dizemos que uma decomposição de  $R^n$  particiona, ou é compatível, com um conjunto definível  $S$  do  $R^n$  se cada célula da decomposição ou é disjunta de  $S$  ou está contida em  $S$ .

Note que dada uma decomposição  $Q$  do  $R^n$  podemos facilmente obter uma decomposição do  $R^{n+1}$  da seguinte maneira. Para cada célula  $A \in Q$  escolhemos uma sequência finita de funções definíveis  $(f_1, f_2, \dots, f_k)$  com domínio em  $A$  e  $f_i < f_{i+1}$ . Definimos o conjunto

$$T_A = \{(-\infty, f_1), (f_1, f_2), \dots, (f_{k-1}, f_k), (f_k, \infty), \tau(f_1), \dots, \tau(f_k)\}$$

E temos que  $T = \bigcup_{A \in Q} T_A$  é uma decomposição de  $R^{n+1}$ . Na verdade é fácil de se mostrar por indução que todas as decomposições são obtidas de tal maneira.

**Teorema 2.11.** *Teorema da Decomposição em Células*

1. Dado subconjuntos definíveis  $S_1, \dots, S_k$  de  $R^n$  existe uma decomposição de  $R^n$  compatível com cada  $S_i$ .
2. Dada uma função definível  $f : S \rightarrow R$ ,  $S \subset R^n$  existe uma decomposição  $Q$  do  $R^n$  compatível com  $S$  tal que a restrição de  $f$  a cada célula de  $Q$  contida em  $S$  é contínua. Dizemos que tal decomposição é compatível com  $f$ .

A prova de tal resultado é feita por indução em  $n$  nas duas hipóteses simultaneamente, na verdade a indução é feita simultaneamente sobre uma terceira hipótese que enunciaremos separadamente. Esse resultado é uma generalização do lema de finitude 2.6.

**Lema 2.12.** *Lema da finitude uniforme*

Suponha que  $Y \subset R^{n+1}$  é um conjunto definível tal que para todo  $y \in \pi(Y)$  a fibra  $Y_y$  é finita, então existe um  $n_0 \in \mathbb{N}$  limitando a cardinalidade de todas as fibras de  $Y$ . Dizemos que  $n_0$  limita uniformemente  $Y$  sobre  $R^n$ .

A estratégia da demonstração consiste em levantar decomposições do  $R^n$  para o  $R^{n+1}$  obtendo as compatibilidades desejadas, o resultado acima irá nos garantir que em cada caso teremos que exigir compatibilidade apenas com um número finito de funções e subconjuntos do  $R^n$ , e com isso poderemos usar as hipóteses de indução.

*Demonstração.* Começamos a prova observando que para  $n = 1$  a primeira parte do teorema de decomposição em células segue da definição de  $O$ -minimalidade, a segunda parte segue do teorema de monotonicidade e a finitude uniforme do lema de finitude.

Vamos então assumir que os 3 resultados são válidos até  $n \in \mathbb{N}$  e vamos mostrar que são válidos para  $n + 1$ , começando pela finitude uniforme, cuja demonstração é bastante parecida à do lema de finitude.

- Finitude Uniforme.

Seja  $B \subset R^n$  uma caixa, dizemos que  $B$  é  $Y$ -apropriada se para todo ponto  $(x, r)$  de  $Y$  com  $x \in B$  existe um intervalo  $I$  contendo  $r$  tal que  $(B \times I) \cap Y = \tau(f)$  para alguma função  $f : B \rightarrow R$  definível e contínua. Um ponto do  $R^n$  é  $Y$ -apropriado se pertence a uma caixa  $Y$ -apropriada.

A demonstração segue das 2 observações abaixo:

1. Dado um conjunto  $A \subset R^n$  definivelmente conexo, onde todos os pontos são  $Y$ -apropriados existem funções  $f_1, \dots, f_l$  tais que

$$(A \times R) \cap Y = \bigcup \tau(f_i)$$

2. Toda célula aberta possui um ponto  $Y$ -apropriado.

Para ver isso tome uma decomposição do  $R^n$  compatível com o conjunto dos pontos  $Y$ -apropriados (esse conjunto é obviamente definível). Basta mostrar que toda célula em tal decomposição possui um limitante uniforme. Tome uma célula  $D$  aberta de tal decomposição, então a segunda observação acima implica que ela contém um ponto  $Y$ -apropriado e pela compatibilidade segue que todos pontos serão  $Y$ -apropriados, além do mais sabemos que células são definivelmente conexas, e portanto pela primeira observação obtemos um limitante uniforme para a cardinalidade das fibras em  $D$ .

Resta verificar que também existem limitantes para as células não abertas. Seja então  $D$  uma  $l$ -célula, considere a projeção  $p_l : R^n \rightarrow R^{|l|}$  que restrita a célula nos dá um homeomorfismo (descrito no fim da última sub-seção) com uma célula aberta, e tome o sub-conjunto definível de  $R^{|l|+1}$

$$Y' = \bigcup_{a \in D} p_l(a) \times Y_a \quad (2.5)$$

Agora  $Y_a = Y'_{p_l(a)}$  e portanto  $Y'$  possui fibras finitas, mas assim pela hipótese de indução temos um limitante uniforme de  $Y'$  em  $\{p_l(a) : a \in D\}$ . Como um limitante de  $p_l(x)$  em  $Y'$  também é limitante de  $x$  em  $Y$  obtemos um limitante uniforme em  $Y$  para toda a célula  $D$ , o que nos dá o lema da finitude uniforme.

Falta então provar 1 e 2 acima.

Antes de provarmos a primeira observação vamos verificar uma propriedade que chamaremos de fato 1.

**Fato 1:** Se uma caixa  $B$  é  $Y$ -apropriada então existem funções contínuas definíveis  $f_1, \dots, f_l$  tais que

$$(B \times R) \cap Y = \bigcup \tau(f_i)$$

Para isso tome  $x_0 \in B$ , seja  $Y_{x_0} = \{r_1, \dots, r_j\}$  com  $r_i < r_{i+1}$ . Como  $B$  é  $Y$ -apropriada podemos encontrar intervalos  $I_1, \dots, I_j$  e funções contínuas definíveis  $f_1, \dots, f_j$  de  $B$  em  $R$  com  $(B \times I_i) \cap Y = \tau(f_i)$ . Vamos primeiro verificar que  $f_i < f_{i+1}$ .

Suponha que  $f_{i+1}(p) = f_i(p)$ , isso implica  $f_{i+1}(p) \in I_i$ , e pela continuidade de  $f_{i+1}$  existe uma vizinhança  $U$  de  $p$  com  $f_{i+1}(U) \subset I_i$ . Logo

$$\tau(f_{i+1}|_U) \subset (U \times I_i) \cap Y = \tau(f_i|_U)$$

O que é suficiente para concluirmos que as funções são iguais em  $U$  e com isso  $\{p \in B : f_{i+1}(p) = f_i(p)\}$  é aberto. Pela continuidade das  $f_i$  temos que  $\{p \in B : f_{i+1}(p) < f_i(p)\}$  e  $\{p \in B : f_{i+1}(p) > f_i(p)\}$  também são abertos, e isso nos dá uma partição definível de  $B$  em abertos, assim somente um desses conjuntos pode ser não vazio e como  $f_i(x_0) < f_{i+1}(x_0)$  por definição das  $f_i$ , temos que

$$\{p \in B : f_i(p) < f_{i+1}(p)\} = B$$

Ou seja  $f_i < f_{i+1}$ .

Vejamos que de fato  $(B \times R) \cap Y = \bigcup \tau(f_i)$ , basta provarmos

$$(B \times R) \cap Y \subset \bigcup \tau(f_i)$$

Pois a outra inclusão é imediata.

Tome  $(s, y)$  em  $(B \times R) \cap Y$ , como  $B$  é  $Y$ -apropriado podemos encontrar  $f : B \rightarrow R$  definível e contínua com  $y = f(s)$  e  $\tau(f) \subset Y$ . Assim  $(x_0, f(x_0)) \in Y$  e portanto  $f(x_0) = r_i = f_i(x_0)$  para algum  $i$ , mas nesse caso o mesmo argumento dado acima nos permite concluir que  $f = f_i$  portanto  $(s, y) = (s, f_i(s)) \in \bigcup \tau(f_i)$ . E obtemos  $(B \times R) \cap Y = \bigcup \tau(f_i)$  como desejado.

#### Demonstração da primeira observação.

Com isso estamos prontos para provar a primeira observação. Seja então  $A \subset R^n$  um conjunto definivelmente conexo, onde todos os pontos são  $Y$ -apropriados, queremos funções contínuas definíveis  $f_1, \dots, f_l$  tais que

$$(A \times R) \cap Y = \bigcup \tau(f_i)$$

Tome um ponto  $x \in A$  com  $|S_x| = l$ , como  $x$  é  $Y$ -apropriado temos pelo fato 1 que existe uma caixa  $B$  em torno de  $x$  tal que  $|S_y|$  é constante para  $y \in B$ . Ou seja  $\{x \in A : |S_x| = l\}$  é aberto, por outro lado o mesmo argumento para  $j \in \mathbb{N}$ ,  $j \neq l$  mostra que seu complementar também é aberto, e como  $A$  é definivelmente conexo vemos que  $|S_x| = l$  em  $A$ . Definindo  $f_1, \dots, f_l$  da maneira usual vemos que essas funções são contínuas pois todos os pontos no domínio são  $Y$ -apropriados e assim o fato 1 nos garante a continuidade. Isso conclui a demonstração da primeira observação.

#### Demonstração da segunda observação.

Seja  $B = B' \times (a, b)$  onde  $B'$  é uma caixa em  $R^{n-1}$ . Vamos mostrar que  $B$  possui um ponto  $Y$ -adequado, o que é o suficiente. Dado um ponto  $p \in B'$  considere o conjunto

$$Y(p) = \{(r, s) \in R^2 : (p, r) \in B' \wedge (p, r, s) \in Y\}$$

Note que  $r$  ser  $Y(p)$ -apropriado significa que existe vizinhança  $I_r$  de  $r$  tal que  $Y(p) \cap (I_r \times R)$  pode ser escrito como uma união finita de gráficos de funções definíveis. Mas o lema de finitude nos dá um número  $n_0$  de modo que  $|Y(p)_r| \leq n_0$  em todo ponto de  $R$ , com isso podemos definir funções  $f_1, \dots, f_{n_0}$  de forma que  $f_i$  escolhe o  $i$ -ésimo elemento de  $Y(p)_r$ , já vimos que tais funções são definíveis, e assim podemos usar o teorema de monotonicidade para vermos que são contínuas a menos de um número finito de pontos, concluindo assim que os pontos  $r$  que não são  $Y(p)$ -apropriados formam um conjunto finito.

Defina  $I(Y) = \{(p, r) \in B : r \text{ não é } Y(p)\text{-apropriado}\}$ . Pela observação acima temos que esse conjunto tem interior vazio. E usando a hipótese de indução conseguimos  $D$  uma decomposição de  $R^n$  compatível com  $B$  e  $I(Y)$ , tome uma célula aberta de tal decomposição que esteja contida em  $B$ , tal célula não pode intersectar  $I(Y)$ , pois caso contrário estaria contida em tal conjunto o que contradiria ela ser aberta. Basta acharmos um ponto  $Y$ -apropriado em tal célula, ou seja podemos nos focar em uma caixa (que continuaremos chamando de  $B$ ) onde todo ponto  $(p, r)$  é  $Y(p)$ -apropriado.

Com isso dado  $p \in B'$  temos que todo  $x \in (a, b)$  é  $Y(p)$ -apropriado e pela primeira observação obtemos que  $|Y(p)_x| = k(p)$  é constante para todo  $x$ . Vamos mostrar que  $k(p)$  é limitado para  $p \in B'$ .

Considere o conjunto

$$Y' = \{(p, s) \in B' \times R : (p, r, s) \in Y\}$$

Temos que  $|Y'_p| = |Y_{(p,r)}|$  de onde  $Y'_p$  é finito, e pela hipótese de indução é uniformemente finito. Isso nos dá um limitante para  $Y_{(p,r)}$  ou seja um limitante para  $k(p)$ .

Com esse limitante que vamos chamar de  $k_0$  podemos decompor  $B$  nos conjuntos definíveis  $B_i = \{x \in B : |Y_x| = i\}$  para  $1 \leq i \leq k_0$  e em cada  $B_i$  podemos tomar as funções definíveis  $f_1^i, \dots, f_i^i$  de modo que  $f_j^i(x)$  nos dá o  $j$ -ésimo elemento de  $Y_x$ , para  $x \in B_i$ . Essas funções são definíveis e possuem domínio contido em  $R^n$  logo podemos usar a segunda parte do teorema de decomposição em células para obter uma decomposição do  $R^n$  para cada  $f_j^i$ , e em seguida, como temos uma quantidade finita de partições e cada partição por sua vez é finita, podemos obter pela primeira parte do teorema uma decomposição mais fina de  $R^n$  que seja compatível com todas as outras. Todas as restrições de  $f_j^i$  a uma célula de tal partição são contínuas.

Essa decomposição é compatível com  $B$ , pois é compatível com uma partição de  $B$ . Como  $B$  é aberto podemos então pegar uma célula  $C_0$  aberta contida em  $B$ , e mais especificamente em algum  $B_i$ , mas em  $C_0$  todas as funções  $f_1^i, \dots, f_i^i$  são contínuas e já vimos que isso é suficiente para garantir que todos os pontos em  $C_0$  são  $Y$ -apropriados, concluindo a demonstração do lema de finitude uniforme.

- Decomposição em células, primeira parte.

Tendo o lema de finitude uniforme nós estamos em condições de provar a primeira afirmação do teorema de decomposição em células.

Dado um conjunto  $A$  do  $R^{n+1}$  definimos

$$bd_n(A) = \{(p, x) \in R^{n+1} : x \in bd(A_p)\}$$

Onde  $bd(A_p)$  é definido em  $R$  como  $cl(A) - int(A)$ , mas esse subconjunto de  $R$  é sempre finito (consequência imediata da definição de  $\epsilon$ -minimalidade), ou seja  $bd_n(A)$  possui fibras finitas.

Sejam  $S_1, \dots, S_k$  subconjuntos definíveis do  $R^n$ , precisamos conseguir uma decomposição compatível com tais conjuntos. Tome

$$Y = \bigcup_{1 \leq i \leq k} bd_n(S_i)$$

Esse conjunto possui fibras finitas, e pelo lema de finitude uniforme existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  com  $|Y_x| \leq n_0$  para todo  $x \in R^n$ .

Para  $0 \leq i \leq n_0$  tome os conjuntos definíveis  $B_i = \{x \in R^n : |Y_x| = i\}$  e vamos definir de maneira similar à demonstração anterior funções  $f_j^i : B_i \rightarrow R$  levando  $x$  no  $j$ -ésimo elemento de  $Y_x$  e por conveniência vamos denotar  $f_{i+1}^i = \infty, f_0^i = -\infty$ .

Por último vamos definir para  $1 \leq l \leq k, 1 \leq i \leq n_0$  e  $0 \leq j \leq 1$

$$A_{l,i,j} = \{x \in B_i : f_j^i(x) \in (A_l)_x\}$$

$$F_{l,i,j} = \{x \in B_i : (f_j^i(x), f_{j+1}^i(x)) \subset (A_l)_x\}$$

O índice  $l$  marca em  $A_{l,i,j}$  qual  $S_l$  o elemento  $f_j^i(x)$  pertence (podendo inclusive pertencer a mais de um ou nenhum), e em  $F_{l,i,j}$  qual  $(S_l)_x$  contém o intervalo  $(f_j^i(x), f_{j+1}^i(x))$ .

Como todos esses são subconjuntos definíveis de  $R^n$  e as funções  $f_j^i$  também possuem domínio em  $R^n$  podemos aplicar a hipótese de indução das duas partes do teorema para obter uma decomposição  $D$  de  $R^n$  compatível com cada  $F_{l,i,j}$ ,  $A_{l,i,j}$  e  $f_j^i$ .

Finalmente obtemos a decomposição de  $R^{n+1}$  da seguinte forma, para cada  $E \in D$  tal que  $E \subset B_i$  tomamos

$$D_E = \{(f_0^i, f_1^i), \dots, (f_i^i, f_{i+1}^i), \tau(f_1^i), \dots, \tau(f_i^i)\}$$

E  $D_0 = \bigcup_{E \in D} D_E$ , na última seção vimos que a continuidade de cada  $f_j^i$  é o suficiente para garantir que  $D_0$  é uma decomposição de  $R^{n+1}$ , além do mais a compatibilidade de  $D$  com  $A_{l,i,j}$  nos garante que  $\tau(f_j^i)$  está ou contida ou é disjunta de cada  $S_l$  e a compatibilidade com  $F_{l,i,j}$  nos garante o mesmo para os intervalos  $(f_j^i(x), f_{j+1}^i(x))$ . Ou seja temos que  $D_0$  é uma decomposição do  $R_{n+1}$  compatível com cada  $S_l$ .

- Decomposição em célula, segunda parte

Para demonstrarmos essa parte do teorema faremos uso de um lema que diz respeito à continuidade de funções em estruturas ordenadas.

**Lema 2.13.** *Seja  $X$  um espaço topológico e  $\mathcal{R}_1 = (R_1, <)$ ,  $\mathcal{R}_2 = (R_2, <)$  ordens lineares densas sem pontos finais. Se  $f : X \times R_1 \rightarrow R_2$  é tal que para cada  $(p, r) \in X \times R_1$*

- A função  $f_p : R_1 \rightarrow R_2$  que leva  $t$  em  $f(p, t)$  é contínua e monótona (a monotonicidade não precisa ser estrita).
- A função  $f_r : X \rightarrow R_2$  que leva  $x$  em  $f(x, r)$  é contínua.

Então  $f$  é contínua.

*Demonstração.* Dado um ponto  $(p, r) \in X \times R_1$  vamos achar um intervalo  $J$  ao redor de  $f(p, r)$  e uma vizinhança  $U \times I$  de  $(p, r)$  tal que  $f(U \times I) \subset J$ .

Pela continuidade de  $f_p$  podemos encontrar um intervalo  $I' = (r_0 - \epsilon, r_1 + \epsilon)$  tal que  $f_p(I') \subset J$ , em particular cada  $f(r_0), f(r_1) \in J$ , e com isso pela continuidade de  $f_{r_0}$  e de  $f_{r_1}$  podemos encontrar uma vizinhança  $U$  de  $p$  tal que  $f_{r_0}(U), f_{r_1}(U) \subset J$ .

Tomando  $I = (r_0, r_1)$  vamos mostrar que  $f(U \times I) \subset J$ . Seja  $(x, t) \in U \times I$  a função  $f_x$  é monótona por hipótese, como  $r_0 \leq t \leq r_1$  temos que ou  $f(x, r_0) \leq f(x, t) \leq f(x, r_1)$  ou  $f(x, r_1) \leq f(x, t) \leq f(x, r_0)$ . Além disso, pela escolha de  $U$  sabemos que  $f(x, r_0), f(x, r_1) \in J$ , e como  $J$  é um intervalo obtemos que  $f(x, t) \in J$  como queríamos. □

Vamos então terminar a prova do teorema. Dado  $f : S \rightarrow R$  com  $S \subset R^{n+1}$  temos que conseguir uma decomposição do  $R^{n+1}$  compatível com  $S$ . Podemos pela primeira parte do teorema (que já mostramos valer em  $R^{n+1}$ ) decompor  $S$  em uma quantidade finita de células, e se conseguirmos provar o resultado para cada célula é imediato que o resultado segue para  $S$ . Em uma  $l$ -célula de tal decomposição que não seja aberta podemos usar o homeomorfismo  $p_l$  para reduzirmos o problema ao  $R^{|l|}$  aonde a hipótese de indução resolve o problema (semelhante ao que foi feito na demonstração do lema de finitude uniforme). Vamos então supor que  $S$  é uma célula aberta.

Vamos chamar um ponto  $(p, r) \in S$  de  $f$ -apropriado se existir uma caixa  $C \subset R^n$  e um intervalo  $J = (a, b)$  de  $R$  tal que  $(p, r) \in C \times J$  satisfazendo:

- $C \times J \subset S$
- Dado  $x \in C$  a função  $f_x : J \rightarrow R$  que leva  $t$  em  $f(x, t)$  é contínua e monótona (não necessariamente estrita).
- Dado  $t \in J$  a função  $f_t : C \rightarrow R$  que leva  $x$  em  $f(x, t)$  é contínua.

Chamamos de  $S'$  o conjunto dos pontos de  $S$  que são  $f$ -apropriados. Vamos mostrar que  $S'$  é denso em  $S$ .

Seja  $B \times I$  uma caixa de  $R^{n+1}$  contida em  $S$ ,  $I = (a_0, b_0)$ . Dado  $x \in B$  podemos usar o teorema da monotonicidade para encontrar um  $c_0 \in (a_0, b_0]$  máximo tal que  $f_x$  é contínua e monótona (não excluindo a possibilidade de ser constante) em  $(a_0, c_0)$ . A função que associa para cada ponto  $x \in B$  tal  $c_0$  é definível, vamos denotar por  $\lambda$ .

Pela hipótese de indução na segunda parte do teorema podemos obter uma caixa  $B_0$  contida em  $B$  tal que  $\lambda$  é contínua em tal caixa, e com isso podemos encontrar um  $\eta \in (a_0, b_0)$  tal que  $b \leq \lambda(x)$  em uma caixa contida em  $B_0$  que vamos chamar de  $B_1$ . Novamente pela hipótese de indução na segunda parte do teorema temos que para um elemento  $t \in (a_0, \eta)$ ,  $f_t$  é contínua em uma caixa  $B_2$  contida em  $B_1$ , com isso se  $x \in B_2$  vemos que  $(x, t)$  é  $f$ -apropriado e  $S'$  é denso em  $f$ .

Como  $S'$  é definível e denso podemos pegar uma decomposição de  $R^{n+1}$  compatível com  $S$  e  $S'$ . Novamente basta analisarmos as células abertas, pois as outras podem ser tratadas com o homeomorfismo  $p_1$ . Mas toda célula aberta contida em  $S$  intersecta  $S'$  e pela compatibilidade está contida neste.

Seja então  $D$  uma dessas células, como todo ponto de  $D$  é  $f$ -apropriado conseguimos sempre uma vizinhança de tal ponto na qual as condições do lema 2.13 estão satisfeitas, isso nos dá que  $f$  é contínua em todo ponto de  $D$  concluindo finalmente a demonstração do teorema.

□

Uma generalização imediata do teorema é que dado uma função  $f : S \rightarrow R^m$  onde  $S \subset R^n$  podemos obter decomposição do  $R^n$  compatível com  $f$ .

Para isso escrevemos  $f = (f_1, \dots, f_m)$  e aplicamos a segunda parte do teorema para obter decomposições  $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_m$  compatíveis com cada uma dessas funções, em seguida usamos a primeira parte do teorema para obter uma decomposição compatível com  $\mathcal{D}_0 = \bigcup \mathcal{D}_i$  e tal decomposição será então compatível com  $f$ .

## 2.2 Dimensão e Propriedades Topológicas

Na última seção foi apresentada um método para decompor conjuntos e funções definíveis em partes bem comportadas. Nosso objetivo agora será usar essa decomposição para obter resultados sobre o comportamento topológico de estruturas  $O$ -minimais.

Já foi dito que estruturas  $O$ -minimais possuem propriedades topológicas muito distintas entre si. Em algumas estruturas temos um comportamento bastante complicado; por exemplo  $Q_{al}$  é totalmente desconexo, o intervalo  $[0, 1]$  não é compacto e existem funções contínuas (não definíveis) de  $Q_{al}$  em  $Q_{al}$  que assumem valores positivos e negativos sem nunca se anular. Já em  $\mathbb{R}$  temos que o intervalo  $[0, 1]$  é conexo e compacto, e além disso sabemos que vale o teorema do valor intermediário.

Vimos porém que, em qualquer estrutura  $O$ -minimal, ao nos restringirmos a funções definíveis o teorema do valor intermediário é sempre válido. Vamos ver nessa seção que, ao nos restringimos à categoria dos subconjuntos e funções definíveis, muitas outras propriedades topológicas (ou noções correspondentes a conceitos topológicos) são compartilhadas entre estruturas  $O$ -minimais.

Além de estudarmos propriedades topológicas de conjuntos definíveis vamos também estudar uma propriedade que poderíamos chamar de definível. Introduziremos um conceito de dimensão para conjuntos definíveis. Veremos que esse se comporta de maneira intuitiva, e que, além disso, tal comportamento não depende necessariamente de propriedades topológicas da estrutura.

Um detalhe importante nessa seção são as condições sobre quais desenvolvemos a teoria. Os primeiros resultados obtidos sobre dimensão valem em quaisquer estruturas  $O$ -minimais; porém quando formos estudar propriedades relativas a curvas e conjuntos fechados e limitados precisaremos da hipótese adicional que a estrutura estenda um grupo ordenado, tal também é necessária na última seção.

### 2.2.1 Dimensão

Por enquanto podemos supor  $\mathcal{R}$  uma estrutura  $O$ -minimal. Quando formos explorar propriedades topológicas faremos uso da estrutura de grupo, e em seguida de corpo, explicitaremos adiante quando tais suposições se tornarem necessárias.

Dimensão é um conceito recorrente em diferentes áreas da matemática; quando estudamos variedades diferenciáveis, espaços topológicos, geometria algébrica, espaços vetoriais e muitas outras teorias nos deparamos com diferentes definições de dimensão; essas por sua vez costumam estar acompanhadas de propriedades com certas similaridades. No caso de estruturas  $O$ -minimais não é diferente, e nessa seção exploramos tais ideias.

Em uma estrutura  $O$ -minimal podemos associar dimensão a qualquer conjunto definível da seguinte forma:

**Definição 2.14.** Seja  $S \subset R^n$  um conjunto definível. Definimos a dimensão de  $S$  como

$$\dim(S) = \max\{|l| \in \mathbb{N} : S \text{ contém uma } l\text{-célula}\}$$

Vemos que se  $S \subset R^n$  então  $\dim(S) \leq n$ ; outra consequência imediata é que se  $A \subset S$  então  $\dim(A) < \dim(S)$ .

Tal definição pode não parecer conveniente a primeira vista, já que não é nem mesmo imediato que uma  $l$ -célula possui dimensão  $|l|$ . Vamos então mostrar que propriedades, que intuitivamente gostaríamos de ver verificadas, são de fato válidas. Para isso o próximo lema desempenhará um papel fundamental.

**Lema 2.15.** Se  $E \subset R^n$  é uma célula aberta e  $f : E \rightarrow R^n$  é definível e injetora então  $f(E)$  contém uma célula aberta.

*Demonstração.* A demonstração é feita por indução em  $n$ . Quando  $n = 1$  temos que  $E$  é um intervalo, e portanto infinito, logo sua imagem por  $f$  também é infinita e por ser definível contém um intervalo, i.e. uma (1)-célula.

Suponhamos então que o resultado valha até  $n - 1$ , vamos provar que vale para  $n$ . Temos que  $f(E)$  é definível, e pelo teorema de decomposição em células podemos encontrar decomposição do  $R^n$  compatível com tal conjunto. Digamos que

$$f(E) = D_1 \cup D_2 \dots \cup D_k$$

Nesse caso temos  $E = E_1 \cup E_2 \dots \cup E_k$  onde  $E_i = f^{-1}(D_i)$ .

Tomando uma partição  $\mathcal{D}$  do  $R^n$  compatível com cada  $E_i$  e também com  $f$ . Temos  $E = F_1 \cup \dots \cup F_l$  onde  $F_i \in \mathcal{D}$  e  $F_j \subset E_i$  ou  $F_j \cap E_i = \emptyset$ , para todo par de índices  $i, j$ . Como  $E$  é aberto temos que pelo menos um dos conjuntos  $F_i$  deve conter um aberto. Vamos mostrar então que  $f(F_i) \subset f(E_j) = D_j$  contém um aberto.

Suponha que não seja esse caso, então  $D_j$  é uma  $l_0$ -célula com  $|l_0| < n$ . Nessas condições podemos tomar  $p$  um homeomorfismo de  $D_j$  em uma célula aberta de  $R^{|l_0|}$ . Tome  $B = B' \times (a, b) \subset F_i$  uma caixa aberta, tomando  $p \circ f|_B = g$  obtemos uma função definível injetora de  $B$  em  $R^{n-1}$ . Fixando  $c \in (a, b)$  definimos  $g_c : B' \rightarrow R^{n-1}$ , onde  $B' = \{x \in R^{n-1}; (x, c) \in B\}$ , como  $g_c(x) = g(x, c)$ . Temos que  $g_c$  é contínua, definível e injetora; pois  $g$  possui tais propriedades. Assim, pela hipótese de indução,  $g_c(B_c)$  contém um aberto  $L$ .

Fixemos  $x \in B_c$  tal que  $g_c(x) \in L$ , pela continuidade de  $g$  podemos obter uma caixa em torno de  $(x, c)$  cuja imagem está contida em  $L$  e portanto existe  $c'$  tal que  $g(x, c') \in L$ . Por outro lado  $L$  está contido na imagem de  $g_c$ , o que implica que existe  $y$  tal que  $g(x, c') = g_c(y) = g(y, c)$ , o que contradiz a injetividade de  $g$ . □

Esse lema é o suficiente para provarmos que de fato o conceito de dimensão se comporta da maneira esperada, como veremos nos próximos resultados.

**Teorema 2.16.** *Dados conjuntos  $A \subset R^{n_0}$  e  $B \subset R^{n_1}$  definíveis tais que existe uma bijeção definível  $f$  entre eles temos que  $\dim(A) = \dim(B)$ .*

O enunciado acima nos diz que dimensão é um invariante definível, ou seja é invariante por bijeções definíveis, sem nenhuma exigência sobre continuidade. No entanto a volta do teorema não é verdadeira, dizer quando existe uma bijeção definível entre dois conjuntos é um problema mais sutil e para isso é preciso ser um pouco mais específicos, introduzindo um novo invariante topológico chamado característica de Euler. Mais resultados sobre isso serão apresentados na seção de triangularização.

*Demonstração.* Seja  $a = \dim(A)$  e  $b = \dim(B)$ , vamos provar que  $a \leq b$  e a outra desigualdade segue de maneira completamente análoga através de  $f^{-1}$ .

Seja  $E$  uma  $l$ -célula contida em  $A$  tal que  $|l| = a$ . Temos que  $g = f \circ p_l^{-1}$  é uma função definível injetora saindo de uma célula aberta  $S \subset R^a$  chegando em  $B$ . Se tomarmos uma decomposição do  $R^n$  tal que

$$B = E_1 \cup \dots \cup E_k$$

temos que  $S = f^{-1}(E_1) \cup \dots \cup f^{-1}(E_k)$ , se tomarmos uma decomposição compatível com tais  $f^{-1}(E_i)$  vemos que algum desses conjuntos deve conter uma caixa aberta  $B \subset R^a$ .

Temos assim  $B \subset f^{-1}(E_i)$ , para algum  $i$ , seja então  $E_i$  uma  $l_0$ -célula. Basta mostrarmos que  $a \leq |l_0|$  já que  $|l_0| \leq b$ .

Suponha que não seja o caso, i.e.  $|l_0| < a$ . Temos que  $p_{l_0} \circ g|_B$  é uma função injetora definível de um aberto de  $R^a$  em  $R^{l_0}$ . Pelo lema 2.15 a imagem de tal função contém uma  $l_1$ -célula com  $|l_1| = a$ , mas isso nos dá uma contradição pois tal imagem está contida em  $R^{l_0}$  e  $|l_0| < a$ . □

Algumas outras propriedades adicionais sobre tal conceito são dadas por:

**Teorema 2.17.** *Sejam  $X, Y \subset R^n$  e  $Z \subset R^m$  conjuntos definíveis, temos que:*

1. Uma  $l$ -célula  $D$  do  $R^n$  possui dimensão  $|l|$ .
2.  $\dim(X \cup Y) = \max(\dim(X), \dim(Y))$ .
3. Dada uma decomposição do  $R^n$  compatível com  $X$ , existe uma célula  $D \subset X$  em tal decomposição com  $\dim(D) = \dim(X)$ .

*Demonstração.* Vamos demonstrar cada um dos casos separadamente.

1. Temos que  $p_l : R^n \rightarrow R^{|l|}$  é um homomorfismo definível e que  $p_l(D)$  é um aberto de  $R^{|l|}$  e portanto possui dimensão  $|l|$ . Como dimensão é um invariante definível segue que  $D$  possui dimensão  $|l|$ .
2. Primeiro vemos que  $\dim(A \cup B) \geq \max(\dim(A), \dim(B))$  já que  $A \subset A \cup B$  e o mesmo para  $B$ .

Para a outra desigualdade tome  $D$  uma  $l$ -célula contida em  $A \cup B$  com  $|l| = \dim(A \cup B)$  e seja  $p_l$  o homeomorfismo de  $D$  em um aberto de  $R^{|l|}$ . Temos que  $p_l^{-1}(A)$  e  $p_l^{-1}(B)$  são conjuntos definíveis de  $R^{|l|}$ , logo podemos tomar uma decomposição  $\mathcal{D}$  de  $R^{|l|}$  compatível com  $p_l^{-1}(D)$ ,  $p_l^{-1}(A)$  e  $p_l^{-1}(B)$ .

Como  $p_l^{-1}(D)$  é um aberto e  $p_l^{-1}(D) \subset p_l^{-1}(A) \cup p_l^{-1}(B)$  existe uma célula aberta  $D_0 \in \mathcal{D}$  tal que  $D_0 \subset p_l^{-1}(D)$  e, ou  $D_0 \subset p_l^{-1}(A)$  ou  $D_0 \subset p_l^{-1}(B)$ , vamos supor que seja o primeiro caso. Temos assim  $p_l(D_0) \subset A$  e como  $D_0$  é um aberto de  $R^{|l|}$  e  $p_l$  é definível e bijetora temos que

$$\dim(A) \geq \dim(p_l(D_0)) = \dim(D_0) = |l| = \dim(A \cup B)$$

3. Temos que  $X = D_1 \cup \dots \cup D_k$  para células  $D_i \in \mathcal{D}$ , mas acabamos de ver que nesse caso  $\dim(X) = \max(\dim(D_1), \dots, \dim(D_k))$  e portanto uma dessas células possui dimensão igual a de  $X$ .

□

Como mencionamos anteriormente, utilizaremos resultados ligados ao comportamento de fibras constantemente durante o texto. Por esse motivo vamos apresentar agora resultados ligados ao comportamento da dimensão de fibras em conjuntos definíveis.

Para tanto dado  $S \subset R^m \times R^n$  definimos o conjunto  $S(d)$  como

$$S(d) = \{a \in R^m : \dim(S_a) = d\}$$

**Lema 2.18.** *Seja  $S \in R^m \times R^n$  e  $S(d)$  como acima, então  $S(d)$  é definível para todo  $d$  e vale que*

$$\dim\left(\bigcup_{a \in S(d)} \{a\} \times S_a\right) = \dim(S_d) + d \quad (2.6)$$

*Demonstração.* Dada uma  $(i_1, \dots, i_m, i_{m+1}, \dots, i_{m+n})$ -célula  $C$  de  $R^{m+n}$  temos que sua projeção  $\pi_m(C)$  em  $R^m$  é uma  $(i_1, \dots, i_m)$ -célula enquanto a fibra  $C_a$  contida em  $R^n$  é uma  $(i_{m+1}, \dots, i_{m+n})$ -célula para todo  $a \in \pi_m(C)$  (isso pode ser verificado facilmente por indução), de onde concluímos que  $\dim(C) = \dim(\pi_m(C)) + \dim(C_a)$  para qualquer  $a \in \pi_m(C)$ .

Tome  $\mathcal{D}$  uma decomposição do  $R^{m+n}$  compatível com  $S$  e seja  $A \in \pi(\mathcal{D})$  uma célula do  $R^m$ . Temos que  $A = \pi_m(C_1^A) = \dots = \pi_m(C_k^A)$  para células  $C_1^A, \dots, C_k^A$  de  $\mathcal{D}$  e portanto  $S_a = \bigcup (C_i^A)_a$  para qualquer  $a \in A$ . Temos assim

$$\dim(S_a) = \sup_i (\dim((C_i^A)_a)) = \sup_i (\dim(C_i^A) - \dim(A)) = \sup_i (\dim(C_i^A)) - \dim(A)$$

onde a última igualdade segue da observação feita no primeiro parágrafo.

Mas a última parte dessa igualdade não depende de  $a$ , vemos assim que  $\dim(S_a)$  é constante em  $A$ , e como temos apenas um número finito de células contidas em  $\pi_m(\mathcal{D})$  vemos que  $S(d)$  nada mais é do que a união de todas as células de  $\pi_m(\mathcal{D})$  tais que  $\dim(S_a) = d$ , ou seja uma união finita de células, e portanto definível.

Vamos agora verificar a igualdade enunciada no lema. Tome  $\mathcal{D}(d)$  o conjunto das células  $A \in \pi_m(\mathcal{D})$  tais que  $S(d) = \bigcup_{A \in \mathcal{D}(d)} A$ . Temos então que

$$\begin{aligned} \dim\left(\bigcup_{a \in S(d)} \{a\} \times S_a\right) &= \dim\left(\bigcup_{A \in \mathcal{D}(d)} \left(\bigcup_{a \in A} \{a\} \times S_a\right)\right) = \sup_{A \in \mathcal{D}(d)} \dim\left(\bigcup_{a \in A} \{a\} \times S_a\right) = \\ \sup_{A \in \mathcal{D}(d)} \dim\left(\bigcup_i C_i^A\right) &= \sup_{A \in \mathcal{D}(d)} [\sup_i (\dim(C_i^A))] = \sup_{A \in \mathcal{D}(d)} [\dim(S_a) + \dim A] = \\ \sup_{A \in \mathcal{D}(d)} [d + \dim A] &= d + \dim S(d) \end{aligned}$$

□

Utilizaremos esse lema adiante, ao estudarmos triangularizações. Outro resultado que precisaremos no decorrer do texto é:

**Lema 2.19.** *Dado  $S \subset \mathbb{R}^{m+n}$  definível temos*

- $\dim(S) = \sup_{0 \leq d \leq n} [\dim(S(d)) + d]$
- $\dim(A \times B) = \dim(A) + \dim(B)$

*Demonstração.* Temos que  $S = \bigcup_{0 \leq d \leq n} [\bigcup_{a \in S(d)} (a \times S_a)]$  logo

$$\dim(S) = \sup_{0 \leq d \leq n} (\dim([\bigcup_{a \in S(d)} (a \times S_a)])) = \sup_{0 \leq d \leq n} (\dim(S(d)) + d)$$

O segundo item é imediato do primeiro notando que quando  $S = A \times B$  temos que  $S(\dim(B)) = A$  e  $S(d) = \emptyset$  para qualquer outro  $d$ .

□

Intuitivamente poderíamos que dado um conjunto  $X$  sua fronteira,  $\delta(X) = cl(X) - X$ , tenha dimensão estritamente menor que o conjunto  $X$ . Porém de maneira geral alguns exemplos vão contra tal intuição; podemos por exemplo tomar em  $\mathbb{R}^2$  o gráfico da função  $\text{sen}(1/x)$  no intervalo  $(0, 1]$ , temos que a fronteira desse conjunto é  $\{0\} \times [0, 1]$ , e é de se esperar que um conceito apropriado de dimensão diga que ambos conjuntos possuem a mesma dimensão. Por outro lado sabemos que o gráfico de  $\text{sen}(1/x)$  não pode ser definido em uma estrutura  $O$ -minimal; vamos ver agora que, ao nos restringirmos conjuntos definíveis, é de fato verdade que  $\dim(\delta(S)) < \dim(S)$ .

Para isso precisamos de um resultado relacionando a fronteira de um conjunto com suas fibras. Um detalhe curioso sobre a sua demonstração é que, em certo momento, precisaremos formar conjuntos de caixas do  $\mathbb{R}^n$ ; obviamente não faz sentido perguntar se tais conjuntos são definíveis e com isso não poderíamos utilizar os resultados desenvolvidos até então. A solução para essa dificuldade consiste em parametrizar as caixas de  $\mathbb{R}^n$  através de um subconjunto definível de  $\mathbb{R}^{2n}$ .

**Lema 2.20.** *Dado um conjunto definível  $S$  do  $\mathbb{R}^n$  temos que  $S' = \{a \in \mathbb{R} : \delta(S)_a \neq \delta(S_a)\}$  é finito.*

*Demonstração.* Dado um elemento  $b \in \delta(S_a)$  é fácil ver que  $(a, b) \in \delta(S)$  e portanto  $\delta(S_a) \subset \delta(S)_a$ .

Temos que  $S'$  é definível, vamos supor que seja infinito, nesse caso deve conter um intervalo  $I$ , nos restringindo a  $\pi^{-1}(I) \cap S$  obtemos um novo conjunto definível e substituindo  $S$  por esse conjunto temos que  $\delta(S)_a \neq \delta(S_a)$  para todo  $a \in \pi(S) = I$ . Como  $\delta(S_a) \subset \delta(S)_a$  temos que  $S^a = \delta(S)_a - \delta(S_a)$  é um subconjunto definível do  $\mathbb{R}^{n-1}$  não vazio, e em particular para todo  $x \in S^a$  existe uma caixa  $B$  contendo  $x$

que não intersecta  $S_a$ . Dada uma caixa  $B$  de  $R^{n-1}$  tome o subconjunto  $I_B = \{a \in R : (B \cap S^a \neq \emptyset) \wedge (B \cap S_a = \emptyset)\}$

Vamos mostrar que  $I_B$  é sempre finito. Suponha que não seja o caso, como esse conjunto é definível podemos tomar  $I_0$  um intervalo contido em  $I_B$ , em particular  $I_0 \times B$  não intersecta  $S$  e como é aberto também não intersecta  $cl(S)$ . Por outro lado dado um elemento  $a$  de  $I_0$  temos que  $B \cap S^a \neq \emptyset$ , em particular deve existir um elemento  $b \in B$  tal que  $(a, b) \in cl(S)$  mas isso contradiz a afirmação acima.

Como já mencionamos não faz nenhum sentido perguntarmos se o conjunto das caixas é definível, porém podemos contornar esse problema utilizando a seguinte parametrização das caixas de  $R^{n-1}$  através do conjunto

$$G = \{(c_1, \dots, c_{n-1}, d_1, \dots, d_{n-1}) \in R^{2(n-1)} : c_i < d_i\}$$

e da função  $g$  que leva  $(c_1, \dots, c_{n-1}, d_1, \dots, d_{n-1})$  em  $(c_1, d_1) \times \dots \times (c_{n-1}, d_{n-1})$ . Podemos assim formar o seguinte conjunto definível

$$C = \bigcup_{(\bar{c}, \bar{d}) \in G} I_{g(\bar{c}, \bar{d})} \times \{(\bar{c}, \bar{d})\} \subset R^{1+2(n-1)}$$

Queremos mostrar que o interior de  $C_a$  não é vazio para  $a \in I$ . Tome  $(\bar{c}, \bar{d})$  um ponto em  $C_a$ , isso quer dizer que  $a \times (\bar{c}, \bar{d}) \in C$ , ou seja  $a \in I_{g(\bar{c}, \bar{d})}$  o que é o mesmo que dizer que existe  $y \in g(\bar{c}, \bar{d}) \cap S^a$  e  $g(\bar{c}, \bar{d}) \cap S_a = \emptyset$ , mas qualquer caixa contida em  $g(\bar{c}, \bar{d})$  contendo  $y$  também satisfaz essas propriedades, e portanto os elementos  $(\bar{c}', \bar{d}')$  correspondentes a essas caixas dão uma vizinhança de  $(\bar{c}, \bar{d})$  contida em  $C_a$ .

Isso implica que a dimensão de  $C_a$  é  $2(n-1)$  para  $a \in I$ , já a dimensão de  $I$  é 1 e pelo lema 2.18 temos que a dimensão de  $C$  deve ser  $1 + 2(n-1)$ . Por outro lado vimos que  $I_{g(\bar{c}, \bar{d})}$  é sempre finito, o que significa que se olharmos para

$$C' = \bigcup_{(\bar{c}, \bar{d}) \in G} \{(\bar{c}, \bar{d})\} \times I_{g(\bar{c}, \bar{d})}$$

temos um conjunto aonde as fibras possuem dimensão 0 e novamente por 2.18 temos que a dimensão desse conjunto deve ser igual à dimensão de  $G \leq 2(n-1)$ , mas a dimensão desse conjunto é obviamente igual à de  $C$ , o que é uma contradição.

□

Com esse lema podemos finalmente provar o resultado mencionado anteriormente.

**Teorema 2.21.** *Dado um conjunto definível  $S \subset R^n$  temos que  $dim(\delta(S)) < dim(S)$ .*

*Demonstração.* A demonstração é feita por indução em  $n$ . Quando  $n = 1$  temos que  $S$  é uma união finita de intervalos e pontos,  $\delta(S)$  é o conjunto dos pontos que são extremos de algum intervalo de  $S$  mas não pertencem a  $S$ , em particular se  $dim(S) = 0$  temos  $\delta(S) = \emptyset$  e se  $dim(S) = 1$  temos  $\delta(S)$  no máximo uma coleção finita de pontos. De qualquer modo  $dim(\delta(S)) < dim(S)$ .

Vamos então supor que o resultado é válido para todo  $m < n$  e vamos provar que vale para  $n$ . Considere a permutação  $s_i : R^n \rightarrow R^n$  que leva  $(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$  em  $(x_i, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$  para  $1 \leq i \leq n$ , e tome  $s_i(S)$  a imagem de  $S$  por essas permutações. Pelo lema anterior podemos saber que existe um conjunto finito  $F_i$  tal que  $\delta(s_i(S))_a = \delta((s_i(S))_a)$  para todo  $a \notin F_i$ . Definimos  $F = F_1 \times \dots \times F_n$ , e como cada  $F_i$  é finito temos que  $F$  é um subconjunto finito  $R^n$ . Uma outra maneira equivalente de escrevermos  $F$  é

$$F = (F_1 \times R^{n-1}) \cap (R \times F_2 \times R^{n-2}) \cap \dots \cap (R^{i-1} \times F_i \times R^{n-i}) \cap \dots \cap (R^{n-1} \times F_n)$$

é imediato que em ambos os casos os elementos de  $F$  são  $(a_1, \dots, a_n)$  onde  $a_i \in F_i$ . Abreviaremos  $(R^{i-1} \times F_i \times R^{n-i})$  por  $H_i$ .

Temos a seguinte inclusão (válida para qualquer conjunto,  $\delta(S)$  não desempenha nenhum papel especial aqui)

$$\delta(S) \subset H \cup (\delta(S) - H) = H \bigcup_{1 \leq i \leq n} (\delta S - H_i)$$

Com isso sabemos que

$$\begin{aligned} \dim(\delta(S)) &\leq \dim(H \cup_{1 \leq i \leq n} (\delta S - H_i)) = \max(\dim(H), \max_i(\dim(\delta S - H_i))) = \\ &= \max_i(\dim(\delta S - H_i)) \end{aligned}$$

Por outro lado temos que esses conjuntos estão contido em  $\delta(S)$ , de onde segue que  $\dim(\delta(S)) = \dim(\delta S - H_{i_0})$  para algum  $i_0$ . Basta então mostrarmos que  $\dim(\delta S - H_i) < \dim(S)$  para todo  $i$ .

Temos que  $\delta(S) - H_i = \{(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n) \in \delta(S) : a_i \notin F_i\}$ , em particular

$$s_i(\delta(S) - H_i) = \{(a_i, a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n) \in s_i(\delta(S)) : a_i \notin F_i\}$$

Note que  $\delta$  e  $s_i$  comutam, portanto se  $a \notin F_i$  temos que

$$s_i(\delta(S) - H_i)_a = s_i(\delta(S))_a = \delta(s_i(S))_a = \delta(s_i(S)_a) = s_i(\delta(S_a))$$

e se  $a \in F_i$  então  $s_i(\delta(S) - H_i)_a = \emptyset$ .

Mas  $S_a \in R^{n-1}$  e podemos então supor que  $\dim(\delta(S_a)) < \dim(S_a)$ . Por outro lado temos que

$$s_i(\delta(S) - H_i) = \bigcup_{a \in F_i} \{a\} \times s_i(\delta(S))_a$$

E como  $F_i$  é finito, e  $s_i$  preserva dimensões vemos que

$$\dim(\delta(S) - H_i) = \max(\dim_{a \in F_i}(\{a\} \times \delta(S)_a)) = \max_{a \in F_i}(\dim(\delta(S)_a)) < \max_{a \in F_i}(\dim(S_a)) \leq \dim(S)$$

□

### 2.2.2 Escolha Definível e Seleção de Curvas

Nessa subseção vamos finalmente começar a explorar propriedades topológicas de estruturas  $O$ -minimais. Em particular veremos que conjuntos fechados e limitados possuem um comportamento análogo ao de conjuntos compactos; veremos também que podemos utilizar curvas definíveis para estudar propriedades topológicas, de maneira semelhante ao que fazemos com sequências em espaços topológicos separáveis.

Para obter esses resultados vamos precisar de uma hipótese adicional; mais especificamente vamos supor que a estrutura  $\mathcal{R}$  estende um grupo ordenado, i.e. possui uma função binária satisfazendo os axiomas da teoria de grupos que respeita a ordem. A partir desse ponto vamos sempre supor que  $\mathcal{R}$  estende um grupo.

O seguinte resultado servirá de base para essas investigações.

#### **Teorema 2.22.** *Escolha definível*

*Dado  $S \subset R^m \times R^n$  um subconjunto definível tal que  $\pi_m(S) = S_0$ , onde  $\pi_m : R^{m+n} \rightarrow R^m$  é a projeção nas  $m$  primeiras coordenadas, existe uma função definível  $E_S : S_0 \rightarrow R^n$  tal que  $(x, f(x)) \in S$  para todo  $x \in S_0$ .*

Se olharmos para  $S_0$  como um conjunto de parâmetros, o que o teorema nos dá é justamente uma função definível que para cada parâmetro  $x$  escolhe um elemento  $(x, f(x))$  em  $S$ . O que sugere a terminologia "escolha definível", comum na teoria de modelos; muitas vezes também o termo "função de Skolem definível" também é utilizado.

*Demonstração.* Para demonstrar tal teorema vamos fazer uso da estrutura de grupo juntamente de algumas propriedades de fibras. A demonstração é feita, como sempre, por indução em  $n$ .

- $n = 1$  Nesse caso precisamos escolher  $E_S(x)$  pertencente a  $S_x$ , e vamos chamar tal função de  $e$ .  $S_x$  é um conjunto definível de  $R$  e portanto uma união finita de intervalos e pontos. Temos que  $S_0$  se divide em 5 conjuntos definíveis disjuntos, o primeiro sendo

$$\{x \in S_0 : S_x \text{ possui ponto de mínimo}\}$$

para esse conjunto podemos por  $e(x)$  como o mínimo de  $S_x$ .

No caso de  $S_x$  não possuir ponto de mínimo temos que existe um intervalo "mais a esquerda" em  $S_x$  (i.e. dentro a coleção finita de intervalos disjuntos de  $S_x$  existe um cujos pontos são menores do que quaisquer pontos de outros intervalos), vamos chamar tal intervalo de  $(a_x, b_x)$ , temos então os outros quatro conjuntos disjuntos de  $R$  onde um dos casos abaixo se aplica a todo  $x$ .

1.  $a_x, b_x \in R$ , definimos  $f(x) = (a_x + b_x)/2$
2.  $a_x = -\infty$  e  $b_x \in R$ , definimos  $f(x) = b_x - k$
3.  $a_x \in R$  e  $b_x = \infty$ , definimos  $f(x) = a_x + k$
4.  $a_x = -\infty$  e  $b_x = \infty$ , definimos  $f(x) = k$

Onde  $k$  denota um elemento positivo qualquer do grupo. Lembre que se  $\mathcal{R}$  estende um grupo então tal grupo é divisível, e por isso podemos tomar a divisão utilizada acima. Em todos os casos temos que  $e$  é definível e  $e(x) \in S_x$ . Colando  $e$  nos 5 conjuntos obtemos a função desejada.

- $n - 1$  implica  $n$

Tome  $S' = \pi_{m+n-1}(S) \subset R^m \times R^{n-1}$ , onde  $\pi_{m+n-1}(S)$  é a projeção nas  $(m+n-1)$  primeiras coordenadas. Pela hipótese de indução existe  $E_{S'}$  função definível que escolhe para cada  $x \in S_0$  um elemento  $E_{S'}(x)$  de  $S'_x$ .

Considere também  $S'' = S_0 \times S_1 \subset R^{m+1}$  onde  $S_1$  é a projeção de  $S$  na última coordenada, vimos no item anterior que  $e$  é uma função de escolha definível em tal conjunto.

Assim basta tomarmos  $E_S(x) = (E_{S'}(x), e(x))$ .

□

Com isso podemos provar um primeiro resultado mostrando a importância de curvas definíveis em teorias  $O$ -minimais; esse resultado será muito útil na sequência do texto.

**Teorema 2.23.** *Dado um conjunto definível  $X$  e um ponto  $p$  em  $cl(X) - X$  existe  $\epsilon \in R$ ,  $\epsilon > 0$  e uma função contínua definível injetora  $\gamma : (0, \epsilon) \rightarrow X$  tal que  $\lim_{x \downarrow 0} \gamma(x) = p$ .*

Uma função  $\gamma : I \rightarrow R^n$ , onde  $I$  é um intervalo é chamada uma curva. Quando a função for definível dizemos que é uma curva definível, de maneira análoga usamos os nomes curva injetora e curva contínua. Outra notação que vamos usar é  $\gamma(x) \rightarrow p$  para  $\lim_{t \downarrow a} \gamma(t) = p$ , onde  $I = (a, b)$ .

Note que existe um resultado análogo para sequências em espaços topológicos separáveis. Porém não existem tais coisas como sequências definíveis em teorias  $O$ -minimais; por esse motivo utilizamos curvas, que se mostram um substituto mais do que adequado.

*Demonstração.* Como  $p \in cl(X) - X$  o conjunto  $\{|x - p| \in R : x \in X\}$  contém elementos arbitrariamente pequenos, e como esse conjunto é definível ele contém um intervalo do tipo  $(0, \epsilon_0)$ .

Considere o conjunto definível

$$X_0 = \{(|x - p|, x) \in R^{n+1} : x \in X\}$$

Por escolha definível temos uma função definível  $\gamma$  de  $\pi_1(X_0)$  em  $X$  com  $(t, \gamma(t)) \in X_0$ . Acabamos de ver que tal projeção na primeira coordenada contém um intervalo  $(0, \epsilon_0)$ , e por monotonicidade existe um  $\epsilon$  tal que  $\gamma|_{(0, \epsilon)}$  é contínua e injetora. Note que  $|\gamma(t) - p| = t$  logo  $\lim_{t \downarrow 0} \gamma(t) = p$ .

□

Nessa demonstração usamos o teorema de escolha definível exatamente como ele está enunciado, na maioria dos casos vamos emitir alguns detalhes.

O próximo resultado possui uma demonstração bastante parecida e também nos dá uma versão para curvas de um resultado conhecido para sequências em espaços topológicos separáveis.

**Lema 2.24.** *Seja  $f : X \rightarrow Y$  uma função definível e  $p \in X$ . Temos que  $f$  é contínua em  $p$  se e só se dada qualquer curva  $\gamma : I \rightarrow X$  com  $\gamma \rightarrow p$  então  $f \circ \gamma : I \rightarrow Y$  é tal que  $f \circ \gamma \rightarrow f(p)$ .*

*Demonstração.* Vejamos primeiro o caso em que  $f$  é contínua. Temos que dada uma curva  $\gamma : (a, b) \rightarrow X$  existe  $b_0$  tal que  $\gamma$  é contínua em  $(a, b_0)$ , assim a composta  $f \circ \gamma|_{(a, b_0)}$  é contínua e portanto  $\lim_{t \downarrow 0} f(\gamma(t)) = f(p)$

Suponha então que  $f$  não é contínua, vamos encontrar  $\gamma$  com  $\gamma \rightarrow p$  mas que não satisfaça  $f \circ \gamma \rightarrow f(p)$ . Já que  $f$  não é contínua podemos encontrar um  $\epsilon > 0$  tal que o conjunto

$$\{|x - p| \in R : x \in X \wedge |f(x) - f(p)| > \epsilon\}$$

possua elementos arbitrariamente pequenos.

Como tal conjunto é definível ele contém um intervalo  $I = (0, b_0)$  e por escolha definível podemos tomar  $\gamma : I \rightarrow X$  tal que  $|\gamma(t) - p| = t$  e  $|f(\gamma(t)) - f(p)| > \epsilon$ , mas assim é imediato que  $\gamma \rightarrow p$  mas não é o caso que  $f \circ \gamma \rightarrow f(p)$ .

□

Tais resultados, além de serem extremamente úteis para o restante do texto, ilustram de maneira clara a analogia entre sequências em espaços separáveis e curvas em estruturas  $O$ -minimais.

Existe outra analogia que estamos interessados, a analogia entre conjuntos compactos e conjuntos fechados e limitados. Em  $\mathbb{R}$  sabemos que as duas noções coincidem, graças ao teorema de Heine-Borel. Porém isso não é verdade no caso de uma estrutura  $O$ -minimal qualquer (mesmo nos atendo a conjuntos definíveis).

Um contra exemplo fácil pode ser visto em  $\mathbb{Q}_{al}$ , onde o intervalo  $[0, 1]$  não é compacto. Para isso basta tomar uma sequência  $a_i$  tendendo a um número não algébrico de tal intervalo ( $\pi/4$  por exemplo) pela direita, e  $b_i$  uma sequência tendendo ao mesmo número pela esquerda; temos que o conjunto dado pelos abertos

$$\{(-1, a_1), \dots, (-1, a_n), \dots, (b_1, 2), \dots, (b_n, 2), \dots\}$$

é um recobrimento de  $[0, 1]$  que não possui subrecobrimento finito. Também não é difícil obter contraexemplos em outras estruturas como  $\mathbb{R}(x)$  e modelos não-standard dos reais. Na verdade é comum, em muitas estruturas  $O$ -minimais, que somente os conjuntos finitos sejam compactos.

Temos assim que conjuntos compactos formam classes muito diversas em diferentes estruturas  $O$ -minimais, o que dificulta um estudo uniforme, além de diminuir o interesse de tais conjuntos. Porém veremos que ao nos restringir a categoria de funções e conjuntos definíveis em uma estrutura  $O$ -minimal muitas das principais propriedades de compactos são compartilhadas por conjuntos fechados e limitados. Tal semelhança faz com que alguns autores chamem tais conjuntos de definivelmente compactos. O próximo teorema ilustra bem o que acabamos de dizer.

**Teorema 2.25.** *Se  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  é definível, contínua e tem domínio  $X \subset \mathbb{R}^m$  fechado e limitado então sua imagem  $f(X)$  também é fechada e limitada.*

Para provarmos que a imagem é fechada precisamos do lema abaixo que vamos enunciar sem provar. Tal demonstração não é complicada (tão pouco é instrutiva) e pode ser encontrada no quinto capítulo de [vdD98].

**Lema 2.26.** *Dada uma célula  $Y \subset \mathbb{R}^n$  limitada temos que  $\pi(\text{cl}(Y)) = \text{cl}(\pi(Y))$ , onde  $\pi$  é alguma projeção.*

*Demonstração do teorema 2.25.* Vamos mostrar primeiro que  $f$  possui imagem limitada. Suponha que não seja o caso, então para todo  $t \in \mathbb{R}$  existe  $x \in X$  tal que  $f(x) > t$ , por escolha definível podemos obter uma função  $g : \mathbb{R} \rightarrow X$  tal que  $f \circ g(t) > t$ , e por monotonicidade, mais explicitamente escrevendo  $g = (g_1, \dots, g_n)$  e aplicando monotonicidade a cada coordenada, vemos que  $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t)$  existe, e como  $g$  nos dá uma curva em  $X$  e esse é fechado e limitado o limite acima é finito e pertence a  $X$ .

Seja então  $x = \lim_{t \rightarrow \infty} g(t)$ , temos que  $f(x) = f(\lim_{t \rightarrow \infty} g(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(g(t))$ , mas  $f(g(t)) > t$  e portanto tal limite diverge.

Falta verificarmos que a imagem é fechada. Considere o conjunto  $\tau_-(f) = \{(f(x), x) : x \in X\}$ , o "gráfico reverso de  $f$ ", assim como o gráfico de toda função em um espaço de Hausdorff é fechado não é difícil verificar que o mesmo vale para  $\tau_-(f)$ , além disso vimos acima que esse conjunto é limitado. Tome então  $\mathcal{D}$  uma decomposição do  $\mathbb{R}^{n+m}$  compatível com  $\tau_-(f)$ , e seja

$$\tau_-(f) = Y_1 \cup \dots \cup Y_n, \text{ tal que } Y_i \in \mathcal{D}$$

Note que cada  $Y_i$  é limitada pois  $\tau_-(f)$  é limitado. Temos que

$$\tau_-(f) = \text{cl}(\tau_-(f)) = \text{cl}(Y_1 \cup \dots \cup Y_n) = \text{cl}(Y_1) \cup \dots \cup \text{cl}(Y_n)$$

Mas pelo lema 2.26 temos

$$f(X) = \pi(\tau_-(f)) = \pi(\text{cl}(Y_1)) \cup \dots \cup \pi(\text{cl}(Y_n)) = \text{cl}(\pi(Y_1)) \cup \dots \cup \text{cl}(\pi(Y_n))$$

Onde  $\pi : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma projeção. Temos assim que  $f(X)$  é fechado.  $\square$

Uma consequência imediata desse teorema é que se  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  é definível e contínua com  $X$  fechado e limitado, então  $f(X)$  assume máximo e mínimo. Temos abaixo algumas outras consequências bastante interessantes desse teorema.

**Corolário 2.27.** *Seja  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  definível e contínua, com  $X$  um conjunto fechado e limitado.*

- Um conjunto  $A \subset f(X)$  é fechado se e só se  $f^{-1}(A)$  é fechado.
- Se  $f$  é injetora, então  $f$  é um homeomorfismo sobre a sua imagem.
- Dado  $g : f(X) \rightarrow \mathbb{R}^p$  definível temos que  $g$  é contínua se e só se  $f \circ g$  é contínua.

*Demonstração.* O primeiro item é imediato do teorema e da continuidade de  $f$ . O segundo item segue facilmente do primeiro. Para o terceiro note que  $g$  é contínua se e só se a pré imagem de qualquer fechado é fechado, mas caso exista um fechado  $Y$  de  $\mathbb{R}^p$  tal que  $g^{-1}(Y)$  não é fechado então pelo primeiro item temos que  $f^{-1}(g^{-1}(Y))$  não é fechado e portanto  $f \circ g$  não é contínua, a outra implicação é óbvia.  $\square$

### 2.2.3 Conjuntos Definivelmente Conexos

Vimos acima que compacidade, no sentido topológico, não é um conceito interessante em estruturas O-minimais; tratamos o problema substituindo a noção usual por outra adequada ao nosso contexto. Nosso foco agora será outro conceito topológico, o de conexidade, veremos que, também nesse caso, é útil substituir a noção usual de conexidade por uma adequada ao nosso contexto; a de conexidade definível.

Em muitas estruturas  $O$ -minimais, como  $\mathbb{Q}_{nl}$ ,  $\mathbb{R}(x)$  e modelos não-standard de  $\mathbb{R}$ , o intervalo  $[0, 1]$  não é conexo. No caso de  $\mathbb{Q}_{nl}$  podemos dividi-lo entre os elementos menores que  $\pi/4$  e os maiores, tal divisão nos dá uma partição do intervalo em abertos disjuntos. Em modelos não-standard de  $\mathbb{R}$  temos que o conjunto de pontos infinitesimalmente próximos a um dado elemento  $x$  é aberto, se denotarmos tais conjunto por  $m(x)$  temos que  $\{m(x) : x \in [0, 1] \cap \mathbb{R}\}$  forma uma desconexão do intervalo. O caso dos polinômios possui um contra-exemplo análogo. De toda maneira já vimos que em qualquer estrutura  $O$ -minimal os intervalos são definivelmente conexos, e veremos agora que ao nos restringirmos a tal obtemos uma gama de resultados familiares. Alguns resultados nessa direção, como a conexão definível de intervalos e células, já foram obtidos.

Queremos definir uma componente definivelmente conexa de um dado conjunto como um subconjunto definivelmente conexo maximal. Para tal definição fazer sentido precisaríamos que a união qualquer de conjuntos definivelmente conexos fosse definivelmente conexo, o problema de tal resultado é que não é o caso nem mesmo que uma união qualquer de conjuntos definíveis é definível. O resultado abaixo resolverá o problema.

**Teorema 2.28.** *Seja  $X \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto definível, existe uma partição de  $X$  em  $X_1, \dots, X_l$  tal que cada  $X_i$  é definível, aberto-fechado em  $X$  e definivelmente conexo. Tal decomposição é única.*

Vamos provar na verdade um pouco mais do que o resultado acima, veremos que os subconjuntos  $X_i$  são definivelmente conexos por caminho, uma condição mais forte.

**Definição 2.29.** Se  $X \subset \mathbb{R}^n$  é definível dizemos que  $X$  é definivelmente conexo por caminhos se dados dois pontos  $x_0, x_1 \in X$  existe uma função contínua definível  $f : [a, b] \rightarrow X$  tal que  $f(a) = x_0$  e  $f(b) = x_1$

Note que, assim como no caso usual da topologia, uma desconexão definível em um conjunto definivelmente conexo por caminhos nos daria uma desconexão definível em  $[a, b]$ ; portanto um conjunto definivelmente conexo por caminhos é definivelmente conexo.

Dadas duas curvas  $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow X$  ligando  $x_0$  a  $x_1$  e  $\gamma_2 : [c, d] \rightarrow X$  ligando  $x_1$  a  $x_2$  podemos definir uma curva ligando  $x_0$  a  $x_2$  tomando  $\gamma : [a, b + (d - c)] \rightarrow X$  tal que  $\gamma(t) = \gamma_1(t)$  se  $a \leq t \leq b$  e  $\gamma(t) = \gamma_2(t + (c - b))$  se  $b < t \leq b + (d - c)$ . Tal curva será chamada a concatenação de  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ .

Antes de provar o teorema 2.28 precisamos do seguinte lema.

**Lema 2.30.** *Toda célula é definivelmente conexa por caminhos.*

*Demonstração.* (De 2.30)

Como sempre faremos por indução. O caso em que  $n = 1$  é trivial. Uma célula  $C$  de  $\mathbb{R}^n$  pode ser de dois tipos, ou  $C = \tau(f)$  onde  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função definível contínua e  $X$  é uma célula de  $\mathbb{R}^{n-1}$ , ou  $C = (f, g)$  onde  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  são funções definíveis contínuas e  $X$  é uma célula de  $\mathbb{R}^{n-1}$ .

No primeiro caso dados pontos  $x_0$  e  $x_1$  de  $C$  sabemos que existe uma função definível contínua  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$  com  $\gamma(a) = \pi(x_0)$  e  $\gamma(b) = \pi(x_1)$  pois  $X$  é definivelmente conexo por caminhos pela hipótese de indução. Temos então que  $(\gamma, f \circ \gamma)$  é a função que queremos.

No segundo caso temos que também existe  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$  com  $\gamma(a) = \pi(x_0)$  e  $\gamma(b) = \pi(x_1)$ , podemos por escolha definível tomar uma função  $\theta_0 : X \rightarrow \mathbb{R}$  de forma que  $f(x) < \theta_0(x) < g(x)$  e  $(\gamma(a), \theta_0(\gamma(a))) = x_0$  e  $(\gamma(b), \theta_0(\gamma(b))) = x_1$  (podemos obviamente especificar o valor desejado de  $\theta$  em um número finito de pontos), assim  $(x, \theta_0(x)) \in C$ , chame a função que leva  $x$  em  $(x, \theta_0(x))$  de  $\theta$ . Temos que  $\theta \circ \gamma : I \rightarrow C$  é uma função definível satisfazendo  $\theta \circ \gamma(a) = x_0$  e  $\theta \circ \gamma(b) = x_1$ , o único problema é que tal função não precisa ser contínua. Pelo teorema de monotonicidade sabemos que ela não é contínua em um número finito de pontos do intervalo  $[a, b]$ , sejam esses  $a_0, \dots, a_k$ , a nossa estratégia consiste em "consertar" essa descontinuidade ligando os pontos de descontinuidade verticalmente.

Temos que  $\theta \circ \gamma|_{(a_i, a_{i+1})}$  é contínua, já nos pontos da forma  $a_i$  tome  $x_i^+ = \lim_{t \rightarrow a_i^+} \theta \circ \gamma(t) = (\gamma(a_i), t_i^+)$  (limite de  $t$  tendendo a  $a_i$  pela direita) e  $x_i^- = \lim_{t \rightarrow a_i^-} \theta \circ \gamma(t) = (\gamma(a_i), t_i^-)$ , para certos  $t_i^-$  e  $t_i^+$ . Temos que

a função  $\gamma_i : [t_i^-, t_i^+] \rightarrow C$  definida por

$$\gamma_i(t) = (\gamma(a_i), t)$$

é um caminho vertical (e portanto de fato em  $C$ ) conectando os pontos  $x_i^-$  e  $x_i^+$ . Podemos assim criar o caminho que começa em  $\theta \circ \gamma|_{[a, a_0]}$  concatenado a  $\gamma_0$  concatenado a  $\theta \circ \gamma|_{(a_0, a_1)}$  e assim por diante até chegarmos em  $\theta \circ \gamma|_{(a_k, b]}$  obtendo assim um caminho ligando  $a$  a  $b$  (pode ocorrer de  $a_0$  ser igual  $a$ , nesse caso tomamos  $x_0^-$  como  $x_0$  e começamos a construção do caminho por  $\gamma_0$ , procedemos de maneira análoga se  $a_k = b$ ).

□

Com esse resultados podemos demonstrar o teorema.

*Demonstração.* (De 2.28)

Dizemos que a célula  $C_0$  é adjacente a  $C_1$  no  $R^n$  se  $C_0 \cap cl(C_1) \neq \emptyset$ , vamos denotar por  $C_0 \propto C_1$ , note que  $C_0 \propto C_1$  não implica  $C_1 \propto C_0$ . Vamos verificar que  $C_0 \propto C_1$  implica  $C_0 \cup C_1$  definivelmente conexo por caminhos.

Seja  $c \in C_0 \cap cl(C_1)$ , por seleção de curvas existe uma função contínua definível  $\gamma'_1 : (a_1, b'_1) \rightarrow C_1$  com  $\gamma'_1 \rightarrow c$ , podemos assim definir um caminho  $\gamma[a_1, b_1] \rightarrow C_1$  tomando  $b_1 < b'_1$ ,  $\gamma(a_1) = c$  e  $\gamma(t) = \gamma'_1(t)$  para  $t \neq a_1$ , ou seja um caminho em  $C_1 \cup \{c\} \subset C_0 \cup C_1$  ligando  $c$  a um ponto qualquer de  $C_1$ . Dados pontos  $x_0$  e  $x_1$  em  $C_0 \cup C_1$  queremos obter um caminho definível ligando os pontos, caso os dois estejam na mesma célula já sabemos que tal caminho existe, suponha então  $x_0 \in C_0$  e  $x_1 \in C_1$ . Podemos então ligar  $x_0$  a  $c$  por um caminho em  $C_0$ , em seguida concatenamos tal caminho com  $\gamma$  para obter e por fim concatenamos tal caminho a  $\gamma_2$  onde  $\gamma_2$  é um caminho em  $C_1$  ligando  $\gamma(b)$  a  $x_1$ . Obtemos assim um caminho ligando  $x_0$  a  $x_1$  em  $C_0 \cup C_1$  como precisávamos.

Dada uma decomposição  $\mathcal{D}$  de  $R^n$  compatível com  $X$  podemos definir a seguinte relação de equivalência entre as células.

$$C_0 \sim C_1 \text{ se existe uma sequência de células } D_1, \dots, D_k \text{ tal que } D_i \propto D_{i+1} \text{ ou } D_{i+1} \propto D_i \text{ e } D_1 = C_0, D_k = C_1$$

Como temos uma quantidade finita de células temos que cada classe de equivalência é finita, mais ainda se tomarmos  $X_i = \bigcup_{C_j \in A_i} C_j$  onde  $A_i$  é uma dessas classes temos que  $X_i$  é definivelmente conexo por caminhos, pois acabamos de ver que a união de dois elementos de  $A_i$  é conexo por caminhos, e como temos uma quantidade finita de elementos em  $A_i$  podemos encontrar caminhos ligando pontos de  $X_i$  através de concatenações.

Para ver que  $X_i$  é fechado em  $X$  tome uma célula de  $\mathcal{D}$  contida em  $X$  intersectando o fecho de  $X_i$ , temos pela definição de  $\sim$  que tal célula pertence a  $A_i$  e portanto está contida em  $X_i$ , mas todo ponto de  $X$  está em uma célula dessa forma, logo todo ponto de  $X$  que pertence a  $cl(X_i)$  já está em  $X_i$  assim  $X_i$  é fechado em  $X$ . Note que  $X - X_i$  é justamente a união dos  $X_j \subset X$  tais que  $j \neq i$ , mas isso é uma união finita de fechados e portanto é fechado, assim  $X_i$  também é aberto como queríamos.

Falta obtermos a unicidade. Suponha  $Y_1, \dots, Y_k$  outra decomposição com as mesmas propriedades, temos que  $X_i = \bigcup (Y_j \cap X_i)$ , por outro lado cada uma das intersecções é um aberto-fechado definível e, como  $X_i$  é definivelmente conexo, temos que todas devem ser vazias a menos de uma, i.e.  $X_i \subset Y_j$  para algum  $j$ , de maneira análoga vemos que  $Y_j \subset X_i$  obtendo a igualdade desejada.

□

Em particular temos que cada  $X_i$  é um subconjunto definivelmente conexo maximal de  $X$ ; são esses conjuntos que vamos chamar de componentes definivelmente conexas.

A demonstração acima tem algumas consequências simples porém interessantes.

**Corolário 2.31.** *Todo conjunto definível possui um número finito de componentes definivelmente conexas.*

*Demonstração.* Basta notar que na demonstração acima tínhamos um número finito de classes de equivalência, e portanto uma quantidade finita de conjuntos do tipo  $X_i$ .  $\square$

**Corolário 2.32.** *Todo conjunto definivelmente conexo é definivelmente conexo por caminho.*

*Demonstração.* Um conjunto conexo possui uma única componente definivelmente conexa, vimos na demonstração acima que por sua vez essa é definivelmente conexo por caminhos.  $\square$

Esse último corolário possui consequências interessantes como as proposições abaixo.

**Proposição 2.33.** *Se  $X, Y$  são conjuntos definíveis com  $X$  definivelmente conexo e  $X \cap \delta(Y) = \emptyset$  então ou  $X \cap Y = \emptyset$  ou  $X \subset Y$ .*

*Demonstração.* Suponha que exista um ponto  $a \in X \cap Y$  e  $b \in X - Y$ , podemos tomar um caminho  $\gamma : [c, d] \rightarrow X$  ligando  $a$  a  $b$ , tome ainda  $t_0 = \max\{t \in [c, d] : \gamma(t) \in Y\}$  então  $\gamma(t_0) \in X \cap \delta(Y)$   $\square$

Mostramos agora o resultado que comentamos anteriormente:

**Proposição 2.34.** *Em uma estrutura  $O$ -minimal na qual intervalos são conexos todo conjunto definivelmente conexo é conexo.*

*Demonstração.* Temos que se  $X$  é definivelmente conexo então pelo corolário acima  $X$  é definivelmente conexo por caminhos, mas todo caminho definível em  $X$  é em particular um caminho em  $X$ , ou seja  $X$  é conexo por caminhos.

Como estamos supondo que os intervalos são conexos temos que  $X$  deve ser conexo pois dados abertos  $U$  e  $V$  contendo  $X$  com intersecção vazia e  $u \in U \cap X$ ,  $v \in V \cap X$  podemos obter uma curva contínua  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$  com  $\gamma(a) = u$  e  $\gamma(b) = v$ , mas assim  $\gamma^{-1}(U)$  e  $\gamma^{-1}(V)$  são abertos disjuntos cobrindo  $[a, b]$  com  $a \in \gamma^{-1}(U)$  e  $b \in \gamma^{-1}(V)$  uma contradição.  $\square$

Existem muitas outras propriedades sobre conexidade que não vamos explorar. Um exemplo interessante é que dado um conjunto definível  $X$  de  $\mathbb{R}^{n+m}$  existe um limitante para o número de componentes conexas das fibras  $X_s$ .

## 2.3 Triangularização

O objetivo dessa seção é estabelecer o teorema de triangularização. Um resultado que nos diz que todo conjunto definível pode ser triangularizado de maneira definível; ou seja que existe uma bijeção contínua definível  $f$  de um complexo de  $R$  em  $X$ , para qualquer conjunto definível  $X$ . Vamos ainda obter como consequência de tal teorema o teorema de trivialização.

De agora em diante trabalharemos com uma estrutura  $O$ -minimal  $\mathcal{R}$  que estende um corpo.

### 2.3.1 Boas Coordenadas

Para obtermos o teorema de triangularização vamos precisar primeiro provar a existência de boas coordenadas. Por coordenadas queremos dizer simplesmente bijeções contínuas definíveis de  $R^n$  em  $R^n$ , tais funções também são conhecidas como automorfismos.

Dado um conjunto definível  $X$  de  $R^n$ , com dimensão estritamente menor que  $n$ , estamos interessados em encontrar um sistema de coordenadas (i.e. um automorfismo  $f$  de  $R^n$ ) no qual as fibras  $f^{-1}(X)_s$ , para  $s \in R^{n-1}$ , tenham dimensão 0. Tais funções são o que chamamos de boas coordenadas para  $X$ ; veremos que, para  $X$  nas condições acima, sempre podemos obter uma função  $f$  com tais propriedades.

Denotando pontos de  $R^{n-1}$  por  $\bar{x}$ , o automorfismo que nos vamos procurar é da forma  $f(\bar{x}, x_n) = (\bar{x} - v(x_n), x_n)$  onde  $v : R \rightarrow R^{n-1}$  é um polinômio. Sua inversa  $f^{-1}$  é  $f^{-1}(\bar{x}, x_n) = (\bar{x} + v(x_n), x_n)$

**Lema 2.35.** *Seja  $W \subset R^m \times R^n$  um conjunto definível com  $n \geq 2$ , se para todo  $s \in R^m$  a dimensão de  $W_s$  é menor que  $n$  então existe um polinômio  $v : R \rightarrow R^{n-1}$  tal que para todo  $s \in R^m$  o conjunto dos  $x \in R$  com  $(v(x), x) \in W_s$  é finito.*

Esse resultado pode não parecer surpreendente a primeira vista, mas o ponto importante e não trivial é que o polinômio  $v(x)$  não depende de  $s$ , ou seja, a menos de um número finito, os pontos do tipo  $(v(x), x)$  não pertencem a  $W_s$  independente da escolha de  $s$ .

*Demonstração.* A prova é feita por indução, além disso para facilitar a utilização da hipótese de indução vamos obter uma função  $v : R \rightarrow R^{n-1}$  tal que o conjunto dos  $x$  tais que  $(x, v(x)) \in W_s$  é finito, para ver que isso é equivalente ao enunciado do lema basta permutar a coordenada  $(m+1)$  com a última coordenada de  $R^{m+n}$  no começo e no fim da demonstração.

- $n=2$

Defina para cada  $a \in R^{m+1}$  o polinômio  $f_a = a_1 + a_2 \cdot t + \dots + a_{i+1}t_i$  e tome para  $s \in R^m$  o conjunto

$$B^{a,s} = \{x \in R : (x, f_a(x)) \in W_s\}$$

Note que esse conjunto é definível, na verdade a aplicação que leva  $a$  em  $f_a$  é uma parametrização dos polinômios de grau menor ou igual a  $m$ , similar ao que fizemos no lema 2.20 com as caixas de  $R^n$ . É importante notar que isso só é possível devido à limitação no grau dos polinômios.

Tudo que precisamos é encontrar um  $a$  tal que esse conjunto seja finito para todo  $s$ . Para isso vamos mostrar primeiro que para cada  $s$  existe uma quantidade finita de elementos  $a$  tais que  $B^{a,s}$  é infinito.

Temos que  $W_s \subset R^2$  tem dimensão 1, e tomando uma decomposição em células do  $R^2$  compatível com tal conjunto vemos que ele se decompõe em número finito de pontos isolados ((0,0)-células), intervalos verticais abertos ((0,1)-células) e gráficos de funções com domínio em um intervalo  $I$  ((1,0)-células). O número de pontos  $x$  tais que  $(x, f_a(x))$  pertence a uma das (0,0)-células ou (0,1)-células é finito para todo  $a$ , portanto só precisamos nos preocupar com o último caso.

Consideremos então  $g : I \rightarrow R$  uma das funções cujo gráfico é uma (1,0)-célula da decomposição de  $W_s$  e tome o seguinte conjunto definível

$$X = \{x \in I : \exists a \in R^{m+1} \exists \epsilon \in R (\epsilon > 0 \wedge [\forall y \in I (|y - x| < \epsilon) \rightarrow f_a(y) = g(y)])\}$$

Ou seja o conjunto dos elementos  $x$  de  $I$  tais que  $g$  é igual a alguma  $f_a$  em uma vizinhança de  $x$ . Esse conjunto é claramente aberto, e portanto uma união finita de intervalos abertos, além disso é imediato que em cada intervalo desses  $g = f_a$  para um único  $a$ . Em particular temos um número finito de intervalos  $I_j$  e elementos  $a_j$  tais que  $g|_{I_j} = f_{a_j}|_{I_j}$  e para nenhum outro  $a$  o conjunto  $\{x \in R : f_a(x) = g(x)\}$  é infinito. Como temos uma quantidade finita de funções  $g$  a considerar vemos que temos apenas uma quantidade finita de pontos  $a$  aonde  $\{x \in R : f_a(x) = g(x)\}$  é infinito. Concluimos assim que para cada  $s$  existe uma quantidade finita de elementos  $a$  tais que  $B^{a,s}$  é infinito.

Para concluirmos esse caso falta encontrarmos  $a$  tal que  $B^{a,s}$  seja finito para todo  $s$ . Não é difícil verificar que o conjunto  $Y \subset R^{m+(m+1)}$  dos pontos  $(s, a)$  tal que  $B^{a,s}$  é infinito é definível, além disso acabamos de ver que as fibras de tal conjunto são finitas e portanto sua dimensão é no máximo  $m$ , assim o conjunto  $Y'$  dos pontos  $a \in R^{m+1}$  tais que  $B^{a,s}$  é infinito para algum  $s$  (a projeção de  $Y$  nas últimas  $m+1$  coordenadas) também possui dimensão menor ou igual a  $m$  e conseqüentemente não pode ser todo  $R^{m+1}$ . Qualquer  $a \in R^{m+1} - Y'$  satisfaz a condição de  $B^{a,s}$  ser finito para todo  $s$ .

•  $(n-1) \rightarrow n$

Temos agora  $W \subset R^{m+n}$  com  $\dim(W_s) < n$  para todo  $s \in T^m$ . Vamos tomar  $Z \subset R^m \times R \times R^{n-2}$  o conjunto dos pontos  $(s, x_1, \bar{x})$  tais que  $W_{(s, x_1, \bar{x})}$  é infinito.

Como  $\dim(W_s) < n$  pelo lema 2.19 a dimensão de  $Z_s$  é estritamente menor que  $n-1$  e por indução podemos obter um polinômio  $v_0 : R \rightarrow R^{n-2}$  tal que  $\{x \in R : (x, v_0(x)) \in Z_s\}$  é finito para todo  $s$ . Tome agora o conjunto definível

$$M = \{(s, x_1, x_n) \in R^m \times R^2 : (s, x_1, v_0(x_1), x_n) \in W\}$$

Assim existe um número finito de elementos  $a$  de  $R$  tais que  $(s, a, x_n)$  pertence a  $M$  para algum par  $s, x_n$ , em particular  $M_s$  têm dimensão menor ou igual a 1, e portanto já sabemos que existe um polinômio  $v_1$  tal que para todo  $s$  o conjunto dos elementos  $x \in R$  tais que  $(x, v_1(x)) \in M_s$  é sempre finito. Tomando  $v = (v_0, v_1) : R \rightarrow R^{n-1}$  temos a função desejada. □

Provar a existência de boas coordenadas usando o lema é uma tarefa bem mais simples.

**Teorema 2.36.** *Dado um conjunto definível  $S$  do  $R^n$  com dimensão menor do que  $n$  existe um automorfismo  $u : R^n \rightarrow R^n$  tal que  $u(S)_s$  é finito para todo  $s \in R^{n-1}$ .*

*Demonstração.* Tome o conjunto

$$W = \{(\bar{y}, \bar{x}, t) \in R^{n-1} \times R^{n-1} \times R : (\bar{y} + \bar{x}, t) \in S\}$$

Temos então que

$$W_{\bar{y}} = \{(\bar{x}, t) \in R^n : (\bar{x} + \bar{y}, t) \in S\} = S - (\bar{y}, 0)$$

Onde  $S - (\bar{y}, 0) = \{(\bar{x}, t) - (\bar{y}, 0) : (\bar{x}, t) \in S\}$  é a translação de  $S$  por  $(\bar{y}, 0)$ . Mas a translação é uma bijeção definível e portanto  $\dim(W_{\bar{y}}) = \dim(S) < n$ . Com isso o conjunto  $W$  está nas condições do lema 2.35 e portanto existe  $v : R \rightarrow R^{n-1}$  tal que para todo  $\bar{y} \in R^{n-1}$  o conjunto dos  $x \in R$  com  $(v(x), x) \in W_{\bar{y}}$  é finito. Definimos o nosso automorfismo como  $u(\bar{x}, t) = (\bar{x} - v(t), t)$ . Vamos verificar que tal automorfismo satisfaz as propriedades desejadas.

Que de fato é um automorfismo é fácil ver, pois como  $v$  é um polinômio é definível e contínuo e portanto o mesmo se aplica a  $u$ . Para ver que é injetora suponha  $u(\bar{x}, t) = u(\bar{y}, t')$  temos então que  $t = t'$  e  $\bar{x} - v(t) = \bar{y} - v(t')$ , mas isso implica  $\bar{x} - v(t) = \bar{y} - v(t)$  e portanto  $\bar{x} = \bar{y}$ . A sobrejetividade segue de  $(\bar{x}, t) = u(\bar{x} + v(t), t)$ .

Vamos verificar então que  $u(S)_{\bar{x}}$  é sempre finito.

$$u(S) = \{u(\bar{x}, t) : (\bar{x}, t) \in S\} = \{(\bar{x} - v(t), t) : (\bar{x}, t) \in S\} = \{(\bar{x}, t) : (\bar{x} + v(t), t) \in S\}$$

Logo

$$u(S)_{\bar{y}} = \{t \in R : (\bar{y}, t) \in u(S)\} = \{t \in R : (\bar{y} + v(t), t) \in S\} = \{t \in R : (v(t), t) \in W_{\bar{y}}\}$$

Mas devido a escolha de  $v$  temos que que tal conjunto é finito para todo  $y$ .

□

Essa versão do teorema não é a mais forte conhecida. Em [Cos99] é provado que se  $S \subset R^m \times R^n$  é tal que  $\dim(S_{\bar{x}}) < n$  para todo  $\bar{x} \in R^m$  então podemos obter um automorfismo  $u$  satisfazendo as condições do enunciado, de modo que  $u$  restrito as primeiras  $m$  coordenadas é a identidade. Em [vdD98] o resultado é obtido com  $u$  uma transformação linear e por isso é chamado de "boas direções", para tanto o autor faz uso de uma versão do teorema da função inversa para estruturas O-minimas estendendo corpos; quando estudarmos homologia simplicial precisaremos de uma propriedade do teorema de triangularização que só pode ser obtida supondo  $u$  linear.

### 2.3.2 Simplexos, Complexos e Suas Propriedades

Continuamos com alguns preparativos para o teorema de triangularização. Vamos apresentar as definições de simplexos e complexos que são essenciais até mesmo para enunciar o teorema; além disso exploraremos algumas de suas propriedades, como divisões baricêntricas, que usaremos não só agora mas também quando discutirmos homologia. Algumas das demonstrações serão omitidas já que fogem do escopo desse texto.

As definições e resultados dessa seção são pequenas variações das usuais. Normalmente simplexos e complexos são definidos em  $\mathbb{R}^n$  e não em corpos reais quaisquer, tal diferença não altera em nada as propriedades desses objetos(e suas demonstrações). Além disso a definição de complexo que vamos usar corresponde a de [vdD98] que é um pouco mais abrangente do que a usual.

$\mathcal{R}$  continua sendo uma expansão o-minimal de um corpo, porém é conveniente entender o  $R^n$  como um  $R$ -espaço vetorial. Nesse contexto um subespaço afim de  $R^n$  nada mais é do que a translação de um subespaço vetorial por um elemento  $a$  de  $R^n$ . Dados pontos  $a_0, \dots, a_k \in R^n$  dizemos que

$$\left\{ \sum_{0 \leq i \leq k} t_i a_i \in R^n : \sum_{0 \leq i \leq k} t_i = 1, t_i \in R \right\}$$

é o espaço afim gerado por  $a_0, \dots, a_k$ . Não é difícil verificar que esse é de fato o menor espaço afim contendo tais pontos.

Dizemos que os pontos  $a_0, \dots, a_k$  são independentes se o espaço afim gerado por esses pontos possui dimensão  $k$ , ou equivalentemente se o conjunto  $\{(a_1 - a_0), \dots, (a_k - a_0)\}$  é linearmente independente(vale notar que nesse contexto temos duas possíveis interpretações para dimensão, a de álgebra linear e a que apresentamos para conjuntos definíveis; porém ambas noções coincidem, eliminando qualquer possível ambiguidade). Com isso definimos um simplexo da seguinte maneira.

**Definição 2.37.** Dados pontos independentes  $a_0, \dots, a_k$  dizemos que

$$\left\{ \sum_{0 \leq i \leq k} t_i a_i \in R^n : \sum_{0 \leq i \leq k} t_i = 1, 0 < t_i \in R \right\}$$

é o simplexo gerado por  $a_0, \dots, a_k$ , esses pontos por sua vez são chamados os vértices do simplexo. É comum denotar esse conjunto por  $(a_0, \dots, a_k)$  o que pode gerar confusão com um ponto de  $R^{n^2}$ , porém o contexto deve deixar claro a que nos referimos. Um simplexo gerado por  $k + 1$  elementos possui dimensão  $k$  e é dito um  $k$ -simplexo

Note que nessa definição a desigualdade  $t_i > 0$  é estrita e portanto esse conjunto não é fechado (tão pouco precisa ser aberto), o fecho topológico de  $(a_0, \dots, a_k)$  é denotado por  $[a_0, \dots, a_k]$  e é dado por

$$\left\{ \sum_{0 \leq i \leq k} t_i a_i \in R^n : \sum_{0 \leq i \leq k} t_i = 1, 0 \leq t_i \in R \right\}$$

Lembrando que um conjunto  $A$  é dito convexo quando dados dois pontos quaisquer  $a_1, a_2 \in A$  a reta  $ta_1 + (1-t)a_2, 0 \leq t \leq 1$  que liga esses pontos está contida nesse conjunto. Temos que  $[a_0, \dots, a_k]$  é o menor convexo contendo os pontos  $a_0, \dots, a_k$ , chamamos tal conjunto do fecho convexo de  $\{a_0, \dots, a_k\}$ .

Uma notação um pouco ambígua é usada frequentemente para o que vamos chamar de simplexo padrão de dimensão  $n$  e denotar por  $\Delta^n$ . Em  $R^{n+1}$  tome  $e_1, \dots, e_{n+1}$  a base canônica ( $e_i$  possui todas as coordenadas iguais a 0 exceto pela  $i$ -ésima coordena que é 1), temos que esses pontos são independentes e portanto geram um simplexo de dimensão  $n$  esse simplexo será denotado por  $\Delta_0^n$ , o fecho de de tal conjunto,  $[e_0, \dots, e_n]$ , é chamado o simplexo padrão de dimensão  $n$ .

Dado um simplexo  $(a_0, \dots, a_k)$  todos seus pontos são da forma  $t_0 a_0 + \dots + t_k a_k$ , é fácil ver que a função  $\eta : (a_0, \dots, a_k) \rightarrow \Delta_0^n$  que leva  $p = t_0 a_0 + \dots + t_k a_k$  em  $(t_0, \dots, t_k)$  é um homeomorfismo definível,  $(t_0, \dots, t_k)$  é chamado as coordenadas baricêntricas de  $p$ . Segue claramente dessa observação que quaisquer dois simplexos de mesma dimensão são definivelmente homeomorfos, por esse motivo em muitos casos podemos nos restringir a tais simplexos, como por exemplo ao estudarmos funções contínuas definíveis com domínios em simplexos.

Uma face de um simplexo  $(a_0, \dots, a_k)$  é um simplexo gerado por um subconjunto de  $\{a_0, \dots, a_k\}$ . Note que duas faces de um simplexo são iguais somente quando são gerados pelo mesmo subconjunto e, caso contrário, são disjuntas. Além disso  $[a_0, \dots, a_k]$  é a união (disjunta) de todas as faces de  $(a_0, \dots, a_k)$ , juntamente de  $(a_0, \dots, a_k)$ .

Dizemos que dois simplexos  $(a_0, \dots, a_k)$  e  $(b_0, \dots, b_k)$  são compatíveis quando  $[a_0, \dots, a_k] \cap [b_0, \dots, b_k]$  é ou vazio ou uma face comum dos dois simplexo. Com isso podemos dar a próxima definição relevante.

**Definição 2.38.** Um complexo simplicial  $\tau$  do  $R^n$  é um conjunto finito de simplexos do  $R^n$  dois a dois compatíveis. Denotamos por  $|\tau|$  a união de todos seus elementos e chamamos tal conjunto do domínio de  $\tau$ . Quando não houver ambiguidade usaremos simplesmente o termo complexo.

É comum na definição de um complexo  $\tau$  exigir que se um simplexo pertence a  $\tau$  então todas as suas faces pertencem a  $\tau$ ; tal exigência faz com que  $|\tau|$  seja sempre fechado e limitado. No nosso caso porém queremos mostrar que todo conjunto definível é definivelmente homeomorfo a um complexo (parte do teorema de triangularização) e isso tornaria a tarefa obviamente impossível. Para contornar o problema utilizamos essa definição, um pouco mais fraca, de complexos.

Um complexo na condição acima será dito fechado, além disso vamos denotar por  $\bar{\tau}$  o complexo formado por todas as faces de todos os simplexos de  $\tau$  (o que é de fato um complexo fechado); é fácil verificar que  $cl(|\tau|) = \bar{\tau}$ . Uma outra notação que vamos usar frequentemente é  $vert(\tau)$  para denotar o conjunto de todos os vértices de todos os simplexos de um complexo  $\tau$ .

Dizemos ainda que  $k$  é um subcomplexo de  $\tau$  se  $k \subset \tau$  (note que todo subconjunto de  $\tau$  é um complexo). Além disso  $k$  é um subcomplexo fechado de  $\tau$  se  $|k|$  é fechado em  $|\tau|$ , ou equivalentemente se todo simplexo de  $\bar{k}$  que pertencer a  $\tau$  também pertencer a  $k$ .

Vale notar que complexos são objetos de natureza combinatória, um complexo  $\tau$  pode ser visto simplesmente como um conjunto finito de pontos  $V$ , os vértices de  $\tau$ , e uma coleção  $V_0$  de subconjuntos de  $V$ , onde um elemento de  $V_0$  é um subconjunto de vértices que gera um simplexo de  $\tau$ . Olhando complexos dessa maneira é natural considerarmos as seguintes funções, que chamamos de mapas de vértices.

**Definição 2.39.** Dados dois complexos  $\tau$  e  $\theta$  uma função  $f : vert(\tau) \rightarrow vert(\theta)$  é dita um mapa de vértices (entre  $\tau$  e  $\theta$ ) se dado um subconjunto  $V_0$  de  $vert(\tau)$  que gera um simplexo de  $\tau$  sua imagem  $f(V_0)$  gera um simplexo de  $\theta$ .

É fácil verificar que complexos, juntamente de mapas de vértices formam uma categoria; essa será denotada por  $\mathbf{K}$ .

Vamos verificar que todo mapa de vértices se estende de maneira natural a uma função contínua, entre o domínio dos complexos envolvidos. Antes disso note que um ponto do domínio de um complexo  $\tau$  é um ponto de algum simplexo de  $\tau$  e portanto é da forma  $t_0a_0 + \dots + t_na_n$ , onde  $(a_0, \dots, a_n)$  é um simplexo de  $\tau$ ,  $t_i > 0$  e  $\sum t_i = 1$ .

**Proposição 2.40.** *Se  $f : \text{vert}(\tau) \rightarrow \text{vert}(\theta)$  é um mapa de vértices então a função  $\bar{f} : |\tau| \rightarrow |\theta|$  dada por*

$$\bar{f}(t_0a_0 + \dots + t_na_n) = t_0f(a_0) + \dots + t_nf(a_n)$$

*é contínua. Onde  $t_0a_0 + \dots + t_na_n$  é um ponto do simplexo  $(a_0, \dots, a_n) \in \tau$ , cada  $t_i$  é maior que zero e  $\sum t_i = 1$ .*

*Demonstração.* Como  $(a_0, \dots, a_n)$  é um simplexo de  $\tau$  e  $f$  é um mapa de vértices temos que  $(f(a_0), \dots, f(a_n))$  gera um simplexo de  $\theta$  e portanto  $t_0f(a_0) + \dots + t_nf(a_n)$  é de fato um ponto de  $|\theta|$ . Para ver que  $f$  é contínua tome  $s$  o fecho de um simplexo  $(a_0, \dots, a_n)$  em  $\tau$ , vamos mostrar que  $f|_s$  é contínua. Note que  $s$  é a união das faces de  $(a_0, \dots, a_n)$  pertencentes a  $\tau$ . Basta então analisarmos a continuidade de  $f$  nas faces de  $(a_0, \dots, a_n)$  contidas em  $\tau$ , tome então  $p = p_0a_0 + \dots + p_na_n$  um ponto em uma dessas faces ( $0 \leq p_i$  e  $\sum p_i = 1$ ).

Pelo lema 2.24 basta considerarmos o comportamento de  $f$  composta com curvas tendendo a  $p$ . Seja então  $\gamma(t) : I \rightarrow s$  com  $\gamma \rightarrow p$ . Para cada  $t$  temos que  $\gamma(t) \in s$  e em particular

$$\gamma(t) = g_0(t)a_0 + \dots + g_n(t)a_n$$

com  $0 \leq g_i(t)$  e  $\sum g_i(t) = 1$ , a unicidade das coordenadas baricêntricas nos garante que as  $g_i$  estão bem definidas, e não é difícil verificar que elas são de fato contínuas. Temos assim

$$f(\gamma(t)) = f(g_0(t)a_0 + \dots + g_n(t)a_n) = g_0(t)f(a_0) + \dots + g_n(t)f(a_n)$$

Além disso como  $\gamma(t) \rightarrow p$  temos que  $g_i(t) \rightarrow p_i$ , ou seja

$$f(\gamma(t)) \rightarrow p_0f(a_0) + \dots + p_nf(a_n) = f(p)$$

de onde segue que  $f$  é contínua em  $p$ .

Para terminar a demonstração note que  $\tau$  é uma união finita de conjuntos disjuntos fechados como  $s$ , e que  $f$  restrita a cada um desses conjuntos é contínua, o que é suficiente para garantir a continuidade de  $f$  em  $\tau$ . □

Precisamos ainda de outros resultados sobre extensões de funções em simplexos e complexos. Para obter esses resultados vamos utilizar o baricentro de um simplexo. Dado um simplexo  $(a_0, \dots, a_k)$  dizemos que

$$p = (a_0/(k+1)) + \dots + (a_k/(k+1)) \in (a_0, \dots, a_k)$$

é o baricentro de  $(a_0, \dots, a_k)$  que vamos denotar por  $b((a_0, \dots, a_k))$ .

O baricentro de um simplexo possui muitas propriedades importantes, nesse texto porém não vamos utilizar nenhuma(a não ser o fato dele pertencer ao simplexo) e usaremos tal ponto apenas para manter a tradição. O lema abaixo, que será usado no próximo capítulo, ilustra o que acabamos de dizer.

**Lema 2.41.** *Os seguintes resultados sobre extensões de funções contínuas são válidos:*

- Dado um simplexo  $\sigma$  do  $\mathbb{R}^n$  e uma função contínua definível  $f : \delta(\sigma) \rightarrow \mathbb{R}^n$  existe um extensão contínua definível de  $f$  em  $\text{cl}(\sigma)$ .

- Dado um complexo fechado  $\tau$  em  $R^n$  temos que toda função contínua definível com domínio em um subcomplexo fechado próprio  $\tau_0$  de  $\tau$  se estende a uma função contínua definível em  $\tau$ .

*Demonstração.* Começamos pelo primeiro item:

- Dado um ponto  $x$  de  $\sigma$  diferente de  $b(\sigma)$  existe um único ponto  $p_x$  de  $\delta(\sigma)$  tal que  $x$  pertence ao segmento de reta ligando  $p_x$  a  $b(\sigma)$ , esse segmento pode ser parametrizado por  $tp_x + (1-t)b(\sigma)$  com  $t \in [0, 1]$ , ou seja existe um único  $t_x$  tal que  $x = t_x p_x + (1-t_x)b(\sigma)$  definimos então  $g(x) = t_x f(p_x)$  além disso tomamos  $g(b(\sigma)) = 0$  e  $g(p) = f(p)$  para  $p \in \delta(\sigma)$ .

É claro que  $g$  é definível, precisamos verificar que é contínua. Consideremos então a seguinte função:

$$h : [0, 1] \times \delta(\sigma) \rightarrow R^n \\ (t, p) \rightarrow tp + (1-t)b(\sigma)$$

temos que  $h$  é contínua, definível e  $cl(\sigma) = \text{Im}g(h)$ . Além disso  $g \circ h(t, p) = tf(p)$  também é contínua definível, nessas condições o terceiro item de 2.27 nos garante a continuidade de  $g$ .

- Vamos mostrar que existe um subcomplexo fechado contendo  $\tau_0$  propriamente e uma extensão contínua  $g$  de  $f$  em tal subcomplexo. Como o número de subcomplexos de  $\tau$  é finito isso é suficiente.

Seja  $\sigma$  um simplexo de dimensão mínima pertencendo a  $\tau - \tau_0$ , se  $\sigma = \{a\}$  é um simplexo de dimensão 0 então  $\sigma$  é disjunto de  $|\tau_0|$  (pois esse é fechado) e portanto tomando  $g(a) = 0$  e  $g(p) = p$  para  $p \in |\tau_0|$  temos a extensão desejada.

Assumindo que  $\dim(\sigma) > 0$  temos que todo face própria de  $\sigma$  está contida em  $|\tau_0|$ , pois a dimensão de uma face qualquer é menor do que a dimensão de  $\sigma$  e essa por sua vez é minimal dentre as que não estão contidas em  $|\tau_0|$ . Isso significa que  $f' = f|_{\delta(\sigma)}$  é uma função contínua definível e pelo primeiro item do lema sabemos que existe uma extensão  $g'$  de  $f'$  em  $cl(\sigma)$ . Como  $g'$  e  $f$  são funções contínuas definíveis com domínio fechado e compatíveis na interseção dos domínios podemos colar essas funções em uma função  $g$  contínua definível cujo domínio é  $cl(\sigma) \cup |\tau_0|$ . Temos assim que  $g$  é uma extensão de  $f$  a um subcomplexo estritamente maior como precisávamos.

□

Uma construção que vamos utilizar freqüentemente no texto é a divisão baricêntrica; para apresentar tal construção vamos precisar de algumas definições.

Em um complexo  $\tau$  definimos uma  $\tau$ -flag como uma sequência de simplexos  $s_0, \dots, s_l$  tal que o  $\text{vert}(s_i) \subset \text{vert}(s_{i+1})$ . Ou seja uma sequência de simplexos crescente em dimensão, tal que cada simplexo é uma face dos posteriores. Não pedimos que a dimensão de  $s_i$  seja  $i$  e tão pouco que  $\dim(s_{i+1}) = \dim(s_i) + 1$ .

Podemos associar a cada  $\tau$ -flag  $\theta$  o  $t$ -simplexo cujos vértices são o baricentro de cada simplexo de  $\theta$ , ou seja  $(b(s_0), \dots, b(s_l))$ ; vamos denotar tal simplexo por  $b(\theta)$ . Definimos a divisão baricêntrica de  $\tau$  como:

$$b(\tau) = \{b(\theta) : \theta \text{ é uma } \tau\text{-flag}\}$$

Muitas das afirmações acima não são imediatas, como o fato de  $b(\theta)$  ser um simplexo ou  $b(\tau)$  um complexo. Outro resultado válido que não vamos demonstrar é que o domínio da divisão baricêntrica de um complexo  $\tau$  é o mesmo domínio de  $\tau$ , ou seja:

$$|b(\tau)| = |\tau|$$

É possível iterar a construção apresentada; ou seja podemos tomar a divisão baricêntrica de  $b(\tau)$ . Por esse motivo muitas vezes dizemos que  $b(\tau)$  é a primeira divisão baricêntrica de  $\tau$ . Nesse texto porém não utilizaremos tais iterações, e conseqüentemente também evitaremos essa nomenclatura.

Existe ainda outra construção que vamos utilizar. Dado um simplexo  $\tau = (a_0, \dots, a_k)$  de  $R^n$  e duas seqüências  $s_0, \dots, s_k$  e  $r_0, \dots, r_k$  de pontos em  $R$ , tal que  $s_i \leq r_i$ , podemos definir  $b_i = (a_i, s_i)$  e  $c_i = (a_i, r_i)$ . Além disso quando  $s_i \neq r_i$  podemos definir o  $(k+1)$ -simplexo  $\tau_i(\bar{s}, \bar{r}) = (b_0, \dots, b_i, c_i, \dots, c_k)$ . Supondo então que pelo menos um  $b_i$  é diferente de  $c_i$  temos o seguinte resultado

**Proposição 2.42.** *O conjunto formado por todos os simplexos da forma  $\tau_i(\bar{s}, \bar{r})$  juntamente de todas suas faces é um complexo fechado cujo domínio é o fecho convexo de  $\{b_0, \dots, b_k, c_0, \dots, c_k\}$ . Vamos denotar tal simplexo por  $l(\bar{b}, \bar{c})$*

A construção e proposição acima podem ser encontradas em [vdD98]. Com esses resultados temos tudo o que precisamos para finalmente tratar do problema de triangularização.

### 2.3.3 Triangularização de Conjuntos Definíveis

Nosso objetivo continua sendo provar o teorema de triangularização para conjuntos definíveis. Antes disso, porém, vamos provar alguns lemas e apresentar algumas definições que simplificarão a tarefa.

**Definição 2.43.** Uma triangularização de um conjunto definível  $X \subset R^n$  é um par  $(\phi, k)$  onde  $k$  é um complexo e  $\phi : X \rightarrow |k|$  é um homeomorfismo definível.

Dados subconjuntos  $X_1, \dots, X_m$  de  $X$  dizemos que a triangularização  $(\phi, k)$  é compatível com  $X_1, \dots, X_m$  se para cada  $X_i$  a sua imagem  $h(X_i)$  é o domínio de um subcomplexo  $k_i$  de  $k$ .

Além disso dados conjuntos  $A \subset R^n$  e  $B \subset R^{n+1}$  e triangularizações  $(k, \phi)$  e  $(k', \psi)$  de  $A$  e  $B$  respectivamente, dizemos que  $(k', \psi)$  é um levantamento de  $(k, \phi)$  se  $k = \pi(k') = \{\pi(\sigma) : \sigma \in k'\}$  e  $\pi \circ \psi = \phi \circ \pi$ , onde  $\pi$  é a projeção de  $R^{n+1}$  em  $R^n$ .

Por essa definição e 2.25 temos que se um conjunto  $X$  possui um triangularização  $(\phi, k)$  com  $k$  um complexo fechado então  $X$  é fechado e limitado. Como já dissemos anteriormente nosso objetivo é provar que todo conjunto definível pode ser triangularizado. Por esse motivo não pedimos na definição de um complexo que esse seja fechado como é de costume.

Em um conjunto  $X$  triangularizado por  $(\phi, k)$ , se  $\sigma$  é um simplexo de  $k$  e  $s$  um subcomplexo de  $\bar{\sigma}$  então, assim como dizemos que  $s$  é uma face de  $\sigma$ , vamos dizer que  $\phi^{-1}(s)$  é uma face de  $\phi^{-1}(\sigma)$ .

A demonstração do teorema de triangularização consiste, entre outros passos, de um levantamento de uma triangularização obtida indutivamente sobre a projeção de um certo conjunto. Para tanto vamos precisar de algumas definições e resultados que nos ajudem a tratar da existência de levantamentos; esse será o nosso foco por hora.

**Definição 2.44.** Seja  $(\phi, k)$  uma triangularização de  $X$ , dizemos que uma função multivalorada (relativa a  $(\phi, k)$ ) em  $X$  é um conjunto da forma

$$F = \{f_{C,i} : C = \phi^{-1}(\sigma) \text{ para algum } \sigma \in K \text{ e } 1 \leq i \leq k(C)\}$$

onde cada  $f_{C,i}$  é uma função contínua definível de  $C$  em  $R$  tal que  $f_{C,i} < f_{C,i+1}$ . Dizemos ainda que:

- o gráfico de  $F$ , denotado por  $\tau(F)$ , é a união do gráfico das  $f_{C,i}$ .
- $F|_{C_0} = \{f_{C_0,i} : f_{C_0,i} \in F\}$
- $Part(F) = \{\tau(f) : f \in F\} \cup \{(f_{C,i}, f_{C,i+1}) : f_{C,i} \in F, i < k(C)\}$
- $X^F = \bigcup_{Y \in Part(F)} Y$

Note que  $Part(F)$  é uma partição do conjunto  $X^F$ .

Dizemos ainda que  $F$  é fechado se toda função  $f$  em  $F|_{C_0}$  possui uma extensão contínua  $\bar{f} : cl(C_0) \rightarrow R$  tal que  $\bar{f}$  restrita a cada face de  $C_0$  pertence a  $F$ . Por fim  $F$  é dita completa se é fechada e dados simplexos  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  de  $k$  com  $\sigma_2$  uma face de  $\sigma_1$  então para qualquer função  $f_2 \in F|_{\phi^{-1}(\sigma_2)}$  existe uma função  $f_1 \in F|_{\phi^{-1}(\sigma_1)}$  tal que  $f_2$  é a função que estende  $f_1$  em  $\phi^{-1}(\sigma_2)$ , isto é  $f_2 = \bar{f}_1|_{\phi^{-1}(\sigma_2)}$ .

Precisaremos do seguinte resultado sobre funções multivaloradas no teorema de triangularizações.

**Lema 2.45.** *Se  $F$  é uma função multivalorada sobre  $X$  relativa a  $(\phi, k)$  tal que  $\tau(F)$  é fechado e existe  $r \in R$  com  $\tau(F) \subset X \times [-r, r]$  então  $F$  é fechada.*

*Demonstração.* Antes de começarmos a demonstração lembramos que para  $f : R^n \rightarrow R$  definimos

$$\liminf_{x \rightarrow y} f(x) = \inf\{z \in R^* : R \models \forall \epsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x[x \in B_\delta(y) \wedge f(x) \in B_\epsilon(z)]\} = \inf(C_f)$$

note que quando  $f$  é definível o conjunto  $C_f$  é definível. Além disso se  $y \in cl(dom(f))$  então existe uma curva definível  $\gamma$  tendendo a  $y$ , sabemos que o limite lateral  $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(\gamma(t))$  existe e é imediato que ele pertence a  $C_f$ , assim temos um conjunto definível não vazio tal conjunto possui ínfimo de onde segue que nessas condições  $\liminf_{x \rightarrow y} f(x)$  está sempre bem definido. Podemos definir analogamente  $\limsup_{x \rightarrow y} f(x)$  e é rotineiro verificar que o limite de  $f$  em  $y$  existe se e só se  $\liminf_{x \rightarrow y} f(x) = \limsup_{x \rightarrow y} f(x)$ .

Seja  $f : C \rightarrow R$  uma função de  $F$ , e  $D$  uma face própria de  $C$  precisamos mostrar que  $f$  possui um extensão contínua definível  $\bar{f}$  em  $cl(C)$  tal que  $\bar{f}|_D \in F$ . Sabemos que  $f$  é contínua e definível e portanto temos  $\liminf_{x \rightarrow y} f(x) = l$  e  $\limsup_{x \rightarrow y} f(x) = L$  bem definidos para qualquer  $y \in (cl(C) - C)$ , além disso  $f$  é limitada por hipótese de onde segue que  $-\infty < l \leq L < \infty$ . Se tivermos  $l = L$  então o  $\lim_{x \rightarrow y} f(x)$  está bem definido e é igual a  $l \in R$ , suponha que não seja esse o caso e tome  $l < t < L$ , se tomarmos  $U$  uma vizinhança de  $y$  tal que  $U \cap C$  é definivelmente conexo(vamos assumir a existência de uma vizinhança com tal propriedade e além disso que ela pode ser tomada arbitrariamente pequena, não é difícil encontrar uma) então  $f$  deve assumir valores arbitrariamente próximos de  $l$  e  $L$ , em particular deve assumir valores maiores que  $t$  e valores menores que  $t$ , mas  $f$  é contínua e portanto deve assumir o valor  $t$  em algum ponto dessa vizinhança. Vemos então que  $f$  assume todos os valores de  $(l, L)$  em vizinhanças arbitrariamente pequenas de  $y$ , isso implica que  $y \times (l, L) \subset cl(\tau(f)) \subset \tau(F)$ , pois  $\tau(f) \subset \tau(F)$  e  $\tau(F)$  é fechado por hipótese. Por outro lado todo ponto  $(y, t) \in F$  é da forma  $(y, f_D, i(y))$  e assim só podemos ter um número finito de pontos dessa forma o que contradiz  $y \times (l, L) \subset \tau(F)$ . Concluimos assim que  $l = L = \lim_{x \rightarrow y} f(x)$  para qualquer  $y \in (cl(C) - C)$ .

Definimos assim

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in C, \\ \lim_{y \rightarrow x} f(y) & \text{se } x \in cl(C) - C. \end{cases}$$

Precisamos verificar que  $\bar{f}$  é definível contínua e que  $\bar{f}|_D \in F$ . Que é definível é imediato do fato de  $f$  ser definível, também é imediato que  $\bar{f}$  é contínua em  $C$ . Tome um ponto de  $y \in cl(C) - c$ , digamos  $y \in D$  e uma curva definível  $\gamma$  tendendo a  $y$ , como  $C$  e  $D$  são definíveis existe uma vizinhança  $I$  do zero tal que  $Img(\gamma_I)$  está contida em  $C$  ou  $D$ , se estiver contida em  $C$  então  $\bar{f}(\gamma(t)) \rightarrow \bar{f}(y)$  pela definição de  $\bar{f}$ , suponhamos então  $\gamma(t) \in D$  para todo  $t$ , pela definição de  $\bar{f}$  e continuidade de  $f$  temos

$$\lim_{t \rightarrow 0} \bar{f}(\gamma(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} [ \lim_{x \rightarrow \gamma(t)} f(x) ] = \lim_{x \rightarrow \gamma(0)} f(x) = f(y)$$

como precisávamos. Por último como  $\tau(\bar{f}|_D) \subset \tau(F)$  temos que

$$\tau(\bar{f}|_D) = \bigcup_{1 \leq i \leq k(D)} \tau(\bar{f}|_D) \cap \tau(f_{D,i})$$

e como todas as funções são contínuas  $\tau(\bar{f}_{D,i}) < \tau(\bar{f}_{D,i+1})$  é fácil ver que  $\tau(\bar{f}|_D) = \tau(\bar{f}_{D,i_0})$  para algum  $i_0$  de onde segue que  $\bar{f}|_D \in F$ .  $\square$

O lema abaixo nos diz exatamente como podemos usar funções multivaloradas para construir levantamentos de triangularizações, esse resultado é a ferramenta que nos falta para provar o teorema de triangularização.

**Lema 2.46.** Dada uma triangularização  $(\phi, k)$  de um conjunto fechado e limitado  $X \in \mathbb{R}^n$  e uma função multivalorada completa  $F$  em  $X$  (relativa a  $(\phi, k)$ ) temos que ou  $(\phi, k)$  ou sua divisão baricêntrica  $(\phi, b(k))$  podem ser levantados a uma triangularização  $(\psi, l)$  de  $X^F$  compatível com cada um dos conjuntos de  $\text{Part}(F)$ .

*Demonstração.* Como  $F$  é completa podemos nos perguntar se a condição abaixo é verdadeira:

$$\text{Dado } C \in \phi(k) \text{ e } f_{C,i}, f_{C,j} \in F|C \text{ com } i < j \text{ existe um vértice } c_0 \in C \text{ tal que } \bar{f}_1(c_0) \neq \bar{f}_2(c_0). \quad (2.7)$$

onde por um vértice de  $C$  queremos dizer a imagem por  $\phi$  de um vértice do simplexo que tem  $C$  como imagem. A condição acima pode ser falsa sobre  $(\phi, k)$ , porém  $f_{C,i} < f_{C,j}$  e portanto  $f_{C,i}(b(C)) < f_{C,j}(b(C))$ , onde  $b(C)$  é a imagem por  $\phi$  do baricentro do simplexo que tem  $C$  como imagem, assim se substituirmos  $(\phi, k)$  por  $(\phi, b(k))$  e  $F$  por  $F_b = \{f_{C,i}|_B : B \in b(k), f_{C,i} \in F\}$  temos que a condição 2.7 deve ser satisfeita. Além disso uma verificação direta mostra que  $F_b$  também é uma função multivalorada completa em  $X$  relativa a  $(\phi, b(k))$ , ou seja podemos assumir sem nenhuma perda que a condição 2.7 é satisfeita.

Vamos começar a construção de  $(\psi, l)$ , para isso vamos fixar uma ordem linear qualquer  $v_1, \dots, v_\theta$  nos vértices de  $k$ .

Dado um simplexo  $\sigma \in k$  sejam  $a_1, \dots, a_u$  os vértices desse simplexo na ordem fixada anteriormente e  $C = \phi(\sigma)$ . Tome  $f_{C,j}, f_{C,i+1} \in F$  e defina os pontos  $r_i = \bar{f}_{C,j}(\phi^{-1}(a_i))$  e  $s_i = \bar{f}_{C,j+1}(\phi^{-1}(a_i))$ . Podemos então tomar  $b_i = (a_i, r_i)$  e  $c_i = (a_i, s_i) \in \mathbb{R}^{n+1}$ .

Como para todo  $i$   $r_i \leq s_i$  e tal desigualdade é estrita para pelo menos um índice, temos pela proposição 2.42 que existe um complexo  $l(\bar{b}, \bar{c})$  cujo domínio é o fecho convexo de  $\{b_1, \dots, b_u, c_1, \dots, c_u\}$ . Assim  $|l(\bar{b}, \bar{c})|$  é o conjunto contendo  $[[b_1, \dots, b_u]]$ ,  $[[c_1, \dots, c_u]]$  e todos os pontos em retas ligando pontos desses complexos.

Vamos agora obter um homeomorfismo  $\Psi_{f,g} : [\bar{f}, \bar{g}] \rightarrow |l(\bar{b}, \bar{c})|$ . Temos que os pontos de  $[\bar{f}, \bar{g}]$  são da forma  $(x, t\bar{f}(x) + (1-t)\bar{g}(x))$  com  $0 \leq t \leq 1$  e  $x \in cl(C)$ , além disso  $\phi$  leva  $x$  em um ponto de  $[a_1, \dots, a_u]$ , ou seja

$$\phi(x) = \sum_{1 \leq i \leq u} p_i(x)a_i \text{ com } \sum p_i(x) = 1 \text{ e } 0 \leq p_i(x)$$

Definimos então

$$\Psi_{f,g}(x, t\bar{f}(x) + (1-t)\bar{g}(x)) = t \sum_{1 \leq i \leq u} p_i(x)b_i + (1-t) \sum_{1 \leq i \leq u} p_i(x)c_i$$

Essa função leva um ponto na reta ligando  $\bar{f}(x)$  e  $\bar{g}(x)$  em um ponto da reta entre  $\bar{b}(x)$  e  $\bar{c}(x)$  onde  $\bar{b}(x)$  é o ponto de  $[b_1, \dots, b_u]$  com as mesmas coordenadas baricêntricas de  $\phi(x)$ , e  $\bar{c}(x)$  o análogo para  $[c_1, \dots, c_u]$ . É imediato que essa função é injetora além disso vimos que os pontos de  $|l(\bar{b}, \bar{c})|$  são exatamente os pontos da forma  $t \sum_{1 \leq i \leq u} p_i(x)b_i + (1-t) \sum_{1 \leq i \leq u} p_i(x)c_i$  de onde  $\Psi_{f,g}$  é sobrejetora e portanto bijetora. Considere agora a função  $\Psi_0 : |[a_1, \dots, a_u]| \times [0, 1] \rightarrow [\bar{f}, \bar{g}]$  com

$$\Psi_0(y, t) = (\phi(y), t\bar{f}(\phi(y)) + (1-t)\bar{g}(\phi(y)))$$

A continuidade de  $\Psi_0$  segue da continuidade de  $\phi, \bar{f}$  e  $\bar{g}$ , além disso é imediato que a função é sobrejetora já que  $\phi$  é um homeomorfismo. Por outro lado calculando a composta em  $y = \sum p_i a_i$  temos

$$\Psi_{f,g} \circ \Psi_0(\sum p_i a_i, t) = t \sum p_i b_i + (1-t) \sum p_i c_i$$

que é claramente contínua, temos assim por 2.27 que nessas condições  $\Psi_{f,g}$  é contínua e por esse mesmo resultado vemos que é um homeomorfismo.

Vamos denotar por  $l(\bar{b})$  o complexo formado por  $(b_0, \dots, b_u)$  e todas as suas faces, note que  $|l(\bar{b})| = [b_0, \dots, b_u]$ . Definimos também  $\Psi_f : \tau(\bar{f}) \rightarrow |l(\bar{b})|$  como a função que leva  $(x, f(x))$  em  $\bar{b}(x)$ , i.e. no ponto de  $[b_0, \dots, b_u]$  com as mesmas coordenadas baricêntricas de  $\phi(x)$ , tal função é claramente um homeomorfismo.

Também será conveniente denotar por  $l(f)$  o complexo  $l(\bar{b})$  quando  $b_i = (a_i, \bar{f}(a_i))$ , e o mesmo para  $l(f, g)$ .

Podemos então tomar  $l$  como a união dos complexos da forma  $l(\bar{b})$  e  $l(\bar{b}, \bar{c})$  precisamos verificar agora que esse conjunto é um complexo fechado. É imediato que todas as faces de todos os simplexes de  $l$  estão em  $l$ , já que  $l$  é uma união de complexos. Basta então mostrarmos que a intersecção de quaisquer dois elementos de  $l$  é ou vazio ou um elemento de  $l$ .

Existem muitos casos a serem considerados, vamos analisar apenas um caso particular entre um elemento da forma  $l(\bar{b})$  e  $l(\bar{c}, \bar{d})$ , mesmo com essa restrição ainda temos alguns subcasos a considerar. Sejam então  $b_i = (a_i, \bar{f}_b(a_i))$ ,  $c_j = (a'_j, \bar{f}_c(a'_j))$  e  $d_j = (a''_j, \bar{f}_d(a''_j))$  podemos ter que o domínio de  $\bar{f}_b$  que vamos denotar por  $B$  é o mesmo domínio de  $\bar{f}_c$  e  $\bar{f}_d$  que será denotado por  $C$ , podemos ter ainda que  $B$  é uma face própria de  $C$ , que  $C$  é uma face própria de  $B$ , que  $\bar{B} \cap \bar{C}$  é uma face comum de  $B$  e  $C$  ou que essa intersecção é vazia. No último caso é imediato que  $l(\bar{b}) \cap l(\bar{c}, \bar{d}) = \emptyset$ , os outros casos precisam de uma análise mais cuidadosa, vamos nos restringir novamente ao caso em que  $\bar{B} \cap \bar{C}$  é uma face comum de  $B$  e  $C$  e vamos denotar essa face por  $B_0$ .

Como  $F$  é fechada sabemos que existem funções  $f_b^0, f_c^0$  e  $f_d^0$  em  $F$  tais que  $\bar{f}_b|_{B_0} = f_b^0$  e o mesmo para  $c$  e  $d$ , temos ainda dois casos a considerar, primeiro supomos que  $f_b^0 = f_c^0$  (analogamente poderíamos tomar  $f_b^0 = f_d^0$ ) e tomando por  $a_1^0, \dots, a_i^0$  os vértices de  $B_0$  temos que  $b_i^0 = (a_i^0, f_b^0(a_i^0)) = (a_i^0, f_c^0(a_i^0)) = c_i^0$  de onde  $l(f_b^0) = l(\bar{b}^0) = l(\bar{c}^0) = l(f_c^0)$ , por outro lado  $l(\bar{b}) \cap l(\bar{c}, \bar{d}) = l(f_b^0) \cap l(f_c^0, f_d^0) = l(f_b^0)$  que é um elemento de  $l$  como queríamos. Temos ainda o caso em que  $f_b^0$  não é igual a  $f_c^0$  ou  $f_d^0$ , vamos supor então que seja menor que  $f_c^0$  (o caso em que é maior que  $f_d^0$  sendo análogo) nesse caso podemos ter  $b_i^0 \neq c_i^0$  para todo  $i$  de onde segue que  $l(\bar{b}) \cap l(\bar{c}, \bar{d}) = \emptyset$  ou podemos ter alguns vértices em comum (não podemos ter todos iguais pela condição 2.7), nesse caso é imediato que  $l(\bar{b}) \cap l(\bar{c}, \bar{d}) = l(\bar{b}^0) \cap l(\bar{c}^0)$ . Sejam então  $\{\alpha_1^0, \dots, \alpha_\beta^0\}$  os vértices em comum, temos que  $(\alpha_1^0, \dots, \alpha_\beta^0)$  é uma face própria tanto de  $l(\bar{b}^0)$  como de  $l(\bar{c}^0)$  e como esses complexos são fechados todas as suas faces também pertencem a  $l(\bar{b}^0)$  e  $l(\bar{c}^0)$ . Além disso uma conta rápida usando coordenadas baricêntricas mostra que de fato todo elemento de  $|l(\bar{b}^0) \cap l(\bar{c}^0)|$  deve pertencer a  $[\alpha_1^0, \dots, \alpha_\beta^0] = |(\alpha_1^0, \dots, \alpha_\beta^0)|$ , segue que  $l(\bar{b}) \cap l(\bar{c}, \bar{d}) = l(\alpha_1^0, \dots, \alpha_\beta^0) \in l$  como queríamos.

Temos então que  $l$  é um complexo, para obter a triangularização precisamos exibir um homeomorfismo de  $l$  com  $X^F$ , esse homeomorfismo é obtida colando as funções  $\Psi_{f,g}$  e  $\Psi_f$ . Para podermos fazer tal colagem precisamos verificar que tais funções coincidem na intersecção de seus domínios, o domínio de uma função  $\Psi_{f,g}$  é  $[\bar{f}, \bar{g}]$  e domínio de  $\Psi_f$  é  $\tau(\bar{f})$ , e novamente temos muitos casos diferentes a considerar. Vamos tratar o caso entre  $\Psi_f$  e  $\Psi_g$ , a intersecção do domínio de tais funções é  $\tau(\bar{f}) \cap \tau(\bar{g})$ , denotando por  $C_f$  e  $C_g$  o domínio de tais funções vemos que a intersecção acima só não é vazio quando  $cl(C_f) \cap cl(C_g) \neq \emptyset$ , supondo então que  $C_f = C_g = \phi^{-1}(\sigma)$  essas funções podem coincidir apenas na pré-imagem de faces de  $\sigma$  (já que em  $\phi^{-1}(\sigma)$  temos  $f < g$ ), isso quer dizer que  $\tau(\bar{f}) \cap \tau(\bar{g}) = \cup \tau(h_i)$  com cada  $h_i \in F$  e com o domínio de cada  $h_i$  uma face própria de  $C$ , com isso basta mostrarmos que  $\Psi_f|_{\tau(h_i)} = \Psi_{h_i}$  mas uma verificação rápida na definição de  $\Psi_f$  mostra que esse é o caso. Todos os outros casos seguem de argumentos análogos juntos da observação de que  $\Psi_f|_{\tau(h_i)} = \Psi_{h_i}$ . Com isso podemos colar as funções  $\Psi_f$  e  $\Psi_{f,g}$  em uma função contínua  $\psi$  com domínio todo  $X^F$ .

Para ver que essa colagem é um homeomorfismo note que cada uma das funções  $\psi(f)$  e  $\psi(f, g)$  são bijetoras assim a colagem de todas elas é bijetora, a injetividade não é imediata e segue do fato de

$$Img(\Psi_1) \cap Img(\Psi_2) = \psi(dom(\Psi_1) \cap dom(\Psi_2))$$

Pois com isso vemos que se dois elementos  $x_1, x_2$  possuem a mesma imagem com um no domínio de  $\Psi_1$  e outro no domínio de  $\Psi_2$  então ambos elementos pertencem a parte comum dos domínios, porém em tal intersecção  $l$  temos  $\Psi_1|_l = \Psi_2|_l$  e ambas são bijetoras, de onde segue que  $x_1 = x_2$ . Por outro lado o domínio de  $\psi$  é fechado e limitado e assim 2.27 nos garante que  $\psi$  é um homeomorfismo, temos com isso que  $(\psi, l)$  é de fato uma triangularização de  $X^F$ .

Precisamos ainda verificar que  $(\psi, l)$  é um levantamento de  $(\phi, k)$ , para ver isso basta notar que se

$b_i = (a_i, s_i)$  e  $c_i = (a_i, r_i)$  então a projeção de qualquer simplexo de  $l(\bar{b}, \bar{c})$  é ou  $(a_1, \dots, a_u)$  ou uma face desse complexo e o mesmo para  $l(\bar{b})$ . Como todos os simplexos de  $l$  são de uma dessas formas com  $(a_1, \dots, a_u)$  um simplexo de  $k$  vemos que  $\pi(l) = k$ . Além disso note que se  $x \in X^F$  temos que  $x \in \tau(f_{i,C})$  ou  $x \in (f_{i,C}, f_{i+1,C})$ . No primeiro caso vamos escrever  $x = (x', f_{i,C}(x))$ , seja ainda  $\psi(\tau(f)) = l(\bar{b})$  com  $b_i = (a_i, f_{i,C}(\phi^{-1}(a_i)))$  temos então  $\psi(x) = \Psi_{f_{i,C}}(x', f(x)) = \bar{b}(x')$ , de onde pela definição de  $\bar{b}(x)$  vemos  $\pi(\psi(x)) = \pi(\bar{b}(x))$  é o ponto de  $(a_0, \dots, a_u)$  com as mesmas coordenadas baricêntricas de  $\phi(x')$ , ou seja  $\pi \circ \psi(x) = \phi \circ \pi(x)$ .

A última condição que precisamos verificar é a compatibilidade de  $(l, \psi)$  com  $Part(F)$ , mas isso é imediato das definições de  $l$  e  $\psi$  já que  $\psi((f_{C,i}, f_{C,i+1})) = l(f_{C,i}, f_{C,i+1})$  e  $\psi(\tau(f_{C,i})) = l(f_{C,i})$ .

□

Podemos agora finalmente demonstrar o teorema de triangularização.

**Teorema 2.47.** *Teorema de Triangularização*

Seja  $S \subset R^m$  um conjunto definível com  $S_1, \dots, S_n$  subconjuntos definíveis de  $S$ , então existe uma triangularização de  $S$  compatível com cada  $S_1, \dots, S_k$ .

*Demonstração.* A demonstração é feita por indução em  $m$ , no caso de  $m = 1$  temos que tanto  $S$  como cada  $S_i$  são uniões finitas de intervalos e pontos, é imediato portanto que tal triangularização exista. Vamos supor portanto que o resultado é válido para conjuntos de  $R^m$  e mostrar que deve ser válido em  $R^{m+1}$ . Nosso primeiro passo consiste em mostrar que é suficiente que o resultado seja válido para conjuntos fechados e limitados.

Para isso considere a função  $\sigma : R \rightarrow (-1, 1)$  tal que  $\sigma_0(t) = t/(\sqrt{1+t^2})$ , e  $\sigma(x_1, \dots, x_m) = (\sigma_0(x_1), \dots, \sigma_0(x_m))$  tome  $S' = \sigma(S)$  e  $S'_i = \sigma(S_i)$ , vemos que  $cl(S')$  é um conjunto fechado e limitado e que cada  $S'_i$  é um subconjunto de  $S'$ , tomando então uma triangularização  $(\phi, k)$  de tal conjunto compatível com cada  $S'_i$  e com  $S'$  temos que  $(\phi \circ \sigma, k_0)$ , onde  $k_0$  é o subcomplexo de  $k$  tal que  $|k_0| = \phi \circ \sigma(S)$ , é uma triangularização de  $S$  compatível com cada  $S_i$ .

Vamos portanto assumir que  $S$  é um conjunto fechado e limitado. Definimos então

$$T = \delta(S) \cup \delta(S_1) \cup \dots \cup \delta(S_k)$$

note que  $\dim T = \max(\dim \delta(S), \dots, \dim \delta(S_k)) < m + 1$ . Usando o lema de boas coordenadas 2.36 encontramos um automorfismo definível de  $R_1^m$  tal que a imagem de  $T$  por tal automorfismo possui fibras finitas. É imediato que podemos nos ater à imagem de  $T, S$  e  $S_1, \dots, S_k$  por tal automorfismo, já que uma triangularização de tais imagens pode ser usada para obter uma triangularização dos conjuntos desejados. Vamos portanto supor que  $T$  possui fibras finitas. Nessas condições nossa estratégia será encontrar uma triangularização de  $\pi(S)$  que possa ser levantada a uma triangularização de  $S$  satisfazendo as condições necessárias.

Tomando uma decomposição em células  $\mathcal{D}$  de  $T$  temos que  $\pi(\mathcal{D})$  é uma decomposição de  $\pi(T) = \pi(S)$ , que por sua vez é um conjunto fechado e limitado. Como  $T$  possui fibras finitas temos que

$$T = \bigcup_{A \in \mathcal{D}, 0 \leq i \leq k(A)} \tau(f_{A,i})$$

para certas funções  $f_{A,i}$ . Além disso  $\pi(T) \subset R^m$  e cada elemento de  $\pi(\mathcal{D})$  é um subconjunto de  $\pi(T)$  de modo que a hipótese de indução nos garante a existência de uma triangularização  $(\phi, k)$  de  $\pi(T)$  compatível com os elementos de  $\pi(\mathcal{D})$ . Tomando

$$F = \{f_{A,i}|_{|s|} : A \in \mathcal{D}, 0 \leq i \leq k(A), s \in k\}$$

temos que  $F$  é uma função multivalorada relativa a  $(\phi, k)$  tal que  $\tau(F) = T$ . Pelo lema 2.46 para levantarmos a triangularização  $(\phi, k)$  para  $\pi(T)^F$  precisamos que  $F$  seja completa. Como  $T$  é fechado e limitado o lema

2.45 nos garante que  $F$  é fechada, porém vamos ter que fazer algumas modificações em  $F$  para obter a completude.

Dado uma função  $f \in F$  temos que  $f : D_0 \rightarrow R$  onde  $D_0 \in \mathcal{D}$ , como  $F$  é fechado sabemos que essa função possui uma extensão contínua em  $cl(D_0)$ , compondo tal função com  $\phi$  obtemos uma função contínua de um subcomplexo fechado de  $k$  em  $R$  e pelo lema 2.41 temos que essa função pode ser estendida a uma função contínua  $f' : |k| \rightarrow R$ . Definimos então  $T' = \cup_{f \in F} \tau(f')$ . Como nada nos garante que as intersecções do tipo  $\tau(f') \cap S$  e  $\tau(f') \cap S_i$  são projetadas em imagens de subcomplexos de  $k$  precisamos tomar uma triangularização mais fina. Seja  $(k', \phi')$  uma triangularização de  $\pi(T) = \pi(T')$  compatível com os elementos de  $\pi(\mathcal{D})$  e também com  $\pi(\tau(f') \cap S_i)$  e  $\pi(\tau(f') \cap S)$  para todas as funções  $f'$  e todos os  $S_i$  (novamente a hipótese de indução nos garante a existência de tal triangularização), tomamos assim

$$F' = \{f'|_{|s|} : f \in F, s \in k'\}$$

com isso  $F'$  é uma função multivalorada relativa a  $(\phi', k')$ , além disso ela é fechada pois  $\tau(F') = T'$  que é um conjunto fechado e limitado, segue que  $F'$  é completa pela própria definição das funções  $f'$ . Isso nos permitir levantar  $(\phi', k')$  a uma triangularização  $(\psi, l)$  de  $\pi(T')^{F'}$  compatível com  $Part(F')$ .

Seja  $B = \phi'^{-1}(K_0)$  para algum  $K_0 \in k'$  e  $f \in F'|_B$ , como pedimos que  $(k', \phi')$  fosse compatível com  $\pi(\tau(f) \cap S)$ , temos que  $\tau(f) \subset S$  ou  $\tau(f) \cap S = \emptyset$ , pois caso contrário teríamos

$$\emptyset \neq \pi(\tau(f) \cap S) \subsetneq B$$

o que contradiz a compatibilidade, analogamente vemos que o mesmo é verdade para as intersecções com os conjuntos  $S_i$ . Temos além disso que se  $f, g$  são funções consecutivas de  $F'|_B$  então  $(f, g) \cap \delta(S) = \emptyset$  pois caso exista um elemento  $a$  em tal intersecção teríamos,

$$a \in T \Rightarrow a \in T' = \tau(F') \Rightarrow a \in \tau(h), h \in F'|_B \Rightarrow f < h < g$$

mas isso contradiz o fato de  $f$  e  $g$  serem funções consecutivos. Segue portanto da proposição 2.33 que ou  $(f, g) \subset S$  ou  $(f, g) \cap S = \emptyset$ , e novamente o mesmo é válido trocando  $S$  por  $S_i$ .

As duas observações acima juntamente com a compatibilidade de  $(\psi, l)$  com  $Part(F')$  nos garantem a compatibilidade de  $(\psi, l)$  com  $S$  e cada um dos  $S_i$ . Podemos ter ainda  $S \subsetneq \psi(l) = \pi(T')^{S'}$  mas nesse caso tudo que precisamos fazer é tomar um subcomplexo de  $l$  cuja imagem por  $\psi$  seja  $S$  e restringir  $\psi$  a esse subcomplexo.

□

O teorema de triangularização de conjuntos definíveis é um dos principais resultados no estudo da topologia de estruturas  $O$ -minimais, e será usado freqüentemente no restante do texto.

Dizemos que uma triangularização  $(\phi, k)$  de um conjunto  $X \subset R^n$  é estratificada sempre que  $k \subset R^1$  ou quando  $k \subset R^n$  para  $n > 1$  e  $(\phi, k)$  é um levantamento de uma triangularização  $(\psi, l)$  de  $\pi(k)$ .

Lembre que a construção realizada na demonstração não é realizada diretamente sobre  $S$ , mas sim sobre a sua imagem por dois homeomorfismos definíveis; primeiro usamos um homeomorfismo definível  $\sigma$  de  $S$  em um subconjunto de  $[-1, 1]^n$  e em seguida usamos o homeomorfismo obtido através do teorema de boas coordenadas. Caso o conjunto  $S$  seja fechado e limitado a utilização do homeomorfismo  $\sigma$  não é necessária; além disso, como mencionamos anteriormente, o homeomorfismo obtido pelo teorema de boas coordenadas pode ser suposto linear. Segue assim que a imagem de  $S$  (supondo esse fechado e limitado) por um homeomorfismo linear  $\alpha$  possui uma triangularização estratificada (lembrando que na demonstração do teorema a triangularização de  $\alpha(S)$  é um levantamento de uma triangularização de  $\pi(\alpha(S))$ ); dizemos nesse caso que a triangularização obtida é quase estratificada.

Podemos obter, como consequência do teorema de triangularização, um critério para a existência de

bijeções definíveis entre conjuntos definíveis quaisquer:

- Se  $X$  e  $Y$  são conjuntos definíveis então existe uma bijeção definível entre  $X$  e  $Y$  se e somente se os dois conjuntos possuem a mesma dimensão e característica de Euler.

Na seção anterior mencionamos o termo característica de Euler, porém ainda não apresentamos nenhuma definição para isso. Seja  $X$  um conjunto definível e  $\mathcal{D}$  uma decomposição de  $X$  em células, denote por  $\mathcal{D}_i$  o conjunto de células com dimensão  $i$ . Podemos definir

$$e(X) = \sum_i (-1)^i |\mathcal{D}_i|$$

onde  $|\mathcal{D}_i|$  denota o número de elementos em  $\mathcal{D}_i$ . Não é imediato que a definição acima não depende da escolha de  $\mathcal{D}$ , porém não é difícil mostrar que esse de fato é o caso.

Esse resultado, assim como muitos outros sobre característica de Euler em estruturas  $O$ -minimais, podem ser encontrados em [vdD98]. Um fato de particular interesse é que a característica de Euler, assim como dimensão, é um invariante definível, ou seja é preservada por bijeções definíveis (isso nos dá um lado do resultado mencionado acima).

Também é comum definir a característica de Euler de um complexo  $k$  como

$$e(d) = \sum_i (-1)^i k_i$$

onde  $k_i$  é o número de simplexes de dimensão  $i$  em  $k$ . Usando a observação acima não é difícil provar que tal definição coincide com a apresentada anteriormente.

Dessa maneira dados conjuntos  $X$  e  $Y$  sabemos pelo teorema de triangularização que ambos são definivelmente homeomorfos a complexos  $k_X$  e  $k_Y$  de tal forma que  $k_X$  possui a mesma dimensão e característica de Euler de  $X$  e o mesmo para  $Y$ . Por outro lado resultados clássicos sobre complexos podem ser diretamente adaptados para o caso  $O$ -minimal, em particular pode-se verificar que dados complexos com mesma dimensão e característica de Euler existe um homeomorfismo linear entre tais conjuntos. Vemos com isso que se  $X$  e  $Y$  possuem a mesma dimensão e característica de Euler podemos encontrar uma bijeção entre esses conjuntos, como queríamos.

### 2.3.4 Propriedades de Fibras e o Teorema de Trivialização

Vamos provar agora alguns resultados adicionais sobre fibras em conjuntos definíveis; tais resultados serão importantes para provarmos o teorema de trivialização.

O objetivo principal dos próximos resultados é obter, a partir de um dado comportamento sobre fibras de um conjunto  $S$ , uma decomposição de  $S$  em células tal que cada célula possua um comportamento semelhante. O primeiro resultado de tal natureza que vamos provar é o seguinte:

**Lema 2.48.** *Seja  $S \subset R^{m+n}$  um conjunto definível tal que  $S_x$  é um aberto de  $R^n$  para todo  $x \in R^m$ . Então existe uma partição  $\mathcal{D}$  de  $R^m$  tal que  $S \cap (D \times R^n)$  é um aberto de  $D \times R^n$  para toda célula  $D \in \mathcal{D}$ . O mesmo resultado é válido se trocarmos fechados por abertos.*

*Demonstração.* Tratamos primeiro do caso de abertos, o caso dos fechados sendo uma consequência. A demonstração é feita por indução em  $m$ . No caso  $m = 0$  temos que a condição do teorema é equivalente a  $S$  ser aberto e portanto o resultado é válido. Supondo então que tal propriedade valha para  $m$  vamos mostrar que vale para  $m + 1$ .

Tome uma célula aberta  $C \subset R^m$ , vamos mostrar que existe uma célula aberta  $D \subset C$  tal que  $(D \times R^n) \cap S$  é aberto em  $D \times R^n$ . Para isso vamos dividir  $C$  em dois conjuntos definíveis:

- $C_1 = \{c \in C : (\{c\} \times S_c) \cap cl(C \times R^n - S) \neq \emptyset\}$
- $C_2 = \{c \in C : (\{c\} \times S_c) \cap cl(C \times R^n - S) = \emptyset\}$

Temos então dois casos, no primeiro  $C_2$  possui interior não vazio, nesse caso sabemos que  $C_2$  deve conter uma célula aberta  $D$ , os pontos  $d \in D$  satisfazem

$$(\{d\} \times S_d) \cap cl(C \times R^n - S) = \emptyset$$

mas  $cl(D \times R^n - S) \subset cl(C \times R^n - S)$  de onde segue

$$(\{d\} \times S_d) \cap cl(D \times R^n - S) = \emptyset \quad (2.8)$$

Mas isso significa que  $D \times R^n - S$  é fechado em  $D \times R^n$ , pois caso contrário

$$[cl(D \times R^n - S) - (D \times R^n - S)] \cap D \times R^n \neq \emptyset$$

e nesse caso teríamos um ponto do tipo  $(d, t) \in cl(D \times R^n - S)$  com  $d \in D$  e  $t \in S_d$ , o que contradiz 2.8, concluindo esse caso.

No segundo caso, em que  $C_2$  possui interior vazio vemos que  $C_1$  deve possuir interior não vazio. Vamos mostrar que isso não pode acontecer. Podemos então tomar uma célula aberta  $D \in C_1$  e não é difícil verificar que todo  $d \in D$  satisfaz  $(\{d\} \times S_d) \cap cl(D \times R^n - S) \neq \emptyset$ . Em particular para todo  $d \in D$  existe  $t_d \in S_d$  tal que  $(d, t_d) \in cl(D \times R^n - S)$ . Como  $S_d$  é aberto para cada ponto  $d$  existe um  $\epsilon(d)$  tal que  $|x - t(d)| < \epsilon(d)$  implica  $x \in S_d$ . Por escolha definível, e possivelmente reduzindo  $D$  a uma célula menor, podemos tomar  $t : D \rightarrow S_d$  e  $\epsilon : D \rightarrow R$  como funções contínuas definíveis.

Tome então o conjunto definível  $D_0 = \{(x, y) \in D \times R^n : (x \in D) \text{ e } (|y - t(x)| < \epsilon(x))\}$ , esse é um subconjunto de  $S$  claramente aberto em  $D \times R^n$ , por outro lado ele contém os pontos do tipo  $(d, s(d)) \in cl(D \times R^n - S)$ , mas isso é uma contradição já que, restringindo o espaço ambiente e a topologia a  $D \times R^n$ , o complementar de  $S$  em relação a  $D$  está contido no complementar de  $D_0$ , de onde  $cl(D \times R^n - S) \subset cl(D \times R^n - D_0) = D \times R^n - D_0$ , e assim  $(d, s(d))$  deveria pertencer tanto a  $D_0$  quanto a seu complementar. Isso conclui a demonstração da afirmação acima.

Podemos com isso tomar  $A \subset R^m$  como o conjunto de todos os pontos  $a$  tais que exista uma vizinhança  $V$  de  $a$  com  $(V \times R^n) \cap S$  um conjunto aberto de  $V \times R^n$ , tal conjunto é definível. O resultado que acabamos de obter nos garante que a dimensão de  $R^m - A$  é estritamente menor que  $m$ . Tome então uma decomposição em células  $\mathcal{D}_0$  de  $R^m$  compatível com  $A$ , é imediato que as células contidas em  $A$  satisfazem a condição exigida. Se uma célula  $B \in \mathcal{D}_0$  não está contida em  $A$  e possui dimensão  $d < m$  podemos tomar  $p_d$  um homeomorfismo dessa célula em uma célula aberta de  $R^d$  e usar um homeomorfismo

$$p : B \times R^n \rightarrow p(B) \times R^n$$

que leva  $(s, t)$  em  $(p(s), t)$ , podemos ainda pela hipótese de indução obter uma decomposição  $\mathcal{D}'_B$  de  $p(B)$  satisfazendo as condições do teorema para o conjunto  $p((B \times R^n) \cap S)$ , não é difícil verificar que esse conjunto satisfaz as hipóteses do teorema, podemos ainda tomar uma nova divisão em células  $\mathcal{D}_B$  compatível com os elementos de  $\mathcal{D}$  e  $p^{-1}(\mathcal{D}'_B)$ , temos nesse caso que todas as células contidas tanto em  $A$  como em  $B$  estarão nas condições do teorema. Repetindo esse processo para todas as células  $B$  que não estiverem contidas em  $A$  obtemos a decomposição desejada.

A demonstração acima cuida do caso de conjuntos abertos, porém se tomarmos  $S$  um conjunto cujas fibras são fechadas, vemos que seu complementar está nas condições do lema, isso nos dá uma partição  $\mathcal{D}$  de  $R^n$  tal que  $(R^{m+n} - S) \cap (D \times R^n)$  é aberta em  $D \times R^n$ , e conseqüentemente vemos que  $S \cap (D \times R^n)$  é fechada em tal conjunto.

□

O resultado abaixo é uma conseqüência imediata desse lema.

**Corolário 2.49.** *Sejam  $S' \subset S \subset R^{m+n}$  e  $A \subset R^m$  conjuntos definíveis tais que  $S'_a$  é fechado em  $S_a$  para todo  $a \in A$  então existe uma partição de  $A$  em subconjuntos definíveis  $A_1, \dots, A_k$  de forma que  $S' \cap (A_i \times R^n)$  é fechado em  $S \cap (A \times R^n)$ . Novamente o mesmo sendo válido quando trocamos fechado por aberto.*

*Demonstração.* Trocando  $S$  por  $(A \times R^n) \cap S$  temos que  $S'_a \cap (A \times R^n)$  é fechado em  $S_a \cap (A \times R^n)$  para todo  $a \in R^n$ . Seja  $T = \{x \in R^{m+n} : x \in cl(S'_a) \text{ para algum } a \in A\}$ , então  $T_a = cl(S'_a)$  e assim  $T_a \cap S_a = S'_a$ , mas  $T$  está nas condições do lema anterior, o que nos garante uma decomposição de  $A$  em subconjuntos  $A_1, \dots, A_k$  tais que  $T \cap (A_1 \times R^n)$  é fechado. Isso por sua vez implica que

$$S' \cap (A_1 \times R^n) = [T \cap (A_1 \times R^n)] \cap [S \cap (A_1 \times R^n)]$$

é fechado em  $S \cap (A_1 \times R^n)$ . □

O próximo resultado, bastante parecido com o primeiro lema dessa seção, é o resultado que precisamos para provar o teorema de trivialização.

**Lema 2.50.** *Seja  $S \subset R^{m+n}$  um conjunto definível e  $f : S \rightarrow R^k$  uma função definível, seja ainda  $A \subset R^m$  um conjunto tal que  $f|_{(A \times R^n) \cap S}$  é injetora e  $f_a : S_a \rightarrow R^k$  um homeomorfismo sobre a imagem, onde  $f_a(t) = f(a, t)$ . Então existe uma partição de  $A$  em conjuntos definíveis  $A_1, \dots, A_j$  tal que  $f|_{(A_i \times R^n) \cap S}$  é um homeomorfismo sobre a imagem.*

*Demonstração.* Como pedimos que  $f|_{(A \times R^n) \cap S}$  seja injetora temos que qualquer restrição dessa função continuará sendo injetora. Vamos obter uma decomposição de  $A$  em subconjuntos  $B_1, \dots, B_j$  tais que as restrições  $f|_{(B_i \times R^n) \cap S}$  sejam funções contínuas, para isso tudo o que vamos usar é que cada  $f_a$  é contínua. Em seguida vamos utilizar um argumento parecido para a inversa de tal função e por fim usaremos os resultados acima para encontrar a decomposição desejada.

Para isso note  $\tau(f_a) = \{(b, c) \in R^{n+k} : f_a(b) = f(a, b) = c\} = \tau(f)_a$  é fechado em  $S_a \times R^k = (S \times R^k)_a$  (pela continuidade de  $f_a$ ) e pelo corolário acima existe uma decomposição de  $A$  em conjuntos  $C_1, \dots, C_l$  tais que  $\tau(f) \cap [(C_i) \times R^{n+k}] = \tau(f)|_{[C_i \times R^n] \cap S}$  é fechado em  $[S \times R^k] \cap [(C_i) \times R^{n+k}] = ([C_i \times R^n] \cap S) \times R^k$ .

Suponha agora que  $C_0^i = \{c \in C_i : f \text{ não é contínua em } (c, x) \text{ para algum } (c, x) \in S\}$  é aberto em  $C_i$ . Por escolha definível podemos tomar uma função  $\gamma : C_0^i \rightarrow R^n$  tal que  $f$  não é contínua em  $(c, \gamma(c))$ , e podemos restringir o domínio a um subconjunto  $B \subset C_i$  aberto tal que  $\gamma$  é contínua em  $B$ .

Pela continuidade de cada  $f_a$  dado  $k_0$  existe  $\delta_a > 0$  tal que  $(\|\gamma(a) - y\| < \delta_a) \Rightarrow (\|f(a, y)\| < k_0)$ , novamente por escolha definível e restringindo o domínio (porém mantendo aberto) podemos tomar  $\delta$  com uma função contínua definível de  $a$ , restringindo o domínio de  $\delta$  ainda mais a uma vizinhança de um  $a_0$  podemos encontrar um conjunto  $B_0$  aberto em  $C_0^i$  tal que  $\delta_0 = \inf\{\delta(a) : a \in B_0\} > 0$ . Isso significa que  $f$  é limitada em

$$\{(c, \gamma(c) + y) \in S : c \in B_0, -\delta_0 < y < \delta_0\}$$

mas isso significa que  $f$  é limitada com gráfico fechado em uma vizinhança de  $(c, \gamma(c))$  e portanto contínua, o que contradiz a escolha de  $\gamma$ .

Segue assim que a dimensão de  $C_0^i$  é estritamente menor que a de  $C_i$ , dividindo então  $C_i$  em  $C_0^i$  e seu complementar e repetindo o processo sobre o complementar um número finito de vezes (no máximo a dimensão de  $C_i$ ) obtemos os conjuntos  $B_1, \dots, B_j$  desejados.

Vamos encontrar o homeomorfismo desejado agora.

Como as funções  $f_a$  são um homeomorfismo temos que  $f_a^{-1} : f(S_a) \rightarrow S_a$  é uma função contínua. Se definirmos então o conjunto  $\Theta = \{(x, z) : x \in S \text{ e } z \in f(S_x)\}$  e a função  $g : \Theta \rightarrow R^{m+n}$  tal que  $g(x, z) = f_x^{-1}(z)$  temos que essa função satisfaz a condição de  $g_a : \theta_x \rightarrow R^{n+m}$  ser contínua para todo  $a \in S$ . Isto nos dá, pelo resultado acima, uma decomposição de  $S$  em conjuntos  $D_1, \dots, D_j$  tais que cada  $g|_{(D_i \times R^k) \cap \Theta}$ . Podemos com isso tomar uma decomposição de  $S$  em células  $A_1, \dots, A_j$  compatível com  $D_i$

e  $B_i$ , dessa maneira temos que tanto  $g|_{(A_i \times R^k) \cap \Theta}$  como  $f|_{(A_i \times R^k) \cap S}$  são contínuas. Vamos encontrar uma decomposição  $\mathcal{C}$  de  $R^m$  compatível com cada  $A_i$  tal que  $f^{-1}|_{f((C_i \times R^k) \cap S)}$  é contínua, isso é suficiente para concluir a demonstração já que tomando uma divisão compatível com cada uma dessas células encontramos o resultado desejado.

Tome  $z \in f((A_i \times R^k) \cap S)$ , então  $z = f(a, y)$  de onde segue que  $z \in \Theta_a$  para algum  $a$  (tal  $a$  não é necessariamente único). Tome por escolha definível uma função definível  $\gamma : f((A_i \times R^k) \cap S) \rightarrow R^m$  que leva  $z$  no elemento  $a$  tal que  $z \in \Theta_a$ , tome ainda uma decomposição  $\mathcal{C}$  compatível com cada  $A_i$  tal que  $\gamma$  é contínua em cada célula de  $\mathcal{C}$ . Temos nesse caso que  $f^{-1}(z) = g(\gamma(z), z)$ , e pela continuidade de  $\gamma$  e  $g$  em cada célula de  $\mathcal{C}$  vemos que  $f^{-1}$  é contínua em cada uma dessas células como precisávamos.  $\square$

Por fim temos o resultado abaixo, que é obtido através de uma combinação do teorema de triangulização com um uso do teorema da compacidade de teoria de modelos além de outros resultados básicos de tal teoria.

Denotamos por  $Th(\mathcal{R})$  a teoria dada pelo conjunto de sentenças satisfeitas pro  $\mathcal{R}$ .

**Lema 2.51.** *Dado um conjunto definível  $S \subset R^{m+n}$  existe uma função definível  $f : S \rightarrow R^k$  tal que para cada  $a \in R^m$  a função  $f_a : S_a \rightarrow R^k$  é um homeomorfismo sobre uma coleção de faces do simplexo  $(e_1, \dots, e_k)$ .*

*Demonstração.* Vamos denotar, como vínhamos fazendo, por  $\mathcal{R} = (R, \leq, \dots)$  uma estrutura  $O$ -minimal de primeira ordem para uma linguagem  $L$  estendendo a linguagem de anéis ordenados  $(+, \cdot, 0, 1, \leq)$ . Temos que  $S$  é definível em tal linguagem com parâmetros ou seja existe uma fórmula de primeira ordem  $\phi(\bar{z}, \bar{x}, \bar{y})$  na linguagem de  $L$  e  $t \in R^l$  tal que

$$S = \{(a, b) \in R^{m+n} : \mathcal{R} \models \phi(t, a, b)\}$$

Como já vimos dado uma outra  $L$ -estrutura  $\mathcal{R}'$  elementarmente equivalente a  $\mathcal{R}$  temos que  $\mathcal{R}'$  também deve ser  $O$ -minimal. Dessa maneira dados quaisquer  $t' \in R^l$  e  $a' \in R^m$  temos pelo teorema de triangulização que o subconjunto de  $R^n$  definido por  $\phi(t', a', \bar{y})$  é homeomorfo a uma coleção  $K$  de faces de um simplexo  $(e_1, \dots, e_k)$ , onde  $k = k(t', a')$  depende desses parâmetros, vamos denotar tal homeomorfismo por  $h_{t', a'}$ . Usando novamente a  $O$ -minimalidade de  $\mathcal{R}'$  sabemos que essa estrutura possui funções de Skolem definíveis, em particular existe uma fórmula  $\psi'_{t', a'}(\bar{z}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{w})$  tal que  $\psi'_{t', a'}(t', a', \bar{y}, \bar{w})$  define o gráfico de  $h_{t', a'}$ . Usando a fórmula  $\psi'_{t', a'}$  podemos escrever uma fórmula de primeira ordem  $\psi_{t', a'}(\bar{z}, \bar{x})$  de forma que  $\mathcal{R}' \models \psi_{t', a'}(t_0, a_0)$  se e somente  $\psi'_{t', a'}(t_0, a_0, \bar{y}, \bar{w})$  define o gráfico de um homeomorfismo entre o conjunto definido por  $\phi(t_0, a_0, \bar{y})$  e  $K$ .

É imediato que  $\mathcal{R}' \models \psi_{t_0, a_0}(t_0, a_0)$ , ou seja todo elemento  $(t_0, a_0)$  satisfaz ao menos uma das fórmulas  $\psi_{t', a'}$ . Se tomarmos diferentes modelos de  $Th(\mathcal{R})$ , isto é diferentes estruturas elementarmente equivalentes a  $\mathcal{R}$ , iremos encontrar, possivelmente, novas fórmulas do tipo  $\psi_{t_0, a_0}$ . Se tomarmos  $\Pi$  o conjunto formado por todas essas fórmulas  $\psi_{t_0, a_0}$  com  $t_0, a_0$  variando sobre todos os elementos de todos os modelos da teoria de  $\mathcal{R}$ , temos que em qualquer estrutura  $\mathcal{R}'$  elementarmente equivalente a  $\mathcal{R}$  um elemento  $\theta \in R^{l+m}$  qualquer deve satisfazer ao menos uma sentença de  $\Pi$ .

Vamos usar o teorema da compacidade para mostrar que existe um subconjunto finito de  $\Pi$  tal que todo elemento de  $R^{l+m}$ , para  $\mathcal{R}'$  um modelo qualquer da teoria de  $\mathcal{R}$ , satisfaça uma dessas sentenças. Suponha que não seja esse o caso, adicione então novos símbolos de constantes  $t_1, \dots, t_l$  e  $a_1, \dots, a_m$  a  $L$ , denotando por  $\Psi$  o conjunto de todas as sentenças do tipo

$$\neg \psi_{t', a'}(t_1, \dots, t_l, a_1, \dots, a_m)$$

e tomando  $\Psi_0 \subset \Psi$  um subconjunto finito qualquer então por hipótese existe um elemento  $\theta$  de  $R^{l+m}$  que

satisfaz  $\neg\psi_{t',a'}(\theta)$  para qualquer  $\psi_{t',a'}$  tal que

$$\neg\psi_{t',a'}(t_1, \dots, t_l, a_1, \dots, a_m)$$

aparece em  $\psi_0$ . Usando as coordenadas de tal elemento para interpretar  $t_1, \dots, t_l, a_1, \dots, a_m$  podemos claramente estender  $\mathcal{R}'$  a um modelo de  $Th(\mathcal{R}') \cup \Psi_0$ , em particular por compacidade podemos obter um modelo  $\mathcal{V}$  de  $Th(\mathcal{R}') \cup \Psi$ , mas essa teoria não pode possuir modelo já que nenhuma sentença do tipo  $\psi_{t_0,a_0}(t_1, \dots, t_l, a_1, \dots, a_m)$  seria verdade em tal modelo, e por outro lado vimos acima que todo elemento de  $V^{l+m}$  deve satisfazer uma dessas fórmulas já que  $\mathcal{V}$  é elementarmente equivalente a  $\mathcal{R}$  (esquecendo a interpretação das novas constantes).

Isso nos diz em particular que cada elemento  $(t, a) \in R^{l+m}$  da nossa estrutura inicial  $\mathcal{R}$  satisfaz uma sentença  $\psi_{t_0,a_0} \in \Pi_0$  onde  $\Pi_0 \subset \Pi$  é um conjunto finito, vamos enumerar tais sentenças por  $\psi_1, \dots, \psi_p$ . Fixando  $t$  como os parâmetros iniciais usados para definir  $S$  temos uma partição de  $R^m$  em conjuntos definíveis  $A_1, \dots, A_p$  tais que  $A_1 = \{a \in R^m : \mathcal{R} \models \psi_1(t, a)\}$ ,  $A_2 = \{a \in R^m : \mathcal{R} \models \psi_2(t, a)\} - A_1$  e assim por diante. Em cada um desses conjuntos temos pelas fórmulas  $\psi_i$  que existe um homeomorfismo  $h_i$  das fibras  $S_a$  com  $a \in A_1$  em uma coleção de faces do simplexo  $(e_1, \dots, e_{k_i})$ , como temos uma quantidade finita de números  $k_i$  e cada simplexo dessa maneira pode ser visto como uma face de um simplexo de dimensão maior podemos supor que todas as funções  $h_i$  chegam em um único simplexo  $(e_1, \dots, e_k)$  para  $k$  o máximo dentre os  $k_i$ . Definimos com isso a função  $f : S \rightarrow R^k$  tal que  $f|_{A_i}(a, b) = h_i(b)$ , e como já vimos anteriormente essa é a função que precisamos. □

Os dois últimos resultados são tudo o que precisamos sobre fibras para provar o teorema de trivialização. Antes disso precisamos primeiro de algumas definições que nos permitam enunciar tal teorema.

**Definição 2.52.** Dizemos que uma função definível  $f : A \rightarrow B$  é definivelmente trivial se existe um conjunto definível  $C$  e um homeomorfismo  $h : A \rightarrow B \times C$  tal que  $f(a) = \pi \circ h(a)$ , ou seja o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{h} & B \times C \\ & \searrow f & \downarrow \pi \\ & & B \end{array}$$

Nesse caso dizemos que  $(C, h)$  é uma trivialização de  $f$ .

Dados conjuntos  $A_1, \dots, A_k \subset A$  dizemos ainda que  $f$  é definivelmente trivial com relação a  $A_1, \dots, A_k$  se existe uma trivialização  $(C, h)$  de  $f$  e subconjuntos  $C_1, \dots, C_k$  de  $C$  tais que  $(C_i, h|_{A_i})$  é uma trivialização de  $A_i$ , ou seja o diagrama abaixo comuta com  $h|_{A_i}$  um homeomorfismo.

$$\begin{array}{ccc} A_i & \xrightarrow{h|_{A_i}} & B \times C_i \\ & \searrow f & \downarrow \pi \\ & & B \end{array}$$

Temos como consequência imediata de tal definição que  $\dim(B) \leq \dim(A) = \dim(B) + \dim(C)$ . Além disso vemos que  $h \circ f^{-1}(b) = C$ , o que significa que a pré imagem de todos os pontos de  $B$  por  $f$  são homeomorfas. O teorema central dessa seção consiste em encontrar uma decomposição da imagem e do domínio de uma função  $f$  que nos dá uma trivialização das restrições adequadas em relação aos conjuntos relevantes. O enunciado preciso sendo:

**Teorema 2.53.** *Dada uma função definível  $f : A \rightarrow B$  e conjuntos  $A_1, \dots, A_k \subset A$  existe uma partição de  $B$  em conjuntos definíveis  $B_1, \dots, B_l$  tal que  $f|_{f^{-1}(B_i)} : f^{-1}(B_i) \rightarrow B_i$  é definivelmente trivial com relação a  $A_1 \cap f^{-1}(B_i), \dots, A_k \cap f^{-1}(B_i)$ .*

Porém antes de provarmos tal resultado precisaremos ainda de um lema.

**Lema 2.54.** *Dado um conjunto definível  $S \subset R^{m+n}$  existe uma partição de  $R^m$  em subconjuntos definíveis  $A_1, \dots, A_k$ , conjuntos definíveis  $C_1, \dots, C_k$  e homeomorfismos  $h_1, \dots, h_k$  fazendo o diagrama abaixo comutar:*

$$\begin{array}{ccc} S \cap (A_i \times R^n) & \xrightarrow{h_i} & A_i \times C_i \\ & \searrow \pi & \downarrow \pi \\ & & A_i \end{array}$$

*Demonstração do lema 2.54.* De acordo com o 2.51 existe um complexo  $(e_1, \dots, e_l)$  de  $R^l$  e uma função definível  $f : S \rightarrow R^l$  tal que  $f_a : S_a \rightarrow R^k$  é um homeomorfismo de  $S_a$  em uma coleção de faces de  $(e_1, \dots, e_l)$ , vamos denotar por  $C_i$  tais coleções de faces,  $1 \leq i \leq l_0$ , é fácil notar que o conjunto

$$B_i = \{x \in R^m : f_x \text{ é um homeomorfismo de } S_x \text{ em } C_i\}$$

é definível. Além do mais cada  $x \in R^m$  pertence a apenas um conjunto  $B_i$ . Isso nos dá portanto uma partição de  $R^m$  em conjuntos  $B_1, \dots, B_l$  tal que em cada  $B_i$  a função  $f_x$  é um homeomorfismo de  $[S \cap (B_i \times R^n)]_x$  em  $C_i$ . Definimos uma função  $h : S \rightarrow R^{m+k}$  com  $h(x, y) = (x, f_x(y))$  temos que  $h_x = f_x$  e portanto um homeomorfismo de  $[S \cap (B_i \times R^n)]_x$  em  $C_i$  além disso se  $h(x, y) = h(z, w)$  então  $(x = z)$  pois  $\pi \circ h = \pi$ , assim  $h(x, y) = h_x(y) = h(x, w) = h_x(w)$  e como  $h_x$  é um homeomorfismo temos  $y = w$ , vemos portanto que  $h$  é injetora.

Nessas condições o lema 2.50 nos garante que existe uma partição de  $B_i$  em conjuntos  $A_j^i$  tal que  $h|_{S \cap (A_j^i \times R^n)}$  é um homeomorfismo de  $S \cap (A_j^i \times R^n)$  sobre a sua imagem, ou seja sobre  $A_i \times C_i$ . Como já mencionamos  $\pi \circ h = \pi$  de onde  $\pi \circ h|_{S \cap (A_j^i \times R^n)} = \pi|_{A_i \times C_i}$  como no enunciado do lema. Fazendo isso para todos os conjuntos  $B_i$  vemos que os conjuntos  $A_j^i$  nos dão a partição desejada. □

*Demonstração do teorema 2.53.* Nós vamos provar aqui somente a existência de subconjuntos  $B_1, \dots, B_k$  de  $B$  tais que cada função  $f|_{f^{-1}(B_i)}$  é trivial, ignorando as condições de compatibilidade com os conjuntos  $A_j \cap f^{-1}(B_i)$ , essas condições podem ser obtidos com algum esforço através de novas divisões da imagem.

Seja  $A \subset R^n$  e  $B \subset R^m$ . Chame de  $\tau'(f) = \{(f(x), x) : x \in A\} \subset R^{m+n}$  o gráfico reverso de  $f$  e tome  $i : A \rightarrow \tau'(f)$  a função que leva  $x$  em  $(f(x), x)$ , essa é uma função definível e injetora e portanto existe uma subdivisão de  $R^n$  em células  $D_1, \dots, D_l$  tal que  $i$  é um homeomorfismo sobre a imagem em cada uma dessas células. Pelo lema acima e pelo teorema de decomposição em células podemos então encontrar uma partição de  $\tau'(f)$  em conjuntos  $B_1, \dots, B_k$  tal que  $h_i$  e  $i|_{i^{-1}(B_i)}$  são homeomorfismos e o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} i^{-1}(B_i) & \xrightarrow{i} \tau'(f) \cap (B_i \times R^n) & \xrightarrow{h'_i} B_i \times F_i \\ & \searrow \pi & \downarrow \pi \\ & & B_i \end{array}$$

Temos ainda que  $\pi \circ i = f$  e  $h_i = h'_i \circ i$  é um homeomorfismo, obtemos assim o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} i^{-1}(B_i) & \xrightarrow{h} & B_i \times E_i \\ & \searrow f & \downarrow \pi \\ & & B_i \end{array}$$

como queríamos. □

Note que nessa demonstração usamos o gráfico reverso de  $f$ , que denotamos por  $\tau'(f)$ . As fibras  $\tau'(f)_x$  de tal conjunto consistem precisamente dos pontos de  $A$  cujo a imagem via  $f$  é  $x$ . Isso nos dá uma maneira de interpretar o teorema de trivialização: se pensarmos em  $f$  como uma parametrização de subconjuntos de  $A$  através das fibras  $\tau'(f)_x$  o que o teorema nos diz é que existe uma partição do conjunto de parâmetros em conjuntos  $B_i$  de forma que todos os conjuntos da forma  $\tau'(f)_x$ , definidos por parâmetros em um mesmo  $B_i$ , são homeomorfos.

Assim como no caso do teorema de triangularização, o teorema de trivialização possui inúmeras aplicações (ver [vdD98]). Vamos utilizar esse resultado somente no final do próximo capítulo para calcular certas homologias.



## Capítulo 3

# Homologia

Nesse capítulo serão desenvolvidos os conceitos de homologia singular e simplicial para estruturas  $O$ -minimais, seguidos de algumas aplicações.

A teoria que vamos apresentar, assim como algumas de suas aplicações, foi originalmente desenvolvida por Arthur Anderson Woehde em sua tese de doutorado [Woe96]. Tal teoria é em vários aspectos similar à teoria clássica desenvolvida em  $\mathbb{R}$ . Porém argumentos clássicos envolvendo compacidade e completude não se aplicam ao nosso caso; usaremos os resultados desenvolvidos no capítulo anterior para contornar tais problemas.

Em [Del91] o autor apresenta uma teoria de homologia para conjuntos semialgêbricos. Tal teoria é bastante complicada e depende de resultados extremamente avançados. Por esse motivo muitos consideravam desejável uma teoria mais elementar de homologia para conjuntos semialgêbricos. Quando restringimos as estruturas em consideração a corpos reais fechados os resultados que vamos obter nos dão tal teoria. Porém é importante notar que muitas estruturas  $O$ -minimais estendem corpos reais fechados de maneira não trivial, possuindo conjuntos definíveis que não são semi-algêbricos; e assim teoria apresentada possui exemplos que não se enquadram nos casos de [Del91].

Começaremos a nossa abordagem pela homologia simplicial, em seguida desenvolveremos o caso da homologia singular que será a ferramenta principal em nossas aplicações. Parte do motivo para essa abordagem está no fato de muitos dos resultados sobre homologia singular serem conseqüências do caso simplicial.

Toda a teoria desenvolvida está baseado em noções algébricas ligadas a complexos de cadeia; as definições e resultados relevantes podem ser encontradas no apêndice.

Uma teoria de homologia tem como objetivo descrever uma sequência de funtores  $H_n$  saindo de uma categoria de pares de espaços topológicos (por um par de espaços topológicos queremos dizer dois espaços  $X, X'$  com  $X'$  um subespaço de  $X$ , definiremos tais categorias precisamente adiante) e chegando na categoria de grupos abelianos; que denotaremos por  $\mathbf{Ab}$ . Definiremos dois funtores  $H_n$ , um para o caso singular e outro para o caso simplicial. Tais funtores tetam domínios diferentes; no caso simplicial  $H_n$  estará definido somente sobre pares de conjuntos definíveis, fechados e limitados; enquanto no caso singular o funtor estará definido sobre todos os pares de conjuntos definíveis.

Tal restrição, no caso simplicial, é necessária, já que a homologia simplicial é definida através da homologia de complexos via triangularizações, e essa por sua vez só está definida sobre complexos fechados.

Chamamos de homologia de  $X$  a sequência de grupos abelianos  $H_n(X, \emptyset)$ . A principal característica de tais grupos é que esses são um invariante topológico definível; ou seja conjuntos definivelmente homeomorfos possuem grupos de homologia isomorfos; o que nos dá um critério para afirmar que não existem homeomorfismos definíveis entre dois conjuntos. No entanto é importante notar que a homologia de um conjunto não classifica ele a menos de homeomorfismos definíveis; existem conjuntos com grupos de homologia isomorfos que não são definivelmente homeomorfos.

Além de ser um invariante topológico queremos que os nossos funtores  $H_n$  possuam outras quatro propriedades, conhecidas como os axiomas de Eilenberg-Steenrod:

1. Axioma da Dimensão: Se  $X$  é um conjunto unitário então a homologia  $H_n(X)$  é o grupo trivial para todo  $n$ .
2. Axioma de Exatidão: Existe uma sequência de transformações naturais  $d_n : H_n \rightarrow H_{n-1} \circ G$ , onde  $G$  é o funtor que leva um par  $(X, X')$  em  $(X', \emptyset)$  tal que para todo par  $(X, X')$  a seguinte sequência é exata:

$$\dots \longrightarrow H_n(X', \emptyset) \xrightarrow{H_n(i)} H_n(X, \emptyset) \xrightarrow{H_n(j)} H_n(X, A) \xrightarrow{d_{(X,A),n}} H_{n-1}(A, \emptyset) \longrightarrow \dots$$

onde  $i$  e  $j$  são as respectivas inclusões

3. Axioma de Homotopia: Se  $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  são morfismos na categoria de pares em questão, e  $f$  é definivelmente homotópica a  $g$  então  $H_n(f) = H_n(g)$  para todo  $n$ .
4. Axioma de Excisão: Dado um par  $(X, X')$  e um subconjunto  $U$  de  $X$  tal que  $cl(U) \subset int(X')$  todos na categoria em questão temos que se  $i$  é a inclusão de  $(X - U, X' - U)$  em  $(X, A)$  então  $H_n(i)$  é um isomorfismo para todo  $n$ .

Note que no axioma de homotopia pedimos que as funções sejam definivelmente homotópicas (o que significa, naturalmente, que existe uma homotopia definível entre tais conjuntos). A versão desse axioma para a teoria usual de homologia sobre  $\mathbb{R}$  obviamente não envolve a palavra definível; de resto todos os axiomas são precisamente iguais aos axiomas usuais.

Originalmente esses axiomas foram desenvolvidos como um critério para estabelecer a equivalência de certos funtores de homologia. Podemos definir os coeficientes de uma homologia  $H_*$  como o grupo  $H_0(X)$  para  $X$  um conjunto qualquer formado por dois pontos (lembre que estamos tratando de homologia reduzida). O que tal critério nos diz é que quaisquer funtores sobre a categoria de CW-complexos com o mesmo grupo de coeficientes e satisfazendo os axiomas de Eilenberg-Steenrod são isomorfos (ver [Phi97]).

Como nossos axiomas não são exatamente iguais aos usuais não podemos utilizar tal resultado. Porém, de acordo com [Woe96] e [Art08], a demonstração encontrada em [Phi97] quando restrita a poliedros pode ser adaptada de maneira direta para o nosso caso através do teorema de triangularização. Dessa forma os funtores de homologia simplicial e singular nos dão grupos isomorfos quando calculados sobre poliedros. Por outro lado, sabemos do teorema de triangularização que todo conjunto fechado e limitado é definivelmente homeomorfo a um poliedro, e como homologia é um invariante topológico obtemos o seguinte resultado:

**Proposição 3.1.** *Todos funtores de homologia, com mesmo grupos de coeficiente, sobre a categoria de pares de conjuntos fechados e limitados com as funções definíveis contínuas como morfismo, satisfazendo os axiomas de Eilenberg-Steenrod são isomorfos.*

Na última seção usaremos esse resultado para obter um método que nos permita calcular a homologia singular de certos conjuntos através da homologia de complexos simpliciais (e essa por sua vez pode ser calculado de maneira usual, já que possui um caráter puramente combinatório).

Em [Art08] os autores demonstram um resultado análogo sobre a categoria de pares de conjuntos definíveis com funções contínuas e definíveis como morfismos. Segue de tal teorema que a teoria de homologia singular apresentadas aqui coincide, no caso semi-algébrico, com a teoria apresentada em [Del91].

Na última seção veremos que muitos conjuntos definíveis de estruturas  $O$ -minimais, como bolas e esferas, possuem grupos de homologia isomorfos aos conjuntos análogos de  $\mathbb{R}$ ; embora em alguns casos os métodos para calcular tais grupos sejam completamente distintos. Isso nos permitirá provar resultados análogos a resultados clássicos de maneira bastante simples. Os resultados que vamos obter dessa maneira são análogos ao teorema de separação de Jordan, o teorema da invariância de domínio e o teorema do ponto fixo de Brouwer.

Como já mencionamos os resultados apresentados nesse capítulo são muitas vezes análogos a resultados clássicos de topologia algébrica, e em alguns casos possuem demonstrações também análogas. Quando tais demonstrações forem simples ou de pouco interesse elas serão omitidas; em particular evitaremos demonstrações de caráter puramente combinatório. Tentaremos com isso enfatizar as diferenças entre tais teorias.

Tomaremos em todo o capítulo  $\mathcal{R} = (R, \leq, +, \cdot, 0, 1, \dots)$  uma estrutura  $O$ -minimal estendendo um corpo.

### 3.1 Homologia Simplicial

Nessa seção temos como objetivo desenvolver a teoria de homologia simplicial em estruturas  $O$ -minimais. Assim como no caso clássico em  $\mathcal{R}$  vamos proceder associando grupos de homologia a complexos e em seguida usaremos triangularizações para estender tais resultados a certos conjuntos definíveis. Por fim demonstraremos que a teoria obtida respeita os axiomas de Eilenberg-Steenrod.

Nesse processo muitos dos resultados e conceitos que vamos apresentar se referem exclusivamente a complexos e suas propriedades combinatórias. É importante notar que dado um complexo  $K$  podemos identificar seus simplexes com um subconjunto de vértices contido no conjunto de todos os vértices de  $K$ ,  $\{v_0, \dots, v_i\}$ , fazendo tal identificação temos que  $K$  não passa de um subconjunto de  $\mathcal{P}(\{v_0, \dots, v_i\})$ , em tal conjunto a natureza dos pontos  $\{v_0, \dots, v_i\}$  não tem nenhuma importância e podemos estudar suas propriedades sem fazer nenhuma referência à estrutura do espaço ambiente contendo os pontos  $v_i$ , em particular qualquer resultado apresentado nesse contexto é completamente análogo a um resultado clássico e o mesmo vale para sua demonstração.

Temos por outro lado vários resultados que se referem não a tais propriedades combinatórias dos complexos mas a propriedades envolvendo os conjuntos gerados por eles, isto é propriedades de  $|K|$ . Obviamente  $|K|$  é um subconjunto definível da estrutura em questão e quando analisamos objetos como funções contínuas definíveis em  $|K|$  é natural que propriedades particulares de estruturas  $O$ -minimais desempenhem um papel essencial, ou seja não é de se esperar que possamos adaptar diretamente os resultados desenvolvidos sobre  $\mathbb{R}$  para o nosso caso. Isso nos dá problemas de duas naturezas distintas, aqueles de caráter combinatório no qual a estrutura do espaço ambiente não desempenha nenhum papel e resultados envolvendo noções topológicas e de definibilidade, esses últimos estão diretamente ligados às propriedades de estruturas  $O$ -minimais que estudamos até o momento. Como mencionamos os resultados do primeiro tipo são completamente análogos a resultados conhecidos e por isso serão deixados em segundo plano de forma a não desviar a atenção da parte inovadora da teoria, aquela que usa os resultados sobre estruturas  $O$ -minimais conseguir construir uma teoria de homologia para conjuntos e funções definíveis.

#### 3.1.1 Homologia em Complexos Simpliciais

Vamos começar a construção dos complexos de cadeia associados a complexos simpliciais, a construção é extremamente padrão e de caráter puramente combinatório não fazendo diferença se estamos trabalhando em  $\mathbb{R}$  ou em uma outra estrutura  $O$ -minimal, por esses motivos a apresentação será concisa. Detalhes podem ser encontrados em livros como [Rot88].

**Definição 3.2.** Dado um complexo simplicial fechado  $K$  associamos uma ordem qualquer a seus vértices:  $v_1, v_2, \dots, v_{i_K}$ . Definimos então:

- $A_n(K)$  é o grupo abeliano livre que tem como base o conjunto das  $n$ -uplas ordenadas  $(v_{i_0}, \dots, v_{i_n})$  tais que o conjunto  $\{v_{i_0}, \dots, v_{i_n}\}$  gera um simplexo de  $K$  (não fazemos exigências do gênero  $i_j < i_{j+1}$  ou  $v_{i_j} \neq v_{i_l}$  se  $i_j \neq i_l$ ).

Note que os elementos da base de  $A_n(K)$  ou possuem um vértice repetido ou são da forma  $(v_{i_0}, \dots, v_{i_n})$  ou da forma  $(v_{\sigma(i_0)}, \dots, v_{\sigma(i_n)})$  para alguma sequência  $i_0, \dots, i_n$  estritamente crescente e alguma permutação  $\sigma$ . Além disso é imediato que se  $(v_{i_0}, \dots, v_{i_n})$  pertence à base então todas as permutações pertencem.

Em particular dado um elemento  $\sum_j k_j s_j + \sum_j k_j p_j \in A_n(K)$ , com  $p_j$  os elementos que possuem vértices repetidos, temos que  $s_j = (v_{\sigma(i_0)}, \dots, v_{\sigma(i_n)})$  para alguma sequência  $i$  e permutação  $\sigma$  e portanto:

$$k_j s_j = -\text{sign}(\sigma) k_j [(v_{i_0}, \dots, v_{i_n}) - \text{sign}(\sigma)(v_{\sigma(i_0)}, \dots, v_{\sigma(i_n)})] + \text{sign}(\sigma) k_j (v_{i_0}, \dots, v_{i_n})$$

- Tomamos  $A_n^0(K)$  como o subgrupo livre de  $A_n(K)$  gerado pelos simplexos  $(v_{i_0}, \dots, v_{i_n}) \in K$  tais que  $i_0, \dots, i_n$  é estritamente crescente,  $A_n^1(K)$  como o subgrupo livre de  $A_n(K)$  gerado pelos elementos da forma

$$(v_{i_0}, \dots, v_{i_n}) - \text{sign}(\sigma)(v_{\sigma(i_0)}, \dots, v_{\sigma(i_n)})$$

com  $(v_{i_0}, \dots, v_{i_n}) \in K$ ,  $i_0, \dots, i_n$  estritamente crescente e  $\sigma$  uma permutação não trivial, por fim  $A_n^2(K)$  o subgrupo livre  $A_n(K)$  gerado por sequências contendo vértices repetidos.

Definimos

$$C_n(K) = A_n(K) / (A_n^1(K) \oplus A_n^2(K))$$

Pela observação acima temos que  $A_n(K) = A_n^0(K) \oplus A_n^1(K) \oplus A_n^2(K)$ , segue assim que  $C_n(K) \cong A_n^0(K)$ , onde o isomorfismo leva os elementos  $(v_{i_0}, \dots, v_{i_n}) \in A_n^0(K)$  em sua respectiva classe de equivalência em  $C_n(K)$ , tal classe será denotado por  $[v_{i_0}, \dots, v_{i_n}]$ .

Denotamos por  $(v_{i_0}, \dots, \hat{v}_{i_j}, \dots, v_{i_n})$  a  $(n-1)$ -upla  $(v_{i_0}, \dots, v_{i_{j-1}}, v_{i_{j+1}}, \dots, v_{i_n})$ .

- $\delta_n : C_n(K) \rightarrow C_{n-1}(K)$  é definida nos elementos da base de  $C_n(K)$  (mais precisamente de  $A_n^0(K)$ ) por:

$$\delta_n([v_{i_0}, \dots, v_{i_n}]) = \sum_{0 \leq j \leq n} (-1)^j [v_{i_0}, \dots, \hat{v}_{i_j}, \dots, v_{i_n}]$$

e estendida linearmente a todo  $C_n(K)$

Note que a função  $\delta_n$  só está bem definida porque o simplexo  $K$  é fechado, por esse motivo ao falarmos de homologia simplicial temos de nos restringir a tais simplexos e, eventualmente, a conjuntos definíveis fechados e limitados.

A definição acima envolve uma ordem arbitrária dos vértices de  $K$ , não é difícil verificar que ordens distintas geram complexos de cadeia  $C_*(K)$  isomorfos, mais precisamente dada uma nova ordem a função que leva um elemento da forma  $[v_{i_0}, \dots, v_{i_k}]$  em  $(-1)^{\text{sign}(\sigma)}([v_{\sigma(i_0)}, \dots, v_{\sigma(i_k)}])$  para a permutação  $\sigma$  que ordena os vértices  $v_i$  de acordo com a nova ordem e é estendida linearmente a todo  $C_*(K)$  é um isomorfismo.

**Teorema 3.3.** *Dado um complexo simplicial  $K$  o par  $(C_*(K), \delta_*(K))$  é um complexo de cadeia.*

A única coisa que temos para demonstrar no teorema acima é que a composição  $\delta_{n-1} \circ \delta_n$  é a função nula. Novamente isso é uma questão puramente combinatória e a resposta pode ser encontrada em livros de topologia algébrica.

Além disso note que os elementos de  $C_0(K)$  são da forma  $c = \sum_{(i \in \text{vert}(K))} z_i c_i$  se definirmos então  $\tilde{\delta}_0(c) = \sum z_i$ , é fácil verificar que substituindo  $\delta_0$  por  $\tilde{\delta}_0$  obtemos um complexo de cadeia aumentado, tal complexo é denotado por  $\tilde{C}_*(K)$ .

Sempre que nos referirmos a  $H_*(K)$  estaremos nos referindo aos grupos de homologia associados ao complexo de cadeia  $\tilde{C}_*(K)$ , adiante definiremos homologia sobre conjuntos de  $R^n$  e essa também será denotada por  $H_*$ , é importante manter em mente portanto a distinção entre complexos de cadeia e conjuntos de  $R^n$ . Tais grupos são conhecidos como a homologia reduzida de  $K$ , e é comum denotá-los por  $\tilde{H}_*(K)$  usando a notação  $H_*(K)$  para a homologia associada a  $C_*(K)$ , como não vamos tratar da homologia de  $C_*(K)$  usaremos essa notação e nomenclatura por comodidade.

Outra questão de natureza puramente combinatória que não vamos demonstrar é a seguinte: Dado um simplexo  $s$  denotamos por  $\bar{s}$  o complexo formado pelo conjunto das faces de  $s$  (incluindo o próprio  $s$ ), temos assim que  $\tilde{C}_*(\bar{s})$  é acíclico.

A definição apresentada para os grupos  $C_*(K)$  pode parecer desnecessariamente complicada, já que poderíamos ter definido  $C_n(K)$  simplesmente como  $A_n^0(K)$ , o ganho de tal complicação está na consequente facilidade na apresentação de algumas definições e demonstração de alguns resultados como os seguintes:

**Proposição 3.4.** *Dado um mapa de vértices  $\phi : K \rightarrow L$  então o mapa  $\phi^* : C_*(K) \rightarrow C_*(L)$  definido nas bases de  $C_n(K)$  por*

$$\phi^*([v_{i_0}, \dots, v_{i_n}]) = [\phi(v_{i_0}), \dots, \phi(v_{i_n})]$$

*é um mapa de cadeia.*

Note que só podemos dar uma definição dessa forma graças às complicações anteriores. Verificar que tal mapa está bem definido é rotineiro, por outro lado a afirmação de que esse é um mapa de cadeia segue de:

$$\begin{aligned} \delta\phi^*([v_{i_0}, \dots, v_{i_n}]) &= \delta([\phi(v_{i_0}), \dots, \phi(v_{i_n})]) = \sum_{0 \leq j \leq n} (-1)^j [\phi(v_{i_0}), \dots, \hat{\phi}(v)_{i_j}, \dots, \phi(v_{i_n})] = \\ &= \sum_{0 \leq j \leq n} (-1)^j \phi^*([v_{i_0}, \dots, \hat{v}_{i_j}, \dots, v_{i_n}]) = \phi^* \left( \sum_{0 \leq j \leq n} (-1)^j [v_{i_0}, \dots, \hat{v}_{i_j}, \dots, v_{i_n}] \right) = \phi^* \delta([v_{i_0}, \dots, v_{i_n}]) \end{aligned}$$

É importante notar podemos definir uma categoria  $\mathbf{K}$  que tem como objetos os complexos e como funtores os mapas de vértices, tal categoria é de caráter puramente combinatório não importando em nada qual a estrutura  $O$ -minimal em questão, em linguagem de teoria de categorias obtemos, ao variar a estrutura  $O$ -minimal, categorias isomorfas. Além disso a construção acima nos dá funtores de homologia  $H_n : \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{Ab}$ , o comportamento de tais funtores é bastante simples e conhecido, resultados sobre o assunto podem ser encontrados em livros como [Rot88].

Em particular temos que os isomorfismos em tal categoria são mapas de vértices  $f : K \rightarrow L$  tal que existe uma mapa de vértices  $g : L \rightarrow K$  com  $f \circ g_L = id$  e  $g \circ f = id_K$ . Também é um resultado conhecido que complexos isomorfos possuem grupos de homologia isomorfos.

Nesse texto estaremos interessados na teoria de homologia de pares, por isso vamos denotar a categoria de pares de complexos  $(K, K')$  com  $K' \subset K$  e morfismos  $f : (K, K') \rightarrow (L, L')$  funções de vértices que levam vértices de  $K'$  em vértices  $L'$  por  $\mathbf{K}_0^2$ .

### 3.1.2 Estendendo o Funtor de Homologia a Conjuntos Definíveis

A discussão anterior tratava puramente de complexos simpliciais, agora porém queremos "importar" os funtores de homologia definidos sobre complexos simpliciais para categorias envolvendo conjuntos definíveis. Obviamente esse processo ocorre através do teorema de triangularização e como alguém poderia adivinhar vamos definir a homologia de um conjunto definível fechado e limitado  $X$  de maneira que essa seja isomorfa à homologia de um complexo  $K$  triangulando  $X$ .

Existe aqui um certo conflito de notação, pois vamos definir complexos de cadeia e homologia sobre subconjuntos de  $R^n$  e também denotaremos esses funtores por  $C_\star$  e  $H_\star$ . Por esse motivo é importante notar a diferença entre  $K$  um complexo simplicial e  $|K|$  um subconjunto de  $R^n$  evitando assim ambiguidades sobre  $C_\star(K)$  definido anteriormente e  $C_\star(|K|)$  que pretendemos definir ainda.

Tal abordagem já nos dá uma restrição sobre os conjuntos que iremos trabalhar, pois a homologia de um complexo  $K$  só está definida quando esse é fechado, isso nos diz que os conjuntos  $X$  devem ser fechados e limitados. A maior parte dos resultados desenvolvidos nessa seção tem como objetivo obter uma definição que não dependa da triangularização escolhida e dizer como dada uma função definível contínua  $f$  entre conjuntos definíveis podemos associar morfismos  $H_n(f)$  entre os respectivos grupos de homologia.

As definições abaixo nos dão as categorias sobre as quais vamos fazer as primeiras extensões das noções de complexos de cadeia e homologia.

**Definição 3.5.** Vamos denotar por  $\mathbf{K}^2$  a categoria que tem como objetos pares de complexos  $(K, K_0)$  com  $K_0 \subset K$ , morfismos entre objetos  $(K, K_0)$  e  $(L, L_0)$  serão as funções definíveis contínuas  $f : |K| \rightarrow |L|$  tais que  $f(K_0) \subset f(L_0)$ . Um morfismo  $(K, K_0) \xrightarrow{f} (L, L_0)$  em tal categoria é dito compatível se dado  $s \in K$  existe  $l \in L$  tal que  $f(s) \subset l$ . A subcategoria de  $\mathbf{K}^2$  cujos objetos são os mesmos de  $\mathbf{K}^2$  e possui apenas os morfismos compatíveis é denotada por  $\mathbf{K}_{comp}^2$ .

Vale notar que os morfismos dessas categorias envolvem noções de continuidade e definibilidade, tais noções fazem com que os resultados seguintes não sejam nem de uma natureza puramente combinatória e tão pouco sejam repetições de resultados da teoria usual sobre  $\mathbb{R}$ , na verdade muitos deles não são válidos em tal contexto quando removemos as hipóteses de definibilidade.

Note que tais categorias têm pares de complexos como objetos, vimos anteriormente como associar complexos de cadeia e grupos de homologia a um complexo e quando nos referirmos  $C_\star(K)$  e  $H_\star(K)$  estaremos nos referindo às definições já mencionadas. Os objetos da nossa categoria são no entanto pares de complexos  $(K, K')$ , como  $K'$  é um subcomplexo simplicial de  $K$  temos que  $\tilde{C}_\star(K')$  é um subcomplexo de cadeia de  $\tilde{C}_\star(K)$ , isto é cada  $\tilde{C}_n(K')$  é um subgrupo abeliano livre de  $\tilde{C}_n(K)$  e  $\delta'_n$  é a restrição de  $\delta_n$  a esse subgrupo. Com isso podemos dar a seguinte definição:

**Definição 3.6.**  $\tilde{C}_\star(K, K')$  é definido como complexo de cadeia tal que  $\tilde{C}_n(K, K') = \tilde{C}_n(K) / \tilde{C}_n(K')$ , o operador de bordo  $\delta_n^{(K, K')}$  em  $\tilde{C}_\star(K, K')$  é o operador induzido por  $\delta_n$ , isto é  $\delta_n^{(K, K')}([v]) = [\delta_n(v)]$  onde  $v \in \tilde{C}_n(K)$  e  $[v]$  é a sua classe de equivalência em  $\tilde{C}_\star(K, K')$ . É imediato que  $\delta_n^{(K, K')} \circ \delta_{n-1}^{(K, K')}$  é o operador nulo de onde segue que  $\tilde{C}_\star(K, K')$  é de fato um complexo de cadeia, definimos  $H_\star(K, K')$  como a homologia do complexo  $\tilde{C}_\star(K, K')$ .

Temos assim que  $\tilde{C}_\star(K, \emptyset) = \tilde{C}_\star(K)$  e o mesmo para homologia. Utilizaremos essa identificação constantemente.

Nosso próximo passo é dizer como os morfismos de  $\mathbf{K}^2$  e  $\mathbf{K}_{comp}^2$  se estendem a homomorfismos entre os grupos de homologia. Para realizarmos tais construções vamos utilizar o teorema de modelos acíclicos e portanto precisamos especificar algumas categorias que nos permitam fazer isso. Em alguns casos vamos tratar apenas de complexos e não de pares, as definições acima são utilizadas de maneira natural, por exemplo um mapa(ou morfismo) compatível entre complexos  $K$  e  $L$  é simplesmente um morfismo compatível entre os pares  $(K, \emptyset)$  e  $(L, \emptyset)$ .

Dado um complexo  $K$  vamos denotar por  $\mathcal{A}(K)$  a categoria cujos objetos são os subcomplexos fechados de  $K$  e morfismos as inclusões. Além disso dado um mapa compatível entre simplexes fechados  $f : |K| \rightarrow |L|$  queremos associar um funtor  $\mathcal{A}(f) : \mathcal{A}(L) \rightarrow \mathcal{A}(K)$ , para isso definimos  $\mathcal{A}(f)(L') = \{t \in K : f(t) \subset |L'|\}$ . Precisamos verificar na definição acima que  $\{t \in K : f(t) \subset |L'|\}$  é de fato um subcomplexo fechado de  $K'$ , tome então  $t_0$  uma face de um simplexo  $t \in \{t \in K : f(t) \subset |L'|\}$  nesse caso:

$$|t_0| \subset cl(|t|) \Rightarrow f(|t_0|) \subset f(cl(|t|)) \subset cl(|L'|) = |L'|$$

de onde  $t_0 \in \{t \in K : f(t) \subset |L'|\}$  como precisávamos. Precisamos também definir como  $\mathcal{A}(f)$  age nos morfismos de  $\mathcal{A}(L)$ , um morfismo de tal categoria é uma inclusão do tipo  $i : |L''| \rightarrow |L'|$ , por outro lado pela própria definição vemos que  $\mathcal{A}(L'')$  é um subcomplexo fechado de  $\mathcal{A}(L')$ , assim definimos  $\mathcal{A}(f)(i)$  como a inclusão de  $\mathcal{A}(L'')$  em  $\mathcal{A}(L')$ . Podemos definir por fim os funtores  $\tilde{C}_*^K : \mathcal{A}(K) \rightarrow \mathbf{Comp}_{aug}$  que leva cada subcomplexo fechado  $K'$  de  $K$  no complexo de cadeia aumentado  $\tilde{C}_*(K')$  e que leva uma inclusão  $i : K'' \rightarrow K'$  na inclusão de  $\tilde{C}_*(K')$  em  $\tilde{C}_*(K'')$ .

Dada um morfismo compatível  $K \xrightarrow{f} L$  temos dois funtores que vão de  $\mathcal{A}(L)$  em  $\mathbf{Comp}_{aug}$ , sendo eles  $\tilde{C}_*^L$  e  $\tilde{C}_*^K \circ \mathcal{A}(f)$ . Temos o seguinte resultado sobre tais funtores.

**Lema 3.7.** *Dada uma morfismo compatível  $K \xrightarrow{f} L$  existe uma transformação natural de cadeias aumentadas indo de  $\tilde{C}_*^K \circ \mathcal{A}(f)$  em  $\tilde{C}_*^L$ . Além disso quaisquer duas transformações naturais entre tais funtores são naturalmente homotópicas em cadeia.*

*Demonstração.* Tome  $M_L = \{\bar{s} : s \in L\}$  um conjunto de modelos em  $\mathcal{A}(L)$ , lembrando que  $\bar{s}$  é o complexo fechado formado por todas as faces  $s$ . Como dissemos anteriormente  $\tilde{C}_*^L(\bar{s}) = \tilde{C}_*(\bar{s})$  é acíclico, e assim é um conjunto de modelos acíclicos de  $\tilde{C}_*^L$ .

Queremos mostrar agora que  $\tilde{C}_n^K \circ \mathcal{A}(f)$  é livre com base em  $M_L$  para todo  $n$ . Vamos antes de mais nada fixar uma ordem  $v_0, \dots, v_n$  nos vértices de  $K$ . Como  $f$  é compatível para cada  $t \in K$  existe um único  $s \in L$  tal que  $f(t) \subset s$ , vamos denotar tal elemento por  $s_t$ . Considere  $\{\bar{s}_t : s \in K\} = M_0 \subset M$ , para cada  $\bar{s}_t \in M_0$  é imediato que  $t \in \mathcal{A}(f)(\bar{s}_t)$ . Sejam então  $v_i(0), \dots, v_i(j)$  os vértices de  $t$  com  $i$  uma sequência estritamente crescente, temos que  $|v_i(0), \dots, v_i(j)| \in \tilde{C}_n^K \circ \mathcal{A}(f)$ , chamemos tal elemento de  $v_t$ .

Dado  $\bar{s} \subset L$  um complexo fechado  $\tilde{C}_n^K \circ \mathcal{A}(f)(\bar{s})$  é igual a  $\tilde{C}_n(\mathcal{A}(f)(\bar{s}))$  e portanto é um grupo abeliano livre, além disso  $\tilde{C}_n(\mathcal{A}(f)(\bar{s}))$  não é nada mais que o grupo abeliano livre gerado por  $v_t$  tal que  $f(t) \subset |\bar{s}|$ . Como os únicos morfismos de  $\mathcal{A}(L)$  entre  $\bar{s}_t$  e  $\bar{s}$  são as inclusões temos que

$$\{\tilde{C}_n \circ \mathcal{A}(h)(v_t) \in \tilde{C}_n \circ \mathcal{A}(f)(\bar{s}) : t \in K \text{ e } h \text{ percorre os morfismos de } \bar{s}_t \text{ em } \bar{s}\} = \{v_t : f(t) \subset |\bar{s}|\}$$

é uma base de  $\tilde{C}_n \circ \mathcal{A}(f)(\bar{s})$ . Concluimos assim que  $\tilde{C}_n \circ \mathcal{A}(f)$  é abeliano livre com base em  $M$ . Mas nessas condições a primeira parte do corolário do teorema dos modelos acíclicos A.7 nos garante o resultado.  $\square$

Nessa demonstração vimos que  $\tilde{C}_n^K \circ \mathcal{A}(f)$  é livre com base em  $M$  e que  $\tilde{C}_n^L$  é acíclico nesse conjunto de modelos, em algumas demonstrações posteriores voltaremos a usar o teorema de modelos acíclicos sobre esses funtores, em particular a segunda parte do teorema que tem hipóteses adicionais sobre o comportamento desses objetos, quando fizermos isso utilizaremos esses resultados sem demonstração.

Assim dado um morfismo  $f : K \rightarrow L$  de  $\mathbf{K}_{comp}$  podemos encontrar uma transformação natural  $\tau$  como no lema, aplicando  $\tau$  em  $L$  obtemos o seguinte morfismo de  $\mathbf{Comp}_{aug}$ :

$$\tilde{C}_*^K \circ \mathcal{A}(f)(L) \xrightarrow{\tau_L} \tilde{C}_*^L(L)$$

ou seja um mapa de cadeia aumentado  $\tau_L : K \rightarrow L$ . Voltando ao caso em que  $f$  é um mapa de vértices com-

patível entre pares  $(K, K')$  e  $(L, L')$  usando a naturalidade de  $\tau$  a inclusão  $L' \xrightarrow{i} L$  obtemos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{C}_*^K \circ \mathcal{A}(f)(L') & \hookrightarrow & \tilde{C}_*^K \circ \mathcal{A}(f)(L) \\ \downarrow \tau_{L'} & & \downarrow \tau_L \\ \tilde{C}_*^L(L') & \hookrightarrow & \tilde{C}_*^L(L) \end{array}$$

onde os morfismos na horizontal são a imagem da inclusão pelos respectivos funtores e portanto não passam de inclusões. Sabemos que  $\tilde{C}_*^K \circ \mathcal{A}(f)(L) = \tilde{C}_*(K)$ ,  $\tilde{C}_*^L(L) = \tilde{C}_*(L)$  e  $\tilde{C}_*^L(L') = \tilde{C}_*(L')$ , além disso  $K' \subset \mathcal{A}(f)(L')$  o que significa que  $\tilde{C}_*(K')$  é um subcomplexo de  $\tilde{C}_*^K \circ \mathcal{A}(f)(L')$  e assim o que o diagrama acima nos diz é que a imagem de  $\tilde{C}_*(K')$  por  $\tau_L$  esta contida em  $\tilde{C}_*(L')$ . Com isso podemos associar a  $f$  uma sequência de homomorfismos  $\tilde{f}_n : \tilde{C}_n(K, K') \rightarrow \tilde{C}_n(L, L')$  de modo que  $\tilde{f}_n([v]) = [\tau_L(v)]$ , também usamos a notação  $[\tau_L]$  para essa função. Queremos associar um homomorfismo  $H_n(f)$  entre os grupos de homologia  $H_n(K)$  e  $H_n(L)$ , tudo que precisamos é que  $\tilde{f}_*$  seja um mapa de cadeia pois assim podemos definir  $H_n(f)$  como  $H_n(\tilde{f}_*)$ . Podemos fazer isso pois:

$$\tilde{f}(\delta_K([v])) = \tilde{f}([\delta_K(v)]) = [\tau_L(\delta_K(v))] = [\delta_L(\tau_L(v))] = \delta_L(\tilde{f}([v])).$$

Um possível problema com a definição de  $H_n(f)$  dada acima é a arbitrariedade  $\tau$ , temos porém pelo lema que uma segunda transformação natural de cadeias aumentada  $\tau'$  entre os funtores em questão seria homotópica a  $\tau$  por uma transformação natural  $\sigma$  isso significa que  $\sigma_L$  é uma homotopia entre os morfismos  $\tau'_L$  e  $\tau_L$ , um argumento similar ao usado acima mostra que  $\sigma_{L,n}$  leva elementos de  $\tilde{C}_n(K')$  em  $\tilde{C}_{n-1}(L')$  o que nos permite estender os morfismos  $\sigma_{L,n}$  a uma sequência de morfismos entre  $\tilde{C}_n(K, K')$  e  $\tilde{C}_{n-1}(L, L')$ . Temos também:

$$\begin{aligned} (\delta_{n+1}[\sigma_{L,n}] + [\sigma_{L,n-1}]\delta_n)([v]) &= \delta_{n+1}[\sigma_{L,n}](v) + [\sigma_{L,n-1}]\delta_n(v) = \\ &= [\delta_{n+1}\sigma_{L,n}(v) + \sigma_{L,n-1}\delta_n(v)] = [\tau_L(v) - \tau'_L(v)] = \tilde{f}([v]) - \tilde{f}'([v]) \end{aligned}$$

uma homotopia entre  $\tilde{f}$  e  $\tilde{f}'$  de onde segue que as funções induzidas a nível de homologia são a mesma e que  $H_n(f)$  não depende da escolha de  $\tau$ .

A última propriedade que precisamos para que  $H_n$  seja um funtor é que  $H_n$  respeite composições, ou seja:

**Lema 3.8.** *Se  $f : (K, K') \rightarrow (L, L')$  e  $g : (L, L') \rightarrow (M, M')$  são morfismos de  $\mathbf{K}_{comp}^2$  então  $H_n(f \circ g) = H_n(f) \circ H_n(g)$*

*Demonstração.* Seja  $\tau$  uma transformação natural entre  $\tilde{C}_*^K \circ \mathcal{A}(f)$  e  $\tilde{C}_*^L$  e  $\sigma$  uma transformação natural entre  $\tilde{C}_*^L \circ \mathcal{A}(g)$  e  $\tilde{C}_*^M$  como no lema 3.7. Para  $N \subset M$  um complexo fechado temos  $\mathcal{A}(g \circ f)(N) = \mathcal{A}(f)(\mathcal{A}(g)(N))$ , isso significa que o morfismo  $\tau_{\mathcal{A}(g)(N)} : \tilde{C}_*^K \circ \mathcal{A}(f)(\mathcal{A}(g)(N)) \rightarrow \tilde{C}_*^L(\mathcal{A}(g)(N))$  é na verdade um morfismo entre  $\tilde{C}_*^K \circ \mathcal{A}(gf)(N)$  e  $\tilde{C}_*^L(\mathcal{A}(g)(N))$ , vamos chamá-lo de  $h_N$  por simplicidade, em particular  $h_M = \tau_{\mathcal{A}(g)(M)} = \tau_L$ . Uma verificação direta mostra que  $h$  é uma transformação natural de cadeias aumentadas entre os funtores  $\tilde{C}_*^K \circ \mathcal{A}(gf)$  e  $\tilde{C}_*^L \circ \mathcal{A}(g)$ .

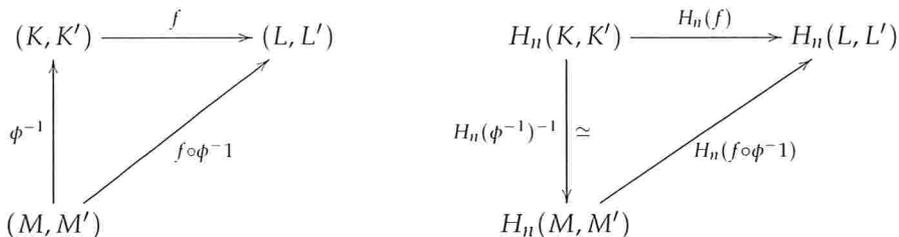
Temos assim que  $\sigma \circ h : \tilde{C}_*^K \circ \mathcal{A}(gf) \rightarrow \tilde{C}_*^M$  é uma transformação natural e portanto pode ser usada para definir  $H_n(g \circ f)$ .

$$H_n(g \circ f) = H_n([\sigma \circ h]_M) = H_n([\sigma_M] \circ [h_M]) = H_n([\sigma_M]) \circ H_n([h_M]) = H_n(g) \circ H_n(f)$$

A penúltima passagem é válida pois nela  $H_n$  é simplesmente o conhecido funtor entre complexos de cadeia e grupos abelianos, na última passagem utilizamos a igualdade  $h_M = \tau_L$ .

□

O nosso próximo objetivo é nos livrar da condição de compatibilidade das funções e definir os funtores  $H_n$  sobre a categoria  $\mathbf{K}^2$ , novamente o único problema está em como associar a um morfismo  $f : (K, K') \rightarrow (L, L')$ , isto é uma função definível contínua de  $|K|$  em  $|L|$  com  $f(|K'|) \subset f(|L'|)$ , um homomorfismo entre os grupos de homologia  $H_n(K, K')$  e  $H_n(L, L')$  que definimos anteriormente. O truque nesse caso é encontrar uma triangularização  $(M, \phi)$  e um subcomplexos  $M' \subset M$  de  $|K|$  de modo que  $\phi^{-1}$  e  $f \circ \phi|_{M'}$  sejam mapas compatíveis e  $H_n(\phi^{-1})$  seja um isomorfismo entre  $(K, K')$  e  $(M, M')$ , com isso podemos usar os resultados desenvolvido até o momento para definir  $H_n(f)$  como  $H_n(f \circ \phi^{-1}) \circ H_n(\phi^{-1})^{-1}$ .



Encontrar pares de complexos e triangularizações que deixem os mapas compatíveis não é um problema, o teorema de triangularização nos dá tais objetos. A dificuldade está em encontrar um critério para que um mapa  $\phi$  induza um isomorfismo na homologia, esse será o nosso principal foco por hora e para isso vamos precisar de alguns resultados sobre pares projetivos e complexos com fibras convexas. Os próximos resultados são bastante técnicos e podem parecer um longo desvio na nossa abordagem, porém são necessários para conseguirmos o critério desejado.

**Definição 3.9.** Um par de complexos simpliciais  $(K, L)$  é dito um par projetivo se  $|K| \subset \mathbb{R}^n, |L| \subset \mathbb{R}^{n+1}$  com  $\pi(|L|) = |K|$  e a restrição  $\pi|_{\text{vert}(L)}$  é um mapa simplicial, ou seja, a projeção de um simplexo de  $L$  é um simplexo de  $K$ .

Dado  $t \in K$  denotamos por  $L_t$  o conjunto  $\{s \in L : \pi(s) = t\}$ , note que esse é um conjunto de simplexos e bem diferente das fibras  $|L|_p$  para  $p \in |K|$ . Dados  $s_1$  e  $s_2$  em  $L_t$  dizemos que  $s_1 \prec s_2$  quando dado qualquer  $p \in |t|$  e quaisquer  $(p, u_1) \in s_1$  e  $(p, u_2) \in s_2$  temos  $u_1 < u_2$ . Note que temos sempre  $s_1 \prec s_2$  ou  $s_2 \prec s_1$  já que esses são conjuntos definivelmente conexos com intersecção vazia.

Dizemos ainda que esse par possui fibras convexas se  $|L|_p$  é um conjunto convexo (i.e. um ponto ou um intervalo) para qualquer  $p \in |K|$ .

Por fim se a dimensão de um simplexo  $t \in L$  é a mesma dimensão de sua projeção  $\pi(t) \in k$  dizemos que  $t$  é fino, caso tenhamos  $\dim(t) = \dim(\pi(t)) + 1$  dizemos que  $t$  é grosso. Obviamente todo simplexo se enquadra em um desses casos.

O resultado abaixo descreve como são os conjuntos  $L_s$  em pares projetivos com fibras convexas.

**Lema 3.10.** Se  $(K, L)$  é um par projetivo de complexos com fibras convexas e  $k \in K$ . Então  $L_k$  é da forma  $\{s_0, t_1, \dots, t_k, s_k\}$  com  $s_0 \prec t_1 \prec s_1 \prec \dots \prec t_k \prec s_k$ , cada  $s_k$  fino, cada  $t_k$  grosso e  $s_{i-1}, s_i$  faces de  $t_i$ .

*Demonstração.* Sejam  $s'$  e  $s''$  simplexos distintos finos em  $L_k$  (caso não existam tais simplexos o problema é trivial) com  $s' \prec s''$ ,  $p \in k$  e  $u', u''$  pontos de  $\mathbb{R}$  tais que  $(p, u') \in s'$  e  $(p, u'') \in s''$ . Então  $|L_k|_p$  contém os pontos  $u'$  e  $u''$  e portanto o intervalo  $[u', u'']$ , mas a intersecção de  $|L_k|_p$  com simplexos finos é sempre um único ponto e como  $L_k$  possui apenas um número finito de simplexos dessa forma vemos que existem pontos em  $[u', u'']$  que não podem ser obtidos por tais intersecções, dessa forma concluímos que existe um simplexo grosso  $t'$  tal que  $u' \prec t' \prec u''$ .

Por outro lado se  $t'$  e  $t''$  são simplexos grossos em  $|L_k|$  então  $|t'|_p$  é um intervalo aberto  $(a', b')$  e  $|t''|_p = (a'', b'')$  com  $b' < a''$ , pelas fibras convexas temos que  $b' \in |L_k|_p$ , mas  $b'$  não pode pertencer à fibra de um

simplexo grosso de  $L$  pois nesse caso tal simplexo não seria compatível com  $t'$ , isso significa que existe um simplexo fino  $s'$  tal que  $t' \prec s' \prec t''$ .

Vemos assim que entre dois simplexos finos existe um simplexo grosso, e que entre dois simplexos grossos existe um fino, dessa forma temos uma sequência alternada entre simplexos grossos e finos. Além do mais  $L$  é fechado, o que significa que as faces próprias dos simplexos grossos  $t_i$  estão em  $L$ , vemos com isso que  $s_i$  e  $s_{i+1}$  devem ser tais faces, pois como observamos acima elas intersectam o fecho de  $t_i$ . □

Sabemos que um complexo da forma  $\bar{s}$  possui homologia trivial, o que vamos mostrar agora é uma pequena generalização, note porém que o resultado abaixo não é puramente combinatório pois depende da noção de convexidade em questão.

**Lema 3.11.** *Se  $(K, L)$  formam um par projetivo de complexos simpliciais com fibras convexas e  $K = \bar{s}$  para um  $n_0$ -simplexo  $s$  do  $R^n$  então o complexo de cadeia aumentado  $\tilde{C}_*(L)$  é acíclico.*

*Demonstração.* A demonstração será feita por indução no número  $n$  de simplexos de  $L$ . Note que  $L_s$  possui ao menos um simplexo magro  $t$ , o que significa que  $L$  possui ao menos os simplexos em  $\bar{t}$ , e que  $(\bar{s}, \bar{t})$  é de fato um par projetivo de complexos com fibras convexas. Vemos assim que o menor valor possível de  $n$  é o número de simplexos em  $K$  e que isso ocorre somente quando  $L = |t|$ , nesse caso já sabemos que  $\tilde{C}_*(L)$  é acíclico.

Vamos supor então que  $L$  possui outros simplexos. Nesse caso temos  $L_s = (s_0, t_1, s_1, \dots, t_k, s_k)$  como no lema 3.10, podendo ter  $k = 0$  ou  $k > 0$  vamos tratar esses casos separadamente.

- Caso  $k > 0$

Vamos fixar uma ordem qualquer nos vértices de  $L$ , se  $t$  é um  $b$ -simplexo de  $L$  com vértices  $v_{i(0)}, \dots, v_{i(b)}$  em ordem crescentes vamos denotar por  $v_t$  o elemento  $[v_{i(0)}, \dots, v_{i(b)}] \in \tilde{C}_b(L)$ , temos assim que o conjunto  $U_*(L) = \{v_t : t \in L\}$  é uma base de  $C_b(L)$ , vamos identificar os elementos  $v_t$  com  $t$ .

Se tomarmos  $M = L - \{t_k, s_k\}$  é fácil verificar que  $M$  ainda é um complexo fechado e que  $(K, M)$  é um par projetivo com fibras convexas, além disso  $M$  possui menos simplexos que  $L$  e por isso a hipótese de indução nos garante que  $C_*(M)$  é acíclico.

Temos que  $s_k$  é uma face de  $t_k$  de onde segue que  $s_k$  está envolvido em  $\delta(t_k)$ , além disso  $s_k$  não está envolvido em  $\delta(t^*)$  para qualquer  $t^* \in U_{n_0+1}(L)$  em  $L$ , pois nesse caso teríamos  $t^* = t_i$  para algum  $i$ , mas o único elemento  $t_i$  cujo bordo intersecta  $s_k$  é  $t_k$ .

Nessas condições a proposição sobre remoção de células A.3 nos garante que  $C_*(M)$  é um subcomplexo adequado de  $C_*(L)$  e assim a proposição sobre subcomplexos adequados A.4 nos garante que ambos possuem grupos de homologia isomorfos, e como  $C_*(M)$  é acíclico segue que  $C_*(L)$  é acíclico.

- Caso  $k = 0$

Nesse caso temos que  $L_s = \{t\}$  com  $\bar{r} \in L$ . Além disso  $r'$  é fino para todo  $r' \in L$  e como o número de simplexos em  $L$  é maior que o número de simplexos em  $k$  existe um simplexo  $r_0 \in L$  tal que  $r_0 \notin \bar{t}$ , tome tal  $r_0$  de dimensão máxima com essa propriedade e  $p_0 = \pi(r_0) \in K$ .

$L_{p_0} = \{s'_0, t'_0, s'_1, \dots, t'_n, s'_n\}$  com  $k > 0$ ,  $s'_i$  fino,  $t'_i$  grosso e  $s'_j = r_0$  para um dado  $j \in \mathbb{N}$ . Se  $j < n$  então tomando  $M = L - \{t'_n, s'_n\}$ , como  $t'_n$  não está envolvido na face de nenhum simplexo de  $L$ , pois  $p_0$  tem dimensão máxima e  $t'_n \notin \bar{t}$ , podemos proceder de maneira análoga ao caso  $k > 0$  e utilizar os lemas A.3 e A.4 para obter o resultado. No caso em que  $n = k$  basta tomarmos  $M = L - \{t'_0, s'_0\}$  e utilizar o mesmo processo. □

Um resultado conhecido da teoria clássica de homologia sobre  $\mathbb{R}$  nos diz que conjuntos convexos possuem homologia trivial, quando formos tratar de algumas aplicações da teoria que estamos desenvolvendo veremos um resultado de caráter semelhante sobre homologia singular. Nesse momento precisamos de um resultado também parecido porém mais fraco.

**Lema 3.12.** *Seja  $X \neq \emptyset$  um conjunto definível, fechado, limitado e convexo do  $\mathbb{R}^n$  com  $(\phi, L)$  uma triangularização estratificada de  $X$ . Então  $H_n(L)$  é o grupo trivial para todo  $n$ .*

*Demonstração.* Vamos proceder por indução em  $n$ . No caso em que  $n = 1$  temos que  $X$  é um intervalo e como  $L$  é estratificada  $L$  é da forma  $\{\{a_0\}, (a_0, a_1), \{a_1\}, \dots, (a_{j-1}, a_j), \{a_j\}\}$  com  $a_i = (p, a'_i) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ , isto é, uma sequência vertical de pontos e intervalos, nesse caso um cálculo direto de  $Z_n(L)$  e  $B_n(L)$  mostram que  $H_n(L)$  é trivial com queríamos (novamente é um argumento puramente combinatório que pode ser encontrado em livros de topologia algébrica).

Se  $n > 0$  temos que  $(\phi, L)$  é um levantamento de uma triangularização  $(\psi, K)$  de  $\pi(X)$ , segue ainda que  $\pi(X)$  é convexo e por hipótese de indução  $K$  possui homologia trivial. Em particular segue que  $(L, K)$  é um par projetivo. Tome  $t \in K$  e suponha  $L_t$  não convexo, nesse caso  $|L_t|$  não é definivelmente conexo e isso implica que  $\phi(L_t) = \phi(L)_{\psi(t)}$  não é definivelmente conexo e em particular não é definivelmente conexo por caminhos, de onde existem pontos em  $\phi(L_t) \subset X$  tais que os seguimentos de reta ligando tais pontos não estão em  $X$  (pois isso dá um caminho definível entre tais pontos) o que contradiz  $X$  ser convexo. Concluimos assim que  $(L, K)$  tem fibras convexas.

Se denotarmos por  $\pi_L : |L| \rightarrow |K|$  a projeção restrita a  $|L|$  temos que  $\pi_L$  é um mapa compatível, pelo lema sobre morfismos compatíveis 3.7 existe um mapa natural de cadeia  $\tau : \tilde{C}_*^L \circ \mathcal{A}(\pi_L) \rightarrow \tilde{C}_*^K$ , além disso  $\tilde{C}_*^K(K) = \tilde{C}_*(K)$  enquanto  $\tilde{C}_*^L \circ \mathcal{A}(\pi_L) = \tilde{C}_*(L)$ , portanto se conseguirmos mostrar que  $\tau$  é uma equivalência natural obtemos que as homologias são isomorfas e como  $\tilde{C}_*(K)$  é acíclico obtemos o resultado. Vamos usar para isso a segunda parte do corolário de modelos acíclicos A.7.

Se tomarmos  $M_K = \{\bar{s} : s \in K\}$  os argumentos do lema 3.7 se aplicam para vermos que  $\tau : \tilde{C}_*^L \circ \mathcal{A}(\pi_L)$  é livre com base em  $M_K$  além disso  $\tilde{C}_*^L \circ \mathcal{A}(\pi_L)(\bar{s}) = \tilde{C}_*(L_{\bar{s}})$  é acíclico pelo lema 3.11. Precisamos verificar então que as mesmas condições são satisfeitas por  $\tilde{C}_*^K$ , novamente se fixarmos uma ordem aos vértices de  $K$  e associarmos a cada simplexo  $k \in K$  com vértices  $e_{i_1}, \dots, e_{i_j}$  o elemento  $v_k = [e_{i_1}, \dots, e_{i_j}]$  de  $C_j(K)$  para  $i_1, \dots, i_j$  estritamente crescente. Tomando  $e_{\bar{s}}$  como o representante de  $\bar{s}$  e lembrando que os morfismos de  $\tilde{C}_*^K$  são apenas as inclusões temos que

$$\{\tilde{C}_m^K(i)(v_k) : k \in K \text{ e } i \text{ é morfismo de } k \text{ em } \bar{s}\} = \{v_k : k \in \bar{s}\}$$

o que é obviamente uma base de  $\tilde{C}_m^K(\bar{s})$ . Segue que  $\tilde{C}_*^K$  é um funtor livre com base em  $M_K$ , além disso esse funtor é acíclico em  $M_K$  pois  $\tilde{C}_*^K(\bar{s}) = \tilde{C}_*(\bar{s})$ . Isso é suficiente para usarmos o corolário A.7 e concluimos assim que quando  $(L, \phi)$  é estratificada o complexo de cadeia gerado é acíclico. □

Com todos os resultados desenvolvidos podemos finalmente encontrar o critério de comparação entre grupos de homologia que buscávamos. O resultado abaixo faz referência a triangularizações quase-estratificadas, como mencionamos após a demonstração do teorema de triangularização a triangularização obtida em tal teorema pode ser quase estratificada, embora para isso seja necessária uma versão mais forte do lema de boas direções do que a utilizada nesse texto. Assumiremos daqui em diante porém que tais triangularizações existem.

**Teorema 3.13.** *Se  $K$  é um complexo simplicial fechado e  $(\psi, L)$  uma triangularização quase-estratificada de  $K$  com  $\psi^{-1} : |L| \rightarrow |K|$  compatível então  $|L|$  e  $|K|$  possuem grupos de homologia isomorfos, mais precisamente qualquer mapa natural de cadeia:*

$$\tau : \tilde{C}_*^L \circ \mathcal{A}(\psi^{-1}) \rightarrow \tilde{C}_*^K$$

é uma equivalência natural de cadeia.

*Demonstração.* Novamente tomamos  $M_K = \{\bar{s} : s \in K\}$  um conjunto de modelos em  $K$ , fixamos uma ordem nos vértices de  $K$  e fazemos a associação  $s \in K$  com  $v_s \in C_*(K)$ , tomamos  $v_s$  como os representantes dos elementos  $\bar{s} \in M_K$ , nessas condições sabemos que  $\tilde{C}_*^K$  é acíclico sobre  $M_K$  além de ser livre com base em tal conjunto. Novamente tudo que precisamos para concluir essa demonstração é garantir que as mesmas condições se aplicam para  $\tilde{C}_*^L \circ \mathcal{A}(\psi^{-1})$  e usar a segunda parte do corolário do teorema de modelos acíclicos A.7.

Sabemos também da demonstração de 3.7 que  $\tilde{C}_*^L \circ \mathcal{A}(\psi^{-1})$  é livre com base em  $M_K$ , tudo que precisamos mostrar então é que esse funtor é acíclico em tais modelos. Calcular tal funtor em um modelo  $\bar{s}$  é o mesmo que calcular  $\tilde{C}_*(\mathcal{A}(\psi^{-1})(\bar{s}))$  e é isso que faremos. Temos  $\mathcal{A}(\psi^{-1}(\bar{s})) = \{l \in L : \psi^{-1}(l) \subset |\bar{s}|\}$  e  $(\mathcal{A}(\psi^{-1}(\bar{s})), \psi|_{\bar{s}})$  uma triangularização quase estratificada de  $|\bar{s}|$  compatível com seus simplexes, o que significa que existe um homeomorfismo linear  $\alpha$  tal que  $\alpha\psi\alpha^{-1} : \alpha(|\bar{s}|) \rightarrow \alpha(|\mathcal{A}(\psi^{-1}(\bar{s}))|)$  nos dá uma triangularização estratificada

$$(\alpha(\mathcal{A}(\psi^{-1}(\bar{s}))), \alpha\psi\alpha^{-1})$$

de  $\alpha(|\bar{s}|)$ , onde  $\alpha(\mathcal{A}(\psi^{-1}(\bar{s})))$  é o complexo  $\{\alpha(l) : \psi^{-1}(l) \subset |\bar{s}|\}$ , note que  $\alpha(l)$  continua sendo um simplexo por  $\alpha$  ser linear e que esse conjunto continua um complexo fechado por  $\alpha$  ser homeomorfismo.

Como  $\alpha$  é linear  $\alpha(\bar{s})$  é convexo e portanto  $\tilde{C}_*(\alpha(\mathcal{A}(\psi^{-1}(\bar{s}))))$  é acíclico pelo lema 3.12. Mas  $\mathcal{A}(\psi^{-1}(\bar{s}))$  é a imagem de  $\alpha(\mathcal{A}(\psi^{-1}(\bar{s})))$  por um homeomorfismo linear e portanto são isomorfos como complexos de onde segue que possuem a mesma homologia. Assim concluímos que  $\tilde{C}_*^L \circ \mathcal{A}(\psi^{-1})$  é acíclico em  $M_K$  e podemos portanto utilizar A.7 para concluir a demonstração.

Para ver que isso de fato implica na equivalência entre as homologias de  $K$  e  $L$  basta tomar  $\sigma : \tilde{C}_*^K \rightarrow \tilde{C}_*^L \circ \mathcal{A}(\psi^{-1})$  inverso de  $\tau$  e calcular  $\sigma \circ \tau(K)$ , isso nos dá:

$$\tilde{C}_*^L \circ \mathcal{A}(K) \xrightarrow{\tau(L)} \tilde{C}_*^K(K) \xrightarrow{\sigma(K)} \tilde{C}_*^L \circ \mathcal{A}(K)$$

com a composta sendo a identidade, e o análogo para  $\tau \circ \sigma$ . De forma que os complexos de cadeia  $\tilde{C}_*^L \circ \mathcal{A}(L) = \tilde{C}_*(L)$  e  $\tilde{C}_*^K(K) = \tilde{C}_*(K)$  são isomorfos e portanto possuem grupos de homologia isomorfos.  $\square$

Com isso estamos prontos para prosseguir com a definição de  $H_n$  sobre a categoria  $\mathbf{K}^2$ . Dado um morfismo  $f : (K, K') \rightarrow (L, L')$  de  $\mathbf{K}^2$  podemos tomar uma triangularização quase estratificada  $(M, \phi)$  de  $|K|$  que seja compatível com todos os simplexes de  $K$  e conjuntos da forma  $f^{-1}(l)$  para  $l \in L$ . Isso significa que para cada  $m \in M$  existe um  $k \in K$  e um  $l \in L$  tal que  $\phi^{-1}(m) \subset k$  e  $\phi^{-1}(k) \subset f^{-1}(l)$  de onde  $f \circ \phi^{-1}(k) \subset l$  e portanto  $\phi^{-1}$  e  $f \circ \phi^{-1}$  são morfismos compatíveis. Além do mais lembramos que, pela definição de  $H_n$  para mapas compatíveis,  $H_n(\phi^{-1})$  é o mapa induzido na homologia por  $\tau_M$  (precisamente pelo mapa induzido no quociente  $[\tau_M]$  mas como os pares em questão são  $(M, \emptyset)$  e  $(K, \emptyset)$  esses mapas coincidem) onde  $\tau$  é uma transformação natural entre  $\tilde{C}_*^M \circ \mathcal{A}(\phi^{-1})$  e  $\tilde{C}_*^K$ . Usando o critério obtido em 3.13 sabemos que  $\tau$  é uma equivalência natural de cadeia, de onde segue que  $\tau_M$  induz um isomorfismo a nível de homologia, ou seja  $H_n(\phi^{-1})$  é um isomorfismo.

Como mencionamos anteriormente queremos definir  $H_n(f)$  como  $H_n(f \circ \phi^{-1}) \circ H_n(\phi^{-1})^{-1}$  que vamos denotar por hora como  $H_n(f)^{(M, \phi)}$ , para isso precisamos mostrar que tais grupos não dependem de  $(M, \phi)$ , ou seja que uma outra triangularização de  $|K|$  satisfazendo as condições de compatibilidade necessárias induz o mesmo morfismo em nível de homologia.

**Lema 3.14.** *Seja  $f : (K, K') \rightarrow (L, L')$  um morfismo de  $\mathbf{K}^2$  dados  $(M, \phi), (N, \psi)$  triangularizações quase estratificadas de  $|K|$  compatíveis com  $P(K) = \{X \subset |K| : X = k \text{ para algum } k \in K \text{ ou } X = f^{-1}(l) \text{ para algum } l \in L\}$  temos que  $H_n(f)^{(M, \phi)} = H_n(f)^{(N, \psi)}$ .*

*Demonstração.* Tomamos  $P'(K)$  como o conjunto  $P(K) \cup \{\phi^{-1}(m) : m \in M\} \cup \{\psi^{-1}(n) : n \in N\}$  e  $(T, \sigma)$  uma triangularização quase estratificada de  $|K|$  compatível com  $P'(K)$ . Temos que  $\phi \circ \sigma^{-1} : |T| \rightarrow |M|$  e  $\psi \circ \sigma^{-1} : |T| \rightarrow |N|$  são compatíveis.

Além disso  $\sigma^{-1} = \phi^{-1} \circ (\phi \circ \sigma^{-1})$  onde tanto  $\phi^{-1} : |M| \rightarrow |K|$  quanto  $\phi \circ \sigma^{-1} : |T| \rightarrow |M|$  são mapas compatíveis, como  $H_n$  é funtor sobre  $\mathbf{K}_{comp}^2$  temos:

$$H_n(\sigma^{-1}) = H_n(\phi^{-1}) \circ H_n(\phi \circ \sigma^{-1})$$

do mesmo modo  $f \circ \sigma^{-1} = (f \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ \sigma^{-1})$  é uma decomposição em mapas compatíveis e:

$$H_n(f \circ \sigma^{-1}) = H_n(f \circ \phi^{-1}) \circ H_n(\phi \circ \sigma^{-1})$$

Usando os resultados acima juntamente das definições obtemos:

$$\begin{aligned} H_n(f)^{(T, \sigma)} &= H_n(f \circ \sigma^{-1}) \circ H_n(\sigma^{-1})^{-1} = [H_n(f \circ \phi^{-1}) \circ H_n(\phi \circ \sigma^{-1})] \circ [H_n(\phi^{-1}) \circ H_n(\phi \circ \sigma^{-1})]^{-1} = \\ &= [H_n(f \circ \phi^{-1}) \circ H_n(\phi \circ \sigma^{-1})] \circ [H_n(\phi \circ \sigma^{-1})^{-1} \circ H_n(\phi^{-1})^{-1}] = H_n(f \circ \phi^{-1}) \circ H_n(\phi^{-1})^{-1} = \\ &= H_n(f)^{(M, \phi)} \end{aligned}$$

De maneira completamente análoga vemos que  $H_n(f)^{(N, \psi)} = H_n(f)^{(T, \sigma)}$  e portanto  $H_n(f)^{(M, \phi)} = H_n(f)^{(N, \psi)}$ .

□

Podemos assim finalmente definir  $H_n(f) = H_n(f)^{(M, \phi)}$  para qualquer triangularização  $(M, \phi)$  satisfazendo as condições de compatibilidade necessárias. Por fim queremos mostrar que  $H_n$  é um funtor sobre  $\mathbf{K}^2$ , ou seja que preserva a composição.

**Lema 3.15.**  $H_n$  é um funtor na categoria  $\mathbf{K}^2$ , ou seja  $H_n(g \circ f) = H_n(g) \circ H_n(f)$ .

*Demonstração.* Sendo  $f : (K, K') \rightarrow (L, L')$ ,  $g : (L, L') \rightarrow (M, M')$  tome uma triangularização quase estratificada  $(N, \phi)$  de  $|K|$  compatível com os elementos de  $K$ ,  $f^{-1}(L)$  e  $(g \circ f)^{-1}(M)$  e uma triangularização quase estratificada  $(S, \psi)$  de  $|L|$  compatível com os elementos de  $L$ ,  $g^{-1}(M)$  e  $f \circ \phi^{-1}(N)$

$$\begin{array}{ccccc} (K, K') & \xrightarrow{f} & (L, L') & \xrightarrow{g} & (M, M') \\ \phi^{-1} \uparrow & \nearrow f \circ \phi^{-1} & \uparrow \psi^{-1} & \nearrow g \circ \psi^{-1} & \\ N & \xrightarrow{\psi \circ f \circ \phi^{-1}} & S & & \end{array}$$

Com todos os mapas no diagrama compatíveis, exceto  $f$  e  $g$ . Usando que  $H_n$  é funtor sobre  $\mathbf{K}_{comp}^2$  obtemos:

$$\begin{aligned} H_n(g \circ f) &= H_n((g \circ f) \circ \phi^{-1}) \circ H_n(\phi^{-1})^{-1} = H_n((g \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ f \circ \phi^{-1})) \circ H_n(\phi^{-1})^{-1} = \\ &= H_n(g \circ \psi^{-1}) \circ H_n(\psi \circ f \circ \phi^{-1}) \circ H_n(\phi^{-1})^{-1} = \\ &= (H_n(g \circ \psi^{-1}) \circ H_n(\psi^{-1})^{-1}) \circ H_n(\psi^{-1}) \circ H_n(\psi \circ f \circ \phi^{-1}) \circ H_n(\phi^{-1})^{-1} = \\ &= H_n(g) \circ H_n(\psi^{-1} \circ \psi \circ f \circ \phi^{-1}) \circ H_n(\phi^{-1})^{-1} = H_n(g) \circ H_n(f) \end{aligned}$$

□

Com isso temos funtores  $H_n$  sobre  $\mathbf{K}^2$  falta agora estendermos finalmente esses funtores para pares de conjuntos definíveis, mais precisamente para a categoria que tem pares de conjuntos definíveis fecha-

dos e limitados  $(X, X')$  com  $X' \subset X$  como objetos e morfismos  $(X, X') \xrightarrow{f} (Y, Y')$  funções contínuas definíveis de  $X$  em  $Y$  tais que  $f(X') \subset Y'$ , tal categoria é denotada por  $\mathbf{CB}^2$ .

Dado um morfismo  $f : (X, X') \rightarrow (Y, Y')$  podemos tomar triangularizações  $(K, \phi)$  e  $(L, \psi)$  de  $X$  e  $Y$  compatíveis com  $X'$  e  $Y'$  respectivamente. Temos então um morfismo de  $\mathbf{K}^2$  dado por  $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ . Nós poderíamos usar isso para definir  $H_n(X, X')$  como  $H_n(K, K')$  onde  $K'$  é o subcomplexo  $\phi(X') = |K'|$ ,  $H_n(Y, Y')$  como  $H_n(L, L')$ ,  $|L'| = Y'$  e  $H_n(f)$  como  $H_n(\psi \circ f \circ \phi^{-1})$ . Embora tais definições sejam simples os objetos acima não são completamente independentes das triangularizações escolhidas, veremos na verdade que triangularizações diferentes geram grupos isomorfos ou seja os objetos acima estão definidos a menos de isomorfismo. O que faremos agora é apenas contornar tal problema apresentando uma definição que não dependa de triangularizações particulares.

**Definição 3.16.** Dado um objeto  $(X, X')$  de  $\mathbf{CB}^2$  tomamos por  $T(X, X')$  o conjunto de todas as triangularizações  $(K, \phi)$  de  $X$  compatíveis com  $X'$  e denotamos por  $K'$  o subcomplexo de  $K$  tal que  $\phi(X') = |K'|$ , vamos denotar por  $G(X, X')$  o grupo dado pelo produto

$$\prod_{(K, \phi) \in T(X, X')} H_n(K, K').$$

Podemos pensar em um elemento desse produto como uma função que leva cada triangularização  $(K, \phi)$  de  $T(X, X')$  em um elemento de  $H_n(K, K')$ , vamos denotar a coordenada  $(K, \phi)$  de um elemento  $\alpha$  por  $\alpha(K, \phi)$ . Definimos então  $H_n(X, X')$  como o subgrupo de  $G(X, X')$  formado pelos elementos  $\alpha$  tais que dadas triangularizações  $(K, \phi)$  e  $(L, \psi)$   $\alpha$  satisfaz:

$$\alpha(K, \phi) = H_n(\phi \circ \psi^{-1})\alpha(L, \psi) \quad (3.1)$$

Essa definição talvez pareça extremamente artificial, note porém que se  $(K, \phi)$  e  $(L, \psi)$  estão em  $T(X, X')$  então  $\psi \circ \phi^{-1} : |L| \rightarrow |K|$  e  $\phi \circ \psi^{-1} : |K| \rightarrow |L|$  são isomorfismos de  $\mathbf{K}^2$  (um é o inverso do outro) de modo que  $H_n(\phi \circ \psi^{-1})$  é um isomorfismo entre  $H_n(K, K')$  e  $H_n(L, L')$ . O que a condição 3.1 nos diz é que os elementos de  $H_n(X, X')$  possuem todas as coordenadas correspondentes por tais isomorfismos.

Falta definirmos  $H_n$  sobre os morfismos de tal categoria, se  $f : (X, X') \rightarrow (Y, Y')$  com  $(K, \phi) \in T(X, X')$  e  $(L, \psi) \in T(Y, Y')$  tínhamos argumentado anteriormente que  $H_n(\psi \circ f \circ \phi^{-1})$  poderia ser uma definição adequada, é claro que de acordo com as nossas definições não é o caso de  $H_n(\psi \circ f \circ \phi^{-1})$  ser uma função entre  $H_n(X, X')$  e  $H_n(Y, Y')$ . Podemos no entanto nos inspirar nisso para definir como deve ser a função que buscamos em cada coordenada:

$$(H_n(f)(\alpha))(L, \psi) = H_n(\psi \circ f \circ \phi^{-1})(\alpha(K, \phi))$$

Para ver que cada uma dessas coordenadas está bem definida basta notar que dado outro elemento  $(T, \sigma) \in T(K, K')$  temos

$$H_n(\psi \circ f \circ \sigma^{-1})(\alpha(T, \sigma)) = H_n(\psi \circ f \circ \sigma^{-1})H_n(\sigma \circ \phi)(\alpha(K, \phi)) = H_n(\psi \circ f \circ \phi)(\alpha(K, \phi)).$$

Como tal regra nos diz o valor de cada coordenada de  $H_n(f)(\alpha)$  ela nos diz o valor de  $H_n(f)(\alpha)$  e portanto determina uma função, para ver que é um homomorfismo note que esse é o caso em cada coordenada.

Como nós mencionamos a definição acima não é muito natural, porém não passa de uma complicação conveniente. Mencionamos anteriormente que  $H_n(X, X')$  deveria ser isomorfo a  $H_n(K, K')$  para uma triangularização  $(K, \phi)$  de  $(X)$  com  $|K'| = \phi(X')$ , isso de fato ocorre. Tal isomorfismo é simplesmente a projeção  $\pi_{(K, \phi)} : H_n(X, X') \rightarrow H_n(K, K')$  que leva  $\alpha$  em  $\alpha(K, \phi)$ , a inversa desse mapa é  $\pi_{(K, \phi)}^{-1}$  que leva um elemento  $t \in H_n(K, K')$  no elemento  $\alpha \in H_n(X, X')$  com coordenadas  $\alpha(L, \psi) = H_n(\psi \circ \phi^{-1})(t)$ . A principal propri-

idade de um functor de homologia é que esse seja um invariante topológico, mas isso segue facilmente da observação acima, já que dado pares  $(X, X_0)$ ,  $(Y, Y_0)$  e um homeomorfismo  $h : X \rightarrow Y$  levando  $X_0$  em  $Y_0$ , se tomarmos uma triangularização  $(K, \phi)$  de  $Y$  com  $\phi(Y_0) = K_0$  então  $(K, h \circ \phi)$  é uma triangularização de  $X$  com  $(h \circ \phi(X_0)) = K_0$  e portanto  $H_*(X, X_0)$  é igual a  $H_*(Y, Y_0)$  igual a  $H_*(K, K_0)$ .

Temos por fim o seguinte resultado:

**Teorema 3.17.**  $H_n$  é um functor de  $\mathbf{CB}^2$  em  $\mathbf{Ab}$ .

*Demonstração.* Tudo o que falta verificar é que  $H_n$  respeita composições, sejam então  $f : (X, X') \rightarrow (Y, Y')$  e  $g : (Y, Y') \rightarrow (Z, Z')$  morfismos de  $\mathbf{CB}^2$ . Dados  $(K, \phi) \in T(X, X')$ ,  $(L, \psi) \in T(Y, Y')$ ,  $(T, \sigma) \in T(Z, Z')$  e  $\alpha \in H_n(K, K')$  temos que

$$\pi_{(L, \psi)} H_n(f)(\alpha) = H_n(f)(\alpha)(L, \psi) = H_n(\psi \circ f \circ \phi^{-1})(\alpha(K, \phi)) = H_n(\psi \circ f \circ \phi^{-1})(\pi_{(K, \phi)}(\alpha))$$

de onde segue  $\pi_{(L, \psi)} \circ H_n(f) = H_n(\psi \circ f \circ \phi^{-1}) \circ \pi_{(K, \phi)}$ , vemos analogamente que  $\pi_{(T, \sigma)} \circ H_n(g) = H_n(\sigma \circ g \circ \psi^{-1}) \circ \pi_{(L, \psi)}$ . Ou seja o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccccc} H_n(X, X') & \xrightarrow{H_n(f)} & H_n(Y, Y') & \xrightarrow{H_n(g)} & H_n(Z, Z') \\ \downarrow \pi_{(K, \phi)} & & \downarrow \pi_{(L, \psi)} & & \downarrow \pi_{(T, \sigma)} \\ H_n(K, K') & \xrightarrow{H_n(\psi \circ f \circ \phi^{-1})} & H_n(L, L') & \xrightarrow{H_n(\sigma \circ g \circ \psi^{-1})} & H_n(T, T') \end{array}$$

Em particular segue que

$$\begin{aligned} H_n(g) \circ H_n(f)(\alpha)(T, \sigma) &= \pi_{(T, \sigma)} H_n(g) \circ H_n(f)(\alpha) = H_n(\sigma \circ g \circ \psi^{-1}) \circ H_n(\psi \circ f \circ \phi^{-1}) \circ \pi_{(K, \phi)}(\alpha) = \\ &= H_n(\sigma \circ (g \circ f) \circ \phi^{-1})(\alpha(K, \phi)) = H_n(g \circ f)(\alpha)(T, \sigma) \end{aligned}$$

Ou seja,  $H_n(g) \circ H_n(f)(\alpha) = H_n(g \circ f)(\alpha)$ .

□

### 3.1.3 Os Axiomas de Eilenberg-Steenrod

Como mencionamos no começo desse capítulo nós queremos não só encontrar funtores  $H_n$  de  $CB^2$  em  $Ab$ , como queremos que esse funtores satisfaçam os axiomas de Eilenberg-Steenrod, nosso objetivo agora é mostrar que o funtor descrito nessa seção de fato satisfaz tais axiomas.

O primeiro axioma que vamos provar é na verdade bastante óbvio.

**Teorema 3.18.** *Axioma da Dimensão:*

Se  $X$  é um espaço com um único ponto então  $H_n(X, \mathbb{O}) = 0$  para todo  $n$ .

*Demonstração.* Tudo que precisamos fazer é notar que  $X$  é triangularizado pelo complexo  $K$  que consiste de um único simplexo 0-dimensional  $s$  e  $H_n(X) \simeq H_n(K)$ . Além disso  $\tilde{C}_n(K) = 0$  para  $n \neq 0$  e  $n \neq -1$ , e  $C_{-1} = \mathbb{Z} \simeq \tilde{C}_0$  com  $\delta_0(k[t]) = k$ , isso implica que  $Z_n(K) = 0$  para todo  $n \geq 0$ , e portanto  $H_n(K) = 0$  para  $n \geq 0$ , por outro lado  $\tilde{C}_*(K)$  é um complexo de cadeia aumentado com  $B_{-1}(K) = \tilde{C}_{-1}(K)$  e portanto  $H_n(K) = 0$  para  $n < 0$ .  $\square$

As demonstrações dos próximos axiomas não serão tão fáceis. Vamos prosseguir com o axioma de excisão, na próxima seção veremos que esse axioma é o grande problema quando tratamos de homologia singular, no caso simplicial porém ele não apresenta grandes dificuldades.

**Teorema 3.19.** *Axioma de Excisão:*

Dado um objeto  $(X, X')$  de  $CB^2$  e um subconjunto aberto  $X''$  de  $X$  tal que  $cl(X'') \subset int(X')$  então a inclusão  $I : (X, X') \rightarrow (X - X'', X' - X'')$  induz um isomorfismo em nível de homologia.

*Demonstração.* Seja  $(K, \phi)$  uma triangularização de  $X$  compatível com  $X'$  e  $X''$  e  $K', K''$  subcomplexos de  $K$  tais que  $\phi(X') = |K'|$  e  $\phi(X'') = |K''|$ , note que  $K''$  não é um complexo fechado mas  $L = K - K''$  e  $L' = K' - K''$  são, além disso  $\phi^{-1}(L) = X - X''$  e  $\phi^{-1}(L') = X' - X''$ . A partir desse ponto poderíamos argumentar que a demonstração de que a inclusão de  $(L, L')$  em  $(K, K')$  induz um isomorfismo na homologia é de caráter puramente combinatório e omiti-la, nesse caso porém vamos demonstrar esse fato para ilustrar o processo.

Vamos fixar uma ordem  $v_0, \dots, v_j$  qualquer nos vértices de  $K$ , denotemos por  $G_n(K'')$  o subgrupo livre de  $\tilde{C}_n(K)$  gerado por  $[v_{i_0}, \dots, v_{i_n}]$  onde  $i$  é estritamente crescente e  $\{v_{i_0}, \dots, v_{i_n}\}$  gera um simplexo de  $K''$ . Note que se  $U_K$  é o conjunto de geradores de  $C_n K$  associado à ordem fixada e  $U_{K''}$  o conjunto de geradores do grupo descrito acima temos que  $U_K - U_{K''} = U_L$ , onde  $U_L$  é o conjunto de geradores do grupo  $\tilde{C}_n(L)$  de modo que  $\tilde{C}_n(K) = \tilde{C}_n(L) \oplus G_n(K'')$ , analogamente  $\tilde{C}_n(K') = \tilde{C}_n(L') \oplus G_n(K'')$  e temos portanto:

$$\frac{\tilde{C}_n(K)}{\tilde{C}_n(K')} = \frac{\tilde{C}_n(L) \oplus G_n(K'')}{\tilde{C}_n(L') \oplus G_n(K'')} \simeq \frac{\tilde{C}_n(L)}{\tilde{C}_n(L')}$$

Isto significa que  $\tilde{C}_*(K, K') \simeq \tilde{C}_*(L, L')$  onde a inclusão é a equivalência de cadeia, mas isso significa que  $H_n(i) : H_n(K, K') \rightarrow H_n(L, L')$  é um isomorfismo, e como o diagrama abaixo é comutativo (onde as flechas verticais são as projeções e as horizontais são induzidas das inclusões):

$$\begin{array}{ccc} H_n(X, X') & \xrightarrow{H_n(i)} & H_n(X - X'', X' - X'') \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ H_n(K, K') & \xrightarrow{\simeq} & H_n(L, L') \end{array}$$

temos que  $H_n(i)$  é um isomorfismo.  $\square$

Como mencionamos na prova acima a estratégia das duas demonstrações consiste em utilizar os isomorfismos de  $H_n(X, X')$  com grupos de homologia sobre certos complexos  $H_n(K, K')$ , provar o resultado

equivalente sobre esses complexos e em seguida voltar pelos isomorfismos para os conjuntos iniciais. Essa estratégia será utilizada novamente na próxima demonstração, porém nesse caso vamos omitir as passagens puramente combinatórias e algébricas que acontecem em  $\mathbf{K}_0^2$ , o leitor interessado pode procurar os detalhes em [Rot88] ou até mesmo em [Woe96].

O próximo axioma que vamos tratar é o axioma de homotopia.

**Teorema 3.20.** *Axioma de Homotopia.*

Se  $f_0, f_1 : (X, X') \rightarrow (Y, Y')$  são morfismos definivelmente homotópicos de  $\mathbf{CB}^2$  então  $H_n(f_0) = H_n(f_1)$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ .

*Demonstração.* Dizer que  $f_0$  e  $f_1$  são definivelmente homotópicos é o mesmo que afirmar a existência de uma função definível  $F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$  tal que para todo  $t \in [0, 1]$   $F_t(x) = F(x, t)$  é um morfismo de  $\mathbf{CB}^2$  que vai de  $(X, X')$  em  $(Y, Y')$  satisfazendo  $F_0 = f_0$  e  $F_1 = f_1$ . Se tomarmos  $g_i : X \rightarrow X \times [0, 1]$  a função que leva  $x$  em  $(x, i)$  para  $i \in [0, 1]$  temos que  $H_n(f_0) = H_n(F_0) = H_n(F \circ g_0) = H_n(F) \circ H_n(g_0)$ , e a analogamente  $H_n(f_1) = H_n(F) \circ H_n(g_1)$  de modo que é suficiente mostrar que  $H_n(g_0) = H_n(g_1)$

Como de costume tomamos  $(K, \phi)$  uma triangularização de  $X$  compatível com  $X'$  e denotamos por  $K'$  o subcomplexo tal que  $|K'| = \phi(X')$ . Queremos construir um par de complexos  $(M, M')$  com  $|M| = |X| \times [0, 1]$  tal que  $(M, \phi \times id)$  seja uma triangularização compatível com  $X' \times [0, 1]$  fazendo o seguinte diagrama comutar, onde  $h_0$  e  $h_1$  são morfismos de  $\mathbf{K}_0^2$ .

$$\begin{array}{ccccc}
 (X, X') & \xrightarrow{g_0} & (X \times [0, 1], X' \times [0, 1]) & \xrightarrow{F} & (X, X') \\
 \downarrow \phi & \xrightarrow{s_1} & \downarrow \phi \times id & & \downarrow \phi \\
 (|K|, |K'|) & \xrightarrow{h_0} & (|M|, |M'|) & \xrightarrow{(\phi^{-1} \times id) \circ F \circ \phi} & (|K|, |K'|) \\
 & \xrightarrow{h_1} & & & 
 \end{array}$$

Sejam  $v_0, \dots, v_j \in R^m$  os vértices de  $K$  em uma ordem fixada qualquer definimos  $v_i^0 = (v_i, 0) \in R^{M+1}$  e  $v_i^1 = (v_i, 1)$ , além disso se  $s \in K$  é gerado pelos vértices  $(v_i(0), \dots, v_i(l))$  definimos  $s^0$  como o simplexo gerado por  $(v_i(0)^0, \dots, v_i(l)^0)$  e  $s^1$  o simplexo gerado por  $(v_i(0)^1, \dots, v_i(l)^1)$ . Temos ainda  $K^0 = \{s^0 s \in K\}$  e  $K^1 = \{s^1 s \in K\}$ , e por fim  $K^{0,1}$  o conjunto dos simplexos gerados por  $\{v_{i(0)}^0, \dots, v_{i(k)}^0, v_{i(k+1)}^1, \dots, v_{i(l)}^1\}$  onde  $(v_{i(0)}, \dots, v_{i(l)})$  gera um simplexo de  $K$  e  $i(j) < i(j+1)$  é crescente exceto para  $K$  onde  $i(k) \leq i(k+1)$ . Definimos  $M$  como  $K^0 \cup K^1 \cup K^{0,1}$ , definimos  $M'$  analogamente com  $K'$  no lugar de  $K$ , por fim as funções  $h_i$  que levam  $s$  em  $s^i$ ,  $i = 0$  ou  $i = 1$ . Verificar que o diagrama acima é de fato comutativo, e que  $M$  e  $M'$  são complexos simpliciais satisfazendo a triangularização mencionada é um trabalho um tanto extenso e pouco ilustrativo e por isso vamos omitir esses detalhes.

O que é importante no diagrama acima é notar o que ele nos diz sobre a homologia de tais funções, e como  $\phi$  e  $\phi \times id$  são triangularizações sabemos que induzem isomorfismos, de modo que tudo o que precisamos verificar é que  $H_n(h_0) = H_n(h_1)$ , lembrando que esses são morfismos de  $\mathbf{K}_0^2$ , reduzimos portanto novamente o problema a um problema equivalente em tal categoria e como mencionamos anteriormente esse é um fato conhecido da teoria clássica sobre complexos simpliciais que não iremos demonstrar. □

O último axioma que nos falta provar é axioma de exatidão.

**Teorema 3.21.** *Se  $G : \mathbf{CB}^2 \rightarrow \mathbf{CB}^2$  é o funtor que leva um par do tipo  $(X, X')$  em  $(X', \emptyset)$  então existem transformações naturais  $d_n : H_n \rightarrow H_{n-1} \circ G_n$  tal que a sequência abaixo é exata para todo objeto  $(X, X')$  de  $\mathbf{CB}^2$ , onde  $i : (X', \emptyset) \rightarrow (X, \emptyset)$  é o morfismo de  $\mathbf{CB}^2$  dado pela inclusão e  $j : (X, \emptyset) \rightarrow (X, X')$  é o morfismo obtido da identidade.*

$$\dots \longrightarrow H_n(X, \emptyset) \xrightarrow{H_n(j)} H_n(X, X') \xrightarrow{d_n(X, X')} H_n(X', \emptyset) \xrightarrow{H_{n-1}(i)} H_{n-1}(X, \emptyset) \longrightarrow \dots$$

*Demonstração.* Afirmar que  $d_n$  é uma transformação natural é dizer que dado um morfismo de  $\mathbf{CB}^2$   $f : (X, X') \rightarrow (Y, Y')$  existe um diagrama comutativo da forma:

$$\begin{array}{ccc} H_n(X, X') & \xrightarrow{H_n(f)} & H_n(Y, Y') \\ \downarrow d_{n(X, X')} & & \downarrow d_{n(Y, Y')} \\ H_{n-1}(X', \emptyset) & \xrightarrow{H_n(f|_{X'})} & H_{n-1}(Y', \emptyset) \end{array} \quad (3.2)$$

A demonstração como esperado consiste em tomar uma triangularização  $(K, \phi)$  de  $X$  compatível com  $X'$  e  $K'$  tal que  $|K'| = \phi(X')$  obter homomorfismos  $d_{n(K, K')} : H_n(K, K') \rightarrow H_n(K')$  convenientes e usar os isomorfismos provenientes das triangularizações para obter  $d_{n(X, X')}$ . Vamos também tomar  $(L, \psi)$  triangularização de  $Y$  compatível com  $Y'$  e  $L'$  tal que  $|L'| = \psi(Y')$ . Nós poderíamos ainda tomar uma triangularização  $(T, \sigma)$  de  $|K|$  compatível com os simplexes de  $K$  e com os elementos de  $(\psi^{-1} \circ f \circ \phi)^{-1}(L)$ , isso nos garantiria que  $\psi^{-1} \circ f \circ \phi \circ \sigma$  é uma função compatível, como  $(T, \phi \circ \sigma)$  continua sendo um triangularização de  $X$  com as mesmas propriedades vamos trocar essa  $(K, \phi)$  por essa triangularização podemos assumir então que  $(\psi^{-1} \circ f \circ \phi)$  é compatível.

Assim se  $i_k : (K', \emptyset) \rightarrow (K, \emptyset)$  é o morfismo de  $\mathbf{K}_{comp}^2$  dado pela inclusão,  $j_k : (K, \emptyset) \rightarrow (K, K')$  dado pela identidade e  $i_L, j_L$  definidos analogamente sobre  $L$  então temos que em  $\mathbf{K}_{comp}^2$ . Nessa categoria definimos anteriormente não só os complexos de cadeia como usamos o lema 3.7 para estender morfismo a mapas de cadeia, obtemos com essas associações o seguinte diagrama comutativo com colunas exatas:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & C_*(K') & \xrightarrow{\tilde{i}_k} & C_*(K) & \xrightarrow{\tilde{j}_k} & C_*(K, K') & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \tilde{f}_{K'} & & \downarrow \tilde{f}_K & & \downarrow \tilde{f}_{(K, K')} & & \\ 0 & \longrightarrow & C_*(L') & \xrightarrow{\tilde{i}_L} & C_*(L) & \xrightarrow{\tilde{j}_L} & C_*(L, L') & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Nessas condições a proposição A.1 nos garante não só a existência de morfismos  $d_{n(K, K')}^K$  de forma que o diagrama abaixo tenha linhas exatas, como garante que ele é comutativo (lembrando que  $H_n(f)$  é definido como  $H_n(\tilde{f})$ ):

$$\begin{array}{cccccccccccc} \dots & \longrightarrow & H_n(K, \emptyset) & \xrightarrow{H_n(j_K)} & H_n(K, K') & \xrightarrow{d_{n(K, K')}} & H_n(K', \emptyset) & \xrightarrow{H_{n-1}(i_K)} & H_{n-1}(K, \emptyset) & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow H_n(f_K) & & \downarrow H_n(f_{K, K'}) & & \downarrow H_n(f_{K'}) & & \downarrow H_{n-1}(f_K) & & \\ \dots & \longrightarrow & H_n(L, \emptyset) & \xrightarrow{H_n(j_L)} & H_n(L, L') & \xrightarrow{d_{n(L, L')}} & H_n(L', \emptyset) & \xrightarrow{H_{n-1}(i_L)} & H_{n-1}(L, \emptyset) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Mas  $H_n(i) = \pi_{(K, \phi)}^{-1} \circ H_n(i_k) \circ \pi_{(K', \phi|_{K'})}$  e  $H_n(j) = \pi_{((K, K'), \phi|_K)}^{-1} \circ H_n(j) \circ \pi_{(K, \phi)}$  de forma que se definirmos  $d_{n(X, X')} = \pi_{(K', \phi|_{K'})}^{-1} \circ d_{n(K, K')} \circ \pi_{((K, K'), \phi)}$  temos:

$$\begin{aligned} d_{n(X, X')} \circ H_n(j) &= (\pi_{(K', \phi|_{K'})}^{-1} \circ d_{n(K, K')} \circ \pi_{((K, K'), \phi)}) \circ (\pi_{((K, K'), \phi|_K)}^{-1} \circ H_n(j) \circ \pi_{(K, \phi)}) = \\ &= \pi_{(K', \phi|_{K'})}^{-1} \circ d_{n(K, K')} \circ H_n(j) \circ \pi_{(K, \phi)} = 0 \end{aligned}$$

Analogamente  $H_{n-1}(i) \circ d_n(X, X') = 0$  e  $H_n(i) \circ H_n(j) = 0$  obtendo a exatidão da sequência no enunciado.

Notando que essa definição se aplica a  $(Y, Y')$  de forma que  $d_{n(Y, Y')} = \pi_{(L', \psi|_{L'})}^{-1} \circ d_{n(L, L')} \circ \pi_{(L, \psi)}$ , usando a comutativa do último diagrama e as igualdades  $H_n(f) = H_n(\psi^{-1}) \circ H_n(f_{(K, K')}) \circ H_n(\phi)$  e  $H_n(f|_{X'}) = H_n(\psi_{L'}^{-1}) \circ H_n(f_{K'}) \circ H_n(\phi|_{X'})$  obtemos a comutatividade do diagrama 3.2 de onde segue a naturalidade de  $d_n$ .

□

## 3.2 Homologia Singular

Tendo desenvolvido a teoria de homologia simplicial na última seção nós vamos agora nos concentrar em uma abordagem diferente, a homologia singular.

### 3.2.1 Definindo o Funtor de Homologia

Uma das diferenças centrais entre homologia simplicial e singular é a abordagem um tanto quanto mais direta do caso simplicial. Enquanto no caso singular definimos o funtor de homologia por etapas começando em  $\mathbf{K}_{comp}^2$  passando por  $\mathbf{K}^2$  e finalmente chegando em  $\mathbf{CB}^2$ . Nessa seção iremos tratar diretamente da categoria de nosso interesse,  $\mathbf{R}^2$ , definindo um funtor dessa categoria em  $\mathbf{Comp}_{aug}$ , para obter o funtor de homologia faremos a associação natural entre complexos de cadeia e grupos de homologia.

Como pode-se imaginar ao tratarmos de homologia singular estamos interessados em funções definíveis contínuos com domínios em certos simplexes (na verdade no fecho topológico de certo simplex), e como de costume vamos tomar tais como os chamados simplexes básicos de  $R^n$  ou seja:

**Definição 3.22.** Dado  $n \in \mathbb{N}$  denotamos por  $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in R^{n+1}$  para  $0 \leq i \leq n$  o elemento que tem todas as coordenadas zero exceto pelo  $i$ -ésima coordenada que assume o valor 1. Chamamos de  $s^n$  o simplex gerado por  $e_0, \dots, e_n$  e definimos então o  $n$ -ésimo simplex padrão  $\Delta^n$  como  $cl(s^n) = [e_0, \dots, e_n]$ , isto é o fecho topológico do simplex gerado por  $e_0, \dots, e_n$ , por praticidade tomamos  $\Delta^{-1} = \emptyset$ , note que um simplex padrão não é um simplex.

Com isso dado um conjunto definível  $X \subset R^m$  definimos  $S_n(X)$  para  $n \geq -1$  como o grupo livre gerado pelas funções contínuas e definíveis de  $\Delta^n$  em  $X$ , para  $n < -1$  tomamos  $S_n(X)$  como o grupo trivial.

Note que  $S_{-1}(X)$  é o grupo livre gerado pela função vazia que vamos denotar por  $f_\emptyset$ , e portanto isomorfo a  $\mathbb{Z}$ . O nosso objetivo é transformar a sequência de grupos abelianos  $S_n(X)$  em um complexo de cadeia, para isso precisamos definir operadores de bordo  $\delta_{n-1} : S_n(X) \rightarrow S_{n-1}(X)$  tal que  $\delta_{n-1} \circ \delta_n = 0$ . Dada uma função  $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$ , assim como no caso real, não basta tomar  $\delta_n(\sigma) = \sigma|_{\delta\Delta^n}$  já que  $\delta\Delta^n$  não é um simplex padrão (estamos usando  $\delta$  aqui como o operador que leva um conjunto  $X$  em seu bordo topológico), note que ós identificamos aqui a função  $\sigma$  com o elemento correspondente do grupo  $S_n(X)$ , essa é uma identificação que faremos constantemente. A solução para tal problema está nas funções  $\epsilon_i^n : \Delta^{n-1} \rightarrow \Delta^n$  tais que, dado um ponto  $a_0e_0 + \dots + a_{n-1}e_{n-1} \in \Delta^{n-1}$  com  $\sum a_i = 1$  e  $a_i \geq 0$  temos

$$\epsilon_i^n(a_0e_0 + \dots + a_{n-1}e_{n-1}) = a_0e_0 + \dots + a_{i-1}e_{i-1} + a_i e_{i+1} + \dots + a_{n-1}e_n$$

ou seja, a função que leva um ponto com coordenadas baricêntricas  $(a_0, \dots, a_{n-1})$  de  $\Delta^{n-1}$  em um ponto com as mesmas coordenadas baricêntricas no fecho da face oposta ao vértice  $i$  de  $\Delta^n$ . Claramente  $\epsilon_i^n$  é um homeomorfismo entre tais conjuntos, essa definição se aplica para  $n > 0$ , no caso de  $n = 0$  podemos tomar  $\epsilon_0^0$  como a função nula. Com isso podemos definir os operadores de bordo  $\delta_n$  de modo a conseguir o complexo de cadeia desejado.

**Definição 3.23.** Definimos  $\delta_n : S_n(X) \rightarrow S_{n-1}(X)$  de forma que para  $n \geq 0$  dado  $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$  tomamos  $\delta_n(\sigma) = \sum_{0 \leq i \leq n} (-1)^i \sigma \circ \epsilon_i^n$  e estendemos por linearidade tal definição a todo  $S_n(X)$ , tomamos  $\delta_n$  a função nula para  $n < 0$ .

**Proposição 3.24.** Temos que  $\delta_{n-1} \circ \delta_n = 0$ , ou seja  $S_\star(X)$  dado pelos grupos  $S_n(X)$  e operadores  $\delta_n(X)$  é um complexo de cadeia.

As definições acima foram feitas de modo que  $S_\star(X)$  é um complexo de cadeia aumentado, por esse motivo, assim como no caso singular, é comum usar a notação  $\tilde{S}_\star(X)$  para essa cadeia enquanto  $S_\star(X)$  é reservado para o complexo de cadeia que tem  $S_{-1}(X)$  como o grupo trivial e  $\delta_0$  a função nula. Como nós vamos tratar somente de cadeias aumentadas vamos usar a notação descrita nas definições por economia.

Como mencionamos anteriormente estamos interessados na categoria  $\mathbf{R}^2$ , por isso precisamos definir  $S_n$  sobre pares  $(X, X')$  com  $X' \subset X$ ; como de costume tomamos  $S_n(X, X') = S_n(X)/S_n(X')$ . Note que de fato esse grupo está bem definido pois toda função de  $\Delta^n$  em  $X'$  é uma função de  $\Delta^n$  em  $X$  e por isso  $S_n(X')$  é um subgrupo de  $S_n(X)$ , além do mais  $\delta^n : S_n(X) \rightarrow S_{n-1}(X)$  leva elementos de  $S_n(X')$  em  $S_{n-1}(X')$  de onde segue que  $\delta_n$  induz uma função entre os grupos quociente dado por  $\delta_n([\sigma]) = [\delta_n(\sigma)]$  (assim como na última seção usamos  $[\sigma]$  para denotar a classe em  $S_n(X, X')$  de um elemento  $\sigma \in S_n(X)$ , vamos manter a notação  $\delta_n$  para tal função, o contexto como sempre deve eliminar qualquer ambiguidade), obviamente continua sendo o caso em que  $\delta_{n-1} \circ \delta_n = 0$ .

Queremos dar a  $S_*$  a estrutura de um funtor e para tanto precisamos dizer como  $S_*$  age sobre os morfismo de  $\mathbf{R}^2$ , nesse caso a definição é simples:

**Definição 3.25.** Dado um morfismo  $f : (X, X') \rightarrow (Y, Y')$  definimos  $f_{\#,n} : S_n(X, X') \rightarrow S_n(Y, Y')$  como a função que leva um gerador  $[\sigma]$  de  $S_n(X, X')$  em  $[f \circ \sigma]$  e é estendida a  $S_n(X, X')$  por linearidade (nesse caso vamos nos referir à seqüência de funções simplesmente como  $f_{\#}$  e não  $f_{\#,*}$  como vínhamos fazendo).

A primeira coisa que precisamos verificar é que tal função está bem definida, como  $f$  é uma função contínua definível de  $X$  em  $Y$  temos que  $f \circ \sigma$  é uma função definível de  $\Delta^n \rightarrow Y$  e portanto um elemento de  $S_n(Y)$ , além disso se  $\sigma \in S_n(X')$  então como  $f(X') \subset Y'$  temos que  $f \circ \sigma \in S_n(Y')$  o que é suficiente para garantir que a definição  $f_{\#}([\sigma]) = [f \circ \sigma]$  não depende da escolha de  $\sigma$ .

Além disso precisamos que  $f_{\#}$  seja um morfismo de  $\mathbf{Comp}_{\text{aug}}$  ou seja que  $f_{\#,n-1} \circ \delta_n = \delta_n \circ f_{\#,n}$ , mas isso é válido pois:

$$\begin{aligned} f_{\#,n-1} \circ \delta_n(\sigma) &= f_{\#,n-1} \left( \sum_{0 \leq i \leq n} (-1)^i \sigma \circ \epsilon_n^i \right) = \sum_{0 \leq i \leq n} (-1)^i f_{\#,n-1}(\sigma \circ \epsilon_n^i) = \\ &= \sum_{0 \leq i \leq n} (-1)^i (f \circ \sigma \circ \epsilon_n^i) = \delta_n(f \circ \sigma) = \delta_n \circ f_{\#,n}(\sigma) \end{aligned}$$

E vemos com isso que  $S_*$  é um funtor de  $\mathbf{R}^2$  em  $\mathbf{Comp}_{\text{aug}}$ . Podemos com isso definir os funtores de homologia  $H_n : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{Ab}$  por  $H_n(X, X') = H_n(S_*(X, X'))$ , onde do lado esquerda da igualdade estamos nos referindo ao funtor  $H_n : \mathbf{Comp} \rightarrow \mathbf{Ab}$  descrito no apêndice. Que a homologia simplicial é um invariante topológico é fácil de ver, já que dado pares  $(X, X_0)$ ,  $(Y, Y_0)$  e um homeomorfismo  $h : X \rightarrow Y$  levando  $X_0$  em  $Y_0$  temos que  $h_{\#} : S_n(X, X_0) \rightarrow S_n(Y, Y_0)$  é um isomorfismo entre os complexos de cadeia com inversa  $(h^{-1})_{\#}$ , assim a função induzida por  $h_{\#}$  em homologia também é um isomorfismo.

Assim como no caso simplicial queremos que tais funtores satisfaçam os axiomas de Eilenberg-Steenrod, e da mesma maneira que a definição dos funtores  $H_n$  é completamente análoga à definição usual sobre  $\mathbb{R}$  a demonstração de três desses axiomas também é, a única exceção sendo o axioma de excisão. Temos por exemplo:

**Teorema 3.26.** *Axioma da Dimensão*

Se  $X$  consiste de um único ponto então  $H_n(X, \emptyset) = 0$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ .

*Demonstração.* Dado um  $n > -1$  existe uma única função de  $\Delta^n \rightarrow X$ , a função constante assumindo o único valor possível, vamos chamá-la de  $\sigma_n$ . Além disso

$$\delta^n(k\sigma_n) = k \sum_{0 \leq i \leq n} (-1)^i \sigma_n \circ \epsilon_n^i = k \sum_{0 \leq i \leq n} (-1)^i \sigma_{n-1} = \begin{cases} k\sigma_{n-1} & \text{se } n \text{ é par,} \\ 0 & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Temos então ou  $\ker(\delta_n) = \text{img}(\delta_{n+1}) = S_n(X)$  ou  $\ker(\delta_n) = \text{img}(\delta_{n+1}) = 0$  e em ambos os casos  $H_n(X) = 0$ .

No caso em que  $n = -1$  o resultado vale pelo mesmo motivo pois  $\delta_0(k\sigma) = k$  e  $\delta_{-1} = 0$  de onde  $\ker(\delta_{-1}) = \text{img}(\delta_0) = \mathbb{Z}$ . Os outros casos são triviais.

□

O axioma de exatidão segue diretamente da proposição A.1 já que os funtores  $H_n$  foram obtidos de complexos de cadeia. A demonstração do axioma de homotopia não é trivial mas é completamente análoga à demonstração no caso real e por isso vamos omiti-la.

### 3.2.2 Divisão Baricêntrica

O nosso próximo objetivo é desenvolver divisões baricêntricas sobre um ponto de vista algébrica. Em particular vamos ver a subdivisão baricêntrica como um mapa de cadeia levando  $S_*(X)$  em si mesmo, vamos em seguida provar que esse mapa possui algumas propriedades que nos permitirão provar o axioma de excisão para o functor definido anteriormente.

Para desenvolvermos essa técnica precisaremos de um aparato algébrico um pouco maior do que o que vínhamos utilizando até então. Anteriormente vimos como definir uma função  $f_{\#} : S_*(X) \rightarrow S_*(Y)$  através de uma função  $f : (X) \rightarrow (Y)$ , essa função agia nos elementos da base de  $S_*(X)$  por composição, já que esses são funções de  $\Delta^n$  em  $X$ , por outro lado, exceto por ser o domínio das funções de  $S_*(X)$  e  $S_*(Y)$ ,  $\Delta^n$  não desempenha nenhum papel especial nesse caso, e podemos generalizar a definição de  $\#$  da seguinte maneira.

**Definição 3.27.** Sejam  $X, Y$  e  $Z$  conjuntos definíveis, denotamos por  $F(X, Y)$  o grupo livre gerado pelas funções contínuas definíveis de  $X$  em  $Y$ . Queremos definir uma operação  $\#$  entre um elemento de  $F(Y, Z)$  e um elemento de  $F(X, Y)$  de modo a obter um elemento de  $F(X, Z)$ , tomamos assim  $\#$  nos elementos da base como a composição, isto é  $g\#f = g \circ f$  e estendemos por linearidade tanto em  $F(Y, Z)$  como em  $F(X, Y)$ , mais diretamente se  $g_i : Y \rightarrow Z$  e  $f_j : X \rightarrow Y$  são elementos, respectivamente, das bases de  $F(Y, Z)$  e  $F(X, Y)$  e  $k_i, l_j \in \mathbb{Z}$  definimos:

$$\sum_i (k_i g_i) \# \sum_j (l_j f_j) = \sum_{i,j} k_i l_j (g_i \circ f_j)$$

Note que  $S_n(X) = F(\Delta^n, X)$  e que a definição apresentada aqui de fato estende a que usamos anteriormente,  $\#$  é conhecido como o operador "sharp". Uma verificação direta mostra que tal operação é associativa. Além disso dado um elemento  $z \in S_n(X)$  temos que  $z\#$  define um mapa de  $S_*(\Delta^n) \rightarrow S_*(X)$  que leva um elemento  $\sigma \in S_*(\Delta^n)$  em  $z\#\sigma$ , o próximo lema, embora um tanto estranho, será útil adiante.

**Lema 3.28.** Dado um conjunto definível  $X$  e um elemento  $z \in S_n(X)$  temos que  $z\#$  é um mapa de cadeia.

*Demonstração.* Basta mostrarmos que  $z\#$  comuta com  $\delta$ , e em particular é suficiente mostrar que isso é verdade para elementos  $z$  da base de  $S_n(X)$ , isto é um mapa de  $\Delta$  em  $X$ , além disso é suficiente que  $(z\# \circ \delta_n)(u)$  seja igual a  $(\delta_n \circ z\#)(u)$  em elementos  $u$  da base de  $S_n(\Delta)$ , mas isso segue do fato de  $z_{\#}$  ser um mapa de cadeia como vimos na última seção.

□

Com essa linguagem nós estamos em condições de buscar uma definição de caráter algébrico para a divisão baricêntrica. Os objetos sobre os quais queremos definir o functor  $Sd_n$  são funções  $f : \Delta^n \rightarrow X$ , uma abordagem que parece natural para a definição de  $Sd_n(f)$  seria como uma combinação linear de funções da forma  $f|_s$  onde  $s$  é um simplexo da divisão baricêntrica de  $\Delta_n$  (como apresentada no último capítulo), temos porém que os simplexos da divisão de  $\Delta^n$  não precisam ser simplexos padrões e assim tais restrições não seriam elementos de nenhum  $S_n(X)$ . A maneira de contornar tal problema envolve uma descrição diferente da divisão baricêntrica e para isso precisaremos de um procedimento conhecido como construção em cone. A versão usual de tal construção associa a um subconjunto  $Y$  de um conjunto convexo  $X$  e  $b$  um ponto de  $X$  o subconjunto  $b.Y$  formado pelas retas ligando os pontos de  $Y$  a  $b$ . Para obter a divisão baricêntrica de um  $n$ -simplexo por esse método basta proceder de maneira indutiva associando a um simplexo  $s$  o conjunto  $Sd(s) = \{b_s.Sd(t) : t \in \delta s\}$ , onde  $b_s$  denota o baricentro de  $s$ .

Note que o processo descrito acima estende um conjunto aumentando sua dimensão (exceto em alguns casos particulares), no nosso caso porém estamos interessados em funções definíveis contínuas de  $\Delta^n$  em  $X$  e por isso queremos que a construção em cone nos de um método para estender tais funções a funções definíveis contínuas de  $\Delta^{n+1}$  em  $X$ .

**Definição 3.29.** Dado um conjunto definível convexo  $X$ , uma função contínua definível  $f : \Delta^n \rightarrow X$  e um ponto  $p \in X$  definimos a função  $p.f : \Delta^{n+1} \rightarrow R^n$  como:

$$(p.f)(x_0, \dots, x_n, x_{n+1}) = \begin{cases} p & \text{se } x_0 = 1, \\ x_0 p + (1 - x_0) f\left(\frac{x_1}{1-x_0}, \dots, \frac{x_n}{1-x_0}\right) & \text{se } x_0 \neq 1 \end{cases}$$

Note que essa função é definível e contínua, podemos assim estender tal definição por linearidade a um homomorfismo  $p. : S_n(X) \rightarrow S_{n+1}(X)$ , ou seja se  $\sigma = \sum n_i f_i \in S_n(X)$  onde  $f_i : \Delta^n \rightarrow X$  é um elemento da base definimos  $p.\sigma = \sum n_i p.f_i$

Estamos assim finalmente em condições de apresentar a definição do operador divisão baricêntrica, a definição é fortemente inspirado no procedimento que descrevemos acima para conjuntos, no caso de conjunto o processo consiste em tomar a construção em cone sobre a divisão baricêntrica do bordo de um simplexo  $s$ , no nosso caso faremos o mesmo sobre a função identidade do simplexo padrão  $\Delta^n$ .

**Definição 3.30.** Dado um conjunto definível  $X$  queremos definir uma sequência de homomorfismos  $Sd_n : S_n(X) \rightarrow S_n(X)$ , quando  $n < -1$  tomamos o homomorfismo trivial, para  $n = -1$  e  $n = 0$  vamos tomar  $Sd_n$  como a identidade, para  $n > 0$  denotando por  $b_n$  o baricentro de  $\Delta^n$  vamos definir  $Sd_n$  indutivamente por:

$$Sd_n(z) = z_{\#}(b_n.(Sd_{n-1}(\delta(id_{\Delta^n}))))$$

Note que a operação descrita acima associa a um conjunto definível  $X$  uma sequência de homomorfismos de  $S_n(X)$  em  $S_n(X)$ , o que nos queremos mostrar é que essa associação é uma transformação natural do funtor  $S_*$  em si mesmo, chamaremos tal transformação de  $Sd_*$  e embora a notação usual pediria que escrevêssemos  $Sd_{*,X}$  para o objeto descrito acima nós omitiremos o índice  $X$  sempre que não houver ambiguidade, vale notar que o morfismo  $Sd_{n-1}$  que aparece na definição é  $Sd_{n-1, \Delta^n}$ . Antes de provarmos que  $Sd_*$  é uma transformação natural precisamos provar alguns resultados relacionando a construção em cone aos operadores  $\#$  e  $\delta$ .

**Lema 3.31.** Se  $\sigma \in S_n(X)$  com  $n \geq 0$  temos:

- $(p.\sigma)\#e_i^{n+1} = p.(\sigma\#e_{i-1}^n)$  para  $0 < i \leq n+1$ .
- $(p.\sigma)\#e_0^{n+1} = \sigma$
- $\delta(p.\sigma) = \sigma - p.(\delta\sigma)$

*Demonstração.* No caso em que  $n = 0$  o primeiro item do enunciado precisa de certos cuidados e por isso vamos tratar esse caso separadamente, vamos aproveitar para tratar também o segundo item com  $n = 0$  por motivos ilustrativos. No segundo item se tomarmos  $n = -1$  temos  $\sigma = kf_{\emptyset}$  e  $p.\sigma = k.f_p$  onde  $f_p : \Delta^0 \rightarrow X$  assume o valor  $p$  no único ponto de  $\Delta^0$ , e assim como  $e_0^0$  é a função nula temos  $(p.\sigma)\#e_0^0 = kf_{\emptyset} = \sigma$ .

Tomando então  $n = 0$  temos que o domínio de  $\sigma$  possui um único ponto, vamos denotar por  $\sigma_0$  o valor de  $\sigma$  nesse ponto;  $p.\sigma$  é a função de  $\Delta^1 \rightarrow X$  que liga  $\sigma_0$  a  $p$  por uma reta, valendo  $p$  em  $(1,0)$  e  $\sigma_0$  em  $(0,1)$ . Temos que  $p.\sigma(e_0^1) : \Delta^0 \rightarrow X$  é a função que leva o único ponto de  $\Delta^0$  em  $p.\sigma(0,1) = p$  ou seja  $p.\sigma(e_0^1) : \Delta^0 \rightarrow X = \sigma$ . Por outro lado  $p.\sigma(e_1^1) : \Delta^0 \rightarrow X$  leva o único ponto de  $\Delta_0$  em  $p$ , por outro lado  $e_0^0$  é a função vazia e assim  $\sigma\#e_0^0$  também, nesse caso  $p.(\sigma\#e_0^0) = p.\emptyset$  é a função de  $\Delta_0 \rightarrow X$  que assume o valor  $p$  no único ponto de seu domínio, temos portanto  $(p.\sigma)\#e_1^1 = p.(\sigma\#e_0^0)$ . Isso estabelece o caso  $n = 0$  para os 2 primeiros itens.

- Quando  $n, i > 1$  temos  $\epsilon_i^{n+1} : \Delta^n \rightarrow \Delta^{n+1}$  com  $\epsilon(t_0, \dots, t_n) = (t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_n)$ , se  $t_0 = 1$  então  $(p.\sigma)\epsilon_i^{n+1}(1, 0, \dots, 0) = (p.\sigma)(1, 0, \dots, 0) = p = p.(\sigma \circ \epsilon_{i-1}^n)(1, 0, \dots, 0)$ , se  $t_0 < 1$  temos:

$$\begin{aligned} (p.\sigma)\epsilon_i^{n+1}(t_0, \dots, t_n) &= p.\sigma(t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_n) = t_0 p + (1 - t_0)\sigma\left(\frac{t_1}{1 - t_0}, \dots, \frac{t_{i-1}}{1 - t_0}, 0, \frac{t_i}{1 - t_0}, \dots, \frac{t_n}{1 - t_0}\right) = \\ &= t_0 p + (1 - t_0)\sigma(\epsilon_{i-1}^n\left(\frac{t_1}{1 - t_0}, \dots, \frac{t_{i-1}}{1 - t_0}, \frac{t_i}{1 - t_0}, \dots, \frac{t_n}{1 - t_0}\right)) = p.(\sigma\epsilon_{i-1}^n)(t_0, \dots, t_n) \end{aligned}$$

Isto estabelece o resultado nos elementos  $\sigma$  da base de  $S_n(X)$ . Como as funções  $\#$  e  $p.$  são homomorfismos o resultado é válido em todo  $S_n(X)$ .

- Quando  $n > 0$  e  $i = 0$  temos

$$(p.\sigma)\epsilon_0^{n+1}(t_0, \dots, t_n) = (p.\sigma)(0, t_0, \dots, t_n) = 0p + (1 - 0)\sigma\left(\frac{t_0}{1 - 0}, \dots, \frac{t_0}{1 - 0}\right) = \sigma(t_0, \dots, t_n)$$

E novamente o resultado é válido nos elementos da base de  $S_n(X)$  e portanto em todo  $S_n(X)$ .

- Basta fazermos uma verificação direta em um elemento de  $\sigma \in S_n(X)$  usando os itens anteriores:

$$\begin{aligned} \delta(p.\sigma) &= \sum_{0 \leq i \leq n+1} (-1)^i (p.\sigma)\#\epsilon_i^{n+1} \\ &= p.\sigma(\epsilon_0^{n+1}) + \sum_{1 \leq i \leq n+1} (-1)^i (p.\sigma)\#\epsilon_i^{n+1} \\ &= \sigma + \sum_{0 \leq i \leq n+1} (-1)(-1)^{i-1} p.(\sigma\#\epsilon_{i-1}^n) \\ &= \sigma - \sum_{-1 \leq i \leq n+1} (-1)^i p.(\sigma\#\epsilon_i^n) \\ &= \sigma - p.(\sum_{-1 \leq i \leq n+1} (-1)^i (\sigma\#\epsilon_i^n)) = \sigma - p.(\delta\sigma) \end{aligned}$$

□

Uma interpretação geométrica desse lema nos diz no primeiro item que a face oposta ao  $i$ -ésimo vértice da construção  $p.\sigma$  coincide com a construção em cone sobre  $p$  da face oposta ao vértice índice  $i - 1$  de  $\sigma$ . No segundo item vemos que a face de  $p.\sigma$  oposta ao vértice de índice 0 é o próprio  $\sigma$  enquanto o último item nos diz como o bordo de  $p.\sigma$  é em função de  $\sigma$  e seu bordo.

Vamos então provar o primeiro resultado importante dessa seção.

**Teorema 3.32.** *A função que leva um conjunto definível  $X$  na sequência de homomorfismos  $Sd_\star$  dada por  $Sd_n : S_n(X) \rightarrow S_n(X)$  é uma transformação natural de  $S_\star$  em si mesmo.*

*Demonstração.* Embora o caminho natural para provar o enunciado seria mostrar que  $Sd_n$  é um morfismo de  $\mathbf{Comp}_{\text{aug}}$  e em seguida verificar a condição de naturalidade é conveniente no nosso caso proceder de maneira diferente. Supondo que  $Sd_n$  é um morfismo a condição de naturalidade se reduz a mostrar que dada uma função definível contínua  $f : X \rightarrow Y$  o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} S_n(X) & \xrightarrow{f_\#} & S_n(Y) \\ Sd_{n,X} \downarrow & & \downarrow Sd_{n,Y} \\ S_n(X) & \xrightarrow{f_\#} & S_n(Y) \end{array}$$

Note porém que dado uma função  $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$  temos:

$$Sd_{n,Y} \circ f_{\#}(\sigma) = (f \circ \sigma)_{\#}(b_n.Sd_{n-1,\Delta^n}(\delta id_{\Delta^n})) = f_{\#}(\sigma_{\#}(b_n.Sd_{n-1,\Delta^n}(\delta id_{\Delta^n}))) = f_{\#} \circ Sd_{n,X}(\sigma)$$

Assim como vale em um elemento da base de  $S_n(X)$  e todas as funções envolvidas são morfismos temos que vale em  $S_n(X)$ .

Com isso tudo que precisamos é que  $Sd_*$  defina um morfismo em  $\mathbf{Comp}_{aug}$ , ou seja que comute com o operador  $\delta$ . Vamos novamente verificar isso calculando em um elemento  $\sigma$  da base de  $S_n(X)$ , nesse caso a demonstração é feita por indução em  $n$ . Nos casos em que  $n = -1$  não temos nada para mostrar já que tanto  $\delta_{-1}Sd_{-1}(\sigma)$  como  $Sd_{-2}\delta_{-1}(\sigma)$  são a função nula. Quando  $n = 0$  tanto  $Sd_0$  como  $Sd_{-1}$  são a identidade, de onde segue que  $\delta(Sd_0(\sigma)) = \delta(\sigma) = Sd_{-1}(\delta(\sigma))$ .

Vamos então prosseguir por indução e calcular  $\delta(Sd_n(\sigma))$  temos:

$$\delta(Sd_n(\sigma)) = \delta(\sigma_{\#}(b_n.Sd_{n-1}\delta id_{\Delta^n})) = \sigma_{\#}(\delta(b_n.Sd_{n-1}\delta id_{\Delta^n}))$$

Onde usamos a definição na primeira igualdade e o lema 3.28 na segunda. Agora temos pela hipótese de indução que  $\delta(Sd_{n-1}\delta id_{\Delta^n}) = Sd_{n-1}\delta \circ \delta(id_{\Delta^n}) = Sd_{n-1}(0) = 0$ , e pelo terceiro item do lema 3.31 segue que

$$\delta(b_n.Sd_{n-1}\delta id_{\Delta^n}) = Sd_{n-1}\delta id_{\Delta^n} - b_n.\delta(Sd_{n-1}\delta id_{\Delta^n}) = Sd_{n-1}\delta id_{\Delta^n}$$

Substituindo essa igualdade na anterior obtemos:

$$\delta(Sd_n(\sigma)) = \sigma_{\#}(Sd_{n-1}\delta id_{\Delta^n})$$

E usando a naturalidade de  $Sd_{n-1}$  que obtivemos acima seguida novamente do lema 3.28 obtemos:

$$\delta(Sd_n(\sigma)) = \sigma_{\#}(Sd_{n-1}\delta id_{\Delta^n}) = Sd_{n-1}(\sigma_{\#}\delta id_{\Delta^n}) = Sd_{n-1}(\delta\sigma_{\#}id_{\Delta^n}) = Sd_{n-1}(\delta\sigma).$$

□

O corolário abaixo nos diz como a transformação natural  $Sd$  se relaciona com as funções  $\epsilon_i^n$

**Corolário 3.33.** *Se  $z \in S_n(X)$  com  $n \geq 0$  então  $Sd_n(z)_{\#}\epsilon_0^n = Sd_{n-1}\delta(z)$  e  $Sd_n(z)_{\#}\epsilon_i^n = 0$  para  $0 < i \leq n$*

*Demonstração.* Procedemos por indução em  $n$  sobre as duas hipóteses, vamos tomar  $z = \sum k_i\sigma_i$  com  $\sigma_i$  elemento da base.

Quando  $n = 0$  temos

$$Sd_0(\sum k_i\sigma_i)_{\#}\epsilon_0^0 = (\sum k_i\sigma_i)_{\#}\epsilon_0^0 = \sum k_i f_{\emptyset} = \delta(\sum k_i\sigma_i) = Sd_{n-1}(\delta(\sum k_i\sigma_i))$$

Quando  $n > 0$  vamos tratar os casos separadamente, suponha primeiro  $i > 0$  aplicando a definição de  $Sd_n$  e o lema 3.31 temos

$$Sd_n(z)_{\#}\epsilon_i^n = z_{\#}(b_n.(Sd_{n-1}\delta id_{\Delta^n}))_{\#}\epsilon_i^n = z_{\#}(b_n.(Sd_{n-1}\delta id_{\Delta^n}\epsilon_{i-1}^{n-1}))$$

Pela hipótese de indução temos  $(Sd_{n-1}\delta id_{\Delta^n}\epsilon_{i-1}^{n-1}) = 0$  quando  $i > 1$ , quando  $i = 1$  temos

$$Sd_{n-1}(\delta id_{\Delta^n})_{\#}\epsilon_0^{n-1} = Sd_{n-2}\delta(\delta id_{\Delta^n}) = Sd_{n-2}(0) = 0$$

assim  $Sd_n(z)_{\#}\epsilon_i^n = z_{\#}(b_n.0) = 0$ .

Para  $n > 0$  e  $i = 0$  temos, pela naturalidade de  $Sd$  e o resultado que acabamos de provar, que:

$$Sd_{n-1}\delta(\sigma) = \delta Sd_{n-1}(\sigma) = \sum (-1)^i (Sd_n(z))_{\#}\epsilon_i^n = Sd_n(z)_{\#}\epsilon_0^n$$

□

Esses resultados estabelecem o que precisamos sobre divisão baricêntrica, porém ao provar o teorema de excisão para homologia singular nós vamos precisar não da transformação natural  $Sd$  definida acima mas sim de um mapa semelhante, que vamos denotar por  $Sd^K$ , obtido através da divisão baricêntrica de uma triangularização  $(K, \phi)$  do simplexo padrão  $\Delta^n$ . Como fizemos no caso da divisão baricêntrica vamos precisar descrever tal processo no nível do funtor  $S_*$ , para isso começamos comparando os complexos de cadeia  $C_*(K)$  e  $S_*(|K|)$  de um complexo simplicial  $K$ .

**Definição 3.34.** Dado um  $n$ -simplexo  $s$  com vértices  $v_0, \dots, v_n$  definimos o mapa  $\sigma_s : \Delta^n \rightarrow s$  como  $\sigma(t_0, \dots, t_n) = \sum_{0 \leq i \leq n} t_i s_i$ , note que  $\sigma_s$  é um homeomorfismo definível. Assim dado um complexo  $K$  definimos o mapa de cadeia  $\tau_{K,*} : C_*(K) \rightarrow S_*(K)$  como o mapa nulo quando  $n < -1$ , a identidade quando  $n = -1$  e quando  $n \geq 0$  tomamos  $\tau_{K,n}(s) = \sigma_s$  nos elementos da base de  $C_n(K)$  e estendemos por linearidade.

Na definição acima nos afirmamos que  $\tau_K$  é um mapa de cadeia, ou seja que  $\delta \tau_{K,n} = \tau_{K,n-1} \delta$ , isso é de fato verdade pois temos:

$$\begin{aligned} \delta(\tau_{K,n}([v_0, \dots, v_n])) &= \delta(\sigma_{[v_0, \dots, v_n]}) = \sum (-1)^i (\sigma_{[v_0, \dots, v_n]} e_i^n) = \sum (-1)^i (\sigma_{[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]}) = \\ &= \sum (-1)^i (\tau_{K,n-1}([v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n])) = \tau_{K,n-1}(\sum (-1)^i ([v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n])) = \tau_{K,n-1}(\delta([v_0, \dots, v_n])) \end{aligned}$$

Estamos interessados em funções de  $S_i(X)$  em  $S_i(X)$  que respeitem não só uma triangularização como também a sua divisão baricêntrica, até o momento todas as funções entre complexos de cadeia que precisamos estavam definidos em todo o complexo, no entanto essas funções não terão essa propriedade. Elas estarão definidas somente em uma parte inicial da cadeia e por isso são chamados de mapas de cadeia parcial, uma definição precisa pode ser encontrada no apêndice.

Dado um elemento  $z \in S_i(X)$  temos que  $Sd(z) \in S_i(X)$ , a ideia do procedimento que vamos realizar é "compor"  $Sd_-$  com um novo elemento contendo as informações sobre a triangularização em questão. Como queremos que o objeto final esteja em  $S_i(X)$  precisamos compor  $Sd(z)$  com um elemento em  $S_i(\Delta^i)$ .

Lembramos que  $s^n$  é o  $n$ -simplexo cujo fecho topológico é  $\Delta^n$  e que  $\bar{s}^n$  é o complexo formado por  $s^n$  e todas as suas faces, lembramos ainda que dado um complexo fechado  $K$  denotamos por  $\mathcal{A}(K)$  a categoria formada por seus subcomplexos fechados cujo morfismos são a inclusão, dado um mapa contínuo  $\phi : |K| \rightarrow |L|$  dizíamos que ele era compatível quando a imagem de um simplexo de  $K$  por  $\phi$  estava contida em um simplexo de  $L$ , definimos  $\mathcal{A}(\phi) : \mathcal{A}(L) \rightarrow \mathcal{A}(K)$  como o funtor que leva um subcomplexo  $L_0$  de  $L$  no subcomplexo  $K_0$  de  $K$  tal que  $k \in K_0$  se e somente se  $\phi(|k|) \subset |L_0|$ , definimos ainda  $C_*^K$  como o funtor que leva subcomplexos  $K_0$  de  $K$  em seus respectivos complexos de cadeia  $C_*(K_0)$ .

Estamos interessados em triangularizações de  $\Delta^n$  compatíveis com os conjuntos de  $\bar{s}^n$ . Seja  $(K, \phi)$  uma dessas triangularizações vamos tomar novamente os funtores  $\tilde{C}_*^{s^n}$  e  $\tilde{C}_*^K \circ \mathcal{A}(\phi^{-1}) : \mathcal{A}(\bar{s}^n) \rightarrow \mathbf{Comp}_{aug}$ , vimos em vários casos, como na demonstração de 3.7 e 3.13, que  $M = \{\bar{I} : I \in \bar{s}^n\}$  é um conjunto de modelos de  $\tilde{C}_*^{s^n}$  e  $\tilde{C}_*^K \circ \mathcal{A}(\phi^{-1})$ , e que esses funtores são livres com base em  $M$ . Além disso é imediato que  $\tilde{C}_*^{s^n}$  é acíclico em  $M$ , por outro lado  $\phi^{-1}$  é um homeomorfismo e sabemos que a homologia singular é invariante para o homeomorfismos. Assim dado  $\bar{I} \in M$  temos  $0 = H_*(|\bar{I}|) = H_*(\phi^{-1}(|\bar{I}|)) = H_*(|\mathcal{A}(\phi^{-1}(\bar{I}))|)$  e portanto  $\tilde{C}_*^K \circ \mathcal{A}(\phi^{-1})$  é acíclico em  $M$ . Com isso o corolário do teorema de modelos acíclicos A.7 nos garante que os funtores  $\tilde{C}_*^{s^n}$  e  $\tilde{C}_*^K \circ \mathcal{A}(\phi^{-1})$  são naturalmente equivalentes, e que quaisquer duas transformações naturais entre tais funtores são naturalmente homotópicas. Se tomarmos então  $F$  como uma dessas transformações e calcularmos  $F$  em  $\bar{s}^n$  obtemos um funtor  $F_{s^n} : \tilde{C}_*(s^n) \rightarrow \tilde{C}_*(K)$ , segue ainda da naturalidade de  $F$  e do fato de todos os morfismos em  $\mathcal{A}(\bar{s}^n)$  serem inclusões que dado  $I \in s^n$  e  $I_0 \in \tilde{C}_j(I) \subset \tilde{C}_j(\bar{s}^n)$  temos  $F_{s^n}(I_0) \in \tilde{C}_j(\mathcal{A}(\phi^{-1})(\bar{s}^n))$ .

Nessas condições dada uma triangularização  $(K, \phi)$  de  $\Delta^n$  o mapa acima nos diz como associar a elementos em  $\tilde{C}_j(\bar{s}^n)$  um elemento em  $\tilde{C}_j(K)$  em seguida podemos usar  $\tau_{k,i}$  definido em 3.34 e passar para

$S_i(K)$ , se aplicarmos em seguida  $\phi^{-1}\#$  obtemos um elemento de  $S_i(\Delta^n)$ , como mencionamos anteriormente precisamos de um elemento de  $S_i(\Delta_i)$ . Para solucionar tal problema vamos descrever um mapa chamado  $\sigma_i^n : \Delta^n \rightarrow \Delta^i$ , vamos escolher um mapa que em particular mapeie a face de  $s^n$  formada pelos últimos  $i$  vértices homeomorficamente em  $\Delta^i$ , dessa forma se tomarmos tal face como ponto de partida no processo acima essa última etapa não irá causar nenhum problema.

A escolha particular da função  $\sigma_i^n : \Delta^n \rightarrow \Delta^i$  não é importante, tudo que precisamos é de uma função contínua definível mapeando a face gerada pelos últimos  $i$  vértices de  $\Delta^n$  em  $\Delta^i$  (o fato de serem os últimos também não é importante). A escolha abaixo faz o serviço:

$$\sigma_i^n(a_0, \dots, a_n) = (a_{n-i} + \frac{a_0 + \dots + a_{n-i-1}}{i+1}, \dots, a_n + \frac{a_0 + \dots + a_{n-i-1}}{i+1})$$

**Definição 3.35.** Dada um triangularização  $(\phi, K)$  de  $\Delta^n$  construímos acima um mapa de cadeia  $F_{s^n} : C_*(s^n) \rightarrow C_*(K)$ . Dado um conjunto definível  $X$  podemos então definir um mapa parcial de cadeia dado pelos morfismos  $Sd_i^K : S_i(X) \rightarrow S_i(X)$  para  $i \leq n$  definidos como o homomorfismo trivial par  $i < -1$  a identidade quando  $i = -1$  e

$$Sd_i^K(z) = Sd(z)\#\sigma_i^n\#\phi^{-1}\#\tau_k(F_{s^n}([e_{n-i}, \dots, e_n]))$$

quando  $0 \leq i \leq n$ .

Note que dada um triangularização  $(\phi, K)$  de  $\Delta^n$  o mapa  $Sd^K$  associa a cada conjunto definível  $X$  um mapa de cadeia parcial  $Sd_X^{(K, \phi)} : S_*(X) \rightarrow S_*(X)$ , esse mapa depende de fato tanto de  $K$  como de  $\phi$  e  $X$ , como a notação  $Sd_X^{(K, \phi)}$  é muito carregada usaremos variações conforme for conveniente.

Afirmar que  $Sd^K$  é natural é dizer que dado um função contínua definível  $f : X \rightarrow Y$  então  $f\#Sd^K(X) = Sd^K(Y)\#Y$ , mas esse fato segue diretamente da associatividade de  $\#$ . Na definição acima nós afirmamos que  $Sd^K(X)$  é um mapa de cadeia parcial, é claro que precisamos provar tal afirmação, porém juntando os dois fatos dizemos, embora não tenhamos dado uma definição, que  $Sd^K$  é uma transformação natural de cadeia parcial. O teorema abaixo nos dá, não só esse resultado, como também nos garante que  $Sd^K$  preserva a classe dos elementos em nível de homologia.

**Teorema 3.36.** *Se  $(\phi, K)$  é uma triangularização de  $\Delta^n$  então  $Sd^K : S_* \rightarrow S_*$  é uma transformação natural de cadeia parcial, além disso  $Sd^K$  é parcialmente naturalmente homotópica à transformação natural  $id_{\leq n}$  que associa a cada conjunto definível  $X$  a identidade  $id : S_i(X) \rightarrow S_i(X)$  para  $i \leq n$ .*

*Demonstração.* Para mostrar que  $Sd^K$  é natural de cadeia parcial falta mostrar que dado um conjunto definível  $X \in R^m$  os homomorfismos  $Sd_i^K(X)$  comutam com o operador de bordo  $\delta$  para  $i \leq n$ . Quando  $i \leq 0$  temos  $Sd_i^K$  a identidade, e portanto a afirmação anterior é trivial, suponha então  $i \geq 1$  vamos calcular  $\delta(Sd_i^K(X))$  em um elemento  $z \in S_i(X)$ :

$$\begin{aligned} \delta(Sd_i^K(z)) &= \delta(Sd(z)\#\sigma_i^n\#\phi^{-1}\#\tau_k(F_{s^n}([e_{n-i}, \dots, e_n]))) = Sd(z)\#\sigma_i^n\#\phi^{-1}\#\tau_k(F_{s^n}(\delta([e_{n-i}, \dots, e_n]))) = \\ &= Sd(z)\#\sigma_i^n\#\phi^{-1}\#\tau_k(F_{s^n}(\sum_{0 \leq j \leq i} (-1)^j [e_{n-i}, \dots, \hat{e}_{n-i+j}, \dots, e_n])) = \\ &= \sum_{0 \leq j \leq i} (-1)^j Sd(z)\#\sigma_i^n\#\phi^{-1}\#\tau_k(F_{s^n}([e_{n-i}, \dots, \hat{e}_{n-i+j}, \dots, e_n])) \end{aligned}$$

Onde usamos primeiro a definição, seguido do lema 3.28 para os mapas envolvidos juntamente do fato de  $F_{s^n}$  ser de cadeia, em seguida utilizamos a definição de  $\delta$  e por fim o fato de todos os mapas envolvidos serem morfismo. Antes de prosseguirmos a demonstração precisamos definir um novo mapa, tome  $\alpha_i^n : \Delta^n \rightarrow \Delta^{n-1}$  a função definida por:

$$\alpha_i^n(a_0, \dots, a_n) = (a_0 + \frac{a_i}{n}, \dots, a_{i-1} + \frac{a_i}{n}, a_{i+1} + \frac{a_i}{n}, \dots, a_n + \frac{a_i}{n})$$

Temos a seguinte igualdade quando  $i > 0$ :

$$\begin{aligned} \alpha_0^i \sigma_i^n(a_0, \dots, a_n) &= \alpha_0^i \left( a_{n-i} + \frac{a_0 + \dots + a_{n-i-1}}{i+1}, \dots, a_n + \frac{a_0 + \dots + a_{n-i-1}}{i+1} \right) = \\ &= \left( a_{n-i+1} + \frac{a_0 + \dots + a_{n-i-1}}{i+1} + \frac{a_{n-i} + \frac{a_0 + \dots + a_{n-i-1}}{i+1}}{i}, \dots, a_n + \frac{a_0 + \dots + a_{n-i-1}}{i+1} + \frac{a_{n-i} + \frac{a_0 + \dots + a_{n-i-1}}{i+1}}{i} \right) = \\ &= \left( a_{n-(i-1)} + \frac{a_0 + \dots + a_{n-i}}{i}, \dots, a_n + \frac{a_0 + \dots + a_{n-i}}{i} \right) = \sigma_{i-1}^n(a_0, \dots, a_n) \end{aligned}$$

Note que  $\alpha_i^n$  é um homeomorfismo da face oposta ao vértice  $e_i$  em  $\Delta^{n-1}$ , por outro lado a função  $\epsilon_i^n$  é uma inclusão de  $\Delta^n$  em tal face e assim quando nos restringimos a tal face  $\epsilon_i^n \circ \alpha_i^n$  é a identidade. Pela observação feita ao final da definição de  $F_s^n$  temos que a imagem de  $\phi^{-1} \# \tau_k F_s([e_n - i, \dots, \hat{e}_{n-i+j}, \dots, e_n])$  está contida no simplexo gerado por  $\{e_{n-1}, \dots, \hat{e}_{n-i+j}, \dots, e_n\}$  e portanto temos a igualdade:

$$\sigma_i^n \# \tau_k F_s^n([e_n - i, \dots, \hat{e}_{n-i+j}, \dots, e_n]) = \epsilon_j^i \# \alpha_j^i \# \sigma_i^n \# \phi^{-1} \# \tau_k F_n([e_n - i, \dots, \hat{e}_{n-i+j}, \dots, e_n])$$

Substituindo no cálculo que vínhamos fazendo obtemos

$$\delta(Sd_i^K(z)) = \sum_{0 \leq j \leq i} (-1)^j Sd(z) \# \epsilon_j^i \# \alpha_j^i \# \sigma_i^n \# \phi^{-1} \# \tau_k F_n([e_n - i, \dots, \hat{e}_{n-i+j}, \dots, e_n])$$

Lembrando que pelo corolário 3.33 temos  $Sd(z)\epsilon_0^i = Sd(\delta z)$  e  $Sd(z)\epsilon_j^i = 0$  para  $j > 0$  segue assim:

$$\begin{aligned} \delta(Sd_i^K(z)) &= Sd(\delta(z)) \# \alpha_0^i \# \sigma_i^n \# \phi^{-1} \# \tau_k F_n([e_{n-i+1}, \dots, \hat{e}_{n-i}, \dots, e_n]) = \\ &= Sd(\delta(z)) \# \sigma_{i-1}^n \# \phi^{-1} \# \tau_k F_n([e_{n-i+1}, \dots, \hat{e}_{n-i}, \dots, e_n]) = Sd_{i-1}^K(\delta(z)) \end{aligned}$$

Finalmente precisamos provar que  $Sd^K$  é parcialmente homotópica a  $id_{\star \leq n}$ , para isso nós vamos utilizar a versão do teorema de modelos acíclicos para cadeias parciais A.9. Nós já sabemos pela definição que tanto  $Sd^K$  como  $id_{\star \leq n}$  correspondem à identidade em  $n = -1$ , então tudo o que precisamos fazer é encontrar um conjunto  $M$  de modelos de  $S_\star$  tal que  $S_n$  seja livre com base em  $M$  e acíclico em tal conjunto.

Vamos tomar  $M = \{\Delta^i : i \in \mathbb{N} \cup \{-1\}\}$ ,  $S_i$  é o functor que leva um conjunto definível  $X$  no grupo abeliano livre gerado pelas funções definíveis contínuas de  $\Delta^i \rightarrow X$ , tomando então o conjunto unitário de  $\Delta^i$  como  $M_i$  e a função identidade  $id \in S_i(\Delta^i)$  como seu representante temos que

$$\{S_i(f)(id) = f \# id = f : f \text{ é uma função contínua de } \Delta^i \text{ em } X\}$$

é uma base de  $S_\star(X)$  ou seja  $S_\star$  é livre com base em  $M$ . Tudo que falta provar é que  $S_\star(\Delta^n)$  é acíclico, esse resultado segue do axioma de homotopia já que em  $\Delta^n$  a função identidade é homotópica a função que tem o baricentro como valor constante. Estamos assim em condições de aplicar A.9 e obter o resultado desejado. □

O fato de  $Sd^K$  ser parcial pode parecer uma limitação, porém lembre que a ordem de  $Sd^K$  é exatamente a dimensão  $n$  do simplexo padrão  $\Delta^n$  que está sendo triangularizado, essa simples observação faz com que a parcialidade do mapa não seja um problema.

### 3.2.3 O Axioma de Excisão

O procedimento para provar o axioma de excisão, assim como no caso real, não é direto. Vamos começar a demonstração obtendo um enunciado equivalente ao axioma de excisão, em seguida mostraremos como é possível provar tal enunciado a partir de um certo lema, essa parte da demonstração é completamente análoga à utilizada em [Rot88] para provar o axioma no caso real. Deixaremos para o final a demonstração

do lema mencionado acima, é nessa parte da demonstração que não podemos proceder de maneira análoga à usual, contornaremos o problema utilizando os resultados da última seção.

**Lema 3.37.** *O seguinte enunciado implica o axioma de excisão:*

*Dado um conjunto definível  $X$  e  $X_1, X_2 \subset X$  também definíveis tais que  $X = \text{int}(X_1) \cup \text{int}(X_2)$  então a inclusão  $j : (X_1, X_1 \cap X_2) \rightarrow (X, X_2)$  induz isomorfismos a nível de homologia.*

*Demonstração.* Embora o enunciado acima seja equivalente ao axioma de excisão, nós só precisamos da implicação. Assumindo então que o enunciado vale tome  $U \subset A \subset X$  conjuntos definíveis com  $cl(U) \subset \text{int}(A)$ , tomamos  $X_2 = A$  e  $X_1 = X - U$ . Temos que  $X - \text{int}(A) \subset X - cl(U)$ , para utilizar o resultado acima precisamos de:

$$\begin{aligned} \text{int}(X_1) \cup \text{int}(X_2) &= \text{int}(X - U) \cup \text{int}(A) \supset \text{int}(X - \bar{U}) \cup \text{int}(A) = \\ &= (X - \bar{U}) \cup \text{int}(A) \supset (X - \text{int}(A)) \cup \text{int}(A) = X \end{aligned}$$

Nessas condições o enunciado nos diz que cada função  $h_n$  induzida da projeção é um homeomorfismo entre  $H_n(X_1, X_1 \cap X_2)$  e  $H_n(X, X_2)$ , como  $X_1 \cap X_2 = X - U \cap A = A - U$  temos que  $h_n$  é um homeomorfismo entre  $(X - U, A - U)$  e  $(X, A)$  como pede o axioma de excisão. □

Assim tudo que precisamos fazer é provar o enunciado acima, para isso vamos utilizar o seguinte lema.

**Lema 3.38.** *Dado  $X$  e subconjuntos  $X_1, X_2 \subset X$  tais que  $X = \text{int}(X_1) \cup \text{int}(X_2)$  então a inclusão  $j : S_*(X_1) + S_*(X_2) \rightarrow S_*(X)$  induz um isomorfismo entre  $H_n(S_*(X_1) + S_*(X_2))$  e  $H_n(X)$ .*

Talvez a primeira observação que deva ser feita sobre esse lema é que dados subcomplexos  $S_*(X_1)$  e  $S_*(X_2)$  de um complexo de cadeia  $S_*(X)$  então a soma desses subcomplexos  $S_*(X_1) + S_*(X_2)$  também é um complexo de cadeia, esse resultado embora trivial é necessário para a compreensão do resultado acima.

Como mencionamos anteriormente a demonstração desse lema é o passo essencialmente diferente entre a demonstração usual do axioma da excisão em  $\mathbb{R}^n$  e a demonstração do axioma no nosso caso, por esse motivo vamos adiar a demonstração desse resultado provando primeiro como ele implica o axioma de excisão:

*Demonstração de que 3.38 Implica o Axioma da Excisão.* Dados conjuntos definíveis  $X_1, X_2 \subset X$  tais que  $\text{int}(X_1) \cup \text{int}(X_2) = X$  queremos mostrar que a inclusão  $i : (X_1, X_1 \cap X_2) \rightarrow (X, X_2)$  induz um isomorfismo entre os grupos de homologia, pelo lema 3.37 isso é suficiente.

Claramente a função  $j : S_*(X_1) + S_*(X_2) \rightarrow S_*(X)$  é injetora, além disso  $S_*(X_1) + S_*(X_2)$  é um subcomplexo de  $S_*(X)$  de modo que a projeção  $\pi : S_*(X) \rightarrow S_*(X_1) + S_*(X_2)$  é sobrejetora, a composta  $\pi \circ j$  é o morfismo nulo, temos assim a seguinte sequência exata curta

$$0 \longrightarrow S_*(X_1) + S_*(X_2) \xrightarrow{j} S_*(X) \xrightarrow{\pi} \frac{S_*(X)}{S_*(X_1) + S_*(X_2)} \longrightarrow 0$$

Pela proposição A.1 existe uma sequência exata longa da forma:

$$\dots \longrightarrow H_{n+1}\left(\frac{S_*(X)}{S_*(X_1) + S_*(X_2)}\right) \xrightarrow{d_{n+1}} H_n(S_*(X_1) + S_*(X_2)) \xrightarrow{H_n(j)} H_n(S_*(X)) \xrightarrow{H_n(\pi)} H_n\left(\frac{S_*(X)}{S_*(X_1) + S_*(X_2)}\right) \xrightarrow{d_n} \dots$$

E pelo lema 3.38 temos  $H_n(j)$  um isomorfismo de onde segue que  $\ker(H_n(\pi)) = H_n(S_*(X))$ , mas como  $\pi$  é sobrejetora o mesmo vale para  $H_n(\pi)$ , temos assim que  $H_n\left(\frac{S_*(X)}{S_*(X_1) + S_*(X_2)}\right) = 0$ .

Analogamente temos a inclusão  $l : \frac{S_*(X_1) + S_*(X_2)}{S_*(X_2)} \rightarrow \frac{S_*(X)}{S_*(X_2)}$  e a projeção  $\pi' : \frac{S_*(X)}{S_*(X_2)} \rightarrow \frac{S_*(X)}{S_*(X_1) + S_*(X_2)}$ , isso nos dá uma sequência exata curta como acima e temos a seguinte sequência exata longa associada:

$$\dots \longrightarrow H_{n+1}\left(\frac{S_*(X)}{S_*(X_1)+S_*(X_2)}\right) \xrightarrow{d'_{n+1}} H_n\left(\frac{S_*(X_1)+S_*(X_2)}{S_*(X_2)}\right) \xrightarrow{H_n(l)} H_n\left(\frac{S_*(X)}{S_*(X_2)}\right) \xrightarrow{H_n(\pi')} H_n\left(\frac{S_*(X)}{S_*(X_1)+S_*(X_2)}\right) \xrightarrow{d'_n} \dots$$

Mas  $H_n\left(\frac{S_*(X)}{S_*(X_1)+S_*(X_2)}\right) = 0$  como vimos acima, de onde segue que  $H_n(l)$  é sempre um isomorfismo. Note que  $S_n(X_1 \cap X_2)$  é o grupo livre gerado pelas funções de  $\Delta^n$  em  $X_1 \cap X_2$ , o que é o mesmo que a intersecção entre o grupo livre gerado pelas funções de  $\Delta^n$  em  $X_1$  intersectado com o grupo livre gerado pelas funções de  $\Delta^n$  em  $X_2$ , ou seja  $S_n(X_1 \cap X_2) = S_n(X_1) \cap S_n(X_2)$ . Assim os grupos de  $S_*(X_1 \cap X_2)$  coincidem com os grupos de  $S_*(X_1) \cap S_*(X_2)$ , por outro lado nos dois complexos o operador de bordo é a restrição do operador  $\delta$  de  $S_*(X)$  de onde segue que os dois complexos são iguais.

Como nós mencionamos no apêndice existem versões dos teoremas de isomorfismo para complexos de cadeia, em particular o segundo teorema do isomorfismo nos dá a seguinte fatoração de  $i$  por um isomorfismo  $z$ :

$$\begin{array}{ccc}
 S_*(X_1, X_1 \cap X_2) = \frac{S_*(X_1)}{S_*(X_1) \cap S_*(X_2)} & \xrightarrow{i} & S_*(X, X_2) = \frac{S_*(X)}{S_*(X_2)} \\
 & \searrow z & \nearrow l \\
 & \frac{S_*(X_1)+S_*(X_2)}{S_*(X_2)} &
 \end{array}$$

Tomando as homologias temos então  $H_n(i) = H_n(z) \circ H_n(l)$ , já vimos que  $l$  é isomorfismo, e como  $z$  é isomorfismo o mesmo é verdade para  $H_n(z)$  de onde segue que  $H_n(i)$  é um isomorfismo como queríamos.  $\square$

Assim tudo o que falta fazermos é provar o lema 3.38. Dada uma função  $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$  a demonstração usual desse lema é feita tomando um número  $k$  suficientemente grande de sucessivas divisões baricêntricas de  $\Delta^n$  de modo que  $\sigma$  restrito a qualquer simplexo de tal subdivisão tenha sua imagem contida ou em  $int(X_1)$  ou em  $int(X_2)$ . Isso é possível graças à existência de números de Lebesgue em  $\mathbb{R}^n$ , pois como os 2 conjuntos acima nos dão uma cobertura de  $X$  por abertos sabemos que existe  $\epsilon \in \mathbb{R}$  tal que para todo  $x \in X$  a bola de centro  $x$  e raio  $\epsilon$  está contida em um desses conjuntos, assim se tomarmos suficientes divisões baricêntricas de  $\Delta^n$  conseguimos garantir que nenhum simplexo de tal divisão possua imagem com diâmetro maior que  $\epsilon/2$  e conseqüentemente todas as imagens estarão contidas em um dos  $w$  conjuntos mencionados. Esse procedimento não funciona em uma estrutura  $O$ -minimal qualquer, se tomarmos por exemplo um modelo não standard de  $\mathbb{R}$  embora exista um elemento  $\epsilon$  nas condições acima não podemos garantir que esse elemento não seja infinitesimal, e nesse caso não importa quantas vezes iteremos as divisões baricêntricas em  $\Delta^n$  não poderemos garantir que os conjuntos tenham imagens com diâmetro menor que  $\epsilon/2$ . Contornamos essa dificuldade usando o teorema de triangularização e as ferramentas algébricas que desenvolvemos anteriormente.

*Demonstração de 3.38.* Fixemos um conjunto definível  $X$  com subconjuntos definíveis  $X_1$  e  $X_2$  tais que  $X = int(X_1) \cup int(X_2)$  como no enunciado do lema. Vamos fazer a demonstração em duas etapas, primeiro vamos mostrar que dado  $z \in S_n(X)$  podemos encontrar uma triangularização  $(K, \phi)$  de  $\Delta^n$  tal que  $Sd_n^K(z) \in S_n(int(X_1)) + S_n(int(X_2))$ , contornando assim o problema mencionado no parágrafo acima. Em seguida vamos completar a demonstração do lema de maneira semelhante à demonstração usual do axioma de excisão apoiados no fato de  $Sd^K$  ser parcialmente naturalmente homotópico à restrição da identidade.

Vamos fixar um elemento  $z \in S_n(X)$ , seja  $F_z$  o conjunto de todas as funções de  $\Delta_n \rightarrow X$  envolvidas em  $z$ , isto é que aparecem com coeficiente não nulo quando escrevemos  $z$  como combinação linear dos elementos da base usual de  $S_n(X)$ . Tome  $C_z = \{f^{-1}(X_1) : f \in F_z\} \cup \{f^{-1}(X_2) : f \in F_z\}$ . Tome  $(L, \phi)$  uma triangularização de  $\Delta^n$  compatível com  $C_z, C_{Sd(z)}$  e  $s^n$ .

Dado um vértice  $v$  de um simplexo  $K$  o conjunto de todos os simplexos de  $K$  que tem  $v$  como vértice é conhecido como a estrela de  $v$ , tal conjunto é denotado por  $St(v)$ . Dado  $f \in F_{Sd(z)}$  um vértice  $v \in L$  se  $f(\phi^{-1}(v)) \in int(X_i)$  então  $f \circ \phi^{-1}(|St(v)|) \subset int(X_i)$ , para  $i = 1, 2$ . Como  $f$  é contínua e  $\phi$  um homeomorfismo temos que  $\phi \circ h^{-1}(int(X_i))$  é um aberto de  $|L|$ , se  $v$  pertence a tal aberto então qualquer simplexo  $l$  de  $St(v)$  deve intersectar tal aberto, mas pelas condições de compatibilidade de  $(L, \phi)$ , dado um simplexo qualquer  $t$  de  $L$  ou  $\phi^{-1}(t) \subset f^{-1}(int(X_i))$  ou  $\phi^{-1}(t) \cap f^{-1}(int(X_i)) = \emptyset$ , de onde segue que  $f \circ \phi^{-1}(l) \subset X_i$ , e portanto vale o resultado.

Não é difícil provar que dado um simplexo  $s$  na divisão baricêntrica de  $L$ , que chamaremos de  $|K|$ , temos  $|\bar{s}| \subset |St(v)|$  para algum vértice  $v \in L$ . Tomando novamente  $f$  envolvida em  $Sd(z)$  dado um simplexo qualquer  $t$  de  $K$  e um vértice  $v$  de  $t$  tal que  $|\bar{t}| \subset |St(v)|$  temos que  $f(\phi^{-1}(v)) \in int(X_i)$  para algum  $i$  (já que esses dois conjuntos cobrem  $X$ ), pela observação acima segue que  $f \circ \phi^{-1}(\bar{t}) \subset f \circ \phi^{-1}(st(v)) \subset int(X_i)$ . Note que  $(K, \phi)$  também é uma triangularização de  $\Delta^n$  compatível com os conjuntos de  $\phi(L)$ .

Temos por definição:

$$Sd_n^K z = (Sdz)_\# \sigma_n^n \# \phi^{-1} \# \tau_K(F_{S^n}([e_0, \dots, e_n]))$$

mas  $\sigma_n^n = id$ , além disso pela definição de  $F_{S^n}$  temos  $F_{S^n}([e_0, \dots, e_n]) \in C_n(\mathcal{A}(\phi^{-1}))(\bar{t})$  para algum simplexo  $t \in K$  de modo que  $\tau_K(F_{S^n}([e_0, \dots, e_n])) \in S_n(|\bar{t}|)$ . Pelas observações anteriores segue que dada uma função qualquer  $f$  envolvida em  $Sd(z)$  temos  $f \# \phi^{-1} \# (\tau((F_{S^n}([e_0, \dots, e_n]))) \in S_n(int(X_i))$  para algum  $i$ , temos assim que podemos dividir  $Sd_n^K(z)$  como uma soma de elementos em  $S_n(int(X_1))$  somado a uma soma de elementos de  $S_n(int(X_2))$ , ou seja  $Sd_n^K(z) \in S_n(int(X_1)) + S_n(int(X_2))$ . Completamos assim a primeira parte da demonstração.

O que precisamos fazer agora é mostrar que inclusão  $j : S_*(X_1) + S_*(X_2) \rightarrow S_*(X)$  induz isomorfismo em nível de homologia. Vamos chamar a função induzida de  $H_n(j)$  e vamos provar primeiramente que ela é sobrejetora. Para isso tome um elemento  $z \in S_n(X)$ , usando a triangulação encontrada acima temos  $Sd_n^K(z) \in S_n(int(X_1)) + S_n(int(X_2)) \subset S_n(X_1) + S_n(X_2)$ , como  $Sd_n^K$  é de ordem  $n$  e parcialmente homotópica à identidade temos  $[Sd_n^K(z)] = [z]$  como queríamos.

Finalmente precisamos ver que é injetora, note que esse resultado não é óbvio pois  $B_n(S_*(X_1) + S_*(X_2))$  pode ser um subgrupo próprio de  $B_n(S_*(X))$ . Suponha então que dois elementos  $(z_1 + z_2) + B_n(S_*(X_1) + S_*(X_2))$  e  $(y_1 + y_2) + B_n(S_*(X_1) + S_*(X_2))$  de  $H_n(S_*(X_1) + S_*(X_2))$  sejam levados no mesmo elemento de  $H_n(X)$ , isso significa que existe  $x_0 \in B_n(X)$ , ou seja  $x \in S_{n+1}(X)$  com  $\delta(x) = x_0$ , tal que  $y_1 + y_2 + \delta(x) = z_1 + z_2$ . Pelo mesmo argumento da primeira parte da demonstração podemos encontrar uma triangularização  $(K, \phi)$  de  $\Delta^{n+1}$  tal que  $Sd_{n+1}^K(x) \in S_{n+1}(X_1) + S_{n+1}(X_2)$ , calculamos então:

$$\begin{aligned} Sd_n^K(y_1 + y_2 + \delta(x)) &= Sd_n^K(z_1 + z_2) \\ Sd_n^K(y_1 + y_2) + Sd_n^K(\delta(x)) &= Sd_n^K(z_1 + z_2) \\ Sd_n^K(y_1 + y_2) + \delta(Sd_{n+1}^K(x)) &= Sd_n^K(z_1 + z_2) \end{aligned}$$

Agora como  $Sd_n^K$  é parcialmente homotópica à identidade a classe de  $y_1 + y_2$  na homologia de  $S_*(X_1) + S_*(X_2)$  é a mesma de  $Sd_n^K(y_1 + y_2)$ , ou seja  $y_1 + y_2 + B_n^K(S_*(X_1) + S_*(X_2)) = Sd_n^K(y_1 + y_2) + B_n^K(S_*(X_1) + S_*(X_2))$ , e analogamente  $z_1 + z_2 + B_n^K(S_*(X_1) + S_*(X_2)) = Sd_n^K(z_1 + z_2) + B_n^K(S_*(X_1) + S_*(X_2))$ , além disso  $\delta(Sd_{n+1}^K(x)) \in B_n^K(S_*(X_1) + S_*(X_2))$ , assim:

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 + B_n^K(S_*(X_1) + S_*(X_2)) &= Sd_n^K(y_1 + y_2) + B_n^K(S_*(X_1) + S_*(X_2)) = \\ &= Sd_n^K(y_1 + y_2) + \delta(Sd_{n+1}^K(x)) + B_n^K(S_*(X_1) + S_*(X_2)) = \\ &= Sd_n^K(z_1 + z_2) + B_n^K(S_*(X_1) + S_*(X_2)) = z_1 + z_2 + B_n^K(S_*(X_1) + S_*(X_2)) \end{aligned}$$

De onde segue que  $y_1 + y_2$  e  $z_1 + z_2$  são iguais a nível de homologia, concluindo assim a demonstração do lema, e consequentemente do axioma de excisão.  $\square$

### 3.3 Aplicações

Nosso objetivo nessa seção é obter através da teoria desenvolvida até o momento resultados análogos a alguns teoremas clássicos de topologia algébrica.

Para isso vamos precisar calcular o grupo de homologia de certos conjuntos. De maneira geral vamos utilizar a teoria de homologia singular em tais aplicações em alguns casos utilizaremos a homologia simplicial apenas como um método de obter a homologia singular, nesses casos é importante distinguir entre as teorias, denotaremos a homologia singular por  $H_*^{sing}$  e a simplicial por  $H_*^{simp}$  quando for necessário.

#### 3.3.1 Calculando Homologia

O primeiro passo para obtermos resultados utilizando as ferramentas desenvolvidas é calcular o grupo de homologia de alguns conjuntos. Antes disso temos o seguinte resultado geral, a demonstração é completamente análoga à usual.

**Teorema 3.39.** *Dado um conjunto definível  $X$  o grupo de homologia  $H_0(X)$  é o grupo livre com  $k - 1$  geradores onde  $k$  é o número de componentes definivelmente conexas de  $X$ .*

*Demonstração.*  $S_0(X)$  é o grupo livre gerado pelas funções de  $\Delta^0 \rightarrow X$ , como  $\Delta^0$  é o conjunto unitário de  $1 \in \mathbb{R}$  denotaremos por  $f_x$  a função que assume o valor  $x$  em 1. Sejam  $X_1, \dots, X_m$  as componentes definivelmente conexas de  $X$ , sabemos do último capítulo que esse conjuntos são definivelmente conexos por caminho e em particular dados pontos  $x$  e  $y$  em  $X_i$  existe uma função  $f_{x,y} : [0, 1] \rightarrow X$  com  $f(0) = x$  e  $f(1) = y$ , essa função nos dá uma homotopia entre as funções  $f_x$  e  $f_y$ .

Agora  $H_0(X) = \ker(\delta_0) / \text{img}(\delta_1)$ , e dado um elemento  $z$  de  $\ker(\delta_0)$  podemos escrevê-lo como  $\sum b_i^j f_{x_i^j} + \dots + \sum b_i^k f_{x_i^k}$  onde cada  $x_i^j$  pertence a  $X_j$  e  $\sum_{i,j} b_i^j = 0$ , assim

$$\sum_{0 \leq i \leq i_k} b_i^k f_{x_i^k} = \left( \sum_{0 \leq i \leq i_k} b_i^k \right) f_{x_0^k} - (b_1^k f_{x_0^k} - b_1^k f_{x_1^k}) - \dots - (b_{i_k}^k f_{x_0^k} - b_{i_k}^k f_{x_{i_k}^k}) = \left( \sum_{0 \leq i \leq i_k} b_i^k \right) f_{x_0^k} - \sum_{0 < i \leq i_k} b_i^k (\delta(f_{x_0, x_i}))$$

Mas em nível de homologia temos  $\sum_{i>0} b_i^k (\delta(f_{x_0, x_i})) = 0$  de onde, chamando  $\sum_i b_i^k$  de  $a^k$  e  $x_0^k$  de  $x^k$ , a classe de  $\sum_i b_i^k f_{x_i^k}$  é a mesma de  $a^k f_{x^k}$  assim a classe de  $z$  é a mesma de  $\sum_k a^k f_{x^k}$ , além disso  $\sum_{i,j} b_i^j = 0$  é o mesmo que  $\sum a^k = 0$ , o que significa que  $a_1 = -\sum_{k>1} a^k$  e portanto a classe de  $z$  é a mesma de:

$$\sum_{1 < k < m-1} (a^k - a^1) (f_{x^k} - f_{x^1})$$

Isso define um isomorfismo entre  $H_0(X)$  e um subgrupo do grupo livre gerado por  $f_{x^k} - f_{x^1}$  (a função que leva o elemento  $z$  em  $\sum_{1 < k < m-1} (a^k - a^1) (f_{x^k} - f_{x^1})$ ), para ver que esse subgrupo é de fato todo o grupo livre gerado por esses  $k - 1$  elementos basta notar que a imagem de  $n[f_{x^k} - f_{x^1}]$  é  $n(f_{x^k} - f_{x^1})$ , onde  $[g]$  está sendo usado para denotar a classe de um elemento de  $S_0(X)$  em  $H_0(X)$ , assim segue facilmente a sobrejetividade.  $\square$

Conjuntos de particular interesse para as aplicações que vamos desenvolver são esferas. Denotamos por  $S^n$  o subconjunto de  $\mathbb{R}^{n+1}$  dado por  $x \in S^n$  se e só se  $\|x\| = 1$ , esse conjunto é conhecido como a esfera de dimensão  $n$ .

Como mencionamos anteriormente a homologia simplicial pode ser utilizada para o cálculo da homologia singular de certos conjuntos, mais precisamente de conjuntos definíveis fechado e limitados  $X$ , para isso procedemos através de uma triangularização  $(K, \phi)$  de  $X$ , sabemos nesse caso que os grupos de homologia simplicial  $H_n^{simp}(X)$  são isomorfos aos grupos de homologia do complexo  $H_n(K)$ , por outro lado a proposição 3.1 nos garante que a homologia simplicial e singular de  $X$  são a mesma, de onde obtemos  $H_n^{sing}(X) = H_n^{simp}(X) = H_n(K)$ . Uma aplicação simples desse procedimento é:

**Teorema 3.40.** *Seja  $B_r^n(x)$  a bola de centro  $x$  e raio  $r$  em  $\mathbb{R}^n$  temos que  $H_i(B_r^n(x)) = 0$  para todo  $i \in \mathbb{N}$ , além disso*

$$H_i(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } i = n, \\ 0 & \text{se } i \neq n \end{cases}$$

*Demonstração.* Basta notar que  $B_r^n(x)$  pode ser triangularizado por  $(\bar{s}^n, \psi)$  enquanto  $S^n$  pode ser triangularizado por  $(l, \phi)$  onde  $l = \bar{s}^n - \{s^n\}$  de onde segue que  $H_n(B_r^n(x)) = H_n(\bar{s}^n)$  e  $H_n(S^n) = H_n(\bar{s}^n - \{s^n\})$ . É um fato conhecido que a homologia  $H_i(\bar{s}^n - \{s^n\})$  é  $\mathbb{Z}$  quando  $i = n$  e 0 nos outros casos enquanto  $H_i(\bar{s})$  é sempre 0, esses cálculos podem ser realizados diretamente ou até mesmo utilizando resultados clássicos da teoria usual de homologia sobre o  $\mathbb{R}^n$ . □

A demonstração acima é feita utilizando triangularizações convenientes de  $B_r^n(x)$  e  $S^n$ , existem outros métodos de calcular tal homologia, poderíamos por exemplo simplesmente apontar o fato da identidade em  $B_r^n(x)$  ser homotópica à função constante. No caso de  $S^n$  poderíamos repetir a demonstração usual feita sobre  $\mathbb{R}^n$ , a ferramenta fundamental em tal demonstração é um resultado conhecido como teorema de Mayer-Vietoris que nos permite calcular a homologia de um conjunto  $X$  através da homologia de conjuntos formando uma partição finita de  $X$  e da homologia de suas intersecções. Esse teorema também é válido sobre estruturas  $O$ -minimais e, assim como no caso clássico, consiste em um dos principais métodos no cálculo de homologias.

**Teorema 3.41.** *Teorema de Mayer-Vietoris*

*Dado um conjunto definível  $X$  e subconjuntos definíveis  $X_1, X_2$  de  $X$  tais que  $X = \text{int}(X_1) \cup \text{int}(X_2)$ , com  $i_1 : H_n(X_1 \cap X_2) \rightarrow H_n(X_1)$ ,  $i_2 : H_n(X_1 \cap X_2) \rightarrow H_n(X_2)$ ,  $g_1 : H_n(X_1) \rightarrow H_n(X)$  e  $g_2 : H_n(X_2) \rightarrow H_n(X)$  as funções induzidas das respectivas inclusões temos que existe um morfismo  $D$  que torna a seguinte sequência exata.*

$$\dots \longrightarrow H_n(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{(i_1, i_2)} H_n(X_1) \oplus H_n(X_2) \xrightarrow{g_1 - g_2} H_n(X) \xrightarrow{D} H_{n-1}(X_1 \cap X_2) \longrightarrow \dots$$

A demonstração desse teorema consiste em vários passos de caça ao diagrama, uma aplicação da proposição sobre sequência exata longa A.1 e do axioma de excisão, a demonstração encontrada em [Rot88] desse resultado pode ser diretamente adaptada para o nosso caso. Na verdade tal demonstração do teorema pode ser aplicada a qualquer funtor de homologia satisfazendo versões adequadas dos axiomas de Eilenberg-Steenrod.

Precisamos ainda calcular o grupo de homologia de certos subconjuntos de  $S^n$ , esses resultados são essenciais nas aplicações que vamos desenvolver. Em relação ao próximo lema, apesar de existir um resultado análogo na teoria usual sobre  $\mathbb{R}$  a sua demonstração é baseada na compacidade de conjuntos fechados e limitados, como vimos no último capítulo esse não precisa ser o caso em uma estrutura  $O$ -minimal e por isso a demonstração que faremos é totalmente diferente e se apoia de maneira essencial no teorema de trivialização.

**Lema 3.42.** *Dado  $X \subset S^n$  um subconjunto definível e definivelmente homeomorfo a  $[0, 1]^r$  para algum  $r$ , então  $H_i(S^n - X) = 0$  para todo  $i$ .*

*Demonstração.* A demonstração é feita por indução em  $r$ , quando  $r = 0$  temos que  $S^n - r$  é definivelmente homeomorfo ao  $\mathbb{R}^n$  (as projeções estereográficas são definíveis em uma estrutura estendendo um corpo) enquanto o  $\mathbb{R}^n$  é definivelmente homeomorfo a  $B_1^n(0)$  e já vimos que a homologia desse conjunto é trivial. Vamos então assumir  $r > 0$  e o resultado válido para todo  $r_0 < r$ .

Vamos denotar por  $h : [0, 1]^r \rightarrow X$  o homeomorfismo definível do enunciado, além disso dado  $[a, b] \subset [0, 1]$  vamos chamar de  $X_{[a,b]}$  o conjunto  $h([a, b] \times [0, 1]^{r-1}) = h(I_{[a,b]})$ , temos que para todo subintervalo

$[a, b]$  o conjunto  $S^n - X$  esta contido em  $S^n - X_{[a,b]}$ , vamos denotar por  $i_{[a,b]}$  esta inclusão, dado um elemento  $z = \sum t_i \sigma$  de  $S_n(S^n - X)$  podemos tomar  $i_{[a,b]} \# z = \sum t_i (i_{[a,b]} \circ \sigma_i) \in S_n(S^n - X_{[a,b]})$ , vamos chamar esse elemento de  $z_{[a,b]}$ . No caso de  $[a, b]$  ser degenerado, isto é  $a = b$  vamos usar simplesmente  $X_a$ ,  $i_a$  e  $z_a$ . Vamos denotar a classe de homologia de  $z$  por  $|z|$ . Temos que  $X$  e  $X_{[a,b]}$  são conjuntos fechados de  $S^n$ .

Dado um elemento  $z \in S_n(X)$  e  $p[0, 1]$  note que  $z_p = i_p \# z \in S_n(S^n - X_p)$ , mas  $X_p$  é homeomorfo a  $I^{r-1}$  e portanto, pela hipótese de indução, temos  $|z_p| = 0$ . Em particular  $|z_0| = 0$ , a estratégia da demonstração consiste em encontrar  $\epsilon > 0$  de forma que  $|z_{[0,\epsilon]}| = 0$  em seguida vamos aumentando o valor de  $\epsilon$  para obter  $|z_{[0,1]}| = 0$ , e como  $z_{[0,1]} = z$  isso conclui o teorema.

Temos o seguinte conjunto definível:  $A = \{(x, a) \in S^n \times [0, 1] : x \in X_{[0,a]}\}$ , vamos chamar de  $\pi : A \rightarrow R$  a projeção na última coordenada, isto é  $\pi(x, a) = a$ , note que dado  $a_0 \in [0, 1]$  o conjunto  $\pi^{-1}(a_0) \cap A = \{(x, a_0) : x \in X_{[0,a_0]}\} = X_{[0,a_0]} \times \{a_0\}$ .

Vamos fixar  $z = \sum t_i \sigma_i \in S_n(S^n - X)$ , definimos a imagem de  $z$  como a união da imagem das funções envolvidas em  $z$ , isto é  $img(z) = \cup \sigma_i$ , a imagem de  $\sigma_i$  é um conjunto fechado e portanto a  $img(z)$  também é. Usaremos que existe uma partição do intervalo  $[0, 1]$  em conjuntos  $\{a_0\}, (a_0, a_1), \dots, (a_{l-1}, a_l), \{a_l\}$  com as duas propriedades abaixo.

- Propriedade 1: Existe  $0 < \epsilon < a_{i+1} - a_i \in R$  tal que  $|z_{[0,\epsilon]}| = |z_{[a_i-\epsilon, a_i+\epsilon]}| = |z_{[1-\epsilon, 1]}| = 0$ .
- Propriedade 2: Dados  $b, c \in (a_i, a_{i+1})$  com  $b < c$  se  $z_{[0,b]} = 0$  então  $|z_{[0,c]}| = 0$ .

Vamos primeiro concluir a demonstração do lema e em seguida provar esses resultados.

Seja  $b_i = a_i - \epsilon$  e  $c_i = a_i + \epsilon$ , temos que  $S^n - X_{[0,b_i]}$  e  $S^n - X_{[b_i, c_i]}$  são subconjunto abertos de  $S^n - X_{b_i}$ , para ver isso basta notar que  $X_{[b_i, c_i]}$  é a imagem de um fechado por um homeomorfismo e o mesmo para  $X_{[0, b_i]}$ , podemos com isso aplicar Mayer Vietoris, mas antes disso note que  $S^n - X_{b_i} = (S^n - X_{[0, b_i]}) \cup (S^n - X_{[b_i, c_i]})$  e  $S^n - X_{[0, c_i]} = (S^n - X_{[0, b_i]}) \cap (S^n - X_{[b_i, c_i]})$ . De onde temos a seguinte sequência exata longa:

$$\dots H_{q+1}(S^n - X_{b_i}) \xrightarrow{d} H_q(S^n - X_{[0, c_i]}) \xrightarrow{(i_1, i_2)} H_q(S^n - X_{[0, b_i]}) \oplus H_q(S^n - X_{[b_i, c_i]}) \longrightarrow H_q(S^n - X_{b_i}) \dots$$

Mas como já mencionamos  $H_q(S^n - S_{b_i}) = 0$  sempre de onde segue que  $(i_1, i_2)$  é um isomorfismo, e  $(i_1, i_2)(|z_{[0, c_i]}|) = (|z_{[0, b_i]}|, |z_{[b_i, c_i]}|)$ .

Agora pela propriedade 1 existe  $\epsilon_0$  tão pequeno quanto se queira com  $|z_{[0, \epsilon_0]}| = 0$ , juntamente da propriedade 2 temos  $|z_{[0, b_1]}| = 0$ , além disso pela propriedade 1  $|z_{[b_1, c_1]}|$  é sempre zero, e desse modo  $(|z_{[0, b_1]}|, |z_{[b_1, c_1]}|) = 0$  de onde  $|z_{[0, c_1]}| = 0$ . Como  $|z_{[0, c_1]}| = 0$  a propriedade 2 nos dá  $|z_{[0, b_2]}| = 0$  e assim temos novamente  $(|z_{[0, b_2]}|, |z_{[b_2, c_2]}|) = 0$  de onde  $|z_{[0, c_2]}| = 0$ . Se prosseguirmos com esse procedimento chegamos a  $|z_{[0, a_{l-1}]}| = 0$ , nesse caso tomamos  $c_i$  como 1 e usamos o mesmo procedimento acima para obter  $|z_{[0, 1]}| = 0$ .

Tudo que falta fazermos é provar a existência de uma partição com as propriedades 1 e 2.

- Demonstração da Propriedade 1: Vamos fazer essa demonstração para uma partição qualquer. Nós sabemos que  $|z_{a_i}| = 0$  em  $H_q(S^n - X_{a_i})$ , o que significa que existe  $w \in S_{q+1}(S^n - X_{a_i})$  tal que  $z = \delta w$ , agora se existe  $\epsilon_i$  tal que  $img(w) \cap X_{[a_i-\epsilon_i, a_i+\epsilon_i]} = \emptyset$  então  $w \in S_{q+1}(S^n - X_{[a_i-\epsilon_i, a_i+\epsilon_i]})$  e portanto  $|z_{[a_i-\epsilon_i, a_i+\epsilon_i]}| = 0$  (estamos supondo aqui  $i \neq 0$  e  $i \neq 1$ , nesses casos tomamos respectivamente os intervalos  $[0, \epsilon]$  e  $[1 - \epsilon, 1]$ ).

Suponha que  $img(w) \cap X_{[a_i-\epsilon, a_i+\epsilon]} \neq \emptyset$  para todo  $\epsilon > 0$ . Por escolha definível podemos encontrar um  $0 < \lambda$  e uma função contínua definível  $\gamma : [0, \lambda] \rightarrow S^n$  tal que  $\gamma(t) \in img(w) \cap X_{[a_i-\epsilon_i, a_i+\epsilon_i]}$  para todo  $t$ . Sabemos que  $img(w)$  e  $X_{[a_i-\epsilon, a_i+\epsilon]}$  são fechados e portanto  $\lim_{t \rightarrow 0} \gamma(t) \in (img(w) \cap X_{a_i})$ , mas como  $img(w) \subset (S^n - X_{a_i})$  essa intersecção é vazia, o que gera uma contradição.

Isso nos dá um  $\epsilon_i$  tal que  $|z_{[a_i-\epsilon_i, a_i+\epsilon_i]}| = 0$ , e assim basta tomarmos  $\epsilon = \min_i(\epsilon_i)$

- Demonstração da Propriedade 2: É nessa parte da demonstração que usaremos o teorema de trivialização.

Vamos tomar  $(K, \phi)$  uma triangularização de  $S^n$  compatível com  $X$  e com  $img(z)$ . Sabemos então pelo teorema de trivialização 2.53 que existe uma partição do intervalo  $[0, 1]$  em pontos e intervalos da forma  $\{\{a_0\}, (a_0, a_1), \{a_1\}, \dots, (a_{l-1}, a_l), \{a_l\}\}$ , com  $a_i < a_{i+1}$ ,  $a_0 = 0$  e  $a_l = 1$ , tal que  $\pi|_{\pi^{-1}(a_i, a_{i+1})}$  é definivelmente trivial com relação a  $A \cap \pi^{-1}(a_i, a_{i+1})$  e  $(\phi^{-1}(s) \times [0, 1]) \cap \pi^{-1}(a_i, a_{i+1})$  para todo  $s \in K$ .

Nesse caso sabemos que dado um intervalo  $(a_i, a_{i+1})$  existe um homeomorfismo

$$h_i : \pi^{-1}(a_i, a_{i+1}) \rightarrow (a_i, a_{i+1}) \times C_i$$

tal que sua restrição a  $A \cap \pi^{-1}(a_i, a_{i+1})$  satisfaz  $\pi' h_i(x) = \pi(x)$  para todo  $s \in K$ , onde  $\pi'$  é a projeção na primeira coordenada.

$$\begin{array}{ccc} A \cap \pi^{-1}(a_i, a_{i+1}) & \xrightarrow{h_i|} & (a_i, a_{i+1}) \times C_i \\ & \searrow \pi| & \downarrow \pi' \\ & & (a_i, a_{i+1}) \end{array}$$

Em particular dados pontos  $x_1, x_2 \in (a_i, a_{i+1})$  temos  $h_i|(\pi^{-1}(x_1) \cap A) \simeq C_i \simeq h_i|(\pi^{-1}(x_2) \cap A)$  ou seja  $f_i(\pi^{-1}(x_1) \cap A) = \pi^{-1}(x_2) \cap A$  para algum homeomorfismo  $f_i$ . Como pedimos a compatibilidade da triangularização com  $\phi^{-1}(s) \times [0, 1]$  podemos trocar  $A$  por  $(\phi^{-1}(s) \times [0, 1])$  em todo o raciocínio acima, além disso temos  $\pi^{-1}(x_j) \cap ((\phi^{-1}(s) \times [0, 1])) = \phi^{-1}(s) \times \{x_j\}$ , de onde segue que

$$f_i(\phi^{-1}(s) \times \{x_1\}) = \phi^{-1}(s) \times \{x_2\}$$

Vamos então tomar  $x_2 = b_i < x_1 = c_i$ , temos  $\pi^{-1}(b_i) \cap A = X_{0, b_i} \times \{b_i\}$  e  $\pi^{-1}(c_i) \cap A = X_{0, c_i} \times \{c_i\}$ . Compondo a função  $f_i$  acima com uma projeção podemos encontrar um homeomorfismo  $g : \pi^{-1}(b_i) \rightarrow \pi^{-1}(c_i)$  tal que  $g(X_{[0, c_i]}) = X_{[0, b_i]}$  e  $g(\phi^{-1}(s)) = \phi^{-1}(s)$  para todo  $s \in K$ , agora como  $\{\phi^{-1}(s) : s \in K\}$  é uma cobertura da esfera temos que  $g(S^n) = S^n$ , e portanto  $f = g|_{S^n}$  é um homeomorfismo da esfera nela mesmo. Como  $(K, \phi)$  é compatível com  $X$  vale que  $S^n - X = \phi^{-1}|K - K_0|$  para algum subcomplexo  $K_0$  e assim  $f(S^n - X) = f(\phi^{-1}|K - K_0|) = \phi^{-1}|K - K_0| = S^n - X$ , vamos mostrar que nessas condições  $f|_{S^n - X}$  é definivelmente homotópica à identidade de  $S^n - X$ . De onde segue que  $|f\#\alpha| = |\alpha|$

O que nós temos é uma função  $f : (S^n - X) \rightarrow (S^n - X)$  e uma triangularização  $(K - K_0, \phi)$  desse conjunto tal que  $f(\phi^{-1}(s)) = \phi^{-1}(s)$  para todo  $s \in K - K_0$ , nessas condições  $\phi(x)$  e  $\phi(f(x))$  estão sempre no mesmo simplexo, e assim a função:

$$F(x, t) = \phi^{-1}(t)(t\phi(x) + (1 - t)\phi \circ f(x))$$

está bem definida, pois simplexos são convexos. Mas essa é claramente uma homotopia entre  $f$  e a identidade.

Vamos chamar de  $f'$  a restrição de  $f$  a  $S^n - X_{[0, c_i]}$ , lembramos que esse é um homeomorfismo definível cuja imagem é  $S^n - X_{[0, b_i]}$  e que  $f'_\#$  leva  $z_{[0, c_i]}$  em  $f(z_{[0, b_i]})$ , já que  $f' \circ \sigma$  é  $f \circ \sigma$  com o contradomínio restrito a  $S^n - X_{[0, b_i]}$ . Temos assim

$$|z_{[0,c_i]}| = H_n(f')(|z_{[0,c_i]}|) = |f' \# z_{[0,b_i]}| = |f \# z_{[0,b_i]}| = |z_{[0,b_i]}|$$

□

Antes de calcularmos a homologia de novos conjuntos vamos apresentar uma definição que nos permite comparar a homologia de certos conjuntos.

**Definição 3.43.** Dado conjuntos definíveis  $A \subset X$  dizemos que  $A$  é um retrato definível de  $X$  se existe um mapa contínuo definível  $\tau$  de  $X$  em  $A$  cuja restrição  $\tau|_A$  é a identidade, ou equivalentemente se  $\tau \circ i_A = id_A$  onde  $i_A$  é a inclusão de  $A$  em  $X$ , chamamos  $\tau$  de um retrato definível. Dizemos que um  $A$  é um retrato de deformação definível de  $X$  se  $i_A \circ \tau : X \rightarrow X$  é definivelmente homotópica a identidade.

Note que se  $\tau$  é um retrato de deformação então  $H_n(i_A \circ \tau) : H_n(X) \rightarrow H_n(X)$  e  $H_n(\tau \circ i_A) : H_n(A) \rightarrow H_n(A)$  são isomorfismos, mas  $H_n(\tau \circ i_A) = H_n(\tau) \circ H_n(i_A)$  e  $H_n(i_A \circ \tau) = H_n(i_A) \circ H_n(\tau)$  de onde segue que  $H_n(\tau)$  é um isomorfismo de  $H_n(X)$  em  $H_n(A)$  com inversa  $H_n(i_A)$ .

Os últimos grupos de homologia que precisamos calcular são dados por:

**Lema 3.44.** Dado  $X$  um subconjunto de  $S^n$  definivelmente homeomorfo a  $S^m$  com  $m < n$  temos que

$$H_i(S^n - X) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } i = n - m - 1, \\ 0 & \text{se } i \neq n - m - 1 \end{cases}$$

*Demonstração.* A demonstração é feita por indução em  $m$ . Quando  $m = 0$  temos que  $X$  é um conjunto formado por dois pontos e portanto  $S^n - X$  é definivelmente homeomorfo a  $R^n - \{0\}$  (usando a projeção estereográfica composta com uma triangularização), tome a seguinte função definível de  $(R^n - 0) \times [0, 1] \rightarrow R^n$

$$F(x, t) = (1 - t)x + t \frac{x}{\|x\|}$$

$F(x, t)$  é uma homotopia definível entre a identidade em  $R^n - \{0\}$  e a função  $\tau : R^n - \{0\} \rightarrow S^{n-1}$  que leva  $x$  em  $x/\|x\|$ , ou seja  $\tau$  é um retrato de deformação definível entre  $S^{n-1}$  e  $R^n - \{0\}$ , de onde segue que  $H_i(S^n - X) = H_i(R^n - \{0\}) = H_i(S_{n-1})$  é  $\mathbb{Z}$  quando  $i = n - 1$  e 0 nos outros casos.

Vamos então supor que  $m \geq 1$ , tome  $h : S^m \rightarrow X$  o homeomorfismo do enunciado, chamaremos de  $E^+$  o hemisfério superior fechado de  $S^m$ , isto é o conjunto de pontos de  $S^m$  cuja última coordenada é maior ou igual a zero, chamaremos de  $E^-$  o hemisfério inferior fechado. A intersecção  $E^+ \cap E^-$  é o subconjunto de  $S^m$  com a última coordenada igual a 0, ou seja um conjunto homeomorfo a  $S^{m-1}$ , vamos usar a seguinte notação  $X^+ = h(E^+)$  e  $X^- = h(E^-)$ , temos  $X^+ \cap X^- = h(E^+ \cap E^-)$  é homeomorfo a  $S^{m-1}$  e fechado em  $S_n - (X^+ \cap X^-)$ . Temos assim que  $S_n - (X^+ \cap X^-) = (S_n - X^+) \cup (S_n - X^-)$  nos dá uma cobertura por abertos e com isso podemos usar Mayer-Vietoris para obter a seguinte sequência exata longa:

$$\begin{array}{ccc} \dots H_{i+1}(S^n - X^+) \oplus H_{i+1}(S^n - X^-) & \longrightarrow & H_{i+1}(S^n - (X^+ \cap X^-)) \\ & & \downarrow \\ & & H_i((S^n - X^+) \cap (S^n - X^-)) \longrightarrow H_i(S^n - X^+) \oplus H_i(S^n - X^-) \dots \end{array}$$

Agora  $X^+$  é definivelmente homeomorfo ao hemisfério superior de  $S^m$ , esse por sua vez é definivelmente homeomorfo a  $[0, 1]^m$  de onde segue pelo lema 3.42 que a homologia de  $S^n - X^+$  é trivial, o mesmo argumento se aplica  $S^n - X^-$  o que nos diz que os dois termos nas pontas da sequência acima são 0, e portanto  $H_{i+1}(S^n - (X^+ \cap X^-))$  é isomorfo a  $H_i((S^n - X^+) \cap (S^n - X^-))$ , mas  $(S^n - X^+) \cap (S^n - X^-) = S^n - X$ ,

de onde  $H_{i+1}(S^n - (X^+ \cap X^-))$  é isomorfo a  $H_i(S^n - X)$ , podemos assim aplicar a hipótese de indução, lembrando que  $X^+ \cap X^-$  é homeomorfo a  $S^{m-1}$ , temos portanto:

$$H_i(S^n - X) = H_{i+1}(S^n - (X^+ \cap X^-)) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } i = n - m - 1, \\ 0 & \text{se } i \neq n - m - 1 \end{cases}$$

□

### 3.3.2 Três Teoremas Clássicos

O nosso objetivo agora é obter resultados análogos a três teoremas clássicos de topologia algébrica, o teorema de separação de Jordan, o teorema da invariância de domínio e o teorema do ponto fixo de Brouwer. No caso clássico em  $\mathbb{R}$  existem diferentes demonstrações desses resultados, em particular as demonstrações que vamos apresentar são adaptações de algumas dessas.

Começamos pelo teorema de separação de Jordan, uma curiosidade sobre tal teorema é que no caso clássico ele depende fortemente da completude do espaço ambiente, porém no caso de uma estrutura  $O$ -minimal vemos que, adicionando as restrições de definibilidade, não precisamos de completude.

**Teorema 3.45.** *Separação de Jordan.*

*Dado um conjunto definível  $X \subset S^n$  definivelmente homeomorfo a  $S^{n-1}$  então  $S^n - X$  possui duas componentes definivelmente conexas, além disso se  $X_1$  e  $X_2$  são essas componentes então  $\delta(X_1) = \delta(X_2) = X$ , onde  $\delta$  é a fronteira topológica.*

*Demonstração.* O lema 3.44 nos garante que  $H_i(S^n - X) = \mathbb{Z}$  quando  $i = 0$  e  $0$  nos outros casos, pelo teorema 3.39 segue que  $S^n - X$  possui duas componentes definivelmente conexas  $X_1$  e  $X_2$ .

Como  $X$  é a imagem de um fechado e limitado temos que  $X$  é fechado e limitado e portanto  $S^n - X$  é aberto em  $S^n$ . Como todo ponto  $x$  de  $S^n$  possui uma vizinhança tão pequena como se queira definivelmente homeomorfa a um aberto de  $R^n$  (podemos usar a projeção estereográfica quando  $x$  não é  $(1, 0, \dots, 0)$  como tal homeomorfismo, quando  $x = (1, 0, \dots, 0)$  podemos tomar a projeção de uma vizinhança suficientemente pequena) todo ponto de  $S^n - X$  possui uma vizinhança definivelmente homeomorfa a um aberto de  $R^n$ , e portanto possui uma vizinhança definivelmente conexa em  $S^n - X$ , isso significa que tal vizinhança está contida em  $X_1$  ou  $X_2$  de onde segue que esses conjuntos são abertos. De modo que  $cl(X_1) \subset S^n - X_2$  e portanto  $\delta(X_1) \subset (S^n - (X_1)) - X_2 = X$ , e o mesmo para  $\delta(X_2)$ , basta então mostrarmos que dado  $x \in X$  vale que toda vizinhança definível de  $x$  intersecta  $X_i$ .

Seja  $U$  uma vizinhança definível qualquer de  $x \in X$  e  $h : S^{n-1} \rightarrow X$  o homeomorfismo definível do enunciado. Temos que  $h^{-1}(U)$  é aberto e portanto existe um  $\epsilon$  tal que  $B = B_\epsilon(h^{-1}) \cap S^{n-1}$  está contido em  $U$ . Como  $S^{n-1} - B$  é definivelmente homeomorfo a  $[0, 1]^{n-1}$  e  $h$  leva  $S^{n-1} - B$  em  $X - h(B)$  temos que esse conjunto é definivelmente homeomorfo a  $[0, 1]^{n-1}$ , o lema 3.42 nos garante que  $S^n - (X - h(B))$  possui homologia trivial, em particular  $H_0(S^n - (X - h(B))) = 0$  e esse conjunto é definivelmente conexo por caminhos. Além disso tanto  $X_1$  como  $X_2$  estão contidos em  $S^n - (X - h(B))$ , e portanto dados pontos  $x_1 \in X_1$  e  $x_2 \in X_2$  existe um caminho definível  $\gamma : [0, 1] \rightarrow S^n - (X - h(B))$  ligando esses pontos, como não pode existir uma função contínua ligando  $x_1$  a  $x_2$  em  $S^n - X$  temos que  $\gamma([0, 1])$  não pode estar contido em  $S^n - X$  de onde  $\gamma([0, 1])$  intersecta  $h(B)$ , seja  $t_0 = \inf\{t \mid \gamma(t) \in h(B)\}$ , como  $B$  é fechado e limitado  $h(B)$  também é, e portanto  $\gamma(t_0) \in B$ . Agora  $B$  está contido em  $U$  e esse é aberto em  $S^n$  de forma que existe um  $0 < \delta$  tal que  $\gamma(t_0 - \delta, t_0 + \delta) \subset U$  e em particular  $\gamma(t_0 - \delta, t_0)$  está contido em  $U$ , além disso para todo  $t < t_0$  temos que  $\gamma|_{[0, t]}$  é um caminho definível em  $S^n - X$  ligando  $x_1$  a  $\gamma(t)$ , como  $X_1$  é definivelmente conexo por caminhos  $\gamma(t) \in X_1$  de onde  $\gamma(t_0 - \delta, t_0)$  também está contido em  $X_1$  e portanto  $U \cap X_1$  é não vazio, um argumento semelhante mostra que  $U \cap X_2$  também é não vazio, de onde segue o teorema.

□

Prosseguimos com o teorema de invariância de domínio, considerado uma das principais consequências da teoria de homologia.

**Teorema 3.46.** *Invariância de Domínio.*

Dados um conjunto  $X \subset S^n$  definível aberto e um homeomorfismo definível  $h : X \rightarrow Y$  com  $Y \subset S^n$  temos que  $Y$  é aberto. Além disso dado um conjunto definível e aberto  $Z \subset R^n$  e  $g : Z \rightarrow R^n$  definível contínua e injetora então  $g(Z)$  é aberto.

*Demonstração.* Vamos provar a primeira parte do teorema, dado  $y \in Y$  tome  $x = h^{-1}(y) \in X$ , como  $X$  é um aberto de  $S^n$  podemos novamente tomar uma vizinhança definível  $U$  de  $x$  aberta em  $S^n$  com  $cl(U) \subset X$  definivelmente homeomorfa a  $(0, 1)^n$ , seja  $l$  tal homeomorfismo, vamos mostrar que  $h(U)$  é uma vizinhança aberta de  $y$  em  $S^n$  e como  $h(U) \subset Y$  segue que  $Y$  é aberto.

Temos que  $h(cl(U)) = h(l^{-1}[0, 1]^n)$  é definivelmente homeomorfo a  $[0, 1]^n$  e  $h(\delta(U)) = h(l^{-1}(\delta((0, 1)^n)))$  é definivelmente homeomorfo a  $S^{n-1}$ . Por 3.42 temos que a homologia de  $S^n - h(cl(U))$  é trivial e portanto esse conjunto é definivelmente conexo, além disso pelo teorema de separação de Jordan 3.45  $S^n - h(\delta(U))$  possui duas componentes conexas. Mas  $S^n - h(\delta(U)) = (S^n - h(cl(U))) \cup h(U)$  uma união disjunta de dois conjuntos conexos, de onde segue que essas são as componentes conexas de  $S^n - h(\delta(U))$  e portanto abertas em tal conjunto, mas  $S^n - h(\delta(U))$  é aberto em  $S^n$  e portanto são abertas em  $S^n$ , em particular  $h(U)$  é aberto em  $S^n$  como queríamos.

Vamos provar agora a segunda afirmação do teorema, seja  $p : S^n - \{p_n\} \rightarrow R^n$  a projeção estereográfica, onde  $p_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$ , tome  $X = p^{-1}(Z)$  e  $h = p^{-1} \circ f \circ p : X \rightarrow S^n - \{p_n\}$ , se  $f(X)$  for um aberto então  $h(Z) = p(f(X))$  também será aberto, de modo que isso é tudo que precisamos mostrar.

Tome  $y \in f(X)$  e  $x \in X$  tal que  $f(x) = y$ , tome também uma vizinhança  $U$  aberta em  $S^n$  de  $x$  definivelmente homeomorfa a  $(0, 1)^n$  com fecho contido em  $X$ , pela proposição 2.27  $f|_{cl(U)}$  é um homeomorfismo definível sobre a sua imagem. Dada então uma segunda vizinhança de  $x$   $U'$  aberta em  $S^n$  tal que  $U' \subset cl(U)$  temos que  $f|_{U'}$  também é um homeomorfismo sobre a sua imagem, mas pelo que acabamos de provar  $f(U')$  é uma vizinhança aberta de  $y$  contida em  $f(X)$ , de onde segue que esse conjunto é aberto.  $\square$

Provamos por fim um análogo do ponto fixo de Brouwer, esse resultado embora possua uma demonstração completamente análoga à clássica não aparece em [Woe96], além disso em [Won03] o autor prova tal resultado sem utilizar homologia, uma demonstração parecida com a apresentada aqui pode ser encontrada em [Edm05].

**Teorema 3.47.** *Ponto Fixo de Brouwer.*

Toda função definível contínua  $f : \bar{B}_1(0)^n \rightarrow \bar{B}_1(0)^n$  possui um ponto fixo. Onde  $\bar{B}_1(0)^n$  é o subconjunto de  $R^n$  dos pontos com norma menor ou igual a 1.

*Demonstração.* Note que não existe um retrato de deformação  $\tau : \bar{B}_1(0)^n \rightarrow S^{n-1}$  pois isso implicaria que  $H_i(\bar{B}_1(0)^n) = H_i(S^{n-1})$  o que sabemos ser falso.

Suponha então que  $f : \bar{B}_1(0)^n \rightarrow \bar{B}_1(0)^n$  não possui um ponto fixo, vamos definir  $h : \bar{B}_1(0)^n \times [0, \infty) \rightarrow R^n$  que leva  $(x, t)$  em  $(1-t)f(x) + tx$ . Fixando um pontos  $x$  temos que  $h_x(t) = h(x, t)$  é não constante (pela hipótese de  $f$  não possuir pontos fixos), contínua, definível e injetora, além disso  $\|h(x, 0)\| \leq 1$  e  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|h(x, t)\| = \infty$ , de onde segue pela continuidade de  $h$  que existe  $t_x$  tal que  $h(x, t_x) \in S^{n-1}$ , não é difícil de ver que tal  $t_x$  está unicamente determinado. Em particular quando  $x \in S^n$  temos que  $t_x = 1$  e  $h(x, t_x) = x$ .

Tome a seguinte função definível  $F(x, t) : \bar{B}_1(0)^n \times [0, 1] \rightarrow \bar{B}_1(0)^n$  dada por:

$$F(x, t) = (1-t)x + th(x, t_x).$$

Caso essa função seja contínua temos que a função que leva  $x$  em  $h(t_x)$  é um retrato de deformação de  $B^n$  em  $S^{n-1}$ , o que nos dá uma contradição e termina a demonstração. Basta então mostrarmos que  $F(x, t)$  é contínua, e para isso basta que a função  $l : \bar{B}_1(0)^n \rightarrow [0, \infty)$  tal que  $l(x) = t_x$  seja contínua. Vamos tomar

um ponto  $x \in \bar{B}_1(0)^n$  e  $\gamma : (0, b) \rightarrow \bar{B}_1(0)^n$  uma curva contínua definível qualquer tal que  $\lim_{i \rightarrow 0} \gamma(i) = x$ , tudo que precisamos é que  $\lim_{i \rightarrow 0} l(\gamma(i)) = l(x) = t_x$ .

Podemos definir uma curva  $\gamma'$  de  $(0, b)$  em  $\bar{B}_1(0)^n \times [0, \infty)$  tal que  $\gamma'(t) = (\gamma(t), l(\gamma(t)))$ , podemos também supor tal curva contínua (possivelmente diminuindo o valor de  $b$ ). Pela definição de  $l$  temos que  $\|h(\gamma'(i))\| = 1$ , ou seja a imagem de  $\gamma'$  esta contida em  $\|h\|^{-1}(1)$  que é um conjunto fechado, de onde segue que  $\lim_{i \rightarrow 0} \gamma'(i) \in \|h\|^{-1}(1)$ , por outro lado

$$\lim_{i \rightarrow 0} \gamma'(i) = (\lim_{i \rightarrow 0} \gamma(i), \lim_{i \rightarrow 0} l(\gamma(i))) = (x, \lim_{i \rightarrow 0} l(\gamma(i)))$$

ou seja  $h(x, \lim_{i \rightarrow 0} l(\gamma(i))) \in S^{n-1}$  e por definição  $l(x) = \lim_{i \rightarrow 0} l(\gamma(i))$  como precisávamos. □

Muitas outras aplicações da teoria de homologia sobre estruturas  $O$ -minimais podem ser encontradas na literatura. Em [Edm07] os autores utilizam a teoria que apresentamos aqui para provar uma versão do teorema do ponto fixo de Lefschetz-Hopf, que pode ser visto como uma generalização do ponto fixo de Brouwer. Em [Edm05] podemos encontrar diversas aplicações como uma versão do teorema geral de separação (que pode ser visto como uma generalização do teorema de separação de Jordan) além de uma teoria de graus de funções (semelhante à teoria usual sobre  $\mathbb{R}$ ). Nesses trabalhos também é apresentada uma teoria de cohomologia para estruturas  $O$ -minimais.

Em [M. 08] os autores apresentam uma teoria de homotopia para estruturas  $O$ -minimais estendendo corpos, um resultado curioso encontrado em tal trabalho é que se existe uma homotopia definível entre dois conjuntos semialgêbricos em uma extensão  $O$ -minimal de um corpo real fechado  $\mathcal{L}$  então existe uma homotopia definível em  $\mathcal{L}$ , ou seja não podemos acrescentar homotopias definíveis entre conjuntos semialgêbricos simplesmente acrescentando estrutura a um corpo real fechado a menos que essa extensão deixe de ser  $O$ -minimal. Outro resultado central encontrado em tal trabalho é um teorema análogo ao teorema de Hurewicz, que estabelece uma ligação entre grupos de homologia e grupos de homotopia.

## Apêndice A

### Apêndice

Nesse apêndice apresentaremos algumas definições e resultados gerais sobre homologia, complexos de cadeia categorias e modelos acíclicos. As demonstrações serão omitidas já que elas estão fora do interesse desse texto.

Um complexo de cadeia é um par  $(E_*, \delta_*)$  tal que  $E_* = (E_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma sequência de grupos abelianos e  $\delta_* = (\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência de homomorfismos  $\delta_n : E_n \rightarrow E_{n-1}$  tal que  $\delta_{n-1} \circ \delta_n = 0$ , por brevidade iremos nos referir a tal simplexo simplesmente por  $E_*$  omitindo os homomorfismos  $\delta_n$ . Chamamos  $\delta$  de operador de bordo.

Como de costume queremos descrever uma categoria baseado em complexos de cadeia, e para isso precisamos dizer quem são os morfismos de tal categoria. Se  $(E_*, \delta_*)$  e  $(F_*, \gamma_*)$  são complexos de cadeia definimos um mapa de cadeia  $f_* : E_* \rightarrow F_*$  como uma sequência de homomorfismos  $f_n : E_n \rightarrow F_n$  tal que o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{array}{ccc} E_n & \xrightarrow{\delta_n} & E_{n-1} \\ \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} \\ F_n & \xrightarrow{\gamma_n} & F_{n-1} \end{array}$$

É rotineiro checar que complexos de cadeia juntamente com mapas de cadeias formam uma categoria, conhecida por **Comp**. O comportamento dessa categoria é em vários aspectos similar ao da categoria de grupos abelianos, em particular temos que a versão análoga dos teoremas de isomorfismo são verdadeiras para complexos de cadeia.

Um tipo específico de complexos de cadeia são de particular interesse, aqueles em que  $E_i = 0$  para  $i < -1$  e  $E_{-1} = \mathbb{Z}$ , tais complexos de cadeia são chamados complexos de cadeia aumentados, a subcategoria de **Comp** que tem tais complexos como objetos e morfismos os mapas de cadeia  $f_*$  satisfazendo  $f_{-1} = id_{\mathbb{Z}}$  será denotado por **Comp<sub>aug</sub>**. Dizemos ainda que  $\tilde{E}_*$  é um "aumento" de  $E_*$  se  $\tilde{E}_*$  é um complexo de cadeia aumentado com  $E_n = \tilde{E}_n$  para  $n > 0$ .

Dado um complexo de cadeia  $E_*$  associamos a ele algumas sequências de grupos abelianos.  $Z_n(E_*) = \ker(\delta_n)$  e  $B_n(E_*) = \text{im}(\delta_{n+1})$ , usualmente abreviaremos por  $Z_n$  e  $B_n$ , note que ambos são subgrupos de  $E_n$  e que  $B_n \subset Z_n$  pois  $\delta_n \circ \delta_{n+1} = 0$ , podemos com isso definir o quociente  $H_n = Z_n / B_n$ , tal grupo é conhecido como o  $n$ -ésimo grupo de homologia de  $E_*$ . Dado  $z \in Z_n$  denotaremos  $[z]$ , ou  $[z]_{E_*}$ , caso o contexto não seja claro, a classe de equivalência de  $z$  em  $H_n$ .

Note que a condição do diagrama acima ser comutativo faz com que, dada um mapa de cadeia  $f : E_* \rightarrow F_*$ , a função  $H_n(f) : H_n(E) \rightarrow H_n(F)$  que leva  $[z]_{E_*}$  em  $[f_n(z)]_{F_*}$  não só esteja bem definida como seja um homomorfismo, tais funções serão denotados por  $f_n^H$ .

Dizemos que uma sequência de funções  $f_n : E_n \rightarrow E_{n-1}$  é exata se para qualquer  $n$  temos  $\text{img}(f_{n+1}) =$

$\ker(f_n)$ . Chamamos de seqüência exata curta uma seqüência exata da forma

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{i} F \xrightarrow{p} G \longrightarrow 0 .$$

Essas definições se aplicam tanto quando estamos falando de grupos como de complexos de cadeia, no caso de complexos de cadeia vemos a imagem de um mapa de cadeia  $i$  como a seqüência das imagens de  $i_n$ , i.e.  $\text{img}(i) = (\text{img}(i_n))_{n \in \mathbb{Z}}$ , vemos o kernel de um mapa de cadeia de maneira análoga.

Note que no caso de uma seqüência exata curta temos em grupos abelianos que a função  $i$  é injetora e  $p$  sobrejetora, no caso de complexos de cadeia mais é facil verificar que cada  $i_n$  é injetora e cada  $p_n$  sobrejetora.

O seguinte resultado, embora simples, é de importância central na teoria de complexos de cadeia.

**Proposição A.1.** *Dado uma seqüência exata curta de complexos de cadeia:*

$$0 \longrightarrow E_\star \xrightarrow{i} F_\star \xrightarrow{p} G_\star \longrightarrow 0$$

existe uma seqüência de homomorfismos  $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , chamados homomorfismos de conexão, tal que a seqüência abaixo é exata:

$$\dots \longrightarrow H_n(E) \xrightarrow{H_n(i)} H_n(F) \xrightarrow{H_n(p)} H_n(G) \xrightarrow{d_n} H_{n-1}(E) \xrightarrow{H_{n-1}(p)} H_{n-1}(F) \longrightarrow \dots$$

Além disso se o diagrama abaixo é comutativo com as colunas exatas

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & E_\star & \xrightarrow{i} & F_\star & \xrightarrow{p} & G_\star & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f_E & & \downarrow f_F & & \downarrow f_G & & \\ 0 & \longrightarrow & E'_\star & \xrightarrow{i'} & F'_\star & \xrightarrow{p'} & G'_\star & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

então o diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots & \longrightarrow & H_n(E) & \xrightarrow{H_n(i)} & H_n(F) & \xrightarrow{H_n(p)} & H_n(G) & \xrightarrow{d_n} & H_{n-1}(E) & \xrightarrow{H_{n-1}(p)} & H_{n-1}(F) & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow H_n(f_E) & & \downarrow H_n(f_F) & & \downarrow H_n(f_G) & & \downarrow H_{n-1}(f_E) & & \downarrow H_{n-1}(f_F) & & \\ \dots & \longrightarrow & H_n(E') & \xrightarrow{H_n(i')} & H_n(F') & \xrightarrow{H_n(p')} & H_n(G') & \xrightarrow{d'_n} & H_{n-1}(E') & \xrightarrow{H_{n-1}(p')} & H_{n-1}(F') & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

também é comutativo.

Tratamos no texto de casos particulares de complexos de cadeia  $E_\star$ , em particular estamos interessados em casos em que todos os grupos  $E_n$  são abelianos livres. Dizemos nesse caso que o complexo de cadeia  $E_\star$  é livre, lembramos que um conjunto  $U_n$  é dito uma base para um grupo livre  $E_n$  se todo elemento de  $E_n$  é da forma  $\sum_{u \in U_{n,0}} t_n \cdot u$  de maneira única, onde  $U_{n,0}$  é um subconjunto finito de  $U_n$  e  $t_n \in \mathbb{Z}$ ; no caso em que  $U_\star$  é uma seqüência de conjuntos  $U_n$  tal que cada  $U_n$  é uma base de  $E_n$  dizemos que  $U_\star$  é uma base de  $E_\star$ . Nesse caso chamamos os elementos de  $U_n$  de  $n$ -células. Dado uma base  $U_\star$  de um complexo de cadeia  $E_\star$  e um elemento  $t$  de  $E_n$  dizemos que um elemento  $u \in U_n$  está envolvido em  $t$  se ao escrevermos  $t$  como uma combinação linear de elementos de  $U_n$  com coeficientes inteiros tivermos que  $u$  aparece com coeficiente não nulo.

Tal nomenclatura coincide com a usada durante boa parte do texto para certos conjuntos definíveis de uma estrutura  $O$ -minimal, esse tipo de problema costuma surgir quando tratamos ao mesmo tempo assuntos distintos como no nosso caso, o contexto porém sempre deve deixar claro a que estamos nos referindo.

**Definição A.2.** Dados complexos de cadeia  $E_\star$  e  $E'_\star$  tal que  $E'_\star$  é um subcomplexo de  $E_\star$  (isto é cada  $E'_n$  é um subgrupo de  $E_n$  e  $\delta'_n$  é uma restrição de  $\delta_n$ ) dizemos que  $E'_\star$  é adequado se:

- Dado um elemento  $z \in Z(E_*) = Z$  existe  $z' \in Z(E'_*) = Z'$  com  $z - z' \in B(E_*) = B$ .
- Se  $z' \in E'_n$  é tal que  $z' = \delta c$  com  $c \in E_{n+1}$  então existe  $c' \in E'_{n+1}$  tal que  $z' = \delta c' = \delta' c'$ ; em outras palavras  $B'_n = B_n \cap E'_n$ .

Os seguintes resultados sobre subcomplexos adequados e células serão usados:

**Proposição A.3.** *Seja  $E_*$  um subcomplexo livre com base  $U_*$ , se  $s \in U_n$  e  $t \in U_{n+1}$  são tais que  $s$  está envolvido em  $\delta$  e  $s$  não envolvido em  $\delta u$  para qualquer  $u \in U_{n+1}$  diferente de  $t$ , então o subcomplexo  $E'$  de  $E$  obtido através da remoção de  $s$  e  $t$  é adequado, ou seja o subcomplexo que tem como base  $U'_*$  com  $U'_n = U_n - \{s\}$ ,  $U'_{n+1} = U_{n+1} - \{t\}$  e  $U'_i = U_i$  nos outros casos e operador de bordo  $\delta'$  a restrição de  $\delta$  a tais grupos.*

**Proposição A.4.** *Dado um subcomplexo adequado  $E'_*$  de  $E_*$  o mapa  $h : H'_n \rightarrow H_n$  que leva  $[t']_{E'_*}$  na  $[t']_{E_*}$  é um isomorfismo (de grupos).*

O método de modelos acíclicos consiste em uma ferramenta de caráter algébrico essencial no estudo de homologia facilitando a demonstração de uma grande quantidade de resultados. Nosso objetivo agora é descrever tal método apresentando as principais definições resultados.

**Definição A.5.** Dada uma categoria  $\mathbf{C}$  e um funtor  $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Ab}$ , onde  $\mathbf{Ab}$  é a categoria de grupos abelianos, vamos chamar os objetos de  $\mathbf{C}$  de modelos. Dado então um conjunto de modelos  $M$  dizemos que o funtor  $F$  é livre com base em  $M$  se existe um conjunto  $\{M_i \in M : i \in I\} \subset M$  e objetos  $x_i \in F(M_i)$  tais que para todo  $G \in \mathbf{C}$  temos  $F(G)$  um grupo abeliano livre e o conjunto

$$\{(F(f))(x_i) \in F(G) : i \in I \text{ e } f \text{ percorre os morfismos de } M_i \text{ em } G\}$$

uma base de  $F(G)$ . O objeto  $x_i$  é chamado um representante de  $M_i$ .

Note que se  $f : M_i \rightarrow G$  então  $F(f)$  é um morfismo entre os grupos  $F(M_i)$  e  $F(G)$ , assim  $F(f)(x_i) \in F(G)$ . A dificuldade em checar quando um conjunto de modelos  $M$  é uma base para um funtor  $F$  não está em encontrar a família  $\{M_i \in M : i \in I\}$  e os elementos  $x_i$  mas sim em descrever todos os elementos da forma  $F(f)(x_i)$ , pois em geral  $f$  pode assumir muitos valores.

Dizemos que um complexo de cadeia  $E_*$  é acíclico se  $H_n(E) = 0$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ . Por fim um funtor  $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Comp}$  é dito acíclico sobre um conjunto  $M$  de modelos de  $\mathbf{C}$  se  $F(M_i)$  é acíclico para todo  $M_i \in M$ .

Um funtor  $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Comp}$  associa a cada par de objetos  $G_1, G_2$  de  $\mathbf{C}$  e morfismo  $f : G_1 \rightarrow G_2$  um diagrama do tipo:

$$\begin{array}{ccccc} \dots & \longrightarrow & F(G_1)_n & \xrightarrow{\delta_{G_1,n}} & F(G_1)_{n+1} & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow F(f)_n & & \downarrow F(f)_{n+1} & & \\ \dots & \longrightarrow & F(G_2)_n & \xrightarrow{\delta_{G_2,n}} & F(G_2)_{n+1} & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Note que em particular podemos definir um funtor  $F_n : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Ab}$  que leva  $G_1$  em  $F(G_1)_n$  e  $f$  em  $F(f)_n$ .

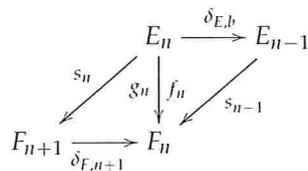
Na notação  $\delta_{G_i,n}$  nós indicamos o objeto  $G_i$  e omitimos o funtor  $F$ , nesse caso tal notação é conveniente pois temos um único funtor e dois objetos. Em alguns casos isso pode variar, e a notação completa deveria ser algo como  $\delta_{F,G_i,n}$ , porém iremos omitir índices sempre que não houver ambiguidade.

Lembrando que uma transformação natural  $\tau$  entre funtores  $E, F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$  é uma função que associa a cada objeto  $c$  da categoria  $\mathbf{C}$  um morfismo  $\tau_c : E(c) \rightarrow F(c)$  da categoria  $\mathbf{D}$  de modo que dado um morfismo qualquer  $f : c_0 \rightarrow c_1$  em  $\mathbf{C}$  o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{array}{ccc} E(c_0) & \xrightarrow{\tau_{c_0}} & F(c_0) \\ \downarrow E(f) & & \downarrow F(f) \\ E(c_1) & \xrightarrow{\tau_{c_1}} & F(c_1) \end{array}$$

Por fim uma homotopia entre mapas de cadeia  $f, g : E_* \rightarrow F_*$  é uma sequência de morfismos  $(s_n : E_n \rightarrow F_{n+1})_{n \in \mathbb{Z}}$  tais que

$$f_n - g_n = \delta_{F,n+1} \circ s_n + s_{n-1} \circ \delta_{E,n}$$



Dizemos que  $f$  e  $g$  são homotópicos e denotamos  $f \simeq_s g$  ou simplesmente  $f \simeq g$ . É rotineiro checar que dois mapas homotópicos em cadeia induzem a mesma função em nível de homologia, isto é  $f \simeq g$  implica  $H(f) = H(g)$ .

Um mapa  $f : E_* \rightarrow F_*$  é uma equivalência de cadeias se existe um mapa  $g : F_* \rightarrow E_*$  tal que  $f \circ g \simeq id_G$  e  $g \circ f \simeq id_F$ . Como  $H(f_n) \circ H(g_n) = H(f_n \circ g_n) = H(id_{G_n}) = id_{H_n(G)}$  e o mesmo para  $H(f_n) \circ H(g_n)$  vemos que  $H(f_n)$  é um isomorfismo para todo  $n$ , e portanto  $H(f)$  é um isomorfismo entre complexos de cadeia.

Transformações naturais  $\tau$  e  $\delta$  entre funtores  $E, F : C \rightarrow \mathbf{Comp}$  levam objetos  $c$  em mapas de cadeia  $\tau(c), \delta(c) : E(c) \rightarrow F(c)$ , esses por sua vez são sequências de homomorfismos  $\tau_n(c)$  e  $\delta_n(c)$  dizemos assim que as transformações  $\tau$  e  $\delta$  são naturalmente homotópicas em cadeia quando existem transformações naturais  $s_n : E_n \rightarrow F_{n+1}$  de modo que para todo  $c$  vale  $\tau_n(c) - \delta_n(c) = \delta_{F,n+1} \circ s_n(c) + s_{n-1}(c) \circ \delta_{E,n}$ . É também rotineiro, embora confuso, verificar que se  $\tau$  e  $\delta$  são naturalmente homotópicas em cadeia vale a igualdade  $H_n(\tau(c)) = H_n(\delta(c))$ .

Com isso podemos enunciar o teorema de modelos acíclicos.

**Proposição A.6.** *Dada uma categoria  $C$  com modelos  $\mathcal{M}$  e funtores  $F, E : C \rightarrow \mathbf{Comp}$  tais que  $F_i = E_i = 0$  para  $i < 0$ ,  $F_n$  é livre com base em  $\mathcal{M}$  para  $n > 0$  e  $E$  é acíclico sobre  $\mathcal{M}$ .*

- Dado uma transformação natural  $\tau' : F_0 \rightarrow E_0$  existe um transformação natural  $\tau : F \rightarrow E$  tal que  $\tau_0 = \tau'$ . Ou seja dado um elemento  $c \in C$  existe um diagrama comutativo da seguinte forma:

$$\begin{array}{ccccc}
 \dots & \xrightarrow{\delta_{E,c}} & E_2(c) & \xrightarrow{\delta_{E,c}} & E_1(c) & \xrightarrow{\delta_{E,c}} & E_0(c) \\
 & & \downarrow \tau_2(c) & & \downarrow \tau_1(c) & & \downarrow \tau_0(c) = \tau'(c) \\
 \dots & \xrightarrow{\delta_{F,c}} & F_2(c) & \xrightarrow{\delta_{F,c}} & F_1(c) & \xrightarrow{\delta_{F,c}} & F_0(c)
 \end{array}$$

de modo que  $\tau$  é uma transformação natural.

- Quaisquer duas transformações naturais  $\tau, \theta : F \rightarrow E$  com  $\tau_0 = \theta_0$  são naturalmente homotópicas em cadeia.

Embora o enunciado acima dependa de muitas definições um tanto complicadas o que ele nos oferece é simplesmente um modo de, sob certas hipóteses, estender um homomorfismo entre  $E_0(c)$  e  $F_0(c)$  a um mapa de cadeia entre  $E_*$  e  $F_*$  além de garantir que qualquer outra extensão induz uma função semelhante em nível de homologia.

O corolário abaixo nada mais é do que uma adaptação do teorema de modelos acíclicos a complexos de cadeia aumentados.

**Corolário A.7** (Corolário do Teorema de Modelos Acíclicos). *Dada uma categoria  $C$  com modelos  $\mathcal{M}$  e funtores  $E, F$  de  $C$  em  $\mathbf{Comp}_{aug}$ .*

- Se cada  $F_n$  é livre com base em  $\mathcal{M}$  e  $E$  acíclico em  $\mathcal{M}$  existe uma transformação natural  $\tau : F \rightarrow E$ , tal transformação é única a menos de homotopia.

- Se  $E_n$  e  $F_n$  são livres com base em  $M$  e  $E, F$  acíclicos então existe uma equivalência natural entre tais funtores, além disso qualquer transformação natural entre eles é uma equivalência de funtores.

Lembrando que uma equivalência entre funtores  $E, F : C \rightarrow D$  é uma transformação natural  $\tau : E \rightarrow F$  tal que existe uma transformação  $\sigma : F \rightarrow E$  de modo que quando calculamos a composta  $\sigma \circ \tau$  em um objeto  $t$  de  $C$  temos que  $\sigma(t) \circ \tau(t) = id_{E(t)}$ :

$$E(t) \xrightarrow{\tau(t)} F(t) \xrightarrow{\sigma(t)} E(t)$$

E o análogo para a composta  $\tau \circ \sigma$ .

Como estamos tratando sempre de homologia reduzida usaremos esse corolário frequentemente.

Quando desenvolvemos os métodos relacionados a triangularização e divisão baricêntrica sobre homologia singular nos deparamos com os chamados mapas de cadeia parciais, tais mapas são análogos a mapas de cadeia exceto que só estão definidos até um certo índice  $n_0$ .

**Definição A.8.** Dados complexos de cadeia  $(E_*, \delta)$  e  $(F_*, \sigma)$  dizemos que uma sequência limitada de mapas  $f_i : E_i \rightarrow F_i$  para  $i \in \mathbb{Z}$  e  $i \leq n_0$  é um mapa natural de cadeia parcial de ordem  $n_0$  se  $f_{i-1} \circ \delta = \sigma \circ f_i$  para todo  $i \leq n_0$ . Dado um mapa de cadeia  $f_*$  denotamos por  $f_{* \leq n_0}$  o mapa parcial de ordem  $n_0$  obtido restringindo a sequência.

As definições usuais sobre mapas de cadeia são traduzidas para esse contexto de forma natural. Por exemplo dados  $f_n$  e  $g_n : E_n \rightarrow F_n$  mapas de cadeia parciais de ordem  $n_0$  uma homotopia parcial entre tais mapas é uma sequência de homomorfismos  $h_n : E_n \rightarrow F_{n+1}$  para  $n \leq n_0$  tais que  $f_i - g_i = \sigma_{i+1} s_i + s_{i-1} \delta_i$ , lembre que  $F_*$  é um complexo de cadeia e portanto  $\sigma_{i+1}$  está sempre definido. Muitos dos resultados sobre mapas de cadeia possuem versões análogas sobre mapas de cadeia restritos, em particular dados dois mapas parciais de ordem  $n$  são parcialmente homotópicos então os morfismos que eles induzem entre os grupos de homologia de ordem menor ou igual a  $n$  são iguais. À demonstração desse é exatamente igual a demonstração do resultado análogo para mapas de cadeia homotópicos, apenas restringindo os valores de  $n$ .

Nesse contexto existe um teorema análogo ao segundo caso do teorema de modelos acíclicos, vamos chamá-lo de teorema de modelos acíclicos parcial.

**Proposição A.9.** Dada uma categoria  $C$  com modelos  $\mathcal{M}$  e funtores  $F, E : C \rightarrow \text{Comp}_{\text{aug}}, F_n$  livre com base em  $\mathcal{M}$  para  $n > 0$  e  $E$  é acíclico sobre  $\mathcal{M}$ . Então quaisquer duas transformações naturais parciais  $\tau, \theta : F \rightarrow E$  com  $\tau_0 = \theta_0$  são naturalmente parcialmente homotópicas em cadeia.

Em demonstrações do segundo item do teorema de modelos acíclicos, como a encontrada em [Rot88], a homotopia  $h_*$  entre os funtores é criada passo a passo, e para se definir as funções  $h_n : E_n(c) \rightarrow F_{n+1}(c)$  não são necessárias as funções  $\tau_{n+1}(c)$  ou  $\theta_{n+1}(c)$  de modo que uma simples restrição na demonstração do teorema original nos dá uma demonstração do corolário acima.



---

## Referências Bibliográficas

- [Art08] Mário J. Edmundo; Arthur Woerheide. Comparison theorems for o-minimal singular (co)homology. *Transactions of The American Mathematical Society*, 360(9):4889–4912, 2008.
- [Cos99] Michael Coste. *An Introduction to O-minimal Geometry*. Institute de Recherche Mathématique de Rennes, November 1999.
- [Dav94] Lou van den Dries; Angus Macintyre; David Marker. The elementary theory of restricted analytic fields with exponentiation. *Annals of Mathematics*, 140:183–205, 1994.
- [Del91] Hans Delfs. *Homology of locally semialgebraic spaces*. Lecture Notes in Mathematics. Springer, 1991.
- [Edm05] Mário J. Edmundo. O-minimal (co)homology and applications. Em A. Wilkie M. Edmundo, D. Richardson, editor, *Lecture Notes in Real Algebraic and Analytic Geometry*. Cuvillier Verlag, 2005.
- [Edm07] Mário J. Edmundo. A fixed point theorem in o-minimal structures. *Ann. Inst. Fourier Grenoble*, 57:1441–1500, 2007.
- [Kho91] A. G. Khovanskii. *Fewnomials*. Translations of Mathematical Monographs. American Mathematical Society, 1991.
- [Lan05] Serge Lang. *Undergraduate Algebra*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, 2005.
- [Loj] S. Lojasiewicz. Ensembles semi-analytiques. *mimeographed notes*.
- [M. 08] E. Baro; M. Otero. On o-minimal homotopy groups. *ArXiv e-prints*, Outubro 2008.
- [Mar98] Jacek Bochnak; Michel Coste; Marie-Françoise Roy. *Real Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1998.
- [Mar02] David Marker. *Model Theory: An Introduction*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2002.
- [Phi97] C. T. J. Dodson; Phillip E. Parker. *A user's guide to algebraic topology*. Mathematics and Its Applications. Kluwer Academic Publishers Group, 1997.
- [Pie00] Edward Bierstone; Pierre D. Milman. Subanalytic geometry. *Model Theory, Algebra, and Geometry*, 39(2):5–42, 2000.
- [Rot88] Joseph J. Rotman. *An Introduction to Algebraic Topology*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1988.
- [Sho67] Joseph R. Shoenfield. *Matemathical Logic*. CRc Press, 1967.
- [vdD86] Lou van den Dries. A generalization of the tarski-seidenberg theorem, and some nondefinability results. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 15(2):189–193, 1986.
- [vdD98] Lou van den Dries. *Tame Topology and O-minimal Structures*. London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, 1998.

- [Wil96] Alex Wilkie. Model completeness results for expansions of the ordered field of real numbers by restricted pfaffian functions and the exponential function. *Journal of the American Mathematical Society*, 9(4):1051–1094, October 1996.
- [Woe96] Arthur Woeheide. *O-Minimal Homology*. Tese de Doutorado, University of Illinois, 1996.
- [Won03] Kam-Chau Wong. A fixed point theorem for o-minimal structures. *Math. Log. Q.*, 49(6):598–602, 2003.