Geometria dos espaços de Banach $\ell_p(\ell_q)$ e $c_0(\ell_r)$

Rafael Jerônimo de Lima e Silva

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
MESTRE EM MATEMÁTICA

Programa: Matemática
Orientador: Prof. Dr. Elói Medina Galego

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CNPq

São Paulo, 10 de novembro de 2013

Esta dissertação contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa realizada por Rafael Jerônimo de Lima e Silva em 10/09/2013. O original encontra-se disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Elói Medina Galego (orientador) - IME-USP
- Prof. Dr. Antonio Roberto da Silva - IM-UFRJ
- Prof. Dr. Raymundo Luiz Alencar - IEF-ITA

Agradecimentos

Sou grato ao meu orientador, Prof. Elói Medina Galego, pela assistência e orientação durante a elaboração deste trabalho.

Expresso minha sincera gratidão à Profa. Roseli Fernandez, pela orientação durante a graduação e pelo contínuo incentivo.

Agradeço à minha mãe, meu pai e minha irmã por todo o seu apoio e carinho.

Finalmente, agradeço ao CNPq pelo auxílio financeiro durante a realização deste trabalho.

Resumo

Neste trabalho provamos que, denotando c_0 por ℓ_0 e sendo $p_0, p_1, q_0, q_1 \in \{0\} \cup [1, +\infty]$, os espaços de Banach $\ell_{p_0}(\ell_{q_0})$ e $\ell_{p_1}(\ell_{q_1})$ são isomorfos se, e somente se, $p_0 = p_1$ e $q_0 = q_1$. Com esta finalidade, fazemos um estudo dos subespaços e, em particular, dos subespaços complementados, dos espaços $\ell_p(\ell_q)$. Este teorema é uma extensão de um resultado de Pełczyński, obtido em 2011 por Cembranos e Mendoza.

Palavras-chave: Espaços de Banach, espaços isomorfos, subespaço complementado.

Abstract

Denoting c_0 by ℓ_0 and taking $p_0, p_1, q_0, q_1 \in \{0\} \cup [1, +\infty]$, we prove that the Banach spaces $\ell_{p_0}(\ell_{q_0})$ and $\ell_{p_1}(\ell_{q_1})$ are isomorphic if and only if $p_0 = p_1$ and $q_0 = q_1$. In order to do this, we study subspaces and complemented subspaces of $\ell_p(\ell_q)$ spaces. The main theorem was obtained by Cembranos and Mendoza in 2011. It is an extension of a Pełczyński's result.

Keywords: Banach spaces, isomorphic spaces, complemented subspace.

Conteúdo

Notações

$\mathbb{N}$	O conjunto dos inteiros positivos, isto é, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.
$\mathbb{R}$	O corpo dos números reais.
$\mathbb{C}$	O corpo dos números complexos.
$\mathbb{K}$	O corpo $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
$\dim V$	A dimensão do espaço vetorial V
Id_X	A função identidade de X em X, dada por $\mathrm{Id}_X(x) = x$ para todo $x \in X$.
$\mathrm{Im}\, f$	A imagem da função f. Assim, sendo $f\colon A \to B$, temos $\mathrm{Im}\, f = \{f(x) : x \in A\}$.
$B_X(x, r)$	A bola aberta com centro x e raio r no espaço normado X.
$B_X[x, r]$	A bola fechada com centro x e raio r no espaço normado X.
S_X	A esfera unitária em um espaço normado X, isto é, o subconjunto de X formado pelos pontos $x \in X$ tais que $\|x\| = 1$.
$x_n \longrightarrow x$	A sequência (x_n) converge a x.
$x_n \xrightarrow{w} x$	A sequência (x_n) converge fracamente a x.
$Y \underset{(c)}{\subseteq} X$	Y é um subespaço complementado de X.
$Y \hookrightarrow X$	X contém um subespaço isomorfo à Y.
$Y \overset{c}{\hookrightarrow} X$	X contém um subespaço complementado isomorfo à Y.
$X \approx Y$	Os espaços normados X e Y são isomorfos.
$X = Y$	Os espaços normados X e Y são isometricamente isomorfos.
$[x_n]$	O fecho topológico do conjunto gerado por $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.
$(x_n) \sim (y_n)$	As bases de Schauder (x_n) e (y_n) são equivalentes.
$(e_n^{\ell_p})$	A base de Schauder canônica do espaço ℓ_p, $1 \leq p < \infty$.
$(e_n^{c_0})$	A base de Schauder canônica do espaço c_0.
$\mathrm{d}(X, Y)$	A distância de Banach–Mazur entre os espaços normados X e Y.

Introdução

Em [22], página 242, Triebel cita, em uma nota de rodapé, uma conversa que teve com Pełczyński sobre isomorfismos entre os espaços de Banach $\ell_p(\ell_q)$. Ele comenta que Pełczyński esboçou uma demonstração do seguinte teorema. Sejam $1 \leq p_0, p_1 \leq \infty$, $1 < q_0, q_1 < \infty$. Então os espaços $\ell_{p_0}(\ell_{q_0})$ e $\ell_{p_1}(\ell_{q_1})$ são isomorfos, se e somente se, $p_0 = p_1$ e $q_0 = q_1$. Cembranos e Mendoza se interessaram pelo problema, mas em seu estudo para demonstrar este teorema tiveram de ir além da idéia citada por Triebel. Em particular, para provar que se $\ell_\infty(\ell_{q_0})$ e $\ell_\infty(\ell_{q_1})$ são isomorfos então $q_0 = q_1$ (Proposição 5.5), precisaram de um resultado de Bourgain, Casazza, Lindenstrauss e Tzafriri (Proposição 2.19), desconhecido na época em que [22] foi escrito.

Uma questão surge naturalmente. Será que o teorema permanece válido se incluirmos os valores extremos de q_0, q_1, isto é, se considerarmos $q_0, q_1 \in \{1, \infty\}$? A resposta para esta questão é afirmativa. Em [7], Cembranos e Mendoza mostraram que $\ell_1(\ell_\infty)$ e $\ell_\infty(\ell_1)$ não são isomorfos e, em [9], provaram a validade desta versão estendida do teorema de Pełczyński. Seguindo nesta direção, podemos ainda nos perguntar se podemos incluir o espaço c_0 no enunciado. Mais especificamente, estamos interessados no seguinte

Problema. *Sejam* $p_0, p_1, q_0, q_1 \in \{0\} \cup [1, +\infty]$. *Então, denotando o espaço* c_0 *por* ℓ_0, *é verdade que os espaços* $\ell_{p_0}(\ell_{q_0})$ *e* $\ell_{p_1}(\ell_{q_1})$ *são isomorfos se, e somente se,* $p_0 = p_1$ *e* $q_0 = q_1$*?*

Novamente, a solução foi dada, afirmativamente, por Cembranos e Mendoza, tendo sido publicado em [8]. Nosso objetivo, neste trabalho, é demonstrar este teorema.

A seguir, descrevemos o conteúdo de cada capítulo.

No Capítulo 1 reunimos diversas proposições e teoremas utilizados no decorrer no trabalho, além de relembrarmos diversas definições básicas e estabelecermos a notação. Inicialmente apresentamos resultados básicos de análise funcional e da teoria dos espaços de

Banach, para então tratarmos, brevemente, de subesbaços complementados em espaços de Banach, bases de Schauder em espaços de Banach e da teoria local de espaços de Banach. Por fim, fazemos um estudo de somas (infinitas) de espaços de Banach e da complementação uniforme dos espaços ℓ_p^n.

No Capítulo 2 estudamos os subespaços dos espaços de Banach $\ell_p(\ell_q)$, sendo $1 \leq p, q < \infty$. Os casos em que $p = \infty$ ou $q = \infty$ são considerados nos capítulos 3 e 4, onde são estudados os subespaços complementados destes espaços.

No Capítulo 5, provamos que os espaços $c_0(\ell_\infty)$ e $\ell_\infty(c_0)$ não são isomorfos. Este resultado é o último passo em direção ao teorema principal, cuja demonstração é o tema do Capítulo 6. Finalmente, no Capítulo 7, fazemos uma discussão sobre os resultados obtidos e enunciamos alguns problemas em aberto.

Capítulo 1

Preliminares

Neste primeiro capítulo iremos relembrar algumas definições e conceitos básicos sobre espaços de Banach, além de diversos resultados que serão necessários no decorrer deste trabalho. Os espaços vetoriais que consideramos são definidos sobre um corpo $\mathbb{K}$, que o leitor pode assumir ser tanto $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Se são considerados mais do que um espaço vetorial no mesmo contexto, deve-se admitir que os espaços em questão estão todos definidos sobre o mesmo corpo.

1.1 Resultados básicos em espaços de Banach

Começamos relembrando algumas definições e resultados básicos de Análise Funcional. Se X é um espaço vetorial munido de uma norma $\|\cdot\|: X \to \mathbb{R}$ então dizemos que $(X, \|\cdot\|)$ é um *espaço normado*, e, não havendo perigo de ambiguidade, é usual denotarmos este espaço simplesmente por X. Um espaço normado é um *espaço de Banach* é se ele é um espaço métrico completo adotando a métrica induzida pela norma. São exemplos de espaços de Banach:

- O espaço $(\ell_p, \|\cdot\|_p)$, $1 \leq p < \infty$, com

$$\ell_p = \left\{ (x_n) : (x_n) \text{ é uma sequência de escalares tal que } \sum_{i=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\},$$

$$\|(x_n)\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall (x_n) \in \ell_p ;$$

- O espaço $(\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ com

$$\ell_\infty = \left\{(x_n) : (x_n) \text{ é uma sequência de escalares tal que } \sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n| < \infty\right\} ,$$

$$\|(x_n)\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n| , \quad \forall(x_n) \in \ell_\infty ;$$

- O espaço $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$, subespaço de $(\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty)$, com

$$c_0 = \{(x_n) : (x_n) \text{ é uma sequência de escalares tal que } |x_n| \to 0\} ,$$

$$\|(x_n)\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n| , \quad \forall(x_n) \in c_0 ;$$

- O espaço $(\ell_p^n, \|\cdot\|_p)$, $1 \le p < \infty$, $n \in \mathbb{N}$, com

$$\ell_p^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1, \dots, x_n \text{ são escalares } \} ,$$

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} , \quad \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \ell_p^n ;$$

- O espaço $(\ell_\infty^n, \|\cdot\|_\infty)$, $n \in \mathbb{N}$, com

$$\ell_\infty^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1, \dots, x_n \text{ são escalares } \} ,$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1\le i\le n}|x_i| , \quad \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \ell_\infty^n ;$$

- Sendo (X, σ, μ) um espaço de medida, o espaço $(L_p(X, \sigma, \mu), \|\cdot\|_p)$, $1 \le p < \infty$, com

$$L_p(X, \sigma, \mu) = \left\{\text{classes de equivalência } [f] : f\colon X \to \mathbb{K} \text{ é mensurável e } \int_X |f|^p \mathrm{d}\mu < \infty\right\},$$

  onde $[f] = [g]$ se, e somente se, o conjunto dos pontos $x \in X$ tais que $f(x) \neq g(x)$ tem medida nula ,

$$\|[f]\|_p = \int_X |f|^p \mathrm{d}\mu , \quad \forall[f] \in L_p(X, \sigma, \mu) ;$$

A seguinte proposição caracteriza as transformações lineares contínuas definidas em espaços normados.

Proposição 1.1. *Sejam X, Y espaços normados e $T: X \to Y$ uma transformação linear. São equivalentes:*

(a) *T é contínua.*

(b) *T é contínua na origem.*

(c) *Existe $K \geq 0$ tal que $\|Tx\| \leq K\|x\|$, para todo $x \in X$.*

Demonstração. Indicamos [19], página 25, Teorema 1.4.2. ■

O conjunto $L(X,Y)$ das transformações lineares contínuas de X em Y é um espaço vetorial, munido da norma

$$T \mapsto \inf\left\{K \geq 0 : \|Tx\| \leq K\|x\|, \text{ para todo } x \in X\right\}.$$

Segue que, se $T: X \to Y$ é contínua, então $\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|$, para todo $x \in X$. Sabemos também $\|T\| = \sup\limits_{\|x\|\leq 1}\|Tx\|$ e, se $X \neq \{0\}$, $\|T\| = \sup\limits_{\|x\|=1}\|Tx\|$.

A seguir, relembramos a *desigualdade de Hölder*, um resultado clássico de Análise Funcional.

Proposição 1.2 (Desigualdade de Hölder). *Sejam $p, q > 1$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então, para todos $a_k, b_k \in \mathbb{K}$, $k = 1, \ldots, n$, temos*

$$\sum_{i=1}^{n}|a_k b_k| \leq \left(\sum_{i=1}^{n}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}|b_k|^q\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Demonstração. Ver [13], página 3, Teorema 1.5. ■

Se $1 < p < \infty$ então o número real $q > 0$ que satisfaz a equação $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ é chamado de *conjugado* de p. O conjugado de $p = 1$ é $q = \infty$.

Um espaço normado é um espaço métrico munido da métrica induzida pela norma, que é dada por $(x, y) \mapsto \|x - y\|$. Um espaço métrico é dito *separável* se, e somente se, ele contém um subconjunto denso e enumerável.

Proposição 1.3. *Os espaços de Banach c_0 e ℓ_p, $1 \leq p < \infty$, são separáveis. O espaço de Banach ℓ_∞ não é separável.*

Demonstração. Ver [13], página 14, Proposição 1.26. ∎

Proposição 1.4. *Se M é um espaço métrico separável então todo subespaço métrico de M é separável.*

Demonstração. Seja $\mathcal{E} \subseteq M$ um subconjunto denso e enumerável. Seja $N \subseteq M$. N é um espaço métrico com a métrica $d: M \times M \to \mathbb{R}$ de M restrita a $N \times N$, isto é, N é um subespaço métrico de M. Iremos mostrar que N tem um subconjunto denso e enumerável.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ e $e \in \mathcal{E}$ tal que $B_M(e, \frac{1}{n}) \cap N \neq \varnothing$ (denotamos por $B_M(e, \frac{1}{n})$ a bola aberta de M com centro e e raio $\frac{1}{n}$) escolhemos $a_{e,n} \in B_M(e, \frac{1}{n}) \cap N$. O conjunto A dos $a_{e,n}$ assim escolhidos é enumerável. Além disso, A é denso em N. De fato, seja $x \in N$. Existe $e \in \mathcal{E}$ tal que $\mathrm{d}(x, e) < \frac{1}{2n}$, e assim $B_M(e, \frac{1}{2n}) \cap N \neq \varnothing$. Daí, temos

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(x, a_{e,2n}) &\leq \mathrm{d}(x.e) + \mathrm{d}(e, a_{e,2n}) \\ &< \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

provando que A é denso em N. ∎

Com o objetivo de listarmos algumas caracterizações sobre isomorfismos, relembramos agora o conceito de função invertível. Seja $T: X \to Y$ uma função. Dizemos que T é *invertível* se existe $S: Y \to X$ tal que $TS = \mathrm{Id}_Y$ e $ST = \mathrm{Id}_X$. Nesse caso, dizemos que S é a *inversa* de T, e tal inversa é única. De fato, se S, R são inversas de T então $S = S(TR) = (ST)R = R$. A inversa de T, quando existe, é denotada por T^{-1}.

Uma condição necessária e suficiente para que T seja invertível é que T seja bijetora. Convém notar que a condição $ST = \mathrm{Id}_X$ não é suficiente para garantir que T seja invertível e $S = T^{-1}$. Por exemplo, considerando $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e $S: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dadas por $T(x, y) = (x, y, 0)$ e $S(x, y, z) = (x+z, y)$, temos que T não é invertível (pois não é sequer sobrejetora) e $ST = \mathrm{Id}_X$. Entretanto, vale a seguinte

Proposição 1.5. *Sejam A, B conjuntos não-vazios e $T: A \to B$, $S: B \to A$ funções tais que $ST = \mathrm{Id}_A$. Se T é sobrejetora então T é invertível e $S = T^{-1}$.*

Demonstração. Devemos mostrar que $TS = \mathrm{Id}_B$. Seja $b \in B$. Como T é sobrejetora, existe

$a \in A$ tal que $T(a) = b$. Logo

$$TSb = TSTa = Ta = b.$$

■

Sejam X, Y espaços normados e $T: X \to Y$ uma transformação linear. Dizemos que T é um *isomorfismo* se T é invertível e T, T^{-1} são contínuas. Se existe um isomorfismo entre X e Y então dizemos que X e Y são *isomorfos* e escrevemos $X \approx Y$. Se $T: X \to Y$ for, além de um isomorfismo, uma *isometria* (i.e. $\|Tx\| = \|x\|$ para todo $x \in X$), dizemos que X e Y são *isometricamente isomorfos* e escrevemos $X = Y$. Se T é isomorfismo quando restringimos seu contradomínio à sua imagem dizemos T é um *isomorfismo sobre sua imagem.* Utilizamos a notação $X \hookrightarrow Y$ para indicar Y tem um subespaço isomorfo à X.

Proposição 1.6. *Se X é um espaço normado separável então $X \hookrightarrow \ell_\infty$.*

Demonstração. Ver [13], página 141, Proposição 5.11. ■

Em geral, a continuidade de T não garante a continuidade de T^{-1}. A seguir, apresentamos algumas proposições que nos serão úteis para verificar se T é um isomorfismo.

Proposição 1.7. *Sejam X, Y espaços normados, $T: X \to Y$ uma transformação linear contínua. Se existe $S: Y \to X$ transformação linear contínua tal que $ST = \mathrm{Id}_X$ e T é sobrejetora então T é isomorfismo e $T^{-1} = S$.*

Demonstração. Consequência imediata da Proposição 1.5. ■

Proposição 1.8. *Sejam X, Y espaços de Banach, $T: X \to Y$ uma transformação linear contínua. Se T é bijetora então T^{-1} é contínua, isto é, T é isomorfismo.*

Demonstração. Ver [17], página 286, Teorema 4.12-2. ■

Proposição 1.9. *Sejam X, Y espaços normados e $T: X \to Y$ uma transformação linear. Então T é isomorfismo sobre sua imagem se, e somente se, existe $K > 0$ tal que*

$$K^{-1}\|x\| \leq \|Tx\| \leq K\|x\|, \ \forall x \in X.$$

Demonstração. Em [19], página 31, Proposição 1.4.14 está provada esta proposição com $s, t > 0$ no lugar de K^{-1}, K, respectivamente. Mas este resultado é equivalente, uma vez que podemos escolher $K > 0$, suficientemente grande, tal que $\frac{1}{K} \leq s$ e $K \geq t$. ∎

Proposição 1.10. *Sejam X, Y espaços normados, com $X \neq \{0\}$, e $T: X \to Y$ uma transformação linear contínua. Então T é um isomorfismo sobre sua imagem se, e somente se, existe $C > 0$ tal que $\|Tx\| \geq C\|x\|$, $\forall x \in X$.*

Demonstração. Seja $C > 0$ tal que $\|Tx\| \geq C\|x\|$, para todo $x \in X$. Fixemos $x \in X$. Então temos

$$C\|x\| \leq \|Tx\| \leq \|T\|\|x\| .$$

Tomando K suficientemente grande temos $K \geq \|T\|$ e $\frac{1}{K} \leq C$, de modo que

$$K^{-1}\|x\| \leq \|Tx\| \leq K\|x\| ,$$

e o resultado segue da proposição anterior.

Agora consideramos a recíproca. Se T é isomorfismo sobre sua imagem temos $\|T^{-1}\| > 0$, pois $X \neq \{0\}$. Como

$$\|x\| = \|T^{-1}Tx\| \leq \|T^{-1}\|\|Tx\| ,$$

para todo $x \in X$, a proposição está demonstrada. ∎

Proposição 1.11. *Sejam X um espaço de Banach e $T: X \to X$ uma transformação linear contínua tal que $\|\mathrm{Id}_X - T\| < 1$. Então T é isomorfismo.*

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que T não é injetora. Então existe $x \in X$ tal que $\|x\| = 1$ e $Tx = 0$, e assim $1 = \|x\| = \|(\mathrm{Id}_X - T)x\|$. Chegamos assim a uma contradição, pois, por hipótese, $\sup\limits_{\|x\|=1} \|(\mathrm{Id}_X - T)x\| < 1$.

Pela Proposição 1.8, agora basta mostrarmos que T é sobrejetora. Dado $x_0 \in X$, consideramos a função $f: X \to X$ dada por $f(x) = x_0 + (\mathrm{Id}_X - T)x$, para todo $x \in X$. A função f assim definida satisfaz

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \|\mathrm{Id}_X - T\|\|x - y\| ,$$

para todos $x, y \in X$. Como $\|\mathrm{Id}_X - T\| < 1$ e X é um espaço de Banach temos que, pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach ([17], página 300, Teorema 5.1-2), existe $\bar{x} \in X$ tal que $f(\bar{x}) = \bar{x}$. Portanto $T(\bar{x}) = x_0$. ■

Proposição 1.12. *Sejam X um espaço normado e Y subespaço de X. Então, se $T\colon Y \to X$ é linear, contínua e tal que $\|\mathrm{Id}_Y - T\| < 1$ então T é um isomorfismo sobre sua imagem.*

Demonstração. Se $y \in Y$ então

$$\begin{aligned}\|y\| &\leq \|y - Ty\| + \|Ty\| \\ &\leq \|\mathrm{Id}_Y - T\| \|y\| + \|Ty\| .\end{aligned}$$

Portanto, temos

$$\|y\| \leq \frac{1}{(1 - \|Id_Y - T\|)} \|Ty\| .$$

Como $y \in Y$ é arbitrário temos, pela Proposição 1.10, que T é isomorfismo. ■

Dado um subespaço M de um espaço vetorial X, definiremos agora o *espaço quociente* X/M. O espaço vetorial X/M consiste de todas as *classes de equivalência* $[x] := x + M = \{x + m : m \in M\}$. Duas classes de equivalência $[x], [y]$ são iguais se, e somente se, $x - y \in M$. Adição e multiplicação por escalar são definidos da maneira natural: $[x] + [y] := [x + y]$ e $\alpha[x] := [\alpha x]$. A transformação linear $q\colon X \to X/M$ dada por $q(x) = [x]$ é chamada de *função quociente*. Estamos interessados no caso em X é um espaço normado. Nesse caso, se M é fechado, X/M é um espaço normado munido da norma $x \mapsto \inf_{m \in M} \|x - m\|$ e a função quociente q é contínua. Se X é um espaço de Banach e M é fechado então X/M é um espaço de Banach.

O teorema a seguir serve de auxílio para demonstrar a proposição seguinte.

Teorema 1.13 (Primeiro Teorema de Isomorfismos Para Espaços de Banach). *Sejam X, Y espaços de Banach e $T\colon X \to Y$ uma transformação linear contínua. Se $T(X)$ é subconjunto fechado de Y então $X/\ker T \approx T(X)$.*

Demonstração. Ver [19], página 56, Teorema 1.7.14. ■

Proposição 1.14. *Sejam X, Y espaços de Banach. Então Y é isomorfo a um espaço quociente de X se, e somente se, existe uma transformação linear contínua e sobrejetora $T: X \to Y$.*

Demonstração. Se $T: X \to Y$ é uma transformação linear sobrejetora então, pelo Primeiro Teorema de Isomorfismos para Espaços de Banach, temos que $X/\ker T \approx T(X) = Y$. Consideramos agora a recíproca: seja $\phi: X/M \to Y$ um isomorfismo, sendo M um subespaço fechado de X. Relembramos que a função quociente $q: X \to X/M$, que é dada por $q(x) = [x]$, é uma transformação linear contínua. Assim, é imediato que $\phi \circ q: X \to Y$ é uma transformação linear contínua e sobrejetora. ■

Dado um espaço normado X sobre um corpo $\mathbb{K}$, se $f: X \to \mathbb{K}$ é uma transformação linear contínua dizemos que f é um *funcional linear sobre* X. O conjunto dos funcionais lineares sobre X é chamado de espaço *dual* de X, e denotado por X^*. O dual de X^*, X^{**}, é o espaço *bidual* de X.

A proposição seguinte descreve os espaços duais de diversos espaços de Banach.

Proposição 1.15.

(i) *$c_0^* = \ell_1$ no seguinte sentido: para cada funcional $f \in c_0^*$, existe um único $(a_n) \in \ell_1$ tal que $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$, para todo $x = (x_i) \in c_0$, e a função $f \mapsto (a_n)$ é um isomorfismo isométrico entre c_0^* e ℓ_1.*

(ii) *$\ell_1^* = \ell_\infty$ no seguinte sentido: para cada funcional $f \in \ell_1^*$, existe um único $(a_n) \in \ell_\infty$ tal que $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$, para todo $x = (x_i) \in \ell_1$, e a função $f \mapsto (a_n)$ é um isomorfismo isométrico entre ℓ_1^* e ℓ_∞.*

(iii) *Sejam $1 < p, q < \infty$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então $\ell_p^* = \ell_q$ no seguinte sentido: para cada funcional $f \in \ell_p^*$, existe um único $(a_n) \in \ell_q$ tal que $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$, para todo $x = (x_i) \in \ell_p$, e a função $f \mapsto (a_n)$ é um isomorfismo isométrico entre ℓ_p^* e ℓ_q.*

(iv) *Seja $n \in \mathbb{N}$. Então $(\ell_1^n)^* = \ell_\infty^n$ no seguinte sentido: para cada funcional $f \in (\ell_1^n)^*$, existe um único $(a_1, \ldots, a_n) \in \ell_\infty^n$ tal que $f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$, para todo $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \ell_1^n$, e a função $f \mapsto (a_1, \ldots, a_n)$ é um isomorfismo isométrico entre $(\ell_1^n)^*$ e ℓ_∞^n.*

(v) *Sejam* $n \in \mathbb{N}$ *e* $1 < p, q < \infty$ *tais que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Então* $(\ell_p^n)^* = \ell_q^n$ *no seguinte sentido: para cada funcional* $f \in (\ell_p^n)^*$, *existe um único* $(a_1, \ldots, a_n) \in \ell_q^n$ *tal que* $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$, *para todo* $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \ell_p^n$, *e a função* $f \mapsto (a_1, \ldots, a_n)$ *é um isomorfismo isométrico entre* $(\ell_p^n)^*$ *e* ℓ_q^n.

Demonstração. Ver [13], página 44, Proposições 2.14, 2.15 e 2.16 para os itens (i), (ii) e (iii). Para os itens (iv) e (v), indicamos [19], página 537, Teorema C.13. ■

Cada elemento de X define um elemento de X^{**}, da seguinte maneira: se $x \in X$ então a função $\Phi_x : X^* \to \mathbb{K}$ dada por $f \mapsto f(x)$ é uma transformação linear contínua. A transformação linear $\Phi: X \to X^{**}$ que associa cada $x \in X$ a Φ_x é uma isometria, logo é injetora e contínua. Quando Φ é sobrejetora, isto é, quando Φ é um isomorfismo, dizemos que X é *reflexivo*.

Proposição 1.16. *Todo subespaço fechado de um espaço normado reflexivo é reflexivo.*

Demonstração. Ver [19], página 104, Teorema 1.11.16. ■

Proposição 1.17.

(i) *Os espaços* ℓ_1 *e* ℓ_∞ *não são reflexivos.*

(ii) *Os espaços* ℓ_p, *com* $1 < p < \infty$, *são reflexivos.*

Demonstração. Ver [19], página 106, Exemplo 1.11.23 e página 101, Teorema 1.11.10. ■

Se X, Y são espaços normados então uma transformação linear contínua qualquer $T: X \to Y$ nos fornece uma maneira natural de relacionar os espaços X^* e Y^*. Definimos o *operador adjunto a* T, denotado por T^*, do seguinte modo:

$$\begin{aligned} T^* : Y^* &\longrightarrow X^* \\ f &\longmapsto f \circ T. \end{aligned}$$

É fácil verificar que T^* é uma função linear e contínua.

A seguir, voltamos nossa atenção às *somas (finitas) entre espaços normados.* Sejam X um espaço normado e Z, W subespaços de X tais que $Z \cap W = \varnothing$. Então o subespaço $Z \oplus W := \{z + w : z \in Z \text{ e } w \in W\}$ é chamado de *soma direta (interna) de* Z *e* W. A condição

$Z \cap W = \varnothing$ garante que, dado $z + w \in Z + W$, os vetores z e w estão unicamente determinados. Isto sugere que identifiquemos os elementos de $Z \oplus W$ com os pares da forma (z, w), com $z \in Z$ e $w \in W$, e nos leva a uma definição mais geral, que nos permite somar não apenas subespaços de um mesmo espaço mas também pares de espaços normados quaisquer. Sejam X, Y espaços normados. A *soma direta (externa) de* X *e* Y, $X \oplus Y$, é o espaço vetorial $\{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$ munido da norma $(x, y) \mapsto \|x\| + \|y\|$. Convém notarmos que as normas $(x, y) \mapsto \|x\| + \|y\|$ (da soma), $(x, y) \mapsto \max\{\|x\| + \|y\|\}$(do máximo) e $(x, y) \mapsto (\|x\|^p + \|y\|^p)^{\frac{1}{p}}$, $1 \leq p < \infty$ (norma p) são equivalentes: trata-se de decorrência imediata do fato de que todas as normas em $\mathbb{R}^2$ são equivalentes. Dados $X_1, \ldots, X_n$ espaços normados, o espaço $X_1 \oplus \cdots \oplus X_n$, também denotado por $\sum_{i=1}^n \oplus X_i$, é definido de forma análoga, tomando, no caso da soma interna, o cuidado de considerar a condição $X_i \cap (\sum_{j \neq i} \oplus X_j) = \{0\}$, $i = 1, \ldots, n$. Ela garante que, se $x \in X_1 \oplus \cdots \oplus X_n$, existem únicos $x_1 \in X_1, \ldots, x_n \in X_n$ tais que $x = x_1 + \cdots + x_n$.

Apesar de utilizarmos a mesma notação para denotarmos tanto as somas internas quanto as externas, não esperamos que isto cause algum problema, tendo em vista o resultado seguinte.

Proposição 1.18.

(i) *Se $X_1, \ldots, X_n$ são espaços normados e $X = X_1 \oplus \cdots \oplus X_n$ então existem subespaços fechados $X_1', \ldots, X_n'$ de X tais que X é a soma interna destes subespaços e X_i' é isometricamente isomorfo à X_i, para cada $i = 1, \ldots, n$.*

(ii) *Se X é um espaço de Banach e X é igual à soma interna dos subespaços fechados $X_1, \ldots, X_n$ então X é isomorfo à soma externa dos mesmos espaços.*

Demonstração. Ver [19], página 65, Proposição 1.8.10. ∎

A Proposição acima torna clara a relação entre as duas somas e esclarece ambiguidades que, por ventura, poderiam não ser esclarecidas apenas pelo contexto. Assim, se um espaço de Banach X é soma interna dos subespaços Z, W, podemos escrever $X = Z \oplus W$ sem temer prejuízo de interpretação se Z e W forem fechados.

Proposição 1.19.

(i) *Se X, Y são espaços normados então $X^* \approx Y^*$ se $X \approx Y$.*

(ii) *Se* $X_1, \ldots, X_n$ *são espaços normados então* $(X_1 \oplus \cdots \oplus X_n)^* \approx X_1^* \oplus \cdots \oplus X_n^*$.

Demonstração. Para provar o item (i), basta notar que se $T: X \to Y$ é isomorfismo então T^* é isomorfismo entre X^* e Y^*. Indicamos [19], página 91, Teorema 1.10.13, para uma demonstração do item (ii). ∎

Revemos agora o conceito de topologia fraca. Sejam X, Y espaços topológicos. Se $f: X \to Y$ é contínua, sabemos que $f^{-1}[U]$ é aberto de X, para todo U aberto de Y. Pode-se verificar que $\{f^{-1}[U] : U \text{ é aberto de } Y\}$ é uma topologia em X, e é imediato que se trata da topologia menos fina (também dita *mais fraca*) que torna f contínua.

Podemos considerar a observação do parágrafo acima em um quadro mais geral. Mais especificamente: sejam X um conjunto e $(Y_i)_{i\in I}$ uma família de espaços topológicos. Dado um conjunto de funções $\mathcal{F} = \{f_i : i \in I\}$, com $f_i: X \to Y_i$ para todo $i \in I$, pode-se verificar que

$$\left\{\bigcap_{i\in F} f_i^{-1}[U_i] : \varnothing \neq F \subseteq I,\ U_i \text{ é aberto de } Y_i \text{ para todo } i \in F \text{ e } F \text{ é finito}\right\}$$

é base da topologia mais fraca que torna todas as funções de $\mathcal{F}$ contínuas. Denotamos esta topologia em X por $\sigma(X, \mathcal{F})$ e a chamamos de *topologia fraca* com respeito à $\mathcal{F}$. Em particular, se V é um espaço normado, a topologia $w := \sigma(V, V^*)$ de V é chamada *fraca*. Se uma sequência x_n converge a x na topologia fraca escrevemos $x_n \xrightarrow{w} x$ e dizemos que x_n *converge fracamente* a x. Toda sequência que converge fracamente é limitada. A seguinte caracterização de convergência fraca é muito útil.

Proposição 1.20. *Sejam* X *um espaço normado* (x_n) *uma sequência de elementos de* X. *Então* $x_n \xrightarrow{w} x$ *se, e somente se,* $f(x_n) \to f(x)$ *para todo* $f \in X^*$.

Demonstração. Ver [13], página 66, Proposição 3.7 . ∎

Proposição 1.21. *Sejam* X, Y *espaços de Banach.*

(a) *Se* (x_n, y_n) *é uma sequência em* $X \oplus Y$ *tal que* $(x_n, y_n) \xrightarrow{w} 0$ *então* $x_n \xrightarrow{w} 0$ *e* $y_n \xrightarrow{w} 0$.

(b) *Se* $T: X \to Y$ *é uma transformação linear contínua e* (x_n) *uma sequência de elementos de* X *tal que* $x_n \xrightarrow{w} 0$ *então* $Tx_n \xrightarrow{w} 0$. *Em particular, se* $T: X \to Y$ *é isomorfismo então* $x_n \xrightarrow{w} 0$ *se, e somente se,* $Tx_n \xrightarrow{w} 0$.

Demonstração. Seja $\varphi \in X^*$. Considere a transformação $\widetilde{\varphi}$ dada por

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi}\colon X \oplus Y &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (x,y) &\longmapsto \varphi(x)\,. \end{aligned}$$

Claramente, $\widetilde{\varphi}$ é linear e, como

$$\|\widetilde{\varphi}(x,y)\| \le \|\varphi\|\|x\| \le \|\varphi\|\|(x,y)\|\,,$$

para todo $(x,y) \in X \oplus Y$, temos que $\widetilde{\varphi}$ é contínua. Portanto

$$\varphi(x_n) = \widetilde{\varphi}(x_n, y_n) \longrightarrow 0\,.$$

Analogamente, prova-se que $y_n \xrightarrow{w} 0$, concluindo a demonstração de (a).

A demonstração de (b) é imediata. ■

É natural se perguntar quando uma transformação linear $T\colon X \to Y$ é contínua se considerados X, Y munidos da topologia fraca. Nesse sentido, quando X, Y são espaços de Banach, a seguinte proposição fornece a resposta.

Proposição 1.22. *Sejam X, Y espaços de Banach e $T\colon X \to Y$ uma transformação linear. Então T é contínua com respeito às topologias induzidas pelas normas se, e somente se, T é contínua com respeito às topologias fracas.*

Demonstração. Ver [12], página 422, Teorema 15. ■

Tendo revisto a definição de topologia fraca, estamos em condições de definir espaços de Schur. Um espaço de Banach é um *espaço de Schur* se toda sequência fracamente convergente desse espaço converge na topologia induzida pela norma. É claro que se uma sequência converge na topologia induzida pela norma então a sequência é fracamente convergente. Assim, um espaço é de Schur se nesse espaço as sequências fracamente convergentes e convergentes coincidem.

A seguinte proposição fornece alguns exemplos de espaços de Schur, bem como de alguns espaços que não são de Schur.

Proposição 1.23.

(i) *Todo espaço normado de dimensão finita é um espaço de Schur.*

(ii) *Se X é um espaço de Schur então todo subespaço de X é de Schur.*

(iii) *ℓ_1 é um espaço de Schur.*

(iv) *ℓ_p, $1 < p < \infty$, não é um espaço de Schur.*

Demonstração. Seja X um espaço normado de dimensão finita. Sendo (x_k) uma sequência de elementos de X, para provarmos o item (i) basta mostrarmos que se $x_k \xrightarrow{w} 0$ então $x_k \to 0$. Sejam $b_1, \ldots, b_n$ elementos de uma base qualquer de X e $\{f_1, \ldots, f_n\}$ a base de X^* cujos elementos são dados por $f_k(\sum_{i=1}^n \lambda_i b_i) = \lambda_k$, $k = 1, \ldots, n$. Assim, se $x \in X$ então $x = \sum_i^n f_i(x) b_i$. Se $x_k \xrightarrow{w} 0$ então, para cada $i \in \mathbb{N}$, temos $f_i(x_k) \xrightarrow{k\to\infty} 0$. Logo

$$\|x_k\| = \|\sum_{i=1}^n f_i(x_k) b_i\| \leq \sum_{i=1}^n |f_i(x_k)| \|b_i\| \xrightarrow{k\to\infty} 0 \,,$$

e está provado o item (i).

Sejam X um espaço de Schur e Y um subespaço de X. Sejam (y_n) uma sequência de elementos de Y e $y \in Y$ tais que, para todo $f \in Y^*$, $f(y_n) \to f(y)$. Suponhamos que $\|y_n - y\| \not\to 0$. Como X é um espaço de Schur, existe portanto um funcional linear $g \in X^*$ tal que $g(y_n) \not\to g(y)$. Assim, $g|_Y$ (a função g restrita ao subespaço Y) é um elemento de Y^* tal que $g|_Y(y_n) \to g|_Y(y)$ – absurdo. Isto prova o item (ii).

Os itens (iii) e (iv) estão provados em [1], página 37, Proposição 2.3.6 e Exemplo 2.3.5, respectivamente. ∎

Dizemos que um espaço de Banach X tem a *propriedade de Dunford–Pettis* (à qual também iremos nos referir pela abreviação *PDP*) se, sempre que uma sequência (x_n) em X e uma sequência (f_n) em X^* são tais que $x_n \xrightarrow{w} 0$ e $f_n \xrightarrow{w} 0$ tem-se $f_n(x_n) \to 0$.

Proposição 1.24. *Se X é um espaço de Schur então X tem a propriedade de Dunford–Pettis.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência em X tal que $x_n \xrightarrow{w} 0$. Então $x_n \to 0$, pois X é um espaço de Schur. Assim, se (f_n) é uma sequência em X^* tal que $f_n \xrightarrow{w} 0$, temos que (f_n) é limitada, isto é, existe $C \geq 0$ tal que $\|f_n\| < C$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto,

$$|f_n(x_n)| \leq C\|x_n\| \longrightarrow 0\,. \qquad \blacksquare$$

Proposição 1.25. *Os espaços ℓ_1, ℓ_∞ e ℓ_∞^* tem a propriedade de Dunford–Pettis.*

Demonstração. O espaço ℓ_1 tem a PDP pois é um espaço de Schur.

Relembramos que ℓ_∞ é isomorfo à $C(\beta\mathbb{N})$, o espaço das funções contínuas definidas em $\beta\mathbb{N}$ com valores em $\mathbb{K}$, sendo $\beta\mathbb{N}$ o compactificado de Stone–Cech de $\mathbb{N}$. Assim, pelo Teorema 5.4.5, página 115 de [1], temos que ℓ_∞ tem a PDP. O espaço ℓ_∞^* tem a PDP, como consequência do Teorema 4.1.1 e do Corolário 5.4.6, páginas 74 e 177 de [1], respectivamente. ■

Proposição 1.26.

(a) *Se X, Y são espaços de Banach, X tem a propriedade de Dunford–Pettis e $X \approx Y$, então Y tem a propriedade de Dunford–Pettis.*

(b) *Sejam $X_1, \ldots, X_n$ espaços de Banach com a propriedade de Dunford–Pettis. Então $X_1 \oplus \cdots \oplus X_n$ tem a propriedade de Dunford–Pettis.*

Demonstração. Sejam (y_n) uma sequência em Y e (φ_n) uma sequência em Y^* tais que $y_n \xrightarrow{w} 0$ e $\varphi_n \xrightarrow{w} 0$. Então, sendo $T\colon X \to Y$ um isomorfismo e $y_n = Tx_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos, pela Proposição 1.21, que $x_n \xrightarrow{w} 0$. Portanto, dado $n \in \mathbb{N}$, como $\varphi_n y_n = (\varphi_n \circ T)(x_n)$ e X tem a PDP, basta mostrar que $\varphi_n \circ T \xrightarrow{w} 0$ para concluirmos que Y tem a PDP. Para mostrar isto, basta observar que $\varphi_n \circ T = T^*(\varphi_n)$ e $T^*\colon Y^* \to X^*$ é contínua considerando X^* e Y^* munidos de suas topologias fracas (Proposição 1.22).

Provaremos o item (b) inicialmente para $n = 2$.

Sejam $\big((x_n, y_n)\big)$ uma sequência em $X_1 \oplus X_2$ e (φ^n) uma sequência $(X_1 \oplus X_2)^*$ tais que $(x_n, y_n) \xrightarrow{w} 0$ e $\varphi^n \xrightarrow{w} 0$. Relembramos que, pela Proposição 1.19, para cada $\varphi \in \mathbb{N}$, existem $\varphi_1 \in X_1^*$ e $\varphi_2 \in X_2^*$ tais que $\varphi(x_1, x_2) = \varphi_1 x_1 + \varphi_2 x_2$, para todo $(x_1, x_2) \in X_1 \oplus X_2$, e que a transformação de $X_1 \oplus X_2$ em $X_1^* \oplus X_2^*$ dada por $\varphi \mapsto (\varphi_1, \varphi_2)$ é um isomorfismo.

Pela Proposição 1.21, temos $x_n, y_n, \varphi_1^n, \varphi_2^n \xrightarrow{w} 0$. Logo, como X_1, X_2 tem a propriedade de

Dunford–Pettis, temos

$$\varphi^n(x_n, y_n) = \varphi_1^n(x_n) + \varphi_2^n(y_n) \longrightarrow 0.$$

Agora, seja $k \geq 3$ e suponha que o resultado é válido para $n = k - 1$. Como a propriedade de Dunford–Pettis é preservada por isomorfismos e $X_1 \oplus \cdots \oplus X_k \approx (X_1 \oplus \cdots \oplus X^{k-1}) \oplus X_k$, o resultado é imediato.

■

Teorema 1.27. *[Eberlein–Šmulian] Um subconjunto de um espaço normado é fracamente compacto (i.e. compacto na topologia fraca) se, e somente se, ele é fracamente sequencialmente compacto (i.e. toda sequência no subconjunto tem uma subsequência que converge fracamente convergente a um ponto do subconjunto).*

Demonstração. Ver [1], página 24, Teorema 1.6.3. ■

Sejam X, Y espaços de Banach e $T: X \to Y$ uma transformação linear contínua. Dizemos que T é *completamente contínua* se, e somente se, $T(W)$ é compacto para todo W fracamente compacto contido em X.

Proposição 1.28. *Sejam X, Y espaços de Banach e $T: X \to Y$ uma transformação linear. Então T é completamente contínua se, e somente se T é sequencialmente contínua considerando X com a topologia fraca e Y com a topologia induzida pela norma.*

Demonstração. Ver [1], página 115, Proposição 5.4.2. ■

Sejam X, Y espaços normados e $T: X \to Y$ uma transformação linear. Dizemos que T é uma transformação linear *fracamente compacta* se, e somente se, T leva conjuntos limitados em conjuntos relativamente fracamente compactos, isto é, conjuntos cujo fecho na topologia fraca é fracamente compacto.

Proposição 1.29. *Um X espaço de Banach tem a propriedade de Dunford–Pettis se, e somente se toda transformação linear fracamente compacta definida em X é completamente contínua.*

Demonstração. Ver [4], página 143, Teorema 14.2. ■

Proposição 1.30. *Toda transformação linear contínua de ℓ_∞ em c_0 é fracamente compacta.*

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que existe uma transformação linear contínua e fracamente compacta $T : \ell_\infty \to c_0$. Então, pela Proposição 2.f.4, página 106 de *Classical Banach Spaces I*, [18], existe U subespaço de ℓ_∞ tal que U é isomorfo à ℓ_∞ e $T|_U$ é isomorfismo sobre sua imagem. Assim, c_0 tem um subespaço isomorfo à ℓ_∞. Absurdo, pois ℓ_∞ não é separável. ■

Teorema 1.31 (Gantmacher). *Sejam X, Y espaços normados e $T: X \to Y$ uma transformação linear contínua. Então T é fracamente compacta se, e somente se, vale qualquer um dos seguintes itens:*

(i) $T^{**}(X^{**}) \subseteq Y$ *(identificando os pontos de Y com os de Y^{**} através da imersão canônica de Y em Y^{**});*

(ii) T^* *é fracamente compacta.*

Demonstração. Ver [4], página 142, Teorema 14.1. ■

Proposição 1.32. *Sejam X, Y espaços de Banach, X com a propriedade de Dunford-Pettis, Y reflexivo e $T: X \to Y$ uma transformação linear contínua. Se (x_n) é uma sequência de elementos de X tal que $x_n \xrightarrow{w} x$, para algum $x \in X$, então $Tx_n \to Tx$*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência de elementos de X tal que $x_n \xrightarrow{w} x$, para algum $x \in X$. Observamos, primeiramente, que T é fracamente compacta. De fato, como Y é reflexivo, identificando Y^{**} com Y pela imersão canônica, temos $T^{**}(X^{**}) \subseteq Y$. Assim, T é fracamente compacta pelo Teorema de Gantmacher (Teorema 1.31). Logo, como X tem a PDP, pela Proposição 1.29, temos que T é completamente contínua, e assim $Tx_n \to Tx$. ■

Se X é um espaço normado, $x \in X$ e $r > 0$, denotamos por $B_X(x, r)$ a bola aberta de raio r e centro x. Denotamos por $B_X[x, r]$ a bola fechada com centro x e raio r. A seguir relembramos um lema utilizado na demonstração Teorema da Aplicação Aberta.

Lema 1.33. *Sejam X, Y espaços de Banach. Então, para toda transformação linear contínua e sobrejetora $T: X \to Y$, temos*

$$T(B_X(0,1)) \supseteq B_Y(0, \delta)$$

para algum $\delta > 0$.

Demonstração. Ver [17], página 286, Lema 4.12-3. ∎

Introduzimos agora, brevemente, o conceito de *filtro*. Nosso objetivo é definir um funcional linear $f \in \ell_\infty^*$ tal que $\|f\| = 1$, $f((x_n y_n)) = f((x_n))f((y_n))$ para todos $(x_n), (y_n) \in \ell_\infty$ (i.e. f é um funcional linear *multiplicativo*) e f é uma extensão do funcional linear contínuo, definido no subespaço das sequências convergentes, dado por $(x_n) \mapsto \lim_{n\to\infty} x_n$. Um tal funcional estende o conceito de limite para sequências limitadas. Existem funcionais lineares contínuos que estendem o funcional lim chamados *limites de Banach* (ver, por exemplo, [13], página 62, Exercício 2.53) mas estes não são multiplicativos, pois têm propriedade $f((x_1, x_2, \ldots)) = f((x_2, x_3, \ldots))$, para toda sequência $(x_n) \in \ell_\infty$. De fato, se um limite de Banach fosse multiplicativo, teríamos o absurdo

$$\begin{aligned} 1 = f((1,1,\ldots)) &= f((1,0,1,0,\ldots)) + f((0,1,0,\ldots)) \\ &= 2f((1,0,1,0,\ldots)) = 2f((1,0,1,0,\ldots))^2 \\ &= 2f((1,0,1,0,\ldots))f((0,1,0,1\ldots)) = 0\,. \end{aligned}$$

Seja X um conjunto. Um *filtro* em X é um conjunto $\mathcal{F}$ de subconjuntos de X tais que

- $\varnothing \notin \mathcal{F}$;
- $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$;
- $A \in \mathcal{F}, B \supseteq A \Rightarrow B \in \mathcal{F}$.

Uma *base de filtro* em X é um conjunto $\mathcal{B}$ tal que $\varnothing \notin \mathcal{B}$ e

- Se $A, B \in \mathcal{B}$ então existe $C \in \mathcal{B}$ tal que $C \subseteq A \cap B$.

Todo filtro é uma base de filtro. Se $a \in \mathbb{R}$, um exemplo de base de filtro em $\mathbb{R}$ é o conjunto dos intervalos da forma $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, com $\varepsilon > 0$. O conjunto dos intervalos $[a, +\infty)$, $a \in \mathbb{R}$, também é uma base de filtro em $\mathbb{R}$. Em $\mathbb{N}$, os conjuntos $\{n, n+1, n+2, \ldots\}$ formam uma base de filtro.

Sejam X um conjunto, $\mathcal{B}$ uma base de filtro em X e Y um espaço topológico. Se $f: X \to Y$ é uma função e $y \in Y$, dizemos que f *tende a* y *ao longo de* $\mathcal{B}$ se, para toda vizinhança de

y em Y, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $f(B) \subseteq Y$. Se Y é um espaço de Hausdorff então esse limite é único e iremos denotá-lo por $\lim\limits_{\mathcal{B}} f$.

Se X é um conjunto infinito, um filtro em X é *livre* se ele contém todos os subconjuntos *cofinitos* de X, sendo um conjunto *cofinito* se o seu complementar é finito. O conjunto dos subconjuntos cofinitos de X é um exemplo de filtro. Dizemos que um filtro $\mathcal{F}$ é um *ultrafiltro* se ele não está propriamente contido em nenhum outro filtro. Todo filtro está contido em um ultrafiltro.

Proposição 1.34. *Sejam X um conjunto e $\mathcal{F}$ um filtro em X.*

(i) *$\mathcal{F}$ é um ultrafiltro se, e somente se, para todo $A \subseteq X$, ou $A \in \mathcal{F}$ ou $X \setminus A \in \mathcal{F}$.*

(ii) *Se Y é um espaço topológico Hausdorff e $\lim\limits_{\mathcal{F}} f$ existe, sendo $f: X \to Y$, então $\lim\limits_{\mathcal{F}} f$ pertence ao fecho do conjunto $\{f(x) : x \in X\}$.*

(iii) *Se $\mathcal{F}$ é um ultrafiltro, Y é um espaço topológico Hausdorff e $f: X \to Y$ é uma função cuja imagem está contida em um subconjunto compacto de Y então existe $\lim\limits_{\mathcal{F}} f$.*

Demonstração. Indicamos [11], página 43, Teorema 4.3.3 para uma demonstração do item (i). O item (ii) é imediato. Mostraremos o item (iii); suponhamos, por absurdo, que não existe $\lim\limits_{\mathcal{F}} f$. Então, para todo $y \in Y$, existe V_y vizinhança de y tal que $f^{-1}(V_y) \notin \mathcal{F}$. Como $\operatorname{Im} f$ está contido em um conjunto compacto, existem $y_1, \ldots, y_n$ tais que $\bigcup\limits_{i=1}^{n} V_{y_i} \supseteq \operatorname{Im} f$. Para cada $1 \leq i \leq n$ temos $f^{-1}(V_{y_i}) \notin \mathcal{F}$. Como $\mathcal{F}$ é ultrafiltro, isto que dizer que $f^{-1}(Y \setminus V_{x_i}) \in \mathcal{F}$, $i = 1, \ldots, n$. Como $\operatorname{Im} f \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} V_{y_i}$, temos

$$\bigcap_{i=1}^{n} f^{-1}(X \setminus V_{y_i}) = \varnothing,$$

logo $\varnothing \in \mathcal{F}$ – absurdo. ∎

A próxima proposição esclarece porque o conceito de ultrafiltro se faz útil na busca por um funcional linear multiplicativo em ℓ_∞^*.

Proposição 1.35. *Se $f \in \ell_\infty^*$ é um funcional linear multiplicativo não-nulo então existe um ultrafiltro $\mathcal{U}$ em $\mathbb{N}$ tal que $f(x) = \lim\limits_{\mathcal{U}} x$, para toda sequência limitada $x: \mathbb{N} \to \mathbb{K}$.*

Demonstração. Seja $f \in \ell_\infty^*$ um funcional linear multiplicativo, $f \neq 0$. Denotamos por $\mathbb{1}$ a função de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{K}$ dada por $\mathbb{1}(n) = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $f(\mathbb{1}) = f(\mathbb{1})^2$, temos que $f(\mathbb{1}) = 1$ (pois se $f(\mathbb{1}) = 0$ então $f = 0$).

Seja $a \in \ell_\infty$ tal que $a_n \in \{0,1\}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $a(\mathbb{1} - a) = 0$, temos

$$0 = f(a(\mathbb{1} - a)) = f(a)f(\mathbb{1} - a) = f(a)(\mathbb{1} - f(a)).$$

logo $f(a) = 0$ ou $f(a) = 1$.

Para cada $A \subseteq \mathbb{N}$, definimos a função $\mathbb{1}_A$ por $\mathbb{1}_A(n) = 1$, se $n \in A$, e $\mathbb{1}_A(n) = 0$, caso contrário. Mostramos, no parágrafo anterior, que $f(\mathbb{1}_A) = 1$ ou $f(\mathbb{1}_A) = 0$, para todo $A \subseteq \mathbb{N}$. Definimos

$$\mathcal{U} := \{A \subseteq \mathbb{N} : f(\mathbb{1}_A) = 1\}.$$

Temos

- Se A é subconjunto de $\mathbb{N}$ então $A \in \mathcal{U}$ se, e somente se, $\mathbb{N} \setminus A \notin \mathcal{U}$ (pois $\mathbb{1}_A \mathbb{1}_{\mathbb{N}\setminus A} = 0$) ,
- $\varnothing \notin \mathcal{U}$ (pois $\mathbb{N} \in \mathcal{U}$) ;
- Se $A, B \in \mathcal{U}$ então $A \cap B \in \mathcal{U}$ (pois $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$) ;
- Se $A \in \mathcal{U}$ e $A \subseteq B$ então $B \in \mathcal{U}$ (pois $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$),

logo $\mathcal{U}$ é ultrafiltro.

Seja $x = (x_n) \in \ell_\infty$. Como x é limitada, existe um compacto K tal que $x_n \in K$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Fixado $n \in \mathbb{N}$, iremos obter uma cobertura de K por conjuntos disjuntos com diâmetro menor ou igual a $\frac{1}{n}$. Como K é compacto, existem $a_1^{(n)}, \ldots, a_{k_n}^{(n)}$ tais que

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{k_n} B_{\frac{1}{2n}}(a_i^{(n)}).$$

Assim, cada ponto de K dista menos de $\frac{1}{2n}$ de algum $a_i^{(n)}$. Agora definimos, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
B_1^{(n)} &:= B_{\frac{1}{n}}(a_1^{(n)}),\\
B_2^{(n)} &:= B_{\frac{1}{n}}(a_2^{(n)}) \setminus B_1^{(n)},\\
&\vdots\\
B_{k_n}^{(n)} &:= B_{\frac{1}{n}}(a_{k_n}^{(n)}) \setminus \left(B_1^{(n)} \cup \dots \cup B_{k_n-1}^{(n)}\right).
\end{aligned}$$

Assim, $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{k_n} B_i^{(n)}$ e $B_i^{(n)} \cap B_j^{(n)} = \varnothing$, se $i \neq j$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que os conjuntos $B_i^{(n)}, i = 1, \dots, k_n$, são todos não-vazios.

Sejam $b_i^{(n)} \in B_i^{(n)}$ e

$$\widetilde{B}_i^{(n)} := x^{-1}(B_i^{(n)}) = \left\{m \in \mathbb{N} : x_m \in B_i^{(n)}\right\}, \qquad i = 1, \dots, k_n\,,$$

para cada $n \in \mathbb{N}$ e $1 \leq i \leq k_n$. Os conjuntos $\widetilde{B}_1^{(n)}, \dots, \widetilde{B}_{k_n}^{(n)}$ formam uma partição de $\mathbb{N}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Definimos

$$y^{(n)} := \sum_{i=j}^{k_n} b_j^{(n)} \mathbb{1}_{\widetilde{B}_j^{(n)}}, \qquad n = 1, 2, \dots$$

Assim, $\|y^{(n)} - x\| \to 0$. Como f é contínua, temos $f(y^{(n)}) \to f(x)$. A seguir, mostraremos que $f(x)$ é o limite ao longo de um ultrafiltro.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, como $\mathcal{U}$ é um ultrafiltro, existe um único $1 \leq j(n) \leq k_n$ tal que $\widetilde{B}_{j(n)}^{(n)} \in \mathcal{U}$. Temos

$$\begin{aligned}
f(y^{(n)}) &= f\left(\sum_{i=1}^{k_n} b_j^{(n)} \mathbb{1}_{\widetilde{B}_i^{(n)}}\right)\\
&= \sum_{i=1}^{k_n} b_j^{(n)} f\left(\mathbb{1}_{\widetilde{B}_i^{(n)}}\right) = b_{j(n)}^{(n)}\,.
\end{aligned}$$

Agora, seja $\varepsilon > 0$. Escolhendo n suficiente grande, temos $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$ e

$$\left|f(y^{(n)}) - f(x)\right| = \left|b_{j(n)}^{(n)} - f(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Logo

$$m \in \widetilde{B}_{j(n)}^{(n)} \Longrightarrow |x_m - f(x)| \leq \left|x_m - b_{j(n)}^{(n)}\right| + \left|b_{j(n)}^{(n)} - f(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

Isto mostra que $x\left(\widetilde{B}^{(n)}_{j(n)}\right) \subseteq B_\varepsilon(f(x))$. Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, isto mostra que

$$f(x) = \lim_{\mathcal{U}} x\,. \qquad \blacksquare$$

Finalmente, na próxima proposição, apresentamos um funcional linear multiplicativo em ℓ_∞^*. A hipótese do ultrafiltro ser livre torna a demonstração das propriedades básicas análogas às dos resultados correspondentes sobre sequências de números reais. Além disso, ela garante que o funcional linear obtido é uma extensão do funcional $(x_n) \mapsto \lim_{n\to\infty} x_n$ definido no subespaço das sequências convergentes.

Proposição 1.36. *Seja $\mathcal{F}$ um ultrafiltro livre em $\mathbb{N}$. Então a função $f\colon \ell_\infty \to \mathbb{K}$ dada por $f(x) = \lim_{\mathcal{F}} x$ é um funcional linear multiplicativo (i.e., se $x, y \in \ell_\infty$ então $f(xy) = f(x)f(y)$) de norma 1 tal que $f(x) = \lim_{n\to\infty} x_n$, para toda sequência convergente $x\colon \mathbb{N} \to \mathbb{K}$.*

Demonstração. Observamos, primeiramente, que f está bem definida. De fato, se $(x_n) \in \ell_\infty$ então todos os elementos da sequência (x_n) pertencem a um compacto e basta aplicar a Proposição 1.34. Agora, fixemos $\lambda \in \mathbb{K}$ e $(x_n), (y_n) \in \ell_\infty$. Então, temos

(i) $\lim_{\mathcal{F}}(x + y) = \lim_{\mathcal{F}} x + \lim_{\mathcal{F}} y$;

(ii) $\lim_{\mathcal{F}} \lambda x = \lambda \lim_{\mathcal{F}} x$;

(iii) $\lim_{\mathcal{F}} xy = \left(\lim_{\mathcal{F}} x\right)\left(\lim_{\mathcal{F}} y\right)$;

(iv) Se (x_n) é convergente então $\lim_{\mathcal{F}} x = \lim_{n\to\infty} x_n$;

(v) f é contínua e $\|f\| = 1$.

Como F contém todos os subconjuntos cofinitos de $\mathbb{N}$, as demonstrações de (i), (ii) e (iii) são inteiramente análogas às dos resultados correspondentes sobre sequências de números reais. O item (iv) é imediato. A Proposição 1.34 nos diz que $\lim_{\mathcal{F}} x$ pertence ao fecho do conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, logo, se $\|(x_n)\| \le 1$, temos que $\left|\lim_{\mathcal{F}} x\right| \le 1$ – e segue o item (v). $\blacksquare$

1.2 Subespaços complementados em espaços de Banach

Seja X um espaço normado. Um subespaço Z de X é dito *complementado* se ele é fechado e existe um subespaço fechado W de X tal que X é soma direta interna de W e Z. Se X é um espaço de Banach então Z é complementado se, e somente se, existe uma transformação linear contínua $P: X \to X$ tal que $\operatorname{Im} P = Z$ e $P^2 = P$. Uma tal função P é uma *projeção* de X sobre Z. Equivalentemente, P é projeção de X sobre Z se $\operatorname{Im} P = Z$ e $Pz = z$, para todo $z \in Z$. Se $\|P\| \leq K$ então dizemos que Z é *K-complementado* em X. Se X, Y são espaços normados e X é isomorfo a um subespaço complementado de Y dizemos que X é *complementado em Y*, e escrevemos $X \overset{c}{\hookrightarrow} Y$.

Proposição 1.37. *Se X é um espaço de Banach então todo subespaço de X de dimensão finita é complementado.*

Demonstração. Sejam Y um subespaço de dimensão finita de X e $\{y_1, \ldots, y_n\}$ uma base de Y. Para cada $1 \leq k \leq n$, definimos $f_k: Y \to \mathbb{K}$ por $f_k(\sum_{i=1}^n a_i y_i) = a_k$. Estendendo cada f_k, por Hahn–Banach , obtemos $\tilde{f}_k$ definido em todo o espaço X. Então é imediato que $P: X \to X$ dada por $P(x) = \sum_{i=1}^n \tilde{f}_i(x) y_i$ é uma projeção sobre Y. ∎

Proposição 1.38. *Sejam X, X_1, Y, Y_1, Z espaços de Banach. Então*

(i) *Se $X \overset{c}{\hookrightarrow} Y$ e $Y \overset{c}{\hookrightarrow} Z$ então $X \overset{c}{\hookrightarrow} Z$.*

(ii) *Se $X \overset{c}{\hookrightarrow} Y$, $X \approx X_1$ e $Y \approx Y_1$ então $X_1 \overset{c}{\hookrightarrow} Y_1$.*
Em particular, se $X \overset{c}{\hookrightarrow} Y$ e $Y \approx Z$ então $X \overset{c}{\hookrightarrow} Z$.

(iii) *Se $X \overset{c}{\hookrightarrow} Y$ então $X^* \overset{c}{\hookrightarrow} Y^*$.*

Demonstração. Para provar (i), basta notar que, se $T_1: X \to Y$, $T_2: Y \to Z$ são isomorfismos sobre suas respectivas imagens, $P_1: Y \to Y$ é projeção sobre $T_1(X)$ e $P_2: Z \to Z$ é projeção sobre $T_2(Y)$ então $T_2 \circ T_1: X \to Z$ é isomorfismo sobre sua imagem e

$$T_2 \circ P_1 \circ T_2^{-1} \circ P_2: Z \to Z$$

é projeção sobre $T_2 \circ T_1(X)$.

Quanto ao item (ii), este segue do item (i). De fato, como $Y \approx Y_1$, temos trivialmente que $Y \overset{c}{\hookrightarrow} Y_1$. Assim, pelo item (i), temos que $X \overset{c}{\hookrightarrow} Y_1$. Como $X_1 \approx X$, aplicando novamente o resultado do item (i) temos $X_1 \overset{c}{\hookrightarrow} Y_1$.

Agora, o item (iii). Sejam $T: X \to Y$ um isomorfismo sobre sua imagem e $P: Y \to Y$ projeção sobre $\operatorname{Im} T$. Definimos

$$\begin{aligned} \varphi: X^* &\longrightarrow Y^* \\ f &\longmapsto f \circ T^{-1} \circ P\,. \end{aligned}$$

Então φ é contínua, pois $\varphi = (T^{-1} \circ P)^*$. Para ver que φ é isomorfismo sobre sua imagem basta notar que, sendo $U: \operatorname{Im} \varphi \to X^*$ dada por $U(g) = g \circ T$, temos que U é contínua, uma vez que $U = T^*|_{\operatorname{Im}\varphi}$, e

$$U(\varphi(f)) = f \circ T^{-1} \circ P \circ T = f \circ T^{-1} \circ T = f, \qquad \forall f \in X^*.$$

Para mostrar que $\operatorname{Im} \varphi$ é complementado em Y^*, definimos

$$\begin{aligned} Q: Y^* &\longrightarrow Y^* \\ g &\longmapsto \varphi(g \circ T)\,. \end{aligned}$$

Q é contínua, pois $Q = \varphi \circ T^*$. É claro que $\operatorname{Im} Q \subset \operatorname{Im} \varphi$, e temos também

$$g \in \operatorname{Im} \varphi \Rightarrow Q(g) = \varphi(g \circ T) = \varphi(U(g)) = g\,.$$

Portanto $\operatorname{Im} Q = \operatorname{Im} \varphi$ e assim Q é projeçao sobre $\operatorname{Im} \varphi$. ∎

Proposição 1.39. *Se X é um espaço de Banach então $X^* \overset{c}{\hookrightarrow} X^{***}$.*

Demonstração. Ver [4], página 20, Teorema 2.2. ∎

Proposição 1.40. *Sejam X, Y espaços de Banach e $T: X \to Y$ isomorfismo. Se X_1 é subespaço complementado de X então $T(X_1)$ é subespaço complementado de Y.*

Demonstração. Ver [13], página 138, Fato 5.4. ∎

Proposição 1.41. *Se X é um espaço normado então X^* não contém um subespaço complementado isomorfo à c_0, ou seja, c_0 não é complementado em nenhum espaço dual.*

Demonstração. Ver [2], página 250, Corolário 4. ■

Seja X um espaço de Banach. Se todo subespaço complementado de dimensão infinita de X é isomorfo à X dizemos que X é *primo*.

Proposição 1.42. *Os espaços c_0 e ℓ_p, $1 \leq p \leq \infty$, são primos.*

Demonstração. Ver [18], página 54, Teorema 2.a.3, e página 57, Teorema 2.a.7. ■

Agora apresentaremos brevemente a definição de *espaços de Bochner*, pois o conceito é necessário para enunciarmos a próxima proposição. Trata-se de uma generalização do espaço das funções Lebesgue integráveis, como veremos a seguir.

Sejam (Ω, Σ, μ) um espaço de medida e X um espaço de Banach. Uma *função simples* é uma soma finita da forma

$$s(x) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{E_i}(x) x_i,$$

sendo $E_1, \dots, E_n$ membros disjuntos de uma σ-álgebra Σ e $x_1, \dots, x_n$ elementos distintos de X. Dado $E \subseteq \Omega$, a função $\mathbb{1}_E : \Omega \to \mathbb{K}$ é chamada de *função característica* de E e é dada por $\mathbb{1}_E(x) = 1$, se $x \in E$, e $\mathbb{1}_E(x) = 0$, se $x \notin E$. Se $\mu(E_i)$ é finito sempre que $x_i \neq 0$ então dizemos que a função simples s é *Bochner-integrável* e sua *integral de Bochner* é definida por

$$\int_{\Omega} \left[\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{E_i}(x) x_i \right] \mathrm{d}\mu := \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i) x_i.$$

Uma função mensurável $f : \Omega \to X$ é *Bochner-integrável* se existe uma sequência (s_n) de funções simples integráveis tais que

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\Omega} \| s_n - f \| \, \mathrm{d}\mu = 0,$$

sendo a integral do lado esquerdo da equação acima a integral de Lebesgue. Nesse caso, para cada $E \subseteq \Omega$, a *integral de Bochner* $\int_E f \, \mathrm{d}\mu$ é definida por $\int_E f \, \mathrm{d}\mu := \lim_{n \to \infty} \int_E s_n \, \mathrm{d}\mu$.

Definimos agora os *espaços de Bochner*. Sejam $1 \leq p < \infty$, (Ω, Σ, μ) um espaço de medida e X um espaço de Banach X. Denotamos por $L_p(\mu, X)$ o conjunto das classes de equivalência

$[f]$ de funções mensuráveis $f: \Omega \to X$ tais que

$$\|[f]\|_p := \left(\int_\Omega \|f\|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Munido da norma $\|\cdot\|_p$ acima, o espaço $L_p(\mu, X)$ é um espaço de Banach.

Teorema 1.43. *Se $1 < p < \infty$ e X é um espaço de Banach então o espaço de Bochner $L_p(\mu, X)$ contém uma cópia complementada de ℓ_1 se, e somente se, X contém uma cópia complementada de ℓ_1.*

Demonstração. Ver [6], página 77, Teorema 4.1.2. ∎

1.3 Alguns resultados da teoria local de espaços de Banach

Nesta seção apresentamos alguns resultados da teoria local de espaços de Banach. Por "teoria local" nos referimos à resultados, sobre espaços de Banach de dimensão infinita, envolvendo espaços de dimensão finita ou uma quantidade finita de vetores.

Iremos introduzir agora os conceitos de *tipo* e *cotipo* de um espaço de Banach. Observamos que, em particular, as contantes tipo 2 e cotipo 2 de um espaço de Banach medem o "quão longe" ele está de ser um espaço de Hilbert. A definição se baseia no resultado que lembramos a seguir. Um espaço de Banach X é um espaço de Hilbert se, e somente se, ele satisfaz a identidade do paralelogramo

$$\frac{\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2}{2} = \|x\|^2 + \|y\|^2,$$

para todos $x, y \in X$.

A identidade do paralegramo, como vemos acima, é uma igualdade entre a média dos valores $\|x+y\|^2$, $\|x-y\|^2$ e a soma entre $\|x\|^2$ e $\|y\|^2$. Para definirmos as constantes tipo 2 e cotipo 2 de X tomamos $x_1, \ldots, x_n$ quaisquer em X e comparamos a soma entre $\|x_1\|^2, \ldots, \|x_n\|^2$ com a média dos valores $\|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i\|^2$ obtidos para cada uma das 2^n possíveis escolhas dos n sinais $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}$. Concretamente, e de modo mais geral, temos a seguinte

Definição 1.44. Sejam X um espaço de Banach e p, q tais que $1 \leq p \leq 2 \leq q \leq \infty$. Dizemos que X tem *tipo* p se existe $C < \infty$ tal que, para quaisquer $x_1, \ldots, x_n \in X$,

$$\left(\frac{\sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i\|^p}{2^n} \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

A menor constante C que satisfaz a inequação acima é chamada de *constante tipo* p de X. Dizemos que X tem *cotipo* q se existe $C < \infty$ tal que, para quaisquer $x_1, \ldots, x_n \in X$,

$$\left(\frac{\sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i\|^q}{2^n} \right)^{\frac{1}{q}} \geq C \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

sendo no caso $q = \infty$ a expressão $(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^q)^{\frac{1}{q}}$ é substituída por $\max_{1 \leq i \leq n} \|x_i\|$. A menor constante C que satisfaz a inequação acima é chamada de *constante cotipo* q de X.

É comum expressarmos a média que aparece na definição de tipo e cotipo por meio das *funções de Rademacher* $r_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, que são dadas por $r_n(t) = \operatorname{sgn}(\sin(2^n \pi t))$, uma vez que , se $x_1, \ldots, x_n \in X$, temos

$$\left(\frac{\sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i\|^r}{2^n} \right)^{\frac{1}{r}} = \left(\int_0^1 \left\| \sum_i^n r_i(t) x_i \right\|^r \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{r}}$$

para todo $1 \leq r < \infty$. Poderíamos ter utilizado qualquer uma dessas médias para definir tipo e cotipo, tendo em vista a *desigualdade de Kahane*, que lembramos a seguir.

Teorema 1.45 (Desigualdade de Kahane). *Sejam X um espaço de Banach e $1 \leq r < \infty$. Então existe $K_r > 0$ tal que, para quaisquer $x_1, \ldots, x_n \in X$,*

$$\int_0^1 \left\| \sum_i^n r_i(t) x_i \right\| \mathrm{d}t \leq \left(\int_0^1 \left\| \sum_i^n r_i(t) x_i \right\|^r \right)^{\frac{1}{r}} \mathrm{d}t \leq K_r \int_0^1 \left\| \sum_i^n r_i(t) x_i \right\| \mathrm{d}t.$$

Demonstração. Ver Teorema 1.e.13, página 74 de *Classical Banach Spaces II*, [18]. ∎

Todo espaço de Banach tem tipo 1 e cotipo infinito. De fato, sejam X um espaço de

Banach e $x_1, \ldots, x_n \in X$. Então, pela desigualdade triangular, temos

$$\left(\frac{\sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i\|}{2^n} \right) \leq \frac{2^n}{2^n} \sum_{i=1}^n \|x_i\| = \sum_{i=1}^n \|x_i\|,$$

o que mostra que X tem tipo 1. Mostraremos agora que X tem cotipo infinito. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $\|x_1\| = \max_{1 \leq i \leq n} \|x_i\|$. Agora observamos que, somando $\varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_n x_n$ para toda escolha de sinais $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$, mas fixando $\varepsilon_1 = 1$, obtemos $2^{n-1} x_1$. E escrevemos

$$\sum_{\substack{\varepsilon_1 = 1 \\ \varepsilon_i = \pm 1,\, 2 \leq i \leq n}} (\Sigma_{i=1}^n \varepsilon_i x_i) = 2^{n-1} x_1 .$$

Analogamente, se fixarmos $\varepsilon_1 = -1$ ao invés de $\varepsilon_1 = 1$ obtemos $-2^{n-1} x_1$ como soma, isto é,

$$\sum_{\substack{\varepsilon_1 = -1 \\ \varepsilon_i = \pm 1,\, 2 \leq i \leq n}} (\Sigma_{i=1}^n \varepsilon_i x_i) = -2^{n-1} x_1 .$$

Portanto, pela desigualdade triangular, temos

$$\begin{aligned}
2^n \|x_1\| &= \|2^{n-1} x_1 + 2^{n-1} x_1\| \\
&\leq \|2^{n-1} x_1\| + \|-2^{n-1} x_1\| \\
&= \left\| \sum_{\substack{\varepsilon_1 = 1 \\ \varepsilon_i = \pm 1,\, 2 \leq i \leq n}} (\Sigma_{i=1}^n \varepsilon_i x_i) \right\| + \left\| \sum_{\substack{\varepsilon_1 = -1 \\ \varepsilon_i = \pm 1,\, 2 \leq i \leq n}} (\Sigma_{i=1}^n \varepsilon_i x_i) \right\| \\
&\leq \sum_{\substack{\varepsilon_1 = 1 \\ \varepsilon_i = \pm 1,\, 2 \leq i \leq n}} \|\Sigma_{i=1}^n \varepsilon_i x_i\| + \sum_{\substack{\varepsilon_1 = -1 \\ \varepsilon_i = \pm 1,\, 2 \leq i \leq n}} \|\Sigma_{i=1}^n \varepsilon_i x_i\| \\
&= \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \|\Sigma_{i=1}^n \varepsilon_i x_i\| .
\end{aligned}$$

É imediato, da definição, que tipo e cotipo de um espaço de Banach são herdados por seus subespaços. Além disso, tipo e cotipo são preservados por isomorfismos.

Proposição 1.46. *O tipo de* ℓ_q *é* $\min\{2, q\}$ *e o cotipo de* ℓ_q *é* $\max\{2, q\}$, *para qualquer* $1 \leq q < \infty$.

Demonstração. Ver [15], página 152, Teorema IV.2.15. ∎

Na próxima seção provamos que c_0 e ℓ_∞ não tem cotipo finito (Proposição 2.17).

Teorema 1.47 (Princípio da Reflexividade Local). *Sejam X um espaço de Banach e $F \subseteq X^{**}$, $G \subseteq X^*$ subespaços tais que* $\dim F, \dim G < \infty$. *Então, dados $\varepsilon > 0$ e uma projeção $P: X^{**} \to X^{**}$ sobre F, existem uma transformação linear injetora $T: F \to X$ e uma projeção $P_0: X \to X$ sobre $T(F)$ tais que*

(1) $T|_{F\cap X} = \mathrm{Id}_{F\cap X}$ *(identificando os pontos de X com pontos de X^{**} por meio da imersão canônica)*

(2) $Tx^{**}(x^*) = x^*(x^{**})$, *para todo $x^{**} \in F$ e todo $x^* \in G$.*

(3) $\|T\|\|T^{-1}\| \leq 1 + \varepsilon$, *e*

(4) $\|P_0\| \leq (1 + \varepsilon)\|P\|$.

Demonstração. Ver [23], página 196, Teorema II.5.1. ∎

1.4 Bases de Schauder em espaços de Banach

No que segue, revisaremos alguns resultados e definições relacionados à *bases de Schauder* em espaços de Banach.

Dado X um espaço de Banach, dizemos que uma sequência (x_n) é uma *base de Schauder* de X se, para cada cada $x \in X$, existem únicos escalares $a_1, a_2, \ldots$ tais que $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$. Uma condição necessária para que um espaço de Banach X tenha base de Schauder é que X seja separável. Assim, ℓ_∞ é um exemplo de espaço de Banach que não tem base de Schauder, uma vez que ℓ_∞ não é separável.

Os espaços c_0 e ℓ_p, $1 \leq p < \infty$, são exemplos de espaços que possuem base de Schauder. Todos estes espaços possuem como base em particular a sequência (e_n), sendo $e_1, e_2, e_3, \ldots$

dados por

$$\begin{aligned} e_1 &= (1,0,0,0,0,\ldots) \\ e_2 &= (0,1,0,0,0,\ldots) \\ e_3 &= (0,0,1,0,0,\ldots) \\ \vdots\ \ &\ \ \vdots \qquad\quad \vdots \end{aligned}$$

Esta sequência é chamada de *base canônica* destes espaços. Adotaremos como notação $(e_n^{\ell_p})$, $(e_n^{c_0})$ para nos referirmos explicitamente às bases canônicas dos espaços ℓ_p e c_0, respectivamente. Também iremos adotar como notação para as bases canônicas, não havendo risco de ambiguidade, simplesmente (e_n). Neste trabalho, o termo *base* sempre irá se referir à base de Schauder, salvo menção em contrário.

Proposição 1.48.

(i) *Sendo (e_n) a base canônica de ℓ_1, temos $e_n \overset{w}{\nrightarrow} 0$.*

(ii) *Sendo (e_n) a base canônica de ℓ_p, $1 < p < \infty$, temos $e_n \overset{w}{\to} 0$*

Demonstração. Para provar o item (i), basta lembrar que ℓ_1 é um espaço de Schur e raciocinar por absurdo.

Mostraremos o item (ii). Seja $f \in \ell_p^*$. Pela Proposição 1.15, existe um elemento (a_n) de ℓ_q, sendo q o conjugado de p, tal que $f\big((x_n)\big) = \sum_{i=1}^{\infty} a_n x_n$, para todo $(x_n) \in \ell_p$. Em particular, $f(e_n) = a_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo $f(e_n) = a_n \to 0$ e, pela Proposição 1.20, temos $e_n \overset{w}{\to} 0$. ∎

Dizemos que uma sequência (x_n) de elementos de um espaço de Banach X é uma *sequência básica* se (x_n) é base do fecho do espaço gerado por $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ (relembramos que *espaço gerado* por um conjunto é o subespaço composto por todas as combinações lineares finitas de elementos desse conjunto), que denotamos por $[x_n]$. Observamos que a condição $[x_n] = X$ não garante que (x_n) é uma base de X, entretanto, vale a seguinte

Proposição 1.49. *Uma sequência (x_n) de elementos de um espaço de Banach X é uma base de X se, e somente se,*

(i) *$x_n \neq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$;*

(ii) *existe $K > 0$ tal que*

$$\left\| \sum_{n=1}^{m_1} a_n x_n \right\| \leq K \left\| \sum_{n=1}^{m_2} a_n x_n \right\|,$$

para quaisquer $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$, $m_1 \leq m_2$, e $a_1, \ldots, a_{m_2} \in \mathbb{K}$; e

(iii) $[x_n] = X$.

Demonstração. Ver [19], página 358, Proposição 4.1.24. ∎

Dada uma base (x_n) de um espaço de Banach X, o menor $K > 0$ como na proposição anterior é a *constante da base* (x_n).

Proposição 1.50. *Sejam X, Y espaços de Banach, $T: X \to Y$ um isomorfismo e (x_n) uma sequência básica de elementos de X. Então $T|_{[x_n]}$ é um isomorfismo sobre $[Tx_n]$.*

Demonstração. Pela Proposição 1.8, basta que $T([x_n]) = [Tx_n]$. Vamos mostrar que $[Tx_n] \subseteq T([x_n])$ – a outra inclusão é trivial.

Seja $w \in [Tx_n]$. Então existe uma sequência (y_n) tal que $Ty_n \to w$ e cada y_n é combinação linear (finita) de elementos do conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Como T é sobrejetora, existe $x \in X$ tal que $Tx = w$. Assim, temos $Ty_n \to Tx$, de modo que, como T é isomorfismo, temos $y_n \to x$. Logo $x \in [x_n]$ e portanto $w = Tx \in T([x_n])$. ∎

Dizemos que uma sequência (x_n) em um espaço de Banach X é *fracamente Cauchy* se $(f(x_n))$ é de Cauchy para todo $f \in X^*$. A proposição seguinte nos diz que em um espaço de Schur as sequências fracamente Cauchy coincidem com as sequências fracamente convergentes.

Proposição 1.51. *Seja X um espaço de Schur. Então toda sequência fracamente Cauchy em X é convergente.*

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que existe uma sequência (x_n) em X que é fracamente Cauchy mas não é convergente. Logo existe $\varepsilon > 0$ tal que, para todo $m \in \mathbb{N}$, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que $m < n_1 < n_2$ e $\|x_{n_1} - x_{n_2}\| \geq \varepsilon$. Escolhemos naturais $n_1 < n_2 < \cdots$ tais que

$$\|x_{n_{2k-1}} - x_{n_{2k}}\| \geq \varepsilon, \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Como (x_n) é fracamente Cauchy, temos, para todo $f \in X^*$, $f(x_{n_{2k-1}} - x_{n_{2k}}) \xrightarrow{k\to\infty} 0$. Assim, como X é um espaço de Schur, temos

$$\|x_{n_{2k-1}} - x_{n_{2k}}\| \longrightarrow 0,$$

e chegamos a um absurdo. ∎

Teorema 1.52 (Rosenthal). *Seja (x_n) uma sequência limitada em um espaço de Banach de dimensão infinita X. Então ou*

(i) *(x_n) tem uma subsequência fracamente Cauchy, ou*

(ii) *(x_n) tem uma subsequência básica que é equivalente à base canônica de ℓ_1.*

Demonstração. Ver [1], página 252, Teorema 10.2.1. ∎

Duas sequências básicas $(x_n), (y_n)$ em espaços de Banach X, Y, respectivamente, são *equivalentes* quando, para qualquer sequência de escalares (a_n), a série $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ é convergente se, e somente se, $\sum_{i=1}^{\infty} a_i y_i$ é convergente. Para indicarmos que (x_n) e (y_n) são equivalentes escrevemos $(x_n) \sim (y_n)$. Se $(x_n) \sim (e_n^{\ell_p})$, $1 \le p < \infty$, dizemos que (x_n) é uma *ℓ_p-sequência.* Analogamente, se $(x_n) \sim (e_n^{c_0})$, dizemos que (x_n) é uma *c_0-sequência.*

Proposição 1.53. *Sejam (x_n) uma sequência básica em um espaço de Banach X e (y_n) uma sequência de elementos de um espaço de Y. São equivalentes:*

(i) *(y_n) é uma sequência básica equivalente à (x_n).*

(ii) *Existe $T: [x_n] \to [y_n]$ isomorfismo tal que $Tx_i = y_i$, para todo $i \in \mathbb{N}$*

(iii) *Existem $M, N > 0$ tais que, para quaisquer $a_1, a_2, \ldots, a_m \in \mathbb{K}$, tem-se*

$$M\left\|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\right\| \le \left\|\sum_{i=1}^{m} a_i y_i\right\| \le N\left\|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\right\|.$$

Demonstração. Ver [13], página 170, Fato 6.17. ∎

Seja X um espaço de Banach com base (x_n). Dizemos que uma sequência (u_n) de elementos de X é uma *sequência básica de blocos* com respeito à (x_n) se $u_n \neq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e existem naturais $p_1 < p_2 < \cdots$ e uma sequência de escalares (a_n) tais que

$$u_k = \sum_{i=p_k}^{p_{k+1}-1} a_i x_i, \qquad k = 1, 2, \ldots .$$

Por exemplo, se (x_n) é base de um espaço de Banach X então qualquer subsequência (x_{n_k}) de (x_n) é uma sequência básica de blocos. Toda sequência básica de blocos é uma sequência básica.

Proposição 1.54 (O Princípio de Seleção de Bessaga–Pełczyński). *Sejam X espaço de Banach e (x_n) base de X. Se (y_n) é uma sequência de elementos de X, com $y_n = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(n)} x_i$ para cada $n \in \mathbb{N}$, tal que $\|y_n\| \not\to 0$ e $a_i^{(n)} \xrightarrow{n\to\infty} 0$, para todo $i \in \mathbb{N}$, então existe uma subsequência básica (y_{n_k}) de (y_n) que é equivalente a uma sequência básica de blocos de (x_n).*

Demonstração. Ver [19], página 397, Proposição 4.3.19. ∎

Proposição 1.55 (Princípio das Pequenas Perturbações). *Sejam X um espaço de Banach e (x_n) uma sequência básica de elementos de X com constante K, satisfazendo $\|x_n\| \geq 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Se (y_n) é uma sequência em X tal que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n - y_n\| < \frac{1}{2K}$$

então (y_n) é sequência básica e $(y_n) \sim (x_n)$. Se, ademais, $[x_n]$ é complementado, então $[y_n]$ também é complementado.

Demonstração. Ver [1], página 13, Teorema 1.3.9. ∎

Corolário 1.56. *Sejam X um espaço de Banach e (x_n) uma sequência básica em X tal que $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| > 0$. Se (y_n) é uma sequência em X tal que $\|y_n - x_n\| \to 0$ então existe uma subsequência (y_{n_k}) de (y_n) tal que (y_{n_k}) é sequência básica e $(x_{n_k}) \sim (y_{n_k})$.*

Demonstração. Sejam $L := \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| > 0$ e K a constante de (x_n). Como $\|x_n - y_n\| \to 0$, podemos escolher naturais $n_1 < n_2 < \cdots$ tais que

$$\|x_{n_j} - y_{n_j}\| < \left(1/2^j\right) \frac{L}{3K}, \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Logo, sendo $\widetilde{K}$ a constante de $\left(\frac{x_{n_j}}{L}\right)$, temos $\widetilde{K} \leq K$, e assim

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left\| \frac{x_{n_j}}{L} - \frac{y_{n_j}}{L} \right\| \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} 1/2^j \right) \frac{1}{3K} = \frac{1}{3K} < \frac{1}{2K} \leq \frac{1}{2\widetilde{K}}.$$

Como $\left\|\frac{x_{n_j}}{L}\right\| \geq 1$, para todo $j \in \mathbb{N}$, temos, pelo Princípio das Pequenas Perturbações (Teorema 1.55), que $\left(\frac{y_{n_j}}{L}\right)$ é sequência básica e $\left(\frac{x_{n_j}}{L}\right) \sim \left(\frac{y_{n_j}}{L}\right)$. Portanto

$$(x_{n_j}) \sim \left(\frac{x_{n_j}}{L}\right) \sim \left(\frac{y_{n_j}}{L}\right) \sim (y_{n_j}).$$ ■

Proposição 1.57. *Sejam X, Y espaços de Banach e $T: X \to Y$ uma transformação linear contínua. Se T leva uma ℓ_p-sequência em uma ℓ_q-sequência, sendo $1 \leq p, q < \infty$, então $q \geq p$.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequênca básica em X tal que $(x_n) \sim (e_n^{\ell_p})$ e $(Tx_n) \sim (e_n^{\ell_q})$. Pela Proposição 1.53 , existem $M, N > 0$ tais que, quaisquer que sejam $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^{m} a_i e_i^{\ell_q} \right\| &\leq N \left\| \sum_{i=1}^{m} a_i T x_i \right\| \leq N\|T\| \left\| \sum_{i=1}^{m} a_i x_i \right\| \\ &\leq MN\|T\| \left\| \sum_{i=1}^{m} a_i e_i^{\ell_p} \right\|. \end{aligned}$$

Em particular, temos $m^{1/q} \leq MN\|T\| m^{1/p}$, para todo $m \in \mathbb{N}$, logo

$$m^{1/q - 1/p} \leq MN\|T\|, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Assim, se $q < p$, chegamos a uma contradição, pois, como $1/q - 1/p > 0$, $m^{1/q-1/p} \xrightarrow{m \to \infty} \infty$. Portanto $q \geq p$. ■

Corolário 1.58. *Sejam $1 \leq p, q < \infty$. Então $(e_n^{\ell_p}) \sim (e_n^{\ell_q})$ se, e somente se, $p = q$.*

Demonstração. Se $(e_n^{\ell_p}) \sim (e_n^{\ell_q})$, então, pela Proposição 1.53, existe $T: \ell_p \to \ell_q$ isomorfismo tal que $T(e_n^{\ell_p}) = e_n^{\ell_q}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, pela Proposição 1.57 temos $q \geq p$ e $p \geq q$, isto é, $p = q$. ■

Dizemos que uma sequência (x_n) de elementos de um espaço normado X é *seminormalizada* se existem $M, N > 0$ tais que $M \leq \|x_n\| \leq N$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Proposição 1.59. *Seja (u_n) uma sequência básica de blocos seminormalizada sobre a base canônica de X, sendo $X = c_0$ ou $X = \ell_p$, com $1 \leq p \leq \infty$. Então (u_n) é equivalente à base canônica de X.*

Demonstração. Ver [1], página 29, Lema 2.1.1, e também página 31, comentário 2.1.2. ∎

Proposição 1.60. *Se $1 \leq p, r < \infty$, com $p \neq r$, então $\ell_p \not\hookrightarrow \ell_r$.*

Demonstração. Seja $p = 1$. O espaço ℓ_1 não é reflexivo. Por sua vez, o espaço ℓ_r é reflexivo, para todo ℓ_r com $1 < r < \infty$. Como todo subespaço fechado de um espaço reflexivo é reflexivo, é imediato que ℓ_1 não pode ser isomorfo à um subespaço de ℓ_r.

Seja $1 < p < \infty$. Suponhamos, por absurdo, que existe $T\colon \ell_p \to \operatorname{Im} T$ isomorfismo, com $\operatorname{Im} T$ subespaço fechado de ℓ_r. Observamos, primeiramente, que $T(e_n^{\ell_p}) \not\to 0$. De fato, se $T(e_n^{\ell_p}) \to 0$, então

$$0 \leq \left\|e_n^{\ell_p}\right\| = \left\|T^{-1}(T(e_n^{\ell_p}))\right\| \leq \left\|T^{-1}\right\| \left\|T(e_n^{\ell_p})\right\| \longrightarrow 0.$$

Logo $\left\|e_n^{\ell_p}\right\| \to 0$, o que é uma contradição. Sendo, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$T(e_n^{\ell_p}) = (a_i^{(n)})_{i \in \mathbb{N}} = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(n)} e_i^{\ell_r},$$

provaremos a seguir que, fixado $k \in \mathbb{N}$, tem-se $a_k^{(n)} \xrightarrow{n \to \infty} 0$.

Seja $k \in \mathbb{N}$. Queremos provar que, sendo $f_k \in \ell_r^*$ o funcional linear dado por

$$\begin{aligned} f_k\colon \quad \ell_r \quad &\longrightarrow \mathbb{K} \\ \textstyle\sum_{i=1}^{\infty} b_i e_i^{\ell_r} &\longmapsto b_k, \end{aligned}$$

tem-se $f_k(Te_n^{\ell_p}) = a_k^{(n)} \xrightarrow{n \to \infty} 0$. Oras, sabemos que $e_n^{\ell_p} \xrightarrow{w} 0$ (aqui que nos utilizamos da hipótese $p \neq 1$); portanto, como $f_k \circ T \in \ell_p^*$, temos

$$a_k^{(n)} = f_k(Te_n^{\ell_p}) = (f_k \circ T)(e_n^{\ell_p}) \xrightarrow{n \to \infty} 0.$$

Agora, como $T(e_n^{\ell_p}) \nrightarrow 0$ e $a_k^{(n)} \xrightarrow{n\to\infty} 0$, para todo $k \in \mathbb{N}$, pela Proposição 1.54, existem uma subsequência básica $(Te_{n_k}^{\ell_p})$ de $(Te_n^{\ell_p})$ e uma sequência básica de blocos (u_k) de $(e_k^{\ell_r})$ tais que $(Te_{n_k}^{\ell_p}) \sim (u_k)$. Pela Proposição 1.59, temos que $(u_k) \sim (e_k^{\ell_r})$ e $(e_{n_k}^{\ell_p}) \sim (e_k^{\ell_p})$. Além disso, como T é isomorfismo sobre sua imagem, temos $(e_k^{\ell_p}) \sim (Te_k^{\ell_p})$, e daí também temos que $(e_{n_k}^{\ell_p}) \sim (Te_{n_k}^{\ell_p})$ (Proposições 1.50 e 1.53). Resumindo em símbolos, temos

$$(e_k^{\ell_p}) \sim (e_{n_k}^{\ell_p}) \sim (Te_{n_k}^{\ell_p}) \sim (u_k) \sim (e_k^{\ell_r}).$$

Portanto $p = r$, contradizendo a hipótese. ∎

Seja (x_n) uma sequência de elementos de um espaço de Banach X. Dizemos que a série $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ é *incondicionalmente convergente* se a série $\sum_{i=1}^{\infty} x_{\pi(i)}$ é convergente para toda permutação (bijeção) $\pi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Em particular, uma série de números reais $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ é incondicionalmente convergente se, e somente se, a série $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$ é convergente. Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ uma série incondicionalmente convergente em um espaço de Banach X e $A \subseteq \mathbb{N}$. Se $A = \varnothing$ então $\sum\limits_{n\in A} x_n := 0$, caso contrário $\sum\limits_{n\in A} x_n := x_{n_1} + x_{n_2} + \cdots$, onde $n_1, n_2, \ldots$ é uma ordenação qualquer dos elementos de A.

Uma base (x_n) de um espaço de Banach X é *incondicional* se, para todo $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \in X$ a série $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ é incondicionalmente convergente. As bases canônicas dos espaços c_0 e ℓ_p, $1 \leq p < \infty$ são exemplos de bases incondicionais, e a proposição seguinte nos diz que, a menos de equivalência, essa é a única base normalizada e incondicional nos espaços c_0 e ℓ_1.

Proposição 1.61. *Toda base normalizada e incondicional em ℓ_1 (respectivamente, c_0) é equivalente à base canônica de ℓ_1 (respectivamente, c_0).*

Demonstração. Ver [1], página 215, Teorema 8.3.3. ∎

Uma base (x_n) de um espaço de Banach X é simétrica se (x_n) é equivalente a $(x_{\pi(n)})$ para toda permutação π de $\mathbb{N}$. As bases canônicas de ℓ_p e c_0 são exemplos de bases simétricas.

Proposição 1.62. *Uma base (x_n) de um espaço de Banach X é incondicional se, e somente se, existe uma constante $K \geq 1$ tal que, se $a_1, \ldots, a_N, b_1, \ldots, b_N$ são escalares tais que $|a_i| \leq |b_i|$,*

$i = 1, \ldots, N$, sendo N um natural qualquer, então

$$\left\| \sum_{i=1}^{N} a_i x_i \right\| \leq K \left\| \sum_{i=1}^{N} b_i x_i \right\| . \tag{1.1}$$

Demonstração. Ver [1], página 52, Teorema 3.1.3. ■

Se X é um espaço de Banach e (x_n) é uma base incondicional de X então a *constante de base incondicional* de (x_n) é a menor constante K que satisfaz (1.1).

Capítulo 2

Os espaços $\ell_p\big((X_n)\big)$ e $c_0\big((X_n)\big)$

Neste capítulo, estudaremos somas infinitas (enumeráveis) de espaços de Banach. Sejam $X_1, X_2, \ldots$ espaços normados. O espaço vetorial normado $\ell_p\big((X_n)\big)$, $1 \le p < \infty$, é o conjunto de todas as sequências p-somáveis (x_n) tais que $x_i \in X_i$, para todo $i \in \mathbb{N}$, munido das operações naturais e da norma $\|\cdot\|_{\ell_p} \colon (x_n) \mapsto (\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^p)^{\frac{1}{p}}$. Por *sequências p-somáveis* queremos dizer que as sequências são tais que $\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^p < \infty$. Os espaços $\ell_\infty\big((X_n)\big)$ e $c_0\big((X_n)\big)$ são definidos de forma análoga, trocando a propriedade "p-somável" por "limitada" e "convergente a zero", respectivamente, e adotando em ambos a norma $\|\cdot\|_{\ell_\infty} \colon (x_n) \mapsto \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|$. No caso em que $X_n = X$, para todo $n \in \mathbb{N}$, denotamos estes espaços simplesmente por $\ell_p(X)$ e $c_0(X)$. Também adotamos a notação $(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus X_n)_{\ell_p}$ para denotar $\ell_p\big((X_n)\big)$ e $(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus X_n)_{c_0}$ para $c_0\big((X_n)\big)$.

Proposição 2.1. *Os espaços $\ell_p\big((X_n)\big)$, $1 \le p \le \infty$, e $c_0\big((X_n)\big)$ são espaços de Banach se, e somente se, cada X_n é espaço de Banach.*

Demonstração. Suponhamos que cada X_n é espaço de Banach. Provaremos apenas que $\ell_p\big((X_n)\big)$ é espaço de Banach; no caso do espaço $c_0\big((X_n)\big)$ basta mostrar que $c_0\big((X_n)\big)$ é subespaço fechado de ℓ_∞.

Seja $(x^{(n)})$ uma sequência de Cauchy em $\ell_p\big((X_n)\big)$ com $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado $j \in \mathbb{N}$, vemos que $(x_j^{(n)})_n$ é de Cauchy, pois

$$\|x_j^{(n)} - x_j^{(m)}\| \le \|x^{(n)} - x^{(m)}\|_{\ell_p}, \qquad \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

Como cada X_n é Banach, podemos escolher $x_1 \in X_2$, $x_2 \in X_2, \ldots$ tais que $x_j^{(n)} \xrightarrow{n\to\infty} x_j$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Iremos mostrar que $x := (x_j) \in \ell_p\big((X_n)\big)$ e $x^{(n)} \longrightarrow x$.

Se $p = \infty$ então, fixando $j \in \mathbb{N}$, escolhemos $N \in \mathbb{N}$ dependendo de j tal que

$$\|x_j - x_j^{(N)}\| < 1\ .$$

Assim,

$$\|x_j\| \leq \|x_j - x_j^{(N)}\| + \|x_j^{(N)}\| < 1 + \|x^{(N)}\|_{\ell_\infty},$$

logo $x = (x_j) \in \ell_\infty\big((X_n)\big)$, uma vez que a sequência $(x^{(n)})$ é limitada. Agora mostraremos a convergência. Dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, se $m, n \geq N$, então

$$\|x_j^{(m)} - x_j^{(n)}\| < \frac{\varepsilon}{2}\,, \qquad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Desse modo, se $j \in \mathbb{N}$, tomando m_0 suficiente grande, temos, para $n \geq N$,

$$\|x_j - x_j^{(n)}\| \leq \|x_j - x_j^{(m_0)}\| + \|x_j^{(m_0)} - x_j^{(n)}\| < \varepsilon\ .$$

Portanto, como j é arbitrário, $\|x - x^{(n)}\|_{\ell_\infty} \leq \varepsilon$.

Suponhamos agora $1 \leq p < \infty$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{j=1}^{\infty}\|x_j^{(n)} - x_j^{(m)}\|^p < \varepsilon^p, \qquad \forall n, m \geq N\ .$$

Fixado $k \in \mathbb{N}$ temos $\sum_{j=1}^{k}\|x_j^{(n)} - x_j^{(m)}\|^p \leq \sum_{j=1}^{\infty}\|x_j^{(n)} - x_j^{(m)}\|^p$, e assim

$$\sum_{j=1}^{k}\|x_j^{(n)} - x_j^{(m)}\|^p < \varepsilon^p, \qquad \forall n, m \geq N\ .$$

Logo, fazendo $m \longrightarrow \infty$ para cada $n \geq N$, obtemos

$$\sum_{j=1}^{k}\|x_j^{(n)} - x_j\|^p < \varepsilon^p, \qquad \forall n \geq N\ . \tag{2.1}$$

Como k é arbitrário, temos, consequentemente, $\sum_{j=1}^{\infty}\|x_j^{(N)} - x_j\|^p < \infty$, e portanto $\big(\|x_j^{(N)} -$

$x_j\|)_j \in \ell_p$. Assim, uma vez que $\left(\|x_j^{(N)}\|\right)_j \in \ell_p$, temos que $\left(\|x_j^{(N)} - x_j\| + \|x_j^{(N)}\|\right)_j \in \ell_p$. Agora, notemos que, para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{j=1}^{k} \|x_j\|^p \leq \sum_{j=1}^{\infty} \left(\|x_j - x_j^{(N)}\| + \|x_j^{(N)}\|\right)^p .$$

Isto mostra que $x = (x_j) \in \ell_p\big((X_n)\big)$. Para ver que $x^{(n)} \longrightarrow x$ basta notar que isto decorre de (2.1).

A recíproca é imediata: se, digamos, X_1 não é espaço de Banach, então existe uma sequência (x_n) em X_1 que é de Cauchy e não é convergente, de onde segue que a sequência de termos

$$(x_1, 0, 0, \ldots),\ (x_2, 0, 0, \ldots), \ldots$$

é de Cauchy mas não é convergente nos espaços $\ell_p\big((X_n)\big)$, $1 \leq p \leq \infty$, e $c_0\big((X_n)\big)$. ■

Proposição 2.2. *Se $X_1, X_2, \ldots$ são um espaços normados separáveis então $c_0\big((X_n)\big)$ e $\ell_p\big((X_n)\big)$, para todo $1 \leq p < \infty$, são separáveis.*

Demonstração. Para simplificar a notação, iremos supor $X = X_1 = X_2 = \cdots$. Seja $D \subseteq X$ enumerável e denso em X. Sem perda de generalidade, podemos supor que $0 \in D$. Dizemos que uma sequência é *quase-nula* se somente um número de finito de termos da sequência é diferente de zero. Seja $Y \in \{c_0\} \cup \{\ell_p : 1 \leq p < \infty\}$. Definimos

$$\tilde{D} := \left\{ (x_n) \in \left(\sum_{i=1}^{\infty} \oplus X\right)_Y : (x_n) \text{ é quase-nula e } x_n \in D, \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \right\} .$$

Claramente, $\tilde{D}$ é um subconjunto enumerável de $(\sum_{i=1}^{\infty} \oplus X)_Y$. Sejam $\varepsilon > 0$ e $(a_n) \in (\sum_{i=1}^{\infty} \oplus X)_Y$. Tomamos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|(0, \ldots, 0, a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, \ldots)\|_Y < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Agora, escolhemos $x_1, \ldots, x_{n_0} \in D$ tais que

$$\|(a_1 - x_1, \ldots, a_{n_0} - x_{n_0}, 0, 0, \ldots)\|_Y < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Sendo $y := (x_1, \ldots, x_{n_0}, 0, 0, \ldots)$, temos $y \in \tilde{D}$ e

$$\begin{aligned}\|(a_n) - y\|_Y &\leq \|(a_1 - x_1, \ldots, a_{n_0} - x_{n_0}, 0, 0, \ldots)\|_Y + \|(0, \ldots, 0, a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, \ldots)\|_Y \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.\end{aligned}$$

Portanto $\tilde{D}$ é denso em $(\sum_{i=1}^{\infty} \oplus X)_Y$. ■

Proposição 2.3. *Sejam X, Y, Z espaços normados e $1 \leq p \leq \infty$.*

(i) *Se $X \approx Y$ então $\ell_p(X) \approx \ell_p(Y)$,*

(ii) *$\ell_p(X) \oplus X \approx \ell_p(X)$,*

(iii) *$X \oplus (Y \oplus Z) \approx (X \oplus Y) \oplus Z$.*

(iv) *$\ell_p(X \oplus Y) \approx \ell_p(X) \oplus \ell_p(Y)$.*

Demonstração. Faremos a demonstração para o caso $p \neq \infty$.

Para provar o item (i), basta observar que se φ é isomorfismo entre X, Y então $(x_n) \mapsto (\varphi(x_n))$ é isomorfismo entre $\ell_p(X)$ e $\ell_p(Y)$.

Para o item (ii), é imediato verificar que $\big((x_1, x_2, \ldots), x_0)\big) \mapsto (x_0, x_1, x_2, \ldots)$ é um isomorfismo isométrico entre $\ell_p(X) \oplus X$ e $\ell_p(X)$ considerando o espaço $\ell_p(X) \oplus X$ com a norma $(x_1, x_2) \mapsto (\|x_1\|^p + \|x_2\|^p)^{\frac{1}{p}}$.

O item (iii) também é imediato considerando a isometria $\big((x, y), z\big) \mapsto \big(x, (y, z)\big)$ e todos os espaços envolvidos que são soma entre espaços normados munidos com a norma da soma.

Considerando $X \oplus Y$ e $\ell_p(X) \oplus \ell_p(Y)$ com a norma $(x_1, x_2) \mapsto (\|x_1\|^p + \|x_2\|^p)^{\frac{1}{p}}$ é também imediato que $\big((x_n, y_n)\big) \mapsto \big((x_n), (y_n)\big)$ é um isomorfismo isométrico entre $\ell_p(X \oplus Y)$ e $\ell_p(X) \oplus \ell_p(Y)$, e isto prova o item (iv). ■

Sabemos que, se $X_1, X_2, \ldots$ são espaços normados e $1 \leq p \leq \infty$, então $\ell_p\Big(\ell_p\big((X_n)\big)\Big) \approx \ell_p\big((X_n)\big)$ e $c_0\Big(c_0\big((X_n)\big)\Big) \approx c_0\big((X_n)\big)$. Em particular, $\ell_p(\ell_p) = \ell_p$, $c_0(c_0) = c_0$, $\ell_p^2 = \ell_p$ e $c_0^2 = c_0$.

Relembramos que ℓ_1 é um espaço de Schur. A proposição seguinte nos diz que $\ell_1(X)$ é de Schur se, e somente se, X é de Schur. Mas, como apresentamos o resultado em forma geral, precisamos introduzir alguns conceitos. $(\sum_{i \in I} \oplus X_i)_{\ell_1}$ é o espaço das funções $i \mapsto x_i$ tais que $x_i \in X_i$ para todo $i \in I$ e $\sum_{i\in I}\|x_i\| < \infty$. A *soma não-ordenada* $\sum_{i\in I}\|x_i\|$ existe e é igual α se, dado $\varepsilon > 0$, existe F subconjunto finito de I tal que $\left|\sum_{j\in G}\|x_j\| - \alpha\right| < \varepsilon$, para todo G finito que contém F.

Proposição 2.4. *Seja $(X_i)_{i\in I}$ uma família de espaços de Banach. O espaço $(\sum_{i\in I}\oplus X_i)_{\ell_1}$ é de Schur se, e somente se, cada X_i é um espaço de Schur.*

Demonstração. Ver [21]. ∎

Proposição 2.5. *Se X é um espaço normado então $c_0(X)^*$ é isometricamente isomorfo à $\ell_1(X^*)$.*

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $\pi_n: X \to c_0(X)$ a transformação linear contínua dada por $\pi_n(x) = (0,\ldots,0,x,0,\ldots,0,\ldots)$, onde x ocupa a n-ésima posição. Dado $\varphi \in c_0(X)^*$, definimos $\varphi_n \in X^*$ por $\varphi_n := \varphi \circ \pi_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Provaremos que

$$\begin{aligned} T\colon c_0(X)^* &\longrightarrow \ell_1(X^*) \\ \varphi &\longmapsto (\varphi_n) \end{aligned}$$

é um isomorfismo isométrico.

Vamos verificar que T está bem definida. Seja $\varphi \in c_0(X)^*$. Fixemos agora $n \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon > 0$ quaisquer. Para cada $1 \le j \le n$, escolhemos $x_j \in X$ tal que $\|x_j\| = 1$ e

$$\varphi \circ \pi_j(x_j) \ge \|\varphi \circ \pi_j\| - \frac{\varepsilon}{n}.$$

Assim

$$\sum_{j=1}^{n}\|\varphi \circ \pi_j\| \le \sum_{j=1}^{n}\varphi \circ \pi_j(x_j) + \varepsilon = \varphi((x_1,\ldots,x_n,0,0,\ldots)) + \varepsilon \le \|\varphi\| + \varepsilon.$$

Como n é arbitrário temos $\sum_{j=1}^{\infty}\|\varphi \circ \pi_j\| \le \|\varphi\| + \varepsilon$. Isto mostra que T está bem definida, mas não só isso: como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, temos também

$$\sum_{j=1}^{\infty}\|\varphi_j\| \le \|\varphi\|. \tag{2.2}$$

É imediato que T é linear. Além disso,

$$\varphi((x_n)) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_n(x_n), \qquad \forall (x_n) \in c_0(X) .$$

Mostraremos agora que T é sobrejetora. Seja $(\varphi_n) \in \ell_1(X^*)$. Então, dado $(x_n) \in c_0(X)$, temos $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x_n) < \infty$, uma vez que esta série é absolutamente convergente. De fato, para cada $k \in \mathbb{N}$, temos

$$\left|\sum_{i=1}^{k} \varphi_i(x_i)\right| \le \sum_{i=1}^{k} |\varphi_i(x_i)| \le \|(\varphi_n)\|_{\ell_1} \|(x_n)\|_{\ell_\infty} . \tag{2.3}$$

Assim, sendo $\varphi \in c_0(X)^*$ dado por $(x_n) \overset{\varphi}{\mapsto} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x_n)$, temos que φ é uma transformação linear contínua com $T\varphi = (\varphi_n)$ e, por (2.3),

$$\|\varphi\| \le \|T\varphi\| . \tag{2.4}$$

Por (2.2) e (2.4) temos que T é isometria. ■

Proposição 2.6. *Se X é um espaço normado então $\ell_1(X)^*$ é isometricamente isomorfo à $\ell_\infty(X^*)$.*

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $\pi_n : X \to \ell_1(X)$ a transformação linear contínua dada por $\pi_n(x) = (0, \dots, 0, x, 0, \dots, 0, \dots)$, onde x ocupa a n-ésima posição. Dado $\varphi \in \ell_1(X)^*$, definimos $\varphi_n \in X^*$ por $\varphi_n := \varphi \circ \pi_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Provaremos que

$$\begin{aligned} T : \ell_1(X)^* &\longrightarrow \ell_\infty(X^*) \\ \varphi &\longmapsto (\varphi_n) \end{aligned}$$

é um isomorfismo isométrico.

Primeiramente iremos verificar que T está bem definida. Se $\varphi \in \ell_1(X)^*$ então

$$\|\varphi \circ \pi_n\| \le \|\varphi\| \|\pi_n\| = \|\varphi\| , \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Assim, T está bem definida pois

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|\varphi_n\| \le \|\varphi\| . \tag{2.5}$$

Claramente, T é linear e

$$\varphi((x_n)) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_n(x_n), \qquad \forall (x_n) \in \ell_1(X).$$

Mostraremos agora que T é sobrejetora. Se $(\varphi_n) \in \ell_\infty(X^*)$ então $\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x_i)$ converge, para toda sequência $(x_n) \in \ell_1(X)$. De fato, se $(x_n) \in \ell_1(X)$, então, para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$\left|\sum_{i=1}^{k} \varphi_i(x_i)\right| \le \sum_{i=1}^{k} |\varphi_i(x_i)| \le \sup_{j \in \mathbb{N}} \|\varphi_j\| \sum_{i=1}^{k} \|x_i\| \le \|(\varphi_n)\|_{\ell_\infty} \|(x_n)\|_{\ell_1}, \tag{2.6}$$

de modo que $\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x_i)$ é absolutamente convergente. É imediato verificar que a função $\varphi \in \ell_1(X)^*$ dada por $(x_n) \overset{\varphi}{\mapsto} \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x_i)$ satisfaz $T\varphi = (\varphi_n)$.

Como k é arbitrário em (2.6) temos, por (2.5) e (2.6), que T é isometria. ∎

Proposição 2.7. *Sejam $1 < p < \infty$ e X um espaço de Banach, $X \neq \{0\}$. Então $\ell_p(X)^*$ é isometricamente isomorfo à $\ell_q(X^*)$, sendo q o conjugado de p.*

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $\pi_n : X \to \ell_p(X)$ a transformação linear contínua dada por $\pi_n(x) = (0, \ldots, 0, x, 0, \ldots, 0, \ldots)$, onde x ocupa a n-ésima posição. Dado $\varphi \in \ell_p(X)^*$, definimos $\varphi_n := \varphi \circ \pi_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Provaremos que

$$\begin{aligned} T : \ell_p(X)^* &\longrightarrow \ell_q(X^*) \\ \varphi &\longmapsto (\varphi_n) \end{aligned}$$

é um isomorfismo isométrico.

Em primeiro lugar, precisamos mostrar que $(\varphi_n) \in \ell_q(X^*)$, para todo $\varphi \in \ell_p(X)$. Seja $\varphi \neq 0 \in \ell_p(X)^*$ e, para cada $n \in \mathbb{N}$, escolhemos $v_n \in X$ tal que $\varphi_n(v_n) \neq 0$ e $\|v_n\| = 1$. Agora, sejam

$$u_n := \frac{|\varphi_n(v_n)|^q}{\varphi_n(v_n)} v_n, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

e

$$w_n := (u_1, \ldots, u_n, 0, \ldots, 0, \ldots) \in \ell_p(X), \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Assim, temos, fixado $n \in \mathbb{N}$,

(1) $\sum_{i=1}^{n} |\varphi_i(v_i)|^q = \sum_{i=1}^{n} \varphi_n(u_n) = \varphi(w_n) \le \|\varphi\| \|w_n\|$;

(2)

$$\|w_n\| = \left[\sum_{i=1}^{n}\|u_i\|^p\right]^{\frac{1}{p}} = \left[\sum_{i=1}^{n}|\varphi_i(v_i)|^{(q-1)p}\right]^{\frac{1}{p}}$$
$$= \left[\sum_{i=1}^{n}|\varphi_i(v_i)|^q\right]^{\frac{1}{p}}.$$

De (1) e (2) segue que $[\sum_{i=1}^{n}|\varphi_i(v_i)|^q]^{1-\frac{1}{p}} \leq \|\varphi\|$. Sendo $1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{q}$, temos

$$\sum_{i=1}^{n}|\varphi_i(v_i)|^q \leq \|\varphi\|^q .$$

Da arbitrariedade de $v_1, \ldots, v_n$ segue que

$$\sum_{i=1}^{n}\|\varphi_i\|^q \leq \|\varphi\|^q . \tag{2.7}$$

Como a desigualdade acima não depende de n, temos $\sum_{i=1}^{\infty}\|\varphi_i\|^q < \infty$ – como queríamos.

É imediato que T é linear. Além disso,

$$\varphi((x_n)) = \sum_{i=1}^{\infty}\varphi_n(x_n), \qquad \forall (x_n) \in \ell_p(X) .$$

Mostraremos agora que T é sobrejetora. Seja $(\varphi_n) \in \ell_q(X^*)$. Então, dado $(x_n) \in \ell_p(X)$, temos $\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x_n) < \infty$, uma vez que esta série é absolutamente convergente. De fato, pela desigualdade de Hölder, temos, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$\left|\sum_{i=1}^{k}\varphi_i(x_i)\right| \leq \sum_{i=1}^{k}|\varphi_i(x_i)| \leq \|(\varphi_n)\|_{\ell_q}\|(x_n)\|_{\ell_p} .$$

Assim, sendo φ dada por $(x_n) \overset{\varphi}{\mapsto} \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x_n)$, temos que φ é contínua com $T\varphi = (\varphi_n)$ e

$$\|\varphi\| \leq \|T\varphi\| . \tag{2.8}$$

Por (2.7) e (2.8) temos que T é isometria. ∎

Os espaços $\ell_p(X)$ e $c_0(X)$ possuem subespaços triviais, listados na proposição seguinte.

Proposição 2.8. *Sejam X um espaço de Banach, $X \neq \{0\}$, e $1 \leq p \leq \infty$. Então*

(i) $X \overset{c}{\hookrightarrow} \ell_p(X)$, $X \overset{c}{\hookrightarrow} c_0(X)$

(ii) $\ell_p \overset{c}{\hookrightarrow} \ell_p(X)$, $c_0 \overset{c}{\hookrightarrow} c_0(X)$.

Demonstração. Faremos a demonstração para ℓ_p e $\ell_p(X)$, com $1 \leq p < \infty$. Os casos envolvendo $p = \infty$, c_0 e $c_0(X)$ são análogos.

Seja $v \in X$ tal que $\|v\| = 1$. É claro que as transformações lineares φ, ψ dadas por

$$\begin{aligned} \varphi\colon X &\longrightarrow \ell_p(X) \\ x &\longmapsto (x,0,0,\ldots) \end{aligned} \qquad , \qquad \begin{aligned} \psi\colon \ell_p &\longrightarrow \ell_p(X) \\ (x_n) &\longmapsto (x_n v) \end{aligned}$$

são isometrias, logo são isomorfismos sobre suas imagens. A seguir, mostraremos que suas imagens são subespaços complementados.

É imediato que a transformação linear contínua de $\ell_p(X)$ em $\ell_p(X)$ dado por $(x_n) \mapsto (x_1, 0, 0, \ldots)$ é uma projeção sobre a imagem de φ. Agora, para mostrarmos que a imagem de ψ também é um subespaço complementado, relembramos, primeiramente, que todo subespaço de dimensão finita de X é complementado (Proposição 1.37). Seja $P\colon X \to X$ uma projeção sobre $[v]$, o espaço gerado por v. Observamos que se P é escolhido como na demonstração da Proposição 1.37 então sua norma é igual a 1, logo podemos supor que $\|P\| = 1$. Definindo

$$\begin{aligned} \mathcal{P}\colon \ell_p(X) &\longrightarrow \ell_p(X) \\ (x_n) &\longmapsto (Px_n)\,, \end{aligned}$$

temos que $\mathcal{P}$ é uma projeção sobre a imagem de ψ. De fato, convém notar, inicialmente, que $\mathcal{P}$ está bem definida, uma vez que, se $(x_n) \in \ell_p(X)$, então

$$\sum_{i=1}^{m} \|Px_n\|^p \leq \sum_{i=1}^{m} \|x_n\|^p \leq \|(x_n)\|_{\ell_p}^p\,, \qquad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Isto mostra que $\sum_{i=1}^{\infty} \|Px_n\|^p \leq \|(x_n)\|_{\ell_p}^p$. Assim, P está bem definida, e, como P é linear, isto também nos dá a continuidade de $\mathcal{P}$. É claro que se $x \in \operatorname{Im}\psi$ então $\mathcal{P}x = x$. Além disso, dado $(x_n) \in \ell_p(X)$, como Px_n é um múltiplo de v para todo $n \in \mathbb{N}$, existe uma sequência de escalares (a_n) tal que $\mathcal{P}\big((x_n)\big) = (a_n v)$. Logo $(a_n v) \in \ell_p(X)$ e, como $\|v\| = 1$, temos $(a_n) \in \ell_p$.

Isto mostra que $\mathcal{P}\Big((x_n)\Big) \in \operatorname{Im}\psi$, portanto $\mathcal{P}$ é projeção sobre $\operatorname{Im}\psi$. ∎

Teorema 2.9 (Hagler–Stegall). *Seja X um espaço de Banach. Então X^* contém um subespaço complementado isomorfo à $L_1([0,1])$ se, e somente se, X contém um subespaço isomorfo à $(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus \ell_\infty^n)_{\ell_1}$.*

Demonstração. Ver [16], página 234, Teorema 1. ∎

Se (x_n) é uma sequência de elementos em um espaço vetorial, o seu *suporte* é definido por $\operatorname{supp}((x_n)) := \{i \in \mathbb{N} : x_i \neq 0\}$. Diremos que uma sequência (x_n) de elementos de $(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus X_n)_X$, $X \in \{c_0\} \cup \{\ell_p : 1 \leq p \leq \infty\}$, tem *suportes disjuntos* se $\operatorname{supp} x_n \cap \operatorname{supp} x_m = \varnothing$ sempre que $m \neq n$. A proposição a seguir generaliza a proposição 1.59.

Proposição 2.10. *Sejam X um espaço de Banach e $1 \leq p < \infty$. Se (V_n) é uma sequência em $\ell_p(X)$ (respectivamente, $c_0(X)$) seminormalizada e com suportes disjuntos então (V_n) é uma sequência básica e $(e_n) \sim (V_n)$, sendo (e_n) a base canônica de ℓ_p (respectivamente, c_0).*

Demonstração. Seja $X \in \{c_0\} \cup \{\ell_p : 1 \leq p < \infty\}$. Sejam $m \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_m$ escalares quaisquer e $M, N > 0$ tais que

$$M \leq \|V_n\|_X \leq N, \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.9}$$

Pelo Corolário 1.53, basta mostrarmos que

$$M \left\| \sum_{i=1}^{m} a_i e_i^X \right\| \leq \left\| \sum_{i=1}^{m} a_i V_i \right\|_X \leq N \left\| \sum_{i=1}^{m} a_i e_i^X \right\| ,$$

onde $(e_n^X)_{n\in\mathbb{N}}$ é a base canônica de X. Dado $1 \leq i \leq m$, sendo $V_i = \left(v_n^{(i)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ definimos

$$I_i := \left\{k \in \mathbb{N} : v_k^{(i)} \neq 0\right\} = \operatorname{supp} V_i \,.$$

Observamos que $I_i \cap I_j = \varnothing$, se $i \neq j$, pois (V_n) tem suportes disjuntos. Além disso, se $j \in I_k$ então $\sum_{i=1}^{m} a_j v_j^{(i)} = a_k v_j^{(k)}$.

Seja $X = \ell_p$. Mostraremos que

$$\left\| \sum_{i=1}^{m} a_i V_i \right\|_{\ell_p} = \left[\sum_{i=1}^{m} |a_i|^p \|V_i\|^p \right]^{\frac{1}{p}} , \tag{2.10}$$

e daí o resultado segue imediatatamente da desigualdade (2.9). Notemos que $\|V_i\|_{\ell_p} = \left(\sum_{j\in I_i}\left\|v_j^{(i)}\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, para cada $1 \le i \le m$. Logo

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{i=1}^{m} a_i V_i\right\|_{\ell_p}^p &= \left\|\left(\sum_{i=1}^{m} a_i v_j^{(i)}\right)_{j\in\mathbb{N}}\right\|_{\ell_p}^p \\
&= \left\|\sum_{i=1}^{m} a_i (v_j^{(i)})_{j\in\mathbb{N}}\right\|_{\ell_p}^p \\
&= \sum_{j=1}^{\infty}\left\|\sum_{i=1}^{m} a_i v_j^{(i)}\right\|^p \\
&= \sum_{j\in \bigcup_{1\le k\le m} I_k}\left\|\sum_{i=1}^{m} a_i v_j^{(i)}\right\|^p \\
&= \sum_{j\in I_1}\left\|a_1 v_j^{(1)}\right\|^p + \cdots + \sum_{j\in I_m}\left\|a_m v_j^{(m)}\right\|^p \\
&= \sum_{j\in I_1}|a_1|^p\left\|v_j^{(1)}\right\|^p + \cdots + \sum_{j\in I_m}|a_m|^p\left\|v_j^{(m)}\right\|^p \\
&= \sum_{i=1}^{m}|a_i|^p\|V_i\|^p .
\end{aligned}$$

Agora consideramos $X = c_0$. Temos

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{i=1}^{m} a_i V_i\right\|_{c_0} &= \left\|\left(\sum_{i=1}^{m} a_i v_j^{(i)}\right)_{j\in\mathbb{N}}\right\|_{c_0} \\
&= \sup_{j\in\mathbb{N}}\left\|\sum_{i=1}^{m} a_i v_j^{(i)}\right\| = \sup_{j\in \bigcup_{1\le k\le m} I_k}\left\|\sum_{i=1}^{m} a_i v_j^{(i)}\right\| \\
&= \sup \bigcup_{1\le k\le m}\left\{\left\|\sum_{i=1}^{m} a_i v_j^{(i)}\right\| : j \in I_k\right\} = \sup \bigcup_{1\le k\le m}\left\{\left\|a_k v_j^{(k)}\right\| : j\in I_k\right\} \\
&= \sup\left\{|a_1|\left\|v_j^1\right\| : j\in I_1\right\} \cup \cdots \cup \left\{|a_m|\left\|v_j^m\right\| : j \in I_m\right\} .
\end{aligned}$$

Logo, como

$$|a_i|\left\|v_l^{(i)}\right\| \le \sup_{1\le k\le m}|a_k|\sup_{j\in I_i}\left\|v_j^{(i)}\right\| \le \sup_{1\le k\le m}|a_k|N,$$

para quaisquer $1 \le i \le m$ e $l \in I_i$, temos

$$\left\|\sum_{i=1}^{m} a_i V_i\right\|_{c_0} \le \left\|\sum_{i=1}^{m} a_i e_i^{c_0}\right\| N.$$

Agora, seja i_0 tal que $|a_{i_0}| = \sup_{1\le i\le m}|a_i|$. Como $\|V_{i_0}\|_{c_0} \ge M$, existe j_0 tal que $\left\|v_{j_0}^{(i_0)}\right\| \ge M$.

Assim, temos $|a_{i_0}|\left\|v_{j_0}^{(i_0)}\right\| \geq |a_{i_0}|M$, logo

$$\left\|\sum_{i=1}^{m} a_i V_i\right\|_{c_0} \geq |a_{i_0}|\left\|v_{j_0}^{(i_0)}\right\| \geq \left\|\sum_{i=1}^{m} a_i e_i^{c_0}\right\| M.$$

E portanto

$$M\left\|\sum_{i=1}^{m} a_i e_i^{c_0}\right\| \leq \left\|\sum_{i=1}^{m} a_i V_i\right\|_{c_0} \leq N\left\|\sum_{i=1}^{m} a_i e_i^{c_0}\right\|.$$

∎

Proposição 2.11. *Os espaços* $(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus \ell_2^n)_{\ell_p}$ *e* ℓ_p, *com* $1 < p < \infty$, *são isomorfos.*

Demonstração. Ver [20], página 224, Proposição 7. ∎

Proposição 2.12.

(i) *Se* $1 \leq p < \infty$ *então* $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus \ell_p^n\right)_{c_0}$ *não é isomorfo à* c_0.

(ii) *Se* $1 < p < \infty$ *então* $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus \ell_p^n\right)_{\ell_1}$ *não é isomorfo à* ℓ_1.

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus \ell_p^n\right)_{c_0}$ é isomorfo à c_0. Definimos $x_1, x_2, \ldots \in \left(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus \ell_p^n\right)_{c_0}$ por

$$\begin{aligned}
x_1 &:= ((1), 0, 0, 0, 0, 0, \ldots) \\
x_2 &:= (0, (1, 0), 0, 0, 0, \ldots) \\
x_3 &:= (0, (0, 1), 0, 0, 0, \ldots) \\
x_4 &:= (0, 0, (1, 0, 0), 0, \ldots) \\
\vdots &\ \vdots \qquad \vdots
\end{aligned}$$

Como (x_n) é uma base incondicional de $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus \ell_p^n\right)_{c_0}$ e c_0 tem uma única base incondicional normalizada (Proposição 1.61), segue que $(x_n) \sim (e_n^{c_0})$. Assim, existe $T: c_0 \to \left(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus \ell_p^n\right)_{c_0}$ isomorfismo tal que $Te_n^{c_0} = x_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$ (Proposição 1.53). Agora, fixemos $n \in \mathbb{N}$. Sejam $x_{k_1}, \ldots, x_{k_n}$ tais que

$$x_{k_1} + \cdots + x_{k_n} = (0, \ldots, 0, \underbrace{(1, \ldots, 1)}_{\in \ell_p^n}, 0, 0, \ldots).$$

Então

$$
\begin{aligned}
n^{\frac{1}{p}} &= \|(0,\dots,0,\underbrace{(1,\dots,1)}_{\in \ell_p^n},0,0,\dots)\|_{c_0} \\
&= \left\|x_{k_1}+\cdots+x_{k_n}\right\|_{c_0} \\
&= \left\|T(e_{k_1}^{c_0}+\cdots+e_{k_n}^{c_0})\right\|_{c_0}.
\end{aligned}
$$

Portanto, como n é arbitrário e $\left\|e_{k_1}^{c_0}+\cdots+e_{k_n}^{c_0}\right\| = 1$, temos que $\sup\limits_{\|x\|=1}\|Tx\|_{c_0} = \infty$. Absurdo, pois T é contínua. Está provado o item (i).

Provaremos agora o item (ii), seguindo a mesma idéia do item (i). Suponhamos, por absurdo, que $\left(\sum_{n=1}^{\infty}\oplus\ell_p^n\right)_{\ell_1}$ é isomorfo à ℓ_1. Sendo $x_1,x_2,\dots \in \left(\sum_{n=1}^{\infty}\oplus\ell_p^n\right)_{\ell_1}$ como acima, temos que (x_n) é uma base incondicional de $\left(\sum_{n=1}^{\infty}\oplus\ell_p^n\right)_{\ell_1}$. Como ℓ_1 tem uma única base incondicional normalizada (Proposição 1.61), segue que $(x_n) \sim (e_n^{\ell_1})$. Assim, existe $T\colon \ell_1 \to \left(\sum_{n=1}^{\infty}\oplus\ell_p^n\right)_{\ell_1}$ isomorfismo tal que $Te_n^{\ell_1} = x_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$ (Proposição 1.53). Agora, fixemos $n \in \mathbb{N}$. Sejam $x_{k_1},\dots,x_{k_n}$ tais que

$$
x_{k_1}+\cdots+x_{k_n} = (0,\dots,0,\underbrace{(1,\dots,1)}_{\in \ell_p^n},0,0,\dots).
$$

Então

$$
\begin{aligned}
n^{1-\frac{1}{p}} = \frac{n}{n^{\frac{1}{p}}} &= \left\|\frac{1}{n^{\frac{1}{p}}}(e_{k_1}^{\ell_1}+\cdots+e_{k_n}^{\ell_1})\right\| \\
&= \left\|\frac{1}{n^{\frac{1}{p}}}T^{-1}(x_{k_1}+\cdots+x_{k_n})\right\| \\
&= \left\|\frac{1}{n^{\frac{1}{p}}}T^{-1}\Big((0,\dots,0,\underbrace{(1,\dots,1)}_{\in \ell_p^n},0,0,\dots)\Big)\right\|.
\end{aligned}
$$

Portanto, como $1-\frac{1}{p} > 0$, n é arbitrário e $\left\|\frac{1}{n^{\frac{1}{p}}}(x_{k_1}+\cdots+x_{k_n})\right\|_{\ell_1} = 1$, temos que $\sup\limits_{\|x\|_{\ell_1}=1}\|T^{-1}x\| = \infty$. Mas isto é absurdo, pois T^{-1} é contínua. E está provado o item (ii). ∎

Proposição 2.13. *Um subespaço complementado de dimensão infinita de* $W = (\sum_{n=1}^{\infty}\oplus\ell_1^n)_{c_0}$

é isomorfo à c_0 ou à W.

Demonstração. Ver [3], página 83, Corolário 8.6. ∎

Proposição 2.14. *Toda base incondicional normalizada de um subespaço complementado de $\ell_1(\ell_\infty)$ é equivalente à uma permutação da base canônica de ℓ_1 ou de $(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus \ell_\infty^n)_{\ell_1}$.*

Demonstração. Ver o comentário que segue o Teorema 4.7, página 43, de [3]. ∎

Proposição 2.15. $(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus \ell_\infty^n)_{\ell_1}$ *tem uma única base incondicional normalizada a menos de equivalência e permutação.*

Demonstração. Ver [3], página 43, Corolário 4.8. ∎

O Teorema de Schroeder–Bernstein, da Teoria dos Conjuntos, nos diz que se X e Y são conjuntos e existem funções injetoras de X em Y e de Y em X então existe uma bijeção entre X e Y. Reformulando para espaços de Banach, podemos nos perguntar se, dados X, Y espaços de Banach, se $X \hookrightarrow Y$ e $Y \hookrightarrow X$ implica que X e Y são isomorfos. A resposta é que tal reformulação é falsa; um contra-exemplo é dado em [5]. Nos perguntamos então se $X \overset{c}{\hookrightarrow} Y$ e $Y \overset{c}{\hookrightarrow} X$ é uma hipótese suficiente para que X e Y sejam isomorfos. Trata-se de uma questão mais difícil e sua a resposta também é negativa, e foi resolvida por Gowers em [14]. Entretanto, Pełczyński observou que, com algumas hipóteses adicionais, podemos concluir que X e Y são isomorfos.

Teorema 2.16 (O Método de Decomposição de Pełczyński). *Sejam X, Y espaços de Banach tais que $X \overset{c}{\hookrightarrow} Y$ e $Y \overset{c}{\hookrightarrow} X$. Se*

(i) *$X \approx X^2$ e $Y \approx Y^2$, ou*

(ii) *$X \approx c_0(X)$ ou $X \approx \ell_p(X)$, $1 \le p < \infty$,*

então $X \approx Y$.

Demonstração. Seja E espaço de Banach tal que $X \approx Y \oplus E$.

Se X e Y satisfazem (i) então $Y \approx Y^2$ e temos

$$X \approx Y \oplus Y \oplus E \approx Y \oplus X.$$

Analogamente, obtemos $Y \approx X \oplus Y$, e assim $X \approx Y$.

Se X satisfaz (ii) então, consequentemente, $X \approx X^2$. De fato, basta ver que, se $X \approx \ell_p(X)$, então

$$X \approx \ell_p(X) \approx X \oplus \ell_p(X) \approx X \oplus X\,.$$

Naturalmente, este raciocínio permanece válido se $X \approx c_0(X)$. Assim, pelo mesmo argumento do item (i), obtemos

$$Y \approx X \oplus Y.$$

E então, se $X \approx \ell_p(X)$, como

$$\ell_p(X) \approx \ell_p(Y \oplus E) \approx \ell_p(Y) \oplus \ell_p(E)\,,$$

temos

$$\begin{aligned} X &\approx \ell_p(X) \approx \ell_p(Y) \oplus \ell_p(E) \\ &\approx Y \oplus \ell_p(Y) \oplus \ell_p(E) \approx Y \oplus \ell_p(X) \approx Y \oplus X\,. \end{aligned}$$

Se $X \approx c_0(X)$ a demonstração é análoga. ∎

Como caso particular da proposição seguinte, temos que c_0 e ℓ_∞ não tem cotipo finito. Relembramos que a definição de cotipo que estamos utilizando é dada na página 26.

Proposição 2.17. *Se $X_1, X_2, \ldots$ são espaços normados e $Y \in \{c_0, \ell_\infty\}$ então $(\sum_{i=1}^{\infty} \oplus X_n)_Y$ não tem cotipo finito. Em particular, c_0 e ℓ_∞ não tem cotipo finito.*

Demonstração. Para simplificar a notação iremos supor $X = X_1 = X_2 = \cdots$. Basta considerarmos $Y = \ell_\infty$, pois a demonstração é a mesma no caso $Y = c_0$. Suponhamos por absurdo, que $\ell_\infty(X)$ tem cotipo q, com $2 \le q < \infty$. Então existe $C > 0$ tal que, quaisquer que sejam $x_1, \ldots, x_n \in \ell_\infty(X)$,

$$\frac{\sum\limits_{\varepsilon_i = \pm 1} \left\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i \right\|_{\ell_\infty}}{2^n} \ge C \left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_{\ell_\infty}^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Escolhemos agora $x \in X$ tal que $\|x\| = 1$ e definimos $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots \in \ell_\infty(X)$ por

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_1 &:= (x, 0, 0, 0, \ldots) \\
\tilde{x}_2 &:= (0, x, 0, 0, \ldots) \\
\tilde{x}_3 &:= (0, 0, x, 0, \ldots) \\
\vdots \;\; & \quad\;\; \vdots \qquad\quad \vdots
\end{aligned}$$

Assim, temos $\|\tilde{x}_i\|_{\ell_\infty} = 1$, $i = 1, 2, \ldots$ e $\|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i \tilde{x}_i\|_{\ell_\infty} = 1$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$ e qualquer escolha de sinais $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}$. Portanto

$$1 = \frac{2^n}{2^n} = \frac{\sum\limits_{\varepsilon_i = \pm 1} \|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i \tilde{x}_i\|_{\ell_\infty}}{2^n} \geq C \left(\sum_{i=1}^n \|\tilde{x}_i\|_{\ell_\infty}^q \right)^{\frac{1}{q}} = n^{\frac{1}{q}}, \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

e chegamos a um absurdo. ■

Teorema 2.18.

(i) *Sejam $1 < p \leq 2$ e $p \leq r < \infty$. Então $\ell_r(X)$ tem tipo p se, e somente se, X tem tipo p.*

(ii) *Sejam $2 \leq q < \infty$ e $1 \leq r \leq q$. Então $\ell_r(X)$ tem cotipo q se, e somente se, X tem cotipo q.*

Demonstração. Ver [10], Teorema 11.12, página 221, tendo em vista que $\ell_p(X)$ é $L_r(\mu, X)$ com a medida de contagem em $\mathbb{N}$. ■

Finalizamos esta seção enunciando o resultado de Bourgain, Casazza, Lindenstrauss e Tzafriri mencionado na introdução. Com esta finalidade, introduzimos primeiro o conceito de *reticulado de Banach.*

Sejam X um conjunto parcialmente ordenado e $x, y \in X$. Um *supremo* para x e y, denotado por $x \vee y$, é um elemento de X tal que

(i) $x \leq x \vee y$ e $y \leq x \vee y$; e

(ii) $x \vee y \leq z$ sempre que $x \leq z$ e $y \leq z$.

Analogamente, definimos um *ínfimo* para x e y, denotado por $x \wedge y$. Quando existem, tanto $x \vee y$ quanto $x \wedge y$ são únicos.

Se X é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ munido de uma ordem parcial $\leq$, dizemos que X é um *espaço vetorial ordenado* se, quaisquer que sejam $x, y \in X$ tais que $x \leq y$, temos

(i) $x + z \leq y + z$ para todo $z \in X$; e

(ii) $tx \leq ty$ para todo $t > 0$.

Um *reticulado vetorial* é um espaço vetorial ordenado tal que

(iii) todo par de elementos de X tem um *supremo*.

Para todo elemento x de um reticulado vetorial, o seu valor absoluto é definido por $|x| := x \vee (-x)$. O espaço $\mathbb{R}^n$ é um exemplo de reticulado vetorial, sendo $(x_1, \ldots, x_n) \leq (y_1, \ldots, y_n)$ se, e somente se, $x_1 \leq y_1, \ldots, x_n \leq y_n$. Um espaço vetorial normado que também é um reticulado vetorial é dito um *reticulado normado* se

(iv) $\|x\| \leq \|y\|$ para todos $x, y \in X$ tais que $|x| \leq |y|$.

Um *reticulado de Banach* é um espaço de Banach sobre $\mathbb{R}$ que é um reticulado normado. Os espaços c_0, ℓ_p, com $1 \leq p \leq \infty$, munidos da ordem $(x_n) \leq (y_n)$ se, e somente se, $x_1 \leq y_1$, $x_2 \leq y_2, \ldots,$, são exemplos de reticulados de Banach.

O conceito de reticulado de Banach não se restringe aos espaços de Banach sobre $\mathbb{R}$. Introduzimos agora, rapidamente, o conceito de *reticulados de Banach complexos*. Primeiramente, relembramos que o *complexificado de um reticulado de Banach X* é o espaço de Banach complexo $X_{\mathbb{C}}$ cujos elementos são pares $(x, y) \in X \times X$, com adição e multiplicação por escalar dados por $(x_0, y_0) + (x_1, y_1) := (x_0 + x_1, y_0 + y_1)$ e $(a + ib)(x, y) := (ax - by, ay + bx)$ e norma $\|(x, y)\| := \|\sup_{0 \leq \theta \leq 2\pi}(x \sin\theta + y \cos\theta)\|$. Escrevemos $(x, 0) \leq (y, 0)$ se, e somente se, $x \leq y$.

Proposição 2.19. *Seja V um reticulado de Banach de tipo p e cotipo q, com $1 \leq p \leq q < \infty$. Seja Q uma projeção de $c_0(V)$ sobre um subespaço Z com base normalizada $(z_n)_{1 \leq n \leq k}$ de constante incondicional $K \geq 1$. Então existem uma partição dos inteiros $\{1, \ldots, k\}$ em* *conjuntos disjuntos* $\{\tau_s\}_{1\le s\le r}$ *e uma constante* M *dependendo somente de* $K, \|Q\|, p, q$ *tais que, para quaisquer escalares* $a_1, \ldots, a_k$,

$$M^{-1} \max_{1\le s\le r}\left(\sum_{n\in\tau_s}|a_n|^q\right)^{\frac{1}{q}} \le \left\|\sum_{n=1}^{k} a_n z_n\right\| \le M \max_{1\le s\le r}\left(\sum_{n\in\tau_s}|a_n|^q\right)^{\frac{1}{p}}$$

Demonstração. Ver [3], página 12, Proposição 2.1. ∎

2.1 Os espaços $\left(\sum_{n=1}^{\infty}\oplus\ell_p^n\right)_X$, $X \in \{c_0\}\cup\{\ell_p : p\in[1,+\infty[\}$

Iniciamos esta seção introduzindo a *distância de Banach–Mazur* entre espaços normados. O conceito de distância entre dois objetos pode ser usado para distingui-los quantitativamente. Por exemplo, se a distância é zero então os objetos podem ser identificados um com o outro, e se a distância é maior do que zero então ela nos dá uma medida da diferença entre eles. Não surpreende que a distância de Banach–Mazur derive dos isomorfismos entre dois espaços normados, uma vez que o modo natural de identificá-los é por meio destes.

Definição 2.20 (Distância de Banach–Mazur). Sejam X, Y espaços normados isomorfos. A *distância de Banach–Mazur* entre X e Y é denotada por $\mathrm{d}(X,Y)$ e é definida por

$$\mathrm{d}(X,Y) := \inf\{\|T\|\|T^{-1}\| : T\colon X\to Y \text{ é isomorfismo }\}.$$

Listamos algumas propriedades básicas da distância de Banach–Mazur na proposição seguinte.

Proposição 2.21. *Sejam* X, Y, Z *espaços normados isomorfos. Então*

(i) $\mathrm{d}(X,Y)\ge 1$,

(ii) $\mathrm{d}(X,Y)=\mathrm{d}(Y,X)$,

(iii) $\mathrm{d}(X,Y)\le \mathrm{d}(X,Z)\,\mathrm{d}(Z,Y)$.

Demonstração. Dado $T\colon X\to Y$ isomorfismo temos $1 = \|T\circ T^{-1}\| \le \|T\|\|T^{-1}\|$; isto prova o item (i). O item (ii) é imediato.

Sejam $S: X \to Z$ e $R: Z \to Y$ isomorfismos. Então $R \circ S$ é isomorfismo entre X e Y, de modo que

$$\mathrm{d}(X, Y) \leq \|R \circ S\| \|(R \circ S)^{-1}\| \leq \|R\| \|R^{-1}\| \|S\| \|S^{-1}\| .$$

Como S, R são arbitrários, segue que $\mathrm{d}(X, Y) \leq \mathrm{d}(X, Z)\, \mathrm{d}(Z, Y)$, e está provado o item (iii). ■

É claro que se X, Y são isometricamente isomorfos então $\mathrm{d}(X, Y) = 1$, que é a menor distância possível. Considerados X, Y de dimensão infinita, a recíproca não é verdadeira. Notamos que, apesar do que o nome pode sugerir, a distância de Banach–Mazur não é uma distância no sentido usual.

Proposição 2.22. *Sejam (X_n) e (Y_n) sequências de espaços normados tais que*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{d}(X_n, Y_n) < \infty .$$

Então $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus X_n\right)_X \approx \left(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus Y_n\right)_X$, para todo $X \in \{c_0\} \cup \{\ell_p : 1 \leq p \leq \infty\}$.

Demonstração. Seja $K := \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{d}(X_n, Y_n)$. Para cada $i \in \mathbb{N}$, seja $T_i: X_i \to Y_i$ isomorfismo sobre Y_i tal que $\|T_i\| \|T_i^{-1}\| \leq K$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $\|T_i\| \leq K$ e $\|T_i^{-1}\| = 1$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Considere

$$\begin{aligned} T: \left(\textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \oplus X_n\right)_X &\longrightarrow \left(\textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \oplus Y_n\right)_X \\ (x_n) &\longmapsto (T_n x_n) . \end{aligned}$$

Como $\|T_i\| \leq K$, para todo $i \in \mathbb{N}$, temos que T está bem definida, é linear, contínua e injetora. Agora iremos mostrar provar que T é sobrejetora. Seja $(y_n) \in (Y_n)$. Então, para cada $i \in \mathbb{N}$, existe $x_i \in X_i$ tal que $T_i x_i = y_i$. Como $\|T_i^{-1}\| = 1$, para cada $i \in \mathbb{N}$, segue que $(x_n) = (T_n^{-1} y_n) \in \left(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus X_n\right)_X$, e assim $T\big((x_n)\big) = (y_n)$. É imediato que a função dada por $(y_n) \mapsto (T_n^{-1} y_n)$ é a inversa de T e é contínua. ■

Lema 2.23. *Sejam X um espaço normado e $\{x_1, \ldots, x_n\}$ um subconjunto linearmente independente de X. Então existe $M > 0$ tal que*

$$\|a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n\| \geq M(|a_1| + \cdots + |a_n|),$$

para quaisquer escalares $a_1, \dots, a_n$.

Demonstração. Ver [17], página 72, Lema 2.4-1. ∎

Proposição 2.24. *Sejam* X *um espaço de Banach,* F *um subespaço de dimensão finita de* X *e* P *uma projeção de* X *sobre* F. *Suponhamos* $\dim F = n$ *e seja* $\{x_1, \dots, x_n\}$ *uma base normalizada de* F. *Então, dado* $\varepsilon > 0$, *existe* $\delta > 0$ *tal que, se* $y_1, \dots, y_n$ *são vetores em* X *satisfazendo*

$$\max_{1 \le i \le n} \|x_i - y_i\| < \delta,$$

denotando por G *o subespaço gerados pelos* y_i*'s, temos*

(i) $\mathrm{d}(F, G) \le 1 + \varepsilon$,

(ii) *Existe uma projeção* P_0 *de* X *sobre* G *com* $\|P_0\| \le (1 + \varepsilon)\|P\|$.

Demonstração. Buscamos escolher δ de modo que o espaço G como no enunciado seja tal que $\mathrm{d}(F, G) \le 1 + \varepsilon$. Com este fim, convém observarmos que, se Y é subespaço de X e $S: Y \to X$ é uma transformação linear contínua que satisfaz $\|\mathrm{Id}_Y - S\| \le \eta < 1$, então S é isomorfismo sobre sua imagem (Proposição 1.12). Então, como, para qualquer $y \in Y$,

$$\|Sy\| \le \|y - Sy\| + \|y\| \le (1 + \eta)\|y\|,$$

$$\|Sy\| \ge \|y\| - \|y - Sy\| \ge (1 - \eta)\|y\|,$$

segue que $\|S\|\|S^{-1}\| \le \frac{1+\eta}{1-\eta}$. Notamos também que o Lema 2.23 garante a existência de um $M > 0$ tal que

$$M \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \le \left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \right\|,$$

para todos os escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Dado $\varepsilon > 0$, escolhemos $0 < \eta < 1$ suficientemente pequeno tal que $\frac{1+\eta}{1-\eta} \le 1 + \varepsilon$. Definimos

$$\delta := \frac{\eta M}{\|P\| + 1}.$$

Agora, sejam $y_1, \dots, y_n \in X$ tais que

$$\max_{1 \le i \le n} \|x_i - y_i\| < \delta.$$

Consideramos a função $S: F \to G$, sendo $G := [y_i]$, dada por $S(x) := \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i$, para cada $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in F$. Como

$$\begin{aligned} \|x - Sx\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i - y_i) \right\| &\le \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \|x_i - y_i\| \\ &\le \delta \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \\ &\le \delta \frac{\|x\|}{M}, \end{aligned}$$

temos

$$\|\mathrm{Id}_F - S\| \le \frac{\delta}{M} = \frac{\eta}{\|P\| + 1} < \eta < 1.$$

Portanto S é um isomorfismo de F sobre $S(F) = G$ tal que

$$\|S\| \|S^{-1}\| \le \frac{1 + \eta}{1 - \eta} \le 1 + \varepsilon.$$

Assim, temos

$$\mathrm{d}(F, G) \le \|S\| \|S^{-1}\| \le 1 + \varepsilon.$$

Para definirmos a projeção $P_0: X \to X$ sobre G, consideramos a transformação linear contínua $T: X \to X$ definida por

$$T := \mathrm{Id}_X + (S \circ P) - P.$$

Então

$$\begin{aligned} \|T - \mathrm{Id}_X\| = \|(S - \mathrm{Id}_F) \circ P\| &\le \frac{\eta \|P\|}{\|P\| + 1} \\ &< \eta < 1. \end{aligned}$$

Pela Proposição 1.11, sabemos que T é isomorfismo sobre X. Ademais,

$$\|T\| \|T^{-1}\| \le \frac{1 + \eta}{1 - \eta} < 1 + \varepsilon.$$

Como $T(F) = G$, é claro que $P_0 := T \circ P \circ T^{-1}$ é uma projeção de X sobre G com

$$\|P_0\| \leq (1+\varepsilon)\|P\|,$$

como queríamos. ■

Definição 2.25. Sejam X um espaço de Banach e $1 \leq p \leq \infty$. Dizemos que X *contém ℓ_p^n's uniformemente* se existe uma sequência (E_n) de subespaços de dimensão finita de X tais que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{d}(E_n, \ell_p^n) < \infty.$$

Se também existem projeções P_n de X sobre E_n tais que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|P_n\| < \infty,$$

dizemos que X *contém ℓ_p^n's uniformemente complementados.*

Se $p = \infty$ então as duas definições coincidem, isto é, X contém ℓ_∞^n's uniformemente, se, e somente se, X contém ℓ_∞^n's uniformemente complementados. De fato, sabemos que se Y é subespaço de Z, sendo Z um espaço de Banach qualquer, e Y é isomorfo à ℓ_∞, então Y é complementado em Z (isto é, ℓ_∞ é *injetivo*). E mais: se $T: Y \to \ell_\infty$ é isomorfismo então existe $P: Z \to Z$ projeção sobre Y tal que $\|P\| \leq \|T\|\|T^{-1}\|$ (ver [13], página 142, Proposição 5.13). E o resultado vale não só para ℓ_∞ mas também para ℓ_∞^n, por argumento inteiramente análogo. Assim, segue que, se X contém ℓ_∞^n's uniformemente, então X contém ℓ_∞^n's uniformemente complementados.

Apresentamos, na proposição seguinte, alguns exemplos básicos de espaços que contém ℓ_p^n's uniformemente complementados.

Proposição 2.26. *Seja $1 \leq p \leq \infty$. Temos*

(i) $(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus \ell_p^n)_{\ell_q}$ *contém ℓ_p^n's uniformemente complementados, para todo $1 \leq q \leq \infty$.*

(ii) ℓ_p *contém ℓ_p^n's uniformemente complementados.*

Demonstração. Denotamos $X := (\sum_{n=1}^{\infty} \oplus \ell_p^n)_{\ell_q}$. Dado $k \in \mathbb{N}$, sendo E_k subespaço de X formado pelos elementos de X da forma $(0, \ldots, 0, x, 0, \ldots, 0, \ldots)$, onde x é um elemento qualquer de ℓ_p^k ocupando a k-ésima posição, é claro que E_k é isometricamente isomorfo à ℓ_p^k. Além disso, $(x_n) \mapsto (0, \ldots, 0, x_k, 0, \ldots, 0, \ldots)$ é uma projeção de norma 1 de X sobre E_k. Isto prova o item (i).

Quanto ao item (ii), inicialmente observamos que, dado $k \in \mathbb{N}$, a transformação linear contínua de ℓ_p^k em ℓ_p dada por $(a_1, \ldots, a_k) \mapsto (a_1, \ldots, a_k, 0, 0, \ldots)$ é um isomorfismo isométrico sobre sua imagem. Denotando a imagem dessa tranformação por E_k, é imediato que $(a_n) \mapsto (a_1, \ldots, a_k, 0, 0, \ldots)$ é uma projeção de norma 1 de ℓ_p sobre E_k. ∎

A seguinte caracterização nos será útil:

Proposição 2.27. *Seja X um espaço de Banach e $1 \leq p \leq \infty$. Então X contém ℓ_p^n's uniformemente complementados se, e somente se, existem transformações lineares contínuas*

$$\ell_p^n \xrightarrow{I_n} X \xrightarrow{Q_n} \ell_p^n, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

satisfazendo

$$Q_n \circ I_n = \mathrm{Id}_{\ell_p^n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad e \qquad \sup_{n \in \mathbb{N}} \|Q_n\| \|I_n\| < \infty.$$

Demonstração. Sejam I_n, Q_n transformações lineares contínuas, $\ell_p^n \xrightarrow{I_n} X \xrightarrow{Q_n} \ell_p^n$, $n = 1, 2, \ldots$, satisfazendo

(i) $Q_n \circ I_n = \mathrm{Id}_{\ell_p^n}$, $\quad \forall n \in \mathbb{N}$.

(ii) $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|Q_n\| \|I_n\| < \infty$.

Fixemos $k \in \mathbb{N}$. Por (i), temos que, restringindo o contradomínio de I_k à sua imagem, I_k é invertível e que $Q_k|_{\mathrm{Im}\, I_k} = I_k^{-1}$, de modo que $\mathrm{Im}\, I_k \approx \ell_p^k$. Ademais, como

$$\|Q_k|_{\mathrm{Im}\, I_k}\| \, \|I_k\| \leq \|Q_k\| \|I_k\| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|Q_n\| \|I_n\|,$$

temos que

$$\mathrm{d}(\mathrm{Im}\, I_k, \ell_p^k) \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|Q_n\| \|I_n\| .$$

Logo $\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{d}(\mathrm{Im}\, I_n, \ell_p^n) < \infty$, e mostramos assim que X contém ℓ_p^n's uniformemente. Resta definirmos as projeções; consideremos, para cada $n \in \mathbb{N}$, $P_n := I_n \circ Q_n$. Então $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|P_n\| < \infty$,

$\operatorname{Im} P_n \subseteq \operatorname{Im} I_n$ e ,

$$I_n\, x \in \operatorname{Im} I_n \Rightarrow P_n(I_n\, x) = I_n(Q_n(I_n\, x)) = I_n\, x,$$

e assim mostramos que X contém ℓ_p^n's uniformemente complementados.

Reciprocamente, suponhamos agora que X contém ℓ_p^n's uniformemente complementados. Então existe E_n subespaço de X, $T_n: \ell_p^n \to E_n$ isomorfismo, $P_n: X \to X$ projeção sobre E_n, $n = 1, 2, \ldots$, com $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| \|T_n^{-1}\| < \infty$ e $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|P_n\| < \infty$. Definindo, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n := T_n\,, \qquad Q_n := T_n^{-1} \circ P_n\,,$$

temos $Q_n \circ I_n = \mathrm{Id}_{\ell_p^n}$, $n = 1, 2, \ldots$, e $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|Q_n\| \|I_n\| < \infty$. ∎

Proposição 2.28. *Sejam $1 \le p \le \infty$ e X, Y espaços de Banach. Se $X \hookrightarrow Y$ e X contém ℓ_p^n's uniformemente então Y contém ℓ_p^n's uniformemente. Em particular, se $X \approx Y$ e X contém ℓ_p^n's uniformemente então Y contém ℓ_p^n's uniformemente.*

Demonstração. Sejam $T: X \to Y$ um isomorfismo sobre sua imagem e $E_1, E_2, \ldots$ subespaços de X tais que $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{d}(E_n, \ell_p^n) < \infty$. Mostraremos que $T(E_1), T(E_2), \ldots$ são subespaços de Y tais que $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{d}(T(E_n), \ell_p^n) < \infty$.

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $\varphi: E_n \to \ell_p^n$ um isomorfismo. Como $\varphi \circ T^{-1}: T(E_n) \to \ell_p^n$ é um isomorfismo entre $T(E_n)$ e ℓ_p^n, temos

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(T(E_n), \ell_p^n) &\le \|\varphi \circ T^{-1}\| \|(\varphi \circ T^{-1})^{-1}\| \\ &\le \|\varphi\| \|\varphi^{-1}\| \|T\| \|T^{-1}\|\,. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}(T(E_n), \ell_p^n)}{\|T\| \|T^{-1}\|} &\le \inf\left\{ \|\varphi\| \|\varphi^{-1}\| : \varphi: E_n \to \ell_p^n \text{ é isomorfismo} \right\} \\ &= \mathrm{d}(E_n, \ell_p^n). \end{aligned}$$

Portanto, como $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{d}(E_n, \ell_p^n) < \infty$, segue que $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{d}(T(E_n), \ell_p^n) < \infty$. ∎

Proposição 2.29. *Sejam* $1 \leq p \leq \infty$ *e* $(X_n), (Y_n)$ *sequências de espaços de Banach. Suponhamos que* $Y_n \hookrightarrow X_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *sendo* $E_1, E_2, \ldots$ *tais que* $Y_n \approx E_n \subseteq X_n$, *para cada* $n \in \mathbb{N}$, *e* $\sup_{i \in \mathbb{N}} \mathrm{d}(Y_i, E_i) < +\infty$. *Então*

$$\ell_p\big((Y_n)\big) \hookrightarrow \ell_p\big((X_n)\big).$$

Suponhamos também que existem $P_n : X_n \to X_n$ *projeções sobre* E_n, $n = 1, 2 \ldots$, *com* $\sup_{i \in \mathbb{N}} \|P_i\| < +\infty$. *Então*

$$\ell_p\big((Y_n)\big) \overset{c}{\hookrightarrow} \ell_p\big((X_n)\big).$$

Demonstração. Seja $K := \sup_{i \in \mathbb{N}} \mathrm{d}(Y_i, E_i)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, escolhemos $T_n : Y_n \to E_n$ isomorfismo tal que $\|T_n\| \|T_n^{-1}\| \leq K$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $\|T_n\| \leq K$ e que $\|T_n^{-1}\| = 1$. Com efeito, basta tomarmos $\|T_n^{-1}\| T_n$ no lugar de T_n, uma vez que $(\|T_n^{-1}\| T_n)^{-1} = \frac{1}{\|T_n^{-1}\|} T_n^{-1}$.

Consideremos

$$\begin{aligned} T : \ell_p\big((Y_n)\big) &\longrightarrow \ell_p\big((X_n)\big) \\ (y_n) &\longmapsto (T_n y_n). \end{aligned}$$

Notemos que, dado $(y_n) \in \ell_p\big((Y_n)\big)$, se $p = \infty$, então $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n y_n\| \leq K \sup_{n \in \mathbb{N}} \|y_n\|$; se $1 \leq p < \infty$, temos $\sum_{n=1}^{\infty} \|T_n y_n\|^p \leq K^p \|(y_n)\|^p$. Assim, para qualquer $1 \leq p \leq \infty$, T está bem definida e $\|T\big((y_n)\big)\| \leq K \|(y_n)\|$. Como T é linear, isto mostra que T é contínua. É imediato que $U : \operatorname{Im} T \to \ell_p\big((Y_n)\big)$ dada por $(z_n) \mapsto (T_n^{-1} z_n)$ é uma transformação linear contínua que está bem definida e satisfaz $U \circ T = \mathrm{Id}_{\ell_p((Y_n))}$, logo T é isomorfismo sobre sua imagem. Mostramos assim que $\ell_p\big((Y_n)\big) \hookrightarrow \ell_p\big((X_n)\big)$.

Para mostrar que $\operatorname{Im} T$ é imagem de uma projeção, basta considerarmos

$$\begin{aligned} P : \ell_p\big((X_n)\big) &\longrightarrow \ell_p\big((X_n)\big) \\ (x_n) &\longmapsto (P_n x_n). \end{aligned}$$

Como $\sup_{i \in \mathbb{N}} \|P_i\| < \infty$, segue que P está bem definida e é contínua. Se $(x_n) \in \ell_p\big((X_n)\big)$ então, sendo $(y_n) := (T_n^{-1} P_n x_n) \in \ell_p\big((Y_n)\big)$, temos $T\big((y_n)\big) = P\big((x_n)\big)$. Isto mostra que $\operatorname{Im} P \subseteq \operatorname{Im} T$. É claro que $P(x) = x$, para todo $x \in \operatorname{Im} T$. ∎

Proposição 2.30. *Seja F um subespaço K-complementado de dimensão finita de $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus \ell_p^n\right)_X$, com $X \in \{c_0\} \cup \{\ell_p : 1 \leq p < \infty\}$. Então dado $\varepsilon > 0$, existem $M \in \mathbb{N}$ e G subespaço $(1+\varepsilon)K$-complementado de $\left(\sum_{n=1}^{M} \oplus \ell_p^n\right)_X$ tal que $\mathrm{d}(F, G) \leq 1 + \varepsilon$.*

Demonstração. Sejam $\{x_1, \ldots, x_n\}$ uma base normalizada de F e $\varepsilon > 0$. Pela Proposição 2.24, existe $\delta > 0$ tal que, se $y_1, \ldots, y_n \in \left(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus \ell_p^n\right)_X$ são tais que $\max_{1 \leq i \leq n} \|x_i - y_i\|_X < \delta$, então $\mathrm{d}([y_i], F) \leq 1 + \varepsilon$ e $[y_i]$ é subespaço $(1+\varepsilon)K$-complementado de $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus \ell_p^n\right)_X$.

Sendo $x_i = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots)$, $i = 1, \ldots, n$, escolhemos $M \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|(0, \ldots, 0, x_{M+1}^{(i)}, x_{M+2}^{(i)}, \ldots)\|_X < \delta \,,$$

para cada $1 \leq i \leq n$. Assim, definindo

$$y_i := (x_1^{(i)}, \ldots, x_M^{(i)}, 0, 0, \ldots), \qquad i = 1, \ldots, n$$

temos $\mathrm{d}([y_i], F) \leq 1+\varepsilon$ e $[y_i]$ é subespaço $(1+\varepsilon)K$-complementado de $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus \ell_p^n\right)_X$. A seguir, iremos exibir um subespaço complementado de $\left(\sum_{n=1}^{M} \oplus \ell_p^n\right)_X$ que é isometricamente isomorfo $[y_i]$.

Definimos

$$y_i' := (x_1^{(i)}, \ldots, x_M^{(i)}), \qquad i = 1, 2, \ldots, n \,.$$

Sendo $P\colon \left(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus \ell_p^n\right)_X \to \left(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus \ell_p^n\right)_X$ projeção de $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus \ell_p^n\right)_X$ sobre $[y_n]$, com $P_1, P_2, \ldots$ dados por $P(x) = (P_1 x, P_2 x, \ldots)$, para cada $x \in \left(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus \ell_p^n\right)_X$ (notemos que $P_{M+1} = P_{M+2} = \cdots = 0$), com $\|P\| \leq (1+\varepsilon)K$. temos que

$$\begin{aligned} P' \colon \left(\textstyle\sum_{n=1}^{M} \oplus \ell_p^n\right)_X &\longrightarrow \left(\textstyle\sum_{n=1}^{M} \oplus \ell_p^n\right)_X \\ x &\longmapsto (P_1(x, 0, 0, \ldots); \ldots ; P_M(x, 0, 0, \ldots)) \end{aligned}$$

é projeção de $\left(\sum_{n=1}^{M} \oplus \ell_p^n\right)_X$ sobre $G := [y_i']$. De fato: observamos inicialmente que, se $x \in \left(\sum_{n=1}^{M} \oplus \ell_p^n\right)_X$, então, como $(P_1(x, 0, 0, \ldots); \ldots ; P_M(x, 0, 0, \ldots); 0; 0; \ldots) \in [y_i]$, é imediato que

$$(P_1(x, 0, 0, \ldots); \ldots ; P_M(x, 0, 0, \ldots)) \in [y_i'].$$

Isto mostra que $\operatorname{Im} P' \subseteq [y_i']$. Ademais, sendo P projeção, segue que $P_j(y_i) = x_j^{(i)}$ para $1 \le i \le n$, $1 \le j \le M$. Obtemos então $P'(y_i') = y_i'$ para cada $1 \le i \le n$, de modo que $P'(x) = x$, para todo $x \in [y_i']$.

Agora, é fácil ver que

$$\|P'\| \le \|P\| \le (1+\varepsilon)K\,,$$

e temos portanto que G é subespaço $(1+\varepsilon)K$-complementado de $\left(\sum_{n=1}^{M}\oplus\ell_p^n\right)_X$. Como $[y_i]$ é isometricamente isomorfo à $[y_i'] = G$ temos $\mathrm{d}([y_i], G) = 1$, e portanto

$$\mathrm{d}(F, G) \le \mathrm{d}(F, [y_i])\,\mathrm{d}([y_i], G) \le 1+\varepsilon\,. \qquad \blacksquare$$

Proposição 2.31. *Sejam X um espaço de Banach, $1 \le p \le \infty$ e q o conjugado de p. São equivalentes:*

(a) *X contém ℓ_p^n's uniformemente complementados.*

(b) *X^* contém ℓ_q^n's uniformemente complementados.*

(c) *X^{**} contém ℓ_p^n's uniformemente complementados.*

Demonstração. Provaremos, inicialmente, que (a) $\Rightarrow$ (b) – e o mesmo argumento prova que (b) $\Rightarrow$ (c). Sejam, para cada $n \in \mathbb{N}$, $T_n \colon \ell_q^n \to (\ell_p^n)^*$ um isomorfismo isométrico, I_n, Q_n transformações lineares contínuas,

$$\ell_p^n \xrightarrow{I_n} X \xrightarrow{Q_n} \ell_p^n,$$

com $\sup_{n\in\mathbb{N}}\|I_n\|\|Q_n\| < \infty$ e $Q_n \circ I_n = \mathrm{Id}_{\ell_p^n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Temos, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\ell_q^n \xrightarrow{Q_n^* \circ T_n} X^* \xrightarrow{T_n^{-1}\circ I_n^*} \ell_q^n;$$

e

$$\begin{aligned}(T_n^{-1} \circ I_n^*) \circ (Q_n^* \circ T) &= T^{-1} \circ (I_n^* \circ Q_n^*) \circ T = T^{-1} \circ (Q_n \circ I_n)^* \circ T \\ &= T_n^{-1} \circ (\mathrm{Id}_{\ell_p^n})^* \circ T_n = T_n^{-1} \circ \mathrm{Id}_{(\ell_p^n)^*} \circ T_n \\ &= T_n^{-1} \circ T_n = \mathrm{Id}_{\ell_q^n} .\end{aligned}$$

Ademais, é imediato que $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n^{-1} \circ I_n^*\| \|Q_n^* \circ T_n\| < \infty$, pois, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos $\|T_n\| = \|T_n^{-1}\| = 1$, $\|Q_n^*\| = \|Q_n\|$ e $\|I_n^*\| = \|I_n\|$.

Agora, mostraremos que (c) $\Rightarrow$ (a). Sejam E_n um subespaço de X^{**} isomorfo à ℓ_p^n e $P_n : X^{**} \to X^{**}$ projeção de X^{**} sobre E_n, $n = 1, 2, \ldots$, tais que $\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{d}(E_n, \ell_p^n) < \infty$ e $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|P_n\| < \infty$. Dado $\varepsilon > 0$, pelo Princípio da Reflexividade Local (Teorema 1.47), existe, para cada $n \in \mathbb{N}$, $T_n : E_n \to X$ isomorfismo sobre sua imagem tal que $\|T_n\| \|T_n^{-1}\| \leq 1 + \varepsilon$. Assim, sendo $\varphi_n : \ell_p^n \to E_n$ isomorfismo tal que $\|\varphi_n\| \|\varphi_n^{-1}\| \leq \mathrm{d}(E_n, \ell_p^n) + \varepsilon$, temos que

$$T_n \circ \varphi_n : \ell_p^n \to T_n(E_n)$$

é um isomorfismo que satisfaz

$$\begin{aligned}\|T_n \circ \varphi_n\| \|\varphi_n^{-1} \circ T_n^{-1}\| &\leq \|T_n\| \|T_n^{-1}\| \|\varphi_n\| \|\varphi_n^{-1}\| \\ &\leq (1 + \varepsilon)\big(\mathrm{d}(E_n, \ell_p^n) + \varepsilon\big),\end{aligned}$$

logo

$$\mathrm{d}(T_n(E_n), \ell_p^n) \leq (1 + \varepsilon)\big(\mathrm{d}(E_n, \ell_p^n) + \varepsilon\big).$$

Ainda pelo Princípio da Reflexividade Local, existe, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\widetilde{P}_n$ projeção de X sobre $T_n(E_n)$ tal que

$$\|\widetilde{P}_n\| \leq (1 + \varepsilon)\|P_n\|.$$

Daí, como $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|P_n\| < \infty$, temos $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|\widetilde{P}_n\| < \infty$. E como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, temos

$$\mathrm{d}(T_n(E_n), \ell_p^n) \leq \mathrm{d}(E_n, \ell_p^n),$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. ■

Teorema 2.32. *Seja $1 \le q \le \infty$. Então*

(i) $\ell_q \overset{c}{\hookrightarrow} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus \ell_q^n\right)_{\ell_\infty}$ *e*

(ii) $\ell_\infty(\ell_q) \approx \left(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus \ell_q^n\right)_{\ell_\infty}$.

Demonstração. Começamos provando o item (i). Seja $\mathcal{F}$ o subespaço de $\left(\sum_{i=1}^{\infty} \oplus \ell_q^n\right)_{\ell_\infty}$ de todas as sequências da forma

$$\big((a_1), (a_1, a_2), \ldots, (a_1, a_2, \ldots, a_n), \ldots\big)$$

com $(a_k) \in \ell_q$. Mostraremos que $\mathcal{F}$ é um subespaço complementado de $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus \ell_q^n\right)_{\ell_\infty}$ isometricamente isomorfo à ℓ_q.

Observamos, primeiramente, que $\mathcal{F}$ é isometricamente isomorfo à ℓ_q. De fato, considere transformação linear de $\mathcal{F}$ em ℓ_q dada por $\big((a_1), (a_1, a_2), \ldots\big) \mapsto (a_n)$. Ela é, claramente, bijetora. Se $q = \infty$, é imediato que esta função é uma isometria; para $1 \le q < \infty$, temos, para cada $\big((a_1), (a_1 . a_2), \ldots\big) \in \mathcal{F}$,

$$\begin{aligned}\left\|\big((a_1), (a_1, a_2), \ldots\big)\right\|_{\ell_\infty} &= \sup_{k \in \mathbb{N}} \left[\left(\sum_{n=1}^{k} |a_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right] = \lim_{k \to \infty} \left[\left(\sum_{n=1}^{k} |a_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right] \\ &= \left[\left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right].\end{aligned}$$

A seguir, encontraremos uma projeção de $\left(\sum_{i=1}^{\infty} \oplus \ell_q^n\right)_{\ell_\infty}$ sobre $\mathcal{F}$.

Pela Proposição 1.36, existe um funcional linear $L \in \ell_\infty^*$, multiplicativo (i.e., tal que $L\big((a_n)\big)L\big((b_n)\big) = L\big((a_n b_n)\big)$, quaisquer que sejam $(a_n), (b_n) \in \ell_\infty$), tal que $\|L\| = 1$ e

$$L\big((a_k)\big) = \lim_{k \to \infty} a_k, \quad \text{para toda sequência } (a_k) \text{ convergente}.$$

Definimos

$$\begin{aligned} L_1 : \left(\textstyle\sum_{i=1}^{\infty} \oplus \ell_q^n\right)_{\ell_\infty} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ \big((a_1^1), (a_1^2, a_2^2), \ldots\big) &\longmapsto L\big((a_1^1, a_1^2, a_1^3, \ldots)\big).\end{aligned}$$

e, para $m \geq 2$,

$$\begin{aligned} L_m \colon \big(\textstyle\sum_{i=1}^{\infty} \oplus \ell_q^n\big)_{\ell_\infty} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ \big((a_1^1),\, (a_1^2, a_2^2), \ldots\big) &\longmapsto L\big((\underbrace{0, \ldots, 0}_{m-1 \text{ zeros}}, a_m^m, a_m^{m+1}, a_m^{m+2}, \ldots)\big). \end{aligned}$$

Observamos que cada L_m é linear, contínua e de norma 1. Para ver que a norma de cada L_m é 1, basta notar que, fixado m, temos

$$\begin{aligned} \big\|L\big((0, \ldots, 0, a_m^m, a_m^{m+1}, a_m^{m+2}, \ldots)\big)\big\| &\leq \|(0, \ldots, 0, a_m^m, a_m^{m+1}, a_m^{m+2}, \ldots)\| \\ &\leq \big\|\big((a_1^1),\, (a_1^2, a_2^2), \ldots\big)\big\|_{\ell_\infty}, \\ &\qquad \forall \big((a_1^1),\, (a_1^2, a_2^2), \ldots\big) \in \left(\sum_{i=1}^{\infty} \oplus \ell_q^n\right)_{\ell_\infty}, \end{aligned}$$

e que, sendo

$$y := \big((0),\, (0,0),\, \ldots,\, (0, \ldots, 0),\, \underbrace{(0, \ldots, 1)}_{m\text{-ésima posição}},\, (0, 0, \ldots, 1, 0),\, \ldots\big),$$

temos $\|y\|_{\ell_\infty} = 1$ e $L_m(y) = L\big((0, \ldots, 0, 1, 1, 1, \ldots)\big) = 1$. Observamos também que, se $x \in \mathcal{F}$, $x = \big((a_1),\, (a_1, a_2), \ldots\big)$, então

$$L_m(x) = L\big((0, \ldots, 0, a_m, a_m, a_m, \ldots)\big) = a_m. \tag{2.11}$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$, definimos

$$\begin{aligned} P_k \colon \big(\textstyle\sum_{i=1}^{\infty} \oplus \ell_q^n\big)_{\ell_\infty} &\longrightarrow \ell_q^k \\ x &\longmapsto \big(L_1(x), L_2(x), \ldots, L_k(x)\big). \end{aligned}$$

Claramente, cada P_k é linear e, como

$$\begin{aligned} \big\|\big(L_1(x), \ldots, L_k(x)\big)\big\|^q = \sum_{i=1}^{k} |L_i(x)|^q &\leq \sum_{i=1}^{k} \|L_i\|^q \|x\|^q \\ &= \left(\sum_{i=1}^{k} \|L_i\|^q\right) \|x\|^q. \end{aligned}$$

para todo $x \in \left(\sum_{i=1}^{\infty} \oplus \ell_q^n\right)_{\ell_\infty}$, cada P_k é também contínuo. Seja $k \in \mathbb{N}$. Iremos calcular agora a norma de P_k; fixemos $x = \left((a_1^1), (a_1^2, a_2^2), \dots\right) \in \left(\sum_{i=1}^{\infty} \oplus \ell_q^n\right)_\infty$ e definamos, para cada $1 \le j \le k$, $\theta_j := \operatorname{sgn}(L_j(x))$. Temos

$$\begin{aligned}
\|P_k(x)\|^q = \left\|\left(L_1(x), \dots, L_k(x)\right)\right\|^q &= \sum_{i=1}^{k} |L_i(x)|^q \\
&= \sum_{i=1}^{k} \theta_i^q L_i(x)^q \\
&= \theta_1^q L\left((a_1^1, a_1^2, a_1^3, \dots)\right)^q + \theta_2^q L\left((0, a_2^2, a_2^3, \dots)\right)^q \\
&\quad + \cdots + \theta_k^q L\left((0, \dots, 0, a_k^k, a_k^{k+1}, \dots)\right)^q \\
&= L\left((\theta_1 a_1^1)^q, (\theta_1 a_1^2)^q + (\theta_2 a_2^2)^q, \dots, \sum_{j=1}^{k} (\theta_j a_j^k)^q,\right. \\
&\qquad \left. \sum_{j=1}^{k} (\theta_j a_j^{k+1})^q, \sum_{j=1}^{k} (\theta_j a_j^{k+2})^q, \dots\right).
\end{aligned}$$

Assim, como

$$\begin{aligned}
&\left\|\left((\theta_1 a_1^1)^q, (\theta_1 a_1^2)^q + (\theta_2 a_2^2)^q, \dots, \sum_{j=1}^{k} (\theta_j a_j^k)^q, \sum_{j=1}^{k} (\theta_j a_j^{k+1})^q, \dots\right)\right\| \\
&\quad = \sup\nolimits_{k \in \mathbb{N}} \left\{|\theta_1 a_1^1|^q, |(\theta_1 a_1^2)^q + (\theta_2 a_2^2)^q|, \dots, |\textstyle\sum_{j=1}^{k} (\theta_j a_j^k)^q|, |\textstyle\sum_{j=1}^{k} (\theta_j a_j^{k+1})^q|, \dots\right\} \\
&\quad \le \sup\nolimits_{k \in \mathbb{N}} \left\{|a_1^1|^q, |a_1^2|^q + |a_2^2|^q, \dots, \textstyle\sum_{j=1}^{k} |a_j^k|^q, \textstyle\sum_{j=1}^{k} |a_j^{k+1}|^q, \dots\right\} \\
&\quad = \sup\nolimits_{k \in \mathbb{N}} \left\{\|(a_1^1)\|^q, \|(a_1^2, a_2^2)\|^q, \dots, \|(a_1^k, \dots, a_k^k)\|^q, \|(a_1^{k+1}, \dots, a_{k+1}^{k+1})\|^q, \dots\right\} \\
&\quad = \sup\nolimits_{k \in \mathbb{N}} \left\{\|(a_1^1)\|, \|(a_1^2, a_2^2)\|, \dots, \|(a_1^k, \dots, a_k^k)\|, \|(a_1^{k+1}, \cdots, a_{k+1}^{k+1})\|, \dots\right\}^q = \|x\|^q,
\end{aligned}$$

temos $\|P_k\| \le 1$.

Agora, consideramos a transformação linear dada por

$$\begin{aligned}
P : \left(\textstyle\sum_{i=1}^{\infty} \oplus \ell_q^n\right)_{\ell_\infty} &\longrightarrow \mathcal{F} \\
x &\longmapsto \left(P_1(x), P_2(x), \dots\right).
\end{aligned}$$

Como $\|P_k\| \le 1$, para cada $k \in \mathbb{N}$, segue que P está bem definida. É imediato que P é contínua e, por (2.11), temos,

$$Px = (P_1 x, P_2 x, \dots) = \left((L_1 x), (L_1 x, L_2 x), \dots\right) = x, \qquad \forall x \in \mathcal{F}.$$

Além disso, se $x \in \left(\sum_{i=1}^{\infty} \oplus \ell_q^n\right)_{\ell_\infty}$, temos

$$\|(L_1x, \ldots, L_kx)\| = \left(\sum_{i=1}^{k} |L_ix|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \|x\|,$$

uma vez que $\|P_k\| = 1$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Segue que $\operatorname{Im} P \subseteq \mathcal{F}$, e portanto P é uma projeção sobre $\mathcal{F}$.

Voltamos agora a nossa atenção para o item (ii). Mostraremos que $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus \ell_q^n\right)_{\ell_\infty} \approx \ell_\infty(\ell_q)$ utilizando o Método de Decomposição de Pełczyński (Teorema 2.16).

Primeiramente, notamos que $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus \ell_q^n\right)_{\ell_\infty} \overset{c}{\hookrightarrow} \ell_\infty(\ell_q)$. Com efeito, a aplicação de $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus \ell_q^n\right)_{\ell_\infty}$ em $\ell_\infty(\ell_q)$ dada por

$$\left((a_1^{(1)}), (a_1^{(2)}, a_2^{(2)}), \ldots\right) \longmapsto \left((a_1^{(1)}, 0, 0, \ldots); (a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, 0, 0, \ldots); \ldots\right)$$

é linear, injetora e isometria – logo é um isomorfismo sobre sua imagem. Ademais, a imagem I desta função é subespaço complementado de $\ell_\infty(\ell_q)$, dado que

$$\begin{aligned} P \colon \ell_\infty(\ell_q) &\longrightarrow \ell_\infty(\ell_q) \\ \left((a_j^{(1)}), (a_j^{(2)}), \ldots\right) &\longmapsto \left((a_1^{(1)}, 0, 0, \ldots); (a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, 0, 0, \ldots); \ldots\right) \end{aligned}$$

é projeção sobre I.

Também temos $\ell_\infty(\ell_q) \overset{c}{\hookrightarrow} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus \ell_q^n\right)_{\ell_\infty}$. De fato, já mostramos, no item (i), que $\ell_q \overset{c}{\hookrightarrow} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus \ell_q^n\right)_{\ell_\infty}$. Assim, pela Proposição 2.29, temos

$$\ell_\infty(\ell_q) \overset{c}{\hookrightarrow} \ell_\infty\left(\left(\sum_{i=1}^{\infty} \oplus \ell_q^n\right)_{\ell_\infty}\right) \approx \left(\sum_{i=1}^{\infty} \oplus \ell_q^n\right)_{\ell_\infty}.$$

Como $\ell_\infty\big(\ell_\infty(\ell_q)\big) \approx \ell_\infty(\ell_q)$, acabou.

■

Teorema 2.33 (Díaz–Kalton). *Seja X um espaço de Banach. São equivalentes:*

(i) *$\ell_\infty(X)$ contém uma cópia complementada de ℓ_1.*

(ii) *X contém ℓ_1^n's uniformemente complementados.*

Demonstração. Ver [6], página 100, Teorema 5.2.3. ∎

Teorema 2.34 (Maurey–Pisier). *Seja X um espaço de Banach. Então X contém ℓ_∞^n's uniformente se, e somente se, X não tem cotipo finito.*

Demonstração. Ver [10], página 283, Teorema 14.1. ∎

Proposição 2.35.

(i) $\max\{q, 2\}$ *é cotipo de* $(\sum_{i=1}^{\infty} \oplus \ell_q^n)_{\ell_r}$, *para qualquer* $2 \leq q < \infty$, *se* $1 \leq r \leq q$.

(ii) $(\sum_{i=1}^{\infty} \oplus \ell_\infty^n)_{\ell_r}$ *não tem cotipo finito, para qualquer* $1 \leq r < \infty$.

Demonstração. Observamos que $(\sum_{i=1}^{\infty} \oplus \ell_\infty^n)_{\ell_r}$ contém ℓ_∞^n's uniformemente complementados, pela Proposição 2.26. Assim, segue do Teorema de Maurey–Pisier (Teorema 2.34) que $(\sum_{i=1}^{\infty} \oplus \ell_\infty^n)_{\ell_r}$ não tem cotipo finito. Isto prova o item (ii).

Mostraremos agora o item (i). Pela Proposição 2.29, temos que $(\sum_{i=1}^{\infty} \oplus \ell_q^n)_{\ell_r} \hookrightarrow \ell_r(\ell_q)$, e sabemos que $\ell_r(\ell_q)$ tem cotipo $\max\{q, 2\}$, pela Proposição 2.18. Assim, como cotipo é preservado por isomorfismos e herdado por subespaços, temos que $\max\{q, 2\}$ é cotipo de $(\sum_{i=1}^{\infty} \oplus \ell_p^n)_{\ell_r}$. ∎

Capítulo 3

Subespaços de $\ell_p(\ell_q)$, $1 \leq p, q < \infty$

Nas preliminares, Proposição 1.60, mostramos que $\ell_p \not\hookrightarrow \ell_r$, se $p \neq r$, com $1 \leq p, r < \infty$, ou seja, temos $\ell_p \hookrightarrow \ell_r$ somente na situação trivial $p = r$. Nesta seção iremos provar um resultado que é semelhante a este. Mostraremos que, se $1 \leq p_0, q_0, p_1, q_1 < \infty$ então $\ell_{p_0}(\ell_{q_0}) \hookrightarrow \ell_{p_1}(\ell_{q_1})$ somente na situação trivial (Teorema 3.6).

Inicialmente, introduzimos a seguinte notação que será utilizada repetidamente. Se $m \in \mathbb{N}$ e X é uma soma infinita de espaços de Banach, isto é, existem $X_1, X_2, \ldots$ espaços de Banach tais que são espaços $X = (\sum_{n=1}^{\infty} \oplus X_n)_{c_0}$ ou $X = (\sum_{n=1}^{\infty} \oplus X_n)_{\ell_p}$, $1 \leq p \leq \infty$, então a função de X em X dada por $(x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_m, 0, 0, \ldots)$, é denotada por P_m. Chamamos esta função de *m-ésima projeção natural sobre X*.

Proposição 3.1. *Sejam $1 \leq p < \infty$ e X um espaço de Banach. Se Y é um subespaço fechado de $\ell_p(X)$ e $\ell_p \not\hookrightarrow Y$ então existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $P_m|_Y$ é um isomorfismo sobre sua imagem para cada $m \geq N$.*

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que para cada $N \in \mathbb{N}$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $m > N$ e $P_m|_Y$ não é um isorfismo. Então, pela Proposição 1.10, existe $m_1 > 1$ e $y^1 \in S_Y$ tal que

$$\|P_{m_1}(y^1)\| < \frac{1}{2^2}.$$

Ademais, existe $\tilde{m} \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $m > \tilde{m}$, $\|y^1 - P_m(y^1)\| < \frac{1}{2^2}$. Assim, podemos escolher m_2 suficientemente grande de modo que $m_2 > m_1$ e $P_{m_2}|Y$ não é isomorfismo; logo

$\|y^1 - P_{m_2}(y^1)\| < \frac{1}{2^2}$ e existe $y^2 \in S_Y$ tal que

$$\|P_{m_2}(y^2)\| < \frac{1}{2^3}.$$

Procedendo indutivamente, obtemos $m_1 < m_2 < \cdots$ e uma sequência (y^n) de elementos de S_Y tais que

$$\|P_{m_k}(y^k)\| < \frac{1}{2^{k+1}} \quad \text{e} \quad \|y^k - P_{m_{k+1}}(y^k)\| < \frac{1}{2^{k+1}}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Definimos

$$w_k := (P_{m_{k+1}} - P_{m_k})(y^k), \quad k = 1, 2, \dots$$

Claramente, (w_k) é uma sequência com suportes disjuntos. Além disso, (w_k) é seminormalizada, pois, dado $k \in \mathbb{N}$, temos

$$\|w_k\| \le \|y^k\| = 1,$$

e

$$\begin{aligned}
\|w_k\| &= \|P_{m_{k+1}}(y^k) - y^k - P_{m_k}(y^k) + y^k\| \\
&\ge \|y^k - P_{m_k}(y^k)\| - \|P_{m_{k+1}}(y^k) - y^k\| \\
&\ge \|y^k\| - \|P_{m_k}(y^k)\| - \|P_{m_{k+1}}(y^k) - y^k\| \\
&> 1 - \frac{1}{2^{k+1}} - \frac{1}{2^{k+1}} \\
&\ge 1 - 1/4 - 1/4 = 1/2.
\end{aligned}$$

Logo, pela Proposição 2.10, (w_k) é uma sequência básica e (w_k) é uma ℓ_p-sequência.

Observamos que

$$\|y^k - w^k\| = \|y^k - P_{m_{k+1}}(y^k) + P_{m_k}(y^k)\| < \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}} \xrightarrow{k\to\infty} 0.$$

Portanto, pelo Corolário 1.56 e pela Proposição 1.59, existe uma subsequência de (y^k) que é uma ℓ_p-sequência. Mas isto é absurdo, pois, por hipótese, $\ell_p \not\hookrightarrow Y$. ■

Corolário 3.2. *Sejam $1 \le p < \infty$ e X um espaço de Banach tal que $X \approx X^2$. Se Y é um espaço de Banach tal que $Y \hookrightarrow \ell_p(X)$ então $Y \hookrightarrow X$ ou $\ell_p \hookrightarrow Y$.*

Demonstração. Seja $Y \hookrightarrow \ell_p(X)$ e suponhamos que $\ell_p \not\hookrightarrow Y$. Pela Proposição 3.1 temos $Y \hookrightarrow X^m$ para algum $m \in \mathbb{N}$. Como $X^m \approx X$ temos que $Y \hookrightarrow X$. ∎

Proposição 3.3. *Sejam $1 \le p, q, r < \infty$. Então $\ell_r \hookrightarrow \ell_p(\ell_q)$ se, e só se, $r = p$ ou $r = q$.*

Demonstração. Seja $\ell_r \hookrightarrow \ell_p(\ell_q)$. Como $\ell_q^2 \approx \ell_q$, temos, pelo Corolário 3.2, que $\ell_r \hookrightarrow \ell_q$ ou $\ell_p \hookrightarrow \ell_r$. Logo, pela Proposição 1.60, $r = q$ ou $r = p$.

Reciprocamente, pela Proposição 2.8, temos que se $r = p$ ou $r = q$ então $\ell_r \hookrightarrow \ell_p(\ell_q)$. ∎

Lema 3.4. *Sejam $1 \le p, q < \infty$, com $p \ne q$, e $T: \ell_q(\ell_p) \to \ell_p(\ell_q)$ uma transformação linear contínua. Então, para cada $\varepsilon > 0, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $m \in \mathbb{N}$, existem $k' \in \mathbb{N}$, $k' > k$, e $z \in \ell_q(\ell_p)$ tal que*

$$z = (P_{k'} - P_k)(z), \quad \frac{3}{4} < \|z\| \le 1 \quad e \quad \|P_m T(z)\| < \varepsilon.$$

Demonstração. Seja $\mathrm{Id}: \ell_q(\ell_p) \longrightarrow \ell_q(\ell_p)$ a função identidade. Primeiramente, observamos que $\ell_q(\ell_p) \approx (\mathrm{Id} - P_k)(\ell_q(\ell_p))$, uma vez que a transformação linear de $\ell_q(\ell_p)$ em $(\mathrm{Id} - P_k)(\ell_q(\ell_p))$ dada por $(x_n) \longmapsto (\underbrace{0, \ldots, 0}_{k \text{ zeros}}, x_1, x_2, \ldots)$ é um isomorfismo isométrico. Também temos

$$P_m(\ell_p(\ell_q)) \approx \ell_q^m \approx \ell_q\,,$$

logo $P_m T|_{(\mathrm{Id} - P_k)(\ell_q(\ell_p))}$ não é um isomorfismo sobre sua imagem. Com efeito, suponhamos, por absurdo, que $P_m T|_{(\mathrm{Id} - P_k)(\ell_q(\ell_p))}$ é um isomorfismo sobre sua imagem. Então a sua imagem, $P_m T\big((\mathrm{Id} - P_k)(\ell_q(\ell_p))\big)$, um é subespaço fechado de $P_m(\ell_p(\ell_q)) \approx \ell_q$, e assim

$$(\mathrm{Id} - P_k)(\ell_q(\ell_p)) \hookrightarrow \ell_q\,.$$

Consequentemente,

$$\ell_p \hookrightarrow \ell_q(\ell_p) \approx (\mathrm{Id} - P_k)(\ell_q(\ell_p)) \hookrightarrow \ell_q\,,$$

de modo que $\ell_p \hookrightarrow \ell_q$, o que é absurdo, pois $p \ne q$,

Sejam $\varepsilon > 0$, $k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ e $m \in \mathbb{N}$. Como $P_m T|_{(I - P_k)(\ell_p(\ell_q))}$ não é um isomorfismo sobre sua imagem, existe $y = (y_n) \in (\mathrm{Id} - P_k)(\ell_p(\ell_q))$ tal que $\|y\| = 1$ e $\|P_m T(y)\| < \varepsilon$. Como

$y = \lim_{n\to\infty} P_n(y)$ e $P_m T$ é contínua, temos

$$\lim_{n\to\infty} P_m T(P_n(y)) = P_m T(y)\,.$$

e assim podemos escolher $k' \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $k' > k$,

$$(\frac{3}{4})^p < \sum_{n=1}^{k'} \|y_n\|^p \le 1$$

e

$$\big\|P_m T\big(P_{k'}(y)\big) - P_m T y\big\| < \varepsilon - \|P_m T y\|\,.$$

Consequentemente, pela desigualdade triangular, $\big\|P_m T\big(P_{k'}(y)\big)\big\| < \varepsilon$. Definimos $z := P_{k'}(y)$. Observamos que $P_k(z) = 0$, pois $y \in (\mathrm{Id} - P_k)(\ell_q(\ell_p))$ e $k' > k$. Portanto

$$z = (P_{k'} - P_k)(z), \quad \frac{3}{4} < \|z\| \le 1 \quad \text{e} \quad \|P_m T(z)\| < \varepsilon\,. \qquad \blacksquare$$

Proposição 3.5. *Sejam* $1 \le p, q < \infty$. *Então* $\ell_q(\ell_p) \hookrightarrow \ell_p(\ell_q)$ *se, e somente se,* $p = q$.

Demonstração. É claro que, se $p = q$, então $\ell_q(\ell_p) \hookrightarrow \ell_p(\ell_q)$.

Reciprocamente, seja $T\colon \ell_q(\ell_p) \longrightarrow \ell_p(\ell_q)$ um isomorfismo sobre sua imagem. Então, pela Proposição 1.9, existe $M > 0$ tal que

$$\frac{1}{M}\|x\| \le \|Tx\| \le M\|x\|. \quad \forall x \in \ell_q(\ell_p)\,.$$

Aplicando o Lema anterior para $\varepsilon_1 = \min\left\{\frac{1}{4M}, \frac{1}{2^1}\right\}$, $k_1 = 0$ e $m_1 = 1$, escolhemos $k_2 \in \mathbb{N}$, $k_2 > k_1$, e $z^1 \in \ell_q(\ell_p)$ satisfazendo

(a) $z^1 = (P_{k_2} - P_{k_1})(z^1)$, $\frac{3}{4} < \|z^1\| \le 1$;

(b) $\|P_{m_1} T(z^1)\| < \min\left\{\frac{1}{4M}, \frac{1}{2^1}\right\}$.

Como $\|Tz^1\| \ge \frac{1}{M}\|z^1\| > \frac{3}{4M}$, temos

$$\|T(z^1) - P_{m_1} T(z^1)\| > \frac{1}{2M}\,,$$

pois

$$\|T(z^1) - P_{m_1}T(z^1)\| \geq \|Tz^1\| - \|P_{m_1}Tz^1\| > \frac{3}{4M} - \frac{1}{4M} = \frac{1}{2M}\,.$$

Sendo $T(z^1) = \lim P_m T z^1$, existe $m_2 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $m_2 > m_1$ e

(c) $\|Tz^1 - P_{m_2}Tz^1\| < \min\left\{\frac{1}{2^2},\ \|Tz^1 - P_{m_1}Tz^1\| - \frac{1}{2M}\right\}$.

Assim, temos

(d) $\|(P_{m_2} - P_{m_1})(Tz^1)\| > \frac{1}{2M}$,

pois

$$\begin{aligned}\|P_{m_1}Tz^1 - P_{m_2}Tz^1\| &\geq \|P_{m_1}Tz^1 - Tz^1\| - \|Tz^1 - P_{m_2}Tz^1\| \\ &> \|P_{m_1}Tz^1 - Tz^1\| - \left(\|P_{m_1}Tz^1 - Tz^1\| - \frac{1}{2M}\right) \\ &= \frac{1}{2M}\,.\end{aligned}$$

Procedendo indutivamente, obtemos naturais $k_1 < k_2 < \cdots$, $m_1 < m_2 < \cdots$ e (z^j) em $\ell_q(\ell_p)$ tais que, para cada $j \in \mathbb{N}$,

(1) $z^j = (P_{k_{j+1}} - P_{k_j})(z^j)$, $\frac{3}{4} < \|z^j\| \leq 1$;

(2) $\|P_{m_j}(Tz^j)\| < \frac{1}{2^j}$;

(3) $\|Tz^j - P_{m_{j+1}}(Tz^j)\| < \frac{1}{2^{j+1}}$;

(4) $\|(P_{m_{j+1}} - P_{m_j})Tz^j\| > \frac{1}{2M}$.

Por (1), temos que (z^j) é uma sequência seminormalizada com suportes disjuntos. Logo, pela Proposição 2.10, (z^j) é uma ℓ_q-sequência.

Por (4), sendo $w^j := (P_{m_{j+1}} - P_{m_j})Tz^j$, $j = 1, 2, \ldots$, como (z^j) é seminormalizada e as projeções tem norma 1, temos que (w^j) é uma sequência seminormalizada em $\ell_p(\ell_q)$. Logo, novamente pela Proposição 2.10, (w^j) é uma ℓ_p-sequência.

Por (2) e (3), temos

$$\begin{aligned}\|Tz^j - w^j\| &\leq \|Tz^j - P_{m_{j+1}}(z^j)\| + \|P_{m_j}Tz^j\| \\ &< \frac{1}{2^{j+1}} + \frac{1}{2^j} \longrightarrow 0,\end{aligned}$$

portanto, pelo Corolário 1.56, existe (Tz^{j_n}) subsequência de (Tz^j) tal que

$$(Tz^{j_n}) \sim (w_{j_n}) \sim (e_n^{\ell_q}).$$

Agora, como T é isomorfismo sobre sua imagem, temos que $T|_{[z^{j_n}]}$ é um isomorfismo sobre $[Tz^{j_n}]$ (Proposição 1.50). Assim, $(z^{j_n}) \sim (Tz^{j_n})$, e temos

$$(e_n^{\ell_q}) \sim (z^{j_n}) \sim (Tz^{j_n}) \sim (e_n^{\ell_p}).$$

Portanto, pela Proposição 1.58, temos $p = q$. ■

O Teorema a seguir é o principal resultado deste capítulo.

Teorema 3.6. *Sejam* $1 \le p_0, p_1, q_0, q_1 < \infty$. *Então* $\ell_{p_1}(\ell_{q_1}) \hookrightarrow \ell_{p_0}(\ell_{q_0})$ *se, e somente se, vale alguma das seguintes condições:*

(1) $p_1 = q_1 = p_0$,

(2) $p_1 = q_1 = q_0$,

(3) $p_1 = p_0$ *e* $q_1 = q_0$.

Demonstração. Iniciemos pela recíproca. Se $p_1 = q_1 = p_0$, então, pela Proposição 2.8, temos

$$\ell_{p_1}(\ell_{q_1}) = \ell_{p_0}(\ell_{p_0}) \approx \ell_{p_0} \hookrightarrow \ell_{p_0}(\ell_{q_0}).$$

Se $p_1 = q_1 = q_0$, temos, analogamente

$$\ell_{p_1}(\ell_{q_1}) = \ell_{q_0}(\ell_{q_0}) \approx \ell_{q_0} \hookrightarrow \ell_{p_0}(\ell_{q_0}).$$

Se $p_1 = p_0$ e $q_1 = q_0$ o resultado é imediato.

Agora, suponhamos que $\ell_{p_1}(\ell_{q_1}) \hookrightarrow \ell_{p_0}(\ell_{q_0})$. Então, pela Proposição 2.8, temos $\ell_{p_1} \hookrightarrow \ell_{p_0}(\ell_{q_0})$ e $\ell_{q_1} \hookrightarrow \ell_{p_0}(\ell_{q_0})$ de modo que, pela Proposição 3.3, $p_1, q_1 \in \{p_0, q_0\}$. Podemos admitir, sem perda de generalidade, que $p_0 \neq q_0$, pois, caso contrário, temos $p_1 = q_1 = p_0 = q_0$ e o resultado é trivial. Uma das seguintes condições deve ser satisfeita:

(1) $p_1 = q_1 = p_0$,

(2) $p_1 = q_1 = q_0$,

(3) $p_1 = p_0$ e $q_1 = q_0$,

(4) $p_1 = q_0$, $q_1 = p_0$.

Mas, como $p_0 \neq q_0$, (4) não pode ocorrer, pois contradiz a Proposição 3.5. ■

O Teorema que acabamos de apresentar é um grande passo em direção ao resultado que queremos provar (Teorema 7.1), mas ele não inclue os casos $p, q = \infty$ nem lida com os espaços $c_0(\ell_p)$, $\ell_p(c_0)$. Estes casos restantes são o objeto de estudo dos capítulos seguintes.

Capítulo 4

Subespaços complementados de $\ell_p(\ell_\infty)$, $1 \leq p < \infty$

Neste capítulo estudamos os subespaços complementados de $\ell_p(\ell_\infty)$, $1 \leq p < \infty$. Ele é dividido em duas seções: na primeira, consideramos o caso em que $p = 1$, enquanto na segunda tratamos o caso em que $1 < p < \infty$.

Iniciamos nosso estudo com a seguinte

Proposição 4.1. *Se* $1 \leq p, q, p_0 \leq \infty$ *então*

(i) $\ell_p(\ell_q) \hookrightarrow \ell_{p_0}(\ell_\infty)$,

(ii) $\ell_p(\ell_q) \hookrightarrow \ell_\infty(\ell_{p_0})$.

Demonstração. Inicialmente observamos que, se X é um espaço de Banach é separável, então $X \hookrightarrow \ell_\infty$ (Proposição 1.6) e $X^* \hookrightarrow \ell_\infty$. Para ver que $X^* \hookrightarrow \ell_\infty$ basta notar que, sendo $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ denso em S_X, a função de X^* em ℓ_∞ dada por $f \mapsto \big(f(x_n)\big)$ é uma isometria.

Se $p, q \neq \infty$ então

$$\ell_p(\ell_q) \hookrightarrow \ell_\infty \hookrightarrow \ell_\infty(\ell_{p_0})$$

e também

$$\ell_p(\ell_q) \hookrightarrow \ell_\infty \hookrightarrow \ell_{p_0}(\ell_\infty)\,.$$

Se $p = \infty$ e $q \neq \infty$ então, sendo q' o conjugado de q, temos

$$\ell_\infty(\ell_q) \approx \ell_1(\ell_{q'})^* \hookrightarrow \ell_\infty \hookrightarrow \ell_\infty(\ell_{p_0})$$

e também

$$\ell_\infty(\ell_q) \approx \ell_1(\ell_{q'})^* \hookrightarrow \ell_\infty \hookrightarrow \ell_{p_0}(\ell_\infty)\,.$$

O caso em que $p \neq \infty$ e $q = \infty$ é análogo ao anterior. ■

Procedendo com o estudo dos subespaços de $\ell_\infty(\ell_p)$ e $\ell_p(\ell_\infty)$, a proposição anterior nos diz que não iremos obter um resultado análogo ao Teorema 3.6. Assim, não basta estudarmos os subespaços, e por isso voltamos nossa atenção aos subespaços complementados.

4.1 Subespaços complementados de $\ell_1(\ell_\infty)$

Nesta seção estudamos os subespaços complementados de $\ell_1(\ell_\infty)$. Veremos que $\ell_1(\ell_\infty)$ não contém um subespaço complementado isomorfo à $\ell_\infty(\ell_1)$, resultado que nos será útil posteriormente.

Lema 4.2. *Sejam $T\colon (\sum_{n=1}^\infty \oplus \ell_\infty^n)_{\ell_1} \to c_0(\ell_1)$ uma transformação linear contínua, $m \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon > 0$. Então existe um ponto z da esfera unitária de $(\sum_{n=1}^\infty \oplus \ell_\infty^n)_{\ell_1}$ tal que $\|P_m T(z)\| < \varepsilon$.*

Demonstração. Observamos que $P_m(c_0(\ell_1))$ é isometricamente isomorfo à $\ell_\infty^m(\ell_1)$. Aqui denotamos por $\ell_\infty^m(\ell_1)$ o espaço $\ell_1^m = \ell_1 \oplus \cdots \oplus \ell_1$ munido da norma do máximo. Por sua vez, $\ell_\infty^m(\ell_1)$ é isomorfo à ℓ_1, e relembramos que ℓ_1 tem cotipo finito (Proposição 1.46).

Iremos mostrar que $P_m T$ não é um isomorfismo sobre sua imagem. Suponhamos, por absurdo, que $P_m T$ é um isomorfismo sobre sua imagem, que iremos denotar por I. Assim, temos $c_0(\ell_1) \approx I$. Como

$$I \subseteq P_m(c_0(\ell_1)) \approx \ell_1\,,$$

e cotipos são preservados por subespaços, temos que I tem cotipo finito. Por sua vez, $c_0(\ell_1)$ não tem cotipo finito (Proposição 2.17). Mas isto é uma contradição, uma vez que $c_0(\ell_1) \approx I$.

Dado que $P_m T$ não é isomorfismo sobre sua imagem, basta aplicar a Proposição 1.10 para concluirmos a demonstração. ■

Proposição 4.3. *$c_0(\ell_1)$ não contém um subespaço isomorfo à $(\sum_{n=1}^\infty \oplus \ell_\infty^n)_{\ell_1}$.*

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que $c_0(\ell_1)$ contém um subespaço isomorfo à $(\sum_{n=1}^\infty \oplus \ell_\infty^n)_{\ell_1}$. Então existe uma transformação linear $T: (\sum_{n=1}^\infty \oplus \ell_\infty^n)_{\ell_1} \to c_0(\ell_1)$ que é um isomorfismo sobre sua imagem. Logo, pela Proposição 1.9, existe $M \geq 1$ tal que

$$\frac{1}{M}\|x\| \leq \|Tx\| \leq M\|x\|, \tag{4.1}$$

para todo $x \in (\sum_{n=1}^\infty \oplus \ell_\infty^n)_{\ell_1}$.

Tomemos $m_1 := 1$. Pelo lema anterior, existe um ponto z_1 na esfera unitária de $(\sum_{n=1}^\infty \oplus \ell_\infty^n)_{\ell_1}$ tal que

$$\|P_{m_1}T(z_1)\| \leq \min\left\{\frac{1}{2M}, \frac{1}{2}\right\}.$$

Logo, por (4.1), temos $\frac{1}{M} \leq \|Tz_1\|$. Assim, temos

$$\begin{aligned}\|Tz_1 - P_{m_1}T(z_1)\| &\geq \|Tz_1\| - \|P_{m_1}Tz_1\| \\ &> \frac{1}{2M}.\end{aligned}$$

Como $Tz_1 = \lim_{m\to\infty} P_m T(z_1)$, existe $m_2 > m_1$ tal que

$$\|Tz_1 - P_{m_2}T(z_1)\| < \|Tz_1 - P_{m_1}T(z_1)\| - \frac{1}{2M};$$

e daí segue que

$$\|P_{m_2}T(z_1) - P_{m_1}T(z_1)\| > \frac{1}{2M}.$$

Naturalmente, podemos supor que m_2 é suficientemente grande tal que

$$\|Tz_1 - P_{m_2}T(z_1)\| < \frac{1}{2^2}.$$

Prosseguindo indutivamente, construímos uma sequência (z_k) na esfera unitária de $(\sum_{n=1}^\infty \oplus \ell_\infty^n)_{\ell_1}$ e escolhemos naturais $m_1 < m_2 < \cdots$ tais que, para todo $k \in \mathbb{N}$,

(1) $\|P_{m_k}T(z_k)\| < \frac{1}{2^k}$,

(2) $\|(P_{m_{k+1}} - P_{m_k})Tz_k\| > \frac{1}{2M}$, e

(3) $\|Tz_k - P_{m_{k+1}}Tz_k\| < \frac{1}{2^{k+1}}$.

Definimos para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$w_k := (P_{m_{k+1}} - P_{m_k})Tz_k, \qquad u_k := Tz_k - w_k.$$

Assim, estamos decompondo cada Tz_k em duas parcelas, uma vez que $Tz_k = w_k + u_k$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Por construção, (w_k) e (u_k) satisfazem:

(i) (w_k) é seminormalizada com suportes disjuntos (por (2))

(ii) (u_k) é *nula*, isto é, converge a 0 (por (1) e (3))

Pelo Teorema de Rosenthal (Teorema 1.52), tomando uma subsequência se necessário, podemos assumir que

(a) (z_k) é fracamente Cauchy, ou

(b) (z_k) é uma ℓ_1-sequência.

Mostraremos que, em ambos os casos, chegamos a uma contradição.

Notemos inicialmente que, por ter dimensão finita, ℓ_∞^n é um espaço de Schur para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, pela Proposição 2.4 , $(\sum_{n=1}^\infty \oplus \ell_\infty^n)_{\ell_1}$ é um espaço de Schur. Assim, no caso (a), pela Proposição 1.51, (z_k) é convergente na topologia induzida pela norma.

Seja $z = \lim_{k\to\infty} z_k$. Então (w_k) converge, pois

$$\lim_{k\to\infty} w_k = \lim_{k\to\infty} Tz_k - u_k = \lim_{k\to\infty} Tz_k = Tz.$$

Assim, como (w_k) converge a Tz coordenada-a-coordenada e w_k tem suportes disjuntos, temos $Tz = 0$ – absurdo, pois $\|Tz_k\| \ge \frac{1}{M}$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

No caso (b), como T é isomorfismo sobre sua imagem, temos que (Tz_k) é uma ℓ_1-sequência. Como $\|Tz_k - w_k\| \to 0$, o Princípio das Pequenas Perturbações (Proposição 1.55) nos diz que (w_k) tem uma subsequência que também é uma ℓ_1-sequência. Mas isto também é absurdo, pois, pela Proposição 2.10 uma sequência seminormalizada com suportes disjuntos em $c_0(\ell_1)$ é uma c_0-sequência, o que nos leva à conclusão $c_0 \approx \ell_1$. Para ver que $c_0 \approx \ell_1$ é de fato um absurdo, basta notar que se $c_0 \approx \ell_1$ então, tomando duais, $\ell_1 \approx \ell_\infty$, e isto não pode ocorrer pois ℓ_∞ não é separável. ■

Corolário 4.4. *$c_0(\ell_1)$ não contém um subespaço isomorfo à $\ell_1(c_0)$.*

Demonstração. Basta observar que $(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus \ell_\infty^n)_{\ell_1} \hookrightarrow \ell_1(c_0)$ (Proposição 2.29) e utilizar a Proposição 4.3. ■

Corolário 4.5. *$\ell_\infty(\ell_1)$ contém um subespaço complementado isomorfo à $L_1([0,1])$.*

Demonstração. Como $\ell_\infty(\ell_1) = \ell_1(c_0)^*$ e , pela Proposição 2.29, $\ell_1(c_0)$ contém um subespaço isomorfo à $(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus \ell_\infty^n)_{\ell_1}$, o resultado é consequência do Teorema de Hagler–Stegall (Teorema 2.9). ■

Corolário 4.6. *$\ell_1(\ell_\infty)$ não contém um subespaço complementado isomorfo à $L_1([0,1])$.*

Demonstração. Como $\ell_1(\ell_\infty) = c_0(\ell_1)^*$, o resultado segue da Proposição 4.3 e do Teorema de Hagler–Stegall (Teorema 2.9). ■

Como consequência imediata dos dois Corolários anteriores, temos os dois seguintes resultados:

Teorema 4.7. *$\ell_\infty(\ell_1)$ e $\ell_1(\ell_\infty)$ não são isomorfos.*

Proposição 4.8. *$\ell_1(\ell_\infty)$ não contém um subespaço complementado isomorfo à $\ell_\infty(\ell_1)$.*

4.2 Subespaços complementados de $\ell_p(\ell_\infty)$, $1 < p < \infty$

Nesta seção prosseguimos com o estudo dos subespaços complementados de $\ell_p(\ell_\infty)$, $1 \le p < \infty$, tratando agora do caso em que $p \neq 1$.

Proposição 4.9. *Sejam $1 < p, q < \infty$ e X um espaço de Banach com a propriedade de Dunford-Pettis. Se $\ell_q \overset{c}{\hookrightarrow} \ell_p(X)$ então $q \geq p$.*

Demonstração. Sejam $T\colon \ell_q \to \ell_p(X)$ um isomorfismo sobre sua imagem e P uma projeção de $\ell_p(X)$ sobre $Y := \operatorname{Im} T$. Definimos $y_n := T(e_n^{\ell_q})$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Assim, (y_n) é base de Y e $(y_n) \sim (e_n^{\ell_q})$.

Sejam $m_1 < m_2 < \cdots$ tais que

$$\|y^k - P_{m_k}(y^k)\| \xrightarrow{k\to\infty} 0\,. \tag{4.2}$$

Mostraremos, primeiramente, que existem naturais $k_1 < k_2 < \cdots$ tais que

$$PP_{m_{k_{j-1}}}(y^{k_j}) \xrightarrow{j\to\infty} 0. \tag{4.3}$$

Observamos que $y^k \xrightarrow[k\to\infty]{w} 0$, pois $(y^k) \sim (e_k^{\ell_q})$. Como $P_m(\ell_p(X)) \approx X^m$ tem a propriedade de Dunford–Pettis e $Y \approx \ell_q$ é reflexivo, temos, pela Proposição 1.32, que a transformação linear contínua

$$P|_{P_m(\ell_p(X))}\colon P_m(\ell_p(X)) \longrightarrow Y$$

transforma sequências fracamente convergentes em sequências convergentes na topologia induzida pela norma, qualquer que seja $m \in \mathbb{N}$. Em particular, $(PP_m(y^k))_k$ é uma sequência nula, para todo $m \in \mathbb{N}$. Agora, seja $k_1 := 1$. Escolhemos $k_2 > k_1$ tal que $\|PP_{m_{k_1}}(y^{k_2})\| < \frac{1}{2}$. Procedendo indutivamente, temos $k_1 < k_2 < \cdots$ tais que $\|PP_{m_{k_{j-1}}}(y^{k_j})\| < \frac{1}{j}$, para cada $j \geq 2$, e portanto $PP_{m_{k_{j-1}}}(y^{k_j}) \xrightarrow{j\to\infty} 0$.

Definimos, para cada $j \geq 2$,

$$w^j := P_{m_{k_j}}(y^{k_j}) - P_{m_{k_{j-1}}}(y^{k_j}).$$

Então, por (4.2) e (4.3), lembrando que, para todo $j \in \mathbb{N}$, $Py^{k_j} = y^{k_j}$, temos

$$\begin{aligned} y^{k_j} - Pw^j &= Py^{k_j} - Pw^j \\ &= P(y^{k_j} - P_{m_{k_j}} y^{k_j}) + PP_{m_{k_{j-1}}}(y^{k_j}) \longrightarrow 0\,. \end{aligned}$$

Notamos também que, como (y^k) é uma ℓ_q-sequência, (y^k) é seminormalizada. Logo, pelo Corolário 1.56, tomando uma subsequência se necessário, podemos supor que $(P(w^j))_{j\geq 2}$ é uma ℓ_q-sequência. Consequentemente, $(w^j)_{j\geq 2}$ é seminormalizada, uma vez que

$$\|P(w^j)\| \leq \|P\|\|w^j\| \leq \|P\|(2\|y^{k_j}\|), \quad \forall j \geq 2\,.$$

e assim, como $(w^j)_{j\geq 2}$ é uma sequência em $\ell_p(X)$ com suportes disjuntos, concluímos, pela Proposição 2.10, que $(w_j)_{j\geq 2}$ é uma ℓ_p-sequência.

Mostramos que P leva uma ℓ_p-sequência em uma ℓ_q-sequência. Pela Proposição 1.57, temos que $q \geq p$ – como queríamos. ∎

Teorema 4.10. *Sejam $1 \leq p, q < \infty$. Então $\ell_q \overset{c}{\hookrightarrow} \ell_p(\ell_\infty)$ se, e somente se, $q = p$.*

Demonstração. Já mostramos, na Proposição 2.8, que se $q = p$ então $\ell_q \overset{c}{\hookrightarrow} \ell_p(\ell_\infty)$. A seguir, provaremos a recíproca.

Se $q = 1$, o resultado segue do Teorema 1.43, uma vez que ℓ_∞ é primo.

Se $p = 1$, as Proposições 2.14 e 2.15 nos dizem que ℓ_q é isomorfo à ℓ_1 ou a $(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus \ell_\infty^n)_{\ell_1}$. Mas o segundo caso é impossível, pois $(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus \ell_\infty^n)_{\ell_1}$ não tem cotipo finito (Teorema 2.34), e portanto $q = 1$.

Suponhamos $1 < p, q < \infty$. Se $p \geq q$, como ℓ_∞ tem a propriedade de Dunford–Pettis, temos pela Proposição 4.9 que $p \leq q$, logo $p = q$. Se $p \leq q$, passando aos duais, obtemos $\ell_{q'} \overset{c}{\hookrightarrow} \ell_{p'}(\ell_\infty^*)$, onde p', q' são os conjugados de p, q respectivamente. Como $p' \geq q'$ e ℓ_∞^* também tem a propriedade de Dunford–Pettis, aplicando novamente a Proposição 4.9 obtemos $p' = q'$, e assim $p = q$. ∎

Proposição 4.11. *Sejam $1 < p < \infty$, X um espaço de Banach tal que $X \approx X^2$ e Y um espaço de Banach com a propriedade de Schur. Então $Y \overset{c}{\hookrightarrow} \ell_p(X)$ se, e somente se, $Y \overset{c}{\hookrightarrow} X$.*

Demonstração. Sejam E um subespaço complementado de $\ell_p(X)$ isomorfo à Y e P uma projeção de $\ell_p(X)$ sobre E. Denotaremos por Id a função identidade de $\ell_p(X)$ em $\ell_p(X)$. Provaremos, primeiramente, que

$$\lim_{m\to\infty} \|P(\mathrm{Id} - P_m)\| = 0\,. \tag{4.4}$$

Suponhamos, por absurdo, que $\lim_{m\to\infty} \|P(\mathrm{Id} - P_m)\| \neq 0$. Então existem $\varepsilon > 0$ e naturais $m_1 < m_2 < \cdots$ tais que $\|P(\mathrm{Id} - P_{m_k})\| \geq \varepsilon$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Assim, podemos escolher $x_1, x_2, \ldots \in S_{\ell_p(X)}$ tais que

$$\|P(I - P_{m_k})(x^k)\| \geq \varepsilon, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{4.5}$$

Agora, definimos, para cada $k \in \mathbb{N}$, $y^k := (\mathrm{Id} - P_{m_k})(x^k)$. Assim, temos que $y_k \xrightarrow{w} 0$. Com efeito, seja $\phi \in \ell_p(X)^*$. Pela Proposição 2.7, existe $(f_n) \in \ell_q(X^*)$, sendo q o conjugado de p, tal que $\phi((x_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_n)$, para toda sequência $(x_n) \in \ell_p(X)$. Então, sendo $x^k = (x_1^k, x_2^k, \ldots)$ para cada $k \in \mathbb{N}$, temos, pela desigualdade de Hölder (Proposição 1.2),

$$\begin{aligned} \|\phi(y^k)\| = \left\| \sum_{n=m_k+1}^{\infty} f_n(x_n^k) \right\| &\le \left(\sum_{n=m_{k+1}}^{\infty} \|f_n\|^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{n=m_{k+1}}^{\infty} \|x_n^k\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\le \left(\sum_{n=m_{k+1}}^{\infty} \|f_n\|^q \right)^{\frac{1}{q}} \xrightarrow{k \to \infty} 0 , \end{aligned}$$

o que mostra que $y^k \xrightarrow{w} 0$. Como X é um espaço de Schur, isto quer dizer que $y^k \to 0$, e, como P é contínua, $Py_k \to 0$. Mas isto contradiz (4.5).

Seja $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|P(\mathrm{Id} - P_{m_0})\| < \frac{1}{2} .$$

Observamos que $\ell_p \not\hookrightarrow E$, pois E tem a propriedade de Schur e ℓ_p não tem. Logo, pela Proposição 3.1, podemos assumir que P_{m_0} é um isomorfismo sobre sua imagem. Sendo $F := P_{m_0}(E)$, temos

$$Y \approx E \approx F = P_{m_0}(E) \subseteq P_{m_0}(\ell_p(X)) \approx X^{m_0} \approx X ,$$

logo

$$Y \approx F \subseteq P_{m_0}(\ell_p(X)) \approx X .$$

Relembramos que queremos provar que $Y \overset{c}{\hookrightarrow} X$. Para isto, como $Y \approx F$ e $P_{m_0}(\ell_p(X)) \approx X$, basta mostrar que $F \underset{(c)}{\subseteq} P_{m_0}(\ell_p(X))$, isto é, basta mostrar que F é um subespaço complementado de $P_{m_0}(\ell_p(X))$. De fato, suponhamos que $F \underset{(c)}{\subseteq} P_{m_0}(\ell_p(X))$. Pela Proposição 1.40, temos que, sendo $\Phi \colon P_{m_0}(\ell_p(X)) \longrightarrow X$ isomorfismo, $\Phi(F)$ é subespaço complementado de X. Como $Y \approx F \approx \Phi(F)$, isto mostra que $Y \overset{c}{\hookrightarrow} X$.

Observamos que $S := PP_{m_0}|_E$ é uma transformação linear contínua de E em E. Além disso, como $P|_E = \mathrm{Id}_E$, temos

$$\begin{aligned} \|\mathrm{Id}_E - S\| = \|P|_E - PP_{m_0}|_E\| = \|(P - PP_{m_0})|_E\| \le \|P - PP_{m_0}\| &= \|P(\mathrm{Id} - P_{m_0})\| \\ &< \frac{1}{2} . \end{aligned}$$

Logo, pela Proposição 1.11, S é um isomorfismo sobre E.

Definimos $Q := P_{m_0}S^{-1}P$. É claro que

$$Q(\ell_p(X)) \subseteq P_{m_0}(E) = F\,.$$

Assim, para provar que Q é projeção sobre F, resta verificar que $Q(z) = z$, para todo $z \in F$. Seja $z \in F$. Existe $y \in E$ tal que $z = P_{m_0}(y)$, portanto

$$\begin{aligned} Q(z) = QP_{m_0}(y) &= P_{m_0}S^{-1}PP_{m_0}(y) \\ &= P_{m_0}S^{-1}Sy = P_{m_0}(y) = z\,, \end{aligned}$$

concluindo a demonstração. ∎

A próxima proposição é um resultado sobre subespaços complementados de $\ell_\infty(\ell_q)$, logo antecipa o tema de estudo do próximo capítulo. Ela é apresentada agora pois a utilizamos para provar o Teorema 4.13.

Proposição 4.12. *Se $1 < q < \infty$ então $\ell_2 \overset{c}{\hookrightarrow} \ell_\infty(\ell_q)$.*

Demonstração. Pełczyński mostrou que, se $1 < q < \infty$, então $\ell_q \approx (\sum_{n=1}^{\infty} \oplus \ell_2^n)_{\ell_q}$ (Proposição 2.11) . Além disso, pela Proposição 2.29, temos

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus \ell_2^n\right)_{\ell_\infty} \overset{c}{\hookrightarrow} \ell_\infty\left(\left(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus \ell_2^n\right)_{\ell_q}\right).$$

Portanto, considerando também o Teorema 2.32, temos

$$\ell_2 \overset{c}{\hookrightarrow} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus \ell_2^n\right)_{\ell_\infty} \overset{c}{\hookrightarrow} \ell_\infty\left(\left(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus \ell_2^n\right)_{\ell_q}\right) \approx \ell_\infty(\ell_q)\,.$$ ∎

Observamos que para os valores extremos de q, a saber, 1 e ∞, a Proposição 4.12 não é válida. De fato, se $q = \infty$, temos que ℓ_2 não é subespaço complementado de $\ell_\infty(\ell_\infty) \approx \ell_\infty$ pois ℓ_∞ é primo. Se $q = 1$, isto é consequência da Proposição 5.2.

Teorema 4.13. *Se $1 \leq p, q < \infty$ então $\ell_\infty(\ell_q) \overset{c}{\not\hookrightarrow} \ell_p(\ell_\infty)$.*

Demonstração. Pelo Teorema 4.10, basta provar que $\ell_\infty(\ell_p) \overset{c}{\not\hookrightarrow} \ell_p(\ell_\infty)$, isto é, podemos considerar $p = q$. Consideramos três casos:

Caso 1: $p = 1$. Já provamos este caso, trata-se da Proposição 4.8.

Caso 2: $1 < p < \infty$, $p \neq 2$. Pela Proposição 4.12 temos que $\ell_2 \overset{c}{\hookrightarrow} \ell_\infty(\ell_p)$, enquanto o Teorema 4.10 nos diz que $\ell_2 \overset{c}{\not\hookrightarrow} \ell_p(\ell_\infty)$. Portanto $\ell_\infty(\ell_p) \overset{c}{\not\hookrightarrow} \ell_p(\ell_\infty)$.

Caso 3: $p = 2$. Suponhamos, por absurdo, que $\ell_\infty(\ell_2) \overset{c}{\hookrightarrow} \ell_2(\ell_\infty)$. Então temos

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus \ell_2^n\right)_{\ell_1} \overset{c}{\hookrightarrow} \ell_2(\ell_\infty^*)\,,$$

pois

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus \ell_2^n\right)_{\ell_1} \overset{c}{\hookrightarrow} \ell_1(\ell_2) \approx c_0(\ell_2)^* \overset{c}{\hookrightarrow} c_0(\ell_2)^{***} \approx \ell_\infty(\ell_2)^* \overset{c}{\hookrightarrow} \ell_2(\ell_\infty)^* \approx \ell_2(\ell_\infty^*)\,.$$

Agora, graças à Proposição 4.11, obtemos $(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus \ell_2^n)_{\ell_1} \overset{c}{\hookrightarrow} \ell_\infty^*$, e portanto ℓ_∞^* contém ℓ_2^n's uniformemente complementados. Pela Proposição 2.31, como $\ell_\infty^* \approx \ell_1^{**}$, temos que ℓ_1 contém ℓ_2^n's uniformemente complementados e portanto, pela Proposição 2.29, temos

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus \ell_2^n\right)_{\ell_1} \overset{c}{\hookrightarrow} \ell_1(\ell_1) \approx \ell_1\,.$$

Chegamos assim à uma contradição, pois ℓ_1 é primo e, pela Proposição 2.12, ℓ_1 e $(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus \ell_2^n)_{\ell_1}$ não são isomorfos. ∎

Capítulo 5

Subespaços complementados de $\ell_\infty(\ell_q)$, $1 \leq q < \infty$

Neste capítulo estudamos os subespaços complementados de $\ell_\infty(\ell_q)$, $1 \leq q < \infty$. Começamos com a proposição seguinte que, no estudo dos subespaços de $\ell_\infty(\ell_q)$ que são isomorfos à ℓ_p, permite passarmos dos espaços $\ell_\infty(\ell_q)$ para os espaços separáveis $(\sum_{n=1}^\infty \ell_q^n)_{c_0}$.

Proposição 5.1. *Sejam $1 \leq p, q \leq \infty$. São equivalentes:*

(i) $\ell_p \overset{c}{\hookrightarrow} \ell_\infty(\ell_q)$;

(ii) $(\sum_{n=1}^\infty \oplus \ell_p^n)_{c_0} \overset{c}{\hookrightarrow} (\sum_{n=1}^\infty \oplus \ell_q^n)_{c_0}$;

(iii) $\ell_\infty(\ell_p) \overset{c}{\hookrightarrow} \ell_\infty(\ell_q)$.

Demonstração. Mostraremos, inicialmente, que (ii) implica (iii). Se $(\sum_{n=1}^\infty \oplus \ell_p^n)_{c_0} \overset{c}{\hookrightarrow} (\sum_{n=1}^\infty \oplus \ell_q^n)_{c_0}$, então, tomando biduais, temos $(\sum_{n=1}^\infty \oplus \ell_p^n)_{\ell_\infty} \overset{c}{\hookrightarrow} (\sum_{n=1}^\infty \oplus \ell_q^n)_{\ell_\infty}$. Logo, pelo Teorema 2.32, temos $\ell_\infty(\ell_p) \overset{c}{\hookrightarrow} \ell_\infty(\ell_q)$.

É imediato que (iii) implica (i), uma vez que $\ell_p \overset{c}{\hookrightarrow} \ell_\infty(\ell_p)$.

Resta mostrarmos que (i) implica (ii). Pelo Teorema 2.32, temos

$$\ell_\infty(\ell_q) \approx \left(\sum_{n=1}^\infty \oplus \ell_q^n\right)_{\ell_\infty} \approx \left(\sum_{n=1}^\infty \oplus \ell_q^n\right)_{c_0}^{**}.$$

Logo, como estamos supondo que $\ell_p \overset{c}{\hookrightarrow} \ell_\infty(\ell_q)$, temos que $(\sum_{n=1}^\infty \oplus \ell_q^n)_{c_0}^{**}$ contém ℓ_p^n's uniformemente complementados e, consequentemente, pela Proposição 2.31, $\left(\sum_{n=1}^\infty \oplus \ell_q^n\right)_{c_0}$ também contém ℓ_p^n's uniformemente complementados. Relembramos que queremos mostrar que

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus \ell_q^n\right)_{c_0} \overset{c}{\hookrightarrow} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus \ell_p^n\right)_{c_0}.$$

Seja (F_n) uma sequência de subespaços K-complementados de $(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus \ell_q^n)_{c_0}$, com

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{d}(F_n, \ell_p^n) < \infty .$$

Notemos que, pela Proposição 2.22, temos $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus \ell_p^n\right)_{c_0} \approx \left(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus F_n\right)_{c_0}$. Agora, pela Proposição 2.30, existem $k_1, k_2, \ldots \in \mathbb{N}$ tais que F_j é isomorfo à um subespaço K-complementado de $(\sum_{n=1}^{k_j} \oplus \ell_q^n)_{c_0}$, para cada $j \in \mathbb{N}$. Logo, aplicando a Proposição 2.29, temos

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus \ell_p^n\right)_{c_0} \approx \left(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus F_n\right)_{c_0} &\overset{c}{\hookrightarrow} \left(\left(\sum_{n=1}^{k_1} \oplus \ell_q^n\right)_{c_0} \oplus \left(\sum_{n=1}^{k_2} \oplus \ell_q^n\right)_{c_0} \oplus \cdots \oplus \left(\sum_{n=1}^{k_m} \oplus \ell_q^n\right)_{c_0} \oplus \cdots\right)_{c_0} \\
&\overset{c}{\hookrightarrow} \left(\left(\sum_{n=1}^{k_1} \oplus \ell_q^n\right)_{c_0} \oplus \left(\sum_{n=k_1+1}^{k_1+k_2} \oplus \ell_q^n\right)_{c_0} \oplus \cdots \oplus \left(\sum_{n=k_1+\cdots+k_{m-1}+1}^{k_1+\cdots+k_m} \oplus \ell_q^n\right)_{c_0} \oplus \cdots\right)_{c_0} \\
&= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus \ell_q^n\right)_{c_0}
\end{aligned}$$

■

Proposição 5.2. *Seja $1 \le p < \infty$. Então $\ell_p \overset{c}{\hookrightarrow} \ell_\infty(\ell_1)$ se, e somente se, $p = 1$.*

Demonstração. Se $p = 1$ temos que $\ell_p \overset{c}{\hookrightarrow} \ell_\infty(\ell_1)$ pela Proposição 2.8. Mostraremos então a recíproca.

Seja $1 \le p < \infty$ tal que $\ell_p \overset{c}{\hookrightarrow} \ell_\infty(\ell_1)$. Suponhamos, por absurdo, que $p \ne 1$. Pela Proposição 5.1, $(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus \ell_1^n)_{c_0}$ contém um subespaço complementado isomorfo à $(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus \ell_p^n)_{c_0}$. Consequentemente, pela Proposição 2.13, o espaço $(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus \ell_p^n)_{c_0}$ é isomorfo à c_0 ou à $(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus \ell_1^n)_{c_0}$. O primeiro caso é impossível uma vez que, pela Proposição 2.12, c_0 e $(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus \ell_p^n)_{c_0}$ não são isomorfos. O segundo caso também é impossível uma vez que, pela Proposição 2.35, $(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus \ell_1^n)_{c_0}^* \approx (\sum_{n=1}^{\infty} \oplus \ell_\infty^n)_{\ell_1}$ não tem cotipo finito (Proposição 2.34) e $(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus \ell_p^n)_{c_0}^* \approx (\sum_{n=1}^{\infty} \oplus \ell_{p'}^n)_{\ell_1}$, sendo p' o conjugado de p, tem cotipo $\max\{p', 2\}$ (Proposição 2.35). ■

Lema 5.3. *Seja X um espaço de Banach. Se X contém ℓ_p^n's uniformemente complementados então existe $K > 0$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existem $z_1, \ldots, z_n \in X$ tais que $[z_n]$ é n-*

dimensional, K-complementado e

$$\frac{1}{K}\|(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\| \leq \left\|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i z_i\right\| \leq K\|(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\|,$$

para todo $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in \ell_p^n$.

Demonstração. Por definição, como X contém ℓ_p^n's uniformemente complementados, existem $E_1, E_2, \ldots$ subespaços de X tais que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{d}(E_n, \ell_p^n) < +\infty$$

e projeções P_n de X sobre E_n, $n = 1, 2, \ldots$, tais que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|P_n\| < +\infty.$$

Assim, sendo $M := \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{d}(E_n, \ell_p^n)$, escolhemos $T_n \colon \ell_p^n \to E_n$ isomorfismos, $n = 1, 2, \ldots$, satisfazendo $\|T_n\|\|T_n^{-1}\| \leq M$, para cada $n \in \mathbb{N}$.Desse modo, fixado $m \in \mathbb{N}$, pela Proposição 1.9, existem $z_1, \ldots, z_m \in X$ para os quais é válida a desigualdade

$$\frac{1}{\|T_m^{-1}\|}\|(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)\| \leq \left\|\sum_{i=1}^{m}\lambda_i z_i\right\| \leq \|T_m\|\|(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)\|,$$

para todo $(\lambda_1,\ldots,\lambda_m) \in \ell_p^m$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $\|T_n\| \leq M$ e $\|T_n^{-1}\| = 1$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Definimos $K := \max\{M, 1, \sup_{n\in\mathbb{N}}\|P_n\|\}$. Tendo escolhido K dessa maneira, temos, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$[z_i]_{1\leq i\leq n} \text{ é } K\text{-complementado}, \qquad \|T_n\| \leq K \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{K} \leq \frac{1}{\|T_n^{-1}\|}.$$

Portanto segue que, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{K}\|(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\| \leq \left\|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i z_i\right\| \leq K\|(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\|,$$

para todo $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in \ell_p^n$. ∎

Proposição 5.4. *Sejam* $1 < p, q < \infty$. *Se* $\ell_p \overset{c}{\hookrightarrow} \ell_\infty(\ell_q)$ *então* $q \le p \le 2$ *ou* $2 \le p \le q$, *isto é,* p *está entre* 2 *e* q.

Demonstração. Se $\ell_p \overset{c}{\hookrightarrow} \ell_\infty(\ell_q)$, temos, pela Proposição 5.1, que $(\sum_{n=1}^\infty \oplus \ell_p^n)_{c_0} \overset{c}{\hookrightarrow} (\sum_{n=1}^\infty \oplus \ell_q^n)_{c_0}$. Então, como $(\sum_{n=1}^\infty \oplus \ell_q^n)_{c_0} \overset{c}{\hookrightarrow} c_0(\ell_q)$, temos que $c_0(\ell_q)$ contém ℓ_p^n's uniformemente complementados. Pelo Lema 5.3, existe $K > 0$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos escolher $z_1, \dots, z_n \in c_0(\ell_q)$ tal que $[z_n]$ é K-complementado e

$$\frac{1}{K}\|(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\| \le \left\|\sum_{i=1}^n \lambda_i z_i\right\| \le K\|(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\|, \tag{5.1}$$

para todo $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \ell_p^n$. Sejam $\alpha = \min\{q, 2\}$ e $\beta = \max\{q, 2\}$. Assim, escolhemos α e β tais que α é tipo de ℓ_q e β é cotipo de ℓ_q (Proposição 1.46). Logo, a Proposição 2.19 nos diz que existe $M > 0$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe uma partição $\{\sigma_1^n, \dots, \sigma_{r_n}^n\}$ de $\{1, \dots, n\}$ satisfazendo

$$M^{-1} \max_{1 \le s \le r_n} \left(\sum_{i \in \sigma_s^n} |\lambda_i|^\beta\right)^{\frac{1}{\beta}} \le \left\|\sum_{i=1}^n \lambda_i z_i\right\| \le M \max_{1 \le s \le r_n} \left(\sum_{i \in \sigma_s^n} |\lambda_i|^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}, \tag{5.2}$$

para quaisquer escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Definimos, para $n \in \mathbb{N}$,

$$k_n := \max_{1 \le s \le r_n} |\sigma_s^n|,$$

onde $|\sigma_s^n|$ é o cardinal do conjunto finito σ_s^n. Iremos supor, sem perda de generalidade, que

$$k_n = |\sigma_1^n|.$$

Agora, fixado $n \in \mathbb{N}$, escolhemos $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ da seguinte maneira:

$$\lambda_i = \begin{cases} 1 & \text{se } i \in |\sigma_1^n| \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}, \qquad i = 1, \dots, n.$$

Então, pelas desigualdades (5.1) e (5.2), obtemos

$$\frac{1}{K}(k_n)^{\frac{1}{p}} \le \left\|\sum_{i \in \sigma_1^n} z_i\right\| \le K(k_n)^{\frac{1}{p}},$$

e

$$\frac{1}{M}(k_n)^{\frac{1}{\beta}} \leq \left\| \sum_{i \in \sigma_1^n} z_i \right\| \leq M(k_n)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Portanto, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$(k_n)^{\frac{1}{p}} \leq MK(k_n)^{\frac{1}{\alpha}}, \tag{5.3}$$

e

$$(k_n)^{\frac{1}{\beta}} \leq MK(k_n)^{\frac{1}{p}}. \tag{5.4}$$

Agora, antes de prosseguirmos, iremos mostrar que $\sup_{n \in \mathbb{N}} k_n = +\infty$. Suponhamos, por absurdo, que $\sup_{n \in \mathbb{N}} k_n < \infty$. Pelas desigualdades (5.1) e (5.2), temos

$$\frac{1}{K}\|(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\| \leq \left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i z_i \right\| \leq M \max_{1 \leq s \leq r_n} \left(\sum_{i \in \sigma_s^n} |\lambda_i|^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \ell_p^n$. Em particular, fixado $n \in \mathbb{N}$, escolhendo $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 1$ e sendo $l := \sup_{n \in \mathbb{N}} k_n = \max k_n$, temos

$$\frac{1}{K} n^{\frac{1}{p}} \leq M \max_{1 \leq s \leq r_n} (\sigma_s^n)^{\frac{1}{\alpha}} \leq M l^{\frac{1}{\alpha}},$$

que é absurdo, pois n é arbitrário.

Como $\sup_{n \in \mathbb{N}} k_n = \infty$, então, pelas desigualdades (5.3) e (5.4), temos $\frac{1}{\beta} \leq \frac{1}{p} \leq \frac{1}{\alpha}$. Lembrando que $\alpha = \min\{q, 2\}$ e $\beta = \max\{q, 2\}$, temos $\min\{q, 2\} \leq p \leq \max\{q, 2\}$. Assim, $q \leq p \leq 2$ ou $q \leq p \leq 2$ – como queríamos. ∎

Teorema 5.5. *Sejam* $1 \leq q_0, q_1 \leq \infty$. *Se* $\ell_\infty(\ell_{q_0}) \approx \ell_\infty(\ell_{q_1})$ *então* $q_0 = q_1$.

Demonstração. Suponhamos que $q_0 = 1$ ou $q_1 = 1$. Sem perda de generalidade, supomos que $q_0 = 1$. Pelo Teorema de Díaz–Kalton (Teorema 2.33) temos que ℓ_{q_1} contém ℓ_1^n's uniformemente complementados. Passando aos duais, temos que $\ell_{q_1'}$ contém ℓ_∞^n's uniformemente complementados (Proposição 2.31), sendo q_1' o conjugado de q_1. Logo, pelo Teorema de Maurey–Pisier (Teorema 2.34), temos que $\ell_{q_1'}$ não tem cotipo finito. Assim $q_1' = \infty$ e portanto $q_1 = 1$.

Se $q_0 = \infty$ ou $q_1 = \infty$ então, como $\ell_\infty(\ell_\infty)$ é isometricamente isomorfo à ℓ_∞ e ℓ_∞ é primo, segue que $q_0 = q_1$.

Se $1 < q_0, q_1 < \infty$, como $\ell_{q_0} \overset{c}{\hookrightarrow} \ell_\infty(\ell_{q_1})$ e $\ell_{q_1} \overset{c}{\hookrightarrow} \ell_\infty(\ell_{q_0})$, segue da Proposição 5.4 que $q_0 = q_1$. ■

Capítulo 6

Os espaços $c_0(\ell_\infty)$ e $\ell_\infty(c_0)$ não são isomorfos

Nosso objetivo neste capítulo, composto de um lema e um teorema, é provar que os espaços $c_0(\ell_\infty)$ e $\ell_\infty(c_0)$ não são isomorfos. Este é o último resultado que precisamos para provar o teorema principal, que é o tema do próximo capítulo.

Lema 6.1. *Seja W um subconjunto relativamente fracamente compacto de c_0 e $0 < \lambda < 1$. Então existe um ponto y de c_0 tal que $\|y\| = 1$ e*

$$\|y - x\| \geq \lambda\,, \qquad \forall x \in W.$$

Demonstração. Iremos mostrar que, sendo $y_n := (1, \ldots, 1, 0, 0, \ldots)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos escolher y com as propriedades desejadas no conjunto $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$.

É claro que $\|y_n\| = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Suponhamos, por absurdo, que, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in W$ tal que

$$\|y_n - x_n\| < \lambda\,.$$

Logo, para cada $n \in \mathbb{N}$, as primeiras n coordenadas de x_n têm módulo maior do que $1 - \lambda > 0$. Mostraremos a seguir que a sequência (x_n) não tem subsequência fracamente convergente.

Suponhamos que existe x pertencente ao fecho na topologia fraca de W tal que $x_{n_k} \xrightarrow{w} x$, para alguma subsequência (x_{n_k}) de (x_n). Sendo $\pi_m : c_0 \to \mathbb{K}$ o funcional linear contínuo que associa a cada elemento de c_0 a sua m-ésima coordenada, escolhemos m suficiente grande tal que $|\pi_m(x)| \leq 1 - \lambda$. Assim, se $x_{n_k} \xrightarrow{w} x$, então $\pi_m(x_{n_k}) \longrightarrow \pi_m(x)$, e portanto

$$|\pi_m(x_{n_k})| \longrightarrow |\pi_m(x)| \leq 1 - \lambda\,.$$

Mas isto não pode ocorrer pois, como já observamos, se $n_k > m$ então $|\pi_m(x_{n_k})| > 1 - \lambda$.

Mostramos acima que (x_n) não admite subsequência fracamente convergente. Como W é relativamente fracamente compacto, isto contradiz o Teorema de Eberlein–Smulian (Teorema 1.27). ∎

Teorema 6.2. *$\ell_\infty(c_0)$ não é isomorfo a um quociente de $c_0(\ell_\infty)$. Em particular, $\ell_\infty(c_0)$ e $c_0(\ell_\infty)$ não são isomorfos.*

Demonstração. Pela Proposição 1.14 basta mostrarmos que não existe uma transformação linear contínua sobrejetora $T: c_0(\ell_\infty) \to \ell_\infty(c_0)$. Suponhamos, por absurdo, que existe uma tal T. Então, pelo Lema 1.33, sendo $X = c_0(\ell_\infty)$ e $Y = \ell_\infty(c_0)$, temos

$$T(B_X(0,1)) \supseteq B_Y(0,\delta)\,.$$

para algum $\delta > 0$. Observamos que, na expressão acima, escolhendo um $\delta' < \delta$, podemos tomar as bolas fechadas, isto é, $T(B_X[0,1]) \supseteq B_Y[0,\delta']$. De fato, basta notar que

$$T(B_X[0,1]) \supseteq T(B_X(0,1)) \supseteq B_Y(0,\delta) \supseteq B_Y[0,\delta']\,.$$

Iremos supor, sem perda de generalidade, que

$$T(B_X[0,1]) \supseteq B_Y[0,1]\,. \tag{6.1}$$

Para cada $m \in \mathbb{N}$, sendo por P_m e π_m dados por

$$\begin{aligned} P_m : c_0(\ell_\infty) &\longrightarrow c_0(\ell_\infty) \\ (x_n) &\longmapsto (x_1, \ldots, x_m, 0, 0, \ldots)\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi_m \colon \ell_\infty(c_0) &\longrightarrow c_0 \\ (z_n) &\longmapsto z_m\,, \end{aligned}$$

definimos

$$S_m := \pi_m \circ T|_{P_m(c_0(\ell_\infty))}\,.$$

Pela Proposição 1.30, sabemos que toda transformação linear contínua de ℓ_∞ em c_0 é fracamente compacta. Assim, como $P_m(c_0(\ell_\infty)) \approx \ell_\infty$, temos que S_m é fracamente compacta, isto é, S_m leva conjuntos limitados em conjuntos relativamente fracamente compactos.

Para cada $m \in \mathbb{N}$, aplicamos o Lema 6.1 com $\lambda = \frac{1}{2}$ ao conjunto relativamente fracamente compacto

$$S_m(P_m(B_X[0,1])),$$

obtendo assim uma sequência (y_n) de vetores unitários de c_0 tal que, se $x \in B_X[0,1]$, então

$$\|y_m - S_m(P_m(x))\| = \|y_m - \pi_m \circ T\big(P_m(x)\big)\| \geq \frac{1}{2}, \qquad \forall m \in \mathbb{N}\,.$$

Sendo $y := (y_n) \in B_Y[0,1]$, mostraremos a seguir que $y \notin T(B_X(0,1))$, contradizendo (6.1).

Seja $x \in B_X[0,1]$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned} \big\|y - T\big(P_m(x)\big)\big\| &= \sup_{k\in\mathbb{N}} \big\|\pi_k\big(y - T\big(P_m(x)\big)\big)\big\| \geq \big\|\pi_m\big(y - T\big(P_m(x)\big)\big)\big\| \\ &= \big\|y_m - \pi_m \circ T\big(P_m(x)\big)\big\| \geq \frac{1}{2}\,. \end{aligned}$$

Por outro lado, como $x = \lim_{n\to\infty} P_n(x)$, temos $Tx = \lim_{n\to\infty} T(P_n(x))$. Portanto $y \neq T(x)$.

■

Capítulo 7

Demonstração do teorema principal

Com os resultados que obtemos a partir do estudo dos subespaços dos espaços $\ell_p(\ell_q), c_0(\ell_r)$, com $1 \leq p, q, r \leq \infty$, a demonstração do teorema principal se resume à uma enumeração conveniente de casos e aplicação dos teoremas $3.6, 4.10, 4.13, 5.5$.

Teorema 7.1. *Sejam $p_0, p_1, q_0, q_1 \in \{0\} \cup [1, +\infty]$. Então, denotando o espaço c_0 por ℓ_0, temos que os espaços $\ell_{p_0}(\ell_{q_0})$ e $\ell_{p_1}(\ell_{q_1})$ são isomorfos se, e somente se, $p_0 = p_1$ e $q_0 = q_1$.*

Demonstração. É imediato que se $p_0 = p_1$ e $q_0 = q_1$ então $\ell_{p_0}(\ell_{q_0})$ e $\ell_{p_1}(\ell_{q_1})$ são isomorfos. A seguir, provaremos a recíproca.

Sejam $p_0, p_1, q_0, q_1 \in [1, \infty] \cup \{0\}$ tais que $\ell_{p_0}(\ell_{q_0}) \approx \ell_{p_1}(\ell_{q_1})$. Se nenhum dos índices é igual a 0 ou ∞, o resultado é consequência imediata do Teorema 3.6. Assim, resta analisar os casos em que pelo menos um dos índices é igual a 0 ou ∞.

Suponhamos que nenhum índice é igual a 0, enquanto algum índice é igual a ∞.

Caso 1: $p_0 = \infty$ ou $p_1 = \infty$. Ambos os casos são análogos; suponhamos, sem perda de generalidade, que $p_0 = \infty$. Assim, $\ell_{p_1}(\ell_{q_1}) \approx \ell_\infty(\ell_{q_0})$, e portanto $\ell_{p_1}(\ell_{q_1})$ não é separável. Temos, portanto,

$$(\mathrm{i}) \quad p_1 = \infty \qquad \text{ou} \qquad (\mathrm{ii}) \quad q_1 = \infty.$$

No caso (i), temos $q_0 = q_1$ pelo Teorema 5.5. No caso (ii), o Teorema 4.13 nos diz que $p_1 = \infty$ ou $q_0 = \infty$. De qualquer modo, como $\ell_\infty(\ell_\infty) \approx \ell_\infty$ e ℓ_∞ é primo, temos $p_1 = q_0 = \infty$.

Caso 2: $p_0, p_1 < \infty$, com $q_0 = \infty$ ou $q_1 = \infty$. Em qualquer caso, por serem isomorfos, temos que $\ell_{p_0}(\ell_{q_0})$, $\ell_{p_1}(\ell_{q_1})$ não são separáveis, logo $q_0 = q_1 = \infty$. Assim,

$$\ell_{p_0}(\ell_\infty) \approx \ell_{p_1}(\ell_\infty),$$

e a igualdade $p_0 = p_1$ segue do Teorema 4.10.

Consideramos agora os casos em que algum dos índices é igual a 0. Por simetria, basta considerarmos $p_0 = 0$ ou $q_0 = 0$.

Caso 1': $p_0 = 0$. Suponhamos que $\ell_0(\ell_{q_0}) = c_0(\ell_{q_0}) \approx \ell_{p_1}(\ell_{q_1})$.

Se $q_0 < \infty$ então $c_0(\ell_{q_0})$ é separável, e assim $p_1, q_1 < \infty$. Tomando duais, obtemos

$$c_0(\ell_{q_0})^* \approx \ell_1(\ell_{q_0'}) \approx \ell_{p_1}(\ell_{q_1})^* \approx \ell_{p_1'}(\ell_{q_1'}),$$

sendo q_0', p_1', q_1' os conjugados de $q_0, p_1 e q_1$, respectivamente. Como $q_0', p_1', q_1' \in [1, +\infty]$, caímos no caso já considerado acima, e assim $p_1' = 1$ e $q_1' = q_0'$. Portanto $p_1 = 0$ e $q_1 = q_0$.

Se $q_0 = \infty$, temos $\ell_0(\ell_\infty) = c_0(\ell_\infty) \approx \ell_{p_1}(\ell_{q_1})$. Então $\ell_{p_1}(\ell_{q_1})$ não é separável, de modo que $p_1 = \infty$ ou $q_1 = \infty$. Além disso, $\ell_{p_1}(\ell_{q_1})$ contém uma cópia complementada de c_0. Como nenhum espaço dual contém uma cópia complementada de c_0 (Proposição 1.41), temos $p_1 = 0$ ou $q_1 = 0$. Mas, pelo Teorema 6.2, é impossível que $p_1 = \infty$ e $q_1 = 0$. Portanto $p_1 = 0$ e $q_1 = \infty$

Caso 2': $q_0 = 0$. Inteiramente análogo ao caso anterior. ∎

Capítulo 8

Considerações finais e problemas em aberto

Com o objetivo de provar o Teorema 7.1, fizemos um estudo dos subespaços dos espaços $\ell_p(\ell_q)$. Neste último capítulo tecemos alguns comentários finais, olhando em retrospecto os resultados obtidos nesse percurso, e concluímos com algumas questões que permanecem em aberto.

No capítulo 1, respondemos à seguinte questão:

Questão 8.1. *Para quais* $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 < \infty$ *temos*

$$\ell_{p_0}(\ell_{q_0}) \hookrightarrow \ell_{p_1}(\ell_{q_1})\,?$$

A resposta é que isto ocorre somente nos casos triviais: (i) $p_0 = p_1$ e $q_0 = q_1$, ou (ii) $p_0 = p_1 = q_1$, ou (iii) $q_1 = q_0 = p_1$ (Teorema 3.6). No capítulo 2, passamos a considerar subespaços complementados, e somos levados à seguinte questão:

Questão 8.2. *Para quais* $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$ *temos*

$$\ell_{p_0}(\ell_{q_0}) \overset{c}{\hookrightarrow} \ell_{p_1}(\ell_{q_1})\,?$$

As respostas que obtemos para essa questão são apenas parciais. Reunindo os Teoremas 3.6,4.10, 4.13 temos que, se $p_1 \neq \infty$, então $\ell_{p_0}(\ell_{q_0}) \overset{c}{\hookrightarrow} \ell_{p_1}(\ell_{q_1})$ somente nos casos triviais.

Assim, ainda carecem de respostas apenas os casos em que $p_1 = \infty$. Estes problemas podem ser divididos considerando o espaço $\ell_\infty(\ell_1)$ e depois os espaços $\ell_\infty(\ell_r)$, onde $1 < r < \infty$.

No primeiro caso, notemos que na Proposição 5.2 vimos que, se $1 \leq p < \infty$, então $\ell_p \overset{c}{\hookrightarrow} \ell_\infty(\ell_1)$ se, e somente se, $p = 1$. No entanto, não sabemos resolver o

Problema 8.3. *Para quais* $1 \leq p, q < \infty$ *temos*

$$\ell_p(\ell_q) \overset{c}{\hookrightarrow} \ell_\infty(\ell_1)\,?$$

No segundo caso, observamos que na Proposição 4.12 mostramos que $\ell_2 \overset{c}{\hookrightarrow} \ell_\infty(\ell_q)$, para todo $1 < q < \infty$. Mais ainda, na Proposição 5.4 mostramos que se $1 < p, q < \infty$ são tais que $\ell_p \overset{c}{\hookrightarrow} \ell_\infty(\ell_q)$ então $q \leq p \leq 2$ ou $2 \leq p \leq q$. Então concluímos a nossa dissertação destacando os dois problemas que restam neste caso, isto é:

Problema 8.4. *Fixado* $1 < r < \infty$, *para quais* $p \neq 2$ *temos*

$$\ell_p \overset{c}{\hookrightarrow} \ell_\infty(\ell_r)\,?$$

Problema 8.5. *Fixado* $1 < r < \infty$, *para quais* $1 \leq p, q \leq \infty$ *temos*

$$\ell_p(\ell_q) \overset{c}{\hookrightarrow} \ell_\infty(\ell_r)\,?$$

Bibliografia

[1] F. Albiac e N.J. Kalton, *Topics in Banach space theory*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, New York, 2006.

[2] Czeslaw Bessaga e Aleksander Pełczyński, *Some remarks on conjugate spaces containing subspaces isomorphic to the space c_0*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sr. Sci. Math. Astr. Phys **6** (1958), 249–250.

[3] J. Bourgain, P.G. Casazza, J. Lindenstrauss, e L. Tzafriri, *Banach spaces with a unique unconditional basis, up to permutation*, American Mathematical Society **54** (1985), no. 322.

[4] N.L. Carothers, *A short course on Banach space theory*, vol. 64, Cambridge University Press, 2004.

[5] P.G. Casazza, *The Schroeder–Bernstein Property for Banach spaces*, Contemporary Mathematics **85** (1989), 61–77.

[6] P. Cembranos e J. Mendoza, *Banach spaces of vector-valued functions*, 1997.

[7] ———, *$\ell_\infty(\ell_1)$ and $\ell_1(\ell_\infty)$ are not isomorphic*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **341** (2008), no. 1, 295–297.

[8] ———, *The Banach spaces $\ell_\infty(c_0)$ and $c_0(\ell_\infty)$ are not isomorphic*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **367** (2010), no. 2, 461–463.

[9] ———, *On the mutually non isomorphic $\ell_p(\ell_q)$ spaces*, Mathematische Nachrichten **284** (2011), no. 16, 2013–2023.

[10] Joe Diestel, Hans Jarchow, e Andrew Tonge, *Absolutely summing operators*.

[11] Jacques Dixmier, *General topology*, Springer Verlag, 1984.

[12] N. Dunford e J.T. Schwartz, *Linear Operators, Part I: General Theory*, Interscience, 1957.

[13] Marián Fabian et al., *Functional analysis and infinite-dimensional geometry*, Springer, 2001.

[14] W.T. Gowers, *A solution to the Schroeder–Bernstein problem for Banach spaces*, Bulletin of the London Mathematical Society **28** (1996), no. 3, 297–304.

[15] Sylvie Guerre-Delabrière, *Classical sequences in Banach spaces*, vol. 166, CRC Press, 1992.

[16] James Hagler e Charles Stegall, *Banach spaces whose duals contain complemented subspaces isomorphic to* $C[0,1]$, Journal of Functional Analysis **13** (1973), no. 3, 233–251.

[17] E. Kreyszig, *Introductory functional analysis with applications*, John Wiley and Sons, 1978.

[18] J. Lindenstrauss e L. Tzafriri, *Classical Banach spaces I and II*, Springer, 1996.

[19] Robert E. Megginson, *An introduction to Banach space theory*, Springer New York, 1998.

[20] A. Pełczyński, *Projections in certain Banach spaces*, Studia Mathematica **19** (1960), no. 2, 209–228.

[21] B. Tanbay, *Direct Sums and the Schur Property*, Tr. J. of Mathematics **22** (1998), 349–354.

[22] H. Triebel, *Interpolation theory, function spaces, differential operators*, North-Holland Pub. Co.(Amsterdam and New York), 1978.

[23] Lior Tzafriri e Joram Lindenstrauss, *Classical Banach Spaces*, Lectures Notes in Mathematics, Springer-Verlag, 1973.