ANTONIO JOSÉ ENGLER

ORIENTADOR:- *Prof. Mario Tourasse Teixeira*

ORDEM E SIMETRIA

Tese apresentada ao I. M. E. da U. S. P. para obtenção do grau de "mestre em matemática".

SÃO PAULO - 1971

A G R A D E C I M E N T O S

À nossa gratidão a todos os que direta ou indiretamente, contribuiram para a realização deste trabalho.

Em especial ao Prof. Mário Tourasse Teixeira por sua orientação e auxílio na redação. Agradecemos-lhe ainda o exemplo, de professor e pesquisador que nos ofereceu durante estes anos.

Ao Prof. Dr. Rubens Murilo Marques, dirêtor do IMECC, que nos apoiou sempre que preciso.

Aos professores e amigos do IME da USP pela maneira atenciosa com que nos receberam em seu convívio.

Também aos amigos e colegas do IMECC a nossa gratidão.

À Sra. Maryliza Passoni Engler e a Sra. Maria do Carmo Brochini Alves Marinho, agradecemos pela datilografia do trabalho.

ÍNDICE

SIMETRIA E ORDEM

INTRODUÇÃO

Êste é um estudo preliminar sôbre a noção de simetria em Matemática, principalmente quando a ordem está envolvida. Mais particularmente o tipo de simetria no qual o estudo se concentra pode ser descrito como simetria central. E aparece essencialmente no decorrer do trabalho como estruturas ordenadas centralmente simétricas (especialmente conjuntos ordenados e reticulados distributivos).

Em Matemática a simetrização de situações sempre tem se revelado um processo fecundo. E nosso trabalho é em grande parte sensibilizado por essa idéia.

Hoje em dia quem falà em simetria, não só em Matemática como em muitas outras áreas, pensa logo em grupos. E, na verdade, para ó matemático moderno difícil é dissociar uma noção de outra.

Naturalmente tal obsessão decorre do fantástico êxito da teoria dos grupos. E embora nosso estudo não tenha podido escapar da influência dos grupos cremos que mostra situações fundamentais de simetria extranhas à noção de grupo.

Sendo apenas um estudo inicial nosso trabalho sequer tenta uma caracterização ampla e sistemática da idéia de simetria. Elabora apenas em certo sentido algumas noções que poderão ser importantes para uma futura caracterização .

CAPÍTULO 1

SIMETRIZAÇÃO DE ESTRUTURAS ORDENADAS

Um conjunto ordenado para nós será sempre um conjunto parcialmente ordenado, ou seja a ordem $\leqslant$ satisfaz a

$$x \leqslant x$$
$$x \leqslant y \, , \, y \leqslant z \longrightarrow x \leqslant z$$
$$x \leqslant y \, , \, y \leqslant x \longrightarrow x = y$$

A idéia de simetria em um conjunto ordenado A faz pensar em aplicações

$$\varphi : A \longrightarrow A$$

tais que

$$x \leqslant y \longrightarrow \varphi(y) \leqslant \varphi(x)$$
$$\varphi\varphi(x) = x$$

Vamos pois chamar de simetria uma tal aplicação e de conjunto ordenado simétrico um conjunto ordenado com uma simetria fixada.

Um exemplo particularmente simples é o conjunto ordenado com o diagrama abaixo.

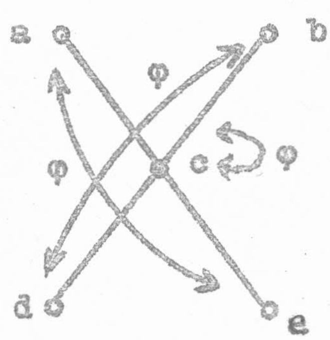


Fig. 1

Outros exemplos que imediatamente se sugerem são : o complemento booleano e o inverso aditivo em estruturas algébricas ordenadas.

Sôbre a possibilidade de elementos invariantes para essas simetrias notemos o seguinte resultado :

Se a e b são invariantes distintos então são incomparáveis.

Pois se $a \leqslant b$, $\varphi(b) \leqslant \varphi(a)$ e $b \leqslant a$.

Êsse resultado indica que um conjunto totalmente ordenado finito admite apenas uma simetria, com um invariante se o número de elementos é ímpar e com nenhum se é par : Já um conjunto isomorfo a Z com a ordem usual admite essencialmente duas simetrias uma com elemento invariante e outra sem.

Um problema que surge naturalmente é o de caracterizar as simetrias possíveis de um conjunto ordenado. Não abordaremos, no entanto, tal problema.

Parece natural chamar de centralmente simétrico o caso em que existe um e apenas um elemento invariante, o centro. Êsse é o caso ilustrado no diagrama e que aparecerá com maior frequência no restante do trabalho.

Tendo nos decidido por uma definição de simetria para conjuntos ordenados gostaríamos agora de estudar processos de simetrizar conjuntos ordenados.

Um primeiro processo nêsse sentido e que chamaremos de simetrização fraca é pràticamente, como veremos, uma reflexão do conjunto ordenado que se quer simetrizar. Seja A um conjunto ordenado e façamos

$$s(A) = (A \times \{m\}) \cup (\{m\} \times A)$$

onde $m \notin A$. Definamos uma ordem em s(A) por

$$(a, m) \leqslant (b, m) \iff a \leqslant b$$

$$(m, a) \leqslant (m, b) \iff b \leqslant a$$

$$(m, a) \leqslant (b, m) \iff \text{existe } u \text{ tal que } u \leqslant a \text{ e } u \leqslant b$$

e $(a, m) \leqslant (m, b)$ nunca se verifica. φ será dado por

$$\varphi(x, y) = (y, x)$$

e com isso obtemos o

TEOREMA 1 - $s(A)$ com $\leqslant$ e φ é um conjunto ordenado simétrico on de os elementos da forma (a, m) são naturalmente isoformos aos e lementos de A.

$s(A)$ como indicado acima será a simetrização fraca de A e como decorre de sua construção não tem nenhum elemento inva - riante.

Exemplo simples é descrito nos diagramas abaixo.

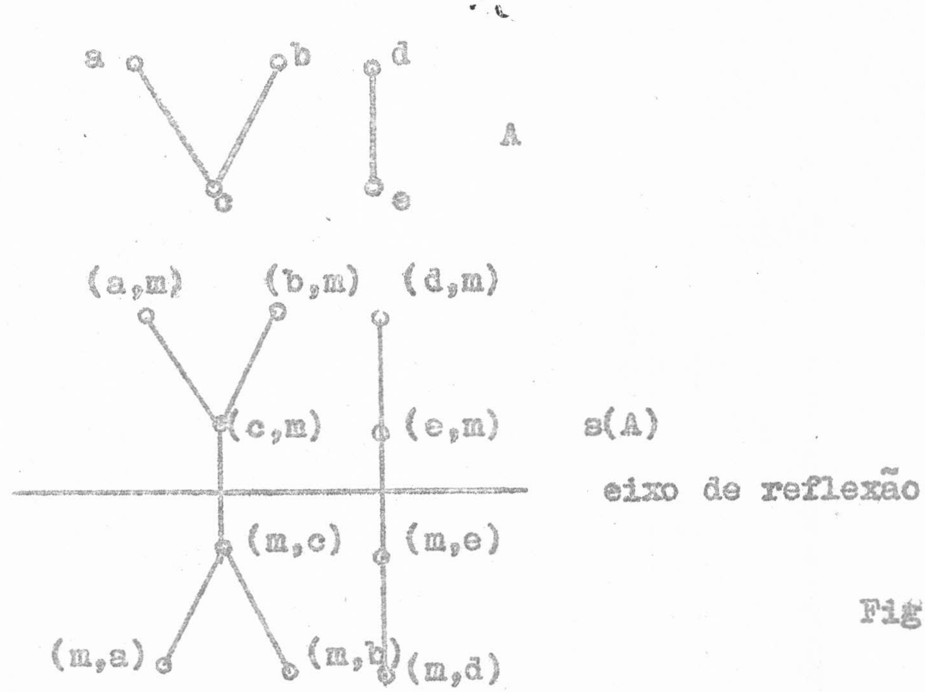


Fig. 2

Voltaremos a falar da simetrização fraca mais tarde. A- gora vejamos outros tipos de simetrização.

Sendo A sempre um conjunto ordenado a relação de ordem em $A \times A$

$$(a, b) \leqslant (u, v) \Longleftrightarrow a \leqslant u \quad e \quad v \leqslant b$$

juntamente com

$$-(a, b) = (b, a)$$

em lugar de φ define em $A \times A$ um conjunto ordenado simétrico. Qualquer sub-estrutura dessa que permita recuperar A é em certo sentido uma simetrização razoável de A.

Um caso particular simples e sugestivo é aquele em que A tem primeiro elemento 0 e a parte de $A \times A$ tomada é a constituida pelos pares de forma (a, o) ou (o, a) onde $a \in A$.

Outro caso, que é o que receberá mais atenção no que segue, é o que restringe os pares (a, b) aos que satisfazem

$$u \leqslant a \quad e \quad u \leqslant b \longrightarrow u = 0$$

ou seja existe o inf de a e b e êsse inf é 0, o primeiro elemento.

Por sua preponderância no que segue tal caso é que receberá a denominação de o simetrizado de A e denotado por S(A).

Podemos ver tal simetrizado sob o seguinte ponto de vista que ilumina sua interpretação. Consideremos uma relação binária $|$ em um conjunto ordenado satisfazendo

$$a \mid b \longrightarrow b \mid a$$

se $a \mid b$ e $u \leqslant a$ então $u \mid b$.

Tal relação de "separação" é ilustrada por noções tais como incompatibilidade, primos entre sí, disjunção e o simetrizado considera os pares que satisfazem a uma relação dêsse tipo. Intuitiva e dialèticamente o simetrizado é gerado por pares de elementos contrários, separados, incompatíveis, sem nada em comum, etc. E a relação de ordem considerada reflete tal intuição; bem como a simetria.

Propriedades importantes de S(A) são descritas no

TEOREMA 2. S(A) com a ordem e a simetria indicadas é

1) conjunto ordenado centralmente simétrico.

2) dado $x \in A$ existe o sup de x com c (centro) denotado por x^+ (o sup de $-x$ e c será denotado por x^-)

3) $x^+ \geqslant y^+ , x^- \leqslant y^- \longrightarrow x \geqslant y$

4) existe o inf de x^+ e x^- e êsse inf é igual a c.

5) dados $a , b \in S(A)$ tais que existe o inf de a e b que é igual a c, então existe $x \in S(A)$ tal que $x^+ = a$ e $x^- = b$.

A demonstração dêsse teorema se reduz à mera verificação.

$c = (0 , 0)$ é o centro de $S(A)$

$(a , b)^+ = (a , b) \vee (0,0) = (a , 0)$

$(a , b)^- = -(a , b) \vee (0 , 0) = (b , 0)$

donde

$(a , b)^+ \wedge (a , b)^- = (0 , 0)$.

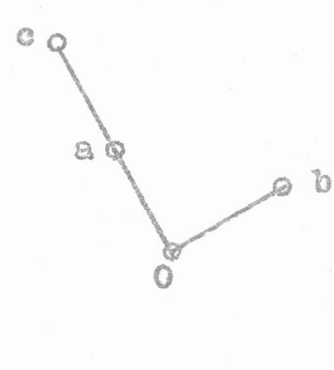
$$\left.\begin{array}{l} (a , b)^+ \geqslant (c , d)^+ \longrightarrow a \geqslant c \\ (a , b)^- \leqslant (c , d)^- \longrightarrow b \leqslant d \end{array}\right\} \longrightarrow (a , b) \geqslant (c , d)$$

Finalmente os pares de elementos de $S(A)$ cujo inf é c são da forma $(a , 0)$, $(b , 0)$ onde $a \wedge b = 0$ e portanto $(a , b) \in S(A)$ e responde a 5).

E naturalmente A é recuperado com o conjunto dos $(a , 0)$ onde $a \in A$.

Um exemplo simples é ilustrado nos diagramas seguintes, onde a simetrização intuitiva é imediatamente percebida.

A



S(A)

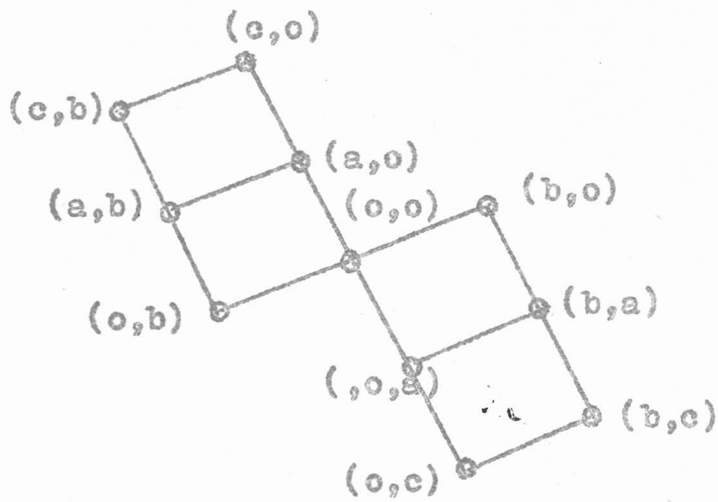


Fig.3

O Teorema 2 admite a seguinte recíproca, que é uma caracterização dos simetrizados de conjuntos ordenados com primeiro elemento.

TEOREMA 3 - Seja S com relação $\leqslant$ e aplicação - satisfazendo às condições 1) a 5) do Teorema 2. S é então isomorfo à S(A) com de $A = \{x \in S \mid x \geqslant c\}$ sendo c o centro de S.

Para demonstrar êsse teorema observemos inicialmente que 2) acarreta a existência do inf de qualquer elemento com c e que 3) implica na unicidade do elemento que 5) afirma existir.

Assim sendo, vamos definir uma aplicação

$$i : S(A) \longrightarrow S$$

fazendo $i(a , b) = x$, onde x é o único elemento de S tal que

$$x^+ = a \text{ e } x^- = b.$$

Aqui naturalmente $a , b \in A$ e $a \wedge b = 0$. Para que essa i seja um isomorfismo devemos mostrar que é sôbrejetora e que

$$(a , b) \leqslant (u , v) \longleftrightarrow i(a , b) \leqslant i(u , v)$$

$$i(-(a , b)) = -i(a , b)$$

Que i é sobrejetora decorre de 4) pois se

$x \in S$, $i(x^+, x^-) = x$ e $x^+ \wedge x^- = c$.

Se $(a, b) \leqslant (u, v)$ então $a \leqslant u$ e $b \geqslant v$; se $x = i(a, b)$ e $y = i(u, v)$ temos que $x^+ = a$, $x^- = b$, $y^+ = u$, $y^- = v$ e portanto $x^+ \leqslant y^+$ e $x^- \geqslant y^-$ que acarreta por 3) $x \leqslant y$ ou $i(a, b) \leqslant i(u,v)$.

Por outro lado

$$x \leqslant y \longrightarrow \begin{cases} x \vee c \leqslant y \vee c \\ x \wedge c \leqslant y \wedge c \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x \vee c \leqslant y \vee c \\ -x \vee c \geqslant -y \vee c \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} x^+ \leqslant y^+ \\ x^- \geqslant y^- \end{cases} \longrightarrow (x^+, x^-) \leqslant (y^+, y^-)$$

Por fim se $i(a, b) = x$ temos que

$$x \vee c = a$$
$$-x \vee c = b$$

donde se ségue que $i(b, a) = -x$ pois

$$-x \vee c = b$$
$$- -x \vee c = x \vee c = a$$

Daí

$$i(-(a, b)) = i(b, a) = -x = -i(a, b)$$

Tendo em vista êsse teorema vamos chamar de conjunto ordenado completamente simétrico ao que satisfaz às condições 1) a 5). Assim sendo, o simetrizado de um conjunto ordenado com primeiro elemento é completamente simétrico e reciprocamente um conjunto ordenado completamente simétrico é o simetrizado do conjunto ordenado fôrmado por seus elementos que superam ou igualam seu centro.

Cumpre observar, aqui e depois, que em virtude da dualidade fundamental da ordem há também outra noção (dual) de simetrização que não mencionamos afora esta observação.

Vimos que o processo de simetrização leva conjuntos ordenados com primeiro elemento em conjuntos ordenados completamente simétricos. E na verdade o processo estabelece uma correspondência biunívoca entre essas estruturas. Agora seria o caso de se procurar saber como os homomorfismos se comportam relativamente ao processo. Para isso precisamos nos decidir antes sôbre o que chamar de homomorfismo. No caso de conjunto ordenado com primeiro elemento 0 é de se esperar que os homomorfismos satisfaçam a

$$x \leqslant y \longrightarrow h(x) \leqslant h(y)$$
$$h(0) = 0$$

E adotaremos tal definição. No entanto usaremos também a noção mais forte que exige também de h o seguinte

$$\text{se } a \wedge b = 0 \quad \text{então } h(a) \wedge h(b) = 0$$

Êsses serão os homomorfismos fortes.

Com relação aos completamente simétricos os homomorfismos devem satisfazer a

$$x \leqslant y \longrightarrow h(x) \leqslant h(y)$$
$$h(-x) = -h(x)$$

e para uso abaixo chamaremos de homomorfismos fortes os que satisfazem às condições adicionais

$$x \wedge y = c \longrightarrow h(x) \wedge h(y) = c$$
$$h(x \vee c) = h(x) \vee c$$

Com isso a definição de prolongamento se impõe naturalmente . Seja $h : A \longrightarrow B$ homomorfismo forte de conjuntos ordenados com primeiro elemento. O prolongamento $S(h)$ de h é o homomorfismo de completamento simétricos

$$S(h) : S(A) \longrightarrow S(B)$$

dado por

$$S(h)(a\,,b) = (h(a)\,, h(b))$$

E temos o seguinte

TEOREMA 4 - Se A e B são conjuntos ordenados com primeiro elemento e $h : A \longrightarrow B$ é homomorfismo forte, então $S(h)$ é homomorfismo forte de $S(A)$ em $S(B)$. Reciprocamente, se h é homomorfismo forte de $S(A)$ em $S(B)$ então h é prolongamento de sua restrição a A. Ademais o diagrama

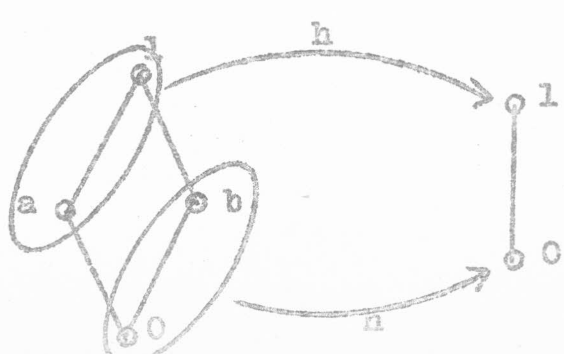
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\sigma"'] & B \arrow[d, "\sigma"] \\ S(A) \arrow[r, "S(h)"] & S(B) \end{tikzcd}$$

é comutativo, sendo σ a imersão natural.

Caso particular muito simples é aquele em que A é totalmente ordenado. Aí $S(h)$ é caracterizado simplesmente por

$$S(h)(a) = h(a)$$
$$S(h)(-a) = -h(a)$$

Outro exemplo é descrito nos diagramas abaixo



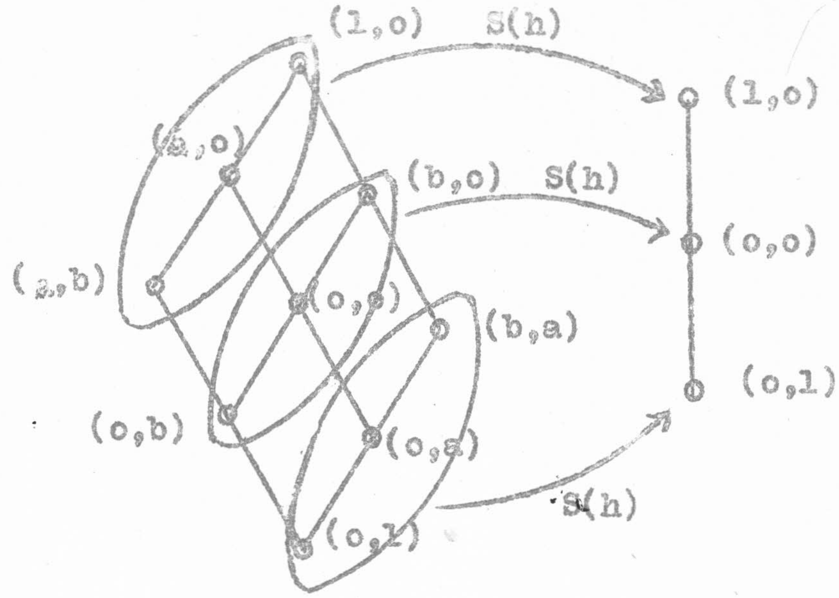


Fig.4

Que estruturas são preservadas pelo processo de simetrização ? Mais precisamente, se A é de um certo tipo de estrutura (não considerando o primeiro elemento) S(A) também é ? Para as álgebras de Boole a resposta é negativa. Uma resposta positiva importante para o que segue é dada pelo

TEOREMA 5 - Se A é reticulado distributivo com primeiro elemento então S(A) também é reticulado distributivo.

As definições pertinentes, sugeridas pela relação de ordem em S(A) são

$$(a,b)\wedge(u,v) = (a\wedge u, b\vee v)$$
$$(a,b)\vee(u,v) = (a\vee u, b\wedge v)$$

Os segundos membros estão em S(A) pois pela distributividade

$$(a\wedge c)\wedge(b\vee d) = (a\wedge c\wedge b)\vee(a\wedge c\wedge d) = 0$$
$$(a\vee c)\wedge(b\wedge d) = (a\wedge b\wedge d)\vee(c\wedge b\wedge d) = 0$$

É simples verificar que S(A) é um reticulado distributivo. A simetria ou complemento fraco - em S(A) satisfaz também às chamadas leis de De Morgan.

$$-(x\wedge y) = -x\vee -y$$
$$-(x\vee y) = -x\wedge -y$$

Aqui como antes A será identificado com a parte

$$A \times \{0\} \text{ de } S(A).$$

Um exemplo finito é o do reticulado dos divisores de 12 onde adotamos uma notação sugestiva no seu simetrizado.

A

S(A)

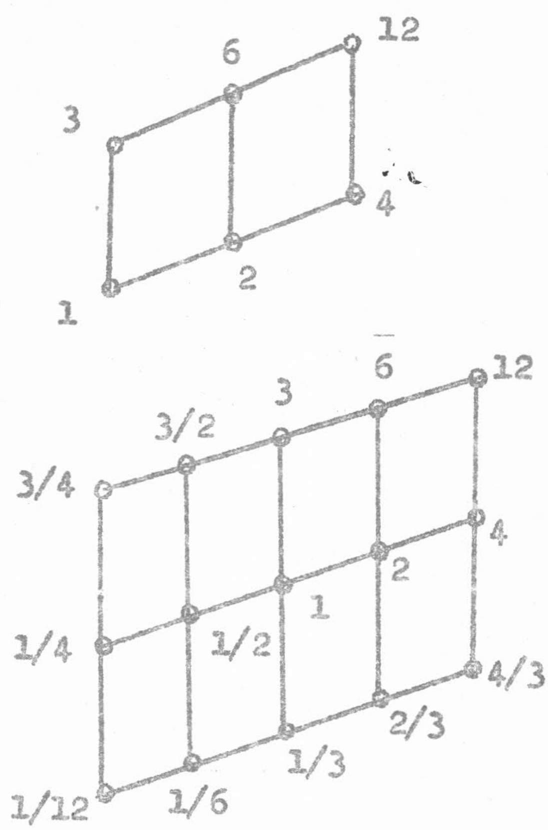


Fig. 5

Outro exemplo simples é N com a ordem usual. S(N) é Z com a ordem usual e o inverso aditivo como $-$. Já se em N_+ (inteiros > 0) tomamos como ordem a divisibilidade

$$a \leq b \Longleftrightarrow a \mid b$$

$S(N_+)$ é Q_+ (racionais > 0) com a ordem

$$x \leq y \Longleftrightarrow \text{existe } n \in N_+ \text{ tal que } nx = y$$

e $-$ funcionando como inverso multiplicativo.

Observando as definições de $\wedge$ e $\vee$ em S(A) vemos que uma condição suficiente para que S(A) seja reticulado é que A seja reticulado com primeiro elemento satisfazendo

$$a \wedge b = u \wedge v = 0 \longrightarrow \begin{cases} (a \wedge u) \wedge (b \vee v) = 0 \\ (a \vee u) \wedge (b \wedge v) = 0 \end{cases}$$

Tal é o que acontece, por exemplo, com o reticulado não distributivo (e não modular)

A

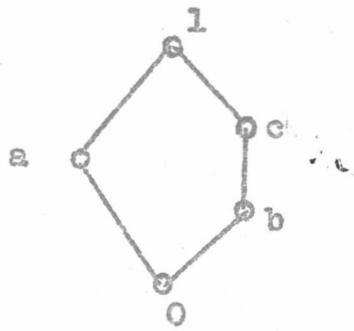
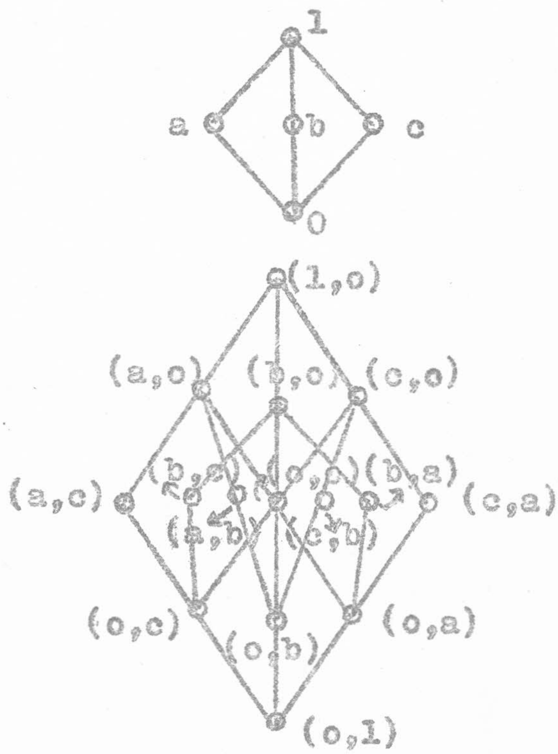


Fig. 6

Essa condição, no entanto, não é necessária como bem mostra o exemplo abaixo de um reticulado modular típico A cujo simetrizado S(A) é reticulado mas a condição não se verifica para A.

A



S(A)

Fig. 7

A condição não se verifica porque

$$a \wedge b = a \wedge c = 0$$

mas

$$(a \wedge a) \wedge (b \vee c) = a \wedge 1 = a \neq 0$$

O problema de saber se S(A) é reticulado (sendo A reticulado com primeiro elemento) torna-se assim bastante complicado.

Seguindo a mesma linha que a desenvolvida para conjuntos ordenados vamos agora dar algumas definições.

Diremos que um reticulado distributivo é simétrico se uma simetria ou complemento fraco - estiver nêle definida e satisfazendo

$$- - x = x$$

leis de De Morgan

Decorre então que

$$x \leqslant y \longrightarrow -y \leqslant -x \, .$$

Se tal reticulado tiver um único elemento invariante para - dir-se-á centralmente simétrico. Êsse elemento será então chamado de centro do reticulado.

Um reticulado simétrico diz-se normal se

$$x \wedge -x \leqslant y \vee -y$$

quaisquer que sejam seus elementos x e y . Se A é normal A admite no máximo um elemento invariante para - .

Finalmente um reticulado é completamente simétrico se for normal, tiver centro c e dados a e b tais que $a \wedge b = c$ existe x com

$$x \vee c = a$$

$$-x \vee c = b$$

Como antes faremos

$$x^+ = x \vee c$$

$$x^- = -x \vee c$$

E com isso temos naturalmente o Teorema 5 - Se A é reti tamente simétrico.

Comparando as condições de reticulado completamente simétrico com as de conjunto ordenado completamente simétrico vemos que a 4) corresponde à normalidade e que 2) e 3) são desnecessários no caso de reticulados distributivos. 3) na verdade corresponde à uma versão fraca de lei do corte para reticulados distributivos.

Para completar vem agora o

TEOREMA 6 - Se S é um reticulado completamente simétrico, c seu centro e $A = \{x \in S \mid x \geq c\}$, então S é isomorfo a $S(A)$.

Definamos

$$i : S \longrightarrow S(A)$$

por

$$i(x) = (x^+, x^-)$$

que está bem definido uma vez que

$$x^+ \wedge x^- = (x \vee c) \wedge (-x \vee c)$$
$$= (x \wedge -x) \vee c = c$$

(pois pela normalidade $x \wedge -x \leq c \vee -c = c$). i é biunívoca pela lei do corte e é sobrejetora pois dado $(a, b) \in S(A)$ segue-se que $a \wedge b = c$ donde existe $x \in S$ tal que $x^+ = a$, $x^- = b$ e portanto

$$i(x) = (a, b).$$ Além disso

$$i(-x) = (-x \vee c, --x \vee c)$$
$$= (-x \vee c, x \vee c) = -i(x)$$
$$i(x \wedge y) = ((x \wedge y) \vee c, -(x \wedge y) \vee c)$$
$$= ((x \vee c) \wedge (y \vee c), (-x \vee c) \vee (-y \vee c))$$
$$= i(x) \wedge i(y)$$

e anàlogamente

$$i(x \vee y) = i(x) \vee i(y)$$

Quanto a versão do Teorema 4 para o caso que ora estudamos ela torna desnecessária a qualificação adicional de "forte" como se vê imediatamente. Temos assim o

TEOREMA 7 - Se A e B são reticulados distributivos com primeiro elemento e $h : A \to B$ homomorfismo, então $S(h)$ é homomorfismo de $S(A)$ em $S(B)$. Reciprocamente, se h é homomorfismo de $S(A)$ em $S(B)$, então h é prolongamento de suá restrição a A. Ademais o diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\sigma"'] & B \arrow[d, "\sigma"] \\ S(A) \arrow[r, "S(h)"] & S(B) \end{tikzcd}$$

é comutativo, sendo σ a imersão natural.

O teorema anterior também pode ser encarado como fornecendo a seguinte característica universal dos simetrizados.

TEOREMA 8 - Se $f : A \to S$ é homomorfismo de reticulado (onde A é reticulado distributivo com primeiro elemento e S reticulado completamento simétrico) levando o em o então existe um único homomorfismo h de $S(A)$ em S que prolonga f .

É então comutativo o diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr, "f"'] & & S(A) \arrow[dl, "h"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

Vamos agora relacionar a simetrização fraca de conjuntos ordenados com a simetrização de reticulados distributivos.

Para isso vejamos antes uma maneira natural de gerar reticulados distributivos a partir de conjuntos ordenados.

Se A é um conjunto ordenado seu dual A* é o conjunto dos homomorfismos de A em M onde $M = \{o, 1\}$ com $o < 1$. M naturalmente é escolhido por ser o mais simples que separa homomorfismos. Ou seja se A é ordenado, $x, y \in A$ e $x \neq y$ então existe um homomorfismo h de A em M tal que $h(x) \neq h(y)$. A* pode ser identificado com os ideais de A (ou imagens inversas de o) sendo um ideal N uma parte de A satisfazendo

$$x \in N \quad e \quad y \leqslant x \longrightarrow y \in N$$

Além disso os ideais de A são fechados para união e intersecção e portanto A* considerado como o conjunto dos ideais é um reticulado distributivo com primeiro elemento (ϕ).

M também separa homomorfismos de reticulados distributivos e é possível mostrar que, se A é finito, A** é naturalmente isomorfo a A.

Se A tem uma simetria φ, A* torna-se um reticulado simétrico fazendo

$$-N = \complement \varphi N = \varphi \complement N \qquad N \in A^*$$

onde $\complement$ denota o complementar relativamente a A.

Sôbre essa construção ver Monteiro[11]. O número refere-se à bibliografia citada ao final do trabalho.

O relacionamento prometido é dado pelo

TEOREMA 9 - Se A é conjunto ordenado então $[s(A)]^*$ é isomorfo a $S(A^*)$.

Para demonstrar êsse isomorfismo vamos definir

$$i: S(A^*) \longrightarrow [s(A)]^*$$

fazendo

$$i(N,R) = N \cup (\varphi(A) - \varphi(R))$$

sendo N e R ideais de A tais que

$$N \cap R = \phi$$

Precisamos ver, antes de tudo, que i está bem definida, ou seja que

$$N \cup (\varphi(A) - \varphi(R)) \in [s(A)]^*$$

Para isso tomemos

$$x \in N \cup (\varphi(A) - \varphi(R)) \text{ e } y \leqslant x$$

e vejamos os casos possíveis

a) $x, y \in A$. Então $x \in N$, $y \in N$ e portanto

$y \in N \cup (\varphi(A) - \varphi(R))$

b) $x \in A$ e $y \in \varphi(A)$. Então

$$y \leqslant \varphi(u) \leqslant u \leqslant x$$

onde $u \in A$ e daí $u \in N$ (pois $x \in N$).

Se fosse $y \in \varphi(R)$, $y = \varphi(r)$, $r \in R$ e

$$\varphi(r) \leqslant \varphi(u)$$

$$u \leqslant r$$

$$u \in R$$

que com $u \in N$ dá $u \in N \cap R$ absurdo.

Logo $y \notin \varphi(R)$ sendo portanto

$$y \in \varphi(A) - \varphi(R) \subset N \cup (\varphi(A) - \varphi(R))$$

c) $x, y \in \varphi(A)$. Então $x \notin \varphi(R)$ donde $\varphi(x) \notin R$. Como $y \leqslant x$, $\varphi(x) \leqslant \varphi(y)$, $\varphi(y) \notin R$, $y \notin \varphi(R)$. Assim sendo

$$y \in \varphi(A) - \varphi(R) \subset N \cup (\varphi(A) - \varphi(R))$$

A seguir mostremos que i é biunívoca. Supondo

$$N_1 \cup (\varphi(A) - \varphi(R_1)) = N_2 \cup (\varphi(A) - \varphi(R_2))$$

temos que

$$N_1 \cup \varphi(A - R_1) = N_2 \cup \varphi(A - R_2)$$

donde $N_1 = N_2$, $A - R_1 = A - R_2$, $R_1 = R_2$.

Vejamos agora que i é sobrejetora.

Seja $T \in [s(A)]^*$,

$$T = T_1 \cup T_2 \quad \text{onde} \quad \begin{array}{l} T_1 \subset A \\ T_2 \subset \varphi(A) \end{array}$$

Daí, $T_1 \in A^*$, $\varphi(T_2) \subset A$. Façamos

$$R = A - \varphi(T_2)$$

e mostremos que R é ideal de A.

Seja $x \in R$ e $y \leqslant x$, onde $y \in A$. Como $x \in R$, $x \notin \varphi(T_2)$, $\varphi(x) \notin T_2$. Mas $y \leqslant x$ implica $\varphi(x) \leqslant \varphi(y)$; sendo assim, se $y \notin R$, $y \in \varphi(T_2)$, $\varphi(y) \in T_2$ e $\varphi(x) \in T_2$ absurdo. Logo $y \in R$ e R é realmente um ideal de A. Para terminar de mostrar que i é sobrejetora notemos que

$$\varphi(T_2) = A - R$$

$$T_2 = \varphi(A - R)$$

$$T = T_1 \cup \varphi(A - R)$$

onde T_1 e $R \in A^*$. Resta ver que

$$T_1 \cap R = \emptyset$$

Se $x \in T_1 \cap R$ então $x \in T_1$ e, como $\varphi(x) \leqslant x$, $\varphi(x) \in T_2$, como também $x \in R$, $x \notin \varphi(T_2)$ e $\varphi(x) \notin T_2$ absurdo.

Agora é a vez de mostrar que

$$i((N_1, R_1) \wedge (N_2, R_2)) = i(N_1, R_1) \cap i(N_2, R_2)$$

$$i((N_1, R_1) \vee (N_2, R_2)) = i(N_1, R_1) \cup i(N_2, R_2)$$

Vejamos a primeira, pois a outra é análoga.

$$[N_1 \cup (\varphi(A) - \varphi(R_1)] \cap [N_2 \cup (\varphi(A) - \varphi(R_2)] =$$
$$= (N_1 \cap N_2) \cup [\complement_{\varphi(A)} \varphi R_1 \cap \complement_{\varphi(A)} \varphi R_2] =$$
$$= (N_1 \cap N_2) \cup \complement_{\varphi(A)} \varphi (R_1 \cup R_2) =$$
$$= (N_1 \cap N_2) \cup (\varphi(A) - \varphi(R_1 \cup R_2))$$

Finalmente precisamos ver que

$$i(-(N, R)) = -i(N, R)$$
$$-i(N, R) = -[N \cup (\varphi(A) - \varphi(R))]$$
$$= \complement_{S(A)} [\varphi(N) \cup (A - R)]$$
$$= R \cup (\varphi(A) - \varphi(N))$$
$$= i(R, N)$$
$$= i(-(N, R))$$

Como um exemplo simples de aplicação dêsse Teorema consideremos

$$A = P \cup Q \cup R \qquad \text{(união disjunta)}$$

onde

$$P = \{p_1 < p_2 < \dots < p_n < \dots\}$$
$$Q = \{q_1 < q_2 < \dots < q_n < \dots\}$$
$$R = \{r_1 < r_2 < \dots < r_n < \dots\}$$

sendo p_i, q_j e r_k incomparáveis dois a dois quaisquer que sejam i, j, k. Os elementos de A^* podem então ser identificados às ternas

$$(i, j, k) \qquad i, j, k = 0, 1, \dots, n, \dots, w$$

onde

$$p_u \in (i, j, k) \longleftrightarrow u \leqslant i$$
$$q_v \in (i, j, k) \longleftrightarrow v \leqslant j$$
$$r_w \in (i, j, k) \longleftrightarrow w \leqslant k$$

A ordem de A^* se reflete na seguinte ordem nas ternas

$$(i_1, j_1, k_1) \leqslant (i_2, j_2, k_2) \longleftrightarrow \begin{cases} i_1 \leqslant i_2 \\ j_1 \leqslant j_2 \\ k_1 \leqslant k_2 \end{cases}$$

Pelo isomorfismo do teorema $S(A^*)$ pode ser visto como $[S(A)]^*$ e os elementos dêsse último conjunto podem ser identificados às ternas

$$(i, j, k) \quad i, j, k = -\omega, \ldots, -n, \ldots, -1, 0, 1, \ldots$$
$$\ldots, n, \ldots, \omega$$

onde

$$p_r \in (i, j, k) \longleftrightarrow r \leqslant i$$
$$\varphi(p_r) \in (i, j, k) \longleftrightarrow -r \leqslant i$$

e condições semelhantes para os elementos de Q e R.

Por exemplo

$$P \cup \{x \mid x \leqslant \varphi(q_2)\} \cup \{x \mid x \leqslant \varphi(r_1)\} = (\omega, -1, 0)$$

Mais uma vez a ordem é dada por

$$(i_1, j_1, k_1) \leqslant (i_2, j_2, k_2) \longleftrightarrow \begin{cases} i_1 \leqslant i_2 \\ j_1 \leqslant j_2 \\ k_1 \leqslant k_2 \end{cases}$$

e a simetria $-$ por

$$-(i, j, k) = (-i, -j, -k)$$

Se (i_1, j_1, k_1) e (i_2, j_2, k_2) são elementos disjuntos de A^* então

$$\min(i_1, i_2) = \min(j_1, j_2) = \min(k_1, k_2) = 0$$

e pela correspondência

$$(N, R) \longleftrightarrow N \cup (\varphi(A) - \varphi(R))$$

vemos que a terna associada ao par

$$((i_1, j_1, k_1), (i_2, j_2, k_2))$$

é

$$(i_1 - i_2, j_1 - j_2, k_1 - k_2)$$

Observemos também que as ternas de A^* onde não ocorre ω podem ser identificadas aos naturais

$$2^i\ 3^j\ 5^k \qquad i, j, k = 0, 1, \ldots, n, \ldots$$

e a ordem de A^* nessa interpretação passa a ser a divisibilidade.

A simetrização dessa parte de A^* vai corresponder aos racionais

$$2^i\ 3^j\ 5^k \qquad i, j, k = \ldots, -n, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, \ldots, n, \ldots$$

com a relação de ordem

$$x \leqslant y \Longleftrightarrow \text{existe um natural } n \text{ tal que } nx = y$$

e a simetria

$$-(2^i\ 3^j\ 5^k) = 2^{-i}\ 3^{-j}\ 5^{-k}\ .$$

Um caso particular do teorema que merece ser destacado é aquele em que A tem ordem trivial ($x \leqslant y$ se e só se $x = y$). Em s(A) $x < y \Longleftrightarrow x = \varphi(a)$ e $y = a$ com $a \in A$. A^* é simplesmente $\mathscr{S}(A)$ e $S(A^*)$ as partes de s(A) da forma

$$N \cup (\varphi(A) - \varphi(R))$$

onde $N, R \subseteq A$ e $N \cap R = \emptyset$.

CAPÍTULO II

RETICULADOS COMPLETAMENTE SIMÉTRICOS

Neste capítulo examinaremos mais detidamente os reticulados completamente simétricos.

Comecemos com uma observação sôbre o caso finito. Como nesse caso a dualidade é reflexiva temos o:-

Teorema 1:- Existe uma correspondência biunívoca natural entre os conjuntos ordenados simétricos finitos obtidos por simetria fraca e os reticulados completamente simétricos finitos. Essa correspondência atua da seguinte maneira:-

Seja A um conjunto ordenado finito e $s(A)$ o simetrizado fraco de A. Então a $s(A)$ associamos $[s(A)]^{*} = S(A^{*})$ que é um reticulado completamente simétrico finito.

Recìprocamente, se S é um reticulado completamente simétrico finito, associamos a S o conjunto P de seus elementos primos com a ordem induzida e a simetria φ dada por

$$\varphi(p) = \bigwedge_{p \not\leq -x} x$$

Então $P = s(A)$ onde A é o conjunto dos primos p tais que

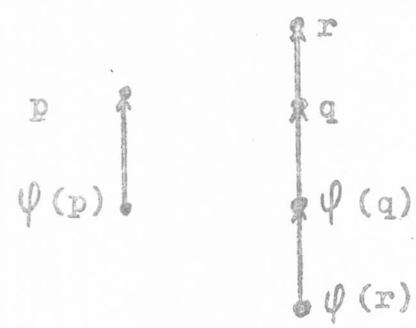
$\varphi(p) \leqslant p$.

Recordemos que um elemento p de um reticulado distributivo é primo se p não é o primeiro elemento e

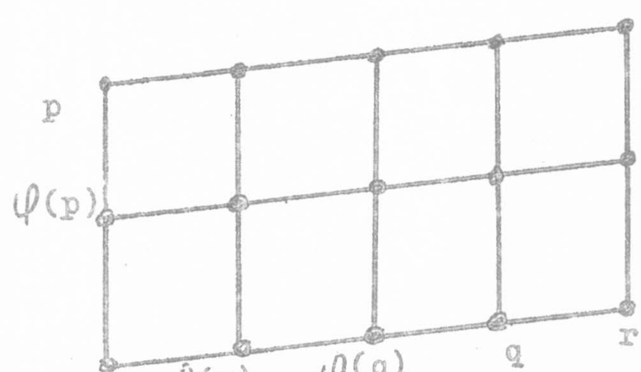
$$p \leqslant x \vee y \implies p \leqslant x \quad \text{ou} \quad p \leqslant y$$

Exemplificando, seja A o conjunto ordenado abaixo

s(A) será então



e $[s(A)]^* = S(A^*)$ será o reticulado completamente simétrico abaixo



Recìprocamente os primos dêsse reticulado com a ordem induzida e a simetria indicada restauram s(A).

Vejamos agora o que seria natural chamar de sub-estrutura ou, mais explìcitamente, de sub-reticulado completamente simétrico de um reticulado completamente simétrico.

Parece razoàvel dar a seguinte

<u>Definição</u>:- Uma parte B de um reticulado completamente simétrico A é um sub-reticulado completamente simétrico se B contém o centro de A e, com as operações induzidas ($\wedge$, $\vee$, $-$), for um reticulado completamente simétrico.

Com isso temos o

<u>Teorema 2</u>:- Existe uma correspondência biunívoca natural entre os sub-reticulados de A e os sub-reticulados completamente simétricos de S(A).

De fato, se B é sub-reticulado de A, então S(B) é sub-reticulado completamente simétrico de S(A). Reciprocamente, se S é sub-reticulado completamente simétrico de S(A) e $B = \{x \in S / x \geqslant c\}$, onde c é o centro de A, então S = S(B).

Observemos também que, se $x \in S(A)$, então $x \in S$ se e sòmente se x^+ e x^- estão em B.

A intersecção de sub-reticulados completamente simétricos é também um sub-reticulado completamente simétrico, donde tem sentido falar no sub-reticulado completamente simétrico gerado por uma parte.

Em particular A gera S(A).

Passemos agora ao produto de reticulados completamente simétricos. Recordemos que se $(A_i)_{i \in I}$ é uma família de reticulados distributivos com primeiro elemento seu produto

$$A = \prod_{i \in I} A_i$$

é, com as definições usuais, também um reticulado distributivo com primeiro elemento.

Seja então $(S_i)_{i \in I}$ uma família de reticulados completamente simétricos. No produto

$$S = \prod_{i \in I} S_i$$

definamos

$$(x_i)_{i \in I} \wedge (y_i)_{i \in I} = (x_i \wedge y_i)_{i \in I}$$

$$(x_i)_{i \in I} \vee (y_i)_{i \in I} = (x_i \vee y_i)_{i \in I}$$

$$- \left[(x_i)_{i \in I}\right] = (-x_i)_{i \in I}$$

Com essas definições S é um reticulado completamente simétrico com centro

$$c = (c_i)_{i \in I}$$

sendo c_i o centro de S_i.

Verifiquemos, por exemplo, a última condição da definição de reticulado completamente simétrico.

Se $\quad x = (x_i)_{i \in I}, \quad y = (y_i)_{i \in I}$

estão em S e $x \wedge y = c$, temos que

$$x_i \wedge y_i = c_i$$

donde existe $u_i \in S_i$ com

$$u_i^+ = x_i$$

$$u_i^- = y_i$$

Assim sendo, fazendo

$$u = (u_i)_{i \in I} \in S$$

temos que

$$u^+ = x$$

$$u^- = y$$

S sendo completamente simétrico, segue-se que

$$S = S(A)$$

onde $a \in A \longleftrightarrow a \geqslant c$, ou seja se

$$a = (a_i)_{i \in I}$$

$a \in A \longleftrightarrow a_i \geqslant c_i$ para todo $i \in I$

Então, fazendo $A_i = \left\{ x_i \in S_i / x_i \geqslant c_i \right\}$ temos que

$S_i = S(A_i)$ e $A = \prod_{i \in I} A_i$.

Vale portanto o

<u>Teorema 3</u>:- $S\left(\prod_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} S(A_i)$

Pelo dito acima a identificação é dada por

$$((x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I}) = (x_i, y_i)_{i \in I}$$

Considerações análogas se verificam para o produto fraco.

Se $(A_i)_{i \in I}$ é uma família de reticulados distributivos com primeiro elemento, o produto fraco dessa família

$$A = \prod_{i \in I}^{f} A_i$$

é constituido dos $(a_i)_{i \in I}$, onde a_i é o primeiro elemento de A_i com exceção de no máximo um número finito de índices $i \in I$.

Se $(S_i)_{i \in I}$ é uma família de reticulados completamente simétricos seu produto fraco

$$S = \prod_{i \in I}^{f} S_i$$

consta dos $(x_i)_{i \in I}$, onde $x_i \in S_i$ e $x_i = c_i$ (centro de S_i) exceto para um número finito de índices.

Do mesmo modo vale o

<u>Teorema 4</u>:- $S(\prod_{i \in I}^{f} A_i) = \prod_{i \in I}^{f} S(A_i)$

Como exemplo desta última situação consideremos

$$A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$$

todos iguais a N (conjunto dos números naturais). O produto fraco

$$\prod_{i=1}^{\infty f} A_i$$

pode ser reinterpretado como o conjunto dos números naturais maiores que 0, N_+, fazendo

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots) = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_n^{a_n} \ldots$$

sendo p_n o n-ésimo primo. Por outro lado $S(A_i)$ é Z (conjunto dos inteiros) para cada $i \in I$. Tanto Z como N são considerados com a ordem habitual. Com o mesmo tipo de interpretação o produto fraco

$$\prod_{i=1}^{\infty}{}^{f} S(A_i)$$

pode ser visto como o conjunto Q_+ dos números racionais maiores que 0.

A ordem em ambos os produtos fracos é

$$x \leqslant y \iff \text{existe } n \in N_+, \text{ tal que } nx = y$$

Assim sendo

$$S(N_+) = Q_+$$

com a ordem acima.

Um caso particular do Teorema 3 que merece ser destacado é aquêle em que

$$A_i = M = \{0 < 1\} \quad \text{para todo } i \in I$$

O produto

$$\prod_{i \in I} A_i$$

é então o conjunto das aplicações de I em M que pode ser confundido com $\mathcal{P}(I)$. Aplicando o teorema, vemos então que o conjunto das aplicações de I em $S(M) = \{-1 < 0 < 1\}$, considerado de maneira natural como reticulado completamente simétrico, é o simetrizado de $\mathcal{P}(I)$ considerado como reticulado distributivo com primeiro elemento.

Para nos ajudar agora no estudo dos homomofismos, vejamos algumas propriedades dos filtros primos. Comecemos com o

Teorema 5:- Em um reticulado simétrico a aplicação

$$P \longrightarrow \varphi(P)$$

onde

$$\varphi(P) = \complement - P = - \complement P$$

é uma simetria no conjunto dos filtros primos, ou seja

$$\varphi^2(P) = P$$

$$P \subset Q \longrightarrow \varphi(Q) \subset \varphi(P)$$

Recordemos que um filtro primo P é uma parte própria não vazia, satisfazendo a

1) $x \in P$ e $x \leqslant y \longrightarrow y \in P$

2) $x, y \in P \longrightarrow x \wedge y \in P$

3) $x \vee y \in P \longrightarrow x \in P$ ou $y \in P$

Verifiquemos o Teorema 5 mostrando que $\varphi(P)$ é de fato um filtro primo. Se $x \in \varphi(P)$ e $x \leqslant y$ então $-x \notin P$ e $-y \leqslant -x$, donde

$-y \notin P$ e $y \in \varphi(P)$.

Se $x, y \in \varphi P$, $-x \notin P$ e $-y \notin P$; daí

$-x \vee -y \notin P$, $-(x \wedge y) \notin P$ e $x \wedge y \in \varphi(P)$.

Por fim se $x \vee y \in \varphi(P)$, $-(x \vee y) \notin P$, $-x \wedge -y \notin P$, o que implica $-x \notin P$ ou $-y \notin P$ acarretando $x \in \varphi(P)$ ou $y \in \varphi(P)$.

Que φ é simetria decorre imediatamente de sua expressão.

A seguir vejamos o

Teorema 6:- Em reticulado normal P e $\varphi(P)$ são sempre comparáveis.

Suponhamos que $P \not\subset \varphi(P)$. Existe $x \in P$ tal que $x \notin \varphi(P)$, ou seja $x \in -P$ e $-x \in P$. Daí $x \wedge -x \in P$. Mostremos que $\varphi(P) \subset P$. Se $y \in \varphi(P)$, $-y \notin P$ e, como $x \wedge -x \leqslant y \vee -y$, $y \vee -y \in P$ donde $y \in P$.

Teorema 7:- Em um reticulado centralmente simétrico $P \neq \varphi(P)$

Suponhamos $P = \varphi(P)$. Então $x \in P \longleftrightarrow x \in \varphi(P) \longleftrightarrow -x \notin P$ o que, para $x = c$, dá o absurdo

$$c \in P \longleftrightarrow c \notin P$$

Esses resultados sugerem a seguinte

Definição:- Em um reticulado centralmente simétrico normal, os filtros primos P tais que $\varphi(P) \supset P$ são chamados de primeira espécie; os outros (para os quais $\varphi(P) \subset P$), são chamados de segunda espécie.

Observemos que, se $c \in P$ então P é de segunda espécie. Pois se fosse $P \subset \varphi(P)$ teríamos que $c \in \varphi(P)$, $\neg c \notin P$, $c \notin P$ absurdo. Logo, P é de primeira espécie se e sòmente se $c \notin P$.

Os filtros primos de primeira espécie de $S(A)$ se correspondem biunívocamente com os filtros primos de A conforme o

Teorema 8:- A P de primeira espécie de $S(A)$ corresponde $P_0 = P \cap A$ de A tal que $P = \left\{x \in S(A)/x^+ \in P_0\right\}$. A P_0 de A corresponde $P = \left\{x \in S(A)/x^+ \in P_0\right\}$ de primeira espécie de $S(A)$ com $P \cap A = P_0$.

Se P é de primeira espécie de $S(A)$ então $c \notin P$ donde $P_0 = P \cap A$, é uma parte própria de A. Tomando $x \in P$, temos que $x \vee c \in P_0$ que é portanto não vazio. Se $x \in P_0$ e $x \leqslant y$, segue-se que $x \in P$, $x \in A$, donde $y \in P$, $y \in A$ e $y \in P_0$. Se $x, y \in P_0$ então $x \wedge y \in P \cap A = P_0$. Se $x, y \in A$ e $x \vee y \in P_0$ temos que $x \in P_0$ ou $y \in P_0$. Assim sendo P_0 é filtro primo de A. E se $x \in P$, $x \vee c \in P \cap A = P_0$

Recìprocamente se $x \vee c \in P_0$, $x \vee c \in P$ e, como $c \notin P$, $x \in P$.

Por outro lado consideremos um filtro primo P_0 de A e definamos

$$P = \left\{x \in S(A)/x^+ \in P_0\right\}$$

P é claramente não vazio e, como $c \notin P$, parte própria de $S(A)$. Se

$x \in P$ e $x \leq y$ então $x \vee c \in P_0$, $x \vee c \leq y \vee c \in P_0$ donde $y \in P$.

Se $x, y \in P$, $x \vee c$, $y \vee c \in P_0$; daí $(x \wedge y) \vee c = (x \vee c) \wedge (y \vee c) \in P_0$, o que acarreta $x \wedge y \in P$. Por fim, se $x \vee y \in P$, $x \vee y \vee c = (x \vee c) \vee (y \vee c) \in P_0$, donde $x \vee c \in P_0$ ou $y \vee c \in P_0$, o que é equivalente a $x \in P$ ou $y \in P$.

Assim sendo P é filtro primo de $S(A)$ e de primeira espécie pois $c \notin P$. Ademais se $x \in P \cap A$, então $x \vee c \in P_0$ e $x \in A$, sendo portanto $x \in P_0$. Reciprocamente, se $x \in P_0$, $x \in P \cap A$.

Antes de passar a uma propriedade adicional dos filtros primos nos reticulados completamente simétricos, vejamos uma caracterização dos simetrizados fracos.

<u>Teorema 9</u>:- A simetria φ em $s(A)$ tem as seguintes propriedades

1) não tem invariante

2) x e $\varphi(x)$ são comparáveis para todo $x \in s(A)$

3) se $\varphi(x) < y$, onde x e y são de primeira espécie ($\varphi(x) < x$ e $\varphi(y) < y$), então existe u de primeira espécie, tal que $u \leq x$ e $u \leq y$.

Reciprocamente se uma simetria φ em um conjunto ordenado B satisfaz a 1), 2) e 3), então $B = s(A)$, onde A é o conjunto dos elementos de B de primeira espécie.

É imediato que a simetria φ em s(A) satisfaz a 1) e 2). Se $\varphi(x) < y$ com $x, y \in A$ existe $u \in A$ tal que

$$\varphi(x) \leqslant \varphi(u) < u \leqslant y$$

o que implica $u \leqslant x$ e $u \leqslant y$.

Para mostrar a recíproca chamemos de A o conjunto dos de primeira espécie. Se $\varphi(x) < y$ com $x, y \in A$ temos que existe $u \in A$ com $u \leqslant x$ e $u \leqslant y$. Daí $\varphi(x) \leqslant \varphi(u)$ e $\varphi(x) \leqslant \varphi(u) < u \leqslant y$. Se $x, y \in A$ e $x < \varphi(y)$ então $\varphi(x) \leqslant x < \varphi(y)$ e $y < \varphi(x) < x < \varphi(y)$ absurdo.

Passemos então à propriedade adicional dos filtros primos de um reticulado completamente simétrico.

<u>Teorema 10</u>:- O conjunto dos filtrosprimos de um reticulado completamente simétrico com a ordem

$$P \leqslant Q \longleftrightarrow P \supset Q$$

e a simetria φ é o simétrizado fraco do conjunto ordenado dos filtros primos de primeira espécie com a mesma ordem.

Suponhamos que $\varphi(P) \supset Q$, onde P e Q são de primeira espécie. Pelo teorema anterior devemos mostrar que existe R de primeira espécie tal que $R \supset P$ e $R \supset Q$. Se não existisse teríamos que o filtro gerado por $P_0 \cup Q_0$ seria A, onde P_0 e Q_0 são os filtros primes de A que correspondem a P e Q, respectivamente, pelo teorema 8.

Isso implicaria a existência de $a \in P_0$ e $b \in Q_0$ com

$a \wedge b = c$.

Em S(A) existiria então x com

$$x^+ = a$$

$$x^- = b$$

ou seja

$$x \vee c \in P_0$$

$$-x \vee c \in Q_0$$

ou ainda

$$x \in P$$

$$-x \in Q \qquad (1).$$

Como

$$\varphi(P) \supset Q$$

segue-se que

$$\varphi(Q) \supset P$$

e portanto

$$x \in P \subset \varphi(Q)$$

$$-x \notin Q$$

que contradiz (1).

Começando o estudo dos homomorfismos, vejamos o

Teorema 11:- Se $h:A \longrightarrow B$ é homomorfismo de reticulados simétricos e se P é filtro primo de B então $h^{-1}(P)$ é filtro primo de A desde que não seja A ou vazio. Além disso o conjunto dos filtros primos de A da forma $h^{-1}(P)$ é invariante para φ;

Se $x \in h^{-1}(P)$ e $x \leqslant y$, então $h(x) \in P$ e $h(x) \leqslant h(y)$, donde $h(y) \in P$ e $y \in h^{-1}(P)$.

Se $x,y \in h^{-1}(P)$ então $h(x)$ e $h(y)$ estão em P; daí $h(x) \wedge h(y) = h(x \wedge y) \in P$ e $x \wedge y \in h^{-1}(P)$.

Se $x \vee y \in h^{-1}(P)$ então $h(x \vee y) = h(x) \vee h(y) \in P$ o que acarreta $h(x) \in P$ ou $h(y) \in P$ que é equivalente a $x \in h^{-1}(P)$ ou $y \in h^{-1}(P)$.

Finalmente, mostremos que

$$\varphi(h^{-1}(P)) = h^{-1}(\varphi(P))$$

$$\begin{aligned} x \in \varphi(h^{-1}(P)) &\Longleftrightarrow -x \notin h^{-1}(P) \\ &\Longleftrightarrow -h(x) \notin P \\ &\Longleftrightarrow h(x) \in \varphi(P) \\ &\Longleftrightarrow x \in h^{-1}(\varphi(P)) \end{aligned}$$

Vejamos agora como as imagenshomomorfas ou quocientes de um ret iculado simétrico são determinadas por famílias de filtros primos invariantes para φ.

Teorema 12:- Seja N' uma família de filtros primos invariante para φ ($P \in N' \longrightarrow \varphi(P) \in N'$) em um reticulado simétrico. Definindo

$$x \equiv y \text{ se e sòmente se } x \in P \longleftrightarrow y \in P \text{ para todo } P \in N'$$

obtemos uma relação de equivalência compatível com a estrutura de reticulado simétrico. O quociente correspondente é um reticulado simétrico e a projeção canônica um homomorfismo.

É imediato que a relação $\equiv$ como definida acima é de equivalência. Vejamos a compatibilidade. Suponhamos

$$x_1 \equiv y_1 \qquad x_2 \equiv y_2$$

Se $x_1 \wedge x_2 \in P \in N'$ então $x_1, x_2 \in P$, donde pela equivalência $y_1, y_2 \in P$ e $y_1 \wedge y_2 \in P$.

Se $x_1 \vee x_2 \in P \in N'$ então $x_1 \in P$ ou $x_2 \in P$, donde pela equivalência $y_1 \in P$ ou $y_2 \in P$ e portanto $y_1 \vee y_2 \in P$.

Se $x \equiv y$, como N' é invariante para φ, temos que

$x \in \varphi(P) \longleftrightarrow y \in \varphi(P)$, qualquer que seja $P \in N'$

Daí $-x \notin P \longleftrightarrow -y \notin P$ para todo $P \in N'$ o que equivale a dizer que $-x \equiv -y$.

Recìprocamente temos o

Teorema 13:- Se $h: S \longrightarrow T$ é homomorfismo de reticulados simétricos de S sôbre T então existe uma família de filtros primos de S invariante para φ tal que o quociente correspondente é isomorfo a T e h pode ser identificado com a projeção canônica.

Seja N' o conjunto dos filtros primos de S da forma $h^{-1}(P)$ onde P é filtro primo de T. Tal conjunto como vimos é invariante para φ e determina um quociente. Mostremos que as classes de equivalência correspondentes coincidem com as partes da forma $h^{-1}(x)$, $x \in T$.

Para isso definamos

$$x \sim y \Longleftrightarrow h(x) = h(y) \qquad x, y \in S$$

Se $x \not\equiv y$ (onde $\equiv$ é a equivalência determinada por N') existe $h^{-1}(P)$ contendo por exemplo x e não contendo y. Daí $h(x) \in P$ e $h(y) \notin P$, donde $x \not\sim y$

Reciprocamente, se $x \not\sim y$ então $h(x) \neq h(y)$ e existe P contendo por exemplo $h(x)$ e não contendo $h(y)$. Assim sendo, $x \in h^{-1}(P)$ e $y \notin h^{-1}(P)$ o que acarreta $x \not\equiv y$.

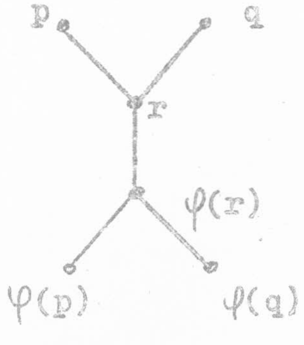
Podemos agora atacar parcialmente o problema de determinar as imagens homomorfas de um reticulado simétrico que são completamente simétricos. De fato, se $h: S \longrightarrow T$ é um homomorfismo de S simétrico sôbre T completamente simétrico então a família N' dos filtros primos de S da forma $h^{-1}(P)$ é obtida por simetria fraca dos filtros primos de primeira espécie de N'. Assim sendo, para procurar as imagens homomorfas completamente simétricas de S basta procurar nas famílias de filtros primos invariantes para φ que sejam simetrizados fracos.

A recíproca deixamos em aberto. Não sabemos se num reticulado normal centralmente simétrico pode existir uma família N' de filtros primos invariantes para φ que seja um simetrizado fraco e ao mesmo tempo o quociente correspondente não seja completamente simétrico.

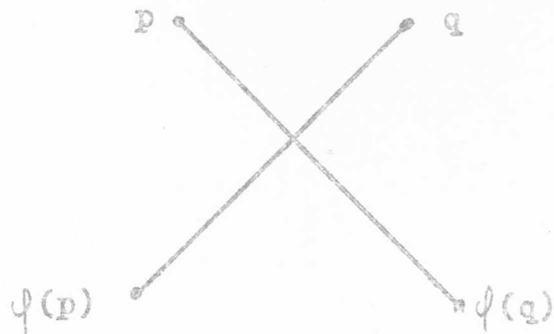
Surge também o problema de saber se o quociente de um complemento simétrico é completamente simétrico.

A negativa decorre do fato de que uma parte de um simetrizado fraco invariante para a simetria pode não ser um simetrizado fraco.

Um exemplo é o seguinte. No simetrizado fraco

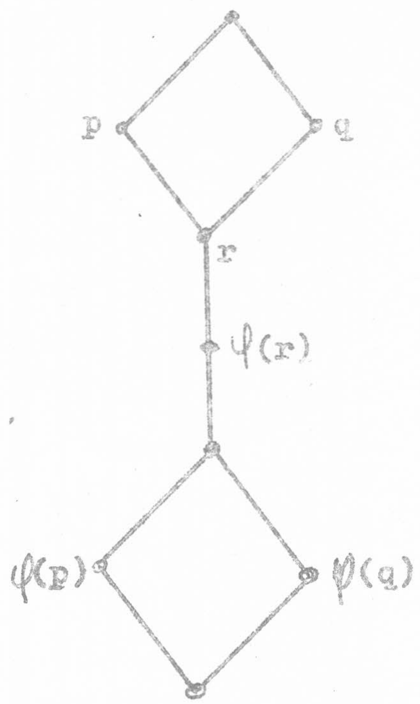


tomamos

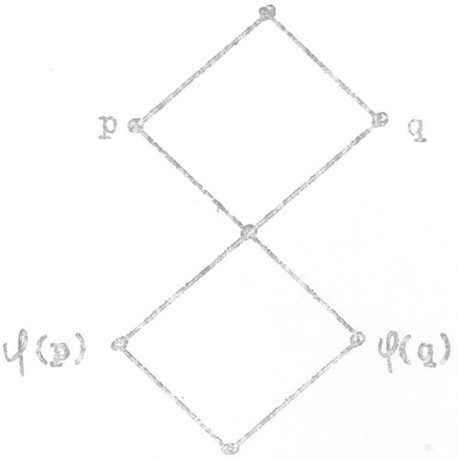


que é uma parte fechada para φ e não é simetria fraca de $\{p,q\}$.

Assim sendo o complemento simétrico



tem como quociente



que não é completamente simétrico.

Passemos ao estudo de certas partes que representam um papel importante na caracterização dos homomorfismos.

Definição:- Seja $h:S \longrightarrow T$ homomorfismo de reticulados centralmente simétricos. Chamaremos núcleo de h ao sub-conjunto $h^{-1}(c)$ de S.

Teorema 14:- O núcleo K como definido acima satisfaz a

1) É um sub-reticulado centralmente simétrico de S.

2) $x \vee -x \in K \longrightarrow x \in K$

3) $a,b \in K$ e $a \leqslant u \leqslant b \longrightarrow u \in K$

Verifiquemos 2) $x \vee -x \in K$ implica que $h(x) \vee -h(x) = c$ donde

$$h(x) \leqslant c$$

$$-h(x) \leqslant c \longrightarrow h(x) \geqslant c$$

e portanto $x \in K$

Vale a recíproca

Teorema 15:- Seja S reticulado centralmente simétrico e normal e $K \subset S$ satisfazendo a 1), 2) e 3) do teorema anterior. Então existe um homomorfismo $h:S \longrightarrow T$ de reticulados centralmente simétricos tal que K é o núcleo de h.

Se $K = S$ basta tomar $h(S) = c$. Se $K \neq S$ chamemos de $\mathcal{P}$ o conjunto dos filtros primos P de primeira espécie tais que $P \cap K = \emptyset$

Mostremos que δ não é vazio. Como $K \neq S$ existe $x \in S$ tal que $x \notin K$ e portanto $x \vee -x \notin K$. Seja I o ideal gerado por K. Se $x \vee -x \in I$ então $x \vee -x \leq n \in K$, donde $c \leq x \vee -x \leq n$ e $x \vee -x \in K$ absurdo. Logo $x \vee -x \notin I$ e existe filtro primo de primeira espécie contendo $x \vee -x$ e não encontrando I. Portanto $\delta \neq \emptyset$.

Consideremos o homomorfismo (projeção canônica) determinado pela família $\delta \cup \varphi(\delta)$. A classe de equivalência correspondente C a qual c pertence é

$$\bigcap_{P \in \delta} \varphi(P) - \bigcup_{P \in \delta} P = \bigcap_{P \in \delta} (\varphi(P) - P)$$

Mostremos que C = K

Se $x \in C$ então $x \in \varphi(P) - P$ para todo $P \in \delta$, ou seja $x \in \varphi(P)$ e $x \notin P$, ou ainda $-x \notin P$ e $x \notin P$, donde $x \vee -x \notin P$ para todo $P \in \delta$ (1).

Seja I o ideal gerado por K. Se $x \vee -x \in I$, $c \leq x \vee -x \leq n \in K$ donde $x \vee -x \in K$ e $x \in K$. Assim sendo nesse caso $C \subset K$.

Suponhamos agora que $x \vee -x \notin I$. Então existe um filtro primo de primeira espécie P contendo $x \vee -x$ e não encontrando I, o que é absurdo por (1).

Portanto êsse último caso não se verifica e temos que

$x \in C \Longrightarrow x \in K$.

Recìprocamente, se $x \in K$ então $x \notin P$ para todo $P \in \mathcal{P}$. Além disso $-x \in K$, $-x \notin P$, $x \in \varphi(P)$ para todo $P \in \mathcal{P}$, ou seja $x \in \varphi(P)-P$ para todo $P \in \mathcal{P}$, o que quer dizer que $x \in C$.

Êsses teoremas mostram o papel relevante que têm as partes satisfazendo 1), 2) e 3) no estudo doshomomorfismos. Chamemos tais partes de partes distinguidas.

Em se tratando de reticulados centralmente simétricos e normais os núcleos de homomorfismos são partes distinguidas e recìprocamente tôda parte distinguida é o núcleo de algum homomorfismo. Dada umaparte distinguida K em geral existem vários homomorfismos tendo K como núcleo. O descrito no Teoremaé o que descrimina mais (ou o que identifica menos). Dito ainda de outra maneira o Teorema estabelece a imagem homomorfa mais ampla tendo K como elemento central. As outras são obtidas por quocientes dessa.

Quando S é completamente simétrico podemos afirmar mais que

Teorema 16:- Se S é completamente simétrico os núcleos em S são sub-reticulados completamente simétricos.

Seja K um núcleo de homomorfismo $h:S \longrightarrow T$ onde S é completamente simétrico. Se $a, b \in K$ com $a \wedge b = c$ existe $x \in S$ tal que $x^+ = a$ e $x^- = b$. Daí

$$c = h(a) = h(x^+) = h(x \vee c) = h(x) \vee c$$

$$c = h(b) = h(x^-) = h(-x \vee c) = -h(x) \vee c$$

donde

$$h(x) \leqslant c \longrightarrow c \leqslant -h(x)$$

$$-h(x) \leqslant c$$

e portanto $-h(x) = c$, $h(x) = c$ e $\forall x \in K$

Outro tipo de parte importante para o estudo doshomomorfismos leva nome sugerido por certas analogias lógicas conforme a

<u>Definição</u>:- Uma parte D de um reticulado simétrico S diz-se um sistema dedutivo se

1) D é um filtro de S

2) $x, -x \vee y \in D \longrightarrow y \in D$

Se $D \neq S$, D diz-se próprio

Vejamos agora algumas propriedades dos sistemas dedutivos em reticulados centralmente simétricos normais.

<u>Teorema 17</u>:- Se P é filtro primo de primeira espécie então P é sistema dedutivo próprio.

Suponhamos $x, -x \vee y \in P$. Então $-x \in P$ ou $y \in P$. Se

$-x \in P$, $x \wedge -x \in P$ donde $c \in P$ absurdo. Logo $y \in P$.

A intersecção de sistemas dedutivos, quando não vazia, é um sistema dedutivo. Portanto a intersecção de filtros primos de primeira espécie, quando não vazia, é um sistema dedutivo próprio.

Um sistema dedutivo próprio D não contém c. Pois se $c \in D$, $-c \vee x = c \vee x \in D$ então $x \in D$ para todo x absurdo.

Se D é dedutivo próprio então $D \cap -D = \emptyset$. Pois se $x \in D \cap -D$ então $x \in D$ e $x = -y$, $y \in D$. Daí $-y \vee c = x \vee c \in D$ e portanto $c \in D$ absurdo.

Um sistema dedutivo D diz-se elementar se $D = P$ (filtro primo de primeira espécie) e diz-se maximal se fôr próprio e não estiver contido pròpriamente em outro.

Teorema 18:- Todo sistema dedutivo maximal é elementar.

Seja D sistema dedutivo maximal. Então $-D$ é ideal e $D \cap -D = \emptyset$. Logo existe filtro primo P tal que $D \subset P$ e $P \cap -D = \emptyset$. $\varphi(P)$ também tem essa propriedade pois se $x \in D$ e $-x \in P$ então $-x \in P \cap -D$ absurdo. Logo se $x \in D$ então $-x \notin P$ o que equivale a $x \in \varphi(P)$. Ademais se $x \in \varphi(P) \cap -D$ temos que $-x \in D$ e $-x \notin P$ absurdo pois $D \subset P$. P ou $\varphi(P)$ é de primeira espécie. Logo existe um filtro primo de primeira espécie contendo D e, como D é maximal, êsse filtro coincide com D.

<u>Teorema 19</u>:- Todo sistema dedutivo próprio é intersecção de filtrosprimos de primeira espécie.

Seja D sistema dedutivo próprio e $x \notin D$. Seja I o idela gerado por $-D \cup \{x\}$. Mostremos que $D \cap I = \emptyset$.

Se $y \in D \cap I$ então $y \in D$ e $y \leq -d \vee x$ onde $d \in D$. Daí $-d \vee x \in D$ e $x \in D$ absurdo.

Assim sendo existe um filtro primo P_x tal que $P_x \supset D$ e $P_x \cap -D = \emptyset$.

Pelo visto na demonstração do teorema anterior $\varphi(P_x)$ também tem essa propriedade.

Portanto

$$D \subset P_x \cap \varphi(P_x)$$

ou seja dado $x \notin D$ existe um filtro primo de primeira espécie contendo D e não contendo x.

Suponhamos agora que os reticulados além de centralmente simétricos normais tenham último elemento 1 (daí decorre que tem também primeiro elemento

$0 = -1$).

Além disso consideremos agora só os homomorfismos h tais que

$$h(1) = 1$$

Assim sendo temos o

<u>Teorema 20</u>:- Se h é homomorfismo como acima descrito então

$$h^{-1}(1)$$

é sistema dedutivo.

Reciprocamente se D é sistema dedutivo existe algum homomorfismo h tal que

$$h^{-1}(1) = D$$

Suponhamos D sistema dedutivo próprio e seja γ a família dos filtros primos de primeira espécie que contém D.

Essa família não é vazia porque todo sistema dedutivo próprio é intersecção de filtros primos de primeira espécie.

$\gamma \cup \varphi(\gamma)$ determina um homomorfismo h tal que $h^{-1}(1) = D$.

Como antes, em geral existem muitos homomorfismos h, tais que $h^{-1}(1) = D$. O estabelecido no teorema é o que descrimina mais ou identifica menos.

A imagem homomorfa não trivial mais simples de um reticulado centralmente simétrico normal é do tipo $\{o, c, 1\}$ e é obtida a partir de qualquer família $\{P, \varphi(P)\}$ onde P é filtro primo de primeira espécie. As classes de equivalência correspondentes são, P, $\varphi(P)-P$ e $-P$. P é um sistema dedutivo elementar e se π é a projeção canônica $P = \pi^{-1}(1)$. O núcleo de π é $\varphi(P)-P$.

$M = \{o, c, 1\}$ separa elementos por homomorfismos conforme o

<u>Teorema 21</u>:- Se S é centralmente simétrico normal e $a, b \in S$, $a \neq b$, existe um homomorfismo $h: S \longrightarrow M$ tal que $h(a) \neq h(b)$.

Se, por exemplo, $a \nleq b$ existe um filtro primo P tal que $a \in P$ e $b \notin P$. Tomando como h a projeção canônica relativa à família $\{P, \varphi(P)\}$ temos que $h(a) \neq h(b)$.

Isso sugere chamar de dual S^* de S ao conjunto dos homomorfismos de S em M. Cada um desses homomorfismos é caracterizado por um filtro primo de primeira espécie.

Assim podemos identificar S com o conjunto E_1 dêsses filtros. Por sua vez parece natural chamar de bidual S^{**} de S a M^{E_1}, ou seja ao conjunto das aplicações de E_1 em M.

Como identificamos os homomorfismos de S em M com os filtros primos de primeira espécie de S usaremos P tanto para denotar o filtro como para denotar o homomorfismo. Assim

$$P(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } x \in P \\ c \text{ se } x \in \varphi(P)-P \\ 0 \text{ se } x \in -P \end{cases} \qquad x \in S$$

M^{E_1} com a estrutura produto é um reticulado centralmente simétrico normal e, na verdade, um reticulado completamente simétrico pois é produto de M_P onde $P \in E_1$ e $M_P = M$ que é o simetrizado de $\{0, 1\}$. Mais explicitamente M^{E_1} é o simetrizado de $\gamma(E_1)$ considerado como reticulado distributivo com primeiro elemento.

Agora podemos considerar a imersão natural i de S em seu bidual S^{**} dada por

$$[i(x)](P) = P(x) \qquad x \in S, P \in E_1$$

que nos fornece o

<u>Teorema 22</u>:- A imersão natural

$$i: S \longrightarrow S^{**}$$

é um monomorfismo (homomorfismo injetivo).

Mostremos primeiro que i é biunívoca.

Se $a, b \in S$ e $a \neq b$ existe $P \in E_1$ tal que

$$P(a) \neq P(b)$$

$$[i(a)](P) \neq [i(b)](P)$$

donde

$$i(a) \neq i(b)$$

i preserva as operações pois

$$[i(a \wedge b)](P) = P(a \wedge b) = P(a) \wedge P(b) =$$

$$= [i(a)](P) \wedge [i(b)](P) =$$

$$= [i(a) \wedge i(b)](P)$$

e anàlogamente para $\vee$ e $-$.

<u>Teorema 23</u>:- $i(S)$ é sub-produto direto de S^{**}.

Vejamos que as projeções π_P restritas a $i(S)$ são sobrejetoras.

Fixemos P de primeira espécie. Existem $x \in P$, $y \in \varphi(P) - P$ e $z \in -P$. Daí

$$[i(x)](P) = P(x) = 1$$

$$[i(y)](P) = P(y) = c$$

$$[i(z)](P) = P(z) = 0$$

e portanto

$$\pi_P(i(S)) = \{0, c, 1\}$$

O teorema 22 também pode ser visto como

Teorema 24:- Todo reticulado centralmente simétrico normal pode ser imerso no simetrizado de uma álgebra de Boole.

$$S^{**} = \prod_{P \in E_1} M_P = S\left(\prod_{P \in E_1} I_P\right) = S(\gamma(E_1))$$

onde $M_P = M = S(I)$ sendo

$$I = I_P = \{0, 1\}$$

Vendo S^{**} assim a imersão natural

$$i : S \longrightarrow S^{**}$$

fica

$$i(x) = (F, G)$$

onde F é o conjunto dos filtrosprimos de primeira espécie que contém x e G o conjunto dos filtros primos de primeira espécie que contém -x.

Podemos estender êsse Teorema para os reticulados simétricos normais usando raciocínio semelhante.

Vejamos agora como representar reticulados simétricos por meio de reticulados de conjuntos. Primeiro uma

Definição:- Um reticulado simétrico de conjuntos é uma família não vazia $\mathcal{S}$ de partes de um conjunto E fechado para $\cup$, $\cap$ e $-$, onde

$$-X = \complement_E \varphi(X) \qquad X \subset E$$

sendo $\varphi : E \longrightarrow E$ tal que φ^2 = identidade.

Claramente todo reticulado simétrico de conjuntos é reticulado simétrico e reciprocamente.

Teorema 25:- Todo reticulado simétrico S é isomorfo a um reticulado simétrico de conjuntos.

Basta associar a cada $x \in S$ a família N_x dos filtros primos de S que contém x e definir

$$-N_x = \complement_N \varphi(N_x)$$

onde N é conjunto dos filtros primos de S e

$$\varphi(P) = \complement_S -P \qquad P \in N$$

Se S além de simétrico é centralmente simétrico e normal temos o

Teorema 26:- Seja $E = E_1 \cup E_2$ com $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ e $\varphi : E_1 \longrightarrow E_2$ bijeção.

O conjunto dos $X \subset E$ satisfazendo

$$x \in X \cap E_1 \longrightarrow \varphi(x) \in X$$

com $\cup$, $\cap$ e $-$ dado por

$$-X = \complement_E \varphi(X)$$

é um reticulado completamente simétrico e todo reticulado centralmente simétrico normal pode ser imerso em um reticulado dêsse tipo.

Primeiro vejamos que as partes X de E que satisfazem

$$x \in X \cap E_1 \longrightarrow \varphi(x) \in X \qquad (1)$$

coincidem com as partes de E da forma

$$A \cup (E_2 - \varphi(B)) \qquad (2)$$

onde $A, B \subset E_1$ e $A \cap B = \emptyset$

Seja X da forma (2). Se $x \in X \cap E_1$ então $x \in A$ e, como $B \cap A = \emptyset$, $\varphi(x) \notin B$ donde $\varphi(x) \in E_2 - \varphi(B) \subset X$.

Recìprocamente seja X satisfazendo (1). Façamos

$$A = X \cap E_1$$

$$B = \varphi(E_2-(X \cap E_2))$$

Em vista de (1)

$$\varphi(X \cap E_1) \subset X \cap E_2$$

donde

$$A \cap B = \emptyset$$

Além disso $X = A \cup (E_2 - \varphi(B))$

Como já vimos que as partes de E da forma (2) com as operações indicadas, formam um reticulado completamente simétrico, demonstramos a primeira afirmação do Teorema.

Representando um reticulado centralmente simétrico normal como no Teorema ánterior, temos que a família dos filtros primos E é iqual à união disjunta dos filtros primos de primeira espécie E_1 com os filtros primos de segunda espécie E_2 e φ como dado nesse Teorema é bijeção de E_1 sôbre E_2. Além disso N_x o conjunto dos filtros primos contendo x satisfaz a (1) porque

$$P \in N_x \cap E_1 \longrightarrow P \text{ de primeira espécie e } x \in P$$
$$\longrightarrow x \in P \subset \varphi(P)$$
$$\longrightarrow \varphi(P) \in N_x$$

<u>Teorema 27</u>:- O conjunto dos $X \subset E$ descrito no teorema anterior satisfaz às propriedades de abertos em espaços topológicos. Essa topologia tem as seguintes propriedades.

1) Nenhuma parte não vazia de E_1 é aberta

2) Tôda parte de E_2 é aberta

3) Dado $x \in E_1$ existe um único $y \in E_2$ com $\{x, y\}$ aberto e reciprocamente.

Por outro lado se uma topologia em $E = E_1 \cup E_2$ satisfaz às trêspropriedades acima, seus abertos são os descritos no teorema anterior com a φ determinada por 3).

Mostremos a última afirmação. Seja A aberto e $x \in A \cap E_1$. Se $\varphi(x) \notin A$ então $\{x, \varphi(x)\} \cap A = \{x\}$ aberto o que é absur-

Seja $A \subset E$ tal que

$$x \in A \cap E_1 \longrightarrow \varphi(x) \in A$$

Se não existe $x \in A \cap E_1$ então $A \subset E_2$ e A é aberto por 2).
Se existe $x \in A \cap E_1$ então $\{x, \varphi(x)\}$ é aberto e unindo para x variando em $A \cap E_1$ chegamos a que

$$(A \cap E_1) \cup \varphi(A \cap E_1)$$

é aberto e contido em A. Para completar A basta adiconar uma parte de E_2 que é aberta.

Outra imersão interessante em completamente simétricos é dada pelo

Teorema 28:- Se A é álgebra de Boole

$$i : A \longrightarrow S(A)$$

dada por

$$i(a) = (a, -a)$$

é um monomorfismo. Além disso $i(A) \cup \{e\}$ gera S(A) como sub-reticulado.

$$\begin{aligned} i(a \wedge b) &= (a \wedge b, -(a \wedge b)) \\ &= (a \wedge b, -a \vee -b) \\ &= (a, -a) \wedge (b, -b) \\ &= i(a) \wedge i(b) \end{aligned}$$

Anàlogamente

$$i(a \vee b) = i(a) \vee i(b)$$

$$i(-a) = (-a, --a) = (-a, a)$$

$$= -(a, -a) = -i(a)$$

Sejam $a, b \in A$ com $a \wedge b = 0$.

Então $a \leqslant -b$ e

$$(a,b) = \left[(a,-a) \vee (0,0) \right] \wedge (-b, b)$$

Vejamos agora como determinar o reticulado centralmente simétrico normal livre sôbre um conjunto não vazio G.

Para isso chamemos de F o conjunto das fórmulas obtidas a partir de $G \cup \{c\}$ aplicando $\wedge$, $\vee$ e $-$.

Uma interpretação de F é uma aplicação

$$h : F \longrightarrow \{0, c, 1\}$$

tal que

$$h(a \wedge b) = h(a) \wedge h(b)$$

$$h(a \vee b) = h(a) \vee h(b)$$

$$h(-a) = -h(a)$$

$$h(c) = c$$

Duas fórmulas a e b dizem-se equivalentes se $h(a) = h(b)$ para tôda interpretação. E claramente é problema decidível saber se duas fórmulas são equivalentes ou não.

Passando ao quociente e definindo as operações de maneira natural obtemos um reticulado centralmente simétrico normal L para o qual vale o

<u>Teorema 29</u>:- L é o reticulado centralmente simétrico normal livre sôbre G.

No diagrama

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & F \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "k"] & L \arrow[dl, "h"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

S é um reticulado centralmente simétrico normal qualquer, f uma aplicação qualquer de G em S, i a injeção natural e π a projeção canônica. k é definido por

$$k(g) = f(g) \quad \text{para} \quad g \in G$$

$$k(a \wedge b) = k(a) \wedge k(b)$$

$$k(a \vee b) = k(a) \vee k(b)$$

$$k(-a) = -k(a)$$

$$k(c) = c$$

e h por

$$h(\pi(a)) = k(a)$$

o que terá sentido se

$$\pi(a) = \pi(b) \longrightarrow k(a) = k(b)$$

Suponhamos que $k(a) \neq k(b)$, então pela propriedade separadora de $\{0, c, 1\}$ podemos definir um homomorfismo p de S em $\{0, c, 1\}$ tal que

$$p(k(a)) \neq p(k(b))$$

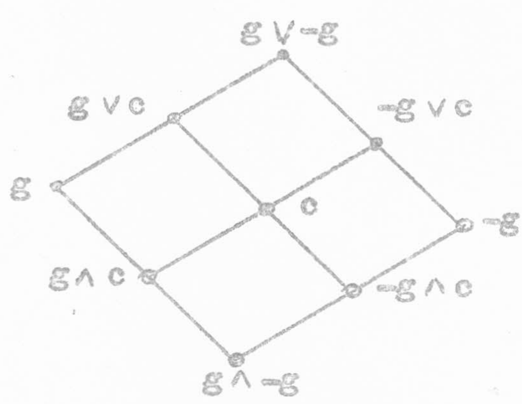
Como $p_\circ k$ é uma interpretação temos que a e b não são equivalentes e portanto $\pi(a) \neq \pi(b)$.

Assim sendo h está bem definida e é um homomorfismo tal que

$$h \circ \pi \circ i(g) = f(g)$$

para todo $g \in G$. Como $\pi \circ i(G)$, gera L temos então que L é o reticulado centralmente simétrico normal livre sôbre G.

Se $G = \{g\}$, L tem o diagrama abaixo:-



e é completamente simétrico. Já com 2 geradores isso não se verifica e deixamos em aberto o problema da existência em geral dos reticulados completamente simétricos livres

Como último tópico dêste capítulo, vejamos alguns aspectos da interpretação de fórmulas do cálculo proposicional clássico em reticulados centralmente simétricos normais.

Seja F o conjunto das fórmulas dêsse cálculo nos conetivos $\wedge$, $\vee$, $\sim$. Uma interpretação simétrica de F é uma aplicação

$$h: F \longrightarrow S(\mathcal{P}(E))$$

onde E é um conjunto não vazio, tal que

$$h(a \wedge b) = h(a) \wedge h(b)$$

$$h(a \vee b) = h(a) \vee h(b)$$

$$h(\sim a) = -h(a)$$

Fazendo

$$h(a) = (h_1(a),\ h_2(a))$$

podemos ver intuitivamente tal interpetação como:-

$h_1(a)$ = conjunto dos eventos (observações, experiências, etc.) que confirmam a.

$h_2(a)$ = conjunto dos eventos (observações, experiências, etc.) que refutam a.

Tais interpretações sugerem a

<u>Definição</u>:- $a \in F$ é simètricamente válida se $h(a) \geq c$ para tôda interpretação simétrica h.

Em têrmos da idéia intuitiva acima a é válida se em qualquer interpretação do tipo indicado nada refuta a.

Com isso temos o

<u>Teorema 30</u>:- As fórmulas simètricamente válidas coincidem com as tautologias.

Suponhamos que $a \in F$ seja simètricamente válida. Então tomando as interpretações simétricas h tais que $h(F) = \{0,1\} \subset \{0, c, 1\}$ (basta levar as variáveis sempre em 0 ou 1) temos que êsses h correspondem às interpretações booleanas em $\{0, 1\}$. E como $h(a) = 1$ para todo tal h, pois a é simètricamente válida, segue-se que a é tautologia.

Recìprocamente suponhamos que $a \in F$ seja tautologia e que h seja uma interpretação simétrica em $S(\mathcal{P}(E))$. Definamos

$$g: F \longrightarrow S(\mathcal{P}(E))$$

por

$$g(x) = (g_1(x), g_2(x))$$

sendo

$$g(v) = (h_1(v), \complement_E h_1(v)) \quad v \text{ variável}$$

$$g(\neg x) = \neg g(x)$$

$$g(x \wedge y) = g(x) \wedge g(y)$$

$$g(x \vee y) = g(x) \vee g(y)$$

Decorre daí que $g_2(x) = \complement_E g_1(x)$ e que portanto g_1 é uma interpretação booleana. Donde, como a é tautologia $g_2(a) = \emptyset$. Mostremos que

$$h_2(x) \subset g_2(x)$$

Vale para $x = v$ ou $\neg v$, onde v é variável. Se

$$h_2(x) \subset g_2(x) \qquad h_2(y) \subset g_2(y)$$

então

$$h_2(x \wedge y) = h_2(x) \cup h_2(y) \subset g_2(x) \cup g_2(y) = g_2(x \wedge y)$$

$$h_2(x \vee y) = h_2(x) \cap h_2(y) \subset g_2(x) \cap g_2(y) = g_2(x \vee y)$$

Como para qualquer interpretação simétrica temos que

$$h(\sim\sim x) = h(x)$$

$$h(\sim(x \wedge y)) = h(\sim x \vee \sim y)$$

$$h(\sim(x \vee y)) = h(\sim x \wedge \sim y)$$

decorre que

$$h_2(x) \subset g_2(x)$$

para todo $x \in F$, donde

$$h_2(a) = \emptyset$$

e a é simètricamente válida.

Também é possível demonstrar o

Teorema 31:- Se S é centralmente simétrico normal com último elemento então $a \in F$ é tautologia se e sòmente se $h(a) \geqslant c$ para tôda interpretação h de F em S.

As interpretações mencionadas devem satisfazer

$$h(\sim a) = -h(a)$$

$$h(a \wedge b) = h(a) \wedge h(b)$$

$$h(a \vee b) = h(a) \vee h(b)$$

Suponhamos que $a \in F$ seja tautologia. Então a e sua forma normal conjuntiva $a_1 \wedge \ldots \wedge a_n$ têm o mesmo valor para cada interpretação h de F em S. Mas na disjunção de a_i ocorrem v e ~v para alguma variável v. Logo

$$h(a_i) \geqslant h(v) \vee -h(v) \geqslant c \quad \forall_i$$

donde

$$h(a) = h(a_1) \wedge \ldots \wedge h(a_n) \geqslant c$$

É interessante observar que o filtro $F = \left\{x \in S / x \geqslant c\right\}$ não é um sistema dedutivo e nenhum sistema dedutivo serve para substituir F no Teorema.

SIMETRIZADO DE UM MONOIDE

Neste capítulo veremos o operador que associa a cada elemento g de um grupo, o inverso g^{-1}, como um operador de simetria e trataremos de simetrizar, segundo essa simetria, conjuntos dotados de uma lei de composição interna, associativa e com elemento neutro, aos quais chamaremos monoides.

Um elemento x de um monoide M será chamado regular se:-

$ax = bx \Longrightarrow a = b$; $xa = xb \Longrightarrow a = b$ para todo par $a,b \in M$.

Os monoides considerados, terão todos os elementos regulares, visto que os elementos de um monoide imersível em um grupo, tem essa propriedade e definiremos simetrizado de um monoide, como segue.

<u>Definição 1</u>:- Chamaremos <u>grupo simétrico</u> de um monoide M a um grupo $G(M)$, tal que existe monomorfismo <u>i</u> de M em $G(M)$($i:M \longrightarrow G(M)$), e se $f:M \longrightarrow H$ for um homomorfismo onde H é um grupo, então existe, e é único, homomorfismo $h:G(M) \longrightarrow H$ que estende f; isto é, $h \circ i = f$.

Entenderemos então, por simetrizar um monoide M, por construir o grupo simétrico $G(M)$, ou assegurar sua existência.

Podemos escrever, "o grupo simétrico $G(M)$", devido ao:-

<u>Teorema 1</u>:- Se G_1 e G_2 são dois grupos simétricos de um mo-

noide M, então G_1 e G_2 são isomorfos.

O problema de simetrizar um monoide, como veremos a seguir, nem sempre tem solução.

Teorema 2:- Uma condição necessária e suficiente para que um monoide M seja simetrizável é que M possa ser imerso em um grupo G, isto é, existe monomorfismo de M em G.

Demonstração:- Se M monoide e $g : M \longrightarrow G$ é um monomorfismo, consideremos o conjunto $\sum = \{H$, onde H é grupo e existe morfismo $k : M \longrightarrow H \}$.

$\sum \neq \emptyset$ pois $G \in \sum$; seja $P = \prod_{H \in \Sigma} H$, o grupo produto e teremos para cada H, $p_H : P \longrightarrow H$ projeção canônica, mas para cada H temos por hipótese $k : M \longrightarrow H$, logo existe morfismo $i : M \longrightarrow P$ tal que para cada H, $p_H \circ i = k$; $\underline{i}$ nessas condições é injetivo, pois se $i(x_1) = i(x_2)$ temos $p_G i(x_1) = p_G i(x_2)$, isto é, $g(x_1) = g(x_2)$, mas g é mono, logo $x_1 = x_2$.

Consideremos então $[M]$ o sub-grupo de P gerado por $i(M)$; $[M]$ é o grupo simétrico de M.

Realmente se $f : M \longrightarrow K$ for um homomorfismo e K for um grupo, isso significa que $K \in \sum$, e então $p_K \circ i = f$; se tomarmos $h : [M] \longrightarrow K$ onde h é a restrição de p_K a $[M]$ temos igualmente $h \circ i = f$ e h único com essa propriedade, pois sendo $[M]$ gerado por

$i(M)$ se h_1 coincidir com h em $i(M)$ coincidirá em todo $[M]$; então a condição é suficiente, e obviamente é necessária.

Vejamos agora que existem monoides que não podem ser imersos em um grupo.

<u>Proposição</u> (Malcev (9)). Uma condição necessária para que um monoide possa ser imerso em um grupo é que se existirem oito elementos $a_1, a_2, a_3, a_4, x_1, x_2, x_3, x_4$ satisfazendo

$$
\begin{aligned}
&a_1 x_1 = a_2 x_2 \\
(1)\quad &a_3 x_1 = a_4 x_2 \\
&a_3 x_3 = a_4 x_4,
\end{aligned}
$$

satisfaçam também $a_1 x_3 = a_2 x_4$.

Realmente, pois se existir grupo G, que contenha esses elementos (identificando-se os elementos de M com sua imagem pela imersão em G), em G teremos também as relações:-

$$a_2^{-1} a_1 = x_2 x_1^{-1}$$

$$a_4^{-1} a_3 = x_2 x_1^{-1}$$

$$a_4^{-1} a_3 = x_4 x_3^{-1} \qquad \text{e portanto}$$

$$a_2^{-1} a_1 = x_2 x_1^{-1} = a_4^{-1} a_3 = x_4 x_3^{-1} \Longrightarrow a_1 x_3 = a_2 x_4$$

Então se considerarmos o monoide livre com oito geradores $a_1, a_2, a_3, a_4, x_1, x_2, x_3, x_4$ onde impomos as relações (1) acima, aos geradores, obtemos um monoide onde vale (1) e não vale

$a_1x_3 = a_2x_4$, sendo que todos os elementos desse monoide são regulares.

Assim sendo temos um exemplo de monoide que não satisfaz a proposição de Malcev e portanto não é simetrizável; maiores detalhes acêrca do exemplo, podem ser vistos em Malcev.

Vejamos agora alguns casos em que o problema tem solução.

<u>Teorema 3</u>:- Se M é monoide livre sôbre um conjunto I e G grupo livre sôbre I, G é o simétrico G(M) de M.

A demonstração é imediata como podemos observar do diagrama comutativo, abaixo:-

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[rr] \arrow[dr, "f/_I"'] & & M \arrow[dl, "f"] & \subset & G \arrow[dlll, "h"] \\
 & H & & &
\end{tikzcd}$$

Pois se $f : M \longrightarrow H$ morfismo, onde H grupo, temos $f/_I : I \longrightarrow H$ e como G livre sôbre I existe, e é único, $h : G \longrightarrow H$ que coincide com $f/_I$, e h coincide com f sôbre M.

Consideremos agora monoides com a seguinte propriedade, se $x, y \in M$ existem $m, n \in M$ tais que $xm = yn$ (2), e teremos o:-

<u>Teorema 4</u>:- Se M monoide satisfazendo (2) existe grupo simétrico de M, G(M) e se $x \in G(M)$ então $x = ab^{-1}$ com $a, b \in M$.

A condição (2) é na verdade a condição necessária e suficiente para que os elementos do simétrico $G(M)$ sejam da forma ab^{-1} com $a, b \in M$; o teorema nos mostra que é suficiente e, é também necessária, pois se $x, y \in M$, $y^{-1}x \in G(M)$ e então existem $m, n \in M$ tais que, $y^{-1}x = n\,m^{-1}$ e $xm = yn$.

A demonstração do teorema 4, bem como a construção de $G(M)$ podem ser vistas em Dubreil (6).

Corolário:- Se M monoide abeliano, existe grupo simétrico $G(M)$ e se $x \in G(M)$ então $x = ab^{-1}$ com $a, b \in M$.

Imediato, pois M abeliano, M satisfaz (2) onde $m = y$ e $n = x$.

Para uma demonstração direta desse corolário e construção de $G(M)$, consultar Bourbaki (3), Dubreil (6).

A condição (2) não é a condição mais geral, sob a qual um monoide pode ser simetrizado, Malcev estabeleceu uma condição necessária e suficiente para que um monoide possa ser simetrizado, podendo essa condição ser vista em Cohn (5).

Finalmente, observemos que o grupo simétrico $G(M)$ é um grupo gerado por M e é, grosseiramente falando, o maior grupo gerado por M, mais precisamente, se G for um grupo gerado por M, existe epimorfismo de $G(M)$ sôbre G, que estende a inclusão de M em G e G será isomorfo a um quociente de $G(M)$.

Se, porém, o monoide M satisfizer a condição (2) o grupo simétrico G(M) será, a menos de isomorfismo, o único grupo gerado por M, o que é evidente, pois qualquer grupo que contenha M conterá todos os quocientes ab^{-1} com a, b $\in$ M.

SIMETRIZADO DE UM MONOIDE ORDENADO

1. Grupos Ordenados

Vamos agora tratar do problema de simetrizar um monoide ordenado com relação a simetria, vista no capítulo anterior; com esse objetivo, vamos reunir alguns resultados sôbre grupos ordenados.

Definição 1:- Dizemos que um grupo G tem estrutura de grupo ordenado, se no conjunto G está definida uma relação de ordem parcial, que é compatível com a estrutura de grupo, isto é, (1) dados $a, b, c \in G$, $a \geqslant b \Longrightarrow ac \geqslant bc$ e $ca \geqslant cb$

Nessa definição (1) é equivalente:-

(2), dados $a, b, x, y \in G$ $a \geqslant b$, $x \geqslant y \Longrightarrow ax \geqslant by$

Assim sendo, um grupo ordenado é um conjunto centralmente simétrico.

Definição 2:- Chamaremos de 0-homomorfismo f de G_1 em G_2, grupos ordenados, a um homomorfismo de grupo $f : G_1 \longrightarrow G_2$ que preserve a ordem, isto é, se $x, y \in G_1$ e $x \geqslant y$ então $f(x) \geqslant f(y)$

Em um grupo ordenado G dizemos que um elemento x é positivo se $x \geqslant e$, onde e é o elemento neutro de G, e chamaremos cone positivo de G ao conjunto $G_+ = \left\{ x \in G \mid x \geqslant e \right\}$.

Vemos que se $a,b \in G$, $a \geq b$ é equivalente a $ab^{-1} \in G_+$ e G_+ é um conjunto com as seguintes propriedades que o caracterizam:-

(i) Se $a,b \in G_+$, $a \geq e$, $b \geq e$ temos $ab \geq e$ devido a (2)

(ii) Se $a \in G$ como $a \geq a \Longrightarrow aa^{-1} = e \in G_+$ e se $x \in G_+$ e $x^{-1} \in G_+$ então

$x = e$ pois $x \geq e$ e $e \geq x$.

(iii) Se $a \in G$, $a \geq e$, $gag^{-1} \geq e$, qq $g \in G$.

Seja então o:-

<u>Teorema 1:</u>- Um sub-conjunto P de um grupo G é o cone positivo de uma ordem parcial sôbre G se e sòmente se satisfaz as proprie - dades:-

i) $P.P \subseteq P$

ii) $P \cap P^{-1} = \{e\}$

iii) $gPg^{-1} \subseteq P$ qq $g \in G$

Como já vimos i)/iii), são necessárias e são também suficientes, pois se definimos:-

$a \geq b \longleftrightarrow ab^{-1} \in P$, devido a i)/iii), essa relação é uma relação de ordem parcial, com a qual G é um grupo ordenado e $P = G_+$

Vamos definir ainda:-

Monoide parcialmente ordenado - Se M é um monoide, e no conjunto M está definida uma relação de ordem parcial, satisfazendo a (1) ou (2) da definiçãol, M é chamado monoide ordenado.

Anàlogamente a definição 2 definimos O-homomorfismo de - monoide ordenado.

2. Simetrição de monoide ordenado

Tendo-se em conta as observações finais do capítulo anterior, o simetrizado de um monoide ordenado, deve ser um grupo gerado pelo monoide e ainda, um grupo ordenado com uma ordem tal que, restrita ao monoide, reproduza a ordem nêle definida. Mais precisamente, seja a definição:-

Definição 3:- Chamaremos simetrizado de um monoide ordenado M, a um grupo ordenado G(M), tal que existe homomorfismo i de M em G(M), satisfazendo $i(x) \geqslant i(y)$ se e sòmente se $x \geqslant y$; e se $f:M \longrightarrow H$ é um O-homomorfismo, onde H é um grupo ordenado, então existe, e é único, O-homomorfismo $h:G(M) \longrightarrow H$ que estende f; isto é, $h.i = f$

Devido a condição imposta sôbre i, i é injetivo.

Anàlogamente ao capítulo III, temos o:-

Teorema 2:- Se G_1 e G_2 são simetrizados de M, monoide ordenado, então G_1 e G_2 são isomorfos como grupos ordenados; isto é, existe $h:G_1 \longrightarrow G_2$ homomorfismo de grupo e tal que $h(x_1) \geqslant h(x_2)$ se e sòmente se $x_1 \geqslant x_2$.

Ainda a semelhança do capítulo III, o problema de simetrizar um monoide ordenado nem sempre tem solução; mesmo que haja, o grupo simétrico do monoide nem sempre podemos definir no grupo simétrico uma ordem que restrita ao monoide coincida com a ordem inicial nêle existente.

Vemos então, que se um monoide ordenado puder ser simetrizado, existirá seu grupo simétrico de acôrdo com o teorema 2, capítulo III, não valendo porém a recírpoca como veremos a seguir.

<u>Teorema 3</u>:- Se M monoide ordenado e G grupo contendo M, uma condição necessária para que G seja o simetrizado de M de acôrdo com a definição 3 é que valendo as relações:-

$$(3)\quad \begin{array}{l} a_2x_2 \geqslant a_1x_1 \\ a_1x_3 \geqslant a_2x_4 \\ a_4x_4 \geqslant a_3x_3 \end{array}$$

para os elementos $a_1, a_2, a_3, a_4, x_1, x_2, x_3, x_4$ valha também a relação:- $a_4x_2 \geqslant a_3x_1$

Realmente, pois (3) implica, em G, as relações:-

$x_2x_1^{-1} \geqslant a_2^{-1}a_1$

$a_2^{-1}a_1 \geqslant x_4x_3^{-1}$

$x_4x_3^{-1} \geqslant a_4^{-1}a_3$ e então

$x_2x_1^{-1} \geqslant a_4^{-1}a_3 \Longrightarrow a_4x_3 \geqslant a_3x_1$

Verifiquemos agora que existe monoide M, parcialmente ordenado, imersível em um grupo, onde não vale a condição anterior.

Seja o conjunto de oito elementos que representaremos $S = \{a_1, a_2, a_3, a_4, x_1, x_2, x_3, x_4\}$, e M o monoide livre sôbre esse conjunto; em M estabelecemos as relações:- $a_2x_2 \geqslant a_1x_1$

$$a_1x_3 \geqslant a_2x_4$$

$$a_4x_4 \geqslant a_3x_3$$

e as estendemos para uma ordem sôbre M.

Dadas duas palavras x, y de M, onde $x = x_1 \ldots x_r, y = y_1 \ldots y_s$ com $x_i, y_i \in S$ então $x \geqslant y$ se e sòmente se $r = s$ e qq i, $i = 1, 2, \ldots, r=s$, **temos uma das três possibilidades:-**

1º) $x_i = y_i$;

2º) $x_i x_{i+1} = a_j x_k$ com $(j,k) \in \{(2,2):(1,3);(4,4)\} = I$,

e $y_i y_{i+1} = a_q x_p$ com $(q,p) \in \{(1,1);(2,4);(3,3)\} = J$, ou

3º) $x_{i-1}x_i = a_j x_k$ com $(j,k) \in I$ e $y_{i-1}y_i = a_q x_p$ com $(q,p) \in J$

Essa relação é uma relação de ordem compatível com a estrutura de monoide de M, pois:-

1) $x \geqslant x$ qq $x \in M$ imediato

2) $x \geqslant y$ e $y \geqslant x \Longrightarrow x_i = y_i$ qq i, pois se existe i, tal que $x_i x_{i+1} = a_j x_k$ e $y_i y_{i+1} = a_q x_p$ com $(j,k) \in I$ e $(q,p) \in J$, não teremos $y \geqslant x$, pois para i teríamos $x_i \neq y_i$, $y_i y_{i+1} \neq a_j x_k$, pois

$J \cap I = \emptyset$ e também não teremos $y_{i-1}y_i = a_j x_k$, pois $y_i = a_q$ com $q \in \{1,2,3\}$.

3) $x \geqslant y$ e $y \geqslant z \Longrightarrow x \geqslant z$, pois dado $\underline{i}$, se $x_i = y_i$ e $y_i = z_i$, temos $x_i = z_i$

Se $x_i = y_i$ e $y_i y_{i+1} = a_j x_k$ com $(j,k) \in I$, então $x_{i+1} = y_{i+1}$, para que seja possível $x \geqslant y$.

Se $x_i = y_i$ e $y_{i-1}y_i = a_j x_k$ com $(j,k) \in I$, então $x_{i-1} = y_{i-1}$ para que $x \geqslant y$.

Se $x_i x_{i+1} = a_j x_k$ e $y_i y_{i+1} = a_q x_p$ com $(j,k) \in I$ e $(q,p) \in J$, então $z_i z_{i+1} = a_q x_p = y_i y_{i+1}$, obrigatòriamente, uma vez que $y \geqslant z$ e devido a $y_i y_{i+1} = a_q x_p$, $z_i z_{i+1}$ não podem satisfazer a nenhuma outra condição de definição de ordem que a 1º).

Finalmente se $x_{i-1}x_i = a_j x_k$ e $y_{i-1}y_i = a_q x_p$ com $(j,k) \in I$ e $(q,p) \in J$, temos também pela mesma razão $z_{i-1}z_i = a_q x_p = y_{i-1}y_i$.

Então temos em M, uma relação de ordem e é imediato que é compatível com a operação de emendar palavras de M.

Assim sendo, temos o exemplo procurado, pois M é monoide livre e pelo teorema 3, capítulo, III, existe grupo simétrico de M, porém não existe simetrizado de M devido ao teorema anterior.

Esse exemplo nos mostra ainda, que o teorema 3, do capítulo

III não pode ser estendido diretamente aos monoides ordenados; no entanto o teorema 4, do capítulo III pode. Isto é:-

Teorema 4:- Seja M monoide ordenado, satisfazendo a condição (2) do capítulo III.

Então, podemos estender a ordem de M ao grupo simétrico $G(M)$ de maneira a $G(M)$ ser o simetrizado de M, segundo a definição 3 e o cone de $G(M)$ será, $P = \{ab^{-1} \mid a,b \in M \text{ e } a \geqslant b\}$.

De acôrdo com o teorema 1, basta verificarmos se P satisfaz i)/iii) para termos uma relação de ordem compatível com a operação, sôbre $G(M)$.

Verificação:-

i) $P.P \subseteq P$. sejam $x,y \in P$, $x = ab^{-1}$ e $y = cd^{-1}$ com $a,b,c,d \in M$ e $a \geqslant b$ e $c \geqslant d$.

Como M satisfaz (2) do capítulo III seja $m,n \in M$, tais que $bm = cn$ e então $x = (am)(bm)^{-1}$ e $y = (cn)(dn)^{-1}$ e $am \geqslant bm = cn \geqslant dn$ e $xy = (am)(dn)^{-1} \in P$.

ii) $P \cap P = \{e\}$, se $x \in P \cap P^{-1} \Longrightarrow x \in P$ e $x^{-1} \in P$, isto é, existem $a,b,c,d \in M$, $a \geqslant b$ e $c \geqslant d$, tais que $x = ab^{-1}$ e $x^{-1} = cd^{-1}$, mas $xx^{-1} = \underline{e}$ e como na verificação de i), existem $m,n \in M$, tais que $bm = cn$ e $e = x\,x^{-1} = (am)(dn)^{-1} \Longrightarrow am = dn$ e então $am \geqslant bm = cn \geqslant dn$, logo $am = bm = cn = dn$ e então $a=b$, $c=d$ e $x=e$.

iii) $gPg^{-1} \subseteq P$ qq $g \in G$

Seja $g = cd^{-1}$ com $c,d \in M$ e $x \in P$, $x = ab^{-1}$ com $a,b \in M$ e $a \geqslant b$, vejamos que $g\,x\,g^{-1} \in P$.

$gxg^{-1} = (cd^{-1})(ab^{-1})(cd^{-1})^{-1}$, mas existem $m_1, n_1 \in M$, tais que $dm_1 = an_1$ e $an_1 \geqslant bn_1$.

Existem também $m_2, n_2 \in M$, tais que $bn_1m_2 = dn_2$ e então $dm_1m_2 = an_1m_2 \geqslant bn_1m_2 = dn_2$ ou (') $m_1m_2 \geqslant n_2$

Mas $gxg^{-1} = (cm_1m_2)(dm_1m_2)^{-1}(an_1m_2)(bn_1m_2)^{-1}(dn_2)(cn_2)^{-1} =$ $= (cm_1m_2)(cn_2)^{-1}$, devido as diversas igualdades, mas devido a(') $cm_1m_2 \geqslant cn_2$, $gxg^{-1} = (cm_1m_2)(cn_2)^{-1} \in P$.

Então, P estabelece uma ordem sôbre G(M), ordem essa que coincide com a ordem inicial considerada em M, e é de fácil verificação que G(M) com essa ordem satisfaz a definição 3 e é, portanto o simetrizado de M.

Observemos que se $N = \{ x \in M \text{ tais que } x \geqslant e \}$ então $N = P$ see $x \geqslant y$ em $M \Longrightarrow$ existem $r, s \in N$ tais que $xr = sx = y$, caso contrário $N \subsetneq P$.

Corolário:- Se M monoide ordenado e comutativo, então o grupo simétrico de M, G(M) está nas condições do teorema anterior.

Imediato, pois como já vimos, um monoide comutativo satisfaz a condição (2) do capítulo III.

Examinaremos agora, o caso particular em que dado um monoide ordenado M, existe o seu simetrizado e M é o cone positivo de G, - isto é, $M = G_+$.

<u>Definição 4</u>:- Dizemos que um monoide M é naturalmente ordenado se:-

i) qq $x \in M$ temos $x \geqslant e$, onde <u>e</u> elemento neutro de M.

ii) Se $a,b \in M$ e $a \geqslant b$ existem $x,y \in M$ tais que $bx = yb = a$

Seja agora:-

<u>Teorema 5</u>:- A condição necessária e suficiente para que um monoide ordenado M, seja o cone positivo de seu simetrizado é que seja naturalmente ordenado.

Realmente, pois qq $a,b \in M$, temos $a \geqslant e$ e então $ab \geqslant b$; logo existe x, tal que $ab = bx$, isto é, estamos nas condições do teorema 4 e se P for o cone do simetrizado de M, $P = \left\{ ab^{-1} \text{ com } a,b \in M \text{ e } a \geqslant b \right\}$ mas M naturalmente ordenado e $a \geqslant b \implies$ existe $y \in M$, tal que $a = yb$ e $ab^{-1} = y \in M$ e então $M = G_+$. (demonstramos aqui a observação do teorema 4).

A necessariedade da condição é imediata.

Seja agora o:-

<u>Teorema 6</u>:- A condição necessária e suficiente para que dado um monoide M, possamos definir em M uma relação de ordem de maneira

a que M seja um monoide naturalmente ordenado é que:-

i) qq $a,b \in M$, $ab = e \Longrightarrow a = b = e$, onde e elemento neutro.

ii) qq $a \in M$ temos $Ma = aM$.

Nesse caso em M definimos a relação:-

$b \geqslant a \longleftrightarrow \exists\ x,y \in M$, tais que $ax = ya = b$

$\geqslant$ é uma relação de ordem;

1) $a \geqslant a$ qq $a \in M$, pois $ae = ea = a$, onde e elemento neutro

2) $a \geqslant b$, $b \geqslant a \Longrightarrow a = b$, já que se $a \geqslant b$ existem x', y', tais que

$bx' = y'b = a$ e $b \geqslant a$ existem x,y tais que $ax = ya = b$, temos

$xx' = e$, ou $x = x' = e$, e então $a = b$.

3) $a \geqslant b$, $b \geqslant c \Longrightarrow a \geqslant c$, pois

$a \geqslant b \Longrightarrow \exists\ x', y' \mid bx' = y'b = a$

$b \geqslant c \Longrightarrow \exists\ x,y \mid cx = yc = b$, logo

$cxx' = y'yc = a$ e $a \geqslant c$

Se $a,b,c \in M$ e $a \geqslant b \Longrightarrow ac \geqslant bc$

$ca \geqslant cb$

pois $a \geqslant b \Longrightarrow \exists\ x,y \mid bx = yb = a$ logo

$bxc = ybc = ac$

$cbx = cyb = ca$, como $xc \in Mc = cM$ $\exists\ x'$, tal que $xc = cx'$, anàlogamente $cy = y'c$ e então $\exists\ x', y$ e x, y', tais que:-

$bcx' = ybc = ac$ e $cbx = y'cb = ca$ e então $ac \geqslant bc$ e $ca \geqslant cb$.

E então M é um monoide naturalmente ordenado, e como consequência:-

<u>Corolário</u>:- A condição necessária e suficiente para que um monoide M, possa ser o cone de uma relação de ordem definida em seu grupo simétrico, é que M satisfaça i) e ii) do teorema.

As referências desse capítulo são:- (4), (7), (8).

CAPÍTULO V

SIMETRIZAÇÃO GRUPOS RETICULADOS

1. Grupos Reticulados

Nesse capítulo, examinaremos o caso particular do capítulo anterior, em que os conjuntos parcialmente ordenados são reticulados, isto é, dado um par a,b de elementos, existem sempre, supremo e ínfimo de a,b.

Usaremos a notação habitual $a \vee b$ para supremo de a,b e $a \wedge b$ para o ínfimo.

Então, um grupo ordenado G, é um grupo reticulado se dados $a,b \in G$, existem $a \vee b$ e $a \wedge b$ em G e qq $c,d \in G$ temos,

$c(a \vee b)d = cad \vee cbd$ e $c(a \wedge b)d = cad \wedge cbd$.

Se G e H são grupos reticulados e $h:G \to H$ é um homomorfismo tal que qq $a,b \in G$ $h(a \vee b) = h(a) \vee h(b)$, $h(a \wedge b) = h(a) \wedge h(b)$; chamaremos h de um R-homomorfismo.

É imediato que todo R-homomorfismo é um O-homomorfismo, não sendo verdade porém a recíproca; vamos construir um exemplo; com esse objetivo seja a

Proposição:- Um sub-grupo normal N de um grupo ordenado G é o kernel de um O-homomorfismo se e sòmente se é convexo, isto é, dados

$a,b \in N$ e $x \in G$, tal que $a \leq x \leq b$, então $x \in N$.

Ver demonstração em Fuchs (7), Riberboin (12)

Seja agora o exemplo:- $G = R \times R$, onde R grupo aditivo dos reais, com a ordem do produto e $H = \{(a,-a) \mid a \in R\}$, então H é subgrupo convexo, pois H trivialmente ordenado; G/H pela proposição é um grupo ordenado e se $f: G \longrightarrow G/H$, f é um O-homomorfismo, mas não é um R-homomorfismo, pois G/H é isomorfo ao $\{(a,a) \mid a \in R\}$ e é totalmente ordenado e $f((1,0) \vee (o,3)) = f((1,3)) = 2\sqrt{2}$ e

$f((1,0)) \vee f((o,3)) = 1/\sqrt{2} \vee 3/\sqrt{2} = 3/\sqrt{2}$.

Maiores detalhes sôbre esse exemplo serão encontrados em Riberboin (12).

Anàlogamente a grupos reticulados, temos os monoides reticulados e os R-homomorfismos de monoide. Nestas notas, teremos sempre que um monoide reticulado é um reticulado distributivo.

2. <u>Propriedades Gerais dos Grupos Reticulados</u>

1. $(a \vee b)^{-1} = a^{-1} \wedge b^{-1}$, $(a \wedge b)^{-1} = a^{-1} \vee b^{-1}$ qq $a,b \in G$

2. qq $a,b \in G$, $a(a \wedge b)^{-1} b = a \vee b$, pois

$a(a \wedge b)^{-1} b = a(a^{-1} \vee b^{-1})b = aa^{-1} b \vee ab^{-1} b = a \vee b$

3. Se G é um grupo reticulado, o reticulado G é distributivo

Verifiquemos que em G vale a lei do corte;

Se $a \vee x = a \vee y$ e $a \wedge x = a \wedge y$, temos

$x = (a \wedge x)\, a^{-1}\, a(a \wedge x)^{-1} x = (a \wedge x)a^{-1}\, (a \vee x) = (a \wedge y)a^{-1}\, (a \vee y) =$

$= (a \wedge y)a^{-1}\, a(a \wedge y)^{-1} y = y$

4. Se $a \wedge b = e$ onde $\underline{e}$ elemento neutro de G, então $ab^{-1} \vee e = a$

e $(ab^{-1})^{-1} \vee e = b$

$ab^{-1} \vee e = ab^{-1} \vee aa^{-1} = a(b^{-1} \vee a^{-1}) = a(b \wedge a)^{-1} = ae = a$

$(ab^{-1})^{-1} \vee e = ba^{-1} \vee e = ba^{-1} \vee bb^{-1} = b(a \wedge b)^{-1} = be = b$

5. Se $a = x \vee e$ e $b = x^{-1} \vee e$, então $a \wedge b = e$ e $x = ab^{-1}$

$e = (x \wedge e)(x \wedge e)^{-1} = (x \wedge e)(x^{-1} \vee e) = x(x^{-1} \vee e) \wedge e(x^{-1} \vee e) =$

$= (xx^{-1} \vee x) \wedge (x^{-1} \vee e) = (x \vee e) \wedge (x^{-1} \vee e) = a \wedge b$

Também $x = ab^{-1}$, devido a 4. e a lei do corte

6. qq $x \in G$, $x \wedge x^{-1} \leqslant \underline{e}$ e $x \vee x^{-1} \geqslant \underline{e}$

$(x \wedge x^{-1}) \vee e = (x \vee e) \wedge (x^{-1} \vee e) = \underline{e}$ e $x \wedge x^{-1} \leqslant \underline{e}$

como $x \vee x^{-1} = (x \wedge x^{-1})^{-1}$ e $x \wedge x^{-1} \leqslant \underline{e}$, temos $x \vee x^{-1} \geqslant \underline{e}$

7. qq $x \in G$ $x = (x \vee e)(x^{-1} \vee e)^{-1}$, pois

$x(x^{-1} \vee e) = xx^{-1} \vee x = x \vee e$, logo $x = (x \vee e)(x^{-1} \vee e)^{-1}$

Vamos aqui anàlogamemte ao capítulo I, definir parte positiva de x, x^+; parte negativa de x, x^-. Como:-

$x^+ = x \vee e$ e $x^- = x^{-1} \vee e$

Uma propriedade importante dos grupos reticulados, refere-se ao cone positivo de um grupo e é apresentado no

G, então a condição necessária é suficiente para que G seja um grupo reticulado é que P gere G e P seja um reticulado relativamente a ordem induzida em P.

Outra importante propriedade dos grupos reticulados, refere-se a natureza do reticulado subjacente a estrutura de grupo reticulado.

Vamos agora determinar essa natureza e assim estabeleceremos uma conexão, entre a simetria estudada nos capítulos III e IV e os reticulados completamente simétricos, vistos nos capítulos I e II.

<u>Teorema 2</u>:- Se G é um grupo reticulado, o reticulado G é um reticulado completamente simétrico, onde a simetria é dada por

$a \longmapsto a^{-1}$

Verificação:- qq $a, b \in G$, temos:-

a) $(a^{-1})^{-1} = a$

b) $(a \wedge b)^{-1} = a^{-1} \vee b^{-1}$; $(a \vee b)^{-1} = a^{-1} \wedge b^{-1}$, leis de De Morgan

c) $a \vee a^{-1} \geqslant b \wedge b^{-1}$, consequência de6.

d) existe $\underline{e}$, elemento neutro, tal que $e^{-1} = e$

e) Se $a \wedge b = e$ existe $c = ab^{-1}$, tal que $c^{+} = a$ e $c^{-} = b$, consequência de 4.

O teorema que acabamos de demonstrar é de grande interesse para nós, pois juntamente com o teorema 1, nos garante que todo grupo reticulado é duplamente um simétrico, tendo o operador $g \longmapsto g^{-1}$ como operador de simetria. Vejamos:-

Conforme o teorema 5, capítulo IV o cone de um grupo reticulado, visto como monoide, satisfaz a condição (2) do capítulo III, e portanto o seu grupo simétrico, é a menos de isomorfismo, o único grupo gerado por P (cf observação no final do capítulo III).

Como o teorema 1, nos garante que o grupo reticulado é gerado pelo seu cone, vemos que o grupo reticulado é isomorfo ao grupo simétrico de P, (segundo definição 1, capítulo III).

O teorema anterior nos informa que o grupo reticulado, visto como reticulado, é o simetrizado do cone, visto também como reticulado, assim sendo um grupo reticulado é duplamente o simetrizado de seu cone.

Consideremos agora, a injeção canônica $i:P \longrightarrow G$, é imediato que i é R-homomorfismo e se $f:P \longrightarrow H$ onde H grupo reticulado e f R-homomorfismo de monoide, existe, e é único $h:G \longrightarrow H$ R-homomorfismo que estende f.

Realmente, pois como G grupo simétrico de P, existe homomorfismo h que estende f e com G é reticulado completamente simétrico existe homomorfismo de reticulado g que estende f, vejamos que h coincide com g.

Como vimos no capítulo II, $g(x) = y$ tal que $y^+ = f(a)$ e $y^- = f(b)$, onde $x = (a,b)$, se tomarmos $x \in G$, $x = ab^{-1}$ c/ $a,b \in P$ e $a \wedge b = e$ pela propriedade 5, então $h(x) \vee e = h(a)h(b)^{-1} \vee e = f(a)f(b)^{-1} \vee e = f(a)$ e $h(x)^{-1} \vee e = h(x^{-1}) \vee e = h(b)h(a^{-1}) \vee e = f(b)f(a)^{-1} \vee e = f(b)$, pois $f(a) \wedge f(b) = f(a \wedge b) = f(e) = e$, e devido a 4.

Conclusão:- para cada $x \in G$, $h(x) = g(x)$ e então h (ou g) é R-homomorfismo, e com isso demonstramos o seguinte resultado:-

Teorema 3:- Se G é grupo reticulado e P seu cone, visto como monoide, então todo R-homomorfismo de P, em H, onde H grupo reticulado, pode ser estendido a um R-homomorfismo de grupo de G em H.

Concluimos então que os dois aspectos de simetria considerados, estão intimamente ligados.

O último teorema sugere uma definição mais adequada, que a escrita no capítulo anterior, para simetrizado de um monoide reticulado.

Definição 1:- Chamaremos simetrizado de um monoide reticulado, a um grupo reticulado $G(M)$, tal que exista um R-homomorfismo injetivo $\underline{i}$ de M em $G(M)$, e para todo R-homomorfismo f de M em H, H grupo reticulado, existe e é único, R-homomorfismo h de $G(M)$ em H que estende f, isto é, $h \circ i = f$.

Motivados pelo teorema anterior, só estudaremos simetrizado de monoides reticulados que possam ser o cone do simetrizado.

Ainda devido ao teorema 5, do capítulo IV e ao teorema 1, podemos afirmar a recíproca do teorema 3, isto é:-

<u>Teorema 4</u>:- Se M monoide reticulado, naturalmente ordenado, então existe simetrizado de M segundo a definição precedente, e M é o cone do simetrizado.

O teorema 2 sugere a seguinte demonstração da suficiência.

Como M naturalmente ordenado qq $a \in M$, $aM = Ma$ e então qq $a, b \in M$, $\exists$ $x \in M$, tal que $ax = ba$, mas isso é a condição (2) do capítulo III, onde $m = x$ e $n = a$, então M naturalmente ordenado, M satisfaz a condição (2), capítulo III.

Seja então o reticulado completamente simétrico

$S(M) = \left\{ (a,b)/a \wedge b = e,\ a, b \in M \right\}$, onde $\underline{e}$ é elemento neutro do monoide e definamos:-

$(a_1, b_1)\ (a_2, b_2) = (r, s)$, onde:-

Como $b_1, a_2 \in M$, existem m, n, tais que $b_1 m = a_2 n = b$ e $a = a_1 m$, $c = b_2 n$ e se $p = a \wedge c$, então r e $s \in M$ são tais que $rp = a$, $sp = c$.

A existência de r, s é assegurada pelo fato de M ser naturalmente ordenado.

$(r,s) \in S(M)$, pois $x \leqslant \frac{r}{s} \Longrightarrow xp \leqslant \begin{cases} rp = a \\ sp = c \end{cases}$ e

$xp \leqslant p \Longrightarrow x = e$, isto é $r \wedge s = e$

Vejamos que a operação está bem definida:-

Se a', b', c' tais que $a' = a_1m'$

$$b' = b_1m' = a_2n'$$

$$c' = b_2n'$$

e $q = a' \wedge c'$ e r', s', tais que $r'q = a', s'q = c'$

então $r' = r$ e $s' = s$

Vemos que se $cx = c'y \Longrightarrow b_2nx = b_2n'y \Longrightarrow$

$nx = n'y \Longrightarrow a_2nx = a_2n'y \Longrightarrow b_1mx = b_1m'y \Longrightarrow$

$mx = m'y \Longrightarrow a_1mx = a_1m'y$, isto é, $ax = a'y$

mas então

$px = (a \wedge c)x = (ax \wedge cx) = (a'y \wedge c'y) = (a' \wedge c')y = qy$

Como $c, c' \in M \Longrightarrow$ existem $m, n \in M$, tais que $cm = c'n$ e então

$am = a'n$ e $pm = qn$ e então

$s'qn = c'n = cm = spm$, $r'qn = a'n = am = rpm$ e então $s' = s$ e

$r' = r$ e a operação está bem definida.

Essa operação é associativa:-

Sejam $(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3) \in S(M)$ e $m_1, n_1, m_2, n_2 \in M$,

tais que $b_1m_1 = a_2n_1, b_2m_2 = a_3n_2$ e $t_1, t_2 \in M$, tais que $n_1t_1 = m_2t_2$

e $a = a_1m_1t_1$, $b = b_1m_1t_1 = a_2n_1t_1$, $c = b_2n_1t_1 = b_2m_2t_2 = a_3n_2t_2$

$d = b_3n_2t_2$ e

$(a_1,b_1)(a_2,b_2) = (r_1,s_1)$, onde se $p_1 = a \wedge c$, então $r_1p_1 = a$

$s_1p_1 = c$

$(a_2,b_2)(a_3,b_3) = (r'_2,s'_2)$, onde se $p'_2 = b \wedge d$, então $r'_2p'_2 = b$

$s'_2p'_2 = d$

$(r_1,s_1)(a_3,b_3) = (r_2,s_2)$, onde

$s_1p_1 = c = a_3n_2t_2 = y$ e se $x = r_1p_1$ e

$z = b_3n_2t_2$ e $p_2 = x \wedge z \Longrightarrow p_2 = a \wedge d$ e

$r_2p_2 = x = a$

$s_2p_2 = z = d$

$(a_1,b_1)(r'_2,s'_2) = (r'_1,s'_1)$, onde

$b_1m_1t_1 = b = r'_2p'_2 = y'$ e se $x' = a_1m_1t_1 = a$

$z' = s'_2p'_2 = d$

e se $p'_1 = x' \wedge z' \Longrightarrow p_1' = a \wedge d$ e $r'_1p'_1 = a$

$s'_1p'_1 = d$

Será associativa se $r_2 = r_1'$, $s_2 = s'_1$, mas

$p'_1 = a \wedge d = p_2$ e $r'_1p'_1 = a = r_2p_2$

$s'_1p'_1 = d = s_2p_2$ logo

$r'_1 = r_2$ e $s'_1 = s_2$ e é associativa.

O par (e,e) é o elemento neutro para essa operação;

$(a_1,b_1)(e,e) = (r_1,s_1)$ como

$b_1 e = eb_1 = b$, logo para $a = a_1 e$, $c = eb$, se $p = a \wedge c = a_1 \wedge b_1 = e$

$r_1 p = a = a_1$

$s_1 p = c = b_1$

isto é, $r_1 = a_1$, $s_1 = b_1$ e (e,e) é elemento neutro pois anàlogamente

$(e,e)(a_1,b_1) = (a_1, b_1)$

Dado o par (a,b) e par (b,a) é seu inverso,

$(a,b)(b,a) = (r,s)$ onde

$be = be = y$ e $x = ae$, $z = ae$ e se

$p = x \wedge z = a \wedge a = a$, $rp = x = a$

$sp = y = a$

isto é, $\left.\begin{array}{l} ra = a \\ sa = a \end{array}\right\} \Longrightarrow r = s = e$

E então $S(M)$ tem estrutura de grupo e ainda se $(a,b) \in S(M)$,

$(a,b) = (a,e)(e,b) = (a,e)(b,e)^{-1}$; e^{a} aplicação $i:- M \longrightarrow S(M)$, tal

que $i(a) = (a,e)$ é um R-homomorfismo injetivo e assim acabaríamos

por verificar que $S(M)$ com essa operação é o simetrizado de M.

<u>Colorário</u>:- Se M nas condições anteriores e comutativo $S(M)$ é

o grupo simetrizado de M e a operação é definida:-

$(a_1,b_1)(a_2,b_2) = (r,s)$ onde se $p = a_1 a_2 \wedge b_1 b_2$, $rp = a_1 a_2$

$sp = b_1 b_2$

pois na demonstração anterior faríamos $m = a_2$ e $n = b_1$ e

$a = a_1 a_2$, $c = b_1 b_2$.

Vamos aplicar o que acabamos de ver no estudo de R-homomorfismos e estruturas sub-diretamente irredutíveis.

4. R-homomorfismos e imagens homomorfas

Se G e H são grupos reticulados e $f:G \longrightarrow H$ é um R-homomorfismo e se K for o kernel de f, então G/K é isomorfo a f(G), imagem de G pela f, e então estudar as imagens homomorfas de um grupo reticulado é o mesmo que estudar os quocientes de G, segundo relações de equivalência compatíveis com a estrutura de grupo reticulado de G.

A essas relações de equivalência, chamaremos congruências, e representaremos que x é equivalente a y, segundo uma congruência p, por $x \sim y \pmod{p}$.

Se f for um R-homomorfismo, a relação $x \sim y$ se e sòmente se $f(x) = f(y)$ é uma congruência e reciprocamente se p for uma congruência, a função $f(x) = \bar{\bar{x}}$ = classe de equivalência a que x pertence, é um R-homomorfismo, devido a isso vamos identificar sempre, imagem homomorfa a quociente e R-homomorfismo a congruência, e consideramos um ou outro conceito, conforme a conveniência.

Vejamos agora como caracterizar os R-homomorfismos de grupo reticulado, inicialmente seja o teorema:-

Teorema 5 :- Um sub-grupo normal convexo N de um grupo reticulado é o kernel de um R-homomorfismo se e sòmente se N é um sub-reticulado.

Esse teorema, estabelece a caracterização de um R-homomorfismo, por meio de uma sub-estrutura do grupo reticulado; tendo-se em vista o que vimos no capítulo II, para reticulados completamente simétricos, vamos estabelecer uma caracterização, dos R-homomorfismos, por meio de famílias de filtro convenientes.

Com esse objetivo, vamos estudar algumas propriedades dos filtros primos de um grupo reticulado.

1) Se $P \subset G$, G grupo reticulado e P filtro primo, então qq $a \in G$, aP e Pa são filtros primos de G.

Se $x \in aP$ e $z \in G$, $x = ay$ com $y \in P$ e então como

$y \vee a^{-1} z \in P \Longrightarrow a(y \vee a^{-1} z) = x \vee z \in aP$

Se $x_1, x_2 \in aP$, $x_1 = ay_1$, $x_2 = ay_2$ com $y_1, y_2 \in P$, temos

$y_1 \wedge y_2 \in P$ e $a(y_1 \wedge y_2) = x_1 \wedge x_2 \in aP$

Se $x_1 \vee x_2 \in aP$, como $a^{-1}(x_1 \vee x_2) \in P$ e

$a^{-1}(x_1 \vee x_2) = a^{-1} x_1 \vee a^{-1} x_2$, $a^{-1} x_1 \in P$ ou $a^{-1} x_2 \in P$ e

$x_1 \in aP$ ou $x_2 \in aP$.

Anàlogamente verificaríamos que Pa é filtro primo.

2) Se $P \subset G$ filtro primo e $\varphi P = C_G(P^{-1})$ como no capítulo II, então $\varphi(aP) = (\varphi P)a^{-1}$ e $\varphi(Pa) = a^{-1}(\varphi P)$

Se $x \in \psi(aP) \Longrightarrow x \in \complement_G(aP)^{-1} \Longrightarrow x^{-1} \notin aP \Longrightarrow a^{-1}x^{-1} \notin P \Longrightarrow$ $(a^{-1}x^{-1})^{-1} = xa \notin P^{-1} \Longrightarrow xa \in \complement_G(P^{-1})$ e $x \in (\psi P)a^{-1}$ e então $\psi(aP) \subset (\psi P)a^{-1}$.

Se $x \in (\psi P)a^{-1} \Longrightarrow xa \in \psi P = \complement_G(P^{-1}) \Longrightarrow (xa)^{-1} \notin P \Longrightarrow$ $\Longrightarrow a^{-1}x^{-1} \notin P \Longrightarrow x^{-1} \notin aP \Longrightarrow x \notin (aP)^{-1} \Longrightarrow x \in \complement_G(aP)^{-1} = \psi(aP)$ e $(\psi P)a^{-1} \subset \psi(aP)$

Como $\psi^2 P = P$ $\psi(Pa) = \psi(\psi((\psi P)a) = \psi(\psi(a^{-1}(\psi P))) =$ $a^{-1}(\psi P)$.

3) Se $P \subset G$, filtro primo e $a \in G$, então $aP \cap P = (a \vee e)P$ qq $a \in G$; e como consequência $(a \vee e)P = aP \subset P$ ou $(a \vee e)P = P \subset aP$.

Como $a \vee e \geqslant {a \atop e}$ qq $t \in P, (a \vee e)t \geqslant {at \atop t}$ e, portanto $(a \vee e)t \in aP \cap P$ e então $(a \vee e)P \subset aP \cap P$.

Se $z \in aP \cap P \Longrightarrow$ existem t_1 e $t_2 \in P$, tais que $at_1 = t_2 = z$.

Mas se t' tal que $(a \vee e)t' = at_1$, temos $t' = (a \vee e)^{-1}at_1 =$ $=(a^{-1} \wedge e)\ at_1 = t_1 \wedge at_1$, mas $t_1 \in P$ e $at_1 = t_2 \in P$, logo $t' \in P$ e $z = (a \vee e)t' \in (a \vee e)P$ e então $(a \vee e)P = aP \cap P$.

Vejamos agora a caracterização prometida:-

<u>Teorema 6</u>:- Se $f: G \longrightarrow H$ é um R-homomorfismo de G em H grupos reticulados e se $N' = \left\{ f^{-1}(P), \text{ onde } P \subset H, \text{ filtro primo} \right\}$, N' é uma família de filtros primos invariantes por ψ e por translações, isto se $P \in N'$, $\psi P \in N'$, $aP \in N'$, $Pb \in N'$ para todo a e $b \in G$.

Como H é reticulado por teorema visto no capítulo II, N' é invariante por φ, verifiquemos agora que o é por translações.

Antes porém; <u>Lema</u>:- Se N' como no teorema, então $f(x) = f(y)$ see qq $Q \in N'$, $x \in Q \longleftrightarrow y \in Q$.

$f(x) = f(y)$, e $x \in Q \Longrightarrow x \in f^{-1}(P)$, onde $Q = f^{-1}(P)$ e $P \subset H$ filtro primo, então $f(x) \in P$, mas $f(x) = f(y) \Longrightarrow f(y) \in P$ e $y \in f^{-1}(P) = Q$ Reciprocamente $y \in Q \Longrightarrow x \in Q$ qq $Q \in N'$.

Suponhamos agora que $x \in Q \longleftrightarrow y \in Q$ qq $Q \in N'$; então se $f(x) \neq f(y)$ em H existiria $P \subset H$ filtro primo, tal quesòmente um dêles, $f(x)$ ou $f(y)$ pertenceria a P o que é contradição com $x \in f^{-1}(P) \longleftrightarrow y \in f^{-1}(P)$.

<u>Demonstração do teorema</u>:- se $Q = f^{-1}(P) \in N'$ e $a \in G$, $aQ = af^{-1}(P) \in N'$, pois $af^{-1}(P) = f^{-1}(f(a)P)$.

Se $x \in af^{-1}(P) \Longrightarrow x = ay$ com $y \in f^{-1}(P)$ e $f(x) = f(ay) = f(a)f(y)$ e então $f(x) \in f(a).P$ e $x \in f^{-1}(f(a)P)$.

Se $x \in f^{-1}(f(a)P) \Longrightarrow f(x) = f(a)\, z$, com $z \in P$, logo existe $y \in f^{-1}(P)$, tal que $f(y) = z$ e $f(x) = f(a)f(y)$ e então $f(a)^{-1}f(x) = f(a^{-1})f(x) = f(a^{-1}x) = f(y)$ e então pelo lema $a^{-1}x \in Q \longleftrightarrow y \in Q$ qq $Q \in N'$, mas $y \in f^{-1}(P)$, logo $a^{-1}x \in f^{-1}(P)$ e $x \in af^{-1}(P)$; e $af^{-1}(P) = f^{1-}(f(a)P)$.

Anàlogamente $f^{-1}(P) \in N' \Longrightarrow f^{-1}(P).b \in N'$ qq $b \in G$.

Reciprocamente temos o

<u>Teorema 7</u>:- Se N' família de filtros primos invariante por $\mathcal{G}$ e por translações então a relação $x \sim y$ se e sòmente se $x \in Q \longleftrightarrow y \in Q$ $\forall Q \in N'$ é uma congruência sôbre G e portanto $G/\sim$ com as operações quocientes é uma imagem homomorfa de G.

Já sabemos do capítulo II que $\sim$ é uma relação de equivalência compatível com a estrutura de reticulado e portanto $G/\sim$ é um reticulado completamente simétrico com operações quocientes, verifiquemos que é um grupo reticulado.

Então verifiquemos que, se $x \sim y$ e $c \in G \Longrightarrow cx \sim cy$ e $xc \sim yc$ isto é

Se $Q \in N'$ e $cx \in Q \Longrightarrow x \in c^{-1} Q$, mas N' invariante por translação, logo $c^{-1}Q \in N'$ e com $x \sim y$, $y \in c^{-1}Q$ e $cy \in Q$, anàlogamente $cy \in Q \Longrightarrow cx \in Q$ e $cx \sim cy$

Identicamente $xc \sim yc$

Podemos então definir em G uma operação por passagem ao quociente, isto é $\bar{x} . \bar{y} = \overline{xy}$ e pelo citado teorema do capítulo II, $(\bar{x})^{-1} = \overline{x^{-1}}$, G será um grupo, e é imediato que

$\bar{c}\ (\bar{x} \vee \bar{y})\ \bar{d} = \bar{c}\ \bar{x}\ \bar{d} \vee \bar{c}\ \bar{y}\ \bar{d}$ e

$\bar{c}(\bar{x} \wedge \bar{y})\bar{d} = \bar{c}\ \bar{x}\ \bar{d} \wedge \bar{c}\ \bar{y}\ \bar{d}$ pois

$\bar{c}(\bar{x} \vee \bar{y})\bar{d} = \bar{c}(\overline{x \vee y})\bar{d} = \overline{c(x \vee y)d} = \overline{c\ x\ d \vee c\ y\ d} = \bar{c}\ \bar{x}\ \bar{d} \vee \bar{c}\ \bar{y}\ \bar{d}$,

anàlogamente a outra; e então $G/\sim$ é um grupo reticulado e uma imagem homomorfa de G.

Observação:- As duas seguintes afirmações são equivalentes:-

Se N' uma família de filtros primos, então:-

(1) $P \in N' \iff \varphi P \in N'$ e $aP \in N'$ qq $a \in G$

(2) $P \in N' \iff \varphi P \in N'$ e aP, bem como $Pa \in N'$ qq $a \in G$.

(1) $\implies$ (2) $Pa = (\varphi(\varphi P))\, a = \varphi(a^{-1}(\varphi P))$, mas $P \in N' \implies \varphi P \in N'$

$\implies a^{-1}(\varphi P) \in N' \implies \varphi(a^{-1}(\varphi P)) = Pa \in N'$.

(2) $\implies$ (1) trivialmente

Logo a tôda congruência (ou R-homomorfismo) corresponde uma família de filtros invariante por φ e por translações e reciprocamente a tôda família N' nessas condições corresponde uma congruência, porém essa correspondência não é um a um, embora a uma família de filtros N', não possam corresponder duas congruências distintas, o contrário é possível, por exemplo:-

Seja Q grupo aditivo dos racionais com a ordem habitual, e seja N' o conjunto de todos os filtros primos P de Q que satisfazem a uma das seguintes condições:-

(1) existe x em Q, tal que qualquer que seja $y \in P$, $y \leq x$.

(2) existe x em Q, tal que qualquer que seja $y \in P$, $y \geq x$.

N' nas condições do teorema 7, pois é de fácil verificação que se $P \in N'$, então $a + P + b \in N'$ qq $a, b \in Q$, e ainda se $P \in N'$ e P satisfaz (1) então φP satisfaz (2) e reciprocamente.

Logo N' estabelece uma congruência sôbre Q e se $x \sim y (\mathrm{mod}\ N')$ então $x = y$, pois se $x > y$ o filtro primo $P = \left\{ z \in Q, \text{tais que } z \geq x \right\}$ conteria x e não conteria y e $P \in N'$, isto é, N' está associada a congruência identidade.

Se tomarmos a família N, de todos os filtros primos de Q, essa família também está associada a congruência identidade e $N' \neq N$, pois o filtro primo, $R = \left\{ y \in Q, \text{ tais que } y > \sqrt{2} \right\}$, não pertence a N' e pertence a N.

Se $\underline{p}$ for uma congruência sôbre G, grupo reticulado, e $f: G \longrightarrow G/p$ for o R-homomorfismo canônico então a família $N' = \left\{ f^{-1}(P) \text{ onde } P \subset G/p \text{ filtro primo} \right\}$ é a maior família de filtros primos que caracteriza p, isto é, se N'_1 for uma família de filtrosprimos que define sôbre G a mesma congruência p então $N'_1 \subset N'$.

Vejamos agora outra maneira de caracterizar que $x \sim y (\mathrm{mod}\ N')$ onde N' família de filtros primos.

<u>Teorema 8</u>:- Se N' uma família de filtros primos nas condições anteriores, então $x \sim y\ (\mathrm{mod}\ N')$ $(x \in Q \longleftrightarrow y \in Q \text{ qq } Q \in N')$, se e sòmente se $xQ = yQ$ qq $Q \in N'$.

Como $x \sim y$ see $y^{-1} x \sim \underline{e}$ e $xQ = yQ$ see $y^{-1}xQ = Q$ verificaremos que $x \sim e\ (\mathrm{mod}\ N')$ see $xQ = Q$ qq $Q \in N'$.

Se $xQ = Q$ qq $Q \in N'$ e $x \in P$, $P \in N'$ como $xP = P \Longrightarrow \exists\, y \in P$, tal

que $xy = x$, isto é, $y = \underline{e} \in P$

Se $\underline{e} \in P$ como $xP = P$ e $x = xe \in xP \Longrightarrow x \in P$ e $x \in P \longleftrightarrow e \in P$

qq $P \in N'$ ou $x \sim e \pmod{N'}$

Recìprocamente se $x \sim e \pmod{N'}$, N' nas condições anteriores, logo à N' está associada uma congruência em G e se $f: G \longrightarrow G/p$ for o R-homomorfismo canônico, $x \sim e \pmod{N'} \Longrightarrow f(x) = \underline{e}$ e então $f(xP) = f(x)f(P) = f(P)$ qq $P \in N'$ mas então pelo lema $xP = P$ qq $P \in N'$.

O teorema que acabamos de demonstrar, nos dá uma versão, para famílias de filtrosprimos, do conhecido resultado de que se K é um sub-grupo normal, então $x \sim y \pmod K$ se e sòmente se $xK = yK$.

Vamos agora demonstrar, diretamente que se $H = \left\{ x \mid x \sim e \pmod{N'} \right\}$ então H é um sub-grupo normal convexo e sub-reticulado.

<u>Teorema 9</u>:- Se N' nas condições anteriores e $H = \left\{ x \in G \text{ tais que } xP = P \text{ qq } P \in N' \right\}$, então H é sub-grupo normal e convexo de G e H é sub-reticulado.

Se $x \in H$, $x^{-1} \in H$, pois $xP = P \longleftrightarrow P = x^{-1}P$

Se $x, y \in H$ $xy \in H$, pois $(x \cdot y)P = x(yP) = xP = P$

Se $g \in G$, $gHg^{-1} = H$ qq $g \in G$; se $x \in H$,

$gxg^{-1} \in H$, pois $(gxg^{-1})P = (gx)(g^{-1}P) = g(g^{-1}P) = P$, pois $g^{-1}P \in N'$

uma vez que N^* invariante por translação.

Se $x \in H$ seja $y = g^{-1}xg$, $y \in H$ pelo raciocínio que acabamos de fazer e $gyg^{-1} = x$, e então $H = gHg^{-1}$, logo sub-grupo normal.

H, convexo, se $a \in H$ e $\underline{e} \leqslant x \leqslant a \Longrightarrow x \in H$, pois se $t \in P$, $t \leqslant xt \leqslant at$, logo $x.t \in P$ qq $t \in P$, e $xP \subset P$, se $b \in P$, então como $a \in H$ existe $y \in P$, tal que $b = ay$ e $\underline{e} \leqslant x \leqslant a \Longrightarrow y \leqslant xy \leqslant ay = b$, mas $xy \in xP$, logo $b \in xP$ e $P \subset xP$ ou $P = xP$ e H convexo.

H é sub-reticulado, se $x, y \in H \Longrightarrow x \vee y \in H$, realmente pois se $t \in P \Longrightarrow (x \vee y)t = xt \vee yt \in P$, pois xt e $yt \in P$ e $(x \vee y)P \subset P$.

Se $b \in P \Longrightarrow$ existem r, $s \in P$ tais que $xr = b$ e $ys = b$ e então

$(x \vee y)(r \wedge s) = (x \vee y)r \wedge (x \vee y)s = (xr \vee yr) \wedge (xs \vee ys) =$

$(b \vee yx^{-1}b) \wedge (xy^{-1}b \vee b) = \left[(e \vee yx^{-1}) \wedge (xy^{-1} \vee e)\right] b = b$, pois

$\underline{e} \vee yx^{-1} = z^{+}$ com $z = yx^{-1}$ e $xy^{-1} \vee \underline{e} = z^{-1}$, logo $z^{+} \wedge z^{-} = \underline{e}$, e ainda

$xr = b \Longrightarrow r = x^{-1}b$ e $yr = yx^{-1}b$.

$ys = b \Longrightarrow s = y^{-1}b$ e $xs = xy^{-1}b$, ficando assim explicado as substituições feitas na relação.

Mas $(x \vee y)(r \wedge s) = b \Longrightarrow b \in (x \vee y)P$, pois $r \wedge s \in P$ e $P \subset (x \vee y)P$ ou $(x \vee y)P = P$ e $x \vee y \in H$.

Se $x, y \in H$, $x \wedge y \in H$, pois $x \wedge y = (x^{-1} \vee y^{-1})^{-1}$ e como x^{-1}, $y^{-1} \in H$, $x^{-1} \vee y^{-1} \in H$ e $(x^{-1} \vee y^{-1})^{-1} \in H$, e então H é sub-reticulado.

Assim sendo o teorema 9 estabelece diretamente a relação entre famílias N' de filtros primos e sub-grupos normais convexos e sub-reticulados.

5. Propriedades das congruências

Diversos resultados apresentados agora sob o título "propriedades das congruências", teem sua demonstração, correta para qualquer reticulado completamente simétrico, no entanto sua redação aqui deve-se ao fato de terem sido sugeridos pelo item 6, grupos reticulados sub-diretamente irredutíveis.

Iniciemos com

1) Se N' associada a congruência p e $f:G \longrightarrow G/p$ homomorfismo canônico, então para todo $P \in N'$ temos:-

i) $f^{-1}(f(P)) = P$

ii) $f(P)$ é filtro primo de G/p

iii) $f(\varphi P) = \varphi f(P)$

i) $f^{-1}(f(P)) = P$, sabemos que $P \subset f^{-1}(f(P))$ e se $x \in f^{-1}(f(P))$ então $f(x) \in f(P)$ ou existe $t \in P$ tal que $f(x) = f(t)$, e como $t \in P$ temos $x \in P$ e $f^{-1}(f(P)) = P$.

ii) $f(P)$ é filtro primo de G/p.

Se $x, y \in f(P)$ e $z \in G/p$ existem $a, b \in P$ e $c \in G$, tais que $f(a) = x, f(b) = y$ e $f(c) = z$, e então

$x \vee z = f(a) \vee f(b) = f(a \vee b) \in f(P)$

$x \wedge y = f(a) \wedge f(b) = f(a \wedge b) \in f(P)$

Ainda, se $x,y \in G/p$ e $x \vee y \in f(P)$ com $x = f(a)$, $y = f(b)$ $\Longrightarrow f(a \vee b) \in f(P)$, logo $a \vee b \in f^{-1}(f(P)) = P$ e $x \in f(P)$ ou $y \in f(P)$

iii) $f(\varphi P) = \varphi f(P)$

$$
\begin{aligned}
x \in \varphi f(P) &\Longleftrightarrow x^{-1} \notin f(P) \\
&\Longleftrightarrow f^{-1}(x^{-1}) \cap P = \emptyset \\
&\Longleftrightarrow \left[f^{-1}(x)\right]^{-1} \cap P = \emptyset \\
&\Longleftrightarrow f^{-1}(x) \subset \varphi P \\
&\Longleftrightarrow x \in f(\varphi P)
\end{aligned}
$$

A recíproca de iii) já foi demonstrada no capítulo II, e vale mais geralmente, não apenas para as imagens de filtros primos da família N'.

Vamos reenuncia-la como a propriedade

2) Se $Q \subset G/p$ filtro primo $f^{-1}(\varphi Q) = \varphi f^{-1}(Q)$.

Antes de prosseguirmos vamos estabelecer que o símbolo Δ será usado para representar a congruência identidade, isto é,

$x \sim y \pmod{\Delta} \Longleftrightarrow x = y$

3) Se p congruência sôbre G, grupo reticulado, e N' família de filtros primos associada à p, então se $N'_1 = \left\{ P \subset G/p \text{ tais que } P = f(Q), \text{ onde } Q \in N' \right\}$, N'_1 nas condições do teo-

Como $f(aP) = f(a)f(P)$ e devido a ii) e iii) de 1), então N'_1 nas condições do teorema 7, vejamos que N'_1 associada a Δ ;

Se $x, y \in G/p$ e $x \neq y$, então se qq $f(Q) \in N'_1$, $x \in f(Q) \Longleftrightarrow y \in f(Q)$, e $a,b \in G$ são tais que $f(a) = x, f(b) = y$, concluimos; $a \in f^{-1}(f(Q)) = Q \Longleftrightarrow b \in f^{-1}(f(Q)) = Q$ qq $Q \in N'$, logo $f(a) = f(b)$, o que é contradição com $x \neq y$.

Recìprocamente, temos o:-

4) Se N'_1 associada a identidade em G/p, onde p congruência sôbre G, e se $N' = \left\{ f^{-1}(P),\ P \in N'_1 \text{ e } f: G \longrightarrow G/p \text{ da maneira habitual} \right\}$, N' associada a p.

Realmente, pois $f(x) = f(y) \Longrightarrow f(x) \in P \Longleftrightarrow f(y) \in P$ qq $P \in N'_1$, pois N'_1 associada a Δ , e então $x \in f^{-1}(P) \Longleftrightarrow y \in f^{-1}(P)$ qq $f^{-1}(P) \in N'$.

Se $x \in f^{-1}(P) \Longleftrightarrow y \in f^{-1}(P)$ qq $f^{-1}(P) \in N' \Longrightarrow$ $f(x) \in P \Longleftrightarrow f(y) \in P$ qq $P \in N'_1$, logo $f(x) = f(y)$, e então N' associada a p.

Antes de prosseguirmos, torna-se necessário definirmos o sentido de $p \subset p_1$, onde p e p_1 congruências.

Dizemos que $p \subset p_1$ se $x \sim y \pmod{p}$, também $x \sim y \pmod{p_1}$

Continuemos com a propriedade 5.

5) Se p e p_i são congruências associadas a N' e N''_i respectivamente e se $N'_i \subset N'$ temos $p \subset p_i$.

Como já vimos anteriormente, basta verificar que $x \sim e \pmod{p}$ $\Longrightarrow$ $x \sim e \pmod{p_i}$, mas $x \sim e \pmod{p} \Longrightarrow xP = P$ qq $P \in N''$, mas $N''_i \subset N''$, logo $xP = P$ qq $P \in N''_i$ e então $x \sim e(\mathrm{mod}\ p_i)$.

A recíproca não é necessàriamente verdadeira, porém se $N' = \left\{ f^{-1}(P),\ P \subset G/p \text{ filtro primo e } f: G \longrightarrow G/p \text{ R-homomorfismo canônico} \right\}$, e $N''_i = \left\{ f^{-1}_i(P),\ P \subset G/p_i \text{ filtro primo e } f_i: G \longrightarrow G/p_i \text{ R-homomorfismo canônico} \right\}$, então temos:-

6) Se N'' e N''_i assim definidos e $p \subset p_i$, então $N''_i \subset N''$

Demonstração:- Como $p \subset p_i$ existe e é único R-homomorfismo $h: G/p \longrightarrow G/p_i$, isto é, se definirmos $h(f(x)) = f_i(x)$, h bem definido pois $f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow f_i(x_1) = f_i(x_2)$, pois $p \subset p_i$ e então $h(f(x_1)) = h(f(x_2))$; h é R-homomorfismo, pois f e f_i o são.

Vamos mostrar que se $Q \in N'_i$ então $f(Q) \subset G/p$ é filtro primo: sabemos por 1) que $f_i(Q) \subset G/p_i$ é filtro primo e se $x \in f(Q)$, $y \in G/p$ existem $a \in Q$ e $b \in G$, tais que $x = f(a)$, $y = f(b)$ e

$x \vee y = f(a) \vee f(b) = f(a \vee b) \in f(Q)$.

Se $x, y \in f(Q)$, $x = f(a)$, $y = f(b)$ c/ $a, b \in Q$

$x \wedge y = f(a) \wedge f(b) = f(a \wedge b) \in f(Q)$

Se $x \vee y \in f(Q)$, $x = f(a)$, $y = f(b)$ c/ $a, b \in G$ então $x \vee y = f(a \vee b)$ e $f(a \vee b) \in f(Q)$; $hf(a \vee b) \in hf(Q) = f_i(Q)$, mas $hf(a \vee b) = f_i(a \vee b) = f_i(a) \vee f_i(b)$ e $f_i(Q)$ filtro primo de G/p_i logo $f_i(a) \in f_i(Q)$ ou $f_i(b) \in f_i(Q)$ e então ou $a \in Q$ ou $b \in Q$, pois por b) $f_i^{-1}(f_i(Q)) = Q$ e $f(Q)$ é filtro primo de G/p.

Mas então pela construção de N' $f^{-1}(f(Q)) \in N'$ e $f^{-1}(f(Q))$ = e $Q \in N'$, logo $N'_i \subset N'$.

Verifiquemos que $f^{-1}(f(Q)) = Q$; $Q \subseteq f^{-1}(f(Q))$, verifiquemos a outra inclusão:-

Se $x \in f^{-1}(f(Q)) \Longrightarrow f(x) \in f(Q) \Longrightarrow$ existe $t \in Q$, tal que $f(x) = f(t)$ e $hf(x) = hf(t)$ ou $f_i(x) = f_i(t)$ e como $t \in Q \Longrightarrow x \in$ e $f^{-1}(f(Q)) \subseteq Q$, logo $Q = f^{-1}(f(Q))$.

Como consequência de 5) temos:-

7) Se $(p_i)_{i \in I}$ família de congruências sôbre G, grupo reticulado, onde p_i associada e N'_i, e N'_i família de filtros prim da maneira habitual, então se $N' = \bigcup_{i \in I} Ni$, N' está nas condições do teorema 7 e está associada $\bigcap_{i \in I} p_i$, onde $\bigcap_{i \in I} p_i$ é compreendido da maneira óbvia, isto é, $x \sim y \pmod{\bigcap_{i \in I} p_i}$ see $x \sim y \pmod{p_i}$ para todo $i \in I$.

<u>Demonstração</u>:- N' está nas condições do teorema 7, pois se $P \in N' \Longrightarrow P \in N'_j$ para algum $j \in I$ e então φP, bem como aP,

para todo $a \in G$, pertencem a N''_j e portanto pertencem a união N'.

Verifiquemos que p congruência associada a N' coincide com $\bigcap_{i \in I} p_i$; como $N'_i \subset N'$ para todo $i \in I$ temos por 5), $p \subset p_i$ para todo i e portanto $p \subset \bigcap_{i \in I} p_i$.

Se $x \sim e \pmod{\bigcap_{i \in I} p_i} \Longrightarrow x \sim e \pmod{p_i}$ qq $i \in I \Longrightarrow xP = P$ qq $P \in N_i$ para todo $i \in I$ ou $xP = P$ qq $P \in \bigcup_{i \in I} N'_i$ e então $x \sim e$ (mod p) e portanto $\bigcap_{i \in I} p_i \subset p$; isto é, $p = \bigcap_{i \in I} p_i$.

Vejamos como um filtro primo gera uma congruência de grupo reticulado; seja $P \subset G$ filtro primo, então se $N'(P)$ é o conjunto de todos os transladados de P e φP a direita e a esquerda, $N'(P)$ é uma família nas condições do teorema 7 e portanto está associada a uma congruência.

Realmente se $aPb \in N'(P)$, $\varphi(a\,P\,b) = \varphi((aP)b) = b^{-1}(\varphi(aP)) = b^{-1}(\varphi P)a^{-1}$ pela propriedade 2 dos filtros primos e portanto, $N'(P)$ é invariante por φ, e $N'(P)$ é invariante por translações por construção e $x(aPb)y = (xa)\,P(by)$.

Acabamos de estabelecer:-

8) Todo filtro primo de um grupo reticulado gera uma família $N'(P)$ da maneira indicada que está nas condições do teorema 7.

9) Se $P \subset G$ filtro primo então $f(N'(P)) = \left\{ f(P'),\ P' \in N'(P) \right.$ onde $\left. f: G \longrightarrow G/N'(P) \right\} = N'_1(f(P))$.

$f(N''(P)) = N'_1(f(P))$, seja $Q = f(P')$, se $P' = aPb \Longrightarrow Q =$

$f(aPb) = f(a)\ f(P)\ f(b) \Longrightarrow Q \in N''_1(f(P))$; se $P' = a(\varphi P)b \Longrightarrow$

$Q = f(a)\ f(\varphi P)\ f(b) = f(a)\ (\varphi f(P))\ f(b)$ e $Q \in N'_1(f(P))$.

Seja $Q \in N'_1(f(P))$, se $Q = af(P)b$ e se $f(x) = a$, $f(y) = b$, $x, y \in G$, $Q = f(x)\ f(P)\ f(y) = f(xPy)$ e $Q = f(P') \in f(N''(P))$.

Se $Q = a\varphi f(P)b \Longrightarrow Q = f(x)\varphi f(P)\ f(y) = f(x)\ f(\varphi P)\ f(y) =$ $f(x\varphi P\ y) \Longrightarrow Q = f(P') \in f(N'(P)) = N'_1(f(P))$.

Vale também a recíproca.

10) Se p congruência sôbre G e $f: G \longrightarrow G/p$, então

$$f^{-1}(N'_1(P)) = \left\{ f^{-1}(P'),\ P' \in N'_1(P) \right\} = N'(f^{-1}(P))$$

Sabemos por 2) que $f^{-1}(\varphi P) = \varphi f^{-1}(P)$ e então se $Q = f^{-1}(P')$, e $P' = aPb$ temos $Q = f^{-1}(aPb) = f^{-1}(f(x)P\ f(y))$, onde $f(x) = a$ e $f(y) = b$ e como observamos na demonstração do teorema 6

$Q = x\ f^{-1}(P)\ y \in N'(f^{-1}(P))$.

Se $P' = a\varphi Pb = f(x)\varphi Pf(y)$, $Q = xf^{-1}(\varphi P)y =$ $x\ \varphi f^{-1}(P)y \in N'(f^{-1}(P))$.

Seja $Q \in N'(f^{-1}(P))$, se $Q = af^{-1}(P)b$ então é de fácil verificação que $Q = f^{-1}(f(a)Pf(b)) = f^{-1}(P') \in f^{-1}(N'_1(P))$.

Se $Q = a\varphi f^{-1}(P)b$, $Q = af^{-1}(\varphi P)b = f^{-1}(f(a)\varphi P\ \ f(b)) =$ $f^{-1}(P') \in f^{-1}(N'_1(P))$.

E temos aí as propriedades gerais das congruências, vamos usá-las a seguir no estudo de estruturas sub-diretamente irredutíveis.

Definição 2:- Um grupo reticulado G é chamado sub-diretamente irredutível see não existe família $(p_i)_{i \in I}$ de congruências, tais que $p_i \neq \Delta$ para todo i e $\bigcap_{i \in I} p_i = \Delta$.

Definição 3:- Uma congruência p é chamada inf-irredutível se não existe família $(p_i)_{i \in I}$ de congruências tais que $p = \bigcap_{i \in I} p_i$.

Esses dois conceitos, ligam-se segundo o teorema seguinte:-

Teorema10:- Uma congruência p sôbre G é inf-irredutível se e sòmente se G/p é sub-diretamente irreducible.

Vejamos como caracterizar os conceitos acima em têrmos de famílias de filtros primos N'.

Teorema 11:- H grupo reticulado, H é sub-diretamente irredutível se e sòmente se para tôda família N' associada a Δ, existe $P \in N'$ tal que N'(P) também associada a Δ.

Se H é sub-diretamente irredutível, então se $(p_i)_{i \in I}$ família de tôdas as congruências, tais que $p_i \neq \Delta$ para todo i, então $\bigcap_{i \in I} p_i \neq \Delta$.

Para cada i seja $N'_i = \left\{ f_i^{-1}(P),\ P \subset H/p_i \text{ filtro primo e } f_i : H \to H/p_i \text{ R-homomorfismo canônico} \right\}$, então $\bigcap_{i \in I} p_i \neq \Delta \Longrightarrow \bigcup_{i \in I} N'_i \neq N$ = conjunto de todos os filtros primos de H, isto é, existe $P \subset H$ filtro primo tal que $P \notin \bigcup_{i \in I} N'_i$, mas então N'(P) está associada a congruência idêntidade.

Seja agora N' família de filtros primos associada a identidade, se existe $P \in N'$ e $P \notin \bigcup_{i \in I} N'_i$ então $N'(P)$ associada a identidade e o teorema estaria demonstrado, se qq $P \in N'$, $P \in \bigcup_{i \in I} N'_i$, então $N' \subset \bigcup_{i \in I} N'_i$ mas então pela propriedade 5, $\bigcap_{i \in I} p_i \subset \Delta$, mas então $\bigcap_{i \in I} p_i = \Delta$, pois $\Delta \subset \bigcap_{i \in I} p_i$ uma vez que Δ contida em qualquer congruência.

Assim sendo temos, uma contradição em supor que não existe $P \in N'$ e $P \notin \bigcup_{i \in I} N'_i$ e $N'(P)$ associada a Δ.

Reciprocamente se $(p_i)_{i \in I}$ família de congruências e N'_i como anteriormente se $p_i \neq \Delta$ para todo i, então se $p = \bigcap_{i \in I} p_i$ pela propriedade 7, p associada a $\bigcup_{i \in I} N'_i$, e se $p = \Delta$ por hipotese existe $P \in \bigcup_{i \in I} N'_i$, tal que $N'(P)$ associada a Δ, mas como $P \in N'_j$ para algum j teríamos $N'(P) \subset N'_j$ e $p_j \subset \Delta$ e então $p_j = \Delta$ contra a hipotese, logo $\bigcap_{i \in I} p_i \neq \Delta$ e H é sub-diretamente irredutível.

Como consequência deste, do teorema10 e de propriedades anteriores, temos o

<u>Teorema 12</u>:- p uma congruência sôbre G é inf-irredutível se e sòmente se qualquer que seja N' família de filtrosprimos associada a p existe $P \in N'$ tal que $N'(P)$ também associada a p.

Pelo teorema10, basta verificar que p nessas condições, se e sòmente se G/p nas condições do teorema 11.

BIBLIOGRAFIA

(1) BIRKHOFF, G. Lattice-Ordered Grucups; Ann. of Math., vol. 43 (19[illegible]) pp. 298-331

(2) BIRKHOFF, G. Lattice-theorie, 3^e édition, New York (1967).

(3) BOURBAKI, N. Algèbre, ch I. Paris, (1958) (nouvelle édition).

(4) BOURBAKI, N. Algèbre ch. VI. Paris, (1952).

(5) COHN, P.M. Universal Algebra, A Harper International Student Reprint (1965)

(6) DUBREIL, P. Algêbre, 2^e édition, Paris (1954).

(7) FUCHS, L. Partially Ordered Algebraic Sistems, London (1962).

(8) JAFFARD, P. Les Systèmes d'Ideaux, Paris (1960).

(9) MALCEV, A.I. On the immersion of an algebraic ring into a field, Math. Ann. 113 (1937) pp. 686-691.

(10) MONTEIRO, A.A. Filtros e Ideais, I, II. Notas de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, 1947, 1948.

(11) MONTEIRO, A.A. Matrices de morgan caractèristiques pour le calcul proposicionnel classique. Anais da Academia Brasileira de Ciências, vol. 33, nº 1 (1960).

(12) RIBENBOIM, P. Théorie Des Groupes Ordennés, Bahia Blanca, (1959).