SOBRE A TEORIA DOS ESPAÇOS INFRA-SILVA

Edgar Vera Saravia

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Chaim Samuel Hönig

São Paulo, abril de 1974.

Trabalho elaborado sob o patrocínio da Organização dos Estados Americanos pelo seu Programa Multinacional de Matemática

I N D I C E

E R R A T A

Pag.	linha	diz	deve dizer
4	1	$\alpha b + y_0 \in B$	$\alpha b + y_0 \in \mu B$
4	16	também aberta	um morfismo estrit
11	-7	$(\tilde{x}_n)$ $\tilde{E}$	$(\tilde{x}_n) \in \tilde{E}$
11	-6	(y_m) E	$(y_m) \in E$
11	-2	ob. 1	Ob.
11	-1	Prop. 3	Def. 3
13	20	aplicação	injeção
14	4	$i_m \circ u_{nm} = i_n$	$i_n \circ u_{nm} = i_m$
17	17	$V_n \subset u_{np}^{-1}(V_p)$	$V_n \subset u_{pn}^{-1}(V_p)$
23	13	$N_p \leq k \leq N_{p+1}$	$N_p \leq k < N_{p+1}$
31	-14	1.2.1	2.1
33	3	topologico.	topologico e regul
34	3	básico em	básico B_n em
36	11	na norma de	fracamente em
39	-7	$k > 0$	$k > n$
48	7	corolário e ^{2}	corolário e
48	-9	1.4.3	1.4.3 e (39)
48	-8	t.q. o e.l.c. E é in-	
48	-7	fra-tonelado	
50	-8	(45)	
51	2	0.3.5	0.2.5
52	1	(56)	(58)
53	-9	c-2.2.3-(b)	c-2.1.1-(b)

P R E F Á C I O

O presente trabalho, sugerido e orientado pelo Prof. H. Hogbe-Nlend, apresenta no segundo capítulo alguns resultados sobre a teoria dos espaços infra-Silva bornológicos, (Def. 2.1.1) fazendo um desenvolvimento paralelo aos principais resultados da referencia [6] que trata amplamente dos espaços infra-Silva localmente convexos (Def. 2.2.1), os quais estudamos, em seus aspectos principais, como um caso particular dos espaços infra-Silva bornológicos.

O terceiro capítulo está dedicado a um estudo bastante breve dos duais dos espaços acima.

No primeiro capítulo fazemos uma pequena introdução aos espaços bornológicos convexos (Def. 1.1.2) e damos alguns resultados que serão necessários mais adiante.

No apêndice I falamos qualquer coisa a respeito dos espaços de Silva, que surgem ao trocar ω-compacto por compacto na Def.2.1.1 Devido aos nossos rudimentares conhecimentos sobre bornologia não tentamos analisar as vantagens dos espaços de Silva sobre os infra-Silva no caso bornológico, além das apresentadas pelos seus subespaços localmente convexos subjacentes. O mesmo devemos dizer com respeito aos espaços FS (Fréchet-Schwartz) bornológicos que são a versão compacta dos espaços FS* (Def. 3.2.1). Resultados adicionais sobre os espaços FS localmente convexos são encontradas no §15 do Cap. III de [5] ou também em [2].

Uma aplicação do feito aquí, no caso localmente convexo pode ser encontrada no livro "Problèmes aux limites non homogènes et applications" - Vol. 3 de J.L. Lions & E. Magenes (Dunod - 1970) A parte bornológica deste trabalho servirá para fazer, no contexto bornológico, um desenvolvimento paralelo dos fatos expostos no livro antes mencionado.

Devemos dizer que a parte correspondente aos limites projetivos e injetivos foi feita visando nossos intereses. Um enfoque mais geral do tema pode ser encontrado no libro "Theory of categories" de Barry Mitchell (Academic Press - 1965).

Ao redigir este trabalho o fizemos de tal forma que a única referência usada para sua leitura seja a [5]. Contudo, para obter - aütosuficiência, os resultados de [5] usados aqui são incluidos no apêndicê II. Pelo mesmo motivo foi introduzido o capítulo zero, que contem resultados sobre os espaços localmente convexos, os quais não se encontram explícitamente em [5].

Desejo expresar meus mais sinceros agradecimentos a todas aque-- las pessoas que, de uma forma ou outra, colaboraram para a execução do presente trabalho.

E.V.S.

Universidade de São Paulo

Ábril, 1974

NOTAÇÕES E TERMINOLOGIA

$^\circ$: indicará a polaridade respeito à dualidade entre um e.l.c. X e seu dual X' (exeto na Prop. 0.1.5)

$^\bullet$: indicará a polaridade respeito à dualidade entre o dual X' e o bidual X'' de um e.l.c. X.

$\prod$: indicará produto cartesiano

$\coprod$: indicará soma direta cartesiana

$E^{\times}$: dual bornológico de e.b.c. E munido da bornologia natural

E^{β} : dual forte do e.l.c. E

$\mathbb{N}$: conjunto dos números naturais

$\mathbb{K}$: corpo dos reais $\mathbb{R}$ ou dos complexos $\mathbb{C}$

$\forall$: para todo

$\Gamma_d A$: envoltoria discada do conjunto A, i.e., o menor conjunto discado que o contém

sss : se, e sòmente se

t.q. : tal que

$\mathcal{B}(X)$: coleção dos conjuntos limitados de um e.l.c. ou e.b.c. X

e.b.c. : espaço bornológico convexo ou seu plural

e.l.c. : espaço localmente convexo ou seu plural

e.v.t. : espaço vetorial topológico ou seu plural

discado : balanceado e convexo = absolutamente convexo = equilibrado ê convexo

Dado um e.l.c. X a topologia fraca sobre ele será a topologia $\sigma(X,X')$ uma propriedade respeito à topologia fraca será precedida da letra ω.

Se X e Y são dois e.l.c. e u uma aplicação linear contínua de X em Y, então ${}^t u$ indicará a <u>transposta</u> de u restrita a Y' com valores em X', vale uma consideração análoga para a <u>bitransposta</u> ${}^{tt}u$ de u.

Dizemos que u é um <u>morfismo estrito</u> se u leva abertos de X em abertos de $u(Y)$.

Neste capítulo daremos alguns resultados bem conhecidos acerca dos e.l.c. que usaremos no subsequente desenvolvimento. Salvo menção em contrario, todos os e.l.c. considerados são de Hausdorff. Um isomorfismo indicará um isomorfismo de e.l.c.. Os números entre parêntesis são rèferencias ao Apêndice II.

§ 1 - GENERALIDADES

Seja X um e.l.c. e A um subconjunto discado não vazio de X. Lembramos que X_A denota o subespaço vetorial de X gerado por A, munido da seminorma q_A (o funcional de Minkowski de A com respeito a X_A) (vide (9)). Além disso se V é um subconjunto discado e absorvente de X e $N = \operatorname{Ker} q_V$, onde q_V é uma seminorma sobre X, então é imediato que podemos definir uma norma $\mathring{q}_V$ sobre o espaço quociente X_{q_V}/N, pondo $\mathring{q}_V(\mathring{x}) = q_V(x)$, onde x é qualquer representante da clase de equivalencia $\mathring{x} \in X/N$. Denótase por X_V o espaço normado obtido asim.

PROPOSIÇÃO 1. Sejam, E um e.l.c. e V uma vizinhança discada do zero em E [B um subconjunto limitado e discado de E, resp.]. Então existe um isomorfismo de espaços normados entre $(E_V)'$ e $(E')_{V^\circ}$ [$(\widehat{E'})_{B^\circ}$ e um subespaço fechado de $(E_B)'$, resp.]. Além disso se $U \supset V$ [$A \subset B$, resp.] é outra vizinhança discada do zero [subconjunto limitado e discado, resp.] em E, e $u : E_V \longrightarrow E_U$, $v : (E')_{U^\circ} \hookrightarrow (E')_{V^\circ}$ [$u : E_A \hookrightarrow E_B$, $v : (\widehat{E'})_{B^\circ} \longrightarrow (\widehat{E'})_{A^\circ}$, resp.] são as aplicações canônicas, então temos comutativos:

$$
\begin{tikzcd}
 & E_U \\
E \arrow[ur, "f_U"] \arrow[dr, "f_V"'] & \\
 & E_V \arrow[uu, "u"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(E_U)' \arrow[r, "{}^t f_U"] \arrow[d, "{}^t u"] & (E')_{U^\circ} \arrow[d, "v"] \\
(E_V)' \arrow[r, "{}^t f_V"] & (E')_{V^\circ}
\end{tikzcd}
\qquad
\left[
\begin{tikzcd}
(\widehat{E'})_{A^\circ} \arrow[r, "\hat{f}_A"] & (E_A)' \\
(\widehat{E'})_{B^\circ} \arrow[u, "v"] \arrow[r, "\hat{f}_B"] & (E_B)' \arrow[u, "{}^t u"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
E_A \arrow[dr, "i_A"] \arrow[dd, "u"'] & \\
 & E \\
E_B \arrow[ur, "i_B"'] &
\end{tikzcd}
\ \text{resp.}\right]
$$

DEMONSTRAÇÃO. Consideremos a aplicação linear contínua f_V de E sobre E_V, composta da identidade de E em E_{q_V} vezes a projeção ao quociente p_V de E_{q_V} sobre E_V. Por (49) temos que existe sua transposta ${}^t f_V$ de $(E_V)'$ em E'.

Veremos em princípio que $(E')_{V^\circ}$ é a imagem de ${}^t f_V$

Seja $z' \in (E_V)'$, como para todo x em V $p_V(x)$ pertence à bola unitaria de E_V resulta:

$$\forall\, x \in V \quad |\langle x, {}^t f_V(z')\rangle| = |\langle p_V(x), z'\rangle| \leq \|z'\|$$

Portanto ${}^t f_V((E_V)') \subset (E')_{V^\circ}$ (*)

Por outro lado se $x' \in V^\circ$ temos $|\langle x,x'\rangle| \leq 1$ $\forall\, x \in V$ e como também temos $x \in \operatorname{Ker} q_V$ sss $\forall\, \varepsilon > 0$ $x/\varepsilon \in V$ segue-se fácilmente que $\langle x,x'\rangle = 0$ $\forall\, x \in \operatorname{Ker} q_V$

Do anterior é imediato que podemos definir $z' \in (E_V)^*$ por $\langle p_V(x), z'\rangle = \langle x,x'\rangle$ $\forall\, x \in E$; i.e., temos $z' \circ p_V = x'$, disto e como a norma $\mathring{q}_V$ de E_V satisfaz $\mathring{q}_V \circ p_V = q_V$ segue fácilmente que $z' \in (E_V)'$.

A inclusão contrária de (*) segue de ${}^t f_V(z') = z' \circ p_V = x'$ e da definição de $(E')_{V^\circ}$.

Finalmente, como $V + \operatorname{Ker} q_V$ contem a bola unitaria aberta de E_V e $\mathring{q}_V \circ p_V = q_V$, temos para $z' \in (E_V)'$:

$$\|z'\| = \inf \{ r > 0 \;/\; |\langle z', p_V(x)\rangle| \leq r \quad \forall\, x \in V \} = \|z' \circ p_V\| = \|{}^t f(z')\| .$$

A comutatividade dos diagramas é como segue:

$f_U = u \circ f_V'$ é trivial, e a comutatividade do segundo segue de:

$$v({}^t f_U(z')) = z' \circ f_U = z' \circ u \circ f_V = {}^t f_V({}^t u(z')) \quad \forall\, z' \in (E_V)' .$$

Para a afirmação entre colchetes a demonstração é como segue:

Seja i_B a inclusão canônica de E_B em E que é contínua e consideremos sua transposta ${}^t i_B$ de E' em $(E_B)'$.

É imediato que $\operatorname{Ker} {}^t i_B = \operatorname{Ker} q_{B^\circ}$, de fato, isto segue de:

$$x' \in \operatorname{Ker} {}^t i_B \text{ sss } x' \circ i_B = 0 \text{ sss } \forall\, x \in B \ \langle x,x'\rangle = 0 \text{ sss } \forall\, \varepsilon > 0 \ x' \in \varepsilon B^\circ$$
$$\text{sss } q_{B^\circ}(x') = 0 \text{ sss } x' \in \operatorname{Ker} q_{B^\circ}$$

Temos então uma injeção linear f_B de $(E')_{B^\circ}$ em $(E_B)'$ satisfazendo $f_B \circ p_{B^\circ} = {}^t i_B$ onde consideramos ${}^t i_B$ de $E'_{q_{B^\circ}}$ em $(E_B)'$.

Se mostrarmos que f_B é uma isometría do primeiro espaço no segundo, teremos que sua extensão $\mathring{f}_B$ ao completamento $\widehat{(E')}_{B^\circ}$ de $(E')_{B^\circ}$ é ainda uma isometría de $\widehat{(E')}_{B^\circ}$ em $(E_B)'$ e portanto um morfismo estrito injetivo entre eles. Nossa afirmação seguirá então de (59).

Agora, se $x' \in E'$ temos:

$$\mathring{q}_{B^\circ}(p_{B^\circ}(x')) = q_{B^\circ}(x') = \inf \{ r > 0 \;/\; x' \in rB^\circ \} =$$

$$= \inf\left\{r > 0 \;/\; |\langle x, x'\rangle| \leq r \quad \forall\, x \in B\right\} = \|f_B(p_{B^\circ}(x'))\|$$

pois B contem a bola unitaria aberta de E_B e além disso também temos $f_B(p_{B^\circ}(x')) = x' \circ i_B$.

OBSERVAÇÃO. Como $(E_V)'$ é um espaço de Banach, pois é o dual de um espaço normado, temos: Se E é um e.l.c. e V uma vizinhança do zero então $(E')_{V^\circ}$ é um espaço de Banach. Esto pode ser provado diretamente usando (31)(vide (26) e (30))e a Prop. 7 adiante.

PROPOSIÇÃO 2. Sejam, X um e.l.c., Y um subespaço fechado de X e B um subconjunto limitado e discado de X. Ponhamos $C = B \cap Y$ e denotemos por φ a projeção canônica de X sobre o espaço localmente convexo quociente X/Y. Então:

(a) $Y_C = Y \cap X_B$

(b) $(X/Y)_{\varphi(B)}$ é isomorfo como espaço normado a X_B/Y_C.

DEMONSTRAÇÃO. (a) $Y_C \subset Y \cap X_B$ é imediato.

Para a outra inclusão, seja $\lambda b \in Y$ com $b \in B$ e $\lambda > 0$.
Como $b \in Y$ segue que $b \in C$, logo $\lambda b \in Y_C$

(b) Consideremos a seguinte sobrejeção:

$\alpha b + Y \in (X/Y)_{\varphi(B)} \longmapsto \alpha b + Y_C \in X_B/Y_V$, onde $b \in B$ e $\alpha \in \mathbb{K}$

Bastará demonstrar que: $\|\alpha b + Y\| = \|\alpha b + Y_C\|$ (*)

De fato, como

$\|\alpha b + Y\| = \inf\{\lambda > 0 \;/\; \alpha b + Y \in \lambda B + Y\}$ (i)

e

$\|\alpha b + Y_C\| = \inf\limits_{y \in Y_C} \|\alpha b + y\|_{X_B} = \inf\limits_{y \in Y_C}\left\{\inf\{\mu > 0 \;/\; \alpha b + y \in \mu B\}\right\}$ (ii)

dado $\varepsilon > 0$, temos:

1º) De (i) $\exists\, \lambda > 0$ t.q.

$\lambda \leq \|\alpha b + Y\| + \varepsilon$ e $\alpha b + Y \in \lambda B + Y$ (i')

logo existe $b_0 \in B$ e $y_0 \in Y$ t.q. $\alpha b = \lambda b_0 + y_0$, de onde $\|\alpha b - y_0\|_{X_B} \leq \lambda$. Agora como $\alpha b - \lambda b_0 \in X_B$ resulta que $y_0 \in Y_C$, então usando (ii) segue que $\|\alpha b + Y_C\| \leq \|\alpha b - y_0\|_{X_B}$. Finalmente usando a primeira parte de (i') temos que $\|\alpha b + Y_C\| \leq \|\alpha b + Y\| + \varepsilon$.

2º) Da primeira igualdade (ii) temos que:

$$\exists\, y_0' \in Y_C \text{ t.q. } \|\alpha b + y_0'\|_{X_B} < \|\alpha b + Y_C\| + \varepsilon$$

de onde, usando a segunda igualdade de (ii), resulta que

$\exists\ \mu > 0$ t.q. $\mu \leq \|\alpha b + Y_C\| + \varepsilon$ e $\alpha b + y_o \in B$

logo $\alpha b + Y \in \mu B + Y$, consequentemente $\|\alpha b + Y\| \leq \|\alpha b + Y_C\| + \varepsilon$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrario, segue a igualdade (*). ∎

PROPOSIÇÃO 3. Sejam, X um e.l.c. e Y um subespaço de X'^* , consideremos que $\sigma(X',Y)$ é de Hausdorff. Então $\sigma(X'^*,X')$ induz sobre Y a topologia $\sigma(Y,X')$. Além disso $X'^*_{\sigma(X'^*,X')}$ é o completamento de $Y_{\sigma(Y,X')}$.

DEMONSTRAÇÃO. Observemos primeiro que $\sigma(X',Y)$ de Hausdorff implica que o par que formam X' e Y separa pontos de X' , (vide (23)) Agora de (24), a aplicação identidade $1_{X'}$ de $X'_{\sigma(X',X'^*)}$ sobre - $X'_{\sigma(X',Y)}$ é contínua. Então como o par que formam X e X' separa pontos de X , pois X é de Hausdorff (vide [5], pg 185), e como - obviamente a transposta de $1_{X'}$ é igual à inclusão i de Y em X'^*, usando (50), temos que i de $Y_{\sigma(Y,X')}$ em $X'^*_{\sigma(X'^*,X')}$ é contínua e além disso ${}^t({}^t(1_{X'})) = 1_{X'}$. Logo, de (53), com $F_1 = Y$, - $F_2 = X'^*$, $G_1 = G_2 = X'$ e $u = i$ resulta que i é também aberta para $\sigma(Y,X')$ e $\sigma(X'^*,X')$.

A última afirmação é uma consequencia imediata da observação acima e de (25) com $F = Y$ e $G = X'$. ∎

Se na proposição acima pomos primeiro X, e logo X" no lugar de Y resulta o seguinte:

COROLARIO. Se X é um e.l.c., então a topologia $\sigma(X'',X')$ sobre X" induz sobre X a topologia $\sigma(X,X')$. i.e.; a inclusão de $X_{\sigma(X,X')}$ em $X''_{\sigma(X'',X')}$ é um morf. estrito. Além disso $\overline{X}^{\sigma(X'',X')} = X''_{\sigma(X'',X')}$

PROPOSIÇÃO 4. Sejam X e Y dois e.l.c., u uma aplicação linear - contínua de X em Y, $\mathfrak{S}$ uma cobertura de subconjuntos limitados de X, Z o subespaço vetorial de X" gerado pelos $\sigma(X'',X')$-fechos dos conjuntos $A \in \mathfrak{S}$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

(a) u aplica os elementos de $\mathfrak{S}$ em partes w-relativamente compactas de Y.

(b) ${}^{tt}u(Z) \subset Y$

Isto implica

(c) ${}^t u$ aplica as partes equicontinuas de Y' em partes $\sigma(X',Z)$ -relativamente compactas de X' .

Se Y é completo, (c) implica (a) e (b).

DEMONSTRAÇÃO. Observemos primeiro, usando (52), que ${}^t u$ de $Y'_{\beta(Y',Y)}$ em $X'_{\beta(X',X)}$ é contínua.

Novamente por (52) com $E = Y'$, $F = X'$, $\tau_E = \beta(Y',Y)$ e $\tau_F = \beta(X',X)$ temos que ${}^{tt}u$ de $X''_{\sigma(X'',X')}$ em $Y''_{\sigma(Y'',Y')}$ é contínua.

Provaremos agora que (a) implica (b):

Como óbviamente ${}^{tt}u$ restrita a X é u, temos para $A \in \mathfrak{S}$:

$$ {}^{tt}u(\overline{A}^{\sigma(X'',X')}) \subset \overline{{}^{tt}u(A)}^{\sigma(Y'',Y')} = \overline{u(A)}^{\sigma(Y'',Y')} $$

$$ \subset \overline{\overline{u(A)}^{\sigma(Y,Y')}}^{\sigma(Y'',Y')} = \overline{u(A)}^{\sigma(Y,Y')} \subset Y $$

porque da (a)-hipótese, $\overline{u(A)}^{\sigma(Y,Y')}$ é w-compacto em Y e então é também $\sigma(Y'',Y')$-compacto pelo corolário acima, consequentemente $\overline{u(A)}^{\sigma(Y,Y')}$ é $\sigma(Y'',Y')$-fechado. Logo da def. de Z, ${}^{tt}u(Z) \subset Y$.

Vejamos agora que (b) implica (a):

Como $A \in \mathfrak{S}$ é limitado em X, A° é uma $\beta(X',X)$-vizinhança do zero em X'. Logo de (26) e (30) ${}^\circ(A^\circ)$ é um subconjunto equicontínuo, discado e $\sigma(X'',X')$-fechado de X''.

Porém, como $X \subset X''$ canônicamente, então ${}^\circ(A^\circ)$ é o $\sigma(X'',X')$-fecho de A, (vide (27)), logo ${}^\circ(A^\circ) \subset Z$, e como ${}^\circ(A^\circ)$ é $\sigma(X'',X')$-compacto, (usar (31) com $E = X'_{\beta(X',X)}$), resulta que ${}^{tt}u({}^\circ(A^\circ))$ é $\sigma(Y'',Y')$-compacto em Y'' e portanto w-compacto em Y (usar (b) e o corolário acima). Daí, como $A \subset {}^\circ(A^\circ)$ e ${}^{tt}u(A) = u(A)$, temos que $u(A)$ é w-relativamente compacto em Y.

Prova de (b) implica (c):

Usando (49) (com $F_1 = Y'$, $G_1 = Y$, $F_2 = X'$ e $G_2 = Z$) e a (b)-hipótese temos que ${}^t u$ de $Y'_{\sigma(Y',Y)}$ em $X'_{\sigma(X',Z)}$ é contínua. Daí, se H é uma parte equicontínua de Y', usando (31), concluimos que ${}^t u(H)$ é $\sigma(X',Z)$-relativamente compacto em X'.

Suporemos agora que Y é completo e mostraremos que (c) implica (b):

Consideremos $z \in Z$ arbitrário.

Seja H uma parte equicontínua de Y'. Como, pela (c)-hipótese, ${}^t u(H)$ é $\sigma(X',Z)$-relativamente compacto e, de (24), $\sigma(X',Z)$ é mais fina que $\sigma(X',X)$, usando (46), temos que $\sigma(X',X) = \sigma(X',Z)$ sobre ${}^t u(H)$. Agora, como por (52) ${}^t u$ de $Y'_{\sigma(Y',Y)}$ em $X'_{\sigma(X',X)}$ é contí nua, resulte, da igualdade acima, que ${}^t u$ restrita a todo subconjunto equicontínuo de Y' é contínua para as topologias $\sigma(Y',Y)$ e $\sigma(X',Z)$. Logo

$$ {}^{tt}u(z)\Big|_H = z \circ {}^t u\Big|_H : H_{\sigma(Y',Y)} \xrightarrow{{}^t u} {}^t u(H)_{\sigma(X',Z)} \xrightarrow{z} \mathbb{C} $$

é contínua; i.e., ${}^{tt}u(z)$ é uma forma linear sobre Y' t.q. restrita a toda parte equicontinua H de Y' é w-contínua; logo, de (48), ${}^{tt}u(z) \in \hat{F} = F$ e consequentemente ${}^{tt}(Z) \subset F$. ∎

COROLARIO 1. Com as notações da proposição acima e se consideramos $\mathfrak{S} = \mathcal{B}(X)$ temos em particular que as seguintes afirmações são equivalentes:

(a) u leva os conjuntos limitados de X em conjuntos w-relativamente compactos de Y

(b) ${}^{tt}u(X'') \subset Y$

Isto implica

(c) ${}^t u$ leva as partes equicontínuas de Y' em partes w-relativamente compactas de X'.

Se Y é completo, (c) implica (a) e (b).

DEFINIÇÃO 1. Sejam X e Y dois e.l.c. Uma aplicação linear f de X em Y é dita fracamente compacta ou w-compacta se existe uma vizinhança do zero U em X t.q. $f(U)$ é w-relativamente compacto em Y.

Como todo subconjunto w-compacto é limitado, (vide (61) e (34)) temos que uma função w-compacta é sempre contínua. - De fato com as notações da Def. acima, se V é uma vizinhança do zero em Y, como $f(U)$ é limitado em Y, existe $\lambda > 0$ t.q. $f(\lambda U) = \lambda f(U) \subset V$.

O mesmo argumento serve para provar que se B é um subconjunto limitado de X então $f(B)$ é w-relativamente compacto em Y.

COROLARIO 2. Sejam X e Y dois espaços de Banach e u de X em Y uma aplicação linear contínua, então as seguintes afirmações são equivalentes:

(a) u é w-compacta

(b) ${}^{tt}u(X'') \subset Y$

(c) ${}^t u$ é w-compacta

DEMOSTRAÇÃO. Segue do corolario 1. Observemos que, nas condições do corolario 2, o enunciado de (c) no corolário 1 é equivalente ao enunciado de (c) acima. De fato, de (31) temos que a bo la unitária fechada de Y' é w-compacta. Logo, por (36), é também uma parte equicontínua de Y', pois Y é em particular tonelado.∎

PROPOSIÇÃO 5. Seja $((F_i, G_i))_{i\in I}$ uma família de pares de espaços vetoriais formando sistemas duais. Consideremos os espaços veto riais $F = \prod_{i\in I} F_i$ e $G = \coprod_{i\in I} G_i$ formando um par dual no sentido de (54). Então a topologia $\beta(G,F)$ sobre G, é a topologia soma dire ta localmente convexa das topologias $\beta(G_i, F_i)$.

DEMONSTRAÇÃO. Para cada $i\in I$, seja B_i um subconjunto $\sigma(F_i,G_i)$-limitado de F_i. Então de (54-c) e (12-b), $B = \prod_{i\in I} B_i$ é um subconjunto $\sigma(F,G)$-limitado de F, (observar que todo subconjunto limitado de F está contido num subconjunto desta forma).
Bastará demonstrar que $B^\circ = V$, com $V = \Gamma_d\left[\bigcup u_i(B_i^\circ)\right]$ e onde u_i é a inclusão canônica de G_i em G. De fato, B° é uma $\beta(G,F)$-vizinhança básica do zero em G e V é uma vizinhança básica do zero em G para a topologia soma direta em consideração (vide (20)). Agora bem; $V\subset B^\circ$ é imediato pois B° é discado e, usando (bi) de (54), temos $u_i(B_i^\circ)\subset B^\circ$ para todo i em I. Por outro lado, seja $g = (g_i)\in B^\circ$ com n componentes $g_{i_1},\dots,g_{i_n}$ diferentes de zero e para cada $1\le k\le n$ consideremos os elementos da forma $(b_i\delta_{ii_k})\in B$ com b_i percorrendo B_i, então usando (bi) de (54) temos $\forall\ 1\le k\le n$ $|\langle b_{i_k}, g_{i_k}\rangle|\le 1$, pois $g\in B^\circ$. Logo $\forall\ 1\le k\le n$ $g_{i_k}\in B_{i_k}^\circ$. Consequentemente, da definição de V, $(1/n)g = \sum_{1\le k\le n}(1/n)u_{i_k}(g_{i_k})\in V$. Daí concluímos finalmente que $g = n((1/n)g)\in V$, pois V é discado.∎

PROPOSIÇÃO 6. Sejam: X um e.l.c., M um subespaço de X, V uma vizinhança discada do zero em X e φ a projeção ao quociente de X sobre X/M. Então $(X/M)_{q_{\varphi(V)}}$ e X_{q_V}/M são idênticos como espaços seminormados.

DEMONSTRAÇÃO. Observemos primeiro que os espaços em consideração são iguais como conjuntos. Agora como para um x em X arbitrário

$$q_{\varphi(V)}(x+M) = \inf\left\{r>0 \ /\ x+M\in r(V+M)\right\}$$

e

$$\dot q_V(x+M) = \inf_{m\in M} q_V(x+m) = \inf_{m\in M}\left\{\inf\left\{t>0\ /\ x+m\in tV\right\}\right\}$$

procedendo análogamente à prova da proposição 2 obtemos facilmente que $q_{\varphi(V)} = \mathring{q}_V$ ∎

PROPOSIÇÃO 7. Sejam X um e.l.c. e A um subconjunto discado, limitado e ω-completo de X; então X_A é um espaço de Banach.

DEMONSTRAÇÃO. De (33) sabemos que X_A é um espaço normado, além disso os conjuntos da forma λA com $\lambda > 0$ formam um sistema fundamental de vizinhanças do zero em X_A. Agora, como de (34) A é ω-limitado em X temos que toda ω-vizinhança do zero em X contem um conjunto da forma λA; i.e., a topologia de espaço normado τ sobre X_A é mais fina que a topologia τ' sobre X_A induzida por $\sigma(X,X')$. Finalmente como os conjuntos λA são τ'-completos, resulta de (32) que E_A é τ-completo; i.e., um espaço de Banach. ∎

§ 2 - LIMITES PROJETIVOS

DEFINIÇÃO 1. Seja $\{F_n \,/\, n \geq 1\}$ uma familia enumerável de e.l.c. e suponhamos que para todo $n \geq 1$ temos uma aplicação linear contínua v_n de F_{n+1} em F_n. Dizemos que estas duas familias juntas formam um <u>sistema projetivo</u> (s.p.) e indicamos isto por (F_n, v_n).

DEFINIÇÃO 2. Nas condições da Def. 1 para todo $1 \leq m \leq n$ definimos a aplicação linear contínua v_{mn} de F_n em F_m da seguinte forma:

$$v_{mn} = \begin{cases} 1_{F_m} & \text{se } m = n \\ v_m \circ v_{m+1} \circ \dots \circ v_{n-1} & \text{se } m < n \end{cases}$$

DEFINIÇÃO 3. Dizemos que um e.l.c. E é um <u>limite projetivo</u> (l.p.) de um s.p. (F_n, v_n) dado e denotamos isto por $E \sim \varprojlim F_n$, se as seguintes condições são satisfeitas:

(LP-1) Para todo $n \geq 1$ existe uma aplicação linear contínua p_n de E em F_n t.q. o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{tikzcd} & F_n \\ E \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & F_{n+1} \arrow[uu] \end{tikzcd}$$

(LP-2) Dados, um e.l.c. D e para todo $n \geq 1$ uma aplicação linear contínua q_n de D em F_n tornando comutativo o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd} & F_n \\ D \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & F_{n+1} \arrow[uu] \end{tikzcd}$$

Existe uma única aplicação linear contínua g de D em E t.q. para todo $n \geq 1$ temos comutativo o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd} D \arrow[dr] \arrow[d] & \\ E \arrow[r] & F_n \end{tikzcd}$$

OBSERVAÇÃO. Com as notações da Def. 2 e usando (LP-1) temos: $p_m = v_{mn} \circ p_n$ para todo $n \geq m \geq 1$. O mesmo vale para as q_n.

PROPOSIÇÃO 1. Se o e.l.c. E_τ é um l.p. do s.p. (F_n, v_n) então τ é a topologia inicial dada pela família (p_n) de (LP-1).

DEMONSTRAÇÃO. Seja τ' a topologia inicial do enunciado. Como as p_n são τ-contínuas (vide (LP-1)), da definição de τ', temos $\tau' \leq \tau$. Por outro lado, de (LP-2) com $D = E_{\tau'}$, existe uma aplicação linear e contínua g de $E_{\tau'}$ em E_τ; mas pela unicidade deve ser $g = 1_E$, consequentemente $\tau = \tau'$. ∎

PROPOSIÇÃO 2. (Unicidade) Se dois e.l.c. E e $\tilde{E}$ são l.p. do s.p. (F_n, v_n), então E e $\tilde{E}$ são isomorfos. Poremos $E = \tilde{E} = \varprojlim E$.

DEMONSTRAÇÃO. Denotamos por $\tilde{p}_n$ as aplicações correspondentes a $\tilde{E}$ dadas em (LP-1). Agora como E [$\tilde{E}$ resp.] é um l.p., existe uma aplicação linear e contínua g de $\tilde{E}$ em E [$\tilde{g}$ de E em $\tilde{E}$ resp.] t.q. para todo $n \geq 1$ $p_n \circ g = \tilde{p}_n$ [$\tilde{p}_n \circ \tilde{g} = p_n$ resp.]. Daqui segue imediatamente que $p_n \circ (g \circ \tilde{g}) = p_n$ e $\tilde{p}_n \circ (\tilde{g} \circ g) = \tilde{p}_n$ para todo $n \geq 1$, logo da unicidade em (LP-2) resulta que $g \circ \tilde{g} = 1_E$ e $\tilde{g} \circ g = 1_{\tilde{E}}$ o que termina a prova. ∎

PROPOSIÇÃO 3. (Existencia) Dado um s.p. (F_n, v_n) sempre existe seu l.p.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $F = \prod_{n \geq 1} F_n$ e consideremos

$$E = \{(x_n) \in F \;/\; v_n(x_{n+1}) = x_n \quad \forall\, n \geq 1\}$$

Obviamente E é um e.l.c. quando munido da topologia induzida da topologia produto de F (vide (12)(c)).

Definimos p_n de E em F_n como a restrição a E da projeção canônica de F sobre F_n, então (LP-1) é trivialmente satisfeita.

Agora se D é um e.l.c. como em (LP-2), definimos g de D em E por $g(x) = (q_n(x))$ para todo x em D. Obviamente g está bem definida e é linear, além disso como para todo $n \geq 1$ $p_n \circ g = q_n$ temos da Prop. 1 e de (7) que g é contínua. Por outro lado seja h de D em E uma aplicação linear e contínua t.q. $n \geq 1$ $p_n \circ h = q_n$, então se $x \in D$ e se supomos que $h(x) = (x_n) \in E$ resulta que $x_n = (p_n \circ h)(x) = q_n(x)$ $\forall n \geq 1$, de onde $g(x) = h(x)$ pela definição de g, e (LP-2) se cumpre.∎

OBSERVAÇÃO. Se mudamos as topologias dos espaços F_n o l.p. do novo s.p. é o mesmo espaço vetorial que o l.p. do antigo s.p. mas em geral eles tem topologias diferentes. Em (15) são dadas condições suficientes para obter a igualdade.

Usando a Prop. 2 temos imediatamente o seguinte.

COROLARIO. Se o e.l.c. E é o l.p. do s.p. (F_n, v_n) e se (x_n) é uma sequencia t.q. para todo $n \geq 1$ $x_n \in F_n$ e $v_n(x_{n+1}) = x_n$, então existe um único x em E t.q. $p_n(x) = x_n$ $\forall n \geq 1$.

PROPOSIÇÃO 4. Seja $E = \varprojlim F_n$, então

(a) Se para todo $n \geq 1$ F_n é metrizável então E também o é.

(b) Se para todo $n \geq 1$ F_n é completo então E também o é.

DEMONSTRAÇÃO. (a) é consequencia imediata de Prop. 1 e (18). Por outro lado (b) segue de Def. 2 o corolario acima e (17).∎

COROLARIO. O l.p. de um s.p. formado por espaços de Fréchet é um espaço de Fréchet.

PROPOSIÇÃO 5. Com as notações da Def. 3 seja $E = \varprojlim F_n$ onde supomos que para todo n em $\mathbb{N}$ F_n é um espaço normado com bola unitaria fechada B_n, então a familia $((1/n)p_n^{-1}(B_n))$ forma um sistema fundamental de vizinhanças do zero em E.

DEMONSTRAÇÃO. Da Prop. 1 temos que uma vizinhança fundamental do zero em E é da forma $V = \bigcap_{1 \leq j \leq k} p_{n_j}^{-1}(\lambda_j B_{n_j})$ com $\lambda_j > 0$ e k finito.

Obviamente podemos tomar $n > \max\{n_j \,/\, 1 \leq j \leq k\}$ t.q. $(1/n)B_n \subset \bigcap_{1 \leq j \leq k} v_{n_j n}^{-1}(\lambda_j B_{n_j})$ de onde, usando $p_{n_j} = v_{n_j n} \circ p_n$, segue facilmente que $(1/n)p_n^{-1}(B_n) \subset \bigcap_{1 \leq j \leq k} p_n^{-1}\left[v_{n_j n}^{-1}(\lambda_j B_{n_j})\right] = V$.∎

PROPOSIÇÃO 6. Nas condições da proposição acima e considerando além disso que os F_n são espaços de Banach, se para algum $m \geq 1$ pomos $E_m = E_{U_m}$ onde $U_m = p_m^{-1}(\lambda B_m)$ para algum $\lambda > 0$ temos que $\hat{E}_m$ é isomorfo a um subespaço fechado de F_m.

DEMONSTRAÇÃO. Ponhamos $q_m = q_{U_m}$ e $K_m = \ker q_m$. A proposição se-que de (58) se mostramos que existe um isomorfismo f de $\hat{E}_m$ sobre $f(\hat{E}_m)\subset F_m$. Agora bem:

$$x\in K_m \text{ sss } x\in \varepsilon U_m \ \forall\ \varepsilon>0 \text{ sss } p_m(x)\in\varepsilon\lambda B_m \ \forall\ \varepsilon>0$$

$$\text{sss } p_m(x)=0 \text{ pois } F_m \text{ é de Hausdorff.}$$

Podemos então definir a seguinte aplicação linear injetora

$$f : \mathring{x}=x+K_m\in E_m \longrightarrow p_m(x)\in F_m$$

Obviamente (vide a prova de (b) da Prop. 1.2) temos

$$\|f(\mathring{x})\|=\lambda \mathring{q}_m(\mathring{x}) \quad \text{para todo } \mathring{x} \text{ em } E_m$$

Logo f extendida a $\hat{E}_m$ é a aplicação pedida.∎

DEFINIÇÃO 4. Dizemos que dois s.p. (F_m,v_m) e $(\tilde{F}_n,\tilde{v}_n)$ são equivalentes e denotamos isto por $(F_m,v_m)\sim(\tilde{F}_n,\tilde{v}_n)$, se existem duas subsequencias $(n(k))_{k\geq 1}$ e $(m(k))_{k\geq 1}$ de $\mathbb{N}$ junto com as seguintes aplicações lineares continuas

$$\psi_{m(n)} : F_{m(n)}\longrightarrow \tilde{F}_n \quad e \quad \tilde{\psi}_{n(m)} : \tilde{F}_{n(m)}\longrightarrow F_m \quad \forall\ n,m\in\mathbb{N}$$

t.q. $\forall\ n\geq 1$ e $m\geq 1$ os 4 diagramas seguintes são comutativos

$$\begin{tikzcd} \tilde{F}_{n+1} \arrow[r] & \tilde{F}_n \\ F_{m(n+1)} \arrow[u] \arrow[r] & F_{m(n)} \arrow[u] \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} F_{m+1} \arrow[r] & F_m \\ \tilde{F}_{n(m+1)} \arrow[u] \arrow[r] & \tilde{F}_{n(m)} \arrow[u] \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} \tilde{F}_{n(m(n))} \arrow[rr] \arrow[dr] & & \tilde{F}_n \\ & F_{m(n)} \arrow[ur] & \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} F_{m(n(m))} \arrow[rr] \arrow[dr] & & F_m \\ & \tilde{F}_{n(m)} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

EXEMPLO. Dado um s.p., qualquer subsequencia dele forma um novo s.p. equivalente ao original.

PROPOSIÇÃO 7. Com as notações da Def. 4 se $E=\varprojlim F_m$ e $\tilde{E}=\varprojlim \tilde{F}_n$ então $(F_m,v_m)\sim(\tilde{F}_n,\tilde{v}_n)$ implica E isomorfo a $\tilde{E}$.

DEMONSTRAÇÃO. (Usaremos as notações de Prop. 3) Definimos as duas seguintes aplicações lineares:

$$\psi : (x_m)\ E\longrightarrow(\tilde{x}_n)\ \tilde{E} \quad \text{onde} \quad \tilde{x}_n=\psi_{m(n)}(x_{m(n)})$$

$$\tilde{\psi} : (\tilde{y}_n)\ \tilde{E}\longrightarrow(y_m)\ E \quad \text{onde} \quad y_m=\tilde{\psi}_{n(m)}(\tilde{y}_{n(m)})$$

Dos dois primeiros diagramas da Def. 4 segue-se facilmente que ψ e $\tilde{\psi}$ estão bem definidas; i.e.

$$\tilde{x}_n=\tilde{v}_n(\tilde{x}_{n+1}) \quad e \quad y_m=v_m(y_{m+1}) \quad \forall\ n,m\geq 1$$

Os dois ultimos diagramas da Def. 4 nos dão (usar ob. 1 depois de Prop. 3) $\tilde{\psi}\circ\psi=1_E$ e $\psi\circ\tilde{\psi}=1_{\tilde{E}}$

Finalmente de (7) e da Prop. 1 ψ e $\tilde{\psi}$ são continuas, pois obviamente para todo $m,n \geq 1$ (vide as def. de ψ e $\tilde{\psi}$)

$$p_m \circ \tilde{\psi} = \tilde{\psi}_{n(m)} \circ \tilde{p}_{n(m)} \quad e \quad \tilde{p}_n \circ \psi = \psi_{m(n)} \circ p_{m(n)} \quad \blacksquare$$

DEFINIÇÃO 5 Um s.p. (Y_m, v_m) de e.l.c. diz-se um <u>sistema projetivo fracamente-compacto</u> (s.p.w-c.) se para cada $m \geq 1$ existe um $n > m$ t.q. v_{mn} é w-compacta no sentido da Def. 1.1.

Um s.p. (F_n, v_n) de espaços de Banach diz-se um <u>sistema projetivo estritamente fracamente-compacto</u> (s.p.s.w-c.). Se para todo $n \geq 1$ v_n leva a bola unitaria fechada de F_{n+1} num subconjunto w-compacto de F_n.

OBSERVAÇÃO. Do exemplo depois da Def. 4 temos que dado um s.p.w-c. de e.l.c. (Y_m, v_m), considerando uma subsequencia se fôr necessário, podemos ter v_m w-compacta para todo $m \geq 1$. Daqui em diante suporemos isso.

PROPOSIÇÃO 8. Qualquer s.p.w-c. (Y_m, v_m) de e.l.c. é equivalente a um s.p.s.w-c. (de espaços de Banach).

DEMONSTRAÇÃO. Observemos primeiro que se X e Y são dois e.l.c. e u é uma aplicação linear w-compacta de X em Y, então existe uma vizinhança discada V do zero em X t.q. $A = \overline{u(V)}$ é w-compacto em Y (vide (29)). Como, de (34) e (14), A é limitado e w-completo em Y temos da Prop. 1.2 que Y_A é um espaço de Banach.

Consideremos agora o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "\hat{u}"'] & Y \\ & Y_A \arrow[u, hook, "i_A"'] \end{tikzcd}$$

onde $\hat{u}$ é definida por $\hat{u}(x) = u(x)$ para todo x em X, o que é possível pois V é absorvente em X e $u(V) \subset A$. Obviamente $\hat{u}$ é linear e contínua.

Agora bem, dado $m \geq 1$ analogamente como acima podemos construir o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd} Y_{m+2} \arrow[r] & Y_{m+1} \arrow[r] & Y_m \\ G_{m+2} \arrow[u, hook] \arrow[r, "w_{m+1}"'] & G_{m+1} \arrow[u, hook] \arrow[r, "w_m"'] & G_m \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

onde $G_m = (Y_m)_{A_m}$ e $w_m = \hat{v}_m \circ i_{A_{m+1}}$

Como A_{m+1} e fechado (na verdade é w-compacto) em Y_{m+1} ele é a bola unitaria fechada de G_{m+1}. Por outro lado de (52) $\hat{v}_m$ é w-contínua. Então $w_m(A_{m+1}) = \hat{v}_m(A_{m+1})$ é w-compacto em G_m.

Finalmente (G_n, ω_n) é um s.p.s.ω-c. equivalente a (Y_m, v_m) pois o diagrama acima nos dá os 4 diagramas da Def. 4 quando $F_m = Y_m$, $\tilde{F}_n = G_n$, $m(n) = n+1$, $n(m) = m$, $m(n(m)) = m+1$, $n(m(n)) = n+1$,

$\psi_{m(n)} = \hat{v}_n$ e $\tilde{\psi}_{n(m)} = i_{A_m}$. ∎

§ 3 - SISTEMAS INJETIVOS

DEFINIÇÃO 1. Seja $\{E_n \,/\, n \geq 1\}$ uma familia enumerável de e.l.c. e suponhamos que para todo $n \geq 1$ temos uma aplicação linear contí-nua e injetora u_n de E_n em E_{n+1}. Dizemos que estas duas famí-lias juntas formam um <u>sistema injetivo</u> (s.i.) e indicamos isto por (E_n, u_n).

DEFINIÇÃO 2. Nas condições da Def. 1 para todo $1 \leq m \leq n$ definimos a aplicação linear contínua e injetora u_{nm} de E_m em E_n da seguinte forma:

$$u_{nm} = \begin{cases} 1_{E_m} & \text{se } m = n \\ u_{n-1} \circ \ldots \circ u_{m+1} \circ u_m & \text{se } m < n \end{cases}$$

DEFINIÇÃO 3. Dizemos que um e.l.c. F é um <u>limite indutivo</u> (l.i.) de um s.i. (E_n, u_n) e denotamos isto por $F \sim \varinjlim E_n$ se as seguin-tes condições são satisfeitas:

(LI-1) Para tôdo $n \geq 1$ existe uma aplicação linear contínua i_n de E_n em F t.q. o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{tikzcd} E_n \arrow[d] \arrow[dr] & \\ E_{n+1} \arrow[r] & F \end{tikzcd}$$

(LI-2) Dados um e.l.c. G e para todo $n \geq 1$ uma aplicação linear contínua e injetiva j_n de E_n em F tornando comutativo o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd} E_n \arrow[d] \arrow[dr] & \\ E_{n+1} \arrow[r] & G \end{tikzcd}$$

Existe uma única aplicação linear contínua e injetora f de F em G t.q. para todo $n \geq 1$ temos comutativo o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd} F \arrow[d] & \\ G & E_n \arrow[ul] \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Se o e.l.c. F não é necessáriamente de Hausdorff mas satisfaz as outras condições da Def. 3 poremos $F \sim \varinjlim E_n$

OBSERVAÇÃO. Com as notações da Def. 2 e usando (LI-1) temos $i_m \circ u_{nm} = i_n$ para todo $n \geq m \geq 1$. O mesmo vale para as j_n.

As demonstrações das duas seguintes proposições são completamente análogas as provas das proposições 2.1 e 2.2 respectivamente.

PROPOSIÇÃO 1. Dado um s.i. (E_n, u_n), se $F_\tau \sim \varinjlim E_n$ então τ é a topologia localmente convexa final dada pela família (u_n).

PROPOSIÇÃO 2. (Unicidade). Dado um s.i. (E_n, u_n) se $F \sim \varinjlim E_n$ e $\tilde{F} \sim \varinjlim E_n$, então F e $\tilde{F}$ são isomorfos. Poremos $F = \tilde{F} = \varinjlim E_n$

PROPOSIÇÃO 3. (Existencia) Dado um s.i. (E_n, u_n) sempre existe um e.l.c. F não necessáriamente de Hausdorff t.q. $F \simeq \varinjlim E_n$.

DEMONSTRAÇÃO. Ponhamos $E = \coprod E_n$ e consideremos:

$$\mathfrak{M} = \left\{ (x_k) \in E \;/\; \sum_{k \leq m} u_{mk}(x_k) = 0, \text{ onde } m = \sup \{ k \;/\; x_k \neq 0 \} \right\}$$

De $u_{nm} \circ u_{mk} = u_{nk}$ $\forall\, n \geq m \geq k \geq 1$ segue fácilmente que $\mathfrak{M}$ é um subespaço vetorial de E.

Seja $F = E/\mathfrak{M}$ o espaço localmente convexo quociente do e.l.c. E módulo o subespaço $\mathfrak{M}$, veremos que F é o espaço pedido; de fato:

1º) Para cada $n \geq 1$ definamos a seguinte aplicação linear e contínua:

$$i_n : x_n \in E_n \longmapsto (x_n \delta_{nm})_{m \geq 1} + \mathfrak{M} \in F$$

Da definição de $\mathfrak{M}$ e como as funções u_{nm} são injetoras segue que as aplicações i_n são injetoras. Daqui obtemos imediatamente (LI-1).

2º) Seja G um e.l.c. nas condições de (LI-2) e definamos:

$$j : (x_n) \in E \longmapsto \sum_{n \geq 1} j_n(x_n) \in G$$

Suponhamos que $\operatorname{Ker} j = \mathfrak{M}$ (*), podemos então definir uma aplicação linear injetora f de F em G pondo $f(\dot{x}) = j(x)$ $\forall\, \dot{x} \in F$ além disso temos $f \circ i_n = j_n$ $\forall\, n \geq 1$ de onde usando (21) e a Prop. 1 segue-se que f é contínua. Agora se g é outra injeção contínua de F em G t.q. $g \circ i_n = j_n$ $\forall\, n \geq 1$, tomando $\dot{x} = (x_n) + \mathfrak{M} = \sum i_n(x_n)$ um elemento arbitrário de F ($(x_n) \in E$), temos:

$$g(\dot{x}) = \sum g(i_n(x_n)) = \sum j_n(x_n) = f(\dot{x})$$

e (LI-2) é completada.

Finalmente (*) segue da observação depois da Def. 3 pois se

$x=(x_n)\in E$, e $x_{n_1},\dots,x_{n_r}$ com $n_1<\dots<n_r$ são as componentes de x diferentes de zero, temos:

$$j(x)=\sum_{1\le k\le r} j_{n_k}(x_{n_k})=j_{n_r}\Big(\sum_{1\le k\le r} u_{n_r n_k}(x_{n_k})\Big)$$

que nos dá a igualdade pedida pois j_{n_r} é injetora. ∎

OBSERVAÇÃO. Para obter intuitivamente F a partir de E, dado um elemento (x_n) de E o identificamos com todos os elementos de E da forma $(u_{k_n n}(x_n))$ onde $k_n>n$, formalmente teremos

$(x_n)+\mathfrak{M}=(u_{k_n n}(x_n))+\mathfrak{M}$.

PROPOSIÇÃO 4. Com as notações da Def. 3 temos:

$$F=\lim E_n \quad \text{implica} \quad F=\bigcup_{n\ge 1} i_n(E_n)\ .$$

DEMONSTRAÇÃO. Ponhamos $H=\bigcup_{n\ge1} i_n(E_n)$, usando a observação depois da Def. 3 temos imediatamente que H é um subespaço de F, também e obvio que (LI-2) vale com $G=H$ munido da topologia induzida de F e com $j_n=i_n$, temos então que a aplicação $i\circ f$ torna comutativo o segundo diagrama de (LI-2) com $G=F$, consequentemente da unicidade temos $i\circ f=1_F$, segue que i é sobrejetiva, de onde finalmente $H=F$. ∎

DEFINIÇÃO 4. Dizemos que dois s.i. (E_m,u_m) e $(\tilde E_n,\tilde u_n)$ são equivalente e denotamos isto por $(E_m,u_m)\sim(\tilde E_n,\tilde u_n)$ se existem duas subsequencias $(n(k))_{k\ge1}$ e $(m(k))_{k\ge1}$ de $\mathbb{N}$ junto com as seguintes aplicações lineares continuas.

$$\varphi_{m(n)}:\tilde E_n\longrightarrow E_{m(n)} \quad \text{e} \quad \tilde\varphi_{n(m)}:E_m\longrightarrow \tilde E_{n(m)} \quad \forall\ n,m\in\mathbb{N}$$

t.q. $\forall\ n,m\ge1$ os 4 diagramas seguintes comutam

$$\begin{tikzcd} E_m \arrow[r] \arrow[d] & E_{m+1} \arrow[d] \\ \tilde E_{n(m)} \arrow[r] & \tilde E_{n(m+1)} \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} \tilde E_n \arrow[r] \arrow[d] & \tilde E_{n+1} \arrow[d] \\ E_{m(n)} \arrow[r] & E_{m(n+1)} \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} E_m \arrow[rr] \arrow[dr] & & E_{m(n(m))} \\ & \tilde E_{n(m)} \arrow[ur] & \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} \tilde E_n \arrow[rr] \arrow[dr] & & \tilde E_{n(m(n))} \\ & E_{m(n)} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

EXEMPLO. Dado um s.i., qualquer subsequencia dele, forma um novo s.i. equivalente ao original.

PROPOSIÇÃO 5. Com as notações da Def. 4 se $F=\lim E_m$ e $\tilde F=\lim \tilde E_n$ então $(E_m,u_m)\sim(\tilde E_n,\tilde u_n)$ implica F isomorfo a $\tilde F$.

DEMONSTRAÇÃO. Considerando $\tilde E$, $\tilde{\mathfrak{M}}$ e $\tilde F$ análogamente como na Prop. 3 e com as notações dessa proposição, definimos as seguintes aplicações lineares:

$$\tilde{\varphi} : (z_m) \in E \longmapsto (\tilde{z}_n) \in \tilde{E} \quad \text{onde} \quad \begin{cases} \tilde{z}_{n(m)} = \tilde{\varphi}_{n(m)}(z_m) & \forall\, m \geq 1 \\ \tilde{z}_n = 0 & \text{em outro caso.} \end{cases}$$

e

$$\varphi : (\tilde{x}_n) \in \tilde{E} \longmapsto (x_m) \in E \quad \text{onde} \quad \begin{cases} x_{m(n)} = \varphi_{m(n)}(\tilde{x}_n) & \forall\, n \geq 1 \\ x_m = 0 & \text{em outro caso.} \end{cases}$$

Usando o primeiro [segundo resp.] diagrama da Def. 4 e em forma análoga à prova de (*) feita na demonstração da Prop. 3 obtemos: $\tilde{\varphi}(m) \subset \tilde{m}$ $[\varphi(\tilde{m}) \subset m$ resp.$]$.

Podemos então definir as seguintes aplicações lineares:

$$\tilde{\varphi}_* : \dot{z} \in F \longmapsto \tilde{\varphi}(z) \in \tilde{F} \quad \text{e} \quad \varphi_* : \dot{\tilde{x}} \in \tilde{F} \longmapsto \varphi(\tilde{x}) \in F .$$

Usando o terceiro diagrama da Def. 4 e a observação depois da Prop. 3 obtemos $\varphi_* \circ \tilde{\varphi}_* = 1_F$, análogamente temos $\tilde{\varphi}_* \circ \varphi_* = 1_{\tilde{F}}$.

Finalmente da construção de φ_* e $\tilde{\varphi}_*$ temos $\forall\, m,n \geq 1$

$$\varphi_* \circ \tilde{i}_n = i_{m(n)} \circ \varphi_{m(n)} \quad \text{e} \quad \tilde{\varphi}_* \circ i_m = \tilde{i}_{n(m)} \circ \tilde{\varphi}_{n(m)}$$

que são aplicações lineares continuas, consequentemente da Prop. 1 e de (21) segue que φ_* e $\tilde{\varphi}_*$ são continuas. ∎

DEFINIÇÃO 5. Um s.i. (X_m, u_m) de e.l.c. diz-se um <u>sistema injetivo fracamente-compacto</u> (s.i.w-c.) se para cada $m \geq 1$ existe um $n > m$ t.q. u_{nm} é w-compacta.

Um s.i. (E_n, u_n) de espaços de Banach diz-se um <u>sistema injetivo estritamente fracamente-compacto</u> (s.i.s.w-c.), se $\forall\, n \geq 1$, u_n leva a bola unitaria fechada de E_n num subconjunto w-compacto de E_{n+1}.

OBSERVAÇÃO. Do exemplo depois da Def. 4 temos que dado um s.i.w-c. de e.l.c. (X_m, u_m), considerando uma subsequencia se fôr necessário, podemos ter u_m w-compacta para todo $m \geq 1$. Daqui em diante suporemos isso.

PROPOSIÇÃO 6. Qualquer s.i.w-c. (X_m, u_m) de e.l.c. é equivalente a um s.i.s.w-c. (de espaços de Banach).

DEMONSTRAÇÃO. Procedendo em forma análoga ao feito em Prop. 2.8 e acrescentando que $\hat{u}$ e injetora se u o é, dado $n \geq 1$ obtemos um s.i.s.w-c. de espaços de Banach (E_n, t_n) e o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccc} X_n & \longrightarrow & X_{n+1} & \longrightarrow & X_{n+2} \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ E_n & \xrightarrow[t_n]{} & E_{n+1} & \longrightarrow & E_{n+2} \end{array} \qquad \text{onde } A_n = u_{n-1}(V_{n-1}),\ E_n = (X_n)_{A_n} \text{ e } t_n = \hat{u}_n \circ i_{A_n}$$

Finalmente (como na prova da Prop. 2.8) o diagrama acima nos dá os 4 diagramas da Def. 4; consequentemente os dois s.i. são equivalentes.∎

PROPOSIÇÃO 7. Sejam, (E_n, u_n) um s.i.s.w-c.(de Espaços de Banach) e $F = \varinjlim E_n$, então F é de Hausdorff; i.e., $F = \varinjlim E_n$. Além disso qualquer subconjunto limitado B de F é a imagem $i_n(B_n)$ de um subconjunto limitado B_n de E_n, para algum $n \geq 1$.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $x \neq 0$ um elemento de F, da Prop. 4 segue que existe $p \geq 1$ t.q. $x = i_p(x_p)$, onde $x_p \in E_p$, consequentemente $x_p \neq 0$ pois i_p é injetora.

Construiremos para $n \geq p$ (vide C-1 abaixo) uma sequencia (V_n) de bolas fechadas, tomando uma de cada espaço E_n, t.q. $\forall\, n \geq p$.

$$\text{(i)}\quad u_n(V_n) \subset V_{n+1}$$

$$\text{(ii)}\quad u_{np}(x_p) \notin V_n$$

$$\text{(iii)}\quad u_n(V_n) \text{ é w-compacto em } E_{n+1}.$$

Daqui, para $n < p$, se $p > 1$, como u_{np} é contínua tomamos V_n uma bola fechada em E_n t.q.

$$V_n \subset u_{np}^{-1}(V_p) \qquad (\alpha).$$

Agora, usando a observação depois da Def. 3, temos:

de (i) $i_n(V_n) \subset i_{n+1}(V_{n+1}) \quad \forall\, n \geq p \qquad (\beta)$

de (α) $i_n(V_n) \subset i_p(V_p) \quad \forall\, n < p \qquad (\beta')$.

De (ii), para $n = p$, $x_p \notin V_p$ e como i_p é injetora, usando (β'), temos que $x = i_p(x_p) \notin i_n(V_n)$ $\forall\, n < p$. Também de (ii) e como i_n é injetora obtemos que $x = i_p(x_p) = i_n \circ u_{np}(x_p) \notin i_n(V_n)$ $\forall\, n \geq p$. Do anterior resulta que $x \notin V = \bigcup_{n \geq 1} i_n(V_n)$ mas V é uma vizinhança do zero em F pois de (β) e (β') segue que V é discado (vide Props. 1 e 4 e (19)), consequentemento F é de Hausdorff.

C-1. Como $x_p \neq 0$ existe uma bola fechada V_p em E_p t.q. $x_p \notin V_p$. Agora para $n = p$ (ii) é obvio e (iii) segue da hipótese (vide Def. 5).

Suponhamos agora que para $n \geq p$ temos as bolas fechadas V_i em E_i $(i = p, \ldots, n)$ t.q. as condições (i), (ii) e (iii) são válidas até n.

De (iii) e (29) segue que $u_n(V_n)$ é fechado em E_{n+1}.

De (ii) $u_{(n+1)p}(x_p) = u_n \circ u_{np}(x_p) \notin u_n(V_n)$ pois u_n é injetora.
Do anterior deve existir uma bola fechada $\tilde{V}_{n+1}$ em E_{n+1} tal que:
$u_n(V_n) \cap (u_{(n+1)p}(x_p) + \tilde{V}_{n+1}) = \emptyset$ de onde $V_{n+1} = (1/2)\tilde{V}_{n+1} + u_n(V_n)$ é uma vizinhanza discada do zero em E_{n+1} que não contem - $u_{(n+1)p}(x_p)$. Finalmente (i), (ii) e (iii) são claramente satisfeitas até $n+1$, pois V_{n+1} é mesmo uma bola fechada de E_{n+1} (vide (62) e (29)). (Observar que V_{n+1} é limitada).
A prova da última afirmação da proposição é como segue:
Suponhamos pelo absurdo que $\forall n \geq 1$ temos:

$$H_n \equiv \text{" } \forall \text{ limitado } L_n \text{ em } E_n,\ i_n(L_n) \text{ é diferente do } B \text{ "}$$

como i_n é injetora segue que H_n é equivalente a

$$H_n' \equiv \text{" } \forall \text{ limitado } L_n \text{ em } E_n,\ i_n(L_n) \text{ não contem } B \text{ "}$$

Usando isto construiremos (vide C-2 abaixo) uma sequencia (V_n) - de bolas fechadas, tomando uma de cada espaço E_n, e uma sequencia (x_m) de elementos de B t.q. $\forall n \geq 1$:

(j) $u_n(V_n) \subset V_{n+1}$

(jj) $x_1, (1/2)x_2, \dots, (1/n)x_n \notin i_n(V_n)$

(jjj) $u_n(V_n)$ é w-compacto em E_{n+1}

Agora bem, análogamente como em C-1 temos que $V = \bigcup_{n \geq 1} i_n(V_n)$ é uma vizinhança do zero em F e obviamente $(1/n)x_n \notin V$ $\forall n \geq 1$; i.e. a sequencia $((1/n)x_n)$ não converge a zero em F, mas isto é uma - contradição com (22) pois B é limitado o que completa a prova - desta parte.

C-2. De H_1', dada a bola unitaria fechada V_1 de E_1 existe x_1 em B t.q. $x_1 \notin i_1(V_1)$.
Seja $n \geq 1$ e suponhamos construidas bolas fechadas $V_1, \dots, V_n$ - em $E_1, \dots, E_n$ respectivamente com (j), (jj) e (jjj) válidas até n. Agora de (29), (jjj) e como i_{n+1} é w-contínua por (52), temos - que $i_n(V_n) = i_{n+1} \circ u_n(V_n)$ é fechado em F, disto e (jj) existe uma vizinhança do zero $V = \Gamma_d(\bigcup_{m \geq 1} i_m(\tilde{V}_m))$ em F, onde $\tilde{V}_m$ é uma pequena bola fechada em E_m (vide (19) e Prop. 1 e 4), t.q.:

$$((1/k)x_k + V) \cap i_n(V_n) = \emptyset \quad \forall\, 1 \leq k \leq n \qquad (\alpha')$$

Agora (como em C-1), $V_{n+1} = \tilde{V}_{n+1} + u_n(V_n)$ é uma bola fechada em E_{n+1} e de (α') $(1/k)x_k \notin i_{n+1}(V_{n+1})$ $\forall\, 1 \leq k \leq n$, de fato se para algum $1 \leq k \leq n$ $(1/k)x_k = i_{n+1}(\tilde{v}_{n+1}) + i_n(v_n)$ com $v_n \in V_n$ e $\tilde{v}_{n+1} \in \tilde{V}_{n+1}$ resulta que $i_n(v_n) \in (1/k)x_k + V$ uma contradição com (α').

Finalmente de H^*_{n+1} existe x_{n+1} em B t.q. $x_{n+1} \notin i_{n+1}((n+1)V_{n+1})$, consequentemente (jj) é válida até $n+1$; (j) e (jjj) são imediatas.∎

COROLARIO 1. Nas condições da proposição acima. Seja V_n uma bola fechada em E_n t.q. $V_n \supset \bigcup_{1 \leq k \leq n} u_{nk}(nB_k)$ onde B_k é a bola unitaria fechada de E_k, então a sequencia $(i_n(V_n))$ forma uma base crescente de subconjuntos limitados e discados em F.

COROLARIO 2. Das Props. 5 e 6 segue que a Prop. 7 acima permanece válida se trocamos o s.i.s.w-c. dado por qualquer s.i.w-c. de e.l.c.

PROPOSIÇÃO 8. Sejam, (E_n,u_n) um s.i.s.w-c. de espaços de Banach e F seu l.i. Dados $n \geq 1$ e $\lambda > 0$ arbitrários, se $A_n = i_n(V_n)$ onde $V_n = \lambda B_n$ com B_n a bola unitaria fechada de E_n, então E_n e $\tilde{F}_n = F_{A_n}$ são isomorfos, e também w-isomorfos.

DEMONSTRAÇÃO. Como (E_n,u_n) é um s.i.s.w-c. temos que $A_n = i_{n+1}(u_n(V_n))$ é w-compacto em F (vide a prova de C-2 na demonstração da Prop. 7), segue da Prop. 1.7 que F_n é um espaço de Banach.

Como B_n é absorvente em E_n podemos definir a função $\tilde{i}_n$ de E_n em F_n por $\tilde{i}_n(x) = i_n(x)$ $\forall x \in E_n$ obviamente $\tilde{i}_n$ é uma aplicação linear bijetora.

Nossa primeira afirmação segue de $\|x\|_{E_n} = \lambda \|\tilde{i}(x)\|_{F_n}$ $\forall x \in E_n$ igualdade que obtemos usando:

$$\|x\|_{E_n} = \inf\{\mu > 0 \ / \ x \in \mu B_n\},$$

$$\|\tilde{i}(x)\|_{F_n} = \inf\{\mu > 0 \ / \ \tilde{i}_n(x) \in \mu A_n\} = (1/\lambda)\inf\{\mu > 0 \ / \ i_n(x) \in \mu i_n(B_n)\}$$

e o fato que i_n é injetora. A última afirmação segue de (52) ou também de (59).∎

Neste capítulo nos limitaremos ao estudo dos espaços bornológicos convexos, expondo só aqueles resultados que serão utilizados posteriormente. Eventualmente para alguns fatos interessantes, mas que não serão usados, indicaremos a referência correspondente.

§ 1 - DEFINIÇÕES E PROPRIEDADES BÁSICAS

DEFINIÇÃO 1. Seja E um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Chama-se <u>bornologia convexa</u> ou simplesmente <u>bornologia</u> sobre E, e denota-se por b, toda familia $\mathcal{B}$ de partes de E que satisfaz os cinco axiomas seguintes:

$$(B\text{-}1)\quad E = \bigcup_{B\in\mathcal{B}} B$$

$$(B\text{-}2)\quad A \in \mathcal{B} \text{ e } B \subset A \text{ implica } B \in \mathcal{B}$$

$$(B\text{-}3)\quad A,\ B \in \mathcal{B} \text{ implica } A + B \in \mathcal{B}$$

$$(B\text{-}4)\quad A \in \mathcal{B} \text{ implica } \lambda A \in \mathcal{B}\ \ \forall \lambda \in \mathbb{K}$$

$$(B\text{-}5)\quad B \in \mathcal{B} \text{ implica } \Gamma_d B \in \mathcal{B}.$$

Os elementos de $\mathcal{B}$ serão chamados de subconjuntos b-limitados de E ou, se não existir confusão acerca da bornologia b considerada de subconjuntos limitados de E.

DEFINIÇÃO 2. Dizemos que um espaço vetorial E é um <u>espaço bornológico convexo</u> (e.b.c.) se existir uma bornologia definida sobre ele.

Às vezes poremos E_b para indicar que E é um e.b.c. com bornologia b. $\mathcal{B}(E_b)$ ou $\mathcal{B}(E)$ denotarão a familia de todos os subconjuntos limitados de E_b.

DEFINIÇÃO 3. Seja E um e.b.c. Dizemos que uma familia $\mathcal{B}_0$ de subconjuntos limitados de E é uma <u>base de bornologia</u> ou uma <u>base bornológica</u> de E se todo subconjunto limitado de E estiver contido num elemento de $\mathcal{B}_0$.

OBSERVAÇÃO. De (B-5) segue que todo e.b.c. possui uma base bornológica formada de subconjuntos limitados e discados de E.
É de verificação trivial que as familias mencionadas na Def. 4 abaixo formam bornologias sobre os espaços considerados.

DEFINIÇÃO 4. (a) Sejam, E_b um e.b.c. e F um subespaço vetorial -

de E. A família formada pelos subconjuntos B de F t.q. B é b-limitado em E forma uma bornología sobre F, chamada a <u>bornología induzida</u> por b sobre F e denotada por b_F. F munido dessa bornología é chamado um <u>subespaço bornológico</u> de E_b.

(b) Sejam E, b e F como em (a) e p a projeção canônica de E sobre E/F. A família formada pelos subconjuntos B de E/F t.q. $B \subset p(A)$ para algum subconjunto b-limitado A de E, forma sobre E/F uma bornología b_Q, chamada a <u>bornología quociente de b módulo o subespaço F</u>. E/F munido daquela bornología é chamado um <u>espaço bornológico quociente</u> de E_b.

(c) Sejam $(E_i)_{i\in I}$ uma família de e.b.c. com bornologías b_i respectivamente, $E = \prod E_i$ e π_i a projeção canônica de E sobre E_i. A família formada pelos subconjuntos B de E t.q. $\forall\, i \in I$ $\pi_i(B)$ é b_i-limitado em E_i, forma sobre E a chamada <u>bornología produto</u> das bornologías b_i. E munido dessa bornología e chamado o <u>espaço bornológico produto</u> dos e.b.c. E_i.

DEFINIÇÃO 5. Sejam E e F dois e.b.c. e f uma aplicação linear de E em F. Dizemos que f é uma <u>aplicação limitada</u> (b-aplicação) se leva subconjuntos limitados de E em subconjuntos limitados de F.

DEFINIÇÃO 6. Sejam b e b' duas bornologías sobre um espaço vetorial E. Dizemos que b é <u>mais fina</u> que b' e pomos $b \geqslant b'$ se a aplicação identidade de E_b em $E_{b'}$ é limitada. Às vezes diremos que b' é mais grossa que b.

DEFINIÇÃO 7. Um subconjunto S de um e.b.c. E chama-se um <u>bornívoro</u> se absorve todo limitado de E; i.e., se B é um subconjunto limitado de E então existe $\lambda = \lambda(B) > 0$ t.q. $B \subset \lambda S$.
Uma família (S_i) de bornívoros de E diz-se um <u>sistema fundamental de bornívoros</u> se todo bornívoro de E contem algum S_i

PROPOSIÇÃO 1. Todo e.b.c. E possui um sistema fundamental de bornívoros formado por conjuntos balanceados.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $(B_i)_{i\in I}$ uma base bornológica de E formada por conjuntos discados e consideremos:

$$L = \{S \subset E \;/\; S = \bigcup_{i\in I} r_i . B_i \quad \text{onde} \quad r_i > 0 \quad \forall\, i \in I\}$$

Obviamente L é formado por bornívoros balanceados. Por outro lado se Q é um bornívoro de E segue que $\forall\, i \in I$ existe $t_i > 0$ t.q. $t_i B_i \subset Q$ consequentemente $\bigcup t_i B_i \subset Q$, o que completa a prova.∎

A seguir daremos dois exemplos muito úteis de bornologías e de e.b.c.

EXEMPLO 1. Seja E_τ um e.l.c. não necessáriamente de Hausdorff. A familia formada pelos subconjuntos de E absorvidos por toda vizinhança do zero em E, i.e., os subconjuntos limitados de E no sentido topológico, formam uma bornología sobre E chamada <u>bornología de Von Neumann</u> ou <u>bornología canônica</u> de E_τ e é denotada por $b\tau$ ou $b(\tau)$.
Em particular se $E = \mathbb{K}$ sua bornología canônica é dada pelos subconjuntos B de $\mathbb{K}$ t.q. existe $r = r(B) > 0$ com $|x| \leq r \quad \forall \; x \in B$.

EXEMPLO 2. Sejam E e τ como no Ex. 1. A familia formada pelos subconjuntos equicontínuos de E' forma uma bornología sobre E', chamada <u>bornología equicontínua</u> de E' e denotada b_e.

DEFINIÇÃO 8. Sejam, E um espaço vetorial e b [τ resp.] uma bornología [topología localmente convexa não necessáriamente de Hausdorff] sobre ele. Dizemos que b e τ são compatíveis se $b \geq b\tau$.

OBSERVAÇÃO. Com as notações da Def. 8. Fixada b existe sobre E uma única topología localmente convexa mais fina que todas as topologías localmente convexas sobre E compatíveis com b, obviamente ela é a topología que tem por base de vizinhanças do zero os b-bornívoros discados de E; denotamos por τb ou $\tau(b)$ esta topología. É imediato que $E_{\tau b}$ é um e.l.c. bornológico no sentido topológico.
Recíprocamente, fixada τ é trivial verificar que $b\tau$ é a mais grossa das bornologías compatíveis com τ.
Em geral temos $b(\tau b) \leq b$ e $\tau(b\tau) \geq \tau$.

DEFINIÇÃO 9. (a) Dizemos que um e.b.c. E_b é um <u>e.b.c. topológico</u> se $b = b(\tau b)$. Nesse caso b é chamada uma <u>bornología topológica</u>.
(b) Seja E_τ como no Ex. 1. Dizemos que E_τ é um <u>e.l.c. bornológico</u> se $\tau = \tau(b\tau)$; i.e., se ele é bornológico no sentido topológico.

Para exemplos de e.b.c. não topológicos vide Ex. 1.7 de [3]

§ 2 - CONVERGÊNCIA BORNOLÓGICA E BORNOLOGIAS SEPARADAS

PROPOSIÇÃO 1. Sejam, E um e.b.c. e (x_n) uma sequencia de elementos de E. Então as 3 afirmações seguintes são equivalentes.
(i) Existem, um subconjunto limitado e discado B de E e uma

sequencia (λ_n) de elementos de $\mathbb{K}$ convergindo a zero t.q. $\forall\, n \geq 1$ $x_n \in \lambda_n B$.

(ii) Existem, um subconjunto discado e limitado B de E e uma sequencia decrescente (α_n) de números positivos t.q. $x_n \in \alpha_n B$ $\forall\, n \geq 1$, e $\alpha_n \longrightarrow 0$.

(iii) Existe um subconjunto limitado e discado B de E t.q., para cada $\varepsilon > 0$ existe um número natural $N = N(\varepsilon)$ t.q. $x_n \in \varepsilon B$ $\forall\, n \geq N$.

DEMONSTRAÇÃO. Vejamos (i) implica (ii):
Para cada $p \in \mathbb{N}$, existe $N_p \in \mathbb{N}$ t.q. $n \geq N_p$ implica $|\lambda_n| \leq 1/p$ então $\lambda_n B \subset (1/p)B$ pois B é discado. Obviamente podemos tomar a sequencia (N_p) estritamente crescente.
Agora para cada natural k t.q. $N_p \leq k \leq N_{p+1}$ pomos $\alpha_k = 1/p$, então (α_k) é a sequencia pedida.
(ii) implica (iii) é imediato pois B é discado e α_n tende a zero.
(iii) implica (i) segue facilmente se tomamos $\lambda_n = \varepsilon_n + 1/n$ $\forall\, n \geq 1$, onde $\varepsilon_n = \inf\{\varepsilon > 0 \,/\, x_n \in \varepsilon B\}$. ∎

DEFINIÇÃO 1. Sejam, E um e.b.c. e (x_n) uma sequencia de elementos dele. Dizemos que a sequencia (x_n) <u>converge bornològicamente a zero</u>, e denotamos isto por $x_n \twoheadrightarrow 0$, se ela satisfaz as afirmações equivalentes da Prop. 1.
Dizemos que uma sequencia (x_n) de elementos de E converge bornològicamente a $x \in E$, e denotamos isto por $x_n \twoheadrightarrow x$, se a sequencia $(x_n - x)$ converge bornològicamente a zero.

A proposição seguinte é imediata.

PROPOSIÇÃO 2. Sejam, E um e.b.c., (x_n) e (y_n) duas sequencias de elementos dele, (λ_n) uma sequencia de elementos de $\mathbb{K}$, $\lambda \in \mathbb{K}$ e $x, y \in E$. Então:

(i) $x_n \twoheadrightarrow x$ e $y_n \twoheadrightarrow y$ implica $x_n + y_n \twoheadrightarrow x + y$.

(ii) $x_n \twoheadrightarrow x$ e $\lambda_n \twoheadrightarrow \lambda$ implica $\lambda_n x_n \twoheadrightarrow \lambda x$.

Além disso se F é outro e.b.c. e f uma b-aplicação linear de E em F, temos:

(iii) $x_n \twoheadrightarrow x$ implica $f(x_n) \twoheadrightarrow f(x)$ em F

DEFINIÇÃO 2. Dizemos que um e.b.c. $E_{\mathcal{B}}$ é um <u>e.b.c. de Hausdorff</u> ou <u>separado</u> (e.b.c.s.) ou que $\mathcal{B}$ é uma bornologia separada se o único subespaço vetorial limitado dele é o subespaço trivial $\{0\}$

ou, o que é equivalente, se para todo $x \neq 0$ em E, o subespaço $\mathbb{K}x = \{\lambda x \ / \ \lambda \in \mathbb{K}\}$ não é limitado em E.

É imediato, da definição acima, que um subespaço bornológico de um e.b.c.s. é um e.b.c.s. e que o produto de e.b.c.s. é um e.b.c.s. Estes resultados também podem ser obtidos como um corolário de (iii) da Prop. 2 e da seguinte:

PROPOSIÇÃO 3. Seja E um e.b.c. Então E é um e.b.c.s. sss toda sequencia bornológicamente convergente de E possui um único limite.

DEMONSTRAÇÃO. Necessidade:

Seja (x_n) uma sequencia em E t.q. $x_n \twoheadrightarrow x$ e $x_n \twoheadrightarrow y$ com x e y em E, da Prop. 2 temos que $x_n - x_n = 0 \twoheadrightarrow x-y$.

Bastará então mostrar que se a sequencia nula (0_n) converge bornológicamente a $z \in E$ devemos ter $z = 0$. Por absurdo, suponhamos $z \neq 0$, da Def.1 segue que existem um subconjunto limitado e discado B de E e uma sequencia (r_n) de números positivos convergindo a zero t.q. $0_n - z = -z \in r_n B$ $\forall\, n \geq 1$ de onde $z \in r_n B$ $\forall\, n \geq 1$ pois B é discado, isto implica $\mathbb{K}z \subset B$, de fato se $k \in \mathbb{K}$ temos $kz \in kr_n B$ $\forall\, n \geq 1$ mas tomando n t.q. $r_n \leq 1/|k|$ segue que $kz \in B$ que é discado, consequentemente $\mathbb{K}z$ é limitado, uma contradição com Def. 2.

Suficiência:

Por absurdo, suponhamos que existe $z \neq 0$ em E t.q. $\mathbb{K}z$ é limitado, então existe um subconjunto limitado e discado B de E t.q. $\mathbb{K}z \subset B$ disto segue que $z \in (1/n)B$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$ de onde pela Def. 1 $z \twoheadrightarrow 0$ mas obviamente $z \twoheadrightarrow z$ consequentemente $z = 0$ uma contradição, o que conclui a prova.∎

PROPOSIÇÃO 4. Seja E_τ um e.l.c. não necessáriamente de Hausdorff então temos: τ é uma topología de Hausdorff sss $b\tau$ é uma bornología separada.

DEMONSTRAÇÃO. Denotemos por $\mathcal{V}$ a família de todas as vizinhanças do zero em E, e ponhamos $S = \bigcap_{V \in \mathcal{V}} V$.

Vejamos a necessidade:

Suponhamos por absurdo que existe $x \neq 0$ em E t.q. $\mathbb{K}x$ é limitado aí, segue que existe um subconjunto limitado e discado B de E t.q. $\mathbb{K}x \subset B$, agora se $V \in \mathcal{V}$ existe $\lambda > 0$ t.q. $\lambda B \subset V$ logo $\lambda(\mathbb{K}x) = \mathbb{K}x \subset V$ consequentemente $\mathbb{K}x \subset S$ mas $S = \{0\}$ pois τ é -

de Hausdorff, uma contradição.

Vejamos a recíproca:

Também por absurdo, suponhamos que existe um $x \neq 0$ em E t.q. $x \in S$. Agora, sejam $V \in \mathcal{V}$ e $k \in \mathbb{K}$ veremos que $kx \in V$, de fato $k = 0$ é trivial e o caso $k \neq 0$ é imediato pois $(1/k)V \in S$ consequentemente $\mathbb{K}x \subset V$; i.e., $\mathbb{K}x$ é $\beta\tau$-limitado pois é absorvido por toda vizinhança do zero de E, uma contradição.∎

DEFINIÇÃO 5. Dizemos que um e.b.c. E_β é um <u>e.b.c. regular</u> (e.b.c.r.) se τ_β é uma topologia de Hausdorff sobre E.

OBSERVAÇÃO. Todo e.b.c.r. é um e.b.c.s. mas a recíproca não é verdadeira em geral (vide III.3 de [3']). No entanto da Def. 8 e a Prop. 4 temos que todo e.b.c.s. e topológico é um e.b.c.r.

<u>Daqui em diante um e.b.c. será sempre um e.b.c.s.</u>

LEMA 1.- Seja E um e.b.c. e B um subconjunto limitado e discado de E. Então E_B é normado.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $x \in E_B$ e suponhamos $q_B(x) = 0$, da definição de q_B segue que existe uma sequencia (r_n) de números positivos t.q. $r_n \twoheadrightarrow q_B(x) = 0$ e $x \in r_n B$ $\forall\, n \geq 1$, daí pela Def. 1 temos que $x \twoheadrightarrow 0$ mas óbviamente $x \twoheadrightarrow x$ consequentemente da Prop. 3 $x = 0$.∎

OBSERVAÇÃO. Num espaço normado os homotéticos da bola unitaria formam, tanto uma base de vizinhanças da origem quanto uma base de limitados para a bornología canônica, consequentemente temos que a convergencia em norma; i.e., a convergencia topológica é equivalente à convergencia bornológica (com respeito à bornología canônica).

PROPOSIÇÃO 5. Seja E um e.b.c. e $(x_n)_{n\geq 1}$ uma sequencia de elementos dele. Então: $x_n \twoheadrightarrow x_0 \in E$ sss existe um subconjunto limitado e discado B de E t.q. $\{x_n \,/\, n \geq 0\} \subset E_B$ e $x_n \longrightarrow x_0$ na norma de E_B.

DEMONSTRAÇÃO. A suficiência é consequencia imediata da observação acima e (iii) da Prop. 2 pois a inclusão canônica de E_B em E é limitada.

Vejamos a necessidade:

Como $x_n \twoheadrightarrow x$ existe um subconjunto limitado e discado B' de E e uma sequencia (r_n) de números positivos convergindo a zero t.q. $x_n - x_0 \in r_n B'$ $\forall n \geq 1$. Agora, usando (B-5) e (B-3) da Def. 1.1 e a observação depois da Def. 1.3, resulta que existe um subconjunto limitado e discado B de E t.q. $\Gamma_B\{x_0\} + B' \subset B$ de onde segue-se fácilmente que $\{x_n \, / \, n \geq 0\} \subset E_B$.

Agora, como $B' \subset B$ implica $x_n - x_0 \in r_n B$ $\forall n \geq 1$ e como $r_n \longrightarrow 0$ temos que $x_n \longrightarrow x$ em E_B. ∎

§ 3 - BORNOLOGIAS COMPLETAS E O TEOREMA DO GRAFICO FECHADO

DEFINIÇÃO 1. Seja E um e.b.c. Dizemos que E é um __e.b.c. completo__ se existir em E uma base bornológica formada por subconjuntos discados (e limitados) de E t.q. para todo elemento B dessa base E_B é um espaço de Banach.

A seguinte proposição nos dá um exemplo de e.b.c. completo.

PROPOSIÇÃO 1. Seja E_τ um e.l.c., então E'_{be} é um e.b.c. completo.

DEMONSTRAÇÃO. Obviamente (vide (30)) a familia formada pelos polares dos elementos de uma base de vizinhanças do zero de E, constitui uma base de bornologia para E'_{be}. Temos então que nossa afirmação seguirá da observação depois da proposição 0.1.1 (ou de (31), (26) e a Prop. 0.1.7) se provamos que be é uma bornologia separada, mas isto é verdade pois be é regular, de fato, veremos que $\tau(be)$ é mais fina que $\beta(E',E)$ que é uma topologia de Hausdorff (vide (28)).

Agora, seja B° uma $\beta(E',E)$-vizinhança do zero em E', onde B é um subconjunto $b\tau$-limitado de E, da observação depois da definição 1.8 vemos que bastará provar que B° é um be-bornívoro; o que se cumprirá se demonstrarmos que B° absorve o polar V° de qualquer τ-vizinhança V do zero de E (vide (30)), mas isto é imediato pois como B é $b\tau$-limitado existe um $\lambda > 0$ t.q. $B \subset \lambda V$ de onde $V^\circ \subset (1/\lambda) B^\circ$ o que completa a prova. ∎

DEFINIÇÃO 2. Sejam, E um e.b.c. e S um subconjunto dele. Dizemos que S é M-fechado (Mackey fechado) em E, se ele satisfaz a seguinte condição:

(M-F) Para todo subconjunto limitado e discado B de E, $S \cap E_B$ é fechado no espaço normado E_B .

PROPOSIÇÃO 2. Sejam, E um e.b.c. e S um subconjunto dele. Então: S é $\mathfrak{M}$-fechado em E sss para toda sequencia (x_n) de elementos de S, $x_n \twoheadrightarrow x \in E$ implica $x \in S$.

DEMONSTRAÇÃO. Suponhamos que S é $\mathfrak{M}$-fechado e que (x_n) é uma sequencia de elementos de S t.q. $x_n \twoheadrightarrow x_o$ para algum x_o em E. Da Prop. 2.5 existe um subconjunto limitado e discado $B \subset E$ t.q. $x_n \in E_B$ $\forall n \geq 0$ e $x_n \longrightarrow x_o$ em E_B , porém $\{x_n \,/\, n \geq 1\} \subset S \cap E_B$ - que é fechado em E_B , logo $x_o \in S$.

Recíprocamente: Seja B um subconjunto limitado e discado de E e tomemos um elemento x de E_B pertenecente ao fecho de $S \cap E_B$ em E_B , segue que existe uma sequencia (x_n) de elementos de $S \cap E_B$ - (em particular de S) convergindo a x na norma de E_B , de onde usando a Prop. 2.5 temos que $x_n \twoheadrightarrow x$ em E, logo da hipótese obtemos $x \in S \cap E_B$, consequentemente $S \cap E_B$ é fechado em E_B.∎

O seguinte resultado é trivial.

LEMA 1. Sejam E e F dois e.b.c., A [B resp.] um subconjunto limitado e discado de E [F resp.], então:

$$(E \times F)_{A \times B} = E_A \times F_B \quad \text{e} \quad \|(x,y)\|_{A \times B} = \sup\{\|x\|_A \,,\, \|y\|_B\}$$

Também:

$(E \times F)_{A \times B}$ e $(F \times E)_{B \times A}$ são isomorfos como espaços normados.

LEMA 2. Sejam, E e F dois espaços de Banach e f uma aplicação linear contínua de E em F. Então f não sobrejetiva implica - $f(E)$ magro; i.e., reunião enumerável de conjuntos cujos fechos - tem interior vazio.

DEMONSTRAÇÃO. Seja B_1 a bola unitaria fechada de E, temos que:

$$f(E) = \bigcup_{n \geq 1} n f(B_1).$$

Bastará mostrar que $\overset{\circ}{\overline{f(B_1)}} = \emptyset$. Suponhamos o contrario, então - como $\overline{f(B_1)}$ é discado, é facil ver que ele é uma bola fechada de F (com centro na origem). Usando (63) segue imediatamente que - existe uma bola $B'_r(0)$ de F contida em $f(B_1)$.

Finalmente, da primeira igualdade acima e como $F = \bigcup_{n \geq 1} nB'_r$ resulta $f(E) = F$, uma contradição.∎

PROPOSIÇÃO 3 (Teorema do gráfico fechado para e.b.c.). Sejam E e F dois e.b.c. completos e u uma aplicação linear de E em F.

Ponhamos $G = \text{Graf}\ (u)$; i.e., G é o gráfico de u. Então:

(a) u limitada implica G M-fechado em $E \times F$ munido da bornologia produto.

(b) A recíproca de (a) é válida se F fôr um e.b.c. completo com base bornológica enumerável.

DEMONSTRAÇÃO. (a) Usaremos a Prop. 2. Seja $((x_n , u(x_n)))$ uma sequencia de elementos de G t.q. $(x_n , u(x_n)) \twoheadrightarrow (x,y) \in E \times F$. Da Prop. 2.5, definição da bornologia produto e lema 1 temos:

$$x_n \twoheadrightarrow x \quad \text{em} \quad E \quad \text{e} \quad u(x_n) \twoheadrightarrow y \quad \text{em} \quad F \text{ .}$$

Daí e das Props. 2.2 e 2.3 resulta $y = u(x)$; i.e., $(x,y) \in G$.

(b) Bastará demonstrar que $u(B)$ é limitado em F, onde B é um elemento arbitrário de uma base bornológica $\mathcal{B}$ de E - satisfazendo a Def. 1.

Das hipóteses é imediato que F possui uma base bornológica enumerável (B_n), satisfazendo a Def. 1.

Agora, do lema 1 acima, segue que os produtos cartesianos dos elementos de $\mathcal{B}$ com os B_n formam uma base da bornologia produto sobre $E \times F$ satisfazendo a Def. 1. Logo, pondo $F_n = F_{B_n}$ $\forall\, n \geq 1$, temos:

$$\forall\, n \geq 1 \quad G_n = G \cap (E_B \times F_n) \text{ é um subespaço de Banach de } E_B \times F_n \text{ .}$$

Para cada $n \geq 1$ consideremos a aplicação linear, contínua e injetora p_n de G_n em E_B , restrição a G_n da projeção canônica de $E_B \times F_n$ sobre E_B . Veremos por absurdo que existe algum $m \geq 1$ t.q. p_m é sobrejetiva. De fato, suponhamos que $\forall\, n \geq 1$ p_n não é - sobrejetiva, então do lema 2 seguirá que $p_n(G_n)$ é magro $\forall\, n \geq 1$. Por outro lado de $F = \bigcup_{n \geq 1} F_n$ segue imediatamente que $E_B = \bigcup_{n \geq 1} p_n(G_n)$ de onde segue-se facilmente que o espaço de Banach E_B é magro, uma contradição.

Seja m um natural para o qual p_m é sobrejetiva. Daí, e como óbviamente $p_m(G_m) \subset u^{-1}(F_m)$, resulta que $u(E_B) \subset F_m$. Podemos então definir uma aplicação linear $\tilde{u}$ de E_B em F_m pondo - $\tilde{u}(x) = u(x)$ para todo x em E_B .

Como $\text{Graf}\ (\tilde{u}) = G_m$ é fechado em $E_B \times F_m$, do teorema do gráfico - fechado para espaços de Banach (vide (6)) resulta que $\tilde{u}$ é contínua. Disto e do fato que a inclusão natural de F_m em F é limi tada, temos finalmente que $u(B)=\tilde{u}(B)$ é limitado em F. ∎

COROLÁRIO. Sejam E e F dois e.b.c. completos t.q. E possui uma base bornológica enumerável. Se u é uma b-aplicação linear e bijetora de E sobre F, então u é um b-isomorfismo.

§ 4 - DUALIDADE BORNOLÓGICA

DEFINIÇÃO 1. Uma forma linear limitada (b-forma linear) sobre um e.b.c. E é uma b-aplicação linear de E em $\mathbb{K}$ munido da bornologia canônica.

Denotamos por $E^{\times}$ o subespaço vetorial de E^* formado por todas as b-formas lineares sobre E. O espaço vetorial $E^{\times}$ será chamado o dual bornológico (b-dual) de E.

O seguinte lema é trivial.

LEMA 1. Sejam E e F dois e.b.c. e u uma b-aplicação linear de E em F. Se Q é um bornívoro em F, então $u^{-1}(Q)$ é um bornívoro de E.

PROPOSIÇÃO 1. Seja E um e.b.c. Se f é uma b-forma linear sobre E, então ela é limitada sobre algum bornívoro de E.

DEMONSTRAÇÃO. Seja D a bola unitaria fechada de $\mathbb{K}$, ela é um limitado e um bornívoro de $\mathbb{K}$. Nossa afirmação segue imediatamente pois $Q=f^{-1}(D)$ é um bornívoro de E e $f(Q)\subset D$. ∎

NOTAÇÃO. Dado um e.b.c. E com bornologia $\mathcal{b}$, E' [E'' resp.] indicará o dual [bidual resp.] de $E_{\tau\mathcal{b}}$ (no sentido topológico). Consequentemente, por exemplo, $\beta(E',E)$ indicará a topologia $\beta((E_{\tau\mathcal{b}})', E_{\tau\mathcal{b}}))$ sobre E'.

Análogamente se E é um e.l.c. com topología τ, $E^{\times}$ indicará o b-dual de $E_{\mathcal{b}\tau}$.

COROLÁRIO. Seja $E_{\mathcal{b}}$ um e.b.c. Temos $E^{\times}=E'$ (como conjuntos).

DEMONSTRAÇÃO. Da Prop. 1 resulta que toda b-forma linear sobre $E_{\mathcal{b}}$ é uma b-forma linear sobre $E_{\mathcal{b}(\tau\mathcal{b})}$, consequentemente $E^{\times}\subseteq E'$ segue imediatamente de (39) pois $E_{\tau\mathcal{b}}$ é um e.l.c. bornológico. A outra inclusão é obvia. ∎

O corolário acima e o fato de que um e.l.c. X e seu dual X' formam um par dual sss X é de Hausdorff, nos permitem dar a seguinte:

DEFINIÇÃO 2. Seja E_b um e.b.c.r. Dizemos que E_b é reflexivo se $E_b = (E_{\mathfrak{F}}^X)'_{be}$, onde $\mathfrak{F}$ é a topologia da convergencia uniforme sobre os subconjuntos b-limitados de E.

OBSERVAÇÃO. Em geral temos $\mathcal{B}(E_b) \subsetneq \mathcal{B}(E'_{b(\tau b)})$, (vide Ex. Nº7 do capítulo XI de [3']). Porém se b fôr topologica teremos igualdade, nesse caso $\mathfrak{F} = \beta(E',E)$.

LEMA 2. Seja X um e.l.c. metrizável. Então $\tau(be) = \beta(X',X)$ sobre X' sss X é distinguido; i.e., todo subconjunto $\sigma(X'',X)$-limitado de seu bidual X'' está contido no $\sigma(X'',X')$-fecho de algum subconjunto $b\tau$-limitado de X.

DEMONSTRAÇÃO. A necessidade segue de (55). Vejamos a suficiencia: De (40) e (39) temos que X é infra-tonelado, de onde por (38) segue que todo subconjunto $b(\beta(X',X))$-limitado de X' é equicontínuo aí. Portanto a aplicação identidade de $X'_{\beta(X',X)}$ em $X'_{\tau(be)}$ é limitada e consequentemente contínua (usar (55) e (39)); i.e., $\tau(be) \leq \beta(X',X)$ sobre X'. Por outro lado $\beta(X',X) \leq \tau(be)$ é válido para todo e.l.c. (vide Prop. 3.1).∎

A seguir enunciamos na linguagem bornologica um fato bem conhecido da teoria dos e.l.c. (vide (38) e (35)).

LEMA 3. Seja X_τ um e.l.c., então:

X é infra-tonelado sss $b(\beta(X',X)) = be$ sobre X'.

PROPOSIÇÃO 2. Seja E_b um e.b.c.r. e topologico. Então E_b é um e.b.c. reflexivo se $E_{\tau b}$ é um e.l.c. reflexivo.
A recíproca é válida se E' , munido da topologia $\beta(E',E)$ é metrizável e distinguido.

DEMONSTRAÇÃO. Da observação depois da Def. 2 temos que $b = b(\tau b)$ implica $(E_{\mathfrak{F}}^X)' = E''$ (como conjuntos).
Agora, usando a reflexividade de $E_{\tau b}$ e o lema 3 (com $X = E'$ e $\tau = \beta(E',E)$) temos $E_{b(\tau b)} = E''_{be}$ de onde segue a primeira parte da proposição, (vide (64) e (45)).
A segunda afirmação é consequencia imediata do lema 2 acima.∎

Daquí em diante quando falarmos de propriedades fracas com respeito a um e.b.c. E_b entenderemos que são propriedades fracas, no sentido usual, com respeito ao e.l.c. $E_{\tau b}$.

TEOREMA 1 (Teorema de Mackey-Arens para e.b.c.). Um e.b.c.r. E é reflexivo sss E possui uma base bornológica formada por subconjuntos limitados, discados e w-compactos.

DEMONSTRAÇÃO. Observemos primeiro que se $(B_i)_{i\in I}$ é uma base bornologica de E, então os polares B_i^o dos B_i formam uma base de vizinhanças do zero em $E_{\mathfrak{S}}^{\times}$, consequentemente a familia $({}^{*}(B_i^o))$ é uma base bornologica em $(E_{\mathfrak{S}}^{\times})'_{be}$.
Agora, se E fôr reflexivo, usando a observação que acabamos de fazer teremos que a familia $({}^{*}(B_i^o))$ constitui uma base bornologica de E. Para obter a necessidade bastará mostrar que os ${}^{*}(B_i^o)$ são w-compactos em E, mas isto segue do corolário da Prop. 0.1.3 pois os ${}^{*}(B_i^o)$ são $\sigma(E'',E')$-compactos (aplicar (26) e (31) a E' munido da topologia $\beta(E',E)$).
Por outro lado, seja $(B_j)_{j\in J}$ uma base bornologica de E satisfazendo a hipótese suficiente. Para ver que E é reflexivo bastará provar que $B_j = {}^{*}(B_j^o)$ $\forall\ j\in J$, mas isto é consequencia imediata da Prop. 0.1.3 pois os B_j são w-compactos e $\forall\ j\in J$ ${}^{*}(B_j^o)$ é o $\sigma(E'',E')$-fecho de B_j (vide a demonstração de (b) implica (a) na Prop. 0.1.4).∎

COROLARIO. Todo e.b.c. reflexivo E é um e.b.c. completo.

DEMONSTRAÇÃO. E tem uma base bornologica $(B_j)_{j\in J}$ onde cada B_j é discado e w-compacto, portanto também w-completo (vide (14)). O corolário segue então da Prop. 0.1.7 e da Def. 3.1 (recordar o lema 1.2.1).∎

§ 5 - BORNOLOGIAS INICIAIS E LIMITES PROJETIVOS BORNOLOGICOS

DEFINIÇÃO 1. Sejam, E um espaço vetorial, $(F_i)_{i\in I}$ uma familia de e.b.c. e para cada $i\in I$ f_i uma aplicação linear de E em F_i. A <u>bornologia inicial</u> sobre E dada pela familia (f_i) será a bornologia menos fina sobre E tornando limitadas as aplicações f_i. Evidentemente esta bornologia existe e seus limitados são todos os subconjuntos B de E t.q. $\forall\ i\in I$ $f_i(B)$ é limitado em F_i.

EXEMPLO 1. A bornologia produto sobre o produto cartesiano $E = \prod F_i$ dos elementos de uma familia $(F_i)_{i\in I}$ de e.b.c. é a bornologia inicial dada pela familia (π_i) formada pelas projeções canônicas de E sobre F_i (vide Def. 1.4-c e também comentário depois da Def. 2.2).

O seguinte resultado é trivial.

PROPOSIÇÃO 1. Nas condições da Def. 1, se D é outro e.b.c. e u uma aplicação linear de D em E, então u é limitada ssc $f_i \circ u$ de D em F_i é limitada $\forall\, i \in I$.

Usando eventualmente os resultados acima, temos que: As definições 0.2.1, 0.2.2, 0.2.3 e 0.2.4, as proposições 0.2.1, 0.2.2, 0.2.3 e 0.2.7, asim como também a observação depois da definição 0.2.3, o exemplo depois da Def. 0.2.4 e o corolário da proposição 0.2.3, permanecen válidas se trocarmos: e.l.c. por e.b.c., contínuo por limitado e isomorfo por b-isomorfo. Referencias as definições e proposições asim obtidas serão indicadas com a numeração inicial precedidas de b- , asim por exemplo Def. b-0.2.3 indicará a Def. 0.2.3 com as mudanças antes mencionadas.
Poremos b-s.p. para indicar que o sistema projetivo considerado está formado de e.b.c., análogamente b-l.p. indicará que o limite projetivo é considerado no sentido bornologico.
Obviamente quando os espaços em consideração são normados ou de Banach poderemos falarmos de sistemas projetivos bornologicos fracamente compactos. Nestes casos poremos simplesmente s.p. por b-s.p. e s.p.w-c. por b-s.p.w-c. (vide observação depois de lema 2.1). Trocando e.l.c. por espaço normado na Prop. 0.2.8 e com as mudanças indicadas acima obtemos a Prop. b-0.2.8.
Finalmente se (F_n, v_n) é um b-s.p. e E seu b-l.p. poremos:
$E = \varprojlim F_n$.

OBSERVAÇÃO. Se (F_n, v_n) é um s.p. de espaços de Banach, das Props 0.2.3 e b-0.2.3, podemos considerar $\varprojlim F_n = \varprojlim F_n$ (como conjuntos).

TEOREMA 1. Seja (F_n, v_n) um s.p. de espaços de Banach, então:

(a) $E_{\tau} = \varprojlim F_n$ implica $E_{b\tau} = \varprojlim F_n$

(b) $E_{b} = \varprojlim F_n$ implica $E_{\tau b} = \varprojlim F_n$

DEMONSTRAÇÃO. (a) Segue imediatamente da Prop. 0.2.1 e de (16).
Vejamos (b): Ponhamos $E_{\tau'} = \varprojlim F_n$. De (16) segue que a aplicação identidade de $E_{\tau'}$ em $E_{\tau b}$ é limitada, consequentemente contínua (vide (39), (40) e Prop. 0.2.4-a). Por outro lado da Prop. 0.2.5 temos que a familia $(V_n = (1/n)p_n^{-1}(B_n))_{n \geq 1}$, onde B_n é a bola unitária de F_n , é um sistema fundamental de τ'-vizinhanças, então para mostrar que a aplicação identidade de $E_{\tau b}$ em $E_{\tau'}$ é contínua bastará provar que cada V_n é um b-bornívoro, mas isto é trivial pois dado V_m e se B é um subconjunto b-limitado de E, segue que

existe $r_m > 0$ t.q. $p_m(B) \subset r_m a_m$ consequentemente $B \subset (m r_m) V_m$. ∎

COROLÁRIO. Todo e.b.c. que é b-l.p. de um s.p. de espaços de Banach é topologico.

§ 6 - BORNOLOGIAS FINAIS E LIMITES INJETIVOS BORNOLOGICOS

DEFINIÇÃO 1. Sejam, F um espaço vetorial, $(E_i)_{i \in I}$ uma familia de e.b.c. e para cada $i \in I$ g_i uma aplicação linear de E_i em F. A bornologia final sobre E dada pela familia (g_i) de funções lineares será a bornologia mais fina sobre F tornando limitadas as aplicações g_i. Evidentemente esta bornologia existe e se $\mathcal{B}_i$ é uma base bornológica para E_i então a familia:

$$\{g_i(B_i) \ / \ i \in I \quad e \quad B_i \text{ percorre } \mathcal{B}_i\}$$

constitui uma base bornologica para a bornologia final acima.

EXEMPLO 1. Seja $(E_i)_{i \in I}$ uma familia de e.b.c. A bornologia soma direta sobre o espaço vetorial $F = \coprod E_i$ é a bornologia final dada pela familia formada pelas injeções canônicas dos E_i em F.

O seguinte resultado é imediato.

PROPOSIÇÃO 1. Nas condições da Def. 1, se G é outro e.b.c. e u uma aplicação linear de F em G, então u é limitada sss $u \circ g_i$ de E_i em G é limitada $\forall\ i \in I$.

Procedendo como no §5 (vide comentário após Prop.5.1) obtemos as definições b-0.3.1, b-0.3.2, b-0.3.3 e b-0.3.4, as proposições - b-0.3.1, b-0.3.2, b-0.3.3, b-0.3.4 e b-0.3.5 e também a observação depois da Def. 0.3.3, a observação depois da Prop. 0.3.3 e o exemplo após Def. 0.3.4.
Análogamente, b-s.i. indicará que o sistema injetivo considerado está formado de e.b.c., e b-l.i. significará que o limite injetivo é considerado no sentido bornologico. Da mesma forma quando o b-s.i. está formado por espaços normados ou de Banach poremos simplesmente s.i. por b-s.i. e poderemos falarmos de s.i.w-c.
Vale a Prop. b-0.3.6 trocando e.l.c. por espaço normado na Prop. 0.3.6.

Finalmente, se (E_n, u_n) é um b-s.i. e F seu b-l.i. poremos $F = \varinjlim E_n$ o que está justificado pela seguinte:

PROPOSIÇÃO 2. Seja (E_n, u_n) un b-s.i. e F seu b-l.i. então F é separado. (Confrontar com Prop. 0.3.7).

DEMONSTRAÇÃO. Seja $\mathfrak{M}$ um subespaço limitado de F, então da Prop. b-0.3.1 e da Def. 1 (vide também Def. b-0.3.3 para a notação) temos que existe um natural $n \geq 1$ e um limitado básico em E_n t.q. $\mathfrak{M} \subset i_n(B_n)$. Daí como i_n é injetora segue-se que $i_n^{-1}(\mathfrak{M})$ é um subespaço de E_n contido em B_n, consequentemente $i_n^{-1}(\mathfrak{M}) = \{0\}$ Finalmente nossa afirmação segue de $\mathfrak{M} = i_n(i_n^{-1}(\mathfrak{M})) = \{0\}$. ∎

OBSERVAÇÃO. Se (E_n, u_n) é um s.i. de espaços de Banach, das Props. 0.3.3 e b-0.3.3, podemos considerar $\varinjlim F_n = \varinjlim F_n$ (como conjuntos).

A seguinte proposição é uma consequencia trivial da Prop.b-0.3.1 e da Def. 1, e nos dá um análogo mais forte do corolário da Prop 0.3.7.

PROPOSIÇÃO 3. Sejam, (E_n, u_n) um s.i. formado por espaços normados e F seu b-l.i. Se V_n é uma bola fechada em E_n t.q. $V_n \supset \bigcup_{1 \leq k \leq n} u_{n_k}(nB_k)$, onde B_k é a bola unitaria fechada de E_k. Então a familia $(i_n(V_n))_{n \geq 1}$ constitui uma base bornologica crescente em F.

TEOREMA 1. Seja (E_n, u_n) um s.i.s.w-c. de espaços de Banach.

(a) $F_\tau = \varinjlim E_n$ implica $F_{b\tau} = \varinjlim E_n$

(b) $F_b = \varinjlim E_n$ implica $F_{\tau b} = \varinjlim E_n$

DEMONSTRAÇÃO. (a) é consequencia imediata do corolário 1 da Prop 0.3.7 e da Prop. 3 acima.

Vejamos (b): Ponhamos $F_{\tau'} = \varinjlim E_n$. Novamente da Prop. 3 e do corolário 1 da Prop. 0.3.7 temos $b(\tau') = b$ daí como $F_{\tau'}$ é bornologico (vide (41)) segue que $\tau' = \tau(b(\tau')) = \tau b$. ∎

COROLÁRIO 1. Vale a proposição b-0.3.8.

Usando a Prop. 0.3.7 temos o seguinte:

COROLARIO 2. O b-l.i. de um s.i.w-c. de espaços de Banach é topologicó e regular.

OBSERVAÇÃO. Das Props. 0.3.5, 0.3.6, b-0.3.5 e b-0.3.6 segue-se que o Teor. 1 acima e seus corolários valem para s.i.w-c. de espaços normados.

CAPITULO DOIS : ESPAÇOS INFRA-SILVA

§ 1 - ESPAÇOS INFRA-SILVA BORNOLOGICOS

DEFINIÇAO 1. Dizemos que um e.b.c. $E_{\mathcal{b}}$ é um <u>espaço infra-Silva bornológico</u> (b-e.i-S.) se ele satisfaz as seguintes condições:

(IS-1) Existe em E uma base bornológica enumerável e crescente $B_1 \subset B_2 \subset \ldots$ formada por subconjuntos discados de E.

(IS-2) Para cada $n \geq 1$, a injeção canônica u_n de E_{B_n} em $E_{B_{n+1}}$ é w-compacta.

NOTAÇÃO. Para todo $n \geq 1$ poremos $E_n = E_{B_n}$ e indicaremos por i_n a injeção canônica de E_n em E que é limitada. É imediato que $\mathcal{b}$ é a bornologia final dada pela familia (i_n).

TEOREMA 1. Com as notações acima. Se E é um b-e.i-S. então (E_n, u_n) é um s.i.w-c. e $E = \varinjlim E_n$.

DEMONSTRAÇÃO. Obviamente (E_n, u_n) é um s.i.w-c. Ponhamos $F = \varinjlim E_n$ e denotemos por j_n as b-aplicações lineares injetivas de E_n em F correspondentes.

Da Def. b-1.3.3 existe uma b-aplicação linear injetora f de F em E t.q. $\forall\, n \geq 1 \quad f \circ j_n = i_n$ (*).

Agora, dado $x \in E = \bigcup E_n$ existe $m \geq 1$ t.q. $x \in E_m$. Pondo $y = j_m(x) \in F$ temos, usando (*) para $n = m$, $f(y) = x$ de onde concluimos que f é sobrejetora.

Finalmente, usando novamente (*), resulta: $\forall\, n \geq 1 \quad f^{-1} \circ i_n = j_n$ que é limitada. Portanto, da observação acima e da Prop. 1.6.1 segue que f^{-1} é também limitada, o que conclui a prova.∎

Do Teor. 1.6.1 e seu corolário 2 temos imediatamente o seguinte:

COROLÁRIO. Se $E_{\mathcal{b}}$ é um b-e.i-S. então ele é um e.b.c. topológico e regular, além disso $E_{t\mathcal{b}} = \varinjlim E_n$.

Da Prop. 1.6.3 e o corolário 1 do Teor. 1.6.1; i.e., b-0.3.8, resulta trivialmente o seguinte recíproco do teorema 1 acima.

TEOREMA 2. Se um e.b.c. F é o b-l.i. de um s.i.s.w-c. de espaços de Banach, então F é um b-e.i-S.

OBSERVAÇÃO. Da Prop. b-0.3.6 (vide comentário após Prop. 1.6.1). Temos que o teorema 2 acima vale se F é o b-l.i. de um s.i.w-c. de espaços normados.

Usando a Def. 1, (46) e o fato de que $\forall n \geq 1$ $i_n = i_{n+1} \circ u_n$ é w-compacta pois as u_n o são, e as i_n são w-contínuas (vide(52) (39), lema 1.2.1 e (40)), temos o seguinte:

LEMA 1. Todo subconjunto limitado e w-fechado B de um b-e.i-S. - E_b é w-compacto em E. Além disso se $B \subset E_{n-1}$ (denotaremos por B_n ao conjunto B considerado como subconjunto de E_n) a injeção i_n de E_n em E restrita a B_n é um w-homeomorfismo de B_n sobre B, em particular:

(a) Uma sequencia (x_k) em E converge fracamente ao zero em E sss existe $n \geq 1$ t.q. $x_k \in E_n$ $\forall k \geq 1$ e a sequencia (x_k) converge a zero na norma de E_n.

(b) Um subconjunto B de E é w-compacto em E sss existe $n \geq 1$ t.q. $B \subset E_n$ e B é w-compacto em E_n.

OBSERVAÇÃO. O lema acima é válido para todo subconjunto limitado de E se trocamos, exceto em (a), w-compacto por w-relativamente compacto.

PROPOSIÇÃO 1. Todo b-e.i-S. E é um e.b.c. reflexivo e completo.

DEMONSTRAÇÃO. Do corolário do Teor. 1 temos $b(\tau b) = b$ portanto podemos considerar os conjuntos dados em (IS-1) como w-fechados (usar (6) e (34)). Consequentemente a proposição segue do Teor. 1.4.1 e seu corolário pois, do lema 1 acima, $\forall n \geq 1$ os B_n dados em (IS-1) são w-compactos em E. ∎

OBSERVAÇÃO. Usando a Prop. 0.1.7 podemos mostrar diretamente que E é completo pois ao tomar os B_n w-fechados em E eles resultam - w-completos em E; i.e., os E_n correspondentes são espaços de Banach. Daquí em diante suporemos feito isto.

TEOREMA 3. Seja E um e.b.c. As seguintes afirmações são equivalentes:

(i) E é um b-e.i-S.

(ii) E possui uma base bornologica enumerável formada por - subconjuntos discados (e limitados) de E e para cada subconjunto limitado A de E existe outro subconjunto limitado B de E t.q. - $A \subset B$ e a injeção canônica de E_A em E_B é w-compacta.

(iii) E tem uma base bornologica $(\tilde{B}_{\tilde{n}})$ como em (ii) t.q. dado $\tilde{m} \geq 1$ existe $\tilde{n} > \tilde{m}$ t.q. $\tilde{B}_{\tilde{m}} \subset \tilde{B}_{\tilde{n}}$ e a injeção canônica de $E_{\tilde{m}}$ - em $E_{\tilde{n}}$ é w-compacta.

DEMONSTRAÇÃO. (i) implica (ii) segue de (IS-1). De fato dado o limitado A existe um B_n de (IS-1) que o contem, basta tomar $B = B_{n+1}$. Agora a injeção canônica de E_A em E_B é w-compacta pois é a composição da injeção canônica de E_A em E_n que é w-contínua com u_n que é w-compacta.

Vejamos que (ii) implica (iii). Seja (B_m) a base bornologica mencionada em (ii), óbviamente a familia $(\breve{B}_{\tilde{n}})$ onde $\breve{B}_{\tilde{n}} = \bigcup_{1 \leq k \leq \tilde{n}} B_k$ é uma base bornologica de E. Agora dado $\tilde{m} \geq 1$, de (ii) existe um limitado $B \supset \breve{B}_{\tilde{m}}$ t.q. a injeção canônica de $E_{\tilde{m}}$ em E_B é w-compacta. Por outro lado como a familia $(\breve{B}_{\tilde{n}})$ é uma base bornologica existe $\tilde{n} > \tilde{m}$ t.q. $B \subset B_{\tilde{n}}$. Como na primeira implicação esta parte segue considerando o seguinte diagrama $E_{\tilde{m}} \hookrightarrow E_B \hookrightarrow E_{\tilde{m}}$.

Finalmente (iii) implica (i) é como segue: Dada a base $(\breve{B}_{\tilde{n}})$ é fácil construir uma nova base ("subsequencia" da anterior) $(B_{\tilde{m}(n)})_{n \geq 1}$ satisfazendo (i). Bastará pôr $B_n = B_{\tilde{m}(n)}$. ∎

PROPOSIÇÃO 2. Todo subespaço M-fechado F de um b-e.i-S. E_b é um <u>b-subespaço infra-Silva</u> de E: i.e., um b-e.i-S. com a bornologia induzida bi.

DEMONSTRAÇÃO. Para cada $n \geq 1$, ponhamos $C_n = B_n \cap F$ é imediato que a familia (C_n) satisfaz (IS-1) para F.

Por outro lado, da Def. 1.3.2 e usando a Prop. 0.1.2-(a), temos que $\forall\, n \geq 1$ $F_n \equiv F_{C_n} = F \cap E_n$ é um subespaço fechado de E_n consequentemente $\forall\, n \geq 1$ F_n é um espaço de Banach. Além disso $C_n = F_n \cap B_n$ é fechado em E_m (vide observação depois da Prop. 1 e (29)), portanto C_n é a bola unitaria fechada de F_n.

Agora como a injeção canônica de F_n em E_n é obviamento contínua, de (58) ou (59), temos que ela é um morfismo estrito; i.e., a topologia de E_n induz sobre F_n sua propria topologia. A mesma relação vale para as topologias fracas.

Finalmente, como $C_n \subset C_{n+1}$, podemos definir a aplicação linear v_n de F_n em F_{n+1} como a restrição de u_n a F_n. Obviamente v_n é injetora, veremos que é w-compacta, de fato como C_n é limitada em F_n também o é em E_n consequentemente $v_n(C_n) = u_n(C_n) \subset F_{n+1}$ é w-relativamente compacto em E_{n+1} portanto, do que foi feito no párrafo anterior, também em F_{n+1}. Daí segue-se que (IS-2) é válida para F_{bi}. ∎

PROPOSIÇÃO 3. Seja E_b um b-e.i-S. Se F é um subespaço M-fechado de E, então o espaço quociente $Q \equiv (E/F)$ munido da bornologia quo ciente b_q é um b-e.i-S. chamado b-subespaço infra-Silva quociente de E módulo o subespaço F.

DEMONSTRAÇÃO. Seja φ a projeção canônica de E sobre Q. Obviamente (com as notações da Def. 1) a família $(\varphi(B_n))_{n\geq 1}$ satisfaz (IS-1) para Q.

Para provar (IS-2), devido à Prop. D.1.2, bastará mostrar que $\forall\, n\geq 1$ as injeções canônicas $\tilde{u}_n$ de E_n/F_n em E_{n+1}/F_{n+1} são w-compactas. Mas isto segue imediatamente do seguinte diagrama comutativo. $(Q_n = E_n/F_n)$

$$\begin{array}{ccc} E_n & \xrightarrow{u_n} & E_{n+1} \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi_n} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_{n+1}} \\ Q_n & \xrightarrow{\tilde{u}_n} & Q_{n+1} \end{array}$$

onde $\forall\, n\geq 1$ φ_n é a projeção ao quociente de E_n sobre Q_n que é contínua, e portanto w-contínua (vide (52)).

Como B_n é uma vizinhança do zero em E_n segue-se que $\varphi_n(B_n)$ é uma vizinhança do zero em E_n/F_n.

Finalmente temos $\tilde{u}_n(\varphi_n(B_n)) = \varphi_{n+1}(u_n(B_n))$ com $u_n(B_n)$ w-relativamente compacto em E_{n+1}, consequentemente $\tilde{u}_n$ é w-compacta.

COROLÁRIO. Seja E_b um b-e.i-S. Se F é um súbespaço M-fechado de E, então:

(a) $\tau(bi) = (\tau b)i$ sobre F se $(\tau b)i$ é bornológica, onde $(\tau b)i$ é a topologia induzida por τb sobre F.

(b) $\tau(bq) = (\tau b)q$ sobre E/F, onde $(\tau b)q$ é a topologia quociente de τb (sobre E/F) módulo o subespaço F.

DEMONSTRAÇÃO. (a) Da definição de bornologia induzida temos:

$$\mathcal{B}(F_{bi}) = F\cap\mathcal{B}(E_b) \equiv \{F\cap B \;/\; B\in\mathcal{B}(E_b)\}.$$

Agora como a inclusão de $F_{(\tau b)i}$ em $E_{\tau b}$ é contínua, logo limitada e como $b = b(\tau b)$ e $b(\tau(bi)) = bi$ pois E_b e F_{bi} são e.i-S. resulta: $b((\tau b)i) \geq b(\tau(bi))$, de fato:

$$\mathcal{B}(F_{b((\tau b)i)}) \subset F\cap\mathcal{B}(E_{b(\tau b)}) = F\cap\mathcal{B}(E_b) = \mathcal{B}(F_{bi}) = \mathcal{B}(E_{b(\tau(bi))}),$$

mas $\tau(bi)$ é bornológica, portanto $(\tau b)i \geq \tau(bi)$.

Por outro lado temos:

$$\mathcal{B}(F_{b(\tau(bi))}) = \mathcal{B}(F_{bi}) \subset \mathcal{B}(E_{b(\tau b)}) \quad e \quad \tau(bi) \text{ bornológica.}$$

Portanto a inclusão de $F_{\tau(bi)}$ em $E_{\tau b}$ é contínua, mas $(\tau b)i$ é a topologia menos fina sobre F que torna contínua esta inclusão então $(\tau b)_i \leq \tau(b_i)$.

b) Usando agora a definição de bornologia quociente temos:
$\varphi(\mathcal{B}(E_b)) \subset \mathcal{B}(Q_{b_Q})$ (*), também temos $b(\tau b) = b$ é $b(\tau(b_Q)) = b_Q$ (**).
Agora, como φ de $E_{\tau b}$ em $Q_{(\tau b)_Q}$ é contínua, temos:
$b((\tau b)_Q) \leq b(\tau(b_Q))$, de fato se $L \subset Q$ é $b(\tau(b_Q)) = b_Q$-limitado então existe $B \subset E$ b-limitado logo $b(\tau b)$-limitado t.q. $L \subset \varphi(B)$ portanto L é $b((\tau b)_Q)$-limitado. Daí segue $\tau(b_Q) \geq (\tau b)_Q$ pois $\tau(b_Q)$ é bornológica.
Por outro lado de (*) e (**) resulta $\varphi(\mathcal{B}(E_{b(\tau b)})) \subset \mathcal{B}(Q_{b(\tau(b_Q))})$
e como τb é bornológica segue-se φ de $E_{\tau b}$ em $Q_{\tau(b_Q)}$ é contínua, mas $(\tau b)_Q$ é a topologia mais fina sobre Q que torna contínua φ consequentemente $(\tau b)_Q \geq \tau(b_Q)$. ∎

PROPOSIÇÃO 4. Dada uma família enumerável $(E_k)_{k\geq 1}$ de b-e.i-S., sua b-soma direta $E = \coprod_{k\geq 1} E_k$ é um b-e.i-S.

DEMONSTRAÇÃO. Usaremos a Def. 1. Para cada $k \geq 1$, denotamos por $(B_{k,m})_{m\geq 1}$ a base bornológica de E_k dada por (IS-1).
Para cada $n \geq 1$ consideremos $B_n = \prod_{1\leq k\leq n} B_{k,n-k+1}$ que é obviamente um subconjunto limitado e discado em $E_n = \prod_{1\leq k\leq n} (E_k)_{n-k+1}$ o qual é um espaço de Banach quando munido da norma do supremo (vide a observação depois da Prop. 1) e onde $(E_k)_m$ denota o subespaço $(E_k)_{B_{k,m}}$ de E_k.
Para cada $n \geq 1$ a aplicação linear e limitada $\tilde{i}_n$ de E_n em E dada por $\tilde{i}_n = \sum_{1\leq k\leq n} i_{k,n-k+1} \circ p^{n,k}_{n-k+1}$ onde $i_{k,m}$ é a composta da injeção canônica de $(E_k)_m$ em E_k com a injeção canônica de E_k em E, e $p^{n,k}_m$ é a projeção canônica de E_n sobre $(E_k)_m$.
Agora como $\forall\ \lambda > 0$ temos obviamente que: $(\tilde{B}_n = \tilde{i}_n(B_n))$

$$(x_k) \in \lambda\tilde{B}_n \quad \text{sss} \quad x_k = 0 \quad \text{se } k>0 \quad \text{e} \quad x_k \in \lambda B_{k,n-k+1} \quad \text{se } 1\leq k\leq n.$$

segue-se que $E_{\tilde{B}_n}$ e E_n são isomorfos como espaços normados. (Seja φ_n ese isomorfismo).
Da Def. 1.6.1 (vide o Ex. 1.6.1) segue-se fàcilmente que a família $(\tilde{B}_n)_{n\geq 1}$ constitui uma base bornológica para E satisfazendo (IS-1). De fato os conjuntos são obviamente discados e crescentes, por outro lado, dados k, $m \geq 1$ bastará tomar $n = k+m-1$ e

observar que $0 \in B_{r,s}$ $\forall$ $r, s \geq 1$ para obter $i_k(B_{k,m}) \subset \tilde{B}_n$, onde i_k é a injeção canônica de E_k em E.
Finalmente (IS-2) segue do fato que a aplicação linear

$$v_n : (x_1,\dots,x_n) \in E_n \longmapsto (x_1,\dots,x_n,0) \in E_{n+1}$$

é w-compacta (pois $v_n(B_n) = B_n \times \{0\}$ e B_n é uma vizinhança do zero em E_n) e da comutatividade do seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} E_{\tilde{B}_n} & \longrightarrow & E_{\tilde{B}_{n+1}} \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi_n} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_{n+1}} \\ E_n & \longrightarrow & E_{n+1} \end{array} .\blacksquare$$

COROLÁRIO 1. Nas condições do teorema acima, se $\forall$ $k \geq 1$ b_k é a bornologia de E_k e se b é a bornologia (sobre E) soma direta das bornologias b_k, temos que τb é a topologia soma direta das topologias τb_k.

DEMONSTRAÇÃO. Denotemos por τ' a topologia soma direta das topologias τb_k.
Como $\forall$ $k \geq 1$ E_k é um b-e.i-S. temos $b(\tau b_k) = b_k$, daí segue-se que $\forall$ $k \geq 1$ a injeção canônica de $(E_k)_{\tau b_k}$ em $E_{\tau b}$ é limitada, portanto contínua. Logo, usando (21), resulta que aplicação identidade de $E_{\tau'}$ em $E_{\tau b}$ é contínua.
Por outro lado como $b(\tau b) = b$ pois E_b é um b-e.i-S., usando a Def. 1.6.1 e o Ex. 1.6.1 obtemos fàcilmente que a recíproca da identidade acima também é contínua, o que conclui a prova.$\blacksquare$

COROLÁRIO 2. O produto finito de b-e.i-S. é um b-e.i-S.

§ 2 - ESPAÇOS INFRA-SILVA LOCALMENTE CONVEXOS

DEFINIÇÃO 1. Dizemos que um e.l.c. E_τ é um <u>espaço infra-Silva localmente convexo</u> (e.i-S.) se τ é uma topologia bornológica e $E_{b\tau}$ é um b-e.i-S. no sentido da Def. 1.1.

TEOREMA 1. Com as notações da Def. 1.1. Se E_τ é um e.i-S. então (E_n,u_n) é um s.i.w-c. e $E = \varinjlim E_n$.

DEMONSTRAÇÃO. Do Teor. 1.1 temos $E_{b\tau} = \varinjlim E_n$. Nossa afirmação segue então do Teor. 1.6.1-(b) ou do corolário do Teor. 1.1 pois $\tau(b\tau) = \tau$ (vide Def. 1.1.9-(b)).$\blacksquare$

TEOREMA 2. Seja (E_n,u_n) um s.i.s.w-c. de Espaços de Banach. Então seu l.i. $F_\tau = \varinjlim E_n$ é um e.i-S.

DEMONSTRAÇÃO. De (41) temos que F_τ é um e.l.c. bornológico (lembrar Prop. 0.3.1). Finalmente dos Teors. 1.6.1-(a) e 1.2 segue-se que $F_{b\tau}$ é um b-e.i-S.∎

OBSERVAÇÃO. Da Prop. 1.3.6 temos que o Teor. 2 acima é válido para l.i. de s.i.w-c. de e.l.c. Portanto do Teor. 1.1 e seu corolário segue que se E_b é um b-e.i-S. então $E_{\tau b}$ é um e.i-S.

Obviamente todo e.i-S. é um espaço DF; i.e., possui uma base enumerável de limitados e além disso a interseção de qualquer família enumerável de vizinhanças discadas e fechadas do zero que seja um bornívoro é por sua vez uma vizinhança do zero. Temos ainda o seguinte:

TEOREMA 3. Todo e.i-S. E_τ é um e.l.c. completo, reflexivo e tonelado.

DEMONSTRAÇÃO. Como $\tau = \tau(b\tau)$, do lema 1.1 aplicado a $b\tau$ e de (43), segue-se que E é semi-reflexivo. Daí, usando (39) e (45), concluimos que E é reflexivo e tonelado.
Agora, a família formada pelos polares B_n° dos $b\tau$-limitados B_n dados por (IS-1) constitui um sistema fundamental enumerável de $\beta(E',E)$-vizinhanças do zero em E', portanto o dual forte de E_τ é bornologico (vide (40)). Disto, (42) e da reflexividade resulta finalmente que E_τ é completo.∎

Usando (64) e também (42), desta vez para E, obtemos o seguinte:

COROLARIO 1. O dual forte de um e.i-S. é um e.l.c. de Fréchet reflexivo.

Do corolário 1 e de (57) resulta o seguinte:

COROLARIO 2. Todo e.i-S. E é um espaço de Pták; i.e., se F é um e.l.c. arbitrário então toda aplicação linear f de E em F que leva vizinhanças do zero de E em subconjunto de F cujos fechos são vizinhanças do zero do subespaço f(E) de F é necessariamente um morfismo estrito.

TEOREMA 4. Sejam, E um e.i-S. e T um subconjunto convexo dele. T é fechado em E sss $\forall\, n \geq 1$ $T \cap E_n$ é fechado em E_n.

DEMONSTRAÇÃO. A necessidade é imediata.
Vejamos a suficiencia: De (29) segue que bastará mostrar que T é $\sigma(E,E')$-fechado. Agora, da reflexividade de E, temos $\sigma(E,E') = \sigma(E'',E')$ sobre $E = E''$ portanto é suficiente aplicar o teorema de Krein-Smulian (vide (47)) ao dual forte de E (lembrar

o corolário acima). i.e., levando em conta (45) e (36) bastará - provar que: " Para todo subconjunto discado e ω-compacto M de E, $M \cap E$ é ω-fechado em E ".

Seja então M um subconjunto de E nas condições acima. Do lema - 1.1-(b) temos que existe $k \geqslant 1$ t.q. $M \subset E_k$ é ω-compacto aí. Disto e da hipótese resulta que $M \cap T = M \cap (E_k \cap T)$ é ω-compacto em E_k de onde segue-se que $M \cap T$ é ω-fechado em E pois a inclusão de E_k em E é ω-contínua (vide (52)).∎

COROLARIO. Se T é um subconjunto discado e fechado de um e.i-S. E_τ então ele é um subconjunto M-fechado do b-e.i-S. $E_{b\tau}$.

DEMONSTRAÇÃO. Segue imediatamente. De fato, se B é um limitado discado de E, então existe $n \geqslant 1$ t.q. $B \subset B_n$ e a inclusão de - E_B em E_n é contínua.

PROPOSIÇÃO 1. Sejam, E_τ um e.i-S. e F um subespaço fechado dele. Então: F é um subespaço infra-Silva de E; i.e., $F_{\tau i}$ é um e.i-S. sss $F_{\tau i}$ é bornológico e/ou tonelado.

DEMONSTRAÇÃO. A necessidade e consequencia imediata da Def. 1 e o Teor. 3.

Vejamos a suficiencia: Do corolário do Teor. 4, Prop. 1.2 e a observação após o Teor. 2 temos que F munido da topologia $\tau((b\tau)i)$ é um e.i-S.

De outra parte, das definições de bi e τi (vide definição 1.1.4, (16) e (60)), é imediato que $(b\tau)i = b(\tau i)$ sobre F (*).

Daí segue-se que $\tau((b\tau)i) = \tau(b(\tau i))$ sobre F.

Agora se τi é bornológica a suficiencia segue da Def. 1.1.9(b). Por outro lado se τi fôr tonelada, completamos a prova usando o corolário 2 do Teor. 3 junto com (56), pois $\tau(b(\tau i)) \geqslant \tau i$ (vide a observação depois da Def. 1.1.8) e F munido da primeira topologia é um e.i-S.

Prova de (*): É consequencia imediata dos seguintes fatos,

Da definição de bornologia induzida temos $\mathcal{B}(F_{(b\tau)i}) = F \cap \mathcal{B}(F_{b\tau})$, onde $F \cap \mathcal{B}(F_{b\tau}) = \{F \cap B \ / \ B \in \mathcal{B}(F_{b\tau})\}$.

De (16) e (60) temos que também $F \cap \mathcal{B}(F_{b\tau}) = \mathcal{B}(F_{b(\tau i)})$.∎

Da definição 1 e do teorema 3 temos:

COROLÁRIO. Sejam, E_τ um e.i-S. e F um subespaço fechado dele. Então: $F_{\tau i}$ é tonelado sss ele é bornológico.

PROPOSIÇÃO 2. Nas condições da Prop. 1, temos que o espaço quociente E/F é um espaço infra-Silva quociente; i.e., E/F munido da topologia quociente $\tau_{\mathcal{G}}$ é um e.i-S.

DEMONSTRAÇÃO. Observemos primeiro que E/F munido da topologia $\tau_{\mathcal{G}}$ é tonelado e bornologico (vide (37) e (41)).
Do corolário do Teor. 4 e da Prop. 1.3 temos que E/F munido da bornologia $(b\tau)_{\mathcal{G}}$ é um b-e.i-S. portanto $b(\tilde{\tau}) = (b\tau)_{\mathcal{G}}$ onde $\tilde{\tau} = \tau((b\tau)_{\mathcal{G}})$.
Veremos que $b(\tau_{\mathcal{G}}) \leq (b\tau)_{\mathcal{G}}$, de fato, se Q é um subconjunto $(b\tau)_{\mathcal{G}}$-limitado em E/F existe (vide Def. 1.1.4-(b)) um $b\tau$-limitado B de E t.q. $Q \subset p(B)$, mas $p(B)$ é $b(\tau_{\mathcal{G}})$-limitado em E/F, portanto Q é $b(\tau_{\mathcal{G}})$-limitado.
Agora $b(\tilde{\tau}) \geq b(\tau_{\mathcal{G}})$ implica que a aplicação identidade de $(E/F)_{\tilde{\tau}}$ em $(E/F)_{\tau_{\mathcal{G}}}$ é limitada, de onde continua (vide(39)).
Finalmente o teorema segue do corolário 2 do Teor 3 e de (56), pois $(E/F)_{\tilde{\tau}}$ é um e.i-S. (vide a observação depois do Teor. 2).∎

COROLÁRIO. Nas condições da proposição 2 temos: $b(\tau_{\mathcal{G}}) = (b\tau)_{\mathcal{G}}$.

DEMONSTRAÇÃO. Segue de $\tilde{\tau} = \tau_{\mathcal{G}}$ e de $b(\tilde{\tau}) = (b\tau)_{\mathcal{G}}$.∎

PROPOSIÇÃO 3. Dada uma familia enumerável $(E_k)_{k\geq 1}$ de e.i-S., sua soma direta $E = \coprod_{k\geq 1} E_k$ é um e.i-S.

DEMONSTRAÇÃO. $\forall\, k \geq 1$ seja τ_k a topologia de E_k e denotemos por τ a topologia (sobre E) soma direta das topologias τ_k.
E_τ é de Hausdorff pois a topologia produto das topologias τ_k, que é de Hausdorff (vide (12)-(c)), induzida sobre E é menos fina que τ, de fato, isto segue de (7) e (21) já que a aplicação composta

$$E_k \xrightarrow{\text{inj. canôn.}} E \xrightarrow{\text{inclusão}} \prod E_n \xrightarrow{\text{projeção}} E_1$$

é a aplicação identidade ($k=1$) ou a aplicação idênticamente nula ($k\neq 1$) portanto uma aplicação contínua.
Também temos de (41) que E_τ é bornologica.
Agora, como $\forall\, k \geq 1$ o espaço E_k munido da bornologia $b\tau_k$ é um b-e.i-S. segue, usando a Prop. 1.4, que E munido da bornologia $\tilde{b}$ soma direta das bornologias $b\tau_k$ é um b-e.i-S. Daí, do corolário 1 da Prop. 1.4 e o fato de que $\forall\, k \geq 1$ $\tau(b\tau_k) = \tau_k$ resulta $\tau\tilde{b} = \tau$ sobre E.
Finalmente como $b(\tau\tilde{b}) = \tilde{b}$ obtemos $\tilde{b} = b\tau$; i.e., $E_{b\tau}$ é um b-e.i-S. o que conclui a prova.∎

COROLÁRIO. O produto finito de e.i-S. é um e.i-S.

§ 3 - RELAÇÃO ENTRE E.I-S. E B-E.I-S.

O seguinte teorema nos dá um "recíproco" da Def. 2.1.

TEOREMA 1. Seja E_{b} um e.b.c. Então E_{b} é um b-e.i-S. sss $E_{\tau b}$ é um e.i-S. e E_{b} é um e.b.c. completo com uma base bornologica enumerável.

DEMONSTRAÇÃO. A necessidade segue da observação após o Teor. 2.2 Prop. 1.1 e (IS-1) da Def. 1.1.
Vejamos a suficiencia: Da Def. 2.1 temos que $E_{b(\tau b)}$ é um b-e.i-S Bastará então mostrar que $b = b(\tau b)$, mas isto segue do corolário do Teor. 1.3.1 (gráfico fechado), pois a aplicação identidade de E_{b} em $E_{b(\tau b)}$ é limitada.

COROLÁRIO (Aplicação). Seja E um e.l.c. Então E'_{be} é um b-e.i-S. sss $E'_{\tau(be)}$ é um e.i-S. e E é metrizável.

DEMONSTRAÇÃO. Necessidade: A primeira afirmação segue do Teor. 1 Veremos que E é metrizável. De fato, de (30), (29), (8) e da hipótese, segue imediatamente que E'_{be} possui uma base bornologica enumerável do tipo $(V_n^\circ)_{n\geq 1}$ onde os V_n são vizinhanças discadas e w-fechadas do zero em E. Agora, seja V uma vizinhança discada e w-fechada, segue que V° é um subconjunto be-limitado de E' (vide (30)) consequentemente existe um $m \geq 1$ t.q. $V^\circ \subset V_m^\circ$ de onde $V = {}^\circ(V^\circ) \supset {}^\circ(V_m^\circ) = V_m$ (vide (27)). Finalmente levando em conta (8) resulta que (V_n) é uma base (enumerável) de vizinhanças do zero em E.
A suficiencia é como segue: E'_{be} é completo (vide Prop. 1.3.1). Além disso se $(V_n)_{n\geq 1}$ é uma base enumerável de vizinhanças do zero em E, então $(V_n^\circ)_{n\geq 1}$ constitui uma be-base bornologica para E'∎

É imediato que se um e.l.c. é um e.i-S., então todo e.l.c. isomorfo a ele também é um e.i-S. (usar (52)). Disto, e como todo e.i-S. é por definição bornológico (recordar Def. 1.1.9-(b)) resulta o seguinte:

TEOREMA 2. Um e.l.c. E_{τ} é um e.i-S. sss existe um b-e.i-S. X_{b} t.q. E_{τ} e $X_{\tau b}$ são isomorfos.

§ 1 - ESPAÇOS FS* LOCALMENTE CONVEXOS

DEFINIÇÃO 1. Dizemos que um e.l.c. F é um espaço FS* localmente convexo (e.FS*) se ele é um espaço de Fréchet e também um espaço infra-Schwartz (espaço S*); i.e., satisfaz:

(FS*-1) Existe em F uma base enumerável e decrescente $V_1 \supset V_2 \supset \ldots$ de vizinhanças discadas do zero.

(FS*-2) Para cada $n \geq 1$ a aplicação canônica v_n de $\hat{F}_{V_{n+1}}$ em $\hat{F}_{V_n}$ é w-compacta.

NOTAÇÃO. Para todo $n \geq 1$ poremos $\hat{F}_n = \hat{F}_{V_n}$ e indicaremos por p_n a "projeção" canônica de F em $\hat{F}_n$, que é contínua.

A demonstração do seguinte teorema é semelhante a aquela do Teor 2.1.3.

TEOREMA 1. Seja F um e.l.c. metrizável, então as seguintes afirmações são equivalentes.

(i) F é um espaço S*.

(ii) Para cada vizinhança discada do zero V de E existe outra vizinhança discada do zero U contida em ela e t.q. a aplicação canônica de $\hat{F}_U$ em $\hat{F}_V$ é w-compacta.

(iii) Existe uma base enumerável $(W_k)_{k \geq 1}$ de vizinhanças discadas do zero em F t.q. dado $m \geq 1$ existe $n > m$ t.q. $W_n \subset W_m$ e a aplicação canônica de $\hat{F}_{W_n}$ em $\hat{F}_{W_m}$ é w-compacta.

TEOREMA 2. Com as notações da Def. 1. Se F é um e.FS*, então $(\hat{F}_n, p_n)$ é um s.p.w-c. e $F = \varprojlim \hat{F}_n$

DEMONSTRAÇAO. Obviamente $(\hat{F}_n, p_n)$ é um s.p.w-c. Ponhamos $E = \varprojlim F_n$ e denotemos por r_n as aplicações lineares contínuas de E em F_n correspondentes.

Como $\forall\, n \geq 1$ $v_n \circ p_{n+1} = p_n$ (*), de (LP-2) da Def. 0.2.3, temos que existe uma única aplicação linear contínua f de F em E t.q. $\forall\, n \geq 1$ $r_n \circ f = p_n$ (**).

Vejamos que f é injetora: Seja $x \in F$ com $x \neq 0$, como F é de Hausdorff existe V_m t.q. $x \notin V_m$ portanto $p_m(x) \neq 0$ pois $\ker p_m \subset V_m$ (vide notação depois da Def. 1) e nossa afirmação segue de (**).

Como F e E são espaços de Fréchet (vide o corol. da Prop. 0.2.4) o teorema segue de (58) se mostrarmos que f é sobrejetora pois nesse caso obtemos F isomorfo a E.

Seja então $x \in E$ segue-se imediatamente que para cada $n \geq 1$ existe $y_n \in F$ t.q. $\|p_n(y_n) - r_n(x)\|_n < 1/n$ (onde $\| \ \|_n = \dot{q}_{V_n}$ sobre F_n).

Observando que (por construção) a norma das aplicações v_n (então das v_{kn}) é menor ou igual a um, temos para $1 \leq k \leq m \leq n$: (usar (*) e $v_{mn} \circ r_n = r_m$)

$$\begin{aligned} q_{V_k}(y_n - y_m) &= \|p_k(y_n - y_m)\|_k \\ &\leq \|v_{kn}(p_n(y_n) - r_n(x))\|_k + \|v_{km}(r_m(x) - p_m(y_m))\|_k \\ &\leq \|p_n(y_n) - r_n(x)\|_n + \|r_m(x) - p_m(y_m)\|_m \leq 2/m \end{aligned}$$

daí e como a família (V_n) é uma base de vizinhanças para F segue-se que a sequencia (y_n) é de Cauchy em F de Fréchet portanto existe $y \in F$ t.q. $y_n \longrightarrow y$ logo $f(y_n) \longrightarrow f(y)$, resta mostrar que $f(y_n) \longrightarrow x$, mas isto segue imediatamente da Prop. 0.2.5, de fato, dado $m \geq 1$ temos que $\forall\, n \geq m$: (usar (**))

$$\|r_m(f(y_n) - x)\|_m = \|p_m(y_n) - r_m(x)\|_m = \|v_{mn}(p_n(y_n) - r_n(x))\|_m \leq 1/n$$

i.e., $f(y_n) - x \in (1/m) r_m^{-1}(\dot{V}_m)$ de onde segue $f(y) = x$. ∎

TEOREMA 3. Se um e.l.c. E é o l.p. de um s.p.w-c. de e.l.c., então ele é um e.FS*.

DEMONSTRAÇÃO. Da Prop. 0.2.8 existe um s.p.s.w-c. (F_n, v_n) de espaços de Banach t.q. $E = \varprojlim F_n$.

Agora do corolário da Prop. 0.2.4 temos que E é um espaço de Fréchet. Por outro lado (FS*-1) e (FS*-2) seguem imediatamente das Props. 0.2.5 e 0.2.6 e de (59). ∎

PROPOSIÇÃO 1. Todo espaço FS* E é reflexivo.

DEMONSTRAÇÃO. Como E é de Fréchet ele é infra-tonelado. Logo de (45) e (43) segue que bastará provar que todo subconjunto limitado de E é w-relativamente compacto aí. Ainda, pelo corolário 1 da Prop. 0.1.4 com $u = 1_E$, é suficiente mostrar que toda parte equicontínua de E' é w-relativamente compacta em E', para isto bastará provar que $\forall\, n \geq 1$ V_n° é w-compacto em E' (vide (FS*-1) e (30)). Agora, como $\forall\, n \geq 1$ a inclusão de $(E')_{V_n^{\circ}}$ em E' é contínua, portanto w-contínua, é suficiente provar que $\forall\, n \geq 1$ V_n° é w-compacta em $(E')_{V_{n+1}^{\circ}}$, mas isto segue do corolário 2 da Prop.

0.1.4, (FS*-2) e da Prop. 0.1.1. (Lembrar que se E é um espaço normado então $E' = \hat{E}'$).∎

Usando (44) e (65) temos o seguinte:

COROLÁRIO. Todo espaço FS* é um espaço distinguido.

TEOREMA 4. (a) O dual forte de um e.i-S. E é um e.FS*.
(b) O dual forte de um e.FS* F é um e.i-S.

DEMONSTRAÇÃO. Vejamos (a): De (IS-1) segue que a família $(B_n^{\circ})_{n\geq 1}$ satisfaz (FS*-1) para o dual forte de E, na verdade, por (42) temos que E' munido da topologia $\beta(E',E)$ é um espaço de Fréchet - pois E é bornologico. Por outro lado (FS*-2) segue imediatamente de (IS-2), Prop. 0.1.1 e o corolário 2 da Prop. 0.1.4.
Provemos (b): De (55) e do corolário da Prop. 1.1 temos que o - dual forte de F é um e.l.c. bornologico. Finalmente (IS-1) e - (IS-2) seguem de (FS*-1), (FS*-2), Prop. 0.1.1 e do corolário 2 da Prop. 0.1.4.∎

COROLÁRIO. Se X é um e.l.c., então:
(a) X é um e.i-S. sss X é reflexivo e seu dual forte é um e.FS*.
(b) X é um e.FS* sss X é reflexivo e seu dual forte é um e.i-S.

PROPOSIÇÃO 2. Um e.l.c. F_{τ} é um e.FS* sss $F'_{\tau(be)}$ é um e.i-S. e - F_{τ} é metrizável e reflexivo.

DEMONSTRAÇÃO. Necessidade: De (b) do corolário do Teor. 4 acima F é reflexivo e seu dual forte é um e.i-S., mas neste caso - $\beta(F',F) = \tau(be)$ sobre F' (vide lema 1.4.2 e corol. da Prop. 1).
Suficiencia: Como reflexividade implica distinguido (vide (44) e (65)) temos, do lema 1.4.2, $\tau(be) = \beta(F',F)$ sobre F' portanto - esta parte segue de (b) do corolário do Teor. 4.∎

Usando o corolário do Teor. 2.3.1 obtemos o seguinte:

COROLÁRIO. Um e.l.c. F_{τ} é um e.FS* sss F'_{be} é um b-e.i-S e F_{τ} é - reflexivo.

§ 2 - ESPAÇOS FS* BORNOLOGICOS

DEFINIÇÃO 1. Dizemos que um e.b.c. F_b é um <u>espaço FS* bornologico</u> (b-e.FS*) se ele é topologico e o e.l.c. $F_{\tau b}$ é um e.FS* no - sentido da Def. 1.1.

Da Def. 1.2.3, a Prop. 1.4.2 e o corolário do Teor. 1.4.1 obtemos a seguinte:

PROPOSIÇÃO 1. Todo b-e.FS* é um e.b.c. regular, reflexivo e completo.

Com as notações da Def. 1.1, usando a Def. 1, o Teor. 1.2 e o Teor. 1.5.1, obtemos o seguinte:

TEOREMA 1. Se F é um b-e.FS* então $(\hat{F}_n, p_n)$ é um s.p.w-c. de espaços de Banach e $F = \underrightarrow{\lim}\, \hat{F}_n$.

Do Teor. 1.5.1, seu corolário 2 e o Teor. 1.3 resulta o recíproco do teorema acima:

TEOREMA 2. Se um e.b.c. é o b-l.p. de um s.p.s.w-c. de espaços de Banach então ele é um b-e.FS*.

OBSERVAÇÃO. Da Prop. b-0.2.8 (vide comentário depois da proposição 1.5.1) segue-se que o teorema acima vale para o b-l.p. de um s.p.w-c. de espaços normados.

Seja $E_{\mathscr{b}}$ um e.b.c. É fácil verificar que os subconjuntos de $E^{\times}$ equilimitados sôbre os $\mathscr{b}$-limitados de E; i.e., os subconjuntos L de $E^{\times}$ t.q. para todo $\mathscr{b}$-limitado B de E o conjunto de escalares $L(B) = \{f(x) \ / \ f \in L \quad e \quad x \in B\}$ é limitado em $\mathbb{K}$, formam uma bornologia sobre $E^{\times}$. Podemos dar então a seguinte:

DEFINIÇÃO 2. Dado um e.b.c. E, chamamos <u>bornologia natural</u> sobre seu b-dual $E^{\times}$, e a denotamos por $\mathscr{b}\eta$, à bornologia dada acima.

OBSERVAÇÃO. Um subconjunto L do b-dual $E^{\times}$ de um e.b.c. E é $\mathscr{b}\eta$-limitado aí sss ele é absorvido por o polar de todo $\mathscr{b}$-limitado de E (vide o corolário da Prop. 1.4.1 e a notação adotada depois dessa proposição), temos então a seguinte:

PROPOSIÇÃO 2. Se $E_{\mathscr{b}}$ é um e.b.c. topologico então $\mathscr{b}\eta = \mathscr{b}(\beta(E',E))$ sobre $E^{\times}$.

Usando o lema 1.4.3 resulta o:

COROLÁRIO. Se $E_{\mathscr{b}}$ é um e.b.c. topologico t.q. o e.l.c. $E_{\tau\mathscr{b}}$ é infra-tonelado então $\mathscr{b}\eta$ é a bornologia equicontínua sobre $E^{\times} = (E_{\tau\mathscr{b}})'$.

Da Def.1 e dos corolários das Props. 2 e 1.2 respectivamente temos o seguinte:

TEOREMA 3. Um e.b.c. $F_{\mathscr{b}}$ é um b-e.FS* sss $F^{\times}_{\mathscr{b}\eta}$ é um b-e.i-S., $F_{\mathscr{b}}$ é topologico e $F_{\tau\mathscr{b}}$ é reflexivo.

A seguinte proposição nos dá uma recíproca da Def. 1 e é de veri ficação trivial.

PROPOSIÇÃO 3. Um e.l.c. F_τ é um e.FS* sss ele é bornologico e - $F_{b\tau}$ é um b-e.FS*.

TEOREMA 4.

Um e.b.c. E_b é um b-e.i-S. sss
(a) $E^{\times}_{b\eta}$ é um b-e.FS*.
(b) E_b é regular, completo, topologico e possui uma base bornologica enumerável.
(c) $E_{\tau b}$ é reflexivo.
(d) O dual forte de $E_{\tau b}$ é bornologico.

DEMONSTRAÇÃO. Necessidade: (b) segue do Corol. do Teor. 2.1.1, - da Prop. 2.1.1 e da Def. 2.1.1. (c) segue do Teor. 2.2.3 (vide a observação anterior). (d) segue dos Teors. 2.3.1 e 1.4-(a) e da Def. 1.1. Finalmente (a) segue das Props. 3 e 2 pois o dual forte de $E_{\tau b}$ é um e.FS* (usar os teoremas 2.3.1 e 1.4-(a)). Suficiencia: Da Prop. 2 e de (b) temos $b(\beta(E',E)) = b\eta$, portanto usando (a), (d) e a Prop. 3 temos que o dual forte de $E_{\tau b}$ é - um e.FS*. Daí, (c) e o corolário do Teor. 1.4 resulta que $E_{\tau b}$ é um e.i-S. consequentemente E_b é um b-e.i-S. (usar (b) e o Teor. 2.3.1).∎

Finalmente, damos um análogo do corolário da Prop. 1.2.

PROPOSIÇÃO 4. Um e.l.c. E_τ é um e.i-S. sss E'_{be} é um b-e.FS*, E_τ é reflexivo e seu dual forte é bornologico.

DEMONSTRAÇÃO. Como todo e.l.c. reflexivo é infra-tonelado, a proposição segue do lema 1.4.3 pois temos:

E_τ é um e.i-S. sss E_τ é reflexivo e seu dual forte é um e.FS* - sss E' munido da bornologia $b(\beta(E',E))$ é um b-e.FS*, E_τ é re-flexivo e seu dual forte é bornologico.

A primeira equivalencia segue de (e) do corolário do Teor. 1.4, e a segunda da Prop. 3.∎

§ 3 - OUTRAS PROPRIEDADES DOS ESPAÇOS INFRA-SILVA E SEUS DUAIS

Lembremos que em um e.l.c. os fechos em qualquer topologia compatível com a dualidade de um subconjunto convexo dele são os mesmos. (isto é consequencia imediata de (29))

LEMA 1 Todo e.FS* E é o l.p. de um s.p.w-c. de espaços de Banach t.q. as aplicações dadas por (LP-1) possuem rango w-denso.

DEMONSTRAÇÃO. Do Teor. 1.2 temos que E é o l.p. de um s.p.w-c. (G_n, w_n) de espaços de Banach, denotemos por p_n as aplicações lineares contínuas de E em G_n dadas por (LP-1).
A idéia é considerar os espaços de Banach $F_n = \overline{p_n(E)}$ (fecho em G_n). Agora como $w_n(F_{n+1}) \subset \overline{w_n(p_{n+1}(E))} = F_n$ definimos v_n como a Restrição de w_n a F_{n+1}, óbviamente (F_n, v_n) é um s.p.w-c.
Ponhamos $\tilde{E} = \varprojlim F_n$ e denotemos por $\tilde{p}_n$ a aplicação linear contínua de $\tilde{E}$ em F_n dada por (LP-1).
Agora dado $\tilde{x} \in \tilde{E}$ a sequencia $(\tilde{p}_n(\tilde{x}))$ satisfaz o corolário da Prop 0.2.3 quando aplicado a E, portanto existe um único $f(\tilde{x}) \in E$ t.q. $p_n(f(\tilde{x})) = \tilde{p}_n(\tilde{x})$ $\forall\, n \geq 1$. Temos então definida uma aplicação f de $\tilde{E}$ em E t.q. $p_n \circ f = \tilde{p}_n$ $\forall\, n \geq 1$, de onde por (7) f é contínua A linearidade de f segue imediatamente da forma como ela foi definida.
Procedendo em forma análoga obtemos uma aplicação linear contínua g de E em $\tilde{E}$ t.q. dado $x \in E$ $g(x)$ é o único elemento de $\tilde{E}$ t.q. $\tilde{p}_n(g(x)) = p_n(x)$ $\forall\, n \geq 1$. Daí segue fácilmente que g é a inversa de f e recíprocamente, o que conclui a prova.∎

NOTAÇÃO. Daquí em diante dado um e.l.c. indicaremos por $E^{\wedge}$ seu dual forte. Agora se E fôr um e.b.c. $E^{\#}$ indicará seu b-dual munido da bornologia natural.

TEOREMA 1. Seja E um e.l.c. Se $E = \varprojlim F_n$ onde (F_n, v_n) é um s.p. w-c. denso(*) de espaços de Banach então $(F_n^{\wedge}, {}^t v_n)$ é um s.i.w-c. de espaços de Banach e além disso $E^{\wedge} = \varinjlim F_n^{\wedge}$.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $n \geq 1$ arbitrário. Óbviamente $\overline{v_n(F_{n+1})} \subset F_n$, por outro lado como $\overline{v_n(F_{n+1})} \supset v_n(p_{n+1}(F)) = p_n(E)$ resulta a inclusão contrária, portanto de (45), (51) e do corolário 2 da proposição 0.1.4 segue-se que ${}^t v_n$ é uma injeção linear w-compacta de $F_n^{\wedge}$ em $F_{n+1}^{\wedge}$; i.e., $(F_n^{\wedge}, {}^t v_n)$ é um s.i.w-c. Em forma análoga também temos definida a aplicação linear contínua ${}^t p_n$ de $F_n^{\wedge}$ em $E^{\wedge}$ (vide (52)), onde p_n de E em F_n é dada por (LP-1).
Ponhamos $F = \varinjlim F_n^{\wedge}$ e denotemos por i_n a injeção linear contínua de $F_n^{\wedge}$ em F dada por (LI-1). Agora, como ${}^t p_n = {}^t p_{n+1} \circ {}^t v_n$ de (LI-2) existe uma única injeção linear contínua f de F em $E^{\wedge}$,

(*) s.p.w-c. com a propriedade adicional do Lema 1 acima.

t.q. $f\circ i_n = {}^t p_n$ (*).
Vejamos que f é sobrejetora: Seja $x' \in E'$, da Prop. 0.3.5 pela continuidade de x' existe $m \geq 1$ t.q. $x'((1/m)p_m^{-1}(B_m))$ está contido na bola unitaria de $\mathbb{K}$. Definamos uma aplicação y'_m de $p_m(E)$ em $\mathbb{K}$ por $y'_m(p_m(x)) = x'(x)$ $\forall\, x \in E$, é imediato que esta aplicação é linear e contínua, denotando ainda por y'_m sua ex-tensão a F_m temos que $y'_m \in F'_m$ e também $y'_m\circ p_m = x'$. Ponhamos $y = i_m(y'_m)$, de (*) resulta $f(y) = f\circ i_m(y'_m) = {}^t p_m(y'_m) = x'$.

O teorema é completado usando (56) juntamente com o corolário 2 do teorema 2.2.3.

COROLÁRIO. Seja E_b um e.b.c. Se $E = \varinjlim F_n$ onde (F_n, v_n) é um s.p.w-c. denso de espaços de Banach, então $E^* = \varinjlim F_n^{\dagger}$ (vide a observação após lema 1.2.1).

DEMONSTRAÇÃO. $E = \varprojlim F_n$ implica $E_{\tau b} = \varprojlim F_n$ pelo Teor. 1.5.1.. Daí, pelo Teor. 1, temos $(E_{\tau b})^{\dagger} = \varinjlim F_n^{\dagger}$. Usando o Teor. 1.6.1 resulta $E'_{b(\beta(E',E))} = \varinjlim F_n^{\dagger}$. O corolário segue da Prop. 2.2 - pois E_b é um b-e.FS*.

TEOREMA 2. Seja F um e.l.c. Se $F = \varinjlim E_n$, onde (E_n, u_n) é um s.i.w-c. de espaços de Banach, então $(E_n^{\dagger}, {}^t u_n)$ é um s.p.w-c. de espaços de Banach e além disso $F^{\dagger} = \varprojlim E_n^{\dagger}$.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $n \geq 1$ arbitrário. Denotando por i_n a aplicação linear contínua de E_n em F dada por (LI-1) resulta, como no Teor. 1, que $(E_n^{\dagger}, {}^t u_n)$ é um s.i.w-c. e obtemos a aplicação linear contínua ${}^t i_n$ de $F^{\dagger}$ em $E_n^{\dagger}$.

Ponhamos $E = \varprojlim E_n^{\dagger}$ e denotemos por p_n a aplicação linear contínua de E em $E_n^{\dagger}$ dada por (LP-1). Agora, como ${}^t u_n \circ {}^t i_{n+1} = {}^t i_n$, - de (LP-2) existe uma única aplicação linear contínua g de $F^{\dagger}$ em E t.q. $p_n\circ f = {}^t i_n$ (º).

f é injetora: Suponhamos $f(y') = 0$ com $y' \in F'$ então de (º) - temos $y'\circ i_n = {}^t i_n(y') = p_n\circ f(y') = 0$ mas se $y \in F$ da Prop. 0.3.4 existe $m \geq 1$ t.q. $y = i_m(x_m)$ para algum $x_m \in E_m$ logo temos: $y'(y) = y'\circ i_m(x_m) = 0$ de onde segue-se que $y' = 0$.

Se f fôr sobrejetora podemos concluir a prova usando (56) e o corolário 2 do teorema 2.2.3, pois F é um e.i-S. e E é um e.FS*. Seja então $x \in E$, definimos $y' \in F^*$ da seguinte forma: Se $i_n(x_n) \in F$ (vide a Prop. 0.3.4) pomos $\langle i_n(x_n), y' \rangle = \langle x_n, p_n(x) \rangle$. Agora se $i_m(x_m) = i_n(x_n)$ (suponhamos $n > m$) da injetividade de i_n e usando $i_m = i_n \circ u_{nm}$ resulta $x_n = u_{nm}(x_m)$ mas ${}^t u_{nm} \circ p_n = p_m$ logo $\langle x_n, p_n(x) \rangle = \langle x_m, p_m(x) \rangle$; i.e., y' está bem definida e além disso vale $y' \circ i_n = p_n(x)$ (ºº). Daí, (21) e da Prop. 0.3.1 temos que $y' \in F'$. Finalmente, usando (º) e (ºº) obtemos: $p_n(f(y') - x) = 0 \;\; \forall\, n \geq 1$ de onde segue-se $f(y') = x$ pois E é de Hausdorff (vide a Prop. 0.2.5).∎

COROLARIO. Seja F_b um e.b.c. Se $F = \varinjlim E_n$ onde (E_n, u_n) é um s.i.w-c. de espaços de Banach, então $F^* = \varprojlim E_n^\dagger$.

DEMONSTRAÇÃO. Do Teor. 1.6.1 temos que $F = \varinjlim E_n$ implica $F_{\tau b} = \varinjlim E_n$. Daí pelo Teor. 2 acima resulta, $(F_{\tau b})^\dagger = \varprojlim E_n^\dagger$. Disto e do Teor. 1.5.1 obtemos $(F_{\tau b})'_{b(\beta(F', F))} = \varprojlim E_n^\dagger$. A prova se conclui usando a Prop. 2.2 pois F é um b-e.i-S.∎

APÊNDICE I : ESPAÇOS DE SILVA LOCALMENTE CONVEXOS

Quando trocarmos w-compacto por compacto no capítulo II obtemos os Espaços de Silva. É claro que, com as mudanças respectivas, todos os resultados desse capítulo permanecem válidos. Obviamente todo espaço de Silva é um espaço infra-Silva, a seguir veremos as melhoras obtidas devido à compacidade.

Para indicar que usamos um resultado do capítulo II na versão compacta precederemos da letra c sua numeração original nesse capítulo.

Do lema c-2.1.1 e de (39) obtemos a seguinte:

PROPOSIÇÃO 1. Todo espaço de Silva é um espaço de Montel.

Usando (66) resulta o seguinte:

COROLÁRIO. Se B é um subconjunto limitado de um espaço de Silva E_{τ}, então a topologia sobre B induzida por τ coincide com a topologia que sobre ele induz $\sigma(E,E')$.

Usando as notações da Def. c-2.1.1 (vide a Def. c-2.2.1) temos:

TEOREMA 1. Um subconjunto S de um espaço de Silva E_{τ} é fechado [aberto resp.] em E_{τ} sss $S\cap E_n$ é fechado [aberto resp.] em E_n $\forall\, n\geq 1$.

DEMONSTRAÇÃO. De (67) e do corolário 1 do Teor. 2.2.3 $E^{\dagger}$ é um espaço de Fréchet, de Montel e reflexivo. Daí e de (68) com $X = E^{\dagger}$ temos $\lambda(E,E') = \tau = \beta(E,E')$ sobre $(E^{\dagger})' = E$.

Por outro lado, como $E^{\dagger}$ é em particular tonelado, de (36) temos que um subconjunto de $(E^{\dagger})' = E$ é equicontínuo sss ele é $\beta(E,E') = \tau$-limitado em $(E^{\dagger})^{\dagger} = E_{\tau}$.

Do anterior e de (69) bastará provar que para todo subconjunto limitado, discado e w-fechado B de E, $S\cap B$ é w-fechado em E.

Agora do lema c-2.2.3-(b) dado $B\subset E$ como acima, existe um $n\geq 1$ t.q. $B\subset E_n$ e é compacto aí, consequentemente $S\cap B = (S\cap E_n)\cap B$ é compacto em E_n (vide a hipótese) e como a inclusão de E_n em E é contínua resulta que $S\cap B$ é τ-fechado em E e portanto em B com a topologia induzida. Daí e do corolário da Prop. 1 segue-se que $S\cap B$ é w-fechado em E pois B é w-fechado em E (vide (29)). ∎

OBSERVAÇÃO. Do teorema anterior segue-se que se E_{τ} é um espaço de Silva então τ é a topologia final dada pelas aplicações (i_n) (vide o Teor. c-2.2.1 e a Prop. 0.3.1).

Usando as notações das Props. c-2.1.2 e c-2.2.1 (vide o corolário do Teor. 2.1.4) temos o seguinte:

TEOREMA 2. Todo subespaço fechado F de um espaço de Silva E_{τ} é um subespaço de Silva; i.e., $F_{\tau i}$ é um espaço de Silva.

DEMONSTRAÇÃO. Da proposição c-2.2.1 segue-se que bastará provar que $F_{\tau i}$ é sempre tonelado.

Seja T um tonel em $F_{\tau i}$; i.e., um subconjunto discado, balanceado e τi-fechado de F, obviamente $\forall\, n \geq 1$ $T \cap F_n$ é um tonel em F_n que é um espaço de Banach portanto o interior U_n de $T \cap F_n$ é uma vizinhança aberta do zero em F_n.

Agora, como F_n é fechado em E_n, o complemento $F_n \setminus U_n$ de U_n com respeito a F_n é fechado em E_n $\forall\, n \geq 1$ (*).

Seja V_1 uma bola fechada de E_1 t.q. $V_1 \cap F_1 \subset U_1$ como o sistema indutivo (E_n, u_n) é compacto temos que $\forall\, k \geq 1$ $u_{k1}(V_1)$ é relativamente compacto em E_k.

Seja $n \geq 1$ e suponhamos escolhidas as bolas fechadas $V_1, \ldots, V_n$ em $E_1, \ldots, E_n$ respectivamente t.q. $\forall\, 1 \leq j \leq n$

(i) $\overline{u_{kj}(V_j)} \subset V_k$ $\forall\, k > j$

(ii) $V_j \cap F_j \subset U_j$

(iii) $\overline{u_{kj}(V_j)}$ é compacto em E_k $\forall\, k > j$

Agora $\overline{u_n(V_n)}$ é compacto em E_{n+1} e, de (ii) e (i), temos que $(F_{n+1} \setminus U_{n+1}) \cap \overline{u_n(V_n)} = \emptyset$. Portanto, de (*), existe em E_{n+1} uma bola fechada W_{n+1} t.q. a bola fechada $V_{n+1} = W_{n+1} + \overline{u_n(V_n)}$ de E_{n+1} (vide C-1 na prova da Prop. 0.3.7) é disjunta de $F_{n+1} \setminus U_{n+1}$ donde segue (ii) para $j = n+1$, (i) e (iii) são de verificação trivial (vide C-1 mencionada acima).

Finalmente (também como em C-1 da Prop. 0.3.7) temos que $V = \bigcup_{n \geq 1} i_n(V_n)$ é uma vizinhança discada do zero em E t.q. $V \cap F \subset T$ pois $V \cap F = \bigcup_{n \geq 1} (V_n \cap F_n)$ (observar que $\forall\, n \geq 1$ i_n é simplesmente a inclusão de E_n em E), portanto T é uma τi-vizinhança do zero em F.

COROLÁRIO. Todo subespaço fechado de um espaço de Silva é bornológico e tonelado.

PROPOSIÇÃO 2. Todo espaço de Silva E é separável.

DEMONSTRAÇÃO. Com as notações da Def. c-2.1.1 temos que $E = \bigcup \bar{B}_n$ bastará então provar que cada $\bar{B}_n$ é separável com a topologia induzida de E, mas isto segue imediatamente do lema c-2.1.1.

De fato se B é um subconjunto fechado e limitado de E existe $m \geq 1$ t.q. $B \subset E_m$ e é compacto aí portanto separável com a topologia induzida de E_m.

Finalmente a inclusão i_m de E_m em E restrita a B é um homeomorfismo de B sobre $i_m(B) = B$ consequentemente B é separável com a topologia induzida de E. ∎

Daremos aquí os resultados de [5] usados no presente trabalho.

Notaçoes: P = proposição, C = corolario, L = lema , T = teorema, E = exemplo.

Asim por exemplo (CxPy, pg z) indicará: Corolario x da Proposição y da página z de [5].

(1) Sejam X e Y dois espaços metricos, Y completo e A um subconjunto de Y. Então para toda função uniformemente continua f de A em Y corresponde uma unica função uniformemente continua $\bar{f}$ de $\bar{A}$ em Y t.q. $\bar{f}(x) = f(x)$ para todo x em A. Em particular se alem das hipoteses acima, X e Y são espaços vetoriais, A um subespaço de Y e f linear então $\bar{f}$ é linear. (pg 24)

(2) Seja E um espaço de Banach e M um subespaço de E. Então o espaço quociente E/M munido da norma quociente, é completo, i.e., um subespaço de Banach. (P3, pg 38)

(3) Se o espaço métrico completo X é a união de uma sequencia $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de conjuntos fechados, então pelo menos um dos F_n contem alguma bola $B_\rho(z)$. (C. do T. de Baire, 62)

(4) (Teorema da Aplicação aberta) Sejam E e F dois espaços de Banach e f uma aplicação linear continua de E sobre F. Então f e aberta. (P1, pg 69)

(5) Sejam E e F dos espaços de Banach e F uma função linear continua de E em F. Então f é aberta sss f(E) é fechado em F. (P2, pg 69)

(6) (Teorema do Gráfico Fechado) Sejam E e F dois espaços de Banach e f uma aplicação linear de E em F. Se o gráfico de f em ExF é fechado, então f é continua. (P3, pg 70)

(7) Sejam, X um conjunto e $(Y_i)_{i \in I}$ uma familia de espaços topologicos. Para cada indice i em I seja f_i uma aplicação de X em Y_i. Munimos X com a topologia menos fina que torna continuas todas as aplicaçoes f_i. Então, uma aplicação g de um espaço topológico Z em X é continua sss $f_i \circ g$ de Z em Y_i é continua para to-

do i em I. (pg 73)

Lembramos que, se X é um espaço vetorial, os $(Y_i)_{i\in I}$ são espaços vetoriais topológicos (e.v.t.) ou espaços localmente convexos - (e.l.c.) e as f_i são lineares, então X munido da topologia dada acima é um e.v.t. ou um e.l.c. (pg 149) e (antes E4, pg 152).

Neste caso um sistema fundamental de vizinhanças do zero em X é formado pelas intercessões finitas da forma

$f_{i_1}^{-1}(V_1)\cap\ldots\cap f_{i_n}^{-1}(V_n)$, onde $V_k(1\leq k\leq n)$ percorre um sistema fundamental de vizinhanças do zero em Y_k.

(8) Num e.l.c. as vizinhanças discadas (i.e. balanceadas e convexas) e fechadas do zero formam um sistema fundamental de vizinhanças do zero. (P4, pg 87)

(9) Num espaço vetorial E o funcional de Minkowski g_A de um conjunto discado e absorvente $A\subset E$ é uma seminorma. (P7, pg 95). Alem disso A é uma vizinhança do zero sss g_A é continua. (depois P7, pg 95)

(10) Seja E_τ um e.l.c. definido por uma familia $(q_i)_{i\ I}$ de seminormas. Então τ é de Hansdorff sss para todo $x\neq o$ em E existe um indice i em I t.q. $q_i(x)\neq o$. (P8, pg 96)

Lembramos que um e.l.c. sempre pode ser definido por uma familia de seminormas, precisamente aquela formada por todas as seminormas que são continuas para a topologia localmente convexa dada. (fim, pg 95)

(11) Seja E_τ como em (10). Então um conjunto $B\subset E$ é limitado sss q_i é limitado sobre B para todo i em I. (antes P1, pg 109)

(12) Seja $(E_i)_{i\in I}$ uma familia de e.v.t., então:

(a) O produto cartesiano $E=\prod_{i\in I}E_i$ munido da topologia produto é um e.v.t. (pg 118)

(b) Um subconjunto B de E é limitado sss $\pi_i(B)$ é limitado - em E_i, para todo i em I. (pg 118)

(c) Se cada E_i é um e.l.c. então E também o é. (pg 119)

(13) Seja E um e.v.t. metrizável e completo e M um subespaço fechado de E. Então o e.v.t. quociente E/M é completo. (T2, pg 138)

(14) Um subconjunto compacto de um e.v.t. é sempre completo. (depois P5, pg 145)

(15) Sejam E um espaço vetorial, $(F_i)_{i\in I}$ e $(G_\lambda)_{\lambda\in L}$ dois famílias de e.v.t. Para cada i em I seja f_i uma aplicação linear de E em F_i e para cada λ em L seja g_λ uma aplicação linear de E em G_λ. Seja τ a topologia inicial sobre E dada pela família $(f_i)_{i\in I}$ e τ' a topologia inicial sobre E dada por $(g_\lambda)_{\lambda\in L}$.
Suponhamos que para cada i em I existe algum λ em L e uma aplicação linear $u_{i\lambda}$ de G_λ em F_i t.q. $f_i = u_{i\lambda}\circ g$ Então τ' é mais fina que τ.
Se, além disso, para todo λ em L existe um i em I e uma aplicação linear $v_{\lambda i}$ de F_i em G_λ t.q. $g_\lambda = v_{\lambda i}\circ f_i$, então $\tau = \tau'$.
(P2, pg 151)

(16) Com as notaçoes de (15), um subconjunto B de E é τ-limitado sss $f_i(B)$ é limitado em F_i para todo i em I. (fim, pg 152)

(17) Seja $(F_i)_{i\in I}$ uma familia de e.v.t. de Hausdorff, onde o conjunto de indices é ordenado e supomos que para $i\leq k$ temos uma aplicação linear continua $f_{ik}: F_k\longrightarrow F_i$. Seja E um e.v.t. e para cada i em I seja f_i uma aplicação linear de E em F_i t.q. para $i\leq k$ temos $f_i = f_{ik}\circ f_k$. Além disso, suponhamos que se $(x_i)_{i\in I}$ é uma familia de elementos t.q. $x_i\in F_i$ e para cada par (i,k) com $i\leq k$ temos $f_{ik}(x_k) = x_i$, então existe um x em E t.q. $x_i = f_i(x)$ para todo i em I. Se os espaços F_i são completos, então E munido da topologia inicial dada pela familia (f_i) é completo. (P3, pg 153)

(18) Sejam, E um espaço vetorial, $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequencia de e.v.t. metrizáveis e para cada n em $\mathbb{N}$, f_n uma aplicação linear de E em F_n. Então a topologia inicial sobre E dada pela sequencia -

(f_n), é metrizável. (depois E 10, pg 154)

(19) Seja F um espaço vetorial e $(E_i)_{i\in I}$ uma familia de e.v.t. Para cada i em I seja f_i uma aplicação linear de E_i em F. Munimos F da topologia localmente convexa final τ, dada pela familia (f_i). Seja $\mathcal{V}_i$ um sistema fundamental de vizinhanças do zero em E_i e suponhamos que o conjunto $\bigcup_{i\in I} f_i(E_i)$ gera F. Então a envoltória discada dos conjuntos da forma $\bigcup_{i\in I} f_i(U_i)$ onde $U_i \in \mathcal{V}_i$, formam um sistema fundamental de vizinhanças do zero em F para τ. (antes E1, pg 157)

(20) Sejam, $(E_i)_{i\in I}$ uma familia de e.v.t. e $F = \coprod_{i\in I} E_i$, i.e., a suma direta. Então (19) é valido para F. (antes E2, pg 158). F munido da topologia localmente convexa final é chamado a suma direta localmente convexa dos espaços E_i. (E2, pg 158)

(21) Sejam, F um espaço vetorial, $(E_i)_{i\in I}$ uma familia de e.l.c. e para cada i em I seja f_i uma forma linear de E_i em F. Munimos F com a topologia localmente convexa final τ, dada pela familia (f_i). Seja G um e.l.c. e g uma aplicação linear de F em G. Então g é τ-contínua sss todas as aplicaçoes $g\circ f_i$, são contínuas. (P1, pg 159)

(22) Um subconjunto B de um e.v.t. F é limitado sss para toda sequencia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de B e toda sequencia $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de numeros positivos que converge para zero a sequencia $(\lambda_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tende a zero em F. (L2, pg 161)

(23) Sejam F e G dois espaços vetoriais formando um par com respeito à forma bilinear $(x, y)\longmapsto B(x,y)$. O par separa pontos de F. (vide D1, pg 183), sss $\sigma(F, G)$ e uma topologia de Hausdorff sobre F. (P1, pg 185)

(24) Sejam F e G dois espaços vetoriais formando um par com respeito à forma bilinear B que separa pontos de G, e N um subespaço de G diferente de G. Então, sobre F, a topologia $\sigma(F, G)$ é estritamente mais fina que a topologia $\sigma(F, N)$. (P4, pg 188)

(25) Sejam F e G dois espaços vetoriais formando um par que separa pontos de F. Identificamos F canônicamente com um subespaço de G^*, munimos G^* com a topología $\sigma(G^*,G)$ e F com a topología induzida $\sigma(F,G)$, (vide pg 186)

(a) Ocompletamento de F é seu fecho em G.

(b) Se o par também separa pontos de G, então G^* é o completamento de F.

(P5, pg 189)

(26) Suponhamos que os espaços vetoriais F e G formam um par com respeito à forma bilinear B. Se A é um subconjunto de F, então A° (vide D1, pg 190) é um subconjunto discado e $\sigma(G,F)$-fechado de G. (P1(e), pg 190).

(27) Sejam F e G como em (26). Se A é um subconjunto não vazio de F, então $A^{\circ\circ}$ é a envoltoria discada e $\sigma(F,G)$-fechada de A. (T1, pg 192).

(28) Sejam F e G como em (26), $\mathfrak{S}$ uma coleção de subconjuntos $\sigma(F,G)$-limitados de F. A $\mathfrak{S}$-topologia sobre G é de Hausdorff sss $\bigcup_{A\in\mathfrak{S}} A$ é total em F para $\sigma(F,G)$, (vide D1, pg 27), e o par separa pontos de G. (P1, pg 196).

(29) Sejam F e G dois espaços vetoriais formando um par que separa pontos de G. Os sunconjuntos convexos e fechados de F são os mesmos para toda topologia localmente convexa sobre F que seja compatível com o par que formam F e G, (vide D1, pg 198).
(P3, pg 198)

(30) Um subconjunto M do dual E' de um e.v.t. E, é equicontinuo sss M está contido no polar V° de uma vizinhança V do zero em E.
(P6, pg 200)

(31) (Alaoglu-Bourbaki) Seja E um e.v.t. Então todo subconjunto equicontinuo de E' é $\sigma(E',E)$-relativamente compacto.
(T1, pg 201)
Em particular se E é um espaço normado. A bola unitaria fechada de E' é $\sigma(E',E)$-compacta. (C do T1, pg 201)

(32) Seja E um espaço vetorial e sejam τ e τ' duas topologias de Hausdorff sobre E compatíveis com a estrutura vetorial de E. Su-

ponhamos que τ é mais fina que τ' e que para τ existe um sistema fundamental $\mathcal{B}$ de vizinhanças do zero formado por subconjuntos τ'-completos de E. Então E é τ-completo. (P5, pg 207)

(33) Seja E um e.l.c. e A um subconjunto não vazio discado e convexo de E.

(a) Se E é um espaço de Hausdorff, então E_A o é; i.e., E_A é um espaço normado.

(b) Se além disso A é um subconjunto completo de E, então - E_A é completo; i.e., um espaço de Banach.

(P6, pg 207)

(34) Suponhamos que os espaços vetoriais F e G formam um sistema dual (vide D1, pg 183). Os subconjuntos limitados de F são os - mesmos para toda topologia localmente convexa compatível com o - par que formam F e G. (T3, pg 209)

(35) Seja E um e.l.c. e E' seu dual. Todo subconjunto equicontínuo de E' é $\beta(E',E)$-limitado. (P1(a), pg 211)

(36) Seja E um e.l.c. tonelado. Então as seguintes coleçoes de subconjuntos de seu dual E' são idênticas,

(a) os conjuntos equicontinuos

(b) os conjuntos $\sigma(E',E)$-relativamente compactos

(c) os conjuntos $\beta(E',E)$-limitados

(d) os conjuntos $\sigma(E',E)$-limitados

(C da P2, pg 212)

(37) (a) Seja E um e.l.c. tonelado e $\mathfrak{M}$ um subespaço de E. Então o espaço quociente $E/\mathfrak{M}$ é tonelado.

(b) Seja $(E_i)_{i\in I}$ uma familia de e.l.c. tonelados. Então a suma direta localmente convexa $\coprod_{i\in I} E_i$ é tonelado. (C da P4, pg 215)

(38) Um e.l.c. E é infratonelado sss todo subconjunto $\beta(E',E)$-limitado de seu dual E' é equicontinuo. (P6, pg 217)

(39) Todo e.l.c. bornológico é infratonelado (depois D1, pg 220) Seja E um e.l.c. bornológico e F um e.l.c. qualquer. Se f é uma aplicação linear limitada de E em F; i.e. leva subconjuntos limitados de E em subconjuntos limitados de F, então f é continua.

(P1(a), pg 220)

(40) Todo e.l.c. onde o zero tem um sistema fundamental enumerável de vizinhanças é bornológico. Em particular todo e.l.c. metrizável é bornológico. (P3, pg 222)

(41) Com as hipótesis de (21) para F, os E_i e os f_i , e se os E_i são e.l.c. bornológicos então F também é bornológico. (P4,pg 222)
Em particular (a) Se E é um e.l.c. bornológico e M é um subespaço de E, então o espaço quociente E/M é bornológico.
(b) A soma direta localmente convexa $\coprod_{i\in I} E_i$ é bornológica se cada um dos E_i é um e.l.c. bornológico.
(C da P4, pg 222)

(42) Seja E um e.l.c. bornológico e E' seu dual. Então E' munido da topologia $\beta(E',E)$ é completo. (P6, pg 223)

(43) Seja E um e.l.c. de Hausdorff e E' seu dual. O espaço E é semi-reflexivo sss todo subconjunto limitado e $\sigma(E,E')$-fechado de E é $\sigma(E,E')$-compacto. (P1, pg 227)

(44) O dual E' de um e.l.c. de Hausdorff é semi-reflexivo E, munido da topologia $\beta(E',E)$ é tonelado. (P4, pg 228)

(45) Um e.l.c. de Hausdorff é reflexivo sss ele é semi-reflexivo e infratonelado. (P6, pg 229)
Em particular um e.l.c. reflexivo é sempre tonelado (C da P6, pg 229)

(46) Sejam, X um espaço topológico compacto e Y um espaço topológico de Hausdorff. Então toda bijeção continua f de X em Y é um homeomorfismo. Em particular, se τ é a topologia de X, toda topología de Hausdorff sobre X, menos fina que τ, é idêntica a τ. (antes P2, pg 231)

(47) (Krein-Šmulian) Seja E um e.l.c. de Fréchet e E' seu dual. Um subconjunto convexo A de E' é $\sigma(E',E)$-fechado sss para todo subconjunto equicontinuo discado e $\sigma(E',E)$-fechado M de E' o conjunto $A\cap M$ é $\sigma(E',E)$-fechado. (T2, pg 246)

(48) Seja E um e.l.c. de Hausdorff e E' seu dual. Então o comple

tamento $\hat{E}$ de E pode ser identificado com o espaço vetorial formado pelos elementos de E'^* cujas restriçoes às partes equicontinuas de E' são $\sigma(E',E)$-continuas. (C2, pg 250)

(49) Sejam (F_1,G_1) e (F_2,G_2) dois pares de espaços vetoriais formando sistemas duais. Consideremos, em forma canônica, G_i como subespaço de F_i^* $(i=1,2)$. Seja u uma aplicação linear de F_1 em F_2. Então a restrição de ${}^tu$ a G_2 aplica G_2 em G_1 sss u é contínua para as topologias $\sigma(F_1,G_1)$ e $\sigma(F_2,G_2)$. (P1, pg 254)

(50) Com as notaçoes de (49) e denotando também por ${}^tu$ a restrição de ${}^tu$ a G_2 temos: Se u é contínua para as topologias $\sigma(F_i,G_i)$, $i=1,2$; então a aplicação ${}^tu$ de G_2 em G_1 é contínua para as topologias $\sigma(G_i,F_i)$, $i=1,2$. Além disso temos ${}^t({}^tu)=u$. (C da P1, pg 255)

(51) Com as notaçoes e a hipótese de (50) temos: $u(F_1)$ é $\sigma(F_2,G_2)$-denso em F_2 sss ${}^tu$ é injectiva. (C2, pg 256)

(52) Sejam E y F dois e.l.c. de Hausdorff com topologias τ_E e τ_F. Se a aplicação linear u de E em F é contínua para τ_E e τ_F, então u é contínua para $\sigma(E,E')$ e $\sigma(F,F')$, e a sua transposta ${}^tu$ de F' em E' é contínua para $\sigma(F',F)$ e $\sigma(E',E)$ e também para $\beta(F',F)$ e $\beta(E',E)$. (C da P3, pg 256)

(53) Nas condiçoes de (51) temos: u é um morfismo estrito fraco; i.e., um morfismo estrito para as topologias $\sigma(F_i,G_i)$, $i=1,2$; - sss ${}^tu(G_2)$ é $\sigma(G_1,F_1)$-fechado em G_1. (P3, pg 263)

(54) Seja $(F_i,G_i)_{i\in I}$ uma família de pares de espaços vetoriais, formando sistemas duais. Consideremos os espaços vetoriais $F=\prod_{i\in I}F_i$ e $G=\coprod_{i\in I}G_i$. Então:

(a) Os espaços F e G formam um par dual com respeito à forma bilinear:

$$\langle f,g\rangle=\sum_{i\in I}\langle f_i,g_i\rangle \ , \text{ onde } f=(f_i)\in F \text{ e } g=(g_i)\in G \qquad \text{(bi)}$$

(fim pg 267).

(b) Em particular; se tomamos $G_i=F_i'$ $\forall i\in I$ e munimos F com a topologia produto das topologia $\sigma(F_i,G_i)$, então existe uma identificação canônica de F' com G e (bi) resulta a forma bilinear - canônica do par formado por F e F'. (P1, pg 266)

(c) A topologia $\sigma(F,G)$ sobre F coincide com a topologia produto das topologias $\sigma(F_i,G_i)$.
(P3, pg 268)

(55) (Grothendieck) Seja E um e.l.c. metrizável. Então E é Distinguido (vide D1, pg 288) sss E', munido da topologia $\beta(E',E)$ é bornológico. (T1, pg 289)

(56) Sejam, E um espaço de Pták (vide D2, pg 299), F um e.l.c. - de Hausdorff tonelado e f uma sobrejeção linear de E sobre F. - Então f é um morfismo estrito i.e. contínua e aberta. (P2, pg 299)

(57) Seja E um espaço de Fréchet reflexivo. Então seu dual E', munido da topologia forte $\beta(E',E)$, é um espaço de Pták. (vide D2, pg 299) (P6, pg 300)

(58) Sejam E e F dois e.v.t. metrizáveis e completos e f uma aplicação linear contínua de E em F. Então f é um morfismo estrito sss $f(E)$ é fechado em F. (P12, pg 307)

(59) (Dieudonné-Schwartz). Sejam E e F dois espaços de Fréchet - com topologias τ_E e τ_F respetivamente, E' e F' seus duais e u uma aplicação linear de E em F. Então as seguintes condições são equivalentes:

(a) u é um morfismo estrito para τ_E e τ_F

(b) u é morfismo estrito fraco; i.e., um morfismo estrito para $\sigma(E,E')$ e $\sigma(F,F')$

(c) $u(E)$ é fechado em F

(d) ${}^tu$ é um morfismo estrito para $\sigma(F',F)$ e $\sigma(E',E)$

(e) ${}^tu(F')$ é $\sigma(E',E)$-fechado em E'.

(P17, pg 308)

(60) Sejam, F um e.v.t., E um subespaço vetorial de F e f a injeção canônica de E em F. Então a topologia inicial sobre E dada por f é a topologia inducida sobre E por F. (E1, pg 150)

(61) Um subconjunto precompacto A de um e.v.t. de Hausdorff E é limitado. (P7, pg 146)
Em particular todo subconjunto compacto de E é limitado (depois D1, pg 145)

(62) Seja E um e.v.t. de Hausdorff. Se A é um subconjunto compacto de E e B um subconjunto fechado de E, então $A+B$ é um subconjunto fechado de E. (P5, pg 145)

(63) Sejam E e F dois espaços de Banach e f uma aplicação linear contínua de E em F. Se a imagem f(B) da bola unitaria B de E é densa em alguma bola B' de F, então f(B) contém o interior $\overset{\circ}{B}'$ de B'. (L1, pg 68).

(64) O dual forte de um e.l.c. reflexivo também é reflexivo (P7, pg 229).

(65) Um e.l.c. E é distinguido sss seu dual forte é tonelado. (P1, pg 288).

(66) Seja E_τ um e.l.c. semi-Montel. Se B é um subconjunto limitado de E, então a topologia sobre B induzida por τ coincide com a topologia que sobre ele induz $\sigma(E,E')$. (P2, pg 231).

(67) O dual forte de um espaço de Montel também é um espaço de Montel. (P9, pg 236).

(68) Se X é um e.l.c. semi-Montel então $\lambda(X',X) = \beta(X',X)$ sobre X', onde $\lambda(X',X)$ é a topologia da convergencia uniforme sobre os subconjuntos precompactos de X. (antes da P8, pg 235)

(69) Seja E um e.l.c. metrizável. Um subconjunto A de E' é $\lambda(E',E)$-fechado sss para todo subconjunto equicontínuo, discado e $\sigma(E',E)$-fechado M de E', $A \cap M$ é $\sigma(E',E)$-fechado em E'. (C do T1 (Banach-Dieudonné), pg 245).

R E F E R Ê N C I A S

1 Choquet, G. "Lectures on Analysis" Vol. 2
W.A. Benjamin, Inc., 1969.

2 Grothendieck, A. "Espaces Vectoriels Topologiques"
Soc. Mat. de São Paulo, 1964.

3 Hogbe-Nlend, H. "Distributions et Bornologie"
Notas de Aula - 2º Semestre, 1973.

3' Hogbe-Nlend, H. "Théorie des Bornologies et Applications"
Lecture Notes in Math. 213
Springer-Verlag, 1971.

4 Hönig, Ch. S. "Espaços Localmente Convexos e suas Aplicações ao Análise"
Notas de Aula - 2º Semestre, 1972.

4' Hönig. Ch. S. "Análise Funcional e Aplicações" 2 vols.
Pub. do IME da USP - 1970.

5 Horváth, J. "Topological Vector Spaces and Distributions" Vol. 1
Addison-Wesley 1966.

6 Komatsu, H. "Projective and Injective Limits of Weakly Compact Sequences of Locally Convex Spaces"
J. Math. Soc. Japan, Vol. 19 Nº 3, 1967.

7 Treves, F. "Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels"
Academic Press, 1967.