REPRESENTAÇÕES INDUZIDAS
DE ANÉIS

Ubirajara Rocha Ferreira

DISSERTAÇÃO APRESENTADA AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM MATEMÁTICA.

ORIENTADOR: Prof. Dr. ALFREDO ROSALIO JONES RODRIGUEZ

Durante a elaboração deste trabalho o autor recebeu apoio financeiro do CNPq e FINEP.

São Paulo, junho de 1980.

À

Sueli Mara

e aos manos Beã, Helô e Ubiratã.

AGRADECIMENTOS

Agradeço às várias pessoas que, de alguma forma, auxiliaram-me no decorrer dos cursos do IME-USP, e especialmente durante a elaboração desse trabalho.

Aos colegas da USP e da UNESP-FEG, que têm se dedicado à melhoria do ensino e lutado por melhores condições de pesquisa, pelo incentivo demonstrado;
à direção da FEG, pelo suporte dado;
aos meus familiares, e em especial à minha esposa Sueli Mara pelo apoio e colaboração;
à Lúcia Lucatto, pelo trabalho de datilografia;
ao professor Alfredo Jones, pela sugestão e paciente orientação desta dissertação.

Ubirajara

APRESENTAÇÃO

A Teoria de Representações de Grupos existe como um domínio independente há quase 90 anos. Tem como objetivo o estudo de realizações concretas de sistemas algébricos abstratos.

O primeiro período do seu desenvolvimento, aproximadamente de 1890 a 1920, é conectado com os nomes de G. Frobenius e Schur, W. Burnside e F. E. Molin. Somente grupos finitos e representações de dimensão finita foram consideradas nos trabalhos desse período. Por exemplo, os estudos de grupos de permutações e Álgebra das Matrizes originaram as primeiras idéias na teoria.

O ímpeto original para o desenvolvimento da Teoria de Representações foi a invenção por Frobenius da ge neralização da noção de caráter. Isto foi baseado numa sugestão de Dedekind. Numa terminologia atual, um caráter no sentido de Frobenius é um funcional multiplicativo sobre o centro de um anel de grupo. Logo foi descoberto que este caráter também pode ser definido como o traço de uma matriz de uma representação. Assim, a teoria de Frobenius e a teoria de caracteres de grupos comutativos, que foi desenvolvida mais tarde, foram unidas numa nova teoria de representações.

O segundo período foi marcado pela criação da teoria de representações de grupos topológicos compactos.

O estudo sistemático de representações de grupos de dimensão infinita, é o principal tema do terceiro período, que começou em 1940.

O Teorema da Reciprocidade de Frobenius foi estendido para grupos compactos por A. Weyl, e apareceu em seu livro: " *L'intégration dans le groupes topologiques et ses applications* ", publicado em 1940 em Paris por Hermann Cie. Depois foi verificado que sua construção é uma generalização do conceito de representação induzida. Um estudo sistemático dessa construção para grupos compactos foi empreendido por Mackey, que produziu um critério de inducibilidade.

A construção de uma representação induzida é uma ferramenta útil no cálculo de caracteres e representações dentro da Teoria de Representações.

Algumas representações induzidas são de grande interesse per si. A mais simples é a representação induzida da Representação 1, $T : H \to \{1\}$, de um subgrupo H de G. O grau da representação induzida ${}^{G}T$ é o índice $[G : H]$ de H em G, e as matrizes ${}^{G}T(g)$, $g \in G$, são todas matrizes de permutação. Entretanto, nem toda representação de permutação é induzida.

Outra representação útil é a *representação monomial*, que é o nome dado para a representação T de G, tal que para cada $g \in G$, a matriz $T(g)$ tem exatamente um elemento inteiro não nulo em cada linha e coluna. Por exemplo, seja U uma representação uni-dimensional de um subgrupo H de G, e seja $T = {}^{G}U$. Pelo cálculo de ${}^{G}U$ (ver por exemplo |5|), verifica-se que T é uma representação monomial. Chamamos de *representação monomial induzida* a toda representação induzida ${}^{G}U$, onde U é uma representação uni-dimensional de um subgrupo.

Para muitos grupos, todas ou quase todas representações unitárias irredutíveis são representações monomiais induzidas.

Esse conceito de representação monomial se generaliza para a importante noção de módulo imprimitivo, e desta teoria segue, em particular, que toda representação monomial irredutível é uma representação monomial induzida.

Finalmente, a operação de indução, a qual é um funtor da categoria das representações de um subgrupo na categoria das representações de um grupo, tem sido recentemente, objeto de um estudo detalhado e frutífero.

Pretendemos aqui obter algumas propriedades relacionadas com Representações Induzidas de Anéis, ou seja, dado um anel A, e um subanel B, estudar representações do anel A obtidas a partir de Representações do seu subanel B, generalizando o estudo de Representações Induzidas de Grupos.

Observamos que no início do capítulo de Representações Induzidas tratadas no livro de Curtis-Reiner |5|, eles escrevem: "A maioria dos resultados não tem ainda generalização para anéis com condições mínimas ou álgebras de dimensão finita, ...". O propósito deste trabalho é indicar como alguns dos mais básicos teoremas sobre Representações Induzidas de Grupos podem, de fato, ser generalizados para Anéis e Álgebras. Na maioria dos casos, va mos fazer isto produzindo ao mesmo tempo resultados conhecidos, ou seja, resultados vistos como verdadeiros (numa forma apropriada) para Representações de Grupos (possivelmente infinitos), ou Módulos sobre Anéis Comutativos com unidade. De modo que neste sentido, este trabalho não contém substancialmente resultados novos.

No segundo capítulo, vamos descrever Representações Induzidas de Anéis, como construí-las, e discutir o teorema de Frobenius. Mais que isto, vamos considerar essa construção como sendo uma generalização apropriada ao caso de Anéis, do Teorema da Reciprocidade de Frobenius.

No terceiro capítulo, que é a parte central do trabalho, vamos procurar uma condição necessária e suficiente para que uma Representação de A seja induzida de B, isto é, vamos caracterizar Representações Induzidas de Anéis, fazendo uma conexão entre o teorema da Imprimitividade e o que costuma ser chamado "teorema de Morita". Além disso, vamos fazer uma aplicação dos teoremas de Frobenius e da Imprimitividade, demonstrando o teorema do Número de Entrelaçamento (*"Intertwining Number"*) de Mackey, que estabelece uma relação entre duas Representações Induzidas.

Finalmente, apresentamos um capítulo inicial, onde simplesmente damos algumas definições e propriedades que serão utilizadas no desenrolar do trabalho.

A referência principal é um trabalho de Marc A. Rieffel - "*Induced Representations of Rings*" |24|.

CAPITULO I

Faremos aqui uma recapitulação de certas noções básicas. Daremos algumas definições e resultados, alguns tidos como clássicos em Álgebra, com o intuito maior de fixar as notações utilizadas nos capítulos seguintes.

Os resultados que forem enunciados sem demonstração, encontram-se demonstrados na literatura citada no final do trabalho, apesar de alguns estarem sem referências.

O conteúdo deste capítulo será usado livremente no resto da dissertação, sem fazer referências explícitas.

§1. CATEGORIAS

Por uma categoria entendemos:

Um sistema $\mathcal{C} = (\mathrm{obj}\,\mathcal{C}, \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}, \circ)$ consistindo de:

1º: úma classe, obj $\mathcal{C}$, cujos elementos são chamados objetos;

2º: uma função, $mor_{\mathcal{C}}$, que a cada par (A, B) de objetos, associa um conjunto $mor_{\mathcal{C}}(A, B)$, cujos elementos $f : A \to B$ são chamados morfismos; e

3º: uma função o: $mor_{\mathcal{C}}(B, C) \times mor_{\mathcal{C}}(A, B) \to mor_{\mathcal{C}}(A, C)$ chamada composição, com as seguintes propriedades:

(c.1) para cada tripla $h : C \to D$, $g : B \to C$ e $f : A \to B$, $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

(c.2) para cada $A \in obj\ \mathcal{C}$, existe um único $1_A \in mor_{\mathcal{C}}(A,A)$ tal que se $f : A \to B$ e $g : B \to A$, então:

$$f \circ 1_A = f \quad e \quad 1_A \circ g = g,$$

onde 1_A é chamado de *identidade da categoria.*

Um morfismo $f : A \to B$ em $\mathcal{C}$ é chamado um *isomorfismo* se existir um morfismo (necessariamente único) $f^{-1} : B \to A$ em $\mathcal{C}$ tal que $f^{-1} \circ f = 1_A$ e $f \circ f^{-1} = 1_B$.

Dizemos que uma categoria é *concreta*, se existir uma função u, de $\mathcal{C}$ para a classe dos conjuntos, tal que para cada $A, B \in obj\ \mathcal{C}$,

(i) $mor_C\ (A,B) \subseteq Map\ (u\ (A),\ u\ (B))$, onde $Map\ (u\ (A)\ ,\ u\ (B))$ é o conjunto de todas as funções de $u(A)$ em $u(B)$,

(ii) $1_A = 1_{u(A)}$

(iii) $\circ$ é a composição usual de funções.

Aqui, um isomorfismo é uma bijeção $f : u(A) \to u(B)$.

Se $\mathcal{C} = (obj\ \mathcal{C},\ mor_{\mathcal{C}},\ \circ)$ é uma categoria concreta, então o conjunto $u(A)$ é chamado *conjunto subjacente* de $A \in obj\ \mathcal{C}$.

Uma categoria $\mathcal{D} = (obj\ \mathcal{D},\ mor_{\mathcal{D}},\ \circ)$ é uma *subcategoria* de $\mathcal{C}$, se $obj\ \mathcal{D} \subseteq obj\ \mathcal{C}$; $mor_{\mathcal{D}}\ (A,B) \subseteq mor_{\mathcal{C}}\ (A,B)$, para cada par $A,B \in obj\ \mathcal{D}$; $\circ$ em $\mathcal{D}$ é a restrição de $\circ$ em $\mathcal{C}$. Se no entanto, $mor_{\mathcal{D}}\ (A,B) = mor_{\mathcal{C}}\ (A,B)$ para cada par $A,B \in obj\ \mathcal{D}$, então $\mathcal{D}$ é dita uma *subcategoria plena* de $\mathcal{C}$.

Por exemplo, a classe dos grupos abelianos é a classe de objetos de uma subcategoria plena da categoria dos grupos, e esta categoria tem uma subcategoria plena cujos objetos são os grupos abelianos finitos. É uma prática comum em Álgebra, identificar um objeto numa categoria com seu conjunto subjacente. Então, por exemplo, nós usualmente identificamos um grupo $(G,\circ)$ consistindo de um conjunto G e uma operação $\circ$, com seu conjunto subjacente G. Note, entretanto, que a categoria dos grupos não é uma subcátegoria da categoria dos conjuntos, simplesmente porque não é verdade que a classe dos objetos da categoria dos grupos esteja contida na classe dos objetos da categoria dos conjuntos, embora todo grupo possa ser considerado um conjunto, pois sobre o mesmo conjunto podem ser definidos diferentes estruturas de grupos.

Por simplicidade, quando quisermos nos referir a uma categoria $\mathcal{C} = (\text{obj } \mathcal{C}, \text{mor}_{\mathcal{C}}, \circ)$, vamos citar simplesmente a categoria $\mathcal{C}$.

§2. FUNTORES

Um funtor é algo que pode ser visto como um "homomorfismo de categorias".

Definição: Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ duas categorias. Então, um funtor (covariante) F de $\mathcal{C}$ para $\mathcal{D}$ é uma regra que associa:

(i) a cada objeto $A \in \text{obj } \mathcal{C}$, um objeto $F(A) \in \text{obj } \mathcal{D}$;

(ii) a cada morfismo $f : A \to B$ em $\mathcal{C}$, um morfismo $F(f) : F(A) \to F(B)$ em $\mathcal{D}$, sujeito às condições:

(iii) $F(gf) = F(g) \cdot F(f)$

(iv) $F(1_A) = 1_{F(A)}$

A expressão *covariante* no título de F se deve aos ítens (ii) e (iii) acima. Em (ii), o sentido da flecha é preservada por F, isto é, $F(f)$ vai da F-imagem do domínio de f para a F-imagem do co-domínio de f. Isso, por sua vez, dá sentido a (iii). Por outro lado, existem exemplos em que queremos inverter a flecha, isto é, considerar funtores F tais que (i) vale, mas

(ii)' a cada morfismo $f : A \to B$ em $\mathbb{C}$ é associado um morfismo $F(f) : F(B) \to F(A)$ em $\mathbb{D}$.

Então, (iv) é preservada mas (iii) é substituida por

(iii)' $F(gf) = F(f) . F(g)$.

Um funtor satisfazendo essa variante da definição se diz *contravariante*.

Há mais uma noção básica na teoria das categorias. É a noção de "transformação natural" de funtores. Na verdade, toda a linguagem e maquinaria de categorias e funtores foi desenvolvida para dar precisão ao conceito intuitivo de transformação natural.

<u>Definição</u>: Sejam $F, G : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ dois funtores (covariantes). Então uma transformação natural η, de F para G, é uma regra que associa a cada objeto $A \in \operatorname{obj} \mathbb{C}$

um morfismo η_A no conjunto $mor_D\ (F(A),\ G(A))$, sujeito à condição que o diagrama abaixo seja comutativo, para cada $f : A \to B$ em $\mathbb{C}$:

$$\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\
F(B) \arrow[r, "\eta_B"'] & G(B)
\end{tikzcd}$$

Se cada η_A for um isomorfismo (inversível) em $\mathbb{D}$, dizemos que η é uma *equivalência natural*, ou *isomorfismo natural*. Evidentemente, se η for uma equivalência natural de F para G, então η^{-1}, dada por $(\eta^{-1})_A = \eta_A^{-1}$ será uma equivalência natural de G para F.

Se η for uma transformação natural de F para G e μ for uma transformação natural de G para H, então uma transformação natural $\mu\eta$ de F para H será dada por $(\mu\eta)_A = \mu_A\ \eta_A$; é claro então que η de F para G, será uma equivalência se e só se existir μ de G para F tal que $\mu\eta = Id$, $\eta\mu = Id$, onde Id denota a transformação identidade de funtores.

<u>Definição</u>: Um funtor $F : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ é pleno se para todo par $C, C' \in \text{obj } \mathbb{C}$ e para todo morfismo $g : F(C) \longrightarrow F(C')$ em $\mathbb{D}$, existir um morfismo $f : C \longrightarrow C'$ em $\mathbb{C}$, com $g = F(f)$.

Claramente, a composta de dois funtores plenos é um funtor pleno.

<u>Definição</u>: Um funtor $F : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{D}$ é fiel se para todo par $C, C' \in \text{obj } \mathbb{C}$ e todo par $f_1, f_2 : C \to C'$ de morfismos em $\mathbb{C}$, a igualdade $F(f_1) = F(f_2) : F(C) \longrightarrow F(C')$ implica $f_1 = f_2$.

Novamente, composta de funtores fiéis é fiel.

Por exemplo, se $\mathbb{D}$ é uma subcategoria de $\mathbb{C}$, o funtor inclusão de $\mathbb{D}$ em $\mathbb{C}$, que leva cada objeto e cada morfismo de $\mathbb{D}$ nele mesmo em $\mathbb{C}$, é automaticamente fiel. Se $\mathbb{D}$ for uma subcategoria plena de $\mathbb{C}$, então o funtor inclusão será pleno.

<u>Definição</u>: Um funtor $F : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{D}$ é denso, se para cada $D \in \text{obj } \mathbb{D}$, existe um $C \in \text{obj } \mathbb{C}$ tal que $F(C)$ é isomorfo a D.

§3. CATEGORIAS DE MÓDULOS:

Neste trabalho, vamos tratar basicamente com a categoria de módulos.

Dados dois módulos M e N, digamos R-módulos à esquerda, indicamos por Hom_R (M, N) o conjunto dos R-homomorfismos de M em N.

Vamos denotar por $\mathcal{M}_R$ = (obj $\mathcal{M}_R$, Hom_R, o) a categoria concreta dos R-módulos à direita e homomorfismos à direita. Analogamente para ${}_R\mathcal{M}$, a categoria dos R- módulos à esquerda e ${}_R\mathcal{M}_S$ dos bimódulos à esquerda sobre R e à direita sobre S e seus homomorfismos.

Uma importante propriedade da categoria dos R-módulos é que para cada par M,N de R-módulos, o conjunto Hom_R (M,N) é um grupo abeliano com relação à operação de adição: $(f,g) \longmapsto f + g$ definida por:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \; x \in M.$$

Além disso, Hom_R (M,N) torna-se um módulo se M ou N forem bimódulos.

Suponhamos por exemplo, a situação: $({}_RM_S, {}_RN)$. Então, para cada $s \in S$ e $f \in \mathrm{Hom}_R$ (M,N), definindo a ação de S sobre Hom_R (M,N) por:

$(sf)(x) = f(xs)$, para todo $x \in M$,

$Hom_R(M,N)$ torna-se um S-módulo à esquerda.

Agora, suponhamos que $\mathcal{C}$ seja uma subcategoria plena de R-módulos e que $\mathcal{D}$ seja uma subcategoria plena de S-módulos. Então, um funtor F de $\mathcal{C}$ para $\mathcal{D}$ é *aditivo*, se para cada M,N, módulos em $\mathcal{C}$, e cada par $f,g : M \longrightarrow N$ em $\mathcal{C}$, temos:

$$F(f + g) = F(f) + F(g)$$

Em particular, se F for aditivo e covariante, então a restrição:

$$F: Hom_R(M,N) \longrightarrow Hom_S(F(M),F(N))$$

será um homomorfismo de grupos abelianos.

Também, $F : {}_R\mathcal{M} \longrightarrow {}_S\mathcal{M}$, funtor aditivo, será fiel, se $F(f) = 0$ implicar $f = 0$.

<u>Definição</u>: Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ subcategorias plenas de ${}_R\mathcal{M}$ e ${}_S\mathcal{M}$ respectivamente. Sejam $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ e $G : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ funtores aditivos covariantes. Então, F é um adjunto à esquerda de G e G é um adjunto à direita de F, ou simplesmente (F, G) é um par adjunto, se para cada $M \in obj\ \mathcal{C}$, e $N \in obj\ \mathcal{D}$, existir um isomorfismo

$$\eta = \eta_{MN} : \mathrm{Hom}_R\,(M, G(N)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_S\,(F(M), N)$$

que é natural em ambos M e N, isto é, são comutativos os seguintes diagramas:

(i) para cada $f : M \longrightarrow M'$ em $\mathbb{C}$,

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_R\,(M, G(N)) \arrow[r, "\mathrm{Hom}_R\,(f,\, G(N))"] \arrow[d, "\eta_{MN}"'] & \mathrm{Hom}_R\,(M', G(N)) \arrow[d, "\eta_{M'N}"] \\
\mathrm{Hom}_S\,(F(M), N) \arrow[r, "\mathrm{Hom}_S\,(F(f),\, N)"'] & \mathrm{Hom}_S\,(F(M'), N)
\end{tikzcd}$$

(ii) para cada $g : N \longrightarrow N'$ em $\mathbb{D}$,

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_R\,(M, G(N)) \arrow[r, "\mathrm{Hom}_R\,(M,\, G(f))"] \arrow[d, "\eta_{MN}"'] & \mathrm{Hom}_R\,(M, G(N')) \arrow[d, "\eta_{MN'}"] \\
\mathrm{Hom}_S\,(F(M), N) \arrow[r, "\mathrm{Hom}_S\,(F(M),\, f)"'] & \mathrm{Hom}_S\,(F(M), N')
\end{tikzcd}$$

Chamaremos o adjunto à esquerda de *adjunto*, e o adjunto à direita de *coadjunto*, ou seja, F é um adjunto de G e G é um coadjunto de F.

Dados M_R e $_RN$, módulos sobre o anel R, está definido também, o produto tensorial, que é um grupo abeliano denotado por $M \otimes_R N$.

Em geral, esse grupo abeliano não é um R-módulo. Entretanto, uma estrutura de bimódulo de M ou N induz uma estrutura de módulo em $M \otimes_R N$.

Suponhamos por exemplo, a situação: $({}_SM_R, {}_RN)$. Então, para cada $s \in S$, definindo a ação de S sobre $M \otimes_R N$ por: $s(m \otimes n) = (sm) \otimes n$; para $m \in M$ e $n \in N$, $M \otimes_R N$ torna-se um S-módulo à esquerda.

Analogamente, se ${}_SM_R$ e ${}_RN_T$ forem bimódulos, então ${}_S(M \otimes_R N)_T$ será um bimódulo, com:

$$s(m \otimes n) = (sm) \otimes n \quad \text{e} \quad (m \otimes n)t = m \otimes (nt).$$

Vamos agora, demonstrar uma proposição, a título de exemplo, sobre o conceito de transformação natural entre funtores de categorias de módulos.

<u>Proposição 1.1</u>: Seja R um anel e ${}_R\mathcal{M}$ a categoria dos R-módulos à esquerda. Então existem isomorfismos naturais entre os funtores $\mathrm{Hom}_R(R, \_)$ e $(R \otimes_R \_)$ com o funtor identidade de ${}_R\mathcal{M}$.

<u>Demonstração</u>: Precisamos mostrar que existem isomorfismos

naturais:

(a) $\rho: 1_{_R M} \longrightarrow \operatorname{Hom}_R ({}_R R_R, \_)$, onde para $m \in M$, cada $r \in R$ e cada $\gamma \in \operatorname{Hom}_R (R,M)$, definimos

$\rho_M (m)(r) = rm$ e $\rho_M^{-1} (\gamma) = \gamma(1)$, e

(b) $\mu: ({}_R R_R \otimes_R \_) \longrightarrow 1_{_R M}$, onde para cada $M \in \operatorname{obj} {}_R\mathcal{M}$, definimos

$\mu_M (r \otimes m) = rm$ e $\mu_M^{-1} (m) = 1 \otimes m$.

Vamos dividir a demonstração um alguns lemas:

<u>LEMA 1</u>: $\rho_M : M \longrightarrow \operatorname{Hom}_R (R,M)$, definido por

$\rho_M (m) (r) = rm$ é um R-isomorfismo.

<u>Demonstração</u>: Primeiro, $\rho_M(m) \in \operatorname{Hom}_R (R,M)$ pois, para todos $r, s, t \in R$ e $m, n \in M$,

(i) $\rho_M(m)$ é um R-homomorfismo de R para M:

$\rho_M(m)(rs + r's') = (rs + r's')(m) = r\, \rho_M(m)(s) + r'\, \rho_M(m)(s')$.

(ii) ρ_M é R-linear:

$$\rho_M\,(rm + sn)(t) = t(rm + sn) = trm + tsn =$$

$$= \rho_M\,(m)(tr) + \rho_M\,(n)(ts) = (r\,\rho_M\,(m) + s\,\rho_M\,(n))(t).$$

Agora, ρ_M é um mono pois $\rho_M\,(m) = 0$, implica $m = \rho_M\,(m)(1) = 0$, para todo $m \in M$. E ainda mais, ρ_M é epi pois, se $\gamma \in Hom_R\,(R,M)$, então $\gamma(r) = r\,\gamma\,(1) = \rho_M\,(\gamma(1))(r)$ para todo $r \in R$.

Portanto, ρ_M é um R-isomorfismo.

○

<u>LEMA 2</u>: $\mu_M : R \otimes_R M \longrightarrow M$, definido por

$\mu_M\,(r \otimes m) = rm$ é um R-isomorfismo.

<u>Demonstração</u>: Desde que a aplicação $(r,m) \longmapsto rm$ define uma aplicação R-balanceada de $R \times M$ em M, existe uma aplicação $\mu_M : R \otimes M \longrightarrow M$ t.q. $\mu_M\,(r \otimes m) = rm$, que é claramente um R-homomorfismo.

Por outro lado, a aplicação $\mu_M' : M \rightarrow R \otimes_R M$ definida por $\mu_M'\,(m) = m \otimes 1$ é também um R-homomorfismo. Como $\mu_M \circ \mu_M' = 1_M$ e $\mu_{M'} \circ \mu_M = 1_{R \otimes_R M}$, pois $R \otimes_R M = \{1 \otimes m : m \in M\}$ concluimos que μ_M é um R-isomorfismo.

○

<u>LEMA 3</u>: ρ é uma transformação natural de ${}_R\mathcal{M}$ em ${}_R\mathcal{M}$, isto é, para $M,N \in \mathrm{obj}\ {}_R\mathcal{M}$ e cada $f : M \longrightarrow N$ em ${}_R\mathcal{M}$, o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[rr, "1_{{}_R\mathcal{M}}(f)=", "=f"'] \arrow[d, "\rho_M"'] & & N \arrow[d, "\rho_N"] \\
\mathrm{Hom}_R(R,M) \arrow[rr, "\mathrm{Hom}_R(R,f)"'] & & \mathrm{Hom}_R(R,N)
\end{tikzcd}$$

<u>Verificação</u>: De um lado,

$[(\rho_N \circ f)(m)]\ (r) = \rho_N\ (f(m))(r) = r\ .\ f(m).$

Por outro lado,

$[(\mathrm{Hom}_R\ (R,f) \circ \rho_M)(m)]\ (r) = \mathrm{Hom}_R\ (R,f)(\rho_M\ (m))(r) =$

$= \rho_{f(M)}\ (m)(r) = r\ .\ f(m).$

○

<u>LEMA 4</u>: μ é uma transformação natural de ${}_R\mathcal{M}$ em ${}_R\mathcal{M}$, isto é, para $M,N \in \mathrm{obj}\ {}_R\mathcal{M}$ e cada $f : M \longrightarrow N$ em ${}_R\mathcal{M}$, o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} R \otimes_R M & \xrightarrow{R \otimes_R f} & R \otimes_R N \\ \downarrow{\scriptstyle \mu_M} & & \downarrow{\scriptstyle \mu_N} \\ M & \xrightarrow[= f]{1_{_RM}(f) =} & N \end{array}$$

<u>Verificação</u>: De um lado,

$[\mu_N \circ (R \otimes_R f)]\ (r \otimes m) = \mu_N\ (r \otimes f(m)) = r\ .\ f(m).$

Por outro lado,

$(f \circ \mu_M)(r \otimes m) = f(rm) = r\ .\ f(m)$

○

Analogamente, podemos demonstrar também que, para a categoria $\mathbb{M}_R$, dos R-módulos à direita, existem isomorfismos naturais entre os funtores $Hom_R\ (\_, R)$ e $\_ \otimes_R R$ e o funtor identidade de $\mathbb{M}_R$.

●

§4. EQUIVALÊNCIA DE CATEGORIAS:

<u>Definição</u>: Sejam $\mathbb{C}$ e $\mathbb{D}$ categorias arbitrárias. Então, um

funtor covariante $F : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{D}$ é uma equivalência de categorias se existir um funtor (necessariamente covariante):

$$G : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$$

e isomorfismos naturais:

$$GF \cong 1_{\mathbb{C}} \quad \text{e} \quad FG \cong 1_{\mathbb{D}} .$$

Um funtor G com essa propriedade (também uma equivalência de categorias) é chamado uma *equivalência inversa de* F. Duas categorias são *equivalentes* se existir uma equivalência de categorias de uma para outra. Escrevemos

$$\mathbb{C} \approx \mathbb{D}$$

no caso em que $\mathbb{C}$ e $\mathbb{D}$ são equivalentes. Também, isto define uma relação de equivalência na classe de todas as categorias.

TEOREMA 1.2: Sejam $\mathbb{C}$ e $\mathbb{D}$ categorias. Então, um funtor covariante, $F : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{D}$ é uma equivalência de categorias se e só se F for fiel, pleno e denso.

O

Definição: Um funtor covariante $F : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{D}$ é um isomorfismo se existir um funtor covariante $G : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$

com $FG = 1_D$ e $GF = 1_C$. Se um tal par de funtores existir, então $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são ditas *isomorfas*.

Claramente, categorias isomorfas são equivalentes, mas a recíproca não é verdadeira.

§5. EQUIVALÊNCIA DE ANÉIS E TEOREMAS DE MORITA

Nosso interesse se restringe à categoria dos módulos. Então, vamos assumir que todos os funtores entre tais categorias são aditivos. Então, duas tais categorias serão equivalentes se existir uma equivalência aditiva de uma para a outra.

<u>Definição</u>: Dois anéis R e S são equivalentes (segundo Morita), se

$$_R\mathcal{M} \approx {}_S\mathcal{M},$$

isto é, se existir uma equivalência entre essas categorias de módulos.

Se R e S forem equivalentes, escreveremos $R \approx S$.

Mostra-se que as categorias $_R\mathcal{M}$ e $_S\mathcal{M}$ são equivalentes se e só se $\mathcal{M}_R$ e $\mathcal{M}_S$ o forem.

Sejam R e S um par de anéis equivalentes. Especificamente assumimos que:

(i) $F : {}_R\mathcal{M} \longrightarrow {}_S\mathcal{M}$ e $G : {}_S\mathcal{M} \longrightarrow {}_R\mathcal{M}$

são equivalências inversas. Em particular,

$$GF \cong 1_{{}_R\mathcal{M}} \quad \text{e} \quad FG \cong 1_{{}_S\mathcal{M}}$$

implica que existem isomorfismos naturais:

(ii) $\eta : GF \longrightarrow 1_{{}_R\mathcal{M}}$ e $\xi : FG \longrightarrow 1_{{}_S\mathcal{M}}$.

Portanto, no caso de η, para cada $M \in \text{obj } {}_R\mathcal{M}$, existe um isomorfismo $\eta_M : GF(M) \longrightarrow 1_{{}_R\mathcal{M}}(M) = M$ em ${}_R\mathcal{M}$ tal que para cada $M, M' \in \text{obj } {}_R\mathcal{M}$ e cada $f : M \longrightarrow M'$ em ${}_R\mathcal{M}$, o diagrama abaixo é comutativo:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\eta_M"'] & M' \arrow[d, "\eta_{M'}"] \\
GF(M) \arrow[r, "GF(f)"'] & GF(M')
\end{tikzcd}$$

Naturalmente, uma observação paralela aplica-se a ξ.

Além disso, para cada $M \in \text{obj } {}_R\mathcal{M}$ e cada

$N \in \text{obj }_S\mathcal{M}$, existem $\mathbb{Z}$-homomorfismos:

$$\phi = \phi_{MN} : \text{Hom}_S\ (N, F(M)) \longrightarrow \text{Hom}_R\ (G(N), M)$$

$$\theta = \theta_{MN} : \text{Hom}_S\ (F(M), N) \longrightarrow \text{Hom}_R\ (M, G(N))$$

definidos via:

$$\phi_{MN} : \gamma \longmapsto \eta_M \circ G(\gamma) \quad \text{e} \quad \theta_{MN} : \delta \longmapsto G(\delta) \circ \eta_M^{-1}$$

O isomorfismo natural ξ determina também,um par de homomorfismos similares a ϕ e θ.

É importante ressaltar que esses homomorfismos' são isomorfismos naturais. Isto mostra que se F for uma equivalência inversa de G, então (F, G) e (G, F) são pares adjuntos de funtores.

<u>Definição</u>: $P \in \text{obj }_S\mathcal{M}$ é um gerador, se o funtor

$\text{Hom}_S\ (P, \_)$ for fiel.

Quando um módulo $P \in \text{obj }_S\mathcal{M}$ for projetivo, finitamente gerado e gerador, diremos que ele é um progerador.

<u>Teorema 1.3</u>: Sejam R e S anéis equivalentes via as equivalências inversas:

$$F : {}_R\mathcal{M} \longrightarrow {}_S\mathcal{M} \quad \text{e} \quad G : {}_S\mathcal{M} \longrightarrow {}_R\mathcal{M}$$

Então, existe $P \in obj\ {}_S M$ progerador, tal que P é um bimódulo ${}_S P_R$, à esquerda sobre S e à direita sobre R, e

$$\mathcal{F} \cong (P \otimes_R \_) \quad e \quad \mathcal{G} \cong Hom_S\ (P, \_)$$

○

<u>Teorema 1.4</u>: Seja $P \in obj\ M_R$ um progerador, e seja

$$S = End_R\ (P_R).$$

Então, R e S são anéis equivalentes, via as equivalências inversas:

$$\mathcal{F} = (P \otimes_R \_) \quad e \quad \mathcal{G} = Hom_S\ (P, \_)$$

○

§6. <u>REPRESENTAÇÕES INDUZIDAS</u>

Seja R um anel comutativo e seja G um grupo abeliano. Queremos agora considerar um R-módulo livre RG, tendo como base os elementos de G. Assim, os elementos de RG podem ser escritos de modo único, na forma $\sum_g r_g \cdot g$. Definindo a seguinte multiplicação em RG,

se $x = \sum_{g \in G} r_g \cdot g$ e $y = \sum_{h \in G} s_h \cdot h$; $x, y \in RG$,

$x \cdot y = \sum_g \sum_h (r_g \cdot s_h)\ gh$,

RG torna-se uma R-álgebra, a qual chamaremos *Grupo-Álgebra* *de* G *sobre* R.

Vamos também considerar uma *representação* T, do grupo G, com o R-módulo V como espaço de representação, como sendo um homomorfismo T, do grupo G no grupo GL_R (V), dos R-homomorfismos inversíveis de V em V. Cada representação induz uma estrutura de RG-módulo sobre V pela comutatividade do seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "T"] \arrow[d, hook] & GL_R(V) \arrow[d, hook] \\ RG \arrow[r, "\hat{T}"'] & End_R(V) \end{tikzcd} ,$$

onde $\hat{T}$ é o homomorfismo de R-álgebras, obtido prolongando-se T linearmente a RG.

Por isso, V também é chamado de G-módulo.

Seja H um subgrupo de um grupo finito G, e seja K um corpo arbitrário. Vamos assumir aqui, que os KG-módulos são finitamente gerados e portanto são K-espaços de dimensão finita. Desde que KH é uma subálgebra de KG, todo KG-módulo L é também um KH-módulo, o qual será denotado por L_H. Então, L_H tem o mesmo espaço vetorial subjacente que L, mas o domínio dos operadores à esquerda é KH em lugar de KG.

Definição: Seja H um subgrupo de G e M um KH-módulo à esquerda. Então KG é um (KG, KH)- bimódulo, e podemos formar o KG-módulo à esquerda:

$$^{G}M = KG \otimes_{KH} M ,$$

que é chamado o Induzido de M. A representação de G fornecida por ^{G}M é chamada uma Representação Induzida.

A fim de calcular ^{G}M, consideremos a decomposição em classes laterais à esquerda:

$$G = g_1 H \ \dot{\cup} \ g_2 H \ \dot{\cup} \ldots \dot{\cup} \ g_t H, \quad t = [G : H], \text{ onde } g_1 = 1.$$

Todo elemento de G pode ser expressado como um produto $g_i h$, $1 \leq i \leq t$, $h \in H$, g_i e h únicos. Então, todo elemento de KG é unicamente expressado como

$$\sum_{i=1}^{t} g_i b_i , \quad b_i \in KH.$$

Portanto, temos:

$$KG = g_1 KH \oplus \ldots \oplus g_t KH ,$$

e assim KG é um KH-módulo livre à direita, com base

$\{g_1, \ldots, g_t\}$.

Pela propriedade do produto tensorial, temos:

$$^{G}M = g_1\, KH \otimes_{KH} M \oplus \ldots \oplus g_t\, KH \otimes_{KH} M ,$$

que pode ser reescrito como

$$^{G}M = g_1 \otimes M \oplus \ldots \oplus g_t \otimes M$$

em virtude da fórmula

$$g_i\, b \otimes m = g_i \otimes bm , \quad b \in KH , \quad m \in M.$$

Um problema que faz sentido é saber quando um KG-módulo L pode ser identificado com um módulo induzido ^{G}M, para algum KH-módulo M, onde H é um subgrupo de G.

Definição: Um KG-módulo à esquerda L é chamado de Módulo Imprimitivo, se existirem K-subespaços $L_1, \ldots, L_r$ de L tal que L é soma direta dos $\{L_i\}$ e para qualquer $g \in G$, multiplicação por g permuta os espaços $\{L_i\}$ entre eles mesmos. Em outras palavras, para cada i, $g\, L_i$ é idêntico a algum espaço L_j.

Um módulo imprimitivo L é dito *transitivo* se para cada par L_i e L_j, existir um $g \in G$ tal que $gL_i = L_j$.

O conjunto dos subespaços $\{L_i\}$ é chamado de *sis-*

tema de imprimitividade para L.

Nós já sabemos como construir módulos imprimitivos. De fato, seja H um subgrupo de G, M um KH-módulo à esquerda, e $L = {}^{G}M$. Então como

$$ {}^{G}M = \sum_{i=1}^{m} g_i \otimes_{KH} M, $$

onde os g_i são representantes das distintas classes laterais à esquerda de H em G, fazendo $L_i = g_i \otimes_{KH} M$, $1 \leqslant i \leqslant m$, é claro que ${}^{G}M$ é um módulo imprimitivo com sistema de imprimitividade $L_1, \ldots, L_m$. O resultado que segue, mostra que num sentido, este é o único exemplo de módulo imprimitivo transitivo:

<u>TEOREMA DA IMPRIMITIVIDADE PARA GRUPOS</u>:

<u>Teorema 1.5</u>: Seja L um KG-módulo imprimitivo transitivo, com sistema de imprimitividade $\{L_1, \ldots, L_r\}$. Seja H o subgrupo de G consistindo de todos $h \in G$ tal que $h L_1 = L_1$. Então L_1 é um KH-módulo à esquerda, e $L = {}^{G}L_1$.

O

Outro teorema clássico de Representações Induzidas de Grupos é o Teorema da Reciprocidade de Frobenius, que pode ser enunciado, para a Teoria de Módulos, como segue:

TEOREMA DA RECIPROCIDADE DE FROBENIUS:

Teorema 1.6: Seja K um corpo qualquer e H um subgrupo de G. Seja W um KG-módulo à esquerda e V um KH-módulo à esquerda. Então, valem os seguintes K-isomorfismos:

(i) $\mathrm{Hom}_{KG}(W, {}^{G}V) \cong \mathrm{Hom}_{KH}(W_H, V)$.

(ii) $\mathrm{Hom}_{KG}({}^{G}V, W) \cong \mathrm{Hom}_{KH}(V, W_H)$.

○

Definição: Sejam U e V, KG-módulos quaisquer. Chamaremos de número de entrelaçamento de U e V à dimensão do espaço vetorial $\mathrm{Hom}_{KG}(U,V)$ sobre K:

$$i(U,V) = \dim_K(\mathrm{Hom}_{KG}(U,V)).$$

Ao espaço $\mathrm{Hom}_{KG}(U,V)$ chamaremos de *espaço de entrelaçamento de* U *e* V.

Observamos que $i(U \oplus V, W) = i(U,V) + i(V,W)$ para quaisquer KG-módulos U, V e W, pois:

$$\mathrm{Hom}_{KG}(U \oplus V, W) \cong \mathrm{Hom}_{KG}(U,W) \oplus \mathrm{Hom}_{KG}(V,W).$$

Analogamente, $i(U, V \oplus W) = i(U,V) + i(U,W)$.

Além disso, se KG for semi-simples,

$$i(U,V) = i(V,U).$$

TEOREMA DO SUBGRUPO DE MACKEY:

Teorema 1.7: Sejam H e L subgrupos de G e $\{x_1, \ldots, x_n\}$ um conjunto de representantes das classes duplas de (H,L) em G. Seja R um anel comutativo e U um RH-módulo. Para cada $x \in G$, definimos U_x como sendo o $R(x^{-1}Hx \cap L)$--módulo, $U \otimes x$, com a ação:

$$(u \otimes x)y = uxyx^{-1} \otimes x, \text{ para todo } u \in U \text{ e } y \in x^{-1}Hx \cap L.$$

Então, $({}^{G}U)_L \cong \bigoplus_{i=1}^{n} {}^{L}(U_{x_i})$.

○

Dados U : RH-módulo e V : RL-módulo, com as hipóteses anteriores, queremos determinar o espaço de entrelaçamento das representações induzidas ${}^{G}U$ e ${}^{G}V$.

Para isso, pelo teorema da Reciprocidade de Frobenius (1.6), vale:

$$\mathrm{Hom}_G ({}^{G}U, {}^{G}V) \cong \mathrm{Hom}_H (U, ({}^{G}V)_H)$$

Por outro lado, pelo teorema anterior, temos:

$$({}^{G}V)_H \cong \bigoplus_{i=1}^{n} {}^{H}(V_{x_i})$$

Portanto,

$$\mathrm{Hom}_G\,({}^G U,\ {}^G V) \cong \bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{Hom}_H\,(U,\ {}^H(V_{x_i}))\ .$$

Obtemos assim, o seguinte teorema:

TEOREMA DO ESPAÇO DE ENTRELAÇAMENTO DE MACKEY:

Teorema 1.8: Sejam H e L subgrupos de G, U um RH-módulo e V um RL-módulo. Seja V_{x_i} definido como no teorema anterior. Então,

$$\mathrm{Hom}_G\,({}^G U,\ {}^G V) \cong \bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{Hom}_H\,(U,\ {}^H(V_{x_i})).$$

CAPÍTULO II

TEOREMA DA RECIPROCIDADE DE FROBENIUS

O objetivo deste capítulo é construir Representações Induzidas.

A primeira construção, geral, funtorial, de Representações Induzidas de Aneis que encontramos na literatura foi dada em 1955 por D.G. Higman |11|.

Essa construção numa versão um pouco mais moderna e atual é como segue:

Seja A um anel com elemento unidade 1_A e B um subanel de A tal que $1_A \in B$.

O funtor restrição $W \longmapsto {}_BW$, da categoria dos A-módulos à esquerda na categoria dos B-módulos à esquerda tem como funtor adjunto $V \longmapsto {}^{A}V$ e como coadjunto, $V \longmapsto V^{A}$, definidos num B-módulo à esquerda V por:

$$(2.1) \quad {}^{A}V = A \otimes_{B} V$$

$$(2.2) \quad V^{A} = \mathrm{Hom}_{B}(A,V), \quad \text{onde}$$

em (2.1) A é um ${}_{A}A_{B}$ -bimódulo e em (2.2), A é um ${}_{B}A_{A}$ -bimódulo. Chamaremos *Módulo Induzido Adjunto* de um B-módulo V, o A-módulo ${}^{A}V = A \otimes_{B} V$ e *Módulo Induzido Coadjunto* de um B-módulo V, o A-módulo $V^{A} = \mathrm{Hom}_{B}(A,V)$.

Higman mostrou que esses módulos fornecem as Representações Induzidas definidas originalmente por Frobenius para o caso de um grupo e um subgrupo de índice finito, usando seus grupo-álgebras.

Aqui, vamos demonstrar este fato diretamente, e no processo vamos indicar o que acontece se o subgrupo não tem índice finito.

Frobenius definiu Representações Induzidas de um grupo G obtidas de um subgrupo H, ou melhor, obtidas de um RH-módulo, somente para o caso em que G é finito e R um corpo, mas não faremos nenhuma dessas hipóteses aqui.

Sua definição um pouco mais moderna e numa linguagem atual é como segue:

<u>Definição</u>: Sejam H um subgrupo de G e R um anel comutativo. Seja RG o grupo-álgebra de G sobre R e V um RH-módulo. O RG-módulo induzido tem por espaço o R-módulo $R_H(G,V)$, onde:

(2.3) $R_H(G,V) = \{F:G \to V : F(xs) = s^{-1}(F(x)), \forall\, x \in G,\ s \in H\}$

com a ação de G sobre $R_H(G,V)$ dada por :

(2.4) $(yF)(x) = F(y^{-1}x)$ para $x, y \in G$.

Observamos que $yF \in R_H(G,V)$ pois:

(i) $(yF)(x) = F(y^{-1}x)$ para $x, y \in G$; logo , yF é uma aplicação de G em V, e

(ii) $(yF)(xs) = F(y^{-1}(xs)) = F((y^{-1}x)s) =$

$= s^{-1}(F(y^{-1}x)) = s^{-1}[(yF)(x)],\ \forall\, x, y \in G,\ s \in H.$

Antes de verificarmos a equivalência dos conceitos de Higman e de Frobenius, vamos provar que a construção de Higman realmente dá os funtores adjunto e coadjunto do funtor restrição da categoria dos A-módulos à esquerda à categoria dos B-módulos à esquerda, com B subanel do anel A.

Sejam ${}_A\mathcal{M}$ a categoria dos A-módulos,à esquerda, ${}_B\mathcal{M}$ a categoria dos B-módulos à esquerda, e consideremos os seguintes funtores:

F: ${}_A\mathcal{M} \longrightarrow {}_B\mathcal{M}$ o funtor restrição: $W \longmapsto {}_BW$,

G: ${}_B\mathcal{M} \longrightarrow {}_A\mathcal{M}$ o funtor: $V \longmapsto V^A = \mathrm{Hom}_B(A,V)$ e

H: ${}_B\mathcal{M} \longrightarrow {}_A\mathcal{M}$ o funtor: $V \longmapsto {}^AV = A \otimes_B V$.

Vamos mostrar que H é um adjunto de F e que G é um coadjunto de F.

<u>Proposição 2.1</u>: H é um adjunto de F.

<u>Demonstração</u>: Como $A \otimes_B V$ é um A-módulo, onde A é um ${}_AA_B$-bimódulo, precisamos mostrar que para cada A-módulo W e cada B-módulo V, existe um isomorfismo:

$$\eta = \eta_{VW}: \mathrm{Hom}_A\,(A \otimes_B V,\, W) \longrightarrow \mathrm{Hom}_B\,(V,\, {}_BW),$$

que é natural nas duas variáveis V e W.

Vamos mostrar que existe um isomorfismo natural em relação à primeira variável, V.

Seja $\eta_V: \mathrm{Hom}_A\,(A \otimes_B V,\, W) \longrightarrow \mathrm{Hom}_B\,(V,\, {}_BW)$,

definido por: $\eta_V\,(f)(v) = g(v) = f(1 \otimes v)$, onde

$f: A \otimes_B V \longrightarrow W$ e $g: V \longrightarrow W$.

(a) η_V é um isomorfismo:

(i) É imediato que g é um homomorfismo de módulos e também é claro que η é um homomorfismo de grupos;

(ii) para todo $v \in V$, se $\eta_V(f)(v) = \eta_V(f')(v)$, então $f(1 \otimes v) = f'(1 \otimes v)$, e portanto $f(a \otimes v) = f'(a \otimes v)$, onde $(a \otimes v)$ é um gerador de $A \otimes_B V$; logo $f = f'$. Portanto η_V é injetor.

(iii) Dado $g : V \to W$, vamos encontrar $f: A \otimes_B V \longrightarrow W$ tal que $\eta_V(f) = g$.
Seja $f: A \times V \longrightarrow W$, definida por $f(a, v) = a \cdot g(v)$.

$$\begin{tikzcd}
A \times V \arrow[r, "f"] \arrow[d] & W \\
A \otimes_B V \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

Logo, existe $\tilde{f}: A \otimes_B V \longrightarrow W$ tal que:

$$\tilde{f}(a \otimes v) = a \cdot g(v).$$

Por construção, $\eta_V(\tilde{f})(v) = \tilde{f}(1 \otimes v) = 1 \cdot g(v) = g(v) \quad \forall v \in V$.

Portanto $\eta_V(\tilde{f}) = g$ e η_V é sobrejetor.

Mostramos assim que η_V é um isomorfismo.

(b) η_V é natural em V, isto é, para cada morfismo $\alpha: V \to V'$ na categoria dos B-módulos, o seguinte diagrama comuta; onde denotamos $\mathrm{Hom}_A(A \otimes_B -, W)$ por K e $\mathrm{Hom}_B(-, {}_BW)$ por L:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_A(A \otimes_B V, W) \arrow[r, "\mathrm{Hom}_A(A \otimes \alpha, W) ="', "= K(\alpha)"' below] \arrow[d, "\eta_V"'] & \mathrm{Hom}_A(A \otimes_B V', W) \arrow[d, "\eta_{V'}"] \\
\mathrm{Hom}_B(V, {}_BW) \arrow[r, "L(\alpha)", "\mathrm{Hom}_B(\alpha, {}_BW)"'] & \mathrm{Hom}_B(V', {}_BW)
\end{tikzcd}$$

<u>Verificação</u>:

De um lado,

$$[(\eta_{V'} \circ K(\alpha))(f)](v') = [(\eta_{V'})(\alpha f)](v') = (\alpha f)(1 \otimes v')$$

Por outro lado,

$$[(L(\alpha) \circ \eta_V)(f)](v') = [L(\alpha)(\eta_V(f))](v') = [L(\alpha)(g)](v') =$$

$$= (\alpha g)(v') = (\alpha f)(1 \otimes v').$$

Concluimos que o diagrama comuta.

A demonstração de que η_{VW} é natural em relação a W segue de considerações similares.

Portanto, H é um adjunto de F.

<u>Proposição 2.2</u>: G é um coadjunto de F.

<u>Demonstração</u>: Como $\mathrm{Hom}_B\ (A,V)$ é um A-módulo, onde A é um ${}_BA_A$-bimódulo, precisamos mostrar que para cada A-módulo W e cada B-módulo V, existe um isomorfismo:

$$\eta = \eta_{VW} : \mathrm{Hom}_A\ (W,\ \mathrm{Hom}_B\ (A,V)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_B\ ({}_BW,V)$$

que é natural nas duas variáveis V e W.

Vamos mostrar novamente que existe isomorfismo natural em relação à primeira variável, V.

Seja $\eta_V : \mathrm{Hom}_A\ (W,\ \mathrm{Hom}_B\ (A,V)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_B\ ({}_BW,V)$ definido por: $\eta_V(f)(w) = g(w) = f(w)\ (1)$, onde

$$f : W \longrightarrow \mathrm{Hom}_B\ (A,V);$$

para cada $w \in W$, $f(w) = f_w$ é um homomorfismo de A em V, e $g : W \longrightarrow V$.

(a) η_V é um isomorfismo

(i) É imediato que g é um homomorfismo de módulos e também é claro que η é um homomorfismo entre os grupos

$$\text{Hom}_A\,(W,\ \text{Hom}_B\,(A,V)) \quad \text{e} \quad \text{Hom}_B\,({}_BW,V).$$

(ii) $\text{Ker}\,(\eta_V) = \{f : W \longrightarrow \text{Hom}_B\,(A,V)$ tal que

$$\eta_V(f) = 0\}.$$

Mas, $\eta_V(f) = 0 \Longrightarrow g = \eta_V(f) = 0 \Longrightarrow g(w) = 0$ $\forall\ w \in W \Longrightarrow g(aw) = 0.$

Por outro lado, $g(aw) = f_{aw}(1) = (a\ f_w)(1) =$

$$= f_w\,(a).$$

Portanto, $\forall\ w \in W$, $g(aw) = 0 \Longrightarrow f_w(a) = 0$ $\forall\ a \in A \Longrightarrow f_w = 0 \Longrightarrow f = 0.$

Conclusão, $\text{Ker}\,(\eta_V) = 0$ e portanto η_V é injetor.

(iii) dado $g : W \longrightarrow V$, vamos encontrar

$f \in \text{Hom}_A\,(W,\ \text{Hom}_B\,(A,V))$ tal que $\eta_V(f) = g$.

Seja $f : W \longrightarrow \text{Hom}_B\,(A,V)$, definida por

$f(w)(a) = a\ .\ g(w).$

Portanto, $\eta_V(f)(w) = f(w).(1) = 1.g(w) = g(w)$

$\forall\ w \in W$; logo, $\eta_V(f) = g$ e η_V é sobrejetor.

(b) η_V é uma transformação natural em V, isto é, para cada morfismo $\alpha : V \longrightarrow V'$ na categoria dos B-módulos, o seguinte diagrama comuta, onde denotamos $Hom_A(W, Hom_B(A,-)$ por K e $Hom_B\ ({}_BW, \_)$ por L.

$$\begin{array}{ccc}
Hom_A(W, Hom_B(A,V) & \xrightarrow[= Hom_A\ (W,\ Hom_B(A,\alpha))]{K(\alpha)=} & Hom_A\ (W, Hom_B(A,V')) \\
\downarrow & & \downarrow \\
Hom_B\ ({}_BW,V) & \xrightarrow[=\ Hom_B\ ({}_BW,\alpha)]{L(\alpha)\ =} & Hom_B\ ({}_BW,V')
\end{array}$$

<u>Verificação</u>:

De um lado,

$[(\eta_V \circ K(\alpha))(f)]\ (w) = (\eta_{V'}(\alpha f))(w) = (\alpha f)_w\ (1)$

Por outro lado,

$[(L(\alpha)\circ \eta_V)(f)]\ (w) = [L(\alpha)(\eta_V\ (f)](w) = L(\alpha)(f_w(1)) =$

$= (\alpha f)_w\ (1).$

Concluimos que o diagrama comuta.

A demonstração da naturalidade de η_{VW} em relação à outra variável segue de considerações análogas.

Portanto, G é um coadjunto de F.

Voltemos agora ao problema proposto de verificar como a definição de Frobenius de Representação Induzida está relacionada com a construção de Higman.

Consideremos primeiro, módulos induzidos coadjuntos (construção (2.2)). Seja H um subgrupo de G e consideremos a subalgebra RH de RG. Vamos denotar a Representação Induzida Coadjunta por V^{RG} e vamos simplesmente escrever V^G no lugar de V^{RG} e analogamente para Hom_H e $\otimes_H$. Vamos mostrar que o funtor $V \longmapsto V^G$ é naturalmente equivalente ao funtor $V \longmapsto R_H(G,V)$. Não vamos assumir que G seja necessariamente finito ou que $[G : H]$ seja finito.

Sendo $V^G = \mathrm{Hom}_{RH}(RG,V)$, se $T \in V^G$ então $T: RG \longrightarrow V$ e portanto T fica determinada pelos seus valores na R-base de RG consistindo dos elementos de G, e $\mathrm{Im}(T) \subset V$, isto é, T fica determinada por uma função de G em V.

<u>Proposição 2.3</u>: Os funtores $\mathcal{F} = \mathrm{Hom}_H\ (RG,-)$ e $\mathcal{G} = R_H\ (G,-)$ da categoria dos RH-módulos na categoria dos RG-módulos são naturalmente equivalentes.

<u>Demonstração</u>: Precisamos mostrar que para cada RH-módulo V, existe um isomorfismo

$$\eta = \eta_V : V^G \longrightarrow R_H\ (G,V)$$

que é uma transformação natural em V.

Seja $\eta_V : \mathrm{Hom}_H\ (RG,V) \longrightarrow R_H\ (G,V)$, definida por: $(\eta_V(T))(x) = F_T(x) = T(x^{-1})$, para cada $x \in G$.

Assim, $F_T : G \longrightarrow V$.

(a) η_v é um isomorfismo:

(i) $F_T(xs) = T((xs)^{-1}) = T(s^{-1}x^{-1}) = s^{-1}(T(x^{-1})) =$

$= s^{-1}(F_T(x))$

para todo $x \in G$, $s \in H$. Logo, $F_T \in R_H\ (G,V)$.

(ii) $\mathrm{Ker}\ (\eta_V) = \{T \in V^G$ tal que $F_T = 0\}$

Se $\eta_V\ (T) = F_T = 0$, então $F_T(x) = T(x^{-1}) = 0$

$\forall\ x \in G$. Logo, $T = 0$ e portanto η_V é injetora.

(iii) dada $F \in R_H(G,V)$, definimos $T : G \longrightarrow V$ por $T(g) = F(g^{-1})$ e estendemos T a uma função $\tilde{T}$, de RG em V por linearidade, onde $\tilde{T} \in Hom_H(RG,V)$ pois $\tilde{T}(h) = F(h^{-1}) = h\,F(1) = h\,\tilde{T}(1)$.

Portanto, η_V é sobrejetor.

(b) η_V é uma transformação natural em V, isto é, para cada morfismo $\alpha : V \longrightarrow W$ na categoria dos RH-módulos, o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd}
Hom_H(RG,V) \arrow[r, "F(\alpha) ="', ""] \arrow[r, "=Hom_H(RG{,}\alpha)"'] \arrow[d, "\eta_V"'] & Hom_H(RG,W) \arrow[d, "\eta_W"] \\
R_H(G,V) \arrow[r, "G(\alpha) ="] \arrow[r, "= R_H(G{,}\alpha)"'] & R_H(G,W)
\end{tikzcd}$$

Verificação:

De um lado, para todo $g \in G$, temos:

$$[(G(\alpha) \circ \eta_V)(T)](g) = G(\alpha)(F_T(g)) = F_{(\alpha T)}(g)$$

Por outro lado,

$$[(\eta_W \circ F(\alpha))(T)]\ (g) = \eta_W((\alpha T)(g)) = F_{(\alpha T)}(g).$$

Concluimos que o diagrama comuta.

Portanto os funtores $V \longmapsto V^G$ e $V \longmapsto R_H(G,V)$ são naturalmente equivalentes.

Voltando agora ao Módulo Induzido Adjunto, que vamos denotar ${}^GV$ no lugar de ${}^{RG}V$, sejam RH uma subálgebra de RG, V um RH-módulo, ${}^GV = RG \otimes_H V$. Analogamente ao feito no caso do Coadjunto, queremos expressar $RG \otimes_H V$ como uma coleção de funções de G em V.

Seja $f \in RG$, $v \in V$; $\{x_c : c \in G/H\}$ uma coleção de representantes de classes de H em G. Escrevendo f como uma combinação linear formal $f = \sum_{x \in G} r_x . x$, temos:

$$f \otimes v = \sum_x r_x \, . \, x \otimes v;$$

fazendo $x = x_c\, t$, vem:

$$(2.6)\quad f \otimes v = \sum_{c \in G/H} \ \sum_{t \in H} r_{x_c t}\ x_c\, t \otimes v =$$

$$= \sum_{c \in G/H} x_c \otimes \left[\sum_{t \in H} r_{x_c t} \, tv \right] .$$

Associando a f e v, a função b(f,v), de G em V, definida por

$$(b(f,v))(x) = \sum_{t \in H} r_{xt} \, tv,$$

(onde a soma é finita), e

$$(b(f,v))(xs) = \sum_{t \in H} r_{xst} \, tv = \sum_{t' \in H} r_{xt'} \, s^{-1} t' v =$$

$$= s^{-1} \left[\sum_{t' \in H} r_{xt'} \, t' v \right] = s^{-1} \left[(b(f,v))(x) \right] ,$$

temos:

$$\begin{tikzcd} RG \times V \arrow[r, "b"] \arrow[d] & R_H(G,V) \\ RG \otimes_H V \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

onde:

(i) b se levanta a uma injeção de $RG \otimes_H V$ em $R_H(G,V)$.

(ii) b não é, em geral, sobrejetora; $Im(b) = R_H^o(G,V) < R_H(G,V)$, onde $R_H^o(G,V)$ consiste nas funções que tem valor zero fora da união de um nº finito de classes laterais de H em G.

Mostramos assim que $RG \otimes_H V$ é isomorfo a $R_H^o(G,V)$, o que demonstra uma parte da seguinte proposição:

<u>Proposição 2.4</u>: Os funtores $F = (RG \otimes_H -)$ e $G = R_H^o(G,-)$ da categoria dos RH-módulos na categoria dos RG-módulos são naturalmente equivalentes.

<u>Demonstração</u>: Falta apenas mostrar a naturalidade.

Para cada RH-módulo V e para cada $\alpha : V \longrightarrow W$, homomorfismo na categoria dos RH-módulos, vamos verificar se o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc}
RG \otimes_H V & \xrightarrow[= RG \otimes_H \alpha]{F(\alpha) =} & RG \otimes_H W \\
\downarrow & & \downarrow \\
R_H^o(G,V) & \xrightarrow[= R_H^o(G,\alpha)]{G(\alpha) =} & R_H^o(G,W)
\end{array}$$

Verificação:

De um lado, para todo $g \in G$, temos:

$$[(\eta_W \circ F(\alpha))(f \otimes v)](g) = (\eta_W(f \otimes \alpha v))(g) = b(f,\alpha v)(g)$$

Por outro lado,

$$[(G(\alpha) \circ \eta_V)(f \otimes v)](g) = (G(\alpha)(b(f,v))(g) = b(f,\alpha v)(g) \ ,$$

e portanto o diagrama comuta.

Em particular, se $[G : H] < \infty$, então $R^o_H(G,V) = R_H(G,V)$ e os funtores coadjunto $V \longmapsto V^G$ e o adjunto $V \longmapsto {}^G V$ são naturalmente equivalentes.

Este fenômeno foi investigado para extensões gerais de Aneis por Higman |11| e mais tarde por Morita |21|, que mostrou que extensões de Aneis exibindo este fenômeno são exatamente as *"extensões de Frobenius"*, introduzidas depois por Kasch |14|.

O teorema de Frobenius, em sua forma original se refere a Representações Induzidas de Grupos |12|. Generalizando para Aneis quaisquer no lugar de grupo-álgebras, este teorema pode ser enunciado como segue:

TEOREMA DA RECIPROCIDADE DE FROBENIUS PARA ANEIS:

Teorema 2.5: Seja B um subanel do anel A. Então, para todo A-módulo W e B-módulo V, são naturalmente isomorfos em V e W:

(2.8) $\mathrm{Hom}_A ({}^{A}V, W) \cong \mathrm{Hom}_B (V, {}_{B}W)$

(2.9) $\mathrm{Hom}_A (W, V^{A}) \cong \mathrm{Hom}_B ({}_{B}W, V)$,

ou seja, os seguintes pares de funtores são naturalmente equivalentes:

$$\mathrm{Hom}_A ({}^{A}\_ , \_) \quad \text{e} \quad \mathrm{Hom}_B (\_ , {}_{B}\_) ,$$

$$\mathrm{Hom}_A (\_ , \_^{A}) \quad \text{e} \quad \mathrm{Hom}_B ({}_{B}\_ , \_) .$$

Demonstração: As construções do Adjunto e do Coadjunto do funtor restrição da categoria dos A-módulos na categoria dos B-módulos, Proposições 2.1 e 2.2, produzem precisamente estes resultados. Portanto, nada resta a demonstrar.

●

Para finalizar este capítulo, vamos demonstrar o

TEOREMA DAS INDUÇÕES SUCESSIVAS:

Teorema 2.6: Sejam A um anel, B um subanel de A e C um subanel de B. Seja U um RC-módulo. Então são isomorfos:

${}^{A}({}^{B}U) \cong {}^{A}U$, ou seja $A \otimes_B (B \otimes_C U) \cong A \otimes_C U$, e

$(U^B)^A \cong U^A$, ou seja $Hom_B(A, Hom_C(B,U)) \cong Hom_C(A,U)$

e esses isomorfismos são naturais.

Demonstração:

(i) Para demonstrar que $A \otimes_B (B \otimes_c U) \cong A \otimes_c U$, basta demonstrar que o produto tensorial de módulos satisfaz uma propriedade associativa. Pois, se $A \otimes_B (B \otimes_c U) \cong (A \otimes_B B) \otimes_c U$, como $A \otimes_B B \cong A$ pelo isomorfismo natural entre os funtores $1_{{}_B M}$ e $(\_ \otimes_B B)$ dado pela Proposição 1.1, concluimos que existem isomorfismos naturais:

$${}^{A}({}^{B}U) = A \otimes_B (B \otimes_c U) \cong (A \otimes_B B) \otimes_c U \cong A \otimes_c U = {}^{A}U$$

(ii) Para demonstrar que $Hom_B(A, Hom_C(B,U)) \cong Hom_C(A,U)$, basta lembrar que $Hom_B(A, Hom_C(B,U)) \cong Hom_C(B \otimes_B A, U)$, pois para $B = {}_C B_B$, os funtores $Hom_C(B,\_)$ e $(B \otimes_B \_)$ formam um par adjunto e $B \otimes_B A \cong A$. |26| ou |14| .

Portanto, só nos falta demonstrar a seguinte proposição:

Proposição 2.7: "Propriedade Associativa do Produto Tenso rial de Módulos".

Para cada tripla de módulos $(A_B, {}_BV_C, {}_CU)$, existe um isomorfismo ν, onde:

$$\nu_{AVU} = \nu: A \otimes_B (V \otimes_C U) \longrightarrow (A \otimes_B V) \otimes_C U,$$

definido via:

$$\nu: a \otimes (v \otimes u) \longmapsto (a \otimes v) \otimes u, \; a \in A, \; v \in V, \; u \in U,$$

que é natural em cada uma das tres variáveis A, V e U.

<u>Demonstração</u>: Para cada $a \in A$, a aplicação

$$\beta_a: V \times U \longrightarrow (A \otimes_B V) \otimes_C U$$

definida por $\beta_a(v,u) = (a \otimes v) \otimes u$ é C-balanceada. Então, para cada $a \in A$, existe um único homomorfismo ν_a, onde:

$$\nu_a\,(\Sigma\, v_i \otimes u_i) = \Sigma\,((a \otimes v_i) \otimes u_i).$$

A aplicação $\gamma : A \times (V \otimes_C U) \longrightarrow (A \otimes_B V) \otimes_C U$ definida por $\gamma(a, \Sigma\, v_i \otimes u_i) = \nu_a\,(\Sigma\, v_i \otimes u_i)$ é B-balanceada. Então existe um homomorfismo ν, onde:

$$\nu: A \otimes_B (V \otimes_C U) \longrightarrow (A \otimes_B V) \otimes_C U \quad \text{tal que}$$

$$\nu(a \otimes (v \otimes u) = \nu_a\,(v \otimes u) = (a \otimes v) \otimes u.$$

Com argumentos similares, pode-se mostrar que existe homomorfismo μ, onde:

$\mu_{AVU} = \mu : (A \otimes_B V) \otimes_C U \longrightarrow A \otimes_B (V \otimes_C U)$ tal que

$\mu((a \otimes v) \otimes u) = a \otimes (v \otimes u)$, onde μ é uma inversa de ν, donde ν é um isomorfismo.

Falta agora, verificar a naturalidade. Suponhamos que $f\colon A_B \longrightarrow A'_B$. Então, é comutativo o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
(A \otimes_B V) \otimes_C U \arrow[r, "(f \otimes V) \otimes U"] \arrow[d, "\mu_{AVU}"'] & (A' \otimes_B V) \otimes_C U \arrow[d, "\mu_{A'VU}"] \\
A \otimes_B (V \otimes_C U) \arrow[r, "f \otimes (V \otimes U)"] & A' \otimes_B (V \otimes_C U)
\end{tikzcd}$$

<u>Verificação</u>:

De um lado,

$[(f \otimes (V \otimes U)) \circ \mu_{AVU}] ((a \otimes v) \otimes u) =$

$= (f \otimes (V \otimes U))\ (a \otimes (V \otimes U))\ (a \otimes (v \otimes u)) = a' \otimes (v \otimes u)$

Por outro lado,

$[\mu_{A'VU} \circ ((f \otimes V) \otimes U)]\ ((a \otimes v) \otimes u) =$

$= (\mu_{A'VU})\ ((a' \otimes v) \otimes u) = a' \otimes (v \otimes u).$

Concluimos então, que μ é natural em A.

Com argumentos análogos, mostra-se a naturalidade de μ nas outras duas variáveis.

CAPÍTULO III

Neste capítulo, discutiremos o problema inverso ao do capítulo II, onde construimos Representações Induzidas. Vamos estudar aqui algumas propriedades que caracterizam as representações de um anél A que são induzidas de subanéis de A.

Para isso, discutiremos dois teoremas: o Teorema da Imprimitividade e o Teorema do Número de Entrelaçamento de Mackey.

§1. TEOREMA DA IMPRIMITIVIDADE

Tão básico para a Teoria de Representações Induzidas de Grupos como o Teorema da Reciprocidade de Frobenius, é o Teorema da Imprimitividade, que descreve quais representações de um grupo G são induzidas de representações de um subgrupo H.

Desde que vimos para Anéis dois tipos de representações induzidas, a adjunta e a coadjunta, deveria haver dois Teoremas da Imprimitividade para Representações' Induzidas de Anéis. Neste capítulo discutiremos somente o Teorema da Imprimitividade para Representações Induzidas Adjuntas de Anéis [construção (1.1)], mas uma discussão inteiramente paralela pode ser dada para Representações Induzidas Coadjuntas, cujo resultado será citado no final.

O que precisamos fazer é descobrir quais propriedades especiais possuem A-módulos, que os leva a ser da forma $A \otimes_B V$ para algum B-módulo V.

Propriedades especiais apropriadas são sugeridas pelos Teoremas de Morita.

Seja B um subanel de A. Lembramos que A_B denota A visto como um B-módulo à direita; e seja

$$E = \mathrm{End}_B\ (A_B)$$

o anel das aplicações B-lineares de A em A.

Para qualquer elemento a ∈ A, podemos associar a aplicação de A em A consistindo da multiplicação à esquerda por a:

$$\forall\ a \in A,\ \psi_a : A \longrightarrow A \text{ definida por: } \psi_a(x) = ax,\ x \in A,$$

e deste modo, podemos identificar A com um subanel de E.

Além disso, A pode ser visto como um ${}_EA_B$ bi-módulo, à esquerda sobre E e à direita sobre A, e a partir disto, como vimos no 1º capítulo, se V é qualquer B-módulo, então $A \otimes_B V$ será de fato, um E-módulo à esquerda, e a ação de E sendo uma extensão da ação original de A sobre $A \otimes_B V$.

Então, uma condição necessária para que um A-módulo à esquerda W seja induzido de um B-módulo à esquerda V, é que W seja um E-módulo, com a ação de E sobre W sendo uma extensão da ação de A sobre W.

Para obtermos uma condição suficiente, precisamos fazer hipóteses sobre A e B.

Para esse propósito, os Teoremas de Morita, enunciados no Capítulo I, sugerem que A_B seja finitamente gerado, projetivo e gerador, isto é, que A_B seja um progerador.

Fazendo a hipótese adicional de que A_B, como módulo à direita sobre B, seja um progerador, os teoremas de

Morita garantem que os anéis B e E = End_B (A_B) são equivalentes, isto é, que as categorias $_B\mathcal{M}$ e $_E\mathcal{M}$ são equivalentes, via a equivalência de categorias $V \longmapsto A \otimes_B V$, $V \in \mathrm{obj}\ _B\mathcal{M}$.

Sendo toda equivalência um funtor fiel, pleno e denso, nessas condições, todo $W \in \mathrm{obj}\ _E\mathcal{M}$ é isomorfo com $A \otimes_B V$, para algum $V \in \mathrm{obj}\ _B\mathcal{M}$, ou seja, W é um induzido de V.

Fica demonstrado,assim,o teorema:

TEOREMA DA IMPRIMITIVIDADE PARA ANÉIS:

Teorema 3.1: Seja B um subanel de A. Assumiremos que como B-módulo à direita, A_B seja progerador. Seja $E = End_B$ (A_B), e identifiquemos A com o subanel de E consistindo da multiplicação à esquerda por elementos de A. Então, um A-módulo à esquerda W é um (adjunto) induzido de um B-módulo à esquerda V, se e somente se, W for um E-módulo à esquerda, com a ação de E sobre W sendo uma extensão da ação de A sobre W.

Para verificarmos que o Teorema da Imprimitividade para Grupos é um caso especial do teorema acima, precisamos primeiro identificar a álgebra E, neste caso.

Seja H um subgrupo de G e R um anel comutativo. RH é então uma subálgebra de RG, e RG pode ser considerado como um RH-módulo à direita. Seja $E = End_{RH}(RG_{RH})$.

Vamos supor também que H tenha índice finito em G, e $[G : H] = t$. Vimos no 1º capítulo que como

$$RG = g_1 RH \oplus \ldots \oplus g_t RH,$$

RG como RH-módulo à direita é livre, com base consistindo de um conjunto de representantes de classes laterais à esquerda de H em G. Então RG_{RH} é um progerador, pois todo módulo livre é projetivo e gerador, e RG é finitamente gerado como RH-módulo à direita.

Assim, do Teorema da Imprimitividade para Anéis (3.1), sabemos que um RG-módulo W será o induzido de um RH-módulo V se e somente se W for um E-módulo, com a ação de E sobre W sendo uma extensão da ação de RG sobre W.

Se desejarmos tornar W um E-módulo, precisamos definir como os elementos de E atuam sobre W. Para isso, vamos construir uma base de E sobre R e definir como cada elemento da base de E atua sobre W.

Seja $\{x_c : c \in G/H\}$ uma base de RG como RH-módulo à direita. Seja $\pi_c : RG \to F$ onde

$$F = \{\alpha : G \to R : \alpha(G\backslash c) = 0\} .$$

Por definição,

$$\pi_c : \sum_{g \in G} r_g \cdot g \longmapsto \sum_{g \in G} r'_g \cdot g$$

onde:

$$r'_g = r_g \iff g \in c$$

$$r'_g = 0 \iff g \notin c$$

Consideremos a coleção

$$\{(\pi_c \otimes x), \quad x \in G, \quad c \in G/H\}$$

onde definimos:

$$(\pi_c \otimes x) \left(\sum_{g \in G} r_g . g \right) = \pi_c \left[\sum_{g \in G} r_g . xg \right] =$$

$$= \sum_{xg \in c} r_g \cdot xg \quad .$$

Essa coleção forma uma base de $E = End_{RH} (RG_{RH})$. De fato, verificamos que:

(1º) $(\pi_c \otimes x) \in End_{RH}(RG_{RH})$, pois: para $h \in H$,

$$(\pi_c \otimes x)\left[(\sum_g r_g . g).h\right] = (\pi_c \otimes x)\left[\sum r_g \, (gh)\right] =$$

$$= \pi_c \left[\sum r_g . \; x(gh)\right] = \sum_{x(gh) \in c} r_g . x(gh) =$$

$$= \sum_{xg \in c} r_g . (xg)h = \left[\sum_{xg \in c} r_g \; . \; xg\right] h =$$

$$= \pi_c\left[\sum_g r_g . x_g\right] . h = \left[(\pi_c \otimes x)(\sum_g r_g . g)\right] . h$$

(2º) $\{\pi_c \otimes x, \; x \in G, \; c \in G/H\}$ é *l.i.*, pois: para $\alpha \in R$,

$$\sum_{c,x} \alpha_{c,x} (\pi_c \otimes x) = 0 \implies \forall \; g \in G: \; \sum_{c,x} \alpha_{c,x} \, \pi_c(xg) = 0$$

$$\implies \sum_{g \in x^{-1} c} \alpha_{c,x} \; . \; xg = 0.$$

Fixando uma classe $c = g_0 H$ e fazendo $g = x^{-1} g_0$, concluimos que $\alpha_{c,x} = 0$.

(3º) $\dim_R E = |\{\pi_c \otimes x, \; c \in G/H, \; x \in G\}|$ pois:

como RH-módulo à direita, RG é livre e portanto,

$\dim_{RH} E = [G : H]^2$.

Logo, $\dim_R E = |H| \; . \; \dim_{RH} E = |H| \; . \; [G : H]^2 =$

$= |H| \; . \; [G : H] \; . \; [G : H] = |G| \; . \; [G : H]$.

Assim, $\{\pi_c \otimes x,\ c \in G/H,\ x \in G\}$ é uma base de E sobre R.

Além disso, para definirmos como esses elementos da base se multiplicam e somam, observamos que: para $g \in G$,

$$[(\pi_c \otimes x)(\pi_{c'} \otimes x')]\ (g) = (\pi_c \otimes x)(\pi_{c'}\ (x'g)) =$$

$$= \pi_c\ (x\ (\pi_{c'}\ (x'\ g))).$$

Se $x'\ g \in c'$, então $g \in x'^{-1} c' = c''$ e $\pi_{c'}(x'\ g) = x'\ g$.

Portanto, $\pi_c\ (x\ (\pi_{c'}\ (x'\ g))) = \pi_c\ (x\ x'\ g)$.

Se $x\ x'\ g \in c$, então $g \in x'^{-1}\ x^{-1}\ c$ e $\pi_c\ (x\ x'\ g) =$ $= x\ x'\ g$.

Conclusão:

$$(\pi_c \otimes x)(\pi_{c'} \otimes x')(g) = x\ x'\ g \quad \text{se} \begin{cases} x^{-1}\ c = c' \\ g \in x'^{-1}\ c' \end{cases}$$

$$= 0 \quad \text{caso contrário.}$$

Desse modo, o produto de dois elementos da base é:

$$(\pi_c \otimes x)(\pi_{c'} \otimes x') = \pi_c \otimes x\ x' \iff x^{-1}\ c = c'$$

$= 0$ caso contrário.

Definimos também a adição de modo natural:

$$(\pi_c \otimes x) + (\pi_{c'} \otimes x') = (\pi_c + \pi_{c'} \otimes x + x').$$

Consideremos agora que W seja um RG-módulo imprimitivo transitivo, com sistema de imprimitividade

$$\{W_1, \ldots, W_t\}.$$

Se $H = \{h \in G : hW_1 = W_1\}$, por causa da transitividade, podemos escrever:

$$W = W_1 \oplus g_2 W_1 \oplus \ldots \oplus g_t W_1,$$

onde $\{g_1 = 1, g_2, \ldots, g_t\}$ é um conjunto de representantes das classes laterais de H em G.

Com efeito, $g_i W_1 = g_j W_1 \Longleftrightarrow g_i H = g_j H$.

Assim, todo elemento $w \in W$ pode ser escrito na forma:

$$w = \sum_{i=1}^{t} g_i w_i^1 \quad , \text{ com } w_i^1 \in W_1 .$$

Seja então $E = End_{RH}(RG_{RH})$.

Definimos a operação dos elementos da base de E sobre W assim: para

$$\psi \in \{\pi_c \otimes x,\ c \in G/H,\ x \in G\} \text{ e } w \in W,$$

$$\psi \, . \, w = \sum_{i=1}^{t} \psi(g_i) \, . \, w_i^1,$$

onde por definição, se $\psi = \pi_c \otimes x$,

$$\psi . w = \sum_{i=1}^{t} \psi(g_i).w_i^1 = \sum_{i=1}^{t} (\pi_c \otimes x)(g_i).w_i^1 = \sum_{i=1}^{t} \pi_c(xg_i).w_i^1 =$$

$$= \sum_{xg_i \in c} (xg_i) \, . \, w_i^1 \, .$$

Para verificarmos que com essa operação, W torna-se um E-módulo, observamos que:

$$(\psi\ \psi').w = \sum_{i=1}^{t} (\psi\ \psi')(g_i).w_i^1 = \sum_{i=1}^{t} [(\pi_c \otimes x)(\pi_{c'} \otimes x')(g_i)].w_i^1 =$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{t} (\pi_c \otimes x\ x')(g_i) \, . \, w_i^1 = \\ \qquad \displaystyle = \sum_{i=1}^{t} \pi_c(x\ x'\ g_i).w_i^1 \iff x^{-1}\ c = c' \\ 0 \qquad \iff x^{-1}\ c \neq c' \end{cases}$$

Por outro lado, escrevendo $x'g_i = g_{j(i)}\ h_i$,

$$\psi(\psi'.w) = \psi[\sum_{i=1}^{t} \psi'(g_i).w_i^1] = \psi[\sum_{i=1}^{t} (\pi_{c'} \otimes x')(g_i) \, . \, w_i^1] =$$

$$= \psi[\sum_{i=1}^{t} \pi_{c'}(x' g_i) . w_i^1] = \psi[\sum_{x'g_i \in c'} (x' g_i) . w_i^1] =$$

$$= \psi[\sum_{x'g_i \in c'} (g_{j(i)} h_i).w_i^1] = \psi[\sum_{x'g_i \in c'} g_{j(i)} \cdot (h_i w_i^1)] =$$

$$= \Sigma \psi(g_{j(i)}) . (h_i w_i^1) = \Sigma \pi_c(xg_{j(i)}) . (h_i w_i^1) =$$

$$= \Sigma \pi_c (xg_{j(i)} h_i) . w_i^1 = \sum_{x'g_i \in c'} \pi_c(x x' g_i) . w_i^1 .$$

Para demonstrarmos a igualdade dessas duas expressões, suponhamos que $x^{-1} c = c'$, ou equivalentemente, $c = xc'$. Então, temos:

(1º) Se $x'g_i \in c'$, então $x x' g_i \in x c' = c$.

Logo, $\pi_c (x x' g_i) = x x' g_i$

(2º) Se $x' g_i \notin c'$, então $x x' g_i \notin x c' = c$.

Logo, $\pi_c (x x' g_i) = 0$.

Por outro lado, se $x^{-1} c \neq c'$, então $x'g_i \notin x^{-1}c$, e portanto, $x x_i' g_i \notin c$. Logo, $\pi_c (x x' g_i) = 0$. Assim,

$$\sum_{x'g_i \in c'} \pi_c(x x' g).w_i^1 = \begin{cases} \sum_{i=1}^{t} \pi_c(x x' g_i).w_i^1 \iff x^{-1} c = c' \\ 0 \iff x^{-1} c \neq c' \end{cases}$$

Portanto, W é um E-módulo à esquerda.

Nos resta ainda verificar que a ação de E sobre W é uma extensão da ação de RG sobre W.

Seja $g \in G$, e consideremos $g = T_g \in E$, onde

$$T_g = \sum_c \pi_c \otimes g \text{ , isto é,}$$

$T_g(x) = \sum_c \pi_c (gx) = \pi_{c_x} (gx) = gx$, onde c_x é uma classe tal que $gx \in c_x$.

Assim, se $w = \sum_{i=1}^{t} g_i w_i$, $g_i \in \{g_1, \ldots, g_t\}$, $w_i \in W_1$,

$$g \cdot w = \sum_{i=1}^{t} g g_i \cdot w_i^1 \quad \text{e}$$

$$T_g \cdot w = (\sum_c \pi_c \otimes g) \cdot w = \sum_{i=1}^{t} (\sum_c (\pi_c \otimes g) \cdot g_i) . w_i^1 =$$

$$= \sum_{i=1}^{t} (\sum_c \pi_c (g g_i) . w_i^1 = \sum_{i=1}^{t} g g_i \cdot w_i^1 .$$

Portanto, $T_g \cdot w = g \cdot w = gw$ e a ação de E sobre W é uma extensão da ação original de RG sobre W.

Aplicando então o Teorema da Imprimitividade para Anéis, o RG-módulo W é o induzido de algum RH-módulo V, isto é, $W \cong RG \otimes_H V$ para algum RH-módulo à esquerda V.

●

Para finalizar este parágrafo, enunciaremos o Teorema da Imprimitividade para Anéis, em sua forma dual, isto é, para Representações Induzidas Coadjuntas [construção (1.2)] . Para isso, observemos que:

(1º) Seja B um subanel de A e $E = End_B({}_BA)$. Identificando A com o subanel de E consistindo da multiplicação à direita por elementos de A, de modo que A pode ser visto como um ${}_BA_E$ bimódulo, então para um B módulo à esquerda V, $V^A = Hom_B\ (A,V)$ será de fato um E-módulo à esquerda, estendendo a ação de A sobre V^A;

(2º) Com a hipótese de que ${}_BA$ seja um progerador, então os anéis B e E são equivalentes e o funtor $V \longmapsto V^A$ é uma equivalência de categorias.

Chegamos assim, ao:

<u>Teorema 3.2</u>: Seja B um subanel de A. Assumiremos que como B-módulo à esquerda, ${}_BA$ seja progerador. Seja $E=End_B\ ({}_BA)$, e identifiquemos A com o subanel de E consistindo da multiplicação à direita por elementos de A. Então, um A-módulo à esquerda W é um (coadjunto) induzido de um B-módulo à esquerda V, se e somente se, W for um E-módulo à esquerda, com a ação de E sobre W sendo uma extensão da ação de A sobre W.

●

§2. TEOREMA DO NÚMERO DE ENTRELAÇAMENTO DE MACKEY

A generalização do Teorema de Mackey para o contexto de anéis, diria respeito a relações entre Representações Induzidas de dois subanéis de um anel. A primeira demonstração feita por Mackey (|23| e também em |5|), usa o produto tensorial externo, definido como segue:

Sejam G_1 e G_2 grupos finitos e $P = G_1 \times G_2$ seu produto direto. Seja K um corpo e L_i um KG_i-módulo à esquerda, i = 1, 2. Então, o *produto tensorial externo* $L_1 \# L_2$ de L_1 e L_2 é o KP-módulo à esquerda, cujo espaço vetorial subjacente é $L_1 \otimes_K L_2$, com a seguinte operação de módulo: $(g_1,g_2)(\ell_1 \otimes \ell_2) = g_1 \ell_1 \otimes g_2 \ell_2$, $(g_1, g_2) \in P$, $g_i \in L_i$, i = 1, 2 e estendida a KP e $L_1 \otimes_K L_2$ por linearidade.

Sua demonstração não se generaliza para Representações Induzidas de Anéis, e o Teorema que vamos obter faz algumas restrições aos anéis considerados. Com pouco mais que duas aplicações do Teorema da Reciprocidade de Frobenius e uma do Teorema da Imprimitividade, mostraremos que o teorema de Mackey para grupos, com um anel de coeficientes arbitrário, é um caso especial deste.

Como na seção anterior, trataremos apenas de Representações Induzidas Adjuntas, mas um tratamento bem paralelo pode ser dado para Representações Induzidas Coad juntas, e citaremos apenas o resultado no final.

Seja A um anel e B e C subanéis de A. Seja U um B-módulo à esquerda e V um C-módulo à esquerda. O teorema do número de entrelaçamento diz respeito ao espaço:

(3.1) $\mathrm{Hom}_A\,({}^AU,\ {}^AV)$,

ou mais especificamente, à dimensão deste espaço, se os anéis forem Álgebras Semisimples de dimensão finita sobre um corpo de frações.

Se aplicarmos o Teorema da Reciprocidade de Frobenius, na forma (2.8) para (3.1), concluimos que são naturalmente equivalentes:

(3.2) $\mathrm{Hom}_A\,({}^AU,\ {}^AV) \cong \mathrm{Hom}_B\,(U, ({}^AV)_B)$

Entretanto, $({}^AV)_B$ é justamente o módulo $A \otimes_c V$, onde A é visto como um bimódulo ${}_BA_C$, à esquerda sobre B e à direita sobre C.

Para seguir adiante, vamos fazer a hipótese adicional de que A seja decomponível como um (B,C)-bimódulo, o que usualmente será o caso se B e C forem anéis semisimples. Então, assumiremos que:

$$A = \bigoplus_{i=1}^{r} D_i$$

onde os $D_{i's}$ são (B,C)-sub-bimódulos de A, e onde esta soma direta é finita.

Então, como B-módulos, temos:

$$(3.3)\quad A \otimes_C V \cong \bigoplus_{i=1}^{r} D_i \otimes_C V .$$

Substituindo (3.3) em (3.2), obtemos a seguinte relação, que parece ser a melhor que podemos encontrar para uma generalização do Teorema de Mackey, sobre o espaço de entrelaçamento, para Anéis, se não tivermos mais informações sobre a estrutura dos $D_{i's}$:

TEOREMA DO ESPAÇO DE ENTRELAÇAMENTO DE MACKEY PARA ANÉIS:

Teorema 3.3: Sejam B e C subanéis de um anel A. Seja U um B-módulo à esquerda e V um C-módulo à esquerda. Suponhamos que A seja decomponível como um (B,C)-bimódulo, $A = \bigoplus_{i=1}^{r} D_i$, onde os $D_{i's}$ são (B,C)-sub-bimódulos de A. Então, o espaço de entrelaçamento dos módulos induzidos ^AU e ^AV satisfaz a seguinte relação:

$$\mathrm{Hom}_A\,(^AU,\ ^AV) \cong \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Hom}_B\,(U,\ D_i \otimes_C V)$$

Para verificarmos que o teorema do espaço de en trelaçamento de Mackey, enunciado no 1º capítulo, é um caso especial desta relação, consideremos um grupo G, com subgrupos H e L, e seja R um anel comutativo com unidade.

Se RG é visto como um (RL, RH)-bimódulo, então ele tem uma decomposição em bimódulos em termos da (L,H) -classes duplas de G. De fato, seja $\{x_1, \ldots, x_s\}$ um conjunto de representantes das classes duplas de (L,H) em G. Então existe uma correspondência:

$$\sum_{g\in G} r_g \cdot g \longleftrightarrow \sum_{g\in G} r_g \, (\ell_g \cdot x_{j(g)} \cdot h_g)$$

onde $\ell_g \in L$, $h_g \in H$, $x_{j(g)} \in \{x_1, \ldots, x_s\}$, uma vez que a (L,H)-classe dupla contendo x é justamente L x H, e que um grupo finito G tem uma decomposição em classes duplas disjuntas:

$$G = L\, x_1\, H \,\dot{\cup}\, \ldots \,\dot{\cup}\, L\, x_s\, H\, .$$

Isto estabelece um isomorfismo:

$$(3.4) \quad RG \cong \bigoplus_{D\in L\backslash G/H} RD\, ,$$

onde $L\backslash G/H$ denota a coleção das (L,H)-classes duplas de G e RD denota o subespaço de RG gerado pelos elementos de D.

Suponhamos agora que U seja um RL-módulo e V um RH-módulo. Então, aplicando o resultado do Teorema 3.2, concluímos que:

$$(3.5)\ \mathrm{Hom}_G\ ({}^G U,\ {}^G V)\ \cong \bigoplus_{D \in L\backslash G/H} \mathrm{Hom}_L\ (U,\ R\,D \otimes_H V)$$

Este resultado parece-se com o teorema do espaço de entrelaçamento de Mackey para Grupos.

Para obtermos detalhes adicionais contidos no teorema de Mackey, precisamos analisar a estrutura do RL--módulo $R\,D \otimes_H V$, e expressá-lo como Módulo Induzido. Esta análise é a principal parte da demonstração do Teorema do Subgrupo, de Mackey | 17 |, e segue do Teorema da Imprimitividade.

Se RD for visto como um RL-módulo à esquerda, podemos expressar RD como um módulo induzido.

Para isso, consideremos $\{y_1, \ldots, y_n\}$ um conjunto de representantes das classes laterais de L em G. Podemos então escrever:

$$G = Ly_1\ \dot{\cup}\ \ldots\ \dot{\cup}\ Ly_n\ .$$

Então G, e em particular L, atua sobre o conjunto to $\{Ly_1, \ldots, Ly_n\}$. Além disso, Ly_i e Ly_j estão numa mesma órbita sob L se e só se y_i e y_j pertencerem à mesma (L,H)-classe dupla.

Fixemo-nos numa (L,H)-classe dupla D de G,e consideremos todos os y_i's tais que $Ly_i \subset L\, x_D\, H$. Vamos assumir que essas classes laterais são: $Ly_1, \ldots, Ly_e$.

Seja $R(x_D\, H) = \bigoplus_{y_j \in Lx_D H} R(Ly_j)$.

Portanto, $R(x_D\, H)$ é um RL-módulo, onde por definição de $R(x_D\, H)$, temos

$$Ly_1 \cup \ldots \cup Ly_e = L\, x_D\, H.$$

Assim, $R(x_D\, H)$ é um componente de RD, e RD é um RL-módulo imprimitivo transitivo.

Como RL atua sobre $R(x_D\, H)$, o estabilizador de $R(x_D\, H)$ é:

$$\{z \in L \mid z\, R(x_D\, H) = R(x_D\, H)\} = \{z \in L \mid x_D^{-1}\, z\, x_D \in H\} =$$

$$= x_D^{-1}\, H\, x_D \cap L, \text{ que será denotado por } L_{x_D}.$$

Assim, as hipóteses do Teorema da Imprimitividade estarão satisfeitas se L_{x_D} tiver índice finito em L.

Concluindo, o RL-módulo RD é equivalente ao módulo obtido pela indução a L do RL_{x_D}-módulo $R(x_D H)$. Isto é,

(3.6) $RD \cong RL \otimes_{L_{x_D}} R(x_D H)$.

Notamos ainda, que $R(x_D H)$ é um RH-módulo à direita, e que a equivalência (3.6) é, de fato, uma equivalência de (L,H)-bimódulos.

Usando agora a associatividade do produto tensorial, obtemos:

$$RD \otimes_H V \cong RL \otimes_{L_{x_D}} (R(x_D H) \otimes_H V),$$

onde reconhecemos o lado direito como sendo o módulo obtido pela indução do $R L_{x_D}$-módulo: $R(x_D H) \otimes_H V$, a L.

Além disso, como RL_{x_D}-módulo, $R(x_D H) \otimes_H V$ tem a ação de L_{x_D} definida por:

$$y(x_D \otimes v) = x_D \otimes x_D^{-1} y x_D v,$$

para $y \in L_{x_D}$, $x_D \in R(x_D H)$ e $v \in V$.

Pelo isomorfismo $\Sigma x_i \otimes v_i \leftrightarrow \Sigma x_i v_i$, podemos identificar $R(x_D H) \otimes_H V$ com o módulo $V_{(x_D)}$, cujos elementos são os de V, mas para os quais a ação de L_{x_D} é definida por:

$$y(\dot{v}) = (x_D^{-1}\ y\ x_D)v\ ,$$

para $y \in L_{x_D}$, $v \in V$ e $\dot{v}$ denota v visto como um elemento de $V_{(x_D)}$. |23|

Assim, temos

$$RD \otimes_H V \cong {}^{L}(V_{(x_D)})\ .$$

Aplicando esse resultado a (3.5), vem:

$$(3.7)\ \mathrm{Hom}_G\ ({}^{G}U,\ {}^{G}V) \cong \bigoplus_{D \in L\backslash G/H} \mathrm{Hom}_L\ (U,\ {}^{L}(V_{(x_D)}))\ .$$

Se assumirmos ainda que Lx_D é de índice finito em L para todo x_D, tal que, como vimos no 2º capítulo,

$${}^{L}(V_{(x_D)}) \cong (V_{(x_D)})^{L}\ ,$$

então podemos aplicar o Teorema da Reciprocidade de Frobenius para Módulos Induzidos Coadjuntos (2.9) para o lado direito de (3.7):

$$\mathrm{Hom}_L\ (U,\ (V_{(x_D)})^{L}) \cong \mathrm{Hom}_{L_{x_D}}\ (U_{L_{x_D}},\ V_{(x_D)})\ .$$

Isto completa a demonstração da seguinte generalização do Teorema de Mackey sobre espaço de entrelaçamento, válido para todo anel R comutativo com elemento unidade.

TEOREMA DO ESPAÇO DE ENTRELAÇAMENTO PARA GRUPOS:

Teorema 3.4: Sejam H e L subgrupos de um grupo G, seja U um RL-módulo e V um RH-módulo. Seja L_{x_D} e $V_{(x_D)}$ definidos como acima para $D \in L\backslash G/H$. Assumimos que L_{x_D} é de índice finito em L, para todo $D \in L\backslash G/H$.

Então:

$$\mathrm{Hom}_G\,({}^G U,\ {}^G V) \cong \bigoplus_{D\in L\backslash G/H} \mathrm{Hom}_{L_{x_D}}\,(U_{L_{x_D}},\ V_{(x_D)})$$

Para verificarmos que o teorema é falso se não assumirmos que L_{x_D} é de índice finito em L, é suficiente considerar o exemplo em que G é um grupo infinito, H=G, L consistindo somente do elemento identidade de G, e no qual U e V são representações triviais de L e H respectivamente.

○

Finalmente, observamos que outra generalização do teorema de Mackey, pode ser encontrada em | 7 |.

Para concluir esse trabalho, vamos enunciar o Teorema do Espaço de Entrelaçamento de Mackey para Anéis, para Representações Induzidas Coadjuntas, seguindo os mesmos passos dados para Representações Induzidas Adjuntas.

Sejam B e C subanéis de A, U um B-módulo à esquerda, V um C-módulo à esquerda, e consideremos agora o espaço $Hom_A (V^A, U^A)$.

Pelo Teorema da Reciprocidade de Frobenius, na forma (2.9), concluimos que são naturalmente equivalentes:

(3.8) $Hom_A (V^A, U^A) \cong Hom_B ((V^A)_B, U)$

Entretanto, $(V^A)_B$ é justamente o módulo

$$Hom_C (A,V),$$

onde A é visto como um bimódulo ${}_C A_B$, à esquerda sobre C e à direita sobre B.

Supondo agora que $A = \bigoplus_{i=1}^{r} D_i$, onde os D_i's são (C,B) - sub-bimódulos de A, soma direta finita, então como B-módulos, temos:

(3.9) $Hom_C (A,V) \cong \bigoplus_{i=1}^{r} Hom_C (D_i, V)$

Substituindo (3.9) em (3.8), obtemos:

$$\mathrm{Hom}_A\,(V^A,\,U^A) \cong \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Hom}_B\,(\mathrm{Hom}_C\,(D_i,\,V),\,U).$$

Chegamos assim ao:

<u>Teorema 3.5</u>: Sejam B e C subanéis de um anel A. Seja U um B-módulo à esquerda e V um C-módulo à esquerda. Suponhamos que A seja decomponível como um (C,B)-bimódulo, $A = \bigoplus_{i=1}^{r} D_i$, onde os D_i's são (C,B)-sub-bimódulos de A. Então o espaço de entrelaçamento dos módulos induzidos V^A e U^A satisfaz a seguinte relação:

$$\mathrm{Hom}_A\,(V^A,\,U^A) \cong \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Hom}_B\,(\mathrm{Hom}_C(D_i,\,V),\,U)$$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. ANDERSON, F.W. & FULLER, K.R. Rings and categories of modules. New York, Springer-Verlag, 1973.

2. BASS, H. Algebraic K-Theory. New York, W.A.Benjamin, 1968.

3. BOURBAKI, N. Algèbre. Ch. 3, Act. Sci. Ind. nº 1044. Paris, Hermann, 1958.

4. CARTAN, H. & EILENBERG, S. Homological algebra. Princeton, Princeton University Press, 1956.

5. CURTIS, C.W. & REINER, I. Representation theory of finite groups and associative algebras. New York, Interscience Publishers, 1962.

6. DORNHOFF, L. Group representation theory. New York, Marcel Dekker, 1971-1972. 2v.

7. DRESS, A. An intertwining number theorem for integral representations and applications. Math.Z., 116: 153-165, 1970.

8. FEIT, W. Theory of characters. New York, W.A.Benjamin, 1975.

9. FROBENIUS, G. Über Relationen zwischen den characteren einer Gruppe und denen ihrer untergruppen. Sitzber. Preuss. Akad. Wiss., :501-515, 1898.

10. GONÇALVES, A. Tópicos em representações de grupos. Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1973.

11. GRIFFITHS, H.B. & HILTON, P.J. Matemática clássica: uma interpretação contemporanea. São Paulo, Editoda Edgard Blucher/Editora da USP, 1976. 3v.

12. HIGMAN, D.G. Induced and produced modules. Can.J. Math., 7: 490-508, 1955.

13. HUPPERT, B. Endliche Gruppen I. Berlin, Springer-Verlag, 1967.

14. JONES RODRIGUEZ, A.R. & MERKLEN, H. Notas de aulas de representações de álgebras. São Paulo, IME - USP, 1980.

15. KASCH, F. Grundlagen einer Theorie der Frobeniuserweiterungen. Math. Ann., 127: 453-474, 1954.

16. KIRILLOV, A.A. Elements of the theory of representations. Berlin, Springer-Verlag, 1976.

17. LEDERMANN, W. Introduction to group characters. London, Cambridge University Press, 1977.

18. MACKEY, G.W. On induced representations of groups. Amer. J. Math., 73: 576-592, 1951.

19. MACLANE, S. Categories for the working mathematician. New York, Springer-Verlag, 1971.

20. MERKLEN, H. Notas de aulas de representações de grupos. São Paulo, IME-USP, 1980.

21. MORITA, K. Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimum conditions. Tokyo Kyoiku Daigoku, Sect. A, 6: 83-142, 1958.

22. ________ Adjoint pairs of functors and Frobenius extensions. Tokyo Kyoiku Daigaku, Sect. A, 9: 40-71, 1965.

23. POLCINO MILIES, C. Anéis de grupos. São Paulo, Sociedade Brasileira de Matemática, 1976.

24. PUTTASWAMAIAH, B.M.& DIXON, J.D. Modular representations of finite groups. New York, Academic Press, 1977.

25. RIEFFEL, M.A. Induced representations of rings. Can. J. Math., 27(2): 261-270, 1975.

26. ROTMAN, J.J. Notes on homological algebras. New York, Van Nostrand Reinhold, 1970.

27. WIELANDT, H. Finite permutation groups. New York, Academic Press, 1964.

* * *