FUNCIONAIS LINEARES CONTÍNUOS EM ESPAÇOS DE BIRNBAUM - ORLICZ

MARTHA SALERNO MONTEIRO

DISSERTAÇÃO APRESENTADA AO

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

DA

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE

EM

MATEMÁTICA

ORIENTADORA:

Profa. Dra. IRACEMA MARTIN BUND

Durante a elaboração deste trabalho, a autora recebeu apoio financeiro do CNPq.

-SÃO PAULO, junho de 1980-

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

Os espaços de Birnbaum-Orlicz $L_A(X, M, \mu)$ são um tipo de generalização dos espaços de Lebesgue $L_p(X, M, \mu)$, para $1 \leq p \leq \infty$.

Para alguns espaços de Birnbaum-Orlicz continuam válidas muitas das propriedades dos espaços $L_p(X, M, \mu)$. Mas um aspecto que faz dos espaços de Birnbaum-Orlicz um assunto de grande interesse é que eles são examinados frequentemente como possíveis contra-exemplos de resultados que se desejam provar em teoria de espaços de Banach. Neste particular, indicamos J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, Classical Banach Spaces, Springer Verlag, 1973, (II,3,h).

Os espaços $L_A(X, M, \mu)$ aparecem na literatura em geral com o nome de espaços de Orlicz apenas. A iniciativa de chamá-los de espaços de Birnbaum-Orlicz foi de Edwin Hewitt, que tenta com isto, corrigir uma possível injustiça, pois a idéia inicial do estudo deste assunto foi de ambos. (Veja Z.W. Birnbaum und W. Orlicz, Uber die Verallgemeinerung des Begriffes der zueinander konjugierten Potenzen, Studia Mathematica, 3(1931), 1-67).

A idéia deste trabalho era, inicialmente, a de estudar o dual do espaço $L_A(X, M, \mu)$, onde (X, M, μ) é um espaço de medida arbitrária. No capítulo II apresentamos um teorema de representação para os funcionais lineares contínuos definidos em $L_A(X, M,\mu)$, onde (X, M,μ) é um espaço de medida σ-finita, e mostramos que, com uma hipótese adicional sobre a função de Young A, podemos passar para o caso de espaço de medida arbitrária.

Enquanto buscávamos solução para o problema acima, outras questões foram surgindo naturalmente. Nos perguntamos sobre a reflexividade de um espaço de Birnbaum-Orlicz, o que foi tratado ainda no fim do capítulo II. Além disto, tentamos estabelecer algumas condições para que um espaço de Birnbaum-Orlicz seja estritamente convexo ou uniformemente convexo, e disto nasceu o capítulo III.

O capítulo I estabelece uma série de resultados iniciais sobre os espaços de Birnbaum-Orlicz que são utilizados nos capítulos seguintes, mas já apresentando alguns resultados por si só interessantes, e que não encontramos na literatura.

Restaram ainda algumas perguntas sem respostas, como por exemplo, como se caracterizam os espaços $L_A(X, M,\mu)$ regulares. Outras respostas são apenas parciais, devido às restrições colocadas nas hipóteses de alguns teoremas. Há, portanto, muito para ser feito, e pretendemos continuar buscando soluções e aperfeiçoando os resultados já obtidos.

Desejo expressar aqui minha gratidão à professora

e amiga Dra. Iracema Martin Bund pela sugestão do assunto, pela dedicada orientação, e pelo estímulo que dela recebi durante a elaboração deste trabalho.

Agradeço à Srta. Ana Márcia de Toledo pelo serviço de datilografia.

Agradeço também a todos os colegas e amigos que me incentivaram desde meu ingresso no curso de pós-graduação.

Martha Salerno Monteiro.

CAPÍTULO I

O objetivo deste capítulo é estabelecer as definições, notações e os resultados utilizados com maior frequência no restante trabalho. Serão omitidas algumas demonstrações que poderão ser encontradas em [1].

§1. Funções de Young Generalizadas e Espaços de Birnbaum-Orlicz.

(1.1) Definição. Uma função $A : [0,\infty[\longrightarrow [0,\infty]$ é uma função de Young se existir uma função $p : [0,\infty[\longrightarrow [0,\infty]$ não decrescente, tal que

(i) $A(u) = \int_0^u p(t)\, dt.$

(1.2) Exemplos.

(i) A função $M_p : [0,\infty[\longrightarrow [0,\infty]$ dada por $M_p(u) = u^p$, $1 \leq p < \infty$, é uma função de Young, pois

$M_p(u) = \int_0^u pt^{p-1}\, dt$, e a função $t \longmapsto pt^{p-1}$ é não decrescente para $1 \leq p < \infty$.

(ii) A função $L : [0,\infty[\longrightarrow [0,\infty]$ dada por $L(u) = u \ln u \, \xi_{[1,\infty[}(u)$ é uma função de Young, pois

$$L(u) = \int_0^u (\ln t + 1) . \xi_{[1,\infty[}(t)\, dt.$$

(1.3) <u>Proposição</u>. Sejam A e p como na definição (1.1), e seja $b = \inf \{u : A(u) = \infty\}$. Temos:

(i) $A(0) = 0$;

(ii) A é contínua à direita em $[0,b[$ e contínua à esquerda em $]0,\infty[$;

(iii) A é convexa, isto é, para quaisquer elementos u e v de $[0,\infty[$ e todo α em $[0,1]$, temos

$$A(\alpha u + (1-\alpha)\, v) \leq \alpha\, A(u) + (1-\alpha)\, A(v);$$

(iv) $\dfrac{A(u)}{u}$ é não decrescente em $]0,\infty[$;

(v) $\lim\limits_{u \to 0^+} A(u) = 0$;

(vi) $\lim\limits_{u \to \infty} A(u) = \infty$.

<u>Demonstração</u>. Os ítens de (i) a (iv) estão demonstrados em [1], teorema (2.4). Os ítens (v) e (vi) são de fácil verificação. ∎

(1.4) <u>Definição</u>. Se $A : [0,\infty[\longrightarrow [0,\infty]$ é uma função com as seguintes propriedades:

(i) $A(0)= 0$;

(ii) $\frac{A(u)}{u}$ é não decrescente em $]0,\infty[$;

(iii) A é contínua à esquerda em $]0,\infty[$;

então A é chamada função de Young generalizada.

(1.5) Exemplos.

(i) $A_1(u)= \infty \cdot \xi_{]0,\infty[}(u)$, para $0 \leq u < \infty$.

(ii) $A_2(u)= 0$, para $0 \leq u < \infty$.

As funções A_1 e A_2 acima são chamadas funções triviais. Um exemplo muito importante é:

(iii) $M_\infty(u)= \infty.\ \xi_{]1,\infty[}(u)$, para $0 \leq u < \infty$.

(iv) A função $A(u)= \frac{u}{2}\ \xi_{[0,1]}(u) + u\ \xi_{]1,\infty[}(u)$ é uma função de Young generalizada, mas não é função de Young, pois não é contínua em $u= 1$.

(1.6) Nota. Decorre da definição que toda função de Young generalizada é não decrescente, pois, como $\frac{A(u)}{u}$ é não decrescente em $]0,\infty[$, temos para $0 < u_1 < u_2 < \infty$,

$$\frac{A(u_1)}{u_1} \leq \frac{A(u_2)}{u_2} .$$

Portanto,

$$A(u_1) \leq \frac{u_1}{u_2}\ A(u_2) \leq A(u_2),\ \text{para } 0 < u_1 < u_2 < \infty.$$

(1.7) Proposição. Toda função de Young é uma função de Young generalizada.

Demonstração. Basta notar que as condições (i), (ii) e (iii) da definição (1.4) são verificadas por qualquer função de Young, conforme a proposição (1.3). ∎

(1.8) Definição. Seja $A : [0,\infty[\longrightarrow [0,\infty]$ uma função de Young generalizada. A função definida por

$$A_0(u) = \int_0^u \frac{A(t)}{t}\, dt \text{ para } 0 \leq u < \infty,$$

é chamada regularização de A.

(1.9) Proposição. Se A é uma função de Young generalizada, a função A_0, regularização de A, é uma função de Young. Além disso, temos:

(i) $A_0(u) \leq A(u) \leq A_0(2u)$, para $0 \leq u < \infty$.

Demonstração. Se A é uma função de Young generalizada, a função

$$p(t) = \begin{cases} 0, \text{ se } t = 0; \\ \dfrac{A(t)}{t}, \text{ se } 0 < t < \infty, \end{cases}$$

é não decrescente. Segue-se, portanto, das definições (1.1) e (1.8), que A_0 é uma função de Young.

Para demonstrarmos as desigualdades em (i), tomemos primeiramente $u > 0$. Temos:

$$A_0(u) = \int_0^u \frac{A(t)}{t}\, dt \leq \frac{A(u)}{u}(u - 0) = A(u).$$

Por outro lado, temos:

$$A(u) \leq \int_u^{2u} \frac{A(t)}{t}\, dt \leq \int_0^{2u} \frac{A(t)}{t} = A_0(2u).$$

Se $u = 0$, então $A_0(u) = A(u) = A_0(2u) = 0$. ∎

No que segue, $(X, \mathcal{M}, \mu)$ denotará um espaço de medida completa, com $\mu(X) > 0$.

(1.10) Definição. Seja A uma função de Young generalizada, e seja $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função $\mathcal{M}$-mensurável. Dizemos que $f \in L_A(X, \mathcal{M}, \mu)$ se existir $\alpha > 0$ tal que

$$\text{(i)} \quad \int_X A(\alpha|f(x)|)\, d\mu(x) < \infty.$$

O conjunto $L_A(X, \mathcal{M}, \mu)$ é chamado espaço de Birnbaum-Orlicz.

Onde não houver risco de confusão escreveremos L_A, em vez de $L_A(X, \mathcal{M}, \mu)$.

(1.11) Exemplos.

(i) Se $A(u) = 0$, $\forall u \in [0,\infty[$, então L_A é o conjunto de todas as funções mensuráveis.

(ii) Se $A(u) = \infty \cdot \xi_{]0,\infty[}(u)$, então L_A é o conjunto das funções f que são nulas μ-q.s.

Os dois espaços acima são chamados triviais.

(iii) Seja $M_p(u) = u^p$, $1 \leq p < \infty$. Temos:

$$f \in L_{M_p} \iff \exists\ \alpha > 0 : \int_X M_p(\alpha|f|)\, d\mu < \infty.$$

Mas $\int_X M_p(\alpha|f|)\, d\mu = \int_X (\alpha|f|)^p\, d\mu = \alpha^p \int_X |f|^p\, d\mu$, e, portanto, $\int_X M_p(\alpha|f|)\, d\mu < \infty \iff \int_X |f|^p\, d\mu < \infty$. Logo, os espaços L_p com $1 \leq p < \infty$ são casos particulares de espaços de Birnbaum-Orlicz.

(iv) Seja M_∞ como no exemplo (1.5.iii). Temos:

$$f \in L_{M_\infty} \iff \exists\ \alpha > 0 \text{ tal que } \int_X M_\infty(\alpha|f|)\, d\mu < \infty$$

$$\iff \exists\ \alpha > 0 \text{ tal que } \alpha|f| \leq 1,\ \mu\text{-q.s.}$$

$$\iff \exists\ \alpha > 0 \text{ tal que } |f| \leq \frac{1}{\alpha},\ \mu\text{-q.s.}$$

Portanto, L_{M_∞} é o espaço das funções limitadas μ-q.s, que também é um espaço de Birnbaum-Orlicz.

Escreveremos frequentemente L_p e L_∞, em vez de L_{M_p} e L_{M_∞}, respectivamente.

(v) Seja $L(u) = u \ln u\ \xi_{]1,\infty[}(u)$. Já vimos que $L(u)$ é uma função de Young. Veremos adiante (proposição (1.15)) que se $\mu(X) < \infty$, então $L_p \subset L_L \subset L_1$, qualquer que seja $p > 1$.

(1.12) <u>Proposição</u>. Seja A uma função de Young generalizada tal que existe $u_o > 0$ com $A(u_o) = 0$. Então $L_\infty \subset L_A$

<u>Demonstração</u>. Se $f \in L_\infty$, então existe $k > 0$ tal que $|f| \leq k$. Seja $0 < \alpha < \frac{u_o}{k}$. Temos:

$$\int_X A(\alpha|f|)\, d\mu \leq \int_X A(\frac{u_o}{k} \cdot k)\, d\mu = \int_X A(u_o)\, d\mu = 0,$$

o que mostra que $f \in L_A$. ∎

(1.13) <u>Proposição</u>. Sejam A e B duas funções de Young generalizadas para as quais existe $k > 0$ tal que $A(u) \leq B(ku)$, para todo $u \geq 0$. Então $L_B \subset L_A$.

<u>Demonstração</u>. Seja $f \in L_B$. Então existe $\beta > 0$ tal que $\int_X B(\beta|f|)\, d\mu < \infty$. Tomando $\alpha = \frac{\beta}{k}$, temos:

$$\int_X A(\alpha|f|)\, d\mu \leq \int_X B(k \cdot \alpha|f|)\, d\mu = \int_X B(\beta|f|)\, d\mu < \infty,$$

e, portanto, $f \in L_A$. ∎

(1.14) <u>Corolário</u>. Se A e B são duas funções de Young generalizadas para as quais existem $k_1 > 0$ e $k_2 > 0$ tais que $A(u) \leq B(k_1 u)$ e $B(u) \leq A(k_2 u)$, para todo $u \geq 0$, então $L_A = L_B$. Em particular, se A_0 é a regularização de A, temos $L_A = L_{A_0}$. ∎

Veremos agora um resultado um pouco mais fraco, mas mesmo assim, muito útil.

(1.15) <u>Proposição</u>. Seja $\mu(X) < \infty$. Seja M_∞ como em (1.5.iii), e sejam A e B duas funções de Young generalizadas.

Temos:

(i) $\mathcal{L}_{\infty} \subset \mathcal{L}_A$;

(ii) Se $A(u) = \infty$ para algum $u > 0$, então $\mathcal{L}_A = \mathcal{L}_{\infty}$;

(iii) Se existirem $k > 0$ e $u_o > 0$ tais que $B(u) \leq A(ku)$, para todo $u \in [u_o, \infty[$, então $\mathcal{L}_A \subset \mathcal{L}_B$.

<u>Demonstração</u>. Veja [1], teorema (3.10). ∎

Desta proposição segue-se que se $L(u)$ é como em (1.11.v) e $\mu(X)$ é finito, então $\mathcal{L}_p \subset \mathcal{L}_L \subset \mathcal{L}_1$, para todo $p \in]1, \infty]$, pois, como $M_1(u) \leq L(u)$, para todo $u \geq e$, temos $\mathcal{L}_L \subset \mathcal{L}_1$.

Por outro lado, como $L(u) \leq M_p(pu)$ para todo $u \geq e$, e $1 < p < \infty$, temos $\mathcal{L}_p \subset \mathcal{L}_L$ para $1 < p < \infty$. Além disto, $\mathcal{L}_{\infty} \subset \mathcal{L}_L$, por (1.15.i).

(1.16) <u>Teorema</u>. O conjunto $\mathcal{L}_A(X, \mathcal{M}, \mu)$ com as operações habituais de adição e multiplicação por um número complexo é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$.

<u>Demonstração</u>. É fácil ver que se $f \in \mathcal{L}_A$, então $kf \in \mathcal{L}_A$, qualquer que seja $k \in \mathbb{C}$. Sejam f e g duas funções de $\mathcal{L}_A$ que, pelo corolário (1.14), coincide com $\mathcal{L}_{A_0}$. Então existem $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ tais que $\int_X A_0(\alpha|f|)\, d\mu < \infty$ e $\int_X A_0(\beta|g|)\, d\mu < \infty$. Seja $\gamma = \min\{\alpha, \beta\}$. Como A_0 é convexa (1.3.iii), podemos escrever:

$$A_0(\frac{\gamma}{2}|f + g|) \le A_0(\frac{\gamma}{2}|f| + \frac{\gamma}{2}|g|) \le \frac{1}{2}[A_0(\gamma|f|) + A_0(\gamma|g|)]$$
$$\le \frac{1}{2} A_0(\alpha|f|) + \frac{1}{2} A_0(\beta|g|).$$

Portanto,

$$\int_X A_0(\frac{\gamma}{2}|f + g|)d\mu \le \frac{1}{2}\int_X A_0(\alpha|f|)\,d\mu + \frac{1}{2}\int_X A_0(\beta|g|)\,d\mu < \infty,$$

de onde segue-se que $f + g \in \mathcal{L}_A$. ∎

Sejam f_1 e f_2 duas funções de $\mathcal{L}_A(X, \mathcal{M}, \mu)$. Se $\mu(\{x \in X : f_1(x) - f_2(x) \neq 0\}) = 0$, dizemos que f_1 e f_2 são equivalentes. É fácil ver que isto estabelece uma relação de equivalência em $\mathcal{L}_A$. Seja $L_A(X, \mathcal{M}, \mu)$ o espaço vetorial quociente de $\mathcal{L}_A(X, \mathcal{M}, \mu)$ pelo espaço

$$\{f \in \mathcal{L}_A(X, \mathcal{M}, \mu) : f = 0 \ \mu - \text{q.s.}\}.$$

No parágrafo 2, definiremos uma norma para $L_A(X, \mathcal{M}, \mu)$, e $L_A(X, \mathcal{M}, \mu)$ munido desta norma, será um espaço de Banach.

Sempre que não houver risco de confusão, escreveremos $\mathcal{L}_A(X, \mathcal{M}, \mu)$ no lugar de $L_A(X, \mathcal{M}, \mu)$, e representaremos por f uma função de $\mathcal{L}_A$ ou uma classe de equivalência de L_A, indiferentemente.

Antes de terminarmos este parágrafo, veremos mais um resultado.

(1.17) Teorema. Sejam A e B duas funções de Young generalizadas tais que:

(i) $A(u) > 0$ para $u > 0$;

(ii) existe $a > 0$ tal que

$$B(u) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq u \leq a; \\ A(u-a), & \text{se } a < u < \infty. \end{cases}$$

Então temos:

$$L_B = L_A + L_\infty.$$

Demonstração. É claro que $B(u) \leq A(u)$, para todo $u \in [0, \infty[$, pois, se $0 \leq u \leq a$, temos $B(u) = 0 \leq A(u)$, e, se $a < u < \infty$, então $B(u) = A(u - a) \leq A(u)$, pois A é não decrescente. Portanto, pela proposição (1.13), temos $L_A \subset L_B$. Por outro lado, como $B(u) = 0$ em $[0,a[$, temos, por (1.12), $L_\infty \subset L_B$. Logo, $L_A + L_\infty \subset L_B$, pois L_B é um espaço vetorial.

Para provarmos a inclusão contrária, tomemos f em L_B. Então existe $\beta > 0$ tal que $\int_X B(\beta|f|)\, d\mu < \infty$. Seja $E = \{x \in X : |f(x)| \leq \frac{a}{\beta}\}$. Definimos

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in E; \\ \dfrac{a\, f(x)}{\beta\, |f(x)|}, & \text{se } x \in X - E; \end{cases}$$

e

$$f_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in E; \\ f(x) - \dfrac{a\, f(x)}{\beta |f(x)|}, & \text{se } x \in X - E. \end{cases}$$

É claro que $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, $\forall x \in X$, e que $f_1 \in \mathcal{L}_\infty$, pois $|f_1| \leq \frac{a}{\beta}$. Resta provar que $f_2 \in \mathcal{L}_A$. Se $x \in X - E$, temos:

$$\begin{aligned} A(\beta|f_2(x)|) &= A\left(\beta \left| f(x) - \frac{a \ f(x)}{\beta \ |f(x)|}\right|\right) \\ &= A\left(\beta \left| f(x) \cdot \left(1 - \frac{a}{\beta|f(x)|}\right)\right|\right) \\ &= A\left(\beta|f(x)| \left| 1 - \frac{a}{\beta|f(x)|}\right|\right) \\ &= A\left(\beta|f(x)| - a\right) \\ &= B\left(\beta|f(x)|\right). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_X A(\beta|f_2(x)|)\, d\mu(x) = \int_E A(0)\, d\mu(x) + \int_{X-E} B(\beta|f(x)|)\, d\mu(x) < \infty. \qquad \blacksquare$$

(1.18) <u>Corolário</u>. Seja A uma função de Young generalizada tal que $A(u) > 0$ para $u > 0$. Sejam $0 < b < c < \infty$, e sejam B e C funções definidas por:

$$B(u) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq u \leq b; \\ A(u-b), & \text{se } b < u < \infty; \end{cases}$$

e

$$C(u) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq u \leq c; \\ A(u-c), & \text{se } c < u < \infty. \end{cases}$$

Então $\mathcal{L}_C = \mathcal{L}_B$.

<u>Demonstração</u>. Pelo teorema anterior, temos

$\mathcal{L}_B = \mathcal{L}_A + \mathcal{L}_\infty$, e $\mathcal{L}_C = \mathcal{L}_A + \mathcal{L}_\infty$. Logo $\mathcal{L}_C = \mathcal{L}_B$.

∎

§2. Uma norma em $\mathcal{L}_A$.

(2.1) <u>Definição</u>. Seja A uma função de Young generalizada. Para cada $f \in \mathcal{L}_A$, definimos:

$$p_A(f) = \inf \{k \in]0,\infty[\ : \int_X A(\frac{|f|}{k})\, d\mu \le 1\} .$$

Se $f \in \mathcal{L}_A$, temos $p_A(f) < \infty$, pois existe $\alpha \overset{>}{\cancel{<}} 0$, tal que $\int_X A(\alpha|f|)\, d\mu = M < \infty$. Se $M \le 1$, então $p_A(f) \le \frac{1}{\alpha}$, e se $M > 1$, temos

$$\int_X A(\frac{\alpha}{M}|f|)\, d\mu \le \frac{1}{M} \int_X A(\alpha|f|)\, d\mu = 1,$$

e, portanto, $p_A(f) \le \frac{M}{\alpha}$.

(2.2) <u>Exemplos</u>.

(i) Sejam $M_\alpha(u) = u^\alpha$, com $1 \le \alpha < \infty$, e $f \in \mathcal{L}_{M_\alpha}$.

Temos:

$$\int_X M_\alpha(\frac{|f|}{k})\, d\mu = \int_X \frac{|f|^\alpha}{k^\alpha}\, d\mu = \frac{1}{k^\alpha} \int_X |f|^\alpha\, d\mu.$$

Logo,

$$\int_X M_\alpha\left(\frac{|f|}{k}\right) d\mu \leq 1 \iff \int_X |f|^\alpha \, d\mu \leq k^\alpha$$

$$\iff \left[\int_X |f|^\alpha \, d\mu \right]^{1/\alpha} \leq k.$$

Portanto,

$$p_{M_\alpha}(f) = \left[\int_X |f|^\alpha \, d\mu\right]^{1/\alpha} = \|f\|_\alpha.$$

(ii) Sejam $M_\infty(u) = \infty \cdot \xi_{]1,\infty[}(u)$, e $f \in L_\infty$. Temos $\int_X M_\infty\left(\frac{|f|}{k}\right) d\mu \leq 1 \iff \frac{|f|}{k} \leq 1$ μ-q.s. $\iff |f| \leq k$ μ-q.s.

Logo, $p_{M_\infty}(f) = \inf \{k \in]0,\infty[: |f| \leq k \ \mu\text{-q.s.}\} = \|f\|_\infty$.

Enunciaremos agora algumas propriedades de p_A.

(2.3) <u>Proposição</u>. Seja A uma função de Young generalizada. Temos:

(i) $p_A(f) \geq 0$, $\forall f \in L_A$;

(ii) $p_A(0) = 0$;

(iii) se $f \in L_A$ e $p_A(f) = 0$, então $f = 0$ μ-q.s. em X;

(iv) $p_A(\alpha f) = |\alpha| \, p_A(f)$, $\forall f \in L_A$, $\forall \alpha \in \mathbb{C}$;

(v) $\int_X A\left(\frac{|f|}{p_A(f)}\right) d\mu \leq 1$, $\forall f \in L_A$ com $p_A(f) \neq 0$;

(vi) se $f \in L_A$ e $\int_X A\left(\frac{|f|}{k_0}\right) d\mu = 1$ para algum $k_0 > 0$

então $p_A(f) = k_0$.

<u>Demonstração</u>. Os ítens (i), (ii) e (iv) são imediatos. As demonstrações de (iii) e (v) podem ser encontradas em [1], teoremas (3.22.i) e (3.21) respectivamente. Vejamos a demonstração de (vi).

Seja $k_0 > 0$ tal que $\int_X A(\frac{|f|}{k_0})\, d\mu = 1$. Como A é não decrescente, temos, para todo $k > k_0$:

$$\int_X A(\frac{|f|}{k})\, d\mu \le \int_X A(\frac{|f|}{k_0})\, d\mu = 1.$$

Logo, $p_A(f) \le k_0$.

Tomemos, então $0 < k < k_0$. Seja $F = \{x \in X : f(x) \ne 0\}$. É claro que $\mu(F) > 0$, pois, caso contrário, teríamos

$$\int_X A(\frac{|f|}{k_0})\, d\mu = 0.$$

Como A é uma função de Young generalizada, $\frac{A(u)}{u}$ é não decrescente para $u > 0$. Isto implica que A é estritamente crescente no conjunto $\{u : A(u) \ne 0\}$. Assim,

$$\int_F A(\frac{|f|}{k_0})\, d\mu < \int_F A(\frac{|f|}{k})\, d\mu, \text{ para } 0 < k < k_0,$$

e, portanto,

$$1 = \int_X A(\frac{|f|}{k_0})\, d\mu < \int_X A(\frac{|f|}{k})\, d\mu, \text{ para } 0 < k < k_0.$$

Logo, $p_A(f) = \inf \{k \in]0,\infty[: \int_X A(\frac{|f|}{k})\, d\mu \le 1\}$

$= \inf \{k \in [k_0,\infty[\} = k_0.$ ∎

(2.4) Observação. A desigualdade em (v) pode ser estrita, como podemos verificar através do exemplo abaixo. No parágrafo 3, veremos uma condição suficiente para valer a igualdade.

(2.5) Exemplo. Sejam $X = \mathbb{R}$, μ a medida de Lebesgue, $A(u) = \frac{u}{2}\, \xi_{[0,1]}(u) + u\, \xi_{]1,\infty[}(u)$, e $f(x) = \xi_{[0,1]}(x)$.

Temos:

$$\int_X A(|f|)\, d\mu = \int_{[0,1]} A(1)\, d\mu = A(1)\,.\ \mu([0,1]) = \frac{1}{2} < 1.$$

Logo, $p_A(f) \leq 1$. Tomemos, portanto, $k < 1$. Temos

$$\int_X A\left(\frac{|f|}{k}\right) d\mu = \int_{[0,1]} A\left(\frac{1}{k}\right) d\mu = A\left(\frac{1}{k}\right)\ \mu([0,1]) = \frac{1}{k} > 1.$$

Logo, $\int_X A\left(\frac{|f|}{k}\right) d\mu \leq 1$ se, e somente se, $k \geq 1$. Isto implica que $p_A(\xi_{[0,1]}) = 1$ e $\int_X A\left(\frac{\xi_{[0,1]}}{p_A(\xi_{[0,1]})}\right) = \frac{1}{2}$.

(2.6) Teorema. Se A é uma função de Young, então p_A é uma norma em L_A.

Demonstração. Veja [1], teorema (3.22.ii) ∎

(2.7) Proposição. Seja A uma função de Young generalizada, e seja A_0 a regularização de A. Temos:

(i) $p_{A_0}(f) \leq p_A(f) \leq 2p_{A_0}(f)$, para todo $f \in L_A$.

<u>Demonstração</u>. Sabemos, por (1.9.i), que se A_0 é a regularização de A, vale $A_0(u) \leq A(u) \leq A_0(2u)$, para todo $u \in [0,\infty[$. Disto decorre facilmente que $p_A(f) = 0$ se, e somente se, $p_{A_0}(f) = 0$. Se $p_A(f) \neq 0$, temos:

$$\int_X A_0\left(\frac{|f|}{p_A(f)}\right) d\mu \leq \int_X A\left(\frac{|f|}{p_A(f)}\right) d\mu \leq 1,$$

e consequentemente, $p_{A_0}(f) \leq p_A(f)$.

Analogamente, sendo $p_{A_0}(f) \neq 0$, temos

$$\int_X A\left(\frac{|f|}{2p_{A_0}(f)}\right) d\mu \leq \int_X A_0\left(\frac{|f|}{p_{A_0}(f)}\right) d\mu \leq 1,$$

e portanto, $p_A(f) \leq 2p_{A_0}(f)$. ∎

(2.8) <u>Observação</u>. Se A é uma função de Young generalizada, sabemos, por (1.9) que A_0 é uma função de Young, e por (1.14), que $L_A = L_{A_0}$. Logo, usando o resultado (2.6) acima, temos que p_{A_0} é uma norma em L_A. No caso em que A é uma função de Young, então p_A e p_{A_0} são normas equivalentes em L_A, pela proposição (2.7). Além disto, temos o resultado seguinte.

(2.9) <u>Teorema</u>. Seja A uma função de Young generalizada. O espaço de Birnbaum-Orlicz $L_A(X, M, \mu)$, munido da norma p_{A_0}, é um espaço de Banach.

<u>Demonstração</u>. Veja [1], teorema (3.29). ∎

(2.10) <u>Proposição</u>. Seja L_A um espaço de Birnbaum-Orlicz e sejam f e g pertencentes a L_A tais que $0 \leq |f| < |g|$ μ-q.s. Então vale:

(i) $p_A(f) \leq p_A(g)$.

<u>Demonstração</u>. É claro que vale (i) se $f = 0$ μ-q.s. Suponhamos, então, $p_A(f) \neq 0$. Como A é uma função não decrescente, temos $A(\frac{|f(x)|}{k}) \leq A(\frac{|g(x)|}{k})$ para todo $k > 0$ e para quase todo $x \in X$. Portanto, para $k > 0$,

$$\int_X A(\frac{|f|}{k})\, d\mu \leq \int_X A(\frac{|g|}{k})\, d\mu.$$

Em particular, se $k = p_A(g)$, temos:

$$\int_X A(\frac{|f|}{p_A(g)})\, d\mu \leq \int_X A(\frac{|g|}{p_A(g)})\, d\mu \leq 1.$$

Logo, $p_A(f) \leq p_A(g)$. ∎

(2.11) <u>Proposição</u>. Sejam A e B duas funções de Young como no teorema (1.17). Se $f \in L_B$ é igual a $g + h$, onde $g \in L_A$ e $h \in L_\infty$, então vale:

(i) $p_{B_0}(f) \leq 2p_{A_0}(g) + \frac{1}{a}\, ||h||_\infty$.

<u>Demosntração</u>. Sabemos que $p_{B_0}(f) \leq p_{B_0}(g) + p_{B_0}(h)$, pois p_{B_0} é norma em L_B. Mostremos, portanto, que

$p_{B_0}(g) \leq 2p_{A_0}(g)$, e $p_{B_0}(h) \leq \frac{1}{a} \quad ||h||_\infty$.

Seja $F=\{x \in X : \frac{|g(x)|}{2p_{A_0}(g)} > a\}$. Para $x \notin F$, temos

$B(\frac{|g(x)|}{2p_{A_0}(g)}) = 0$, e, se $x \in F$, temos $B(\frac{|g(x)|}{2p_{A_0}(g)}) = A(\frac{|g(x)|}{2p_{A_0}(g)} - a)$.

Logo, usando as desigualdades (1.9.i), temos:

$$\int_X B_0(\frac{|g|}{2p_{A_0}(g)})d\mu \leq \int_X B(\frac{|g|}{2p_{A_0}(g)})d\mu = \int_F A(\frac{|g|}{2p_{A_0}(g)} - a)\, d\mu$$

$$\leq \int_X A(\frac{|g|}{2p_{A_0}(g)})d\mu \leq \int_X A_0(\frac{|g|}{p_{A_0}(g)})d\mu \leq 1$$

donde, $p_{B_0}(g) \leq 2p_{A_0}(g)$.

Observemos agora que se $\frac{|h|}{k} \leq a$ μ-q.s., então $\int_X B_0(\frac{|h|}{k})\, d\mu = 0$. Logo,

$$p_{B_0}(h) \leq \inf\{k \in]0,\infty[\; : \; \frac{|h|}{k} \leq a \; \mu\text{-q.s.}\} = \frac{1}{a} \quad ||h||_\infty.$$

Assim, temos:

$$p_{B_0}(f) = p_{B_0}(g + h) \leq p_{B_0}(g) + p_{B_0}(h) \leq 2p_{A_0}(g) + \frac{1}{a} \quad ||h||_\infty.$$

∎

(2.12) <u>Definição</u>. Seja A uma função de Young generalizada. Definimos a inversa à direita da função A da seguinte maneira:

$$A^{-1}(v) = \inf\{u : A(u) > v\} = \sup\{u : A(u) \leq v\}.$$

Algumas propriedades de funções inversas de funções de Young generalizadas podem ser encontradas em [1], capítulo 2.

Um resultado útil para o nosso trabalho é o seguinte.

(2.13) Proposição. Sejam L_A um espaço de Birnbaum-Orlicz, e $E \in M$. Então:

(i) se $0 < \mu(E) < \infty$, então a função ξ_E pertence a L_A, e $p_A(\xi_E) = \dfrac{1}{A^{-1}(\frac{1}{\mu(E)})}$;

(ii) se $\mu(E) = \infty$, e $\sup\{u : A(u) = 0\} = a > 0$, então ξ_E pertence a L_A, e $p_A(\xi_E) = \frac{1}{a}$;

(iii) se $\mu(E) = \infty$ e $A(u) > 0$ para $u > 0$, então ξ_E não pertence a L_A.

Demonstração. Veja [1], teorema (3.34). ∎

(2.14) Definição. Seja A uma função de Young generalizada, o complemento de Young de A é a função $\bar{A}$ definida em $[0,\infty[$, pela relação

$$\bar{A}(u) = \sup\{uv - A(v) : v \geq 0\}.$$

(2.15) Exemplos.

(i) Seja $Q_p(u) = \frac{u^p}{p}$, $1 < p < \infty$. Então

$$\overline{Q}_p(u) = \sup\{uv - Q_p(v) : v \geq 0\} = \sup\{uv - \frac{v^p}{p} : v \geq 0\} = \frac{p-1}{p} \cdot u^{\frac{p}{p-1}}$$

$$= Q_{\frac{p}{p-1}}(u).$$

Chamando $q = \frac{p}{p-1}$, temos $\overline{Q}_p(u) = Q_q(u)$, onde $1 < q < \infty$.

(ii) Seja $M_1(u) = u$. Temos:

$$\overline{M}_1(u) = \sup\{uv - M_1(v) : v \geq 0\} = \sup\{uv - v : v \geq 0\} = \infty . \xi_{]1,\infty[}(u).$$

Logo, $\overline{M}_1(u) = M_\infty(u)$.

(iii) É fácil ver que $\overline{M}_\infty(u) = M_1(u)$.

(2.16) Proposição. Seja A uma função de Young generalizada não trivial, e seja $\overline{A}$ o complemento de Young de A. Então $\overline{A}$ é uma função de Young não trivial.

Demonstração. Veja [1], teorema (2.16). ∎

(2.17) Proposição. (Desigualdade de Young). Se A é uma função de Young generalizada, e $\overline{A}$ seu complemento de Young, então vale:

(i) $uv \leq A(u) + \overline{A}(v)$, $\forall\ u, v \geq 0$.

Demonstração. Segue-se imediatamente da definição. ∎

(2.18) Teorema. (Desigualdade de Hölder). Seja A uma função de Young generalizada não trivial, e $\overline{A}$ o comple mento de Young de A. Sejam f em L_A e g em $L_{\overline{A}}$. Então f.g pertence a L_1, e:

$$\text{(i)} \quad \left|\int_X fg\, d\mu\right| \leq \int_X |fg|\, d\mu \leq 2p_A(f)\, p_{\overline{A}}(g).$$

<u>Demonstração</u>. Se $p_A(f) = 0$ ou $p_{\overline{A}}(g) = 0$, temos trivialmente a igualdade. Consideremos, portanto, o caso $p_A(f) > 0$ e $p_{\overline{A}}(g) > 0$. Pela desigualdade de Young (2.17), temos:

$$\frac{|f(x)|}{p_A(f)} \cdot \frac{|g(x)|}{p_{\overline{A}}(g)} \leq A\left(\frac{|f(x)|}{p_A(f)}\right) + \overline{A}\left(\frac{|g(x)|}{p_{\overline{A}}(g)}\right), \quad \forall x \in X.$$

Logo,

$$\int_X \frac{|f.g|}{p_A(f)\ p_{\overline{A}}(g)}\, d\mu \leq \int_X A\left(\frac{|f|}{p_A(f)}\right) d\mu + \int_X \overline{A}\left(\frac{|g|}{p_{\overline{A}}(g)}\right) d\mu ,$$

isto é,

$$\int_X \frac{|f.g|}{p_A(f)\ p_{\overline{A}}(g)}\, d\mu \leq 2.$$

Portanto, $fg \in L_1$ e podemos escrever:

$$\left|\int_X fg\, d\mu\right| \leq \int_X |fg|\, d\mu \leq 2\, p_A(f)\, p_{\overline{A}}(g). \quad \blacksquare$$

§3. A condição Δ_2.

(3.1) Definição. Seja A uma função de Young generalizada, para a qual existem $u_0 \geq 0$ e $k > 0$ tais que $A(u_0)$ é finito, e, para todo $u \geq u_0$, vale:

(i) $A(2u) \leq kA(u)$.

Se $u_0 = 0$, diremos que A satisfaz a condição Δ_2 para todo u. Se $u_0 > 0$, diremos que A satisfaz a condição Δ_2 para valores grandes de u.

(3.2) Exemplos.

(i) A função $M_p(u) = u^p$, $1 \leq p < \infty$, satisfaz a condição Δ_2 para todo u, pois, para $u \geq 0$, temos:

$$M_p(2u) = (2u)^p = 2^p\, M_p(u).$$

(ii) A função $M_\infty(u) = \infty . \xi_{]1,\infty[}(u)$ não satisfaz nenhum tipo de condição Δ_2, pois para todo $u_0 \in [0,1]$, existe $u \geq \max\{u_0, \frac{1}{2}\}$, tal que $M_\infty(u_0) = M_\infty(u) = 0$, e $M_\infty(2u) = \infty$.

Observamos que se A é uma função de Young generalizada para a qual existem $u_0 \geq 0$ e $k > 0$ tais que $A(2u) \leq kA(u)$, então, para todo $\ell > 1$, existe $k(\ell) > 0$ tal que, para $u \geq u_0$, temos:

$$A(\ell u) \leq k(\ell)\, A(u).$$

Reciprocamente, se para algum $\ell > 1$, existirem $u_0 \geq 0$ e $k(\ell) \geq 0$ tais que, para $u \geq u_0$ vale $A(\ell u) \leq k(\ell)\, A(u)$, então, a função A satisfaz a condição Δ_2 para $u \geq u_0 \geq 0$. Para a demonstração veja, por exemplo, [1], teorema (5.3).

Além disto, é importante o seguinte resultado.

(3.3) Teorema. Seja A uma função de Young generalizada. São equivalentes as seguintes afirmações:

(i) para todo $k > 0$ e para todo $u_0 \geq 0$, existe $u_1 > u_0$ tal que $A(2u_1) > k\, A(u_1)$;

(ii) para todo $\ell > 1$, para todo $k > 0$, e para todo $u_0 \geq 0$, existe $u_1 > u_0$ tal que $A(\ell u_1) > k\, A(u_1)$.

Demonstração. A implicação (ii) $\Longrightarrow$ (i) é imediata, bastando tomar $\ell = 2$. Para provarmos (i) $\Longrightarrow$ (ii), suponhamos primeiramente $\ell \geq 2$, e tomemos $k > 0$ e $u_0 \geq 0$ arbitrários. Então, usando (i), determinamos $u_1 > u_0$, tal que

$$A(\ell u_1) \geq A(2u_1) > k\, A(u_1).$$

No caso $1 < \ell < 2$, suponhamos, por absurdo, que existam $k_0 > 0$ e $u_0 \geq 0$ tais que

$$A(\ell u) \leq k_0\, A(u), \text{ para } u \geq u_0.$$

Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $2 < \ell^n$. Daí decorre que

$$A(2u) \leq A(\ell^n u) \leq k_0^n\, A(u), \text{ para } u \geq u_0.$$

Usando (i), para $k = k_0^n$ e u_0 acima, temos $u_1 > u_0$ tal que

$$A(2u_1) > k_0^n\, A(u_1),$$

o que contradiz a afirmação anterior. ∎

(3.4) <u>Proposição</u>. Seja A uma função de Young generalizada que satisfaz a condição Δ_2 para todo u. Seja $a = \sup\{u : A(u) = 0\}$ ~~≠ 0~~. Então $a = 0$.

<u>Demonstração</u>. Suponhamos, por absurdo, que $a > 0$, e tomemos $\frac{a}{2} < u < a$. Então $A(2u) > 0$, pois $2u > a$. Mas $A(u) = 0$. Isto contradiz o fato de A satisfazer a condição Δ_2 para todo u. Logo $a = 0$. ∎

(3.5) <u>Proposição</u>. Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida e seja A uma função de Young generalizada. Suponhamos que A satisfaz a condição Δ_2 para $u \geq u_0$. Se $u_0 > 0$, suponhamos $\mu(X) < \infty$. Se f é uma função qualquer de $\mathcal{L}_A$ e $\alpha \in [0, \infty[$, temos:

$$\int_X A(\alpha |f|)\, d\mu < \infty.$$

<u>Demonstração</u>. Veja [1], teorema (5.9). ∎

(3.6) <u>Lema</u>. Seja A uma função de Young, e seja $f \in \mathcal{L}_A$ não nula, tal que $\int_X A(\frac{|f|}{k})\, d\mu < \infty$, para algum $k \in]0, p_A(f)[$. Então vale:

$$\int_X A\left(\frac{|f|}{p_A(f)}\right) d\mu = 1.$$

Demonstração. Veja [1], teorema (4.8). ∎

(3.7) Teorema. Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida. Seja A uma função de Young, que satisfaz a condição Δ_2 para $u \geq u_0$. Se $u_0 > 0$, suponhamos $\mu(X) < \infty$. Se f é uma função de L_A não nula, temos:

$$\int_X A\left(\frac{|f|}{p_A(f)}\right) d\mu = 1.$$

Demonstração. Segue-se de (3.5) e (3.6). ∎

Veremos a seguir que há uma recíproca do teorema (3.7) para certos espaços de medida.

(3.8) Definição. Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida. Um conjunto $E \in \mathcal{M}$ é um átomo se as seguintes condições estiverem satisfeitas:

(i) $0 < \mu(E) \leq \infty$;

(ii) para todo $F \in \mathcal{M}$ com $F \subset E$, temos $\mu(F) = 0$, ou $\mu(F) = \mu(E)$.

Diremos que um espaço de medida $(X, \mathcal{M}, \mu)$ é não atômico se $\mathcal{M}$ não contiver átomos. Diremos que $(X, \mathcal{M}, \mu)$ é não puramente atômico se existir $Y \in \mathcal{M}$ que não contém átomos.

(3.9) Exemplos. O leitor não terá dificuldades em construir exemplos de espaços de medida com átomos, mas citamos aqui um exemplo não trivial e interessante, que pode ser encontrado com mais detalhes em *Hewitt and Ross*, "*Abstract Harmonic Analysis*", *Vol. 1*, *Springer-Verlag*, *1963*, *página 127*.

Consideremos o espaço $\mathbb{R}^2$ com a topologia na qual os conjuntos $\{(x_0,y) : \alpha < y < \beta\}$ com x_0 fixado, formam uma base de abertos. Esta é a topologia do produto $\mathbb{R}_d \times \mathbb{R}$, onde $\mathbb{R}_d$ denota o conjunto $\mathbb{R}$ munido da topologia discreta. Se f é uma função contínua, de suporte compacto, definida em $\mathbb{R}_d \times \mathbb{R}$, existe $\{x_1,\dots,x_m\} \subset \mathbb{R}$ tal que $f(\mathbb{R} - \{x_1,\dots,x_m\} \times \mathbb{R}) = 0$. Definimos em $C_{00}(\mathbb{R}_d \times \mathbb{R})$ o funcional $I(f) = \sum_{j=1}^{m} \int_{\mathbb{R}} f(x_j,y)\,dy$, e tomamos a medida μ proveniente deste funcional. Neste espaço de medida, o conjunto $\mathbb{R}_d \times \{0\}$ é mensurável, e é um átomo de medida infinita, pois, se $A \subset \mathbb{R}_d \times \{0\}$, temos $\mu(A) = 0$, se A é enumerável, e $\mu(A) = \infty$, se A é não enumerável.

(3.10) Lema. Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida não atômico, e seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números positivos tais que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \mu(X)$. Então existe uma sequência $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos mensuráveis de X, disjuntos dois a dois, tal que $\mu(F_n) = a_n$.

Demonstração. Veja [1], teorema (B.4). ∎

(3.11) <u>Teorema</u>. Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida não puramente atômico, e seja A uma função de Young. Se A não satisfaz a condição Δ_2 para valores grandes de u, existem funções f não nulas em L_A tais que

$$\int_X A\left(\frac{|f|}{p_A(f)}\right) d\mu < 1.$$

<u>Demonstração</u>. Como A não satisfaz a condição Δ_2 para valores grandes de u, para todo $k > 0$ e para todo $u_0 > 0$ tal que $A(u_0) < \infty$, existe $u_1 \geq u_0$ tal que $A(2u_1) > k\, A(u_1)$. É claro que podemos tomar $u_1 > u_0$, e u_0 tal que $A(u_0) > 1$. Fazendo $k = 2$, temos:

$$A(2u_1) > 2\, A(u_1). \tag{1}$$

Usando o teorema (3.3), temos, para cada $n \geq 2$, que dados $\ell_n = \frac{n+1}{n}$, $u_{n-1} > 0$ e $k_n = 2^n$, existe $u_n > u_{n-1}$, tal que

$$A\left(\frac{n+1}{n} u_n\right) > 2^n A(u_n). \tag{2}$$

Construimos assim, uma sequência de números $u_0 < u_1 < u_2 < \ldots$ tal que $A(u_n) > 1$, para todo $n \geq 1$, e de (1) e (2), temos:

$$A\left(\frac{n+1}{n} u_n\right) > 2^n A(u_n), \text{ para } n \geq 1. \tag{3}$$

Como $(X, \mathcal{M}, \mu)$ é não puramente atômico, existe $Y \in \mathcal{M}$ que não contém átomos e, podemos supor $0 < \mu(Y) < \infty$.

Logo o espaço $(Y, \mathcal{M}_Y, \mu_Y)$ é não atômico.

Para cada $n \geq 1$, seja $a_n = \dfrac{\mu(Y)}{2^{n+1}\, A(u_n)}$. É claro que $\sum_{n\geq 1} a_n \leq \mu(Y)$. Logo, pelo lema (3.10), existe uma sequência $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos mensuráveis de Y, disjuntos dois a dois, tais que, para cada $n \geq 1$, se tenha $\mu(F_n) = \dfrac{M}{2^{n+1}\, A(u_n)}$, onde $M = \min\{1, \mu(Y)\}$.

Seja $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n\, \xi_{F_n}(x)$, para todo $x \in X$. Temos:

$$\int_X A(|f|)\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{F_n} A(u_n)\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} A(u_n)\, \mu(F_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} .$$

Logo, $p_A(f) \leq 1$. Provemos que $p_A(f) = 1$. Para isto, seja $k < 1$. Existe $n_0 \geq 1$ tal que $\dfrac{1}{k} \geq \dfrac{n+1}{n}$, para todo $n \geq n_0$. Logo, usando (3), temos:

$$\int_X A\left(\frac{|f|}{k}\right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{F_n} A\left(\frac{u_n}{k}\right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} A\left(\frac{u_n}{k}\right) \mu(F_n)$$

$$\geq \sum_{n=n_0}^{\infty} A\left(\frac{n+1}{n} u_n\right) \mu(F_n) > \sum_{n=n_0}^{\infty} 2^n A(u_n) \frac{M}{2^{n+1}\, A(u_n)}$$

$$= \frac{M}{2} \sum_{n=n_0}^{\infty} 1 = \infty.$$

Assim, mostramos que $p_A(f) = \inf\{k \in]0,\infty[: \int_X A(\frac{|f|}{p_A(f)})\, d\mu \leq 1\} = 1$,

e temos $\int_X A(\frac{|f|}{p_A(f)})\, d\mu \leq \frac{1}{2} < 1$. ∎

(3.12) Teorema. Seja A uma função de Young generalizada não trivial. Suponhamos que A satisfaz a condição Δ_2 para $u \geq u_0$. Se $u_0 > 0$, suponhamos também $\mu(X)$ finito. Sejam f e f_n funções em L_A. São equivalentes:

(i) $\lim_{n\to\infty} p_A(f - f_n) = 0$;

(ii) $\lim_{n\to\infty} \int_X A(\frac{1}{m} |f_n - f|)\, d\mu = 0$ para algum $m > 0$;

(iii) $\lim_{n\to\infty} p_{A_0}(f - f_n) = 0$.

Demonstração. Veja [1], teoremas (5.11) e (5.14). ∎

(3.13) Teorema. Seja A como no teorema (3.12). Para toda função f em L_A existe uma sequência de funções simples $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em L_A tal que $|s_n| \leq |f|$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e $\lim_{n\to\infty} p_A(f - s_n) = 0$. Em particular, o conjunto das funções simples de L_A é denso em L_A.

Demosntração. Veja [1], teorema (5.15). ∎

(3.14) Teorema. Seja (X, M, μ) um espaço de medida não puramente atômico. Seja A uma função de Young generalizada não trivial, que não satisfaz nenhum tipo de condição Δ_2, com $A(u) < \infty$ para $0 \leq u < \infty$. Se $\mu(X) = \infty$, suponhamos também $a = 0$. Então $\sigma \cap L_A$ não é denso em L_A.

Demonstração. Veja [1], teorema (5.21). ∎

§4. Relações entre os espaços L_A e L_{M_A}.

Em [6], Krasnosel 'skii e Rutickii definiram como espaço de Orlicz o conjunto seguinte :

$$\{f : X \longrightarrow R : \int_X |fg| \, d\mu < \infty, \forall g \in L_{\overline{A}} \text{ com } p_{\overline{A}}(g) \leq 1\},$$

onde X é um subconjunto compacto de um espaço Euclidiano de dimensão finita, no qual se considera a medida de Lebesgue, A é uma função de Young, e $\overline{A}$ sua função conjugada.

Isto nos levou à seguinte pergunta: no caso de um espaço de medida arbitrário, se definirmos um espaço análogo, que relações ele teria com o espaço L_A definido no parágrafo 1? Neste parágrafo, tentamos dar uma resposta.

(4.1) Definição. Sejam A uma função de Young generalizada, e $\overline{A}$ a função conjugada de A. Chamamos de $L_{M_A}(X, M, \mu)$ o conjunto das funções $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ mensuráveis, tais que

$$\int_X |fg|\, d\mu < \infty \ , \ \forall g \in \mathcal{L}_{\overline{A}} \text{ com } p_{\overline{A}}(g) \le 1.$$

É fácil verificar que $\mathcal{L}_{M_A}(X, \mathcal{M}, \mu)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$.

Considerando, como no caso da definição de $\mathcal{L}_A$, a relação de equivalência $f \sim g \iff \mu(\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}) = 0$, obtemos o espaço vetorial quociente de $\mathcal{L}_{M_A}(X, \mathcal{M}, \mu)$ pelo espaço formado pelas funções μ-nulas. Este novo espaço será, por abuso de notação, denotado ainda por $\mathcal{L}_{M_A}(X, \mathcal{M}, \mu)$, ou simplesmente $\mathcal{L}_{M_A}$. Denotaremos ainda da mesma maneira uma classe de equivalência de $\mathcal{L}_{M_A}$, ou uma função desta classe.

(4.2) <u>Exemplos</u>.

(i) Se $A(u) = 0$ para todo u, então $\overline{A}(u) = \infty \cdot \xi_{]0,\infty[}(u)$.

É fácil ver que $\mathcal{L}_{\overline{A}} = \{0\}$ e que $\mathcal{L}_A$ é o conjunto das funções mensuráveis. Então, é claro que neste caso $\mathcal{L}_{M_A} = \mathcal{L}_A$.

(ii) Se $A(u) = \infty \cdot \xi_{]0,\infty[}(u)$, então $\overline{A}(u) = 0$ para todo u. Temos:

$$\mathcal{L}_{M_A} = \{f : X \longrightarrow \mathbb{C} \ / \int_X |fg|\, d\mu < \infty, \ \forall g \text{ mensurável}\}.$$

Veremos em (4.8) que para certos espaços de medida vale

$\mathcal{L}_A \underset{\neq}{\subset} \mathcal{L}_{M_A}$.

De (i) e (ii) concluimos que se A é uma função de Young generalizada trivial, temos $\mathcal{L}_A \subset \mathcal{L}_{M_A}$.

(iii) Denotemos, para $1 \leq p \leq \infty$, o seguinte:

$$\mathcal{L}_p = \{f : X \longrightarrow \mathbb{C} \,/\, \int_X M_p(\alpha|f|)\, d\mu < \infty,$$

e

$$\mathcal{L}_{M_p} = \{f : X \longrightarrow \mathbb{C} \,/\, \int_X |fg|\, d\mu < \infty,\ \forall g \in \mathcal{L}_q \text{ com } \|g\|_q \leq 1\},$$

onde $q = \frac{1}{p-1}$ se $1 < p < \infty$; $q = \infty$ se $p = 1$, e $q = 1$ se $p = \infty$.

Verifiquemos que $\mathcal{L}_p \subset \mathcal{L}_{M_p}$ para $1 \leq p \leq \infty$. A inclusão contrária, em geral é falsa.

Se $p = 1$, temos $M_1(u) = u$ e $\overline{M}_1(u) = \infty \,.\, \xi_{]1,\infty[}(u)$.

Então,

$$\mathcal{L}_{M_1} = \{f : X \longrightarrow \mathbb{C} \,/\, \int_X |fg|\, d\mu < \infty,\ \forall g \in \mathcal{L}_\infty \text{ com } \|g\|_\infty \leq 1\}.$$

Se $f \in \mathcal{L}_1$ e $|g| \leq 1$, temos $\int_X |fg|\, d\mu \leq \int_X |f|\, d\mu < \infty$.

Logo, $\mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_{M_1}$.

Se $p = \infty$, temos $M_\infty(u) = \infty \,.\, \xi_{]1,\infty[}(u)$ e $\overline{M}_\infty(u) = M_1(u)$.

Assim,

$$\mathcal{L}_{M_\infty} = \{f : X \longrightarrow \mathbb{C} \ / \int_X |fg| \, d\mu \ , \ \forall g \in \mathcal{L}_1 \text{ com } \|g\|_1 \leq 1\}$$

É fácil ver, então, que $\mathcal{L}_\infty \subset \mathcal{L}_{M_\infty}$.

Seja $1 < p < \infty$, e seja $M_p(u) = u^p$. Então $\overline{M}_p(u) = M_q(u)$. Pela desigualdade de Hölder (2.18), é fácil ver que $\mathcal{L}_p \subset \mathcal{L}_{M_p}$. Em [4], (15.14) encontra-se o seguinte resultado: " Seja $1 < p < \infty$, seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida, e suponha que todo conjunto A em $\mathcal{M}$ com $\mu(A) = \infty$ contém um subconjunto B em $\mathcal{M}$ para o qual $0 < \mu(B) < \infty$. Seja f uma função definida em X, mensurável, tal que

(i) $fg \in \mathcal{L}_1(X, \mathcal{M}, \mu)$, para todo $g \in \mathcal{L}_p(X, \mathcal{M}, \mu)$.

Então f está em $\mathcal{L}_q(X, \mathcal{M}, \mu)$."

Este resultado é um caso particular do teorema (4.13) abaixo, que dá condições suficientes para que $\mathcal{L}_{M_A} = \mathcal{L}_A$.

No que segue, a menos da observação (4.8), consideraremos apenas funções de Young generalizadas não triviais.

(4.3) <u>Teorema</u>. Seja A uma função de Young generalizada. Então $\mathcal{L}_A \subset \mathcal{L}_{M_A}$.

Demonstração. Seja $f \in L_A$. Então $p_A(f) < \infty$, conforme observamos no parágrafo 2. Logo, se g é uma função qualquer de $L_{\overline{A}}$ com $p_{\overline{A}}(g) \leq 1$, temos, pela desigualdade de Hölder (2.18):

$$\int_X |fg| \, d\mu \leq 2p_A(f) \, . \, p_{\overline{A}}(g) \leq 2p_A(f) < \infty,$$

e, portanto, f pertence a L_{M_A}. ∎

Procuraremos, a seguir, saber sob que condições vale a igualdade $L_A = L_{M_A}$.

(4.4) Definição. Seja $f \in L_{M_A}$. Definimos

$$N_A(f) = \sup\{ \int_X |fg| \, d\mu \, : \, g \in L_{\overline{A}} \text{ com } p_{\overline{A}}(g) \leq 1\}.$$

(4.5) Proposição. Se $f \in L_{M_A}$, então $N_A(f) < \infty$.

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que exista uma função f_0 em L_{M_A}, e uma sequência de funções $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$, com $h_n \in L_{\overline{A}}$ e $p_{\overline{A}}(h_n) \leq 1$, para todo n, tais que

$$\int_X |f_0 \, h_n| \, d\mu > 2^n, \text{ para } n = 1,2,\ldots$$

Consideremos as seguintes funções:

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} |h_k(x)|, \text{ para } n = 1,2,\ldots .$$

Como $\overline{A}$ é função de Young (por(2.16)), temos, por (1.3.iii), que $\overline{A}$ é convexa, e, portanto vale:

$$\int_X \overline{A}(|g_n|)d\mu \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \int_X \overline{A}(|h_k(x)|)d\mu \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k},$$

pois, como $p_{\overline{A}}(h_k) \leq 1$, a integral $\int_X \overline{A}(|h_k|)d\mu \leq 1$, por (2.3.v). Portanto, para todo n em $\mathbb{N}$, temos $\int_X \overline{A}(|g_n|)d\mu < 1$ e $p_{\overline{A}}(g_n) \leq 1$.

Por outro lado,

$$\int_X |f_0 g_n| d\mu = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \int_X |f_0 h_k| d\mu > \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \cdot 2^k = n.$$

Seja $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} |h_k(x)|$, e seja H(x) dada por:

$$H(x) = \begin{cases} \overline{A}(g(x)), & \text{se } g(x) < \infty; \\ \infty, & \text{se } g(x) = \infty. \end{cases}$$

É fácil verificar que $H(x) = \lim_{n\to\infty} \overline{A}(g_n(x))$, e que a sequência de funções $\overline{A}(g_n(x))$ é monótona crescente. Portanto, pelo teorema da convergência monótona, temos:

$$\int_X H(x)d\mu(x) = \int_X \lim_{n\to\infty} \overline{A}(g_n(x))d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int_X \overline{A}(g_n(x))d\mu(x) \leq 1.$$

Logo, $H \in L_1$, e portanto, H é finita q.s. Assim, mudando H num conjunto de medida μ-nula, temos

$$\int_X \overline{A}(g(x))d\mu(x) = \int_X H(x)d\mu(x) \leq 1,$$

o que significa que $g \in L_{\overline{A}}$ e $p_{\overline{A}}(g) \leq 1$.

Mas, a sequência de funções $|f_0 g_n|$, pertencentes a L_1, converge para $|f_0 g|$ para quase todo x, e usando novamente o teorema da convergência monótona, temos:

$$\int_X |f_0 g|d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X |f_0 g_n|d\mu \geq \lim_{n\to\infty} n = \infty,$$

contradizendo o fato de f_0 pertencer a L_{M_A}. ∎

(4.6) Proposição. A função $N_A : L_{M_A} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ é uma semi norma em L_{M_A}.

Demonstração. A verificação é muito fácil. ∎

(4.7) Proposição. Seja E um átomo de medida finita, e f uma função mensurável definida em X. Então existe um subconjunto $F \subset E$ com $\mu(F) = \mu(E)$, e um número complexo z_0 tal que $f(x) = z_0$, para todo x em F.

Demonstração. Consideremos $f(x) = g(x) + ih(x)$, onde g é a parte real de f e h é a parte imaginária. Então a imagem de g está contida em $\mathbb{R}$, bem como a de h. Temos:

$$\mu(E) = \mu(\bigcup_{n=\infty}^{\infty} g^{-1}(]n,n+1])) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mu(g^{-1}(]n,n+1])).$$

Como E é um átomo, existe um único $n_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $\mu(E)= \mu(g^{-1}(]n_0,n_0+1]))$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $n_0= 0$, ou seja, $\mu(g^{-1}(]0,1]))= \mu(E)$. Então $\mu(g^{-1}([0,1]))= \mu(E)$, pois $\mu(g^{-1}(]-1,0]))= 0$, e, portanto, $\mu(g^{-1}(\{0\}))= 0$. Podemos ainda escrever

$$\mu(E)= \mu(g^{-1}([0,\tfrac{1}{2}])) + \mu(g^{-1}(]\tfrac{1}{2},1])).$$

Novamente, como E é átomo, uma das parcelas acima é zero, e a outra é $\mu(E)$. Admitamos que $\mu(E)= \mu(g^{-1}(]\frac{1}{2},1]))$. Então, $\mu(E)= \mu(g^{-1}([\frac{1}{2},1]))$, pois $\mu(\{\frac{1}{2}\})= 0$.

Separando sucessivamente o conjunto de medida igual a $\mu(E)$ em duas partes, obteremos uma sequência de intervalos fechados, encaixantes, de comprimento $\frac{1}{2^n}$, tais que $\mu(g^{-1}(I_n))= \mu(E)$. Então $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n= \{x_0\}$ e temos

$$\mu(g^{-1}(\{x_0\}))= \lim_{n\to\infty} \mu(g^{-1}(I_n))= \mu(E).$$

Fazendo construção análoga para a função h, veremos que existe y_0 tal que $\mu(h^{-1}(\{y_0\}))= \mu(E)$.

Logo, $f(x)= x_0 + iy_0= z_0$ para quase todo x em E, isto é, existe $F \subset E$ tal que $\mu(F)= \mu(E)$ e $f(x)= z_0$ para todo x em F. ∎

(4.8) <u>Observação</u>. Estamos agora aptos a exibir um exemplo de função f em L_A que não está em L_{M_A}, no caso $A(u)= \infty \cdot \xi_{]0,\infty[}(u)$, conforme anunciado em (4.2.ii).

Seja E um átomo, com $0 < \mu(E) < \infty$, e consideremos a função $f= \xi_E$. Toda função g mensurável tem sua restrição a E igual a uma constante $z_0 \in \mathbb{C}$. Logo, temos:

$$\int_X |fg|\, d\mu= \int_E |z_0|\, d\mu= |z_0|\mu(E) < \infty.$$

portanto, $f= \xi_E$ pertence a L_{M_A}, embora não pertença a L_A.

(4.9) <u>Teorema</u>. Seja (X, M, μ) um espaço de medida que contém um átomo E de medida infinita. Sejam A uma função de Young generalizada, $\overline{A}$ sua função conjugada, e suponhamos que $\overline{a}= \sup\{u : \overline{A}(u)= 0\}= 0$. Então valem:

(i) $\xi_E \in L_{M_A}$ e $N_A(\xi_E)= 0$;

(ii) se $a= \sup\{u : A(u)= 0\}= 0$, então $\xi_E \notin L_A$.

<u>Demonstração</u>. Seja $g \in L_{\overline{A}}$ com $p_{\overline{A}}(g) \leq 1$, e suponhamos que a restrição de g ao conjunto E não é zero. Então, se $E_n= \{x \in E : |g(x)| \geq \frac{1}{n}\}$, para $n \in \mathbb{N}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(E_{n_0}) \neq 0$. Neste caso, como E é um átomo, e $E_{n_0} \subset E$, devemos ter $\mu(E_{n_0})= \infty$. Logo, temos:

$$1 \geq \int_X \overline{A}(|g|)d\mu \geq \int_{E_{n_0}} \overline{A}(|g|)d\mu \geq \overline{A}(\frac{1}{n_0}) \cdot \mu(E_{n_0}) = \infty,$$

pois $\overline{A}(\frac{1}{n_0}) > 0$, já que $\overline{a} = 0$.

Concluimos, portanto, que a restrição de g a E é zero. Assim, temos:

$$\int_X |\xi_E\ g|\ d\mu = \int_E |g|\ d\mu = 0,$$

mostrando que $\xi_E \in L_{M_A}$ e que $N_A(\xi_E) = 0$.

Por outro lado, se a= 0, temos $A(\alpha) > 0$ para todo $\alpha > 0$, e, portanto,

$$\int_X A(\alpha\ \xi_E)\ d\mu = \int_E A(\alpha)\ d\mu = A(\alpha)\ \mu(E) = \infty,$$

o que mostra que $\xi_E \notin L_A$. ∎

Com o teorema acima verificamos que N_A nem sempre é uma norma em L_{M_A}, e que L_A pode estar propriamente contido em L_{M_A}.

(4.10) Teorema. Seja A uma função de Young generalizada. Seja a= sup{u : A(u)= 0}. São equivalentes:

(i) ou $(X, \mathcal{M}, \mu)$ não contém átomos de medida infinita, ou a= 0;

(ii) N_A é uma norma em L_A.

Demonstração. Observemos que se E é um átomo de medida infinita que está contido no suporte de uma função h em L_A, então $a > 0$. De fato, para cada $n \geq 1$, tomemos $E_n = \{x \in E : |h(x)| > \frac{1}{n}\}$. Como h é não nula em E, existe n_0 tal $\mu(E_{n_0}) > 0$. Então, $\mu(E_{n_0}) = \infty$, pois E é átomo. Temos:

$$1 \geq \int_X A(\frac{|h|}{p_A(h)})\, d\mu \geq \int_{E_{n_0}} A(\frac{|h|}{p_A(h)})\, d\mu \geq A(\frac{1}{n_0\, p_A(h)}) \cdot \mu(E_{n_0}).$$

Então $A(\frac{1}{n_0\, p_A(h)}) = 0$, e portanto, $a > 0$.

Para o resto da demonstração, veja (4.6) em [1]. ∎

(4.11) <u>Teorema</u>. Suponha que (X, M, μ) não contém átomos de medida infinita, ou que $a = 0$. Então as funções N_A e p_{A_0} são normas equivalentes em L_A. Precisamente, temos:

(i) $p_{A_0}(f) \leq N_A(f) \leq 4p_{A_0}(f)$, para todo $f \in L_A$;

(ii) $\frac{1}{2}\, p_A(f) \leq N_A(f) \leq 4p_A(f)$, para todo $f \in L_A$.

<u>Demonstração</u>. Veja [1], teorema (4.17). ∎

(4.12) <u>Teorema</u>. Seja f pertencente a L_{M_A} e seja $Y = \{x \in X : f(x) \neq 0\}$. Se M_Y não contém átomos de medida infinita, então f pertence a L_A, e, além disto, valem (i) e (ii) do teorema anterior.

<u>Demonstração</u>. Veja [1], teorema (4.16). ∎

(4.13) <u>Teorema</u>. Se $(X, \mathcal{M}, \mu)$ é um espaço de medida que não contém átomos de medida infinita, então $\mathcal{L}_A = \mathcal{L}_{M_A}$.

<u>Demonstração</u>. Segue-se de (4.3) e (4.12). ∎

(4.14) <u>Corolário</u>. Se $(X, \mathcal{M}, \mu)$ é um espaço de medida σ-finita, então $\mathcal{L}_A = \mathcal{L}_{M_A}$.

CAPÍTULO II

§5. Funcionais Lineares Contínuos em Espaços de Birnbaum - Orlicz.

Neste parágrafo iremos supor, sem perda de generalidade conforme foi observado em (2.8), que as funções A que determinam o espaço $L_A(X, M, \mu)$ são funções de Young. No espaço $L_A(X, M, \mu)$ usaremos mais frequentemente a norma p_A indicada por $\| \cdot \|_A$.

Nosso objetivo é estudar o espaço dos funcionais lineares contínuos definidos em L_A. Veremos que se a função A satisfizer uma condição Δ_2 adequada, este dual é isometricamente isomorfo a $L_{\overline{A}}$.

(5.1) <u>Proposição</u>. Seja L_A um espaço de Birnbaum-Orlicz, seja $\overline{A}$ a função conjugada de A, e seja g pertencente a $L_{\overline{A}}$. A igualdade

$$\text{(i)} \quad F_g(f) = \int_X fg \, d\mu \ , \ \forall f \in L_A$$

define um funcional linear contínuo em L_A, e temos a seguinte igualdade:

$$\text{(ii)} \quad \| F_g \| = N_{\overline{A}}(g).$$

<u>Demonstração</u>. Lembrando a desigualdade de Hölder (2.18), temos:

$$\left| F_g(f) \right| = \left| \int_X fg \, d\mu \right| \leq 2\, p_A(f)\, p_{\overline{A}}(g) < \infty, \quad \forall f \in L_A \quad \text{e}$$

$\forall g \in L_{\overline{A}}$.

Portanto, $F_g(f) \in \mathbb{C}$ para todo $f \in L_A$.

É claro que F_g é linear.

Por outro lado, temos,

$$\left\{ \left| \int_X fg \, d\mu \right| : f \in L_A,\ \|f\|_A \leq 1 \right\} = \left\{ \int_X |fg| \, d\mu : f \in L_A\ p_{\overline{\overline{A}}}(f) \leq 1 \right\}$$

onde aqui usamos o fato que se A é função de Young então $\overline{\overline{A}} = A$, e portanto, $\|f\|_A = p_{\overline{\overline{A}}}(f)$, $\forall f \in L_A$ (veja [1], teorema (2.20)). Logo, tomando o supremo dos dois conjuntos acima, temos $\| F_g \| = N_{\overline{A}}(g)$.

Como, por (4.5), $N_{\overline{A}}(g)$ é finito para todo g de $L_{\overline{A}}$, concluimos que F_g é um funcional contínuo. ∎

Da proposição acima concluimos que $L_{\overline{A}}$ pode ser posto em correspondência biunívoca com um subespaço vetorial do espaço dos funcionais lineares contínuos definidos em L_A. Veremos em seguida, em que condições existe isomorfismo entre os dois espaços, isto é, em que condições todo elemento ϕ do dual de L_A é da forma F_g, para alguma função g de $L_{\overline{A}}$.

(5.2) Notação. Indicaremos por σ o conjunto das funções mensuráveis $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ que são simples. Quando for necessário, usaremos sua (única) representação na forma

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i \, \xi_{E_i} ,$$

onde $a_i \neq a_j$ para $i \neq j$, e $E_i = f^{-1}(a_i)$.

Observamos que, no caso em que $\mu(X) < \infty$, temos $\sigma \subset L_A$, para qualquer espaço $L_A(X, M, \mu)$ não trivial.

(5.3) Lema: Sejam (X, M, μ) um espaço de medida finita e A uma função de Young generalizada. Se ϕ é um funcional linear contínuo definido em L_A, existe uma função g em $L_{\overline{A}}$, tal que:

$$\text{(i)} \quad \phi(f) = \int_X fg \, d\mu \ , \ \forall f \in \sigma .$$

Esta função g é única, no sentido que, se h for outra função satisfazendo (i), então $g = h$ μ-q.s.

Demonstração. Seja $\phi : L_A \longrightarrow \mathbb{C}$ um funcional linear contínuo qualquer.

A igualdade $\nu_1(E) = \operatorname{Re} \phi(\xi_E)$ define uma função $\nu_1 : M \longrightarrow \mathbb{R}$. Verifiquemos que ν_1 é uma medida com sinal em (X, M) (para a definição veja, por exemplo [3], (6.1.1)).

(a) Temos $\nu_1(\emptyset) = \text{Re}\ \phi(\xi_\emptyset) = \text{Re}\ \phi(0) = 0$, pois ϕ é linear.

(b) É claro, da definição de ν_1, que, para todo conjunto E de M, temos:

$$-\infty < \nu_1(E) < +\infty.$$

(c) Seja $(E_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ uma seqüência de conjuntos mensuráveis, disjuntos dois a dois. Então:

$$\nu_1\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) = \text{Re}\ \phi\Big(\xi_{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n}\Big) = \text{Re}\ \phi\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \xi_{E_n}\Big)$$

$$= \text{Re}\ \phi\Big(\lim_{r\to\infty} \sum_{n=1}^{r} \xi_{E_n}\Big)$$

$$\overset{(*)}{=} \lim_{r\to\infty} \text{Re}\ \phi\Big(\sum_{n=1}^{r} \xi_{E_n}\Big)$$

$$= \lim_{r\to\infty} \sum_{n=1}^{r} \text{Re}\ \phi(\xi_{E_n})$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \text{Re}\ \phi(\xi_{E_n})$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \nu_1(E_n).$$

Na igualdade (*) usamos o fato de Re ϕ ser um funcional linear contínuo sobre $\mathbb{R}$.

De (a), (b) e (c) concluimos que ν_1 é, de fato, uma medida com sinal.

Provemos que ν_1 é absolutamente contínua em relação a μ.

Seja $E \in \mathcal{M}$, tal que $\mu(E) = 0$. Temos:

$$|\nu_1(E)| = |\mathrm{Re}\ \phi(\xi_E)| \leq |\phi(\xi_E)| \leq \|\phi\| \cdot \|\xi_E\|_A = 0.$$

Segue-se portanto, que se $\mu(E) = 0$, então $\nu_1(E) = 0$, ou seja, ν_1 é absolutamente contínua em relação a μ.

Portanto, pelo teorema de Radon-Nikodym (veja por exemplo, [3], corolário 6.3.2), existe uma função g_1 definida em X, finita, tal que

$$\nu_1(E) = \int_E g_1\, d\mu \quad , \forall E \in \mathcal{M} , \tag{1}$$

e, que, se h_1 é uma outra função com a mesma propriedade, então $g_1 = h_1$ μ-q.s.

A igualdade (1) pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\mathrm{Re}\ \phi(\xi_E) = \nu_1(E) = \int_E g_1\, d\mu = \int_X g_1\, \xi_E\, d\mu \quad , \forall E \in \mathcal{M}.$$

Conseguimos, portanto, representar $\mathrm{Re}\ \phi(\xi_E)$ por uma integral. É fácil verificar que se f é uma função real simples, então

$$\mathrm{Re}\ \phi(f) = \int_X f g_1\, d\mu . \tag{2}$$

Provemos agora que g_1 pertence a $L_{\overline{A}}$.

Lembramos que, como $\mu(X) < \infty$, o espaço $L_{\overline{A}}$ coincide com $L_{M_{\overline{A}}}$, conforme o corolário (4.14).

Seja, então, f uma função de $\mathcal{L}_A$ com $p_A(f) \leq 1$. Pelo teorema (11.35) em [4], existe uma seqüência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funções simples, reais, e positivas, tal que $f_n \uparrow |f|$ μ-q.s. com $0 \leq f_n(x) \leq |f(x)|$, para todo $x \in X$.

Por (2.10), temos $\|f_n\|_A \leq \|f\|_A \leq 1$.

Como a seqüência $f_n|g_1|$ converge para $|f\, g_1|$, usando o lema de Fatou, temos:

$$\int_X |fg_1|\,d\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} f_n|g_1|\,d\mu \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \int_X f_n|g_1|\,d\mu. \tag{3}$$

Sendo g_1 uma função real, $\operatorname{sgn}(g_1)$ é uma função simples, e, usando (2), temos:

$$\int_X f_n|g_1|\,d\mu = \int_X f_n \operatorname{sgn}(g_1).g_1\,d\mu = \operatorname{Re}\phi(f_n \operatorname{sgn}(g_1))$$

$$\leq \left|\operatorname{Re}\phi(f_n \operatorname{sgn}(g_1))\right| \leq \left|\phi(f_n \operatorname{sgn}(g_1))\right|$$

$$\leq \|\phi\|.\|f_n \operatorname{sgn}(g_1)\|_A \leq \|\phi\|.\|f_n\|_A \leq \|\phi\|. \tag{4}$$

Das desigualdades (3) e (4), temos:

$$\int_X |fg_1|\,d\mu \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \int_X f_n|g_1|\,d\mu \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \|\phi\| = \|\phi\| < \infty.$$

Logo, g_1 pertence a $\mathcal{L}_{\overline{A}}$.

Definindo, analogamente, $\nu_2 : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$, por $\nu_2(E) = \operatorname{Im}\phi(\xi_E)$, para todo E de $\mathcal{M}$, teremos, novamente uma medida com sinal, absolutamente contínua em relação a μ. Logo, pelo teorema de Radon-Nikodym, existe uma função g_2

finita, tal que

$$\operatorname{Im} \phi(\xi_E) = \int_X \xi_E \, g_2 \, d\mu, \ \forall E \in \mathcal{M},$$

e se existir uma outra função h_2 com a mesma propriedade, teremos $g_2 = h_2$ μ-q.s.

Além disto, $g_2 \in L_{\overline{A}}$.

Sejam, agora, $\nu = \nu_1 + i\nu_2$ e $g = g_1 + ig_2$. Para todo $E \in \mathcal{M}$, temos:

$$\phi(\xi_E) = \operatorname{Re} \phi(\xi_E) + i \operatorname{Im}\phi(\xi_E) = \int_X \xi_E g_1 \, d\mu + i \int_X \xi_E g_2 \, d\mu$$

$$= \int_X \xi_E \, (g_1 + i\, g_2) \, d\mu = \int_X \xi_E g \, d\mu.$$

Finalmente, se $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ é uma função simples, ou seja, $f = \sum_{k=1}^{n} c_k \, \xi_{E_k}$ com $E_k \cap E_j = \emptyset$ se $k \neq j$, e $c_k \in \mathbb{C}$, para $k = 1, 2, \ldots, n$, temos:

$$\phi(f) = \phi\left(\sum_{k=1}^{n} c_k \, \xi_{E_k}\right) = \sum_{k=1}^{n} c_k \, \phi(\xi_{E_k})$$

$$= \sum_{k=1}^{n} c_k \int_X \xi_{E_k} \, g \, d\mu = \int_X \left(\sum_{k=1}^{n} c_k \, \xi_{E_k}\right) g \, d\mu$$

$$= \int_X f \, g \, d\mu.$$

Como g_1 e g_2 pertencem a $L_{\overline{A}}$, que é uma espaço vetorial, g pertence também a $L_{\overline{A}}$. Além disto, se h for outra função com as mesmas propriedades que g, teremos

$g = h$ μ-q.s. pois g_1 e g_2 são únicas, a menos de um conjunto de medida μ-nula. ∎

(5.4) <u>Teorema</u>. Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida finita, e A uma função de Young generalizada, satisfazendo a condição Δ_2 para valores grandes de u. Se ϕ é um funcional linear contínuo definido em L_A, então, existe g em $L_{\bar{A}}$ tal que

$$\text{(i)}\ \phi(f) = \int_X f\, g\, d\mu\ , \ \forall f \in L_A\ .$$

Esta função g é única, no seguinte sentido: se h for outra função satisfazendo (i), então $g = h$ μ-q.s.

<u>Demonstração</u>. Seja $f \in L_A$. Como A satisfaz a condição Δ_2 para u grande, pelo teorema (3.13), existe uma seqüência (s_n) de funções simples, com $|s_n| \leq |f|$, e $\lim_{n\to\infty} \|s_n - f\|_A = 0$. Logo, existe uma subseqüência (s_{n_k}) que converge μ-q.s. para f, e, é claro que $\lim_{k\to\infty} \|s_{n_k} - f\|_A = 0$.

Sendo ϕ contínuo, temos:

$$\phi(f) = \phi(\lim_{k\to\infty} s_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} \phi(s_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} \int_X s_{n_k}\, g\, d\mu\ , \qquad (1)$$

onde g é a função de $L_{\bar{A}}$ obtida no lema (5.3).

As funções $s_{n_k} g$ pertencem a L_1, pois, como $|s_{n_k} g| \leq |fg|$ para todo n, temos:

$$\int_X |s_{n_k} g| \, d\mu \leq \int_X |fg| \, d\mu < \infty.$$

Pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue (veja, por exemplo, [4], teorema (12.30)), segue-se que:

$$\lim_{k\to\infty} \int_X s_{n_k} g \, d\mu = \int_X \lim_{k\to\infty} s_{n_k} g \, d\mu = \int_X fg \, d\mu. \qquad (2)$$

De (1) e (2), segue-se que

$$\phi(f) = \int_X fg \, d\mu , \qquad \forall f \in L_A.$$

A unicidade de g, a menos de um conjunto de medida μ-nula, é garantida pelo lema (5.3) anterior. ∎

(5.5) <u>Teorema</u>. Seja (X, M, μ) um espaço de medida σ-finita, e A uma função de Young generalizada satisfazendo a condição Δ_2 para todo u. Se ϕ é um funcional linear contínuo definido em L_A, então existe uma função g em $L_{\overline{A}}$ tal que:

$$\text{(i)} \quad \phi(f) = \int_X fg \, d\mu , \quad \forall f \in L_A.$$

Esta função g é única no seguinte sentido: se h for outra função satisfazendo (i), então $g = h$ μ-q.s.

<u>Demonstração</u>. Seja $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de subconjuntos mensuráveis de X tais que $E_1 \subset E_2 \subset \ldots \subset E_n \subset \ldots$, com $\mu(E_n) < \infty$ para todo n e $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = X$.

É claro que, para qualquer função f pertencente a

$L_A(X, \mathcal{M}, \mu)$, e para cada n natural, a função $f\xi_{E_n}$ pertence a $L_A(E_n, \mathcal{M}_{E_n}, \mu_{E_n})$. Então, pelo teorema (5.4), existe uma função g_n em $L_{\overline{A}}(E_n, \mathcal{M}_{E_n}, \mu_{E_n})$ tal que

$$\phi(f\xi_{E_n}) = \int_{E_n} f\, g_n\, d\mu_{E_n} = \int_X f\, \xi_{E_n}\, g_n\, d\mu.$$

Seja $m \leq n$. Pela igualdade acima temos:

$$\phi(f\xi_{E_m}) = \int_X f\, \xi_{E_m}\, g_m\, d\mu \quad , \forall f \in L_A,$$

e

$$\phi(f\xi_{E_m}) = \int_X f\, \xi_{E_m}\, g_n\, d\mu \quad , \forall f \in L_A.$$

Logo $\int_{E_m} f(g_n - g_m)d\mu = 0$, para toda função f de L_A. Seja

$H = \{x \in E_m : g_m(x) - g_n(x) \neq 0\}$. Então,

$$0 = \int_{E_m} f(g_n - g_m)\, d\mu = \int_H f(g_n - g_m)\, d\mu \quad , \forall f \in L_A. \quad (1)$$

Em particular, seja $f_0 = \operatorname{sgn}(\overline{g_n} - \overline{g_m})$. Como $|f_0| = \xi_H \leq \xi_{E_m}$, temos

$$\int_X A(\alpha|f_0|)\, d\mu \leq \int_{E_m} A(\alpha)\, d\mu = A(\alpha).\mu(E_m) < \infty$$

para algum $\alpha > 0$, e, portanto, $f_0 \in L_A$. De (1) temos

$$0 = \int_H \operatorname{sgn}(\overline{g_n} - \overline{g_m}).(g_n - g_m)\, d\mu = \int_H |g_n - g_m|\, d\mu .$$

Como $|g_n - g_m| > 0$ em H, concluimos que $\mu(H) = 0$.

Deste modo, provamos que $\mu(\{x \in E_m : g_n(x) \neq g_m(x)\})=0$.

Podemos, então, supor que $g_n(x)= g_m(x)$ para todo x em E_m.

Consideremos agora as funções h_n, definidas em todo o conjunto X, da seguinte maneira:

$$h_n(x)= \begin{cases} g_n(x), & \text{se } x \in E_n; \\ 0, & \text{se } x \notin E_n; \end{cases}$$

e definimos $g(x)= \lim_{n\to\infty} h_n(x)$.

Provemos que $g \in L_{\overline{A}}(X, M, \mu)$.

Da definição de g, temos que $|h_n(x)| \uparrow |g(x)|$ para todo n. Portanto, $\frac{|h_n(x)|}{2\,||\phi||} \uparrow \frac{|g(x)|}{2\,||\phi||}$, para todo n.

Como a função $\overline{A}$ é contínua e não decrescente, temos $\overline{A}\left(\frac{|h_n(x)|}{2\,||\phi||}\right) \uparrow \overline{A}\left(\frac{|g(x)|}{2\,||\phi||}\right)$. Logo, pelo teorema da convergência monótona (veja, por exemplo, [4], (12.22)), temos:

$$\int_X \overline{A}\left(\frac{|g(x)|}{2\,||\phi||}\right) d\mu(x)= \lim_{n\to\infty} \int_X \overline{A}\left(\frac{|h_n(x)|}{2\,||\phi||}\right) d\mu(x).$$

Mas, por (4.11.ii) e (5.1.ii), temos

$$p_{\overline{A}}(h_n) \leq 2\, N_{\overline{A}}(h_n)= 2 \left\|\phi\right\|_{L_{\overline{A}}(E_n,\ M_{E_n},\ \mu_{E_n})} \leq 2||\phi||$$

e, portanto, por (2.3.v),

$$\int_X \overline{A}\left(\frac{|h_n(x)|}{2\,\|\phi\|}\right) d\mu(x) \le \int_X \overline{A}\left(\frac{|h_n(x)|}{p_{\overline{A}}(h_n)}\right) d\mu(x) \le 1,$$

o que significa que

$$\int_X \overline{A}\left(\frac{|g(x)|}{2\,\|\phi\|}\right) d\mu \le 1,$$

e, conseguentemente, $g \in L_{\overline{A}}(X, M, \mu)$.

Se provarmos que $f\,\xi_{E_n}$ converge para f na norma $\|\cdot\|_A$, teremos:

$$\phi(f) = \phi(\lim_{n\to\infty} f\,\xi_{E_n}) = \lim_{n\to\infty} \phi(f\,\xi_{E_n})$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_X f\,\xi_{E_n}\, g_n\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f\, h_n\, d\mu.$$

Como $g \in L_{\overline{A}}$, temos, pela desigualdade de Hölder (2.18) que $fg \in L_1(X, M, \mu)$, e, pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue,

$$\int_X fg\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f\, h_n\, d\mu .$$

Provemos, então, que $\lim_{n\to\infty} \|f - f\,\xi_{E_n}\|_A = 0$.

Como a função A satisfaz a condição Δ_2 para todo u, pelo teorema (3.12), basta-nos provar que $\lim_{n\to\infty} \int_X A(\frac{1}{k}\,|f - f\,\xi_{E_n}|)\, d\mu = 0$ para algum número k positivo. Seja $k = p_A(f)$. Sabemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x) - f(x)\,\xi_{E_n}(x)}{p_A(f)} = 0,$$

e, portanto,

$$\lim_{n\to\infty} A\left(\frac{|f(x) - f(x)\,\xi_{E_n}(x)|}{p_A(f)}\right) = 0.$$

Além disto, $A\left(\frac{|f - f\,\xi_{E_n}|}{p_A(f)}\right) \leq A\left(\frac{|f|}{p_A(f)}\right)$

e $A\left(\frac{|f|}{p_A(f)}\right) \in L_1$. Portanto, pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue, temos:

$$\lim_{n\to\infty} \int_X A\left(\frac{|f - f\,\xi_{E_n}|}{p_A(f)}\right) d\mu = 0.$$

A unicidade da função g, a menos de um conjunto de medida μ-nula, é conseqüência das unicidades das funções g_n, garantidas pelo teorema (5.4), e da unicidade do limite das g_n. ∎

Veremos, em seguida, que se $A \neq M_1$, a hipótese de (X, M, μ) ser um espaço de medida σ-finita pode ser trocada por outra que conforme o caso, possa ser mais útil.

Começamos por um lema que em si já é um resultado interessante.

(5.6) Lema. (Desigualdade de Markov). Seja A uma função de Young generalizada com $a = \sup\{u \in [0, \infty[: A(u) = 0\} = 0$. Se f é uma função mensurável, finita, definida em X, para todo $u_0 > 0$, temos:

$$\mu(\{x \in X : |f(x)| > u_0\}) \leq \frac{\int_X A(|f|)\, d\mu}{A(u_0)} .$$

Demonstração. Como A é não decrescente, e $a = 0$, temos: $0 < A(u_0) \leq A(u)$, $\forall u > u_0$, ou seja,

$$1 \leq \frac{A(u)}{A(u_0)}, \text{ para } u > u_0.$$

Sejam $F = \{x \in X : |f(x)| > u_0\}$, e $G = \{r \in \mathbb{R}^+ : r > u_0\}$.

Temos:

$$\mu(F) = \int_X \xi_F\, d\mu = \int_X (\xi_G \circ |f|)\, d\mu \leq \int_X \frac{A(|f|)}{A(u_0)}\, d\mu = \frac{1}{A(u_0)} \cdot \int_X A(|f|)\, d\mu .$$

∎

(5.7) Teorema. Seja (X, M, μ) um espaço de medida arbitrário, seja A uma função de Young satisfazendo a condição Δ_2 para todo u, tal que $\bar{a} = \sup\{u : \bar{A}(u) = 0\} = 0$, e seja $a = \sup\{u : A(u) = 0\}$. Nestas condições, se ϕ é um funcional linear contínuo definido em L_A, existe uma função g em $L_{\bar{A}}$ tal que

$$\text{(i) } \phi(f) = \int_X fg\, d\mu, \quad \forall f \in L_A.$$

Além disto, se existe $h \in L_{\bar{A}}$ satisfazendo (i), então $h = g$ μ-q.s.

Demonstração. Se $\phi = 0$, basta tomarmos $g = 0$. Suponhamos, portanto, $\|\phi\| \neq 0$.

Como ϕ é limitado, existe uma sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funções de L_A com $\|f_n\|_A \leq 1$, tal que

$$|\phi(f_n)| > \|\phi\| - \frac{\|\phi\|}{n} = \|\phi\|\left(1 - \frac{1}{n}\right), \quad n = 1,2,\ldots \qquad (1)$$

Para $m, n \in \mathbb{N}$, definimos os conjuntos

$$E_m^n = \{x \in X : |f_n(x)| > \frac{1}{m}\} .$$

Como $f_n \in L_A$ para todo n, existe $\alpha_n > 0$ tal que $\int_X A(\alpha_n |f_n|)\, d\mu < \infty$. Por (3.4) sabemos que $a = 0$, e portanto, podemos empregar o lema (5.6) para escrever:

$$\mu(E_m^n) \leq \frac{1}{A(\frac{\alpha_n}{m})} \cdot \int_X A(\alpha_n |f_n|)\, d\mu < \infty .$$

Seja $E = \bigcup_{m,n} E_m^n$. É fácil ver que

$$E = \{x \in X : \exists n \in \mathbb{N} \text{ tal que } |f_n(x)| > 0\}.$$

Se $x \in X - E$, então $f_n(x) = 0$ para todo n. Portanto, todas as funções f_n se anulam fora do conjunto E, que é σ-finito.

Se para todo f que pertence a L_A e se anula em E, provarmos que $\phi(f) = 0$, teremos o problema reduzido ao caso anterior, bastando, para isso, tomarmos o espaço $(E, \mathcal{M}_E, \mu_E)$.

Provemos, primeiramente, que se S é um subconjunto de $X - E$, com $0 < \mu(S) < \infty$, então $\phi(\xi_S) = 0$. Para isto, vamos mostrar que $|\phi(\xi_S)|$ é menor do que $\varepsilon\|\phi\|$ para qualquer $\varepsilon > 0$.

Para cada $n \geq 1$, seja $g_n = f_n \operatorname{sgn} \overline{\phi(f_n)}$. Temos:

$$\phi(g_n) = \phi(f_n) \,.\, \operatorname{sgn} \overline{\phi(f_n)} = |\phi(f_n)|, \tag{2}$$

e $\|g_n\|_A = \|f_n\|_A \leq 1$. Portanto, por (2.3.v),

$$\int_X A(|g_n|)\, d\mu \leq 1. \tag{3}$$

Por (2.24.i) em [1], temos que

$$\lim_{u \to 0^+} \frac{A(u)}{u} = \bar{a} \text{ , e, por hipótese, } \bar{a} = 0.$$

Logo, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $u_0 > 0$ tal que para todo $u \in]0, u_0]$, temos:

$$\frac{A(u)}{u} < \frac{\varepsilon}{\mu(S)} \,. \tag{4}$$

Para $u \in]0, u_0]$ fixado, consideremos a função $h(x) = \operatorname{sgn} \overline{\phi(u\xi_S)} \; u\xi_S(x)$.

Temos:

$$\phi(h) = \phi(u\xi_S) \,.\, \operatorname{sgn} \overline{\phi(u\xi_S)} = |\phi(u\xi_S)| \tag{5}$$

e, usando (2) e (5), vem que

$$\phi(g_n + h) = \phi(g_n) + \phi(h) = |\phi(f_n)| + |\phi(u\xi_S)| \geq 0.$$

Por outro lado, $||g_n + h||_A \leq 1 + u\varepsilon$, pois:

$$\int_X A\left(\frac{|g_n + h|}{1 + u\,\varepsilon}\right) d\mu = \int_E A\left(\frac{|g_n|}{1 + u\varepsilon}\right) d\mu + \int_S A\left(\frac{|h|}{1 + u\varepsilon}\right) d\mu$$

$$\leq \frac{1}{1 + u\varepsilon} \int_E A(|g_n|)\, d\mu + \frac{1}{1 + u\varepsilon} \int_S A(u)\, d\mu$$

$$\leq \frac{1}{1 + u\varepsilon} \cdot 1 + \frac{1}{1 + u\varepsilon} A(u) \cdot \mu(S)$$

$$< \frac{1}{1 + u\varepsilon} + \frac{u\,\varepsilon}{1 + u\varepsilon} = 1 ,$$

onde, para obtermos as duas últimas desigualdades, usamos (3) e (4) respectivamente.

Finalmente, lembrando (5), temos

$$|\phi(u\ \xi_S)| = \phi(h) = \phi(g_n + h) - \phi(g_n)$$

$$\leq |\phi(g_n + h)| - |\phi(f_n)|$$

$$\leq ||\phi|| \cdot ||g_n + h||_A - ||\phi|| \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

$$\leq ||\phi|| \left|1 + u\,\varepsilon - 1 + \frac{1}{n}\right|$$

$$= ||\phi|| \left(u\,\varepsilon + \frac{1}{n}\right).$$

Quando n tende a infinito, temos:

$$|\phi(u\xi_S)| \leq ||\phi||\, u\,\varepsilon ,$$

e, dividindo por u, temos:

$$|\phi(\xi_S)| \leq \|\phi\| \varepsilon .$$

Logo, $\phi(\xi_S) = 0$ para $S \subset X-E$, e é claro que se f é uma função simples, nula em E, também teremos $\phi(f) = 0$.

Tomemos agora, uma função f qualquer em L_A com suporte disjunto de E.

Pelo teorema (3.13), existe uma seqüência (s_n) de funções mensuráveis simples, definidas em X e que se anulam em E, com $\lim_{n\to\infty} \|f - s_n\|_A = 0$.

O fato de s_n se anular em E, nos dá, pelo que foi provado acima, $\phi(s_n) = 0$, e, como ϕ é contínuo, segue-se que

$$\phi(f) = \lim_{n\to\infty} \phi(s_n) = 0. \qquad \blacksquare$$

(5.8) <u>Observação</u>.

(i) Como a função $M_\infty(u) = \infty\, \xi_{]1,\infty[}(u)$ não satisfaz nenhum tipo de condição Δ_2, os teoremas (5.4), (5.5) e (5.7) não nos dizem qual é o dual de $L_\infty(X, M, \mu)$.

(ii) As hipóteses do teorema (5.7) também excluem o caso do dual de $L_1(X, M, \mu)$, pois a função $M_1(u) = u$ é tal que $a = \sup\{u : M_1(u) = 0\} = 0$, mas sua função conjugada, $M_\infty(u)$ tem $\bar{a} = \sup\{u : M_\infty(u) = 0\} = 1$.

Indicamos [4], teoremas (20.33) a (20.35) para o estudo do dual de $L_\infty(X, M,\mu)$, e teorema (20.19) para o dual de $L_1(X, M,\mu)$. Ressaltamos que o espaço $L_\infty(X, M,\mu)$ definido em [4] não coincide, para espaços de medida arbitrários, com o definido neste trabalho.

(5.9) Teorema. Seja (X, M,μ) um espaço de medida arbitrário, e seja A como em (5.7). Para cada $g \in L_{\bar{A}}$, consideremos o funcional $F_g \in L_A{}^*$ definido em (5.1).

A aplicação T dada por

$$T(g) = F_g$$

é uma transformação linear de $L_{\bar{A}}$ sobre $L_A{}^*$, que preserva a norma. Assim, $L_{\bar{A}}$ é isomorfo a $L_A{}^*$.

Demonstração. Pela proposição (5.1), sabemos que a aplicação T preserva a norma. É fácil verificar que T é linear. Portanto, T é injetora. Finalmente, por (5.7), temos que T é sobrejetora. ∎

(5.10) Corolário. Seja (X, M,μ) um espaço de medida arbitrário. Seja A uma função de Young tal que A e $\bar{A}$ satisfazem a condição Δ_2 para todo u. Então L_A e $L_{\bar{A}}$ são reflexivos.

Demonstração. Usando (3.4), temos que a hipótese implica que $\sup\{u : A(u)= 0\}= 0= \sup\{u : \bar{A}(u)= 0\}$. Além disto, por (2.20) em [1], sabemos que $\bar{\bar{A}}= A$. Portanto, usando o teorema (5.7) para L_A e $L_{\bar{A}}$ temos:

$$L_A^{**} \cong L_{\bar{A}}^{\;*} \cong L_{\bar{\bar{A}}} = L_A,$$

e analogamente, $L_{\bar{A}}^{**} \cong L_{\bar{A}}$. ∎

Observamos que se $\mu(x) < \infty$, podemos supor apenas que A e $\bar{A}$ satisfazem a condição Δ_2 para valores grandes de u, e usando o teorema (5.4) vemos que L_A e $L_{\bar{A}}$ são reflexivos.

Veremos a seguir que a condição Δ_2 é necessária para que L_A^* seja isomorfo a $L_{\bar{A}}$. Veremos também uma recíproca para o corolário (5.10) acima.

(5.11) Teorema. Seja (X, M, μ) um espaço de medida não puramente atômico. Seja A uma função de Young tal que $A(u) < \infty$ para $0 \leq u < \infty$, e A não satisfaz a condição Δ_2 para $u \geq u_0$, onde $u_0 = 0$ se $\mu(x) = \infty$. Suponhamos também que $A(u) > 0$ para $u > 0$, se $\mu(x) = \infty$. Então, existe um funcional linear limitado ϕ em L_A^* que não pode ser representado na forma

$$\text{(i)} \quad \phi(f) = \int_X fg \, d\mu \,,$$

para nenhuma função g mensurável.

Demonstração. Suponhamos primeiramente que $\mu(x) < \infty$. Pelo teorema (3.14) sabemos que $\sigma \cap L_A = \sigma$ não é denso em L_A. Logo, existe uma função f_0 em L_A tal que $f_0 \notin \bar{\sigma}$. Como $\bar{\sigma}$ é um subespaço vetorial fechado de L_A, usamos o teorema de Hahn - Banach (veja por exemplo, [4], teorema (14.13)), e concluimos que existe um funcional linear contínuo ϕ definido em L_A tal que $\phi(f_0)= 1$ e $\phi(\bar{\sigma})= \{0\}$, com $\|\phi\| > 0$.

Suponhamos, por absurdo, que ϕ possa ser representado na forma (i), para alguma função g mensurável. Como $|\phi(f)| < \infty$ para todo f em L_A, temos que $g \in L_{M_{\bar{A}}}$ que, por (4.14), coincide com L_A, pois $\mu(x) < \infty$.

Seja $h= \operatorname{sgn} \bar{g}$, e seja $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de funções simples, mensuráveis, que converge uniformemente para h(conforme (11.35) em [4]). Como h e h_n são funções limitadas, temos que h e h_n pertencem a L_A, para cada n. Além disto, usando (3.32) em [1], temos que $\lim_{n\to\infty} \|h - h_n\|_A= 0$. Logo, $\phi(h)= \lim_{n\to\infty} \phi(h_n)= 0$. Por outro lado,

$$\phi(h)= \int_X hg\, d\mu= \int_X |g|\, d\mu.$$

Logo, $g= 0$ μ-q.s., e portanto, $\phi(f_0)= 0$, o que é uma contradição.

Para provarmos o teorema no caso geral, tomemos $Y \subset X$ mensurável, com $0 < \mu(Y) < \infty$ e tal que Y não contém átomos. Como A não satisfaz a condição Δ_2 para $u \geq 0$, existe por (3.14), uma função f_0 em $L_A(Y)= L_A(Y, M_Y, \mu_Y)$, que não pertence a $\overline{\sigma \cap L_A(Y)}$.

Seja ϕ_0 um funcional linear contínuo definido em $L_A(Y)$ tal que $\phi_0(f_0)= 1$, $\phi_0(\overline{\sigma \cap L_A(Y)})= \{0\}$, e $\|\phi_0\| > 0$.

Pelo que foi provado acima, sabemos que ϕ_0 não pode ser escrito na forma (i).

Para cada f em $L_A(Y)$, seja $\tilde{f}= f\ \xi_Y$. É claro que $\tilde{f}$ pertence a $L_A(X)$. Definimos então $\phi : L_A \longrightarrow \mathbb{C}$ da seguinte maneira:

$$\phi(f)= \phi_0(f\ |_Y).$$

O funcional ϕ é um funcional linear contínuo. Suponhamos que ϕ possa ser representado na forma $\phi(f)= \int_X fg\ d\mu$, para alguma função g definida em X, mensurável.

Para cada $h \in L_A(Y)$, temos:

$$\phi_0(h)= \phi(\tilde{h})= \int_X \tilde{h}\ g\ d\mu= \int_X h\ \xi_Y\ g\ d\mu.$$

Chamando $g_1= g|_Y$ a igualdade acima fica:

$$\phi_0(h)= \int_Y h\ g_1\ d\mu,$$

o que contradiz o fato de ϕ_0 não poder ser representado por uma integral. ∎

(5.12) Corolário. Seja (X, M,μ) um espaço de medida não puramente atômico. Seja A uma função de Young tal que $A(u) < \infty$ para todo u, e se $\mu(X)= \infty$, suponhamos que $A(u) > 0$ para $u > 0$. Então são equivalentes as seguintes afirmações:

(i) $L_A{}^*$ é isometricamente isomorfo a $L_{\bar{A}}$;

(ii) a função A satisfaz a condição Δ_2 para

$u \geq u_0$, onde $u_0 = 0$ se $\mu(X) = \infty$.

Demonstração. Segue-se de (5.11) e (5.9). ∎

(5.13) Teorema. Seja (X, M, μ) um espaço de medida não puramente atômico, e seja A uma função de Young tal que $A(u) < \infty$ para todo u. Se $\mu(X) = \infty$, suponhamos também que $A(u) > 0$ e $\bar{A}(u) > 0$ para $u > 0$. Então, se L_A é reflexivo, as funções A e $\bar{A}$ satifazem a condição Δ_2.

Demosntração. Seja $T : L_{\bar{A}} \longrightarrow L_A{}^*$ a transformação linear dada por $T(g) = F_g$, onde F_g é o funcional definido em (5.1.i). Suponhamos, por absurdo, que a função A não satisfaça a condição Δ_2. Pelo teorema (5.11), existe um funcional $\phi_0 \in L_A{}^*$ tal que $\phi_0 \notin T(L_{\bar{A}})$.

É claro que $T(L_{\bar{A}})$ é um subespaço vetorial de $L_A{}^*$; vamos provar que $T(L_{\bar{A}})$ é fechado. De fato, seja $\left(F_{g_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência em $T(L_{\bar{A}})$ e seja $G \in L_A{}^*$ tais que $\lim_{n\to\infty} \|F_{g_n} - G\| = 0$. Como $\left(F_{g_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência de Cauchy, temos que $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ também o é, pois, por (5.1.ii), temos $\|F_{g_n} - F_{g_m}\| = N_{\bar{A}}(g_n - g_m)$. Como $L_{\bar{A}}$ é completo, existe g em $L_{\bar{A}}$ tal que $\lim_{n\to\infty} N_{\bar{A}}(g_n - g) = 0$. Mas então, $\lim_{n\to\infty} \|F_{g_n} - F_g\| = 0$, e, portanto $G = F_g$. Logo, $T(L_{\bar{A}})$ é fechado.

Pelo teorema de Hahn - Banach, existe um funcional

$\Psi \in L_A^{**}$ tal que $\Psi(\phi_0) = 1$, $\Psi(T(L_{\bar{A}})) = \{0\}$, e $\|\Psi\| > 0$.

Por outro lado, como L_A é reflexivo, existe f_0 em L_A tal que $\Psi(\phi) = \phi(f_0)$, para todo ϕ em L_A^*.

Para g em $L_{\bar{A}}$ temos:

$$0 = \Psi(F_g) = F_g(f_0) = \int_X f_0 \; g \; d\mu .$$

Logo, a aplicação $S : L_{\bar{A}} \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $S(g) = \int_X f_0 \; g \; d\mu$ é nula, e, portanto (veja (5.1)), $N_A(f_0) = \|S\| = 0$. Como N_A é norma, temos $f_0 = 0$, o que é absurdo, pois Ψ é não nulo.

Portanto, A satisfaz a condição Δ_2.

Provemos finalmente que $\bar{A}$ satisfaz a condição Δ_2. Se $\bar{A}$ não satisfizesse a condição Δ_2, teríamos, por (5.11) que $L_{\bar{A}}^* \ncong L_{\bar{\bar{A}}} = L_A$. Mas, como A satisfaz a condição Δ_2, vale $(L_A^*)^* \cong L_{\bar{A}}^* \ncong L_A$, contradizendo a hipótese de L_A ser reflexivo. ∎

CAPÍTULO III

Estudaremos a seguir algumas propriedades geométrica de espaços de Birnbaum - Orlicz.

§6. Convexidade estrita em espaços de Birnbaum - Orlicz.

Veremos neste parágrafo, resultados que nos dão condições necessárias e suficientes para que um espaço de Birnbaum - Orlicz seja estritamente convexo.

No que segue, A denotará uma função de Young, com $A(u) < \infty$ para $0 \leq u < \infty$ e indicaremos por $a = \sup\{u : A(u)=0\}$.

(6.1) <u>Definição</u>. Um espaço normado E é estritamente convexo se, e somente se, dados f e g em E com $f \neq g$ e $\|f\| = \|g\| = 1$, e dado $0 < \alpha < 1$, tivemos $\|\alpha f + (1-\alpha)g\| < 1$.

(6.2) <u>Teorema</u>. Seja (X, M, μ) um espaço de medida arbitrário. Se a função A for estritamente convexa e $\int_X A(\frac{f}{p_A(f)})\,d\mu = 1$, para qualquer função f de L_A não nula, então L_A é estritamente convexo.

<u>Demonstração</u>. Sejam f e g pertencentes a L_A, $f \neq g$

e $p_A(f) = p_A(g) = 1$. É claro que para $0 < \alpha < 1$ temos $p_A(\alpha f + (1 - \alpha)g) \leq 1$. Vamos mostrar que sempre vale a desigualdade estrita.

Como $f \neq g$, o conjunto $E = \{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$ tem medida não nula. Logo, se $x \in E$ e $0 < \alpha < 1$ temos, devido à convexidade de estrita de A, a seguinte desigualdade:

$$A(|\alpha f(x) + (1-\alpha)g(x)|) \leq A(\alpha|f(x)| + (1-\alpha)|g(x)|)$$

$$< \alpha A(|f(x)|) + (1-\alpha) A(|g(x)|).$$

Logo, $\int_E A(|\alpha f + (1-\alpha)g|)d\mu < \alpha \int_E A(|f|)d\mu + (1-\alpha) \int_E A(|g|)d\mu$.

Por outro lado, é claro que

$$\int_{X-E} A(|\alpha f + (1-\alpha)g|)d\mu = \alpha \int_{X-E} A(|f|)d\mu + (1-\alpha) \int_{X-E} A(|g|)d\mu.$$

Portanto, temos:

$$\int_X A(|\alpha f + (1-\alpha)g|)d\mu < \alpha \int_X A(|f|)d\mu + (1-\alpha) \int_X A(|g|)d\mu = 1,$$

e, lembrando a hipótese, concluímos que

$$p_A(f + (1-\alpha)g) < 1.$$

Portanto, L_A é estritamente convexo. ∎

Provaremos a seguir que as hipóteses do teorema (6.2) são, na verdade necessárias. Começaremos por dois lemas técnicos.

(6.3) Lema. Seja (X, M, μ) um espaço de medida não puramente atômico. Seja g uma função de L_A com $p_A(g) = 1$ e $\int_X A(|g|)d\mu < 1$, e defina $E = \{x \in X : g(x) \neq 0\}$. Se E for um átomo, então:

(i) $\mu(E)=\infty$;

(ii) $a=0$;

(iii) existe uma função f em L_A com $p_A(f)=1$ e $\int_X A(|f|)d\mu < 1$, e existe $F \in M$ tais que $f\xi_F$ e $f\xi_{X-F}$ são funções nulas.

Demonstração. Observemos primeiramente que $\mu(E) > 0$, pois g é não nula. Suponhamos, por absurdo que $\mu(E) < \infty$. Como E é átomo, sabemos pela proposição (4.7), que existem $c \in \mathbb{C}$ e $F \in M$ com $\mu(E)=\mu(F)$ tais que $g(x)=c$, para todo x em F. Logo, $\int_X A(|g|)d\mu = A(|c|)\ \mu(E) < 1$, e, portanto, $A(|c|) < \frac{1}{\mu(E)}$. Como A é sobrejetora, existe $u_0 \in\ ]0,\infty[$ tal que $A(u_0)=\frac{1}{\mu(E)}$. Seja $k_0=\frac{|c|}{u_0}$. Então $k_0 < 1$, pois A é não decrescente. Por outro lado,

$$\int_X A\left(\frac{|g|}{k_0}\right)d\mu = A\left(\frac{|c|}{k_0}\right)\ \mu(E)=1.$$

Portanto, por (2.3.vi), temos $k_0=p_A(g)$, que por hipótese é 1. Desta contradição concluímos que $\mu(E)=\infty$.

Para verificarmos que $a > 0$, basta observarmos que $E=\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, onde $E_n=\{x \in X : |g(x)| \geq \frac{1}{n}\}$. Como g é não nula, existe n_0 tal que $\mu(E_{n_0}) > 0$. Neste caso, temos $\mu(E_{n_0})=\infty$, pois E é átomo, e

$$1 > \int_X A(|g|)d\mu \geq \int_{E_{n_0}} A\left(\frac{1}{n_0}\right)d\mu = A\left(\frac{1}{n_0}\right)\ \mu(E_{n_0}).$$

Portanto, devemos ter $A(\frac{1}{n_0}) = 0$, e $a > 0$.

Para a demonstração de (iii), tomemos $F \in M$, disjunto de E, tal que $0 < \mu(F) < \infty$. (A existência de tal F é garantida pela hipótese de (X, M, μ) ser não puramente atômico.) Como A é sobrejetora, existe $u_0 > 0$ tal que $A(u_0) = \frac{1}{2\mu(F)}$. Definimos $f = a\xi_E + u_0\xi_F$. É claro que $f\xi_F$ e $f\xi_{X-F}$ são funções não nulas. Temos também:

$$\int_X A(|f|)d\mu = \int_E A(a)d\mu + \int_F A(u_0)d\mu = \frac{1}{2}. \tag{1}$$

Além disto, para todo $k < 1$, vale:

$$\int_X A(\frac{|f|}{k})d\mu > \int_E A(\frac{a}{k})d\mu = A(\frac{a}{k})\ \mu(E) = \infty. \tag{2}$$

De (1) e (2), segue-se que $p_A(f) = 1$. ∎

(6.4) <u>Lema</u>. Seja (X, M, μ) um espaço de medida não puramente atômica. Seja $g \in L_A$ com $p_A(g) = 1$ e $\int_X A(|g|)d\mu < 1$. Então existe $S \in M$ tal que $\emptyset \neq S \neq X$ e existe $h \in L_A$ com $p_A(h) = 1$ e $\int_X A(|h|)d\mu < 1$ tais que:

(i) $h\xi_S$ e $h\xi_{X-S}$ são funções não nulas;

(ii) $\int_X A(\frac{|h|}{k}\ \xi_S)d\mu = \infty$, para $0 < k < 1$;

(iii) $p_A(h\xi_S) = 1$.

<u>Demonstração</u>. Seja $E = \{x \in X : g(x) \neq 0\}$. É claro que $\mu(E) > 0$. Se E não for átomo, existe $F \in M$ tal que $0 < \mu(F) < \mu(E)$. A função $h = g$ satisfaz (i) neste caso. Se

E for átomo, tomamos h= f e F como no lema (6.3), obtendo (i).

Provemos (ii). Se, para $0 < k < 1$, tivermos $\int_X A(\frac{|h|}{k}\, \xi_{X-F})d\mu = \infty$, tomamos $S = X - F$. Se existir k_0 em $]0,1[$ tal que $\int_X A(\frac{|h|}{k_0}\, \xi_{X-F})d\mu < \infty$, deveremos ter $\int_X A(\frac{|h|}{k_0}\, \xi_F)d\mu = \infty$. De fato, se $\int_X A(\frac{|h|}{k_0}\, \xi_F)d\mu < \infty$, então

$$\int_X A(\frac{|h|}{k_0})d\mu = \int_X A(\frac{|h|}{k_0}\, \xi_F)d\mu + \int_X A(\frac{|h|}{k_0}\, \xi_{X-F})d\mu < \infty,$$

e, usando o lema (3.6) do capítulo I, teríamos $\int_X A(\frac{|h|}{p_A(h)})d\mu = 1$, o que não ocorre.

Como A é não decrescente, temos $\int_X A(\frac{|h|}{k}\, \xi_F)d\mu = \infty$ para $0 < k < k_0$. Provemos que $\int_X A(\frac{|h|}{k}\, \xi_F)d\mu = \infty$ para $k_0 < k < 1$.

Se existir $k_1 \in]k_0,1[$ tal que $\int_X A(\frac{|h|}{k_1}\, \xi_F)d\mu < \infty$, então, raciocinando como acima, teremos

$\int_X A(\frac{|h|}{k_1}\, \xi_{X-F})d\mu = \infty$, e como $k_0 < k_1$,

$\int_X A(\frac{|h|}{k_0}\, \xi_{X-F})d\mu = \infty$, o que é uma contradição.

Assim, $\int_X A(\frac{|h|}{k}\, \xi_F)d\mu = \infty$ para $0 < k < 1$, e tomando $S = F$, temos (ii).

Como $\int_X A(|h|\ \xi_S)d\mu \le \int_X A(|h|)d\mu < 1$, e $\int_X A(\frac{|h|}{k}\ \xi_S)d\mu = \infty$ para $0 < k < 1$, temos $p_A(h\ \xi_S) = 1$, provando (iii). ∎

(6.5) Teorema. Seja (X, M, μ) um espaço de medida não puramente atômica. Se L_A é estritamente convexo, então, para toda função f em L_A não nula vale

$$\int_X A(\frac{|f|}{p_A(f)})d\mu = 1.$$

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que exista uma função g em L_A com $p_A(g) = 1$ e $\int_X A(|g|)d\mu < 1$. Pelo lema (6.4), existem $h \in L_A$ e $S \in M$ tais que $\emptyset \neq S \subsetneq X$, $\int_X A(\frac{|h|}{k}\ \xi_S)d\mu = \infty$ para todo $k \in]0,1[$, e $p_A(h\ \xi_S) = 1$.

Seja $h_1 = \frac{1}{2}\ h + \frac{1}{2}\ h\ \xi_S$. Temos

$$\int_X A(|h_1|)d\mu \le \int_X A(|h|)d\mu < 1,$$

conforme a escolha de h. Por outro lado, para $0 < k < 1$, temos:

$$\int_X A(\frac{|h_1|}{k})d\mu \ge \int_X A(\frac{|h|}{k}\ \xi_S) = \infty.$$

Assim, $p_A(h_1) = 1$.

Mas isto contradiz o fato de L_A ser estritamente convexo, pois $p_A(h_1) = 1$ e $p_A(h) = p_A(h\ \xi_S) = 1$. ∎

(6.6) Teorema. Seja (X, M, μ) um espaço de medida não puramente atômico. Se L_A é estritamente convexo, então a função A é estritamente convexa.

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que a função A não seja estritamente convexa. Então existem u_0 e v_0 com $0 < u_0 < v_0 < \infty$, e existe $0 < \alpha < 1$, de modo que $A(\alpha u_0 + (1-\alpha) v_0) = \alpha A(u_0) + (1-\alpha) A(v_0)$. Como A é uma função de Young, é fácil verificar que neste caso, A se escreve na forma $A(u) = pu + q$, para $u_0 \leq u \leq v_0$, onde $p \geq 0$ e $q \in \mathbb{R}$.

Suponhamos primeiramente $p > 0$. Como (X, M, μ) é não puramente atômico, existem $E, F, G \in M$ dois a dois disjuntos, tais que $\mu(E) = \mu(F) = \mu(G) = \dfrac{1}{4p(u_0 + v_0) + 8q}$. Sejam $f = u_0\, \xi_E + v_0\, \xi_F$ e $g = u_0\, \xi_F + v_0\, \xi_G$. Temos:

$$\int_X A(|f|)\,d\mu = \int_X A(|g|)\,d\mu = \left[A(u_0) + A(v_0)\right]\mu(E) = \frac{1}{4}.$$

Além disto,

$$\int_X A\left(\frac{|f+g|}{2}\right)d\mu = \frac{1}{2}\int_X A(|f|)\,d\mu + \frac{1}{2}\int_X A(|g|)\,d\mu = \frac{1}{4}.$$

Como a função A é de Young, existe $\omega \in \,]0,\infty[$ tal que $A(\omega) = \dfrac{3}{4\mu(G)}$.

Definimos $h = \omega\, \xi_G$, $f_1 = h + f$ e $g_1 = h + g$. Como os suportes de h e f são disjuntos, temos

$$\int_X A(|f_1|)\,d\mu = \int_X A(|h|)\,d\mu + \int_X A(|f|)\,d\mu$$

$$= A(\omega)\ \mu(G) + \frac{1}{4} = 1.$$

Analogamente, $\int_X A(|g_1|)\,d\mu = 1$.

Além disto, temos:

$$\int_X A\left(\frac{|f_1 + g_1|}{2}\right) d\mu = \int_X A\left(\left|\frac{f + g}{2} + h\right|\right) d\mu$$

$$= \int_{E \cup F} A\left(\frac{|f + g|}{2}\right) d\mu + \int_G A(|h|) d\mu = 1.$$

Construimos, portanto, funções f_1 e g_1 com normas $p_A(f_1) = p_A(g_1) = 1$, e ainda, $p_A(\frac{f_1 + g_1}{2}) = 1$, o que contradiz o fato de L_A ser estritamente convexo.

Se $p = 0$, temos $A(u) = q$ para $u_0 < u < v_0$. Na verdade devemos ter $q = 0$, pois $\frac{A(u)}{u}$ deve ser não decrescente.

Neste caso, tomamos E, F, G com medidas iguais, finitas e positivas. Definimos f e g como antes e escolhemos ω tal que $A(\omega) = \frac{1}{\mu(G)}$. O restante da demonstração é análogo. ∎

De (6.2), (6.5) e (6.6), temos que se o espaço (X, M, μ) é não puramente atômico, $L_A(X, M, \mu)$ é estritamente convexo se, e somente se, a função A é estritamente convexa e $\int_X A(\frac{|f|}{p_A(f)}) d\mu = 1$, para toda função f não nula em L_A.

Além disto, por (3.7) e (3.11) sabemos que a condição $\int_X A(\frac{|f|}{p_A(f)}) d\mu = 1$, $\forall f \in L_A - \{0\}$ equivale à condição Δ_2 para valores grandes de u, se $\mu(X) < \infty$. Portanto, temos o seguinte resultado.

(6.7) <u>Corolário</u>. Seja (X, M, μ) um espaço de medida finita, não puramente atômica. São equivalentes as seguintes afirmações:

(i) L_A é estritamente convexo;

(ii) a função A é estritamente convexa e satisfaz a condição Δ_2 para valores grandes de u.

<u>Demonstração</u>. Segue-se da observação feita acima. ∎

(6.8) <u>Corolário</u>. Seja (X, M, μ) um espaço de medida finita, não puramente atômica. Sejam A uma função de Young e $\bar{A}$ sua função conjugada. Se L_A e $L_{\bar{A}}$ são ambos estritamente convexos, então ambos são reflexivos.

<u>Demonstração</u>. Por (6.7), temos que A e $\bar{A}$ satisfaz a condição Δ_2 para valores grandes de u. Logo, por (5.10), temos L_A e $L_{\bar{A}}$ são reflexivos. ∎

(6.9) <u>Observação</u>. A recíproca do corolário (6.8) é falsa. De fato, tomemos (X, M, μ) um espaço de medida finita e tomemos

$$A(u) = \begin{cases} u, & \text{se } 0 \le u \le 1; \\ u^3, & \text{se } 1 < u < \infty. \end{cases}$$

Temos:

$$\bar{A}(u) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \le u \le 1; \\ u - 1, & \text{se } 1 < u \le 3; \\ \dfrac{2u\sqrt{u}}{3\sqrt{3}}, & \text{se } u > 3. \end{cases}$$

As funções A e $\bar{A}$ satisfazem a condição Δ_2 valores grandes de u, e portanto, L_A e $L_{\bar{A}}$ são reflexivos. Por outro lado, A e $\bar{A}$ não são estritamente convexas, e portanto, os espaços L_A e $L_{\bar{A}}$ não são estritamente convexos. ∎

§7. Outras propriedades geométricas de espaços de Birnbaum-Orlicz.

Faremos, neste último parágrafo, um breve comentário a respeito de algumas propriedades geométricas de espaços $L_A(X, M,\mu)$.

Sabemos que um espaço de Banach é uniformemente convexo se, para cada ε, $0 < \varepsilon \leq 2$ existir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, tal que se $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$ e $\|x - y\| > \varepsilon$, então $\left\|\frac{1}{2}(x + y)\right\| \leq 1 - \delta$.

Em [7], Milnes estabeleceu condições necessárias e suficientes para que $L_A(X, M,\mu)$ seja uniformemente convexo, onde (X, M,μ) é um espaço de medida σ-finita.

As definições de espaço de Birnbaum-Orlicz e da norma neste espaço considerados em [7] são as definições de L_{M_A} e N_A respectivamente. Como (X, M,μ) é de medida σ-finita, sabemos, pelo parágrafo 4, que $L_A = L_{M_A}$ e que as normas p_A e N_A são equivalentes.

Sejam p uma função não decrescente, contínua a esquerda em $]0,\infty[$ e com $p(0) = 0$, e $q = p^{-1}$, isto é, a inversa a direita de p (conforme (2.12)). Seja $A(u) = \int_0^u p(t)\, dt$. Por (2.19) em [1], temos $\bar{A}(u) = \int_0^u q(t)\, dt$. Valem os seguintes resultados.

(7.1) Teorema. Seja (X, M, μ) um espaço de medida finita. O espaço $L_A(X, M, \mu)$ é uniformemente convexo se, e somente se, as seguintes condições estiverem satisfeitas:

(i) q e $\bar{A}$ são funções contínuas;

(ii) as funções A e $\bar{A}$ satisfazem a condição Δ_2 para valores grandes de u;

(iii) para cada $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$ existe uma constante $1 < R_\varepsilon < \infty$ tal que $\liminf_{n \to \infty} \frac{p(u)}{p((1-\varepsilon)u)} > R_\varepsilon$.

(7.2) Teorema. Seja (X, M, μ) um espaço de medida σ-finita. O espaço $L_A(X, M, \mu)$ é uniformemente convexo se, e somente se, as seguintes condições estiverem satisfeitas:

(i) q e $\bar{A}$ são funções contínuas;

(ii) as funções A e $\bar{A}$ satisfazem a condição Δ_2 para todo u.

(iii) para cada $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$, existe uma constante $1 < R_\varepsilon < \infty$ tal que $p(u) > p((1-\varepsilon)u)\, R_\varepsilon$, para todo $u > 0$.

As condições (ii) dos teoremas acima implicam na reflexividade de $L_A(X, M, \mu)$, conforme vimos em (5.10).

Informalmente falando, as condições (iii) dos teoremas acima nos dizem que a função p não deve crescer deva gar demais. É fácil verificar que os espaços $L_p(X, M,\mu)$ são uniformemente convexos. Um contra-exemplo é o seguinte. Seja (X, M,μ) um espaço de medida finita, e seja $p(t)=\ell n\ t\ \xi_{]1,\infty[}(t)$. Temos $A(u)=(u\ \ell n\ u - u + 1)\xi_{]1,\infty[}(u)$, $q(t)=e^t$, e $\bar{A}(u)=e^u - 1$. O espaço $L_A(X, M,\mu)$ não é uniformemente convexo, pois, entre outros fatos, a função $p(t)$ não satisfaz (iii) em (7.1).

Encerramos este trabalho ainda com algumas perguntas. Gostaríamos de ter caracterizado os espaços de Birnbaum-Orlicz que são regulares (smooth).

Um espaço normado E é regular se em cada ponto do conjunto $\{x \in E : ||x|| = 1\}$ passa exatamente um hiperplano de suporte da bola unitária de E. Esta definição é equivalente à seguinte afirmação: para cada x em E, $x \neq 0$, existe o limite:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{||x + ty|| - ||x||}{t}, \quad \forall y \in E.$$

(Veja, por exemplo, G. Köthe, *Topological Vector Spaces I*, *Springer-Verlag, New York Inc. 1969, pag. 347.*)

Temos ainda, usando (2) da referência acima, página 346, que se $L_A{}^*$ é estritamente convexo, então L_A é regular, e se $L_A{}^*$ é regular, então L_A é estritamente convexo. Portanto, por (6.2), (6.5) e (6.6), temos o seguinte resul tado: se (X, M, μ) é não puramente atômico e $L_A(X, M, \mu)$ é reflexivo, então $L_A(X, M, \mu)$ é regular se, e somente se, a função $\bar{A}$ é estritamente convexa, e $\int_X \bar{A}\left(\frac{|f|}{p_{\bar{A}}(f)}\right) d\mu = 1$, para todo f em $L_{\bar{A}}$, $f \neq 0$.

BIBLIOGRAFIA

[1] BUND, I.M. *Birnbaum-Orlicz spaces*. São Paulo, IME-USP, 1978. (Notas do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo. Série Matemática, 4)

[2] EDWARDS, R.E. *Functional analysis: theory and applications*. Chicago, Holt, 1965.

[3] FERNANDEZ, P.J. *Medida e integração*. Rio de Janeiro, IMPA, 1976. (Projeto Euclides)

[4] HEWITT, E. & K. STROMBERG, *Real and abstract analysis*. New York, Springer, 1969.

[5] KLEE, V.L. Convex bodies and periodic homeomorphisms in Hilbert space. *Trans. Amer. Math. Soc.*, *74*:10-43, 1953.

[6] KRASNOSEL'SKII, M.A. & Y.B. RUTICKII, *Convex functions and Orlicz spaces*. Groningen, P. Noordhoff, 1961.

[7] MILNES, H.W. Convexity of Orlicz spaces. *Pacific J. Math.*, *7*(3):1451-1483, 1957.

[8] SUNDARESAN, K. On the strict and uniform convexity of certain Banach spaces. *Pacific J. Math.*, *15*(3):1083-1086, 1965.

[9] TURETT, B. Rotundity of Orlicz sapces. *Indag. Math.*, *38*(5): 462-469, 1976.

[10] ZAANEN, A.C. *Linear analysis*. Amsterdam, P. Noordhoff, 1953.