MEDIDAS DE NÃO COMPACIDADE, OPERADORES CONDENSANTES E ALGUMAS APLICAÇÕES

FRANCISCO CARLOS DA ROCHA REVERBEL

DISSERTAÇÃO APRESENTADA

AO

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

DA

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE

EM

MATEMÁTICA

ORIENTADORA: Profa. Dra. OFÉLIA TERESA ALAS

Durante a elaboração deste trabalho o autor recebeu apoio financeiro do CNPq e FINEP.

- SÃO PAULO, JUNHO DE 1980 -

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

A idéia de medida de não compacidade apareceu pela primeira vez na literatura em 1930, num trabalho de Kuratowski [17]. A cada subconjunto limitado S de um espaço métrico E Kuratowski associou um número real $\alpha(s)$, definido por

$$\alpha(S) = \inf\{\varepsilon>0: S \text{ é coberto por um número finito de subconjuntos de diâmetro menor ou igual a } \varepsilon\}.$$

Se o espaço métrico E é completo, ocorre que $\alpha(S) = 0$ se e somente se S for relativamente compacto; podemos pensar que $\alpha(S)$ indica o quanto o fecho de A deixa de ser compacto. A função α foi denominada medida de não compacidade de Kuratowski.

Somente em 1955, entretanto, surgiu a contribuição fundamental, devida a Darbo [3], que introduziu o conceito de α-contração e demonstrou um teorema de ponto fixo que generaliza os teoremas de Schauder e Krasnoselskii.

Em 1967 Sadovskii [26] introduziu a idéia de operador condensante e, num dado sentido, generalizou o teorema de Darbo. Em vez de trabalhar com a função α, Sadovskii empregou a função χ, devida a Goldenstein, Gokhberg e Markus, dada por

$$\chi(S) = \inf\{\varepsilon>0 : S \text{ é coberto por um número finito de bolas de raio menor ou igual a } \varepsilon\}.$$

Essa função ficou conhecida como a medida de não compacidade de Hausdorff.

A partir de 1967 as noções de medida de não compacidade e operador condensante aparecem freqüentemente na literatura, tendo sido aplicadas à teoria das equações diferenciais ordinárias em espaços de Banach, à teoria das equações diferenciais funcionais do tipo neutro e ao estudo da existência de soluções periódicas de equações diferenciais funcionais.

Tanto o teorema de Darbo como o de Sadovskii asseguram a existência de pontos fixos para certos operadores não necessariamente compactos, definidos num subconjunto convexo e fechado de um espaço de Banach. Como as demonstrações desses teoremas usam apenas algumas propriedades das funções α e χ, torna-se natural uma abordagem axiomática das idéias de medida de não compacidade e operador condensante. Uma abordagem desse tipo é feita no capítulo I desta dissertação. Nesse capítulo adotamos o ponto de vista de quem está interessado nas generalizações do teorema de Schauder. Por isso consideramos apenas medidas de não compacidade em espaços normados e nos restringimos ao estudo daquelas que são invariantes em relação à envoltória convexa (veja-se (1.1)). No capítulo II deste trabalho estudamos algumas propriedades específicas de certas medidas de não compacidade e no capítulo III aplicamos os resultados do capítulo I a certas equações diferenciais funcionais do tipo neutro.

Não tivemos nenhuma pretensão de esgotar o assunto. O leitor interessado poderá consultar a extensa bibliografia que se encontra em [27]. Para outras aplicações às equações diferenciais veja-se [1], [9], [11], [19], [22] e [27].

Queremos expressar aqui nosso agradecimento à Professora Ofélia Teresa Alas, pela orientação, incentivo e amizade. Nosso agradecimento é extensivo aos Professores Chaim Samuel Hönig e José Carlos Fernandes de Oliveira, que leram partes do manuscrito desta dissertação e fizeram valiosas sugestões. A propósito, cumpre ressaltar que a seção 14 surgiu de uma sugestão do Professor Chaim.

Agradecemos também à Srta. Ana Márcia de Toledo e ao Sr. João Baptista Esteves de Oliveira, pelo trabalho de datilografia, bem como à Srta. Raquel de Jesus, pelo valioso auxílio.

E agradecemos ao Professor Léo Roberto Borges Vieira, que estimulou nosso gosto pela Matemática, e a todos os colegas (especialmente à Martha) que nos deram incentivo e ajuda.

São Paulo, junho de 1980

Francisco Carlos da Rocha Reverbel

- ⊟ -

CAPÍTULO I

MEDIDAS DE NÃO COMPACIDADE E OPERADORES CONDENSANTES

Neste capítulo vamos introduzir axiomaticamente os conceitos de medida de não compacidade (seção (1)) e operador condensante (seção (2)), e obteremos teoremas de existência (seção (2)) e dependência contínua (seção (3)) para pontos fixos de operadores condensantes. Na seção (4) veremos que, sob certas condições, vale a alternativa de Fredholm para equações da forma $x - T(x)= y$, onde T é um operador condensante.

1. Medidas de não compacidade

(1.1) Definições. Seja M o conjunto das partes limitadas de um espaço vetorial normado X. Uma medida de não compacidade em X é uma função $\mu : M \longrightarrow [0,\infty[$, que satisfaz as propriedades (μ_1) - (μ_4) abaixo, para quaisquer $A,B \in M$.

(μ_1) $\mu(A) = 0 \Longleftrightarrow$ A é relativamente compacto;

(μ_2) $\mu(A \cup B) = \max\{\mu(A), \mu(B)\}$ (semi-aditividade);

(μ_3) $\mu(\bar{A}) = \mu(A)$ (invariância em relação ao fecho);

(μ_4) $\mu(\mathrm{conv}(A)) = \mu(A)$ (invariância em relação à envoltória convexa).

De (μ_2) vem que $A \subset B \Longrightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$ (monotonicidade).

Sendo $A \subset X$ e $\varepsilon > 0$, denotamos por $N_\varepsilon(A)$ o conjunto

$$\{x \in X : \|x - y\| < \varepsilon \text{ para algum } y \in A\}.$$

No conjunto das partes limitadas e não vazias de X definimos uma pseudométrica D, através da igualdade

$$D(A,B) = \inf\{\varepsilon > 0 : A \subset N_\varepsilon(B) \text{ e } B \subset N_\varepsilon(A)\}.$$

A restrição dessa pseudométrica ao conjunto das partes fechadas, limitadas e não vazias de X é uma métrica, denominada da métrica de Hausdorff.

Se além das propriedades (μ_1) - (μ_4) a função μ verificar

(μ_5) para quaisquer $A \in M \sim \{\emptyset\}$ e $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$B \in M \sim \{\emptyset\} \text{ e } D(A,B) < \delta \Longrightarrow |\mu(A) - \mu(B)| < \varepsilon$$

diremos que μ é uma medida de não compacidade contínua. Se o δ em (μ_5) for independente de A, diremos que μ é uniformemente contínua. Passaremos a examinar alguns exemplos.

(1.2) Exemplo (a medida de não compacidade de Kuratowski). Seja X um espaço vetorial normado e $\alpha : M \longrightarrow [0,\infty[$

a função definida por

$\alpha(A) = \inf\{\varepsilon > 0 :$ A é coberto por um número finito de subconjuntos de diâmetro menor ou igual a $\varepsilon\}$.

Se X é de Banach, α é uma medida de não compacidade uniformemente contínua. Com efeito, (μ_1) decorre da completividade de X (pois num espaço métrico completo um subconjunto é relativamente compacto se e somente se for totalmente limitado), (μ_2) é trivial, (μ_3) e a continuidade uniforme decorrem da desigualdade

$$\alpha(N_\varepsilon(A)) \leq \alpha(A) + 2\varepsilon,$$

e (μ_4) é a proposição que demonstraremos a seguir.

Vamos lembrar a definição de ε-rede:

(1.3) Definição. Seja E um espaço métrico, $S \subset E$ e $\varepsilon > 0$. Dizemos que $R \subset E$ é uma ε-rede para o conjunto S se as bolas fechadas com centro em cada $r \in R$ e raio ε cobrem S. Portanto um subconjunto de um espaço métrico completo é relativamente compacto se e somente se admite uma ε-rede finita, para cada $\varepsilon > 0$.

(1.4) Proposição (Darbo [3]). Para todo subconjunto limitado A do espaço vetorial normado X temos $\alpha(\mathrm{conv}(A)) = \alpha(A)$.

Demonstração. É claro que $\alpha(A) \leq \alpha(\mathrm{conv}(A))$. Provemos que $\alpha(\mathrm{conv}(A)) \leq \alpha(A)$. Tomemos $\varepsilon > 0$ e $\{A_1, \ldots, A_n\}$ uma cobertura de A por conjuntos de diâmetro menor ou igual a $\alpha(A) + \varepsilon$. Como o diâmetro de um conjunto é igual ao diâmetro de sua envoltória convexa, os conjuntos $C_i = \mathrm{conv}(A_i)$ $(i = 1,\dots, n)$ também tem diâmetro menor ou igual a $\alpha(A) + \varepsilon$. É fácil ver que

$$\mathrm{conv}(A) \subset \{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \; : \; x_i \in C_i \; , \; \lambda_i \geq 0, \; \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\}.$$

Seja $M > \sup\{\|x\| : x \in \bigcup_{i=1}^{n} C_i\}$. O $(n-1)$-simplexo $\Delta = \{\lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{R}^n : \lambda_i \geq 0, \; \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\}$ é um subconjunto compacto do $\mathbb{R}^n$, que consideramos munido da norma $|\lambda| = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|$, $\lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_n)$. Portanto Δ admite uma (ε/M)-rede finita, formada por pontos $\lambda^j = (\lambda_1^j,\dots,\lambda_n^j) \in \Delta$, $j=1,\dots,m$. Seja $S_j = \lambda_1^j C_1 + \dots + \lambda_n^j C_n$, $j=1,\dots,m$. Temos que $\mathrm{diam}(S_j) \leq \lambda_1^j \,\mathrm{diam}(C_1) + \dots + \lambda_n^j \,\mathrm{diam}(C_n) \leq \alpha(A) + \varepsilon$. Além disso, para cada x em $\mathrm{conv}(A)$ podemos escolher $j \in \{1,\dots, m\}$ e $y \in S_j$ de modo que $\|x - y\| < \varepsilon$: basta fazer $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$, com $x_i \in C_i$ e $\lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \Delta$, tomar j tal que $|\lambda - \lambda^j| \leq \varepsilon/M$ e $y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^j x_i \in S_j$. Portanto os conjuntos $N_\varepsilon(S_j)$ $(j=1,\dots,m)$ cobrem $\mathrm{conv}(A)$. Como $\mathrm{diam}(N_\varepsilon(S_j)) \leq \alpha(A) + 3\varepsilon$, segue-se que $\alpha(\mathrm{conv}(A)) \leq \alpha(A) + 3\varepsilon$. Mas $\varepsilon > 0$ é arbitrário, logo $\alpha(\mathrm{conv}(A)) \leq \alpha(A)$. ∎

(1.5) Exemplo (a medida de não compacidade de Hausdorff). Seja X um espaço vetorial normado e $\chi : M \longrightarrow [0,\infty[$ a função definida por

$$\chi(A) = \inf\{\varepsilon > 0 : A \text{ é coberto por um número finito de bolas de raio menor ou igual a } \varepsilon\}$$
$$= \inf\{\varepsilon > 0 : A \text{ tem uma } \varepsilon\text{-rede finita}\}.$$

Se X é de Banach, χ é uma medida de não compacidade uniformemente contínua. Com efeito, (μ_1) decorre da completividade de X, (μ_2) é trivial, (μ_3) e a continuidade uniforme decorrem da desigualdade

$$\chi(N_\varepsilon(A)) \leq \chi(A) + \varepsilon,$$

e (μ_4) é a proposição que demonstraremos a seguir.

(1.6) Proposição. Para todo subconjunto limitado A do espaço vetorial normado X temos $\chi(\mathrm{conv}(A)) = \chi(A)$.

Demonstração. $\chi(A) \leq \chi(\mathrm{conv}(A))$ decorre de (μ_2). Provemos que $\chi(\mathrm{conv}(A)) \leq \chi(A)$. Dado $\varepsilon > 0$, A tem uma $(\chi(A) + \varepsilon)$-rede $\{x_1,\ldots,x_k\}$. Segue-se que $\mathrm{conv}(\{x_1,\ldots,x_k\})$ é uma $(\chi(A) + \varepsilon)$-rede para $\mathrm{conv}(A)$. O conjunto $\mathrm{conv}(\{x_1,\ldots,x_k\})$ é compacto, logo tem uma ε-rede $\{y_1,\ldots,y_\ell\}$. Temos então que $\{y_1,\ldots,y_\ell\}$ é uma $(\chi(A) + 2\varepsilon)$-rede para $\mathrm{conv}(A)$, e portanto $\chi(\mathrm{conv}(A)) \leq \chi(A) + 2\varepsilon$. Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, segue-se que $\chi(\mathrm{conv}(A)) \leq \chi(A)$. ∎

(1.7) Exemplo. Seja X um espaço de Banach e $\psi : M \longrightarrow [0,\infty[$ a função definida por

$$\psi(A) = \begin{cases} 0 \text{ se } A \text{ é relativamente compacto,} \\ \\ 1 \text{ se } A \text{ não é relativamente compacto.} \end{cases}$$

A função ψ é uma medida de não compacidade, que é contínua se e somente se X tem dimensão finita.

(1.8) Exemplo. Seja X um espaço de Banach com base de Schauder $\{e_i : i=1,2,\dots\}$. Cada $x \in X$ pode ser expresso de modo único como $x= \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)\, e_i$, onde os f_i são os chamados funcionais básicos. Para $n= 1,2,\dots$, definimos $R_n : X \longrightarrow X$ por $R_n x= \sum_{i=n+1}^{\infty} f_i(x)\, e_i$. Seja $\beta : M \longrightarrow [0,\infty[$ a função definida por $\beta(\emptyset)= 0$ e

$$\beta(A)= \lim_{n\to\infty} \sup\, \sup\{\|R_n x\| : x \in A\} \text{ (se } A \neq \emptyset).$$

A função β é uma medida de não compacidade uniformemente contínua. De fato, (μ_1) decorre do critério de compacidade em espaços de Banach com base de Schauder [18], (μ_3) e a continuidade uniforme decorrem da desigualdade

$$\beta(N_\varepsilon(A)) \leq \beta(A) + K\varepsilon,$$

onde $K= \lim_{n\to\infty} \sup \|R_n\|$, e as demais propriedades são triviais.

(1.9) Exemplo (a medida de não equicontinuidade em $C(M,\mathbb{R}^n)$). Seja (M,d) um espaço métrico compacto, $X= C(M,\mathbb{R}^n)$, e $\omega : M \longrightarrow [0,\infty[$ a função definida por

$$\omega(A)= \lim_{\delta\to 0^+} \sup\{|x(m_1) - x(m_2)| : x \in A,\ m_1,m_2 \in M,\ d(m_1,m_2) \leq \delta\}$$

(se $A \neq \emptyset$) e $\omega(\emptyset)= 0$. É fácil verificar que ω é uma medida de não compacidade uniformemente contínua. A condição (μ_1) decorre do teorema de Ascoli, (μ_3) e a continuidade uniforme decorrem da desigualdade

$$\omega(N_\varepsilon(A)) \leq \omega(A) + 2\varepsilon,$$

e as propriedades restantes são de verificação trivial.

(1.10) <u>Definição e notações</u>. Dizemos que uma função $x : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é regrada se x tem apenas descontinuidades de primeira espécie: para todo $t \in [a,b[$ existe $\lim_{s\to t^+} x(s)$ e para todo $t \in]a,b]$ existe $\lim_{s\to t^-} x(s)$. Denotaremos por $G([a,b], \mathbb{R}^n)$ o conjunto das funções regradas de $[a,b]$ em $\mathbb{R}^n$. $G([a,b], \mathbb{R}^n)$ é um espaço vetorial e, com a norma da convergência uniforme, é um espaço de Banach. Lembramos que uma divisão de $[a,b]$ é um conjunto finito $d= \{t_0,t_1,\ldots t_m\}$, com $a= t_0 < t_1 <\ldots < t_m= b$. Indicaremos por $\mathbb{D}_{[a,b]}$ (ou simplesmente $\mathbb{D}$) o conjunto de todas as divisões de $[a,b]$. Se $d= \{t_0,t_1,\ldots,t_m\}$, com $a= t_0 < t_1 <\ldots< t_m= b$, escrevemos $|d|= m$. Para $x \in G([a,b], \mathbb{R}^n)$ e $d \in \mathbb{D}$ definimos
$\omega_d^{\cdot}(x)= \sup\{|x(s) - x(t)| : s,t \in] t_{i-1}, t_i[, 1 \leq i \leq |d|\}$. Podemos agora dar o

(1.11) <u>Exemplo</u> (a medida de não equiregracidade em $G([a,b], \mathbb{R}^n)$). Seja $X= G([a,b], \mathbb{R}^n)$ e $\eta : M \longrightarrow [0,\infty[$ a função definida por

$\eta(A)= \inf\{\varepsilon > 0$: existe $d \in \mathbb{D}$ tal que $\omega_d^{\cdot}(x) \leq \varepsilon$, para todo $x \in A\}$.

É fácil verificar que η é uma medida de não compacidade uniformemente contínua. Pelo teorema de Ascoli para fun ções regradas (Hönig [14]) um subconjunto limitado $A \subset G([a,b], \mathbb{R}^n)$ é relativamente compacto se e somente se for equiregrado (para todo $\varepsilon > 0$ existe $d \in \mathbb{D}$ tal que $\omega_d^{\bullet}(x) \leq \varepsilon$ para qualquer $x \in A$), e portanto vale (μ_1). Da desigualdade

$$\eta(N_\varepsilon(A)) \leq \eta(A) + 2\varepsilon$$

decorrem (μ_3) e a continuidade uniforme. As demais propriedades são de verificação trivial.

(1.12) Exemplo (uma medida de não compacidade em $L_p([a,b])$). Se $h > 0$, $x \in L_p([a,b])$ $(1 \leq p < \infty)$ e $t \in [a,b]$, definimos

$$(M_h x)(t) = \frac{1}{2h} \int_{t-h}^{t+h} x(s)\, ds,$$

onde admitimos que $x(s) = 0$ para $s \notin [a,b]$. É fácil provar que $\|M_h x\|_p \leq \|x\|_p$, e portanto $M_h x \in L_p([a,b])$. Seja $X = L_p([a,b])$ $(1 \leq p < \infty)$ e $\sigma : M \longrightarrow [0,\infty[$ a função definida por $\sigma(A) = \lim\limits_{\delta \to 0^+} \sup\{\|x - M_h x\|_p : 0 < h \leq \delta,\ x \in A\}$ (se $A \neq \emptyset$) e $\sigma(\emptyset) = 0$. A função σ é uma medida de não compacidade uniformemente contínua. Com efeito, (μ_1) decorre do critério de Kolmogorov em $L_p([a,b])$ [18] (uma generalização desse critério é o teorema (8.1) que demonstraremos na seção 8). De

$$\sigma(N_\varepsilon(A)) \leq \sigma(A) + 2\varepsilon$$

decorrem (μ_3) e a continuidade uniforme. As demais propriedades são de verificação trivial.

(1.13) Exemplo (outra medida de não compacidade em $L_p([a,b])$). Se $h \in \mathbb{R}$, $x \in L_p([a,b])$ $(1 \leq p < \infty)$ e $t \in [a,b]$, definimos

$$(T_h x)(t) = x(t + h),$$

onde admitimos que $x(s) = 0$ para $s \notin [a,b]$. Seja $X = L_p([a, b])$ $(1 \leq p < \infty)$ e $\tau : M \longrightarrow [0,\infty[$ a função definida por $\tau(A) = \lim\limits_{\delta \to 0^+} \sup\{\|x - T_h x\|_p : |h| \leq \delta,\ x \in A\}$ (se $A \neq \emptyset$) e $\tau(\emptyset) = 0$. A função τ é uma medida de não compacidade uniformemente contínua. A propriedade (μ_1) decorre do critério de Riesz em $L_p([a,b])$ ([28], [18]; o teorema (8.3) é uma generalização desse critério). A condição (μ_3) e a continuidade uniforme decorrem de

$$\tau(N_\varepsilon(A)) \leq \tau(A) + 2\varepsilon.$$

As propriedades restantes são triviais.

(1.14) Observações. As funções α, χ, ψ, ω e η podem ser consideradas em um contexto mais geral. Seja E um espaço métrico. Praticamente as mesmas definições dos exemplos (1.2), (1.5), (1.7), (1.9) e (1.11) podem ser usadas para definir α, χ e ψ no conjunto das partes limitadas de E, ω no conjunto das partes limitadas de $C(M,E)$ (onde M é um espaço métrico compacto), e η no conjunto das partes limitadas de $G([a,b], E)$ (funções regradas de $[a,b]$ em E). Neste contexto a propriedade (μ_4) perde o sentido, já que não temos estrutura de espaço vetorial. Se E for completo, (μ_1) é satisfeita por α e χ. Se E for tal que todo subconjunto limitado $S \subset E$ é relativamente compacto, (μ_1) é satisfeita por ω e η. As demais propriedades são sempre verificadas.

Num espaço métrico, qualquer seqüência decrescente de subconjuntos compactos não vazios tem intersecção não vazia. A proposição seguinte, devida a Kuratowski [17], é uma generalização desse fato. Essa proposição não depende da propriedade (μ_4) nem da estrutura de espaço vetorial de X: somente a estrutura de espaço métrico é empregada na demonstração.

(1.15) Proposição. Seja μ uma medida de não compacidade em X, e $A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset \dots$ uma seqüência decrescente de subconjuntos fechados, limitados e não vazios de X. Se $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$ então $A_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ é compacto e não vazio, e $A_n \longrightarrow A_\infty$ na métrica de Hausdorff.

Demonstração. De $\mu(A_\infty) \leq \mu(A_n)$ para todo n, segue-se que $\mu(A_\infty) = 0$. Sendo intersecção de fechados, A_∞ é fechado e, portanto, compacto.

Provemos que A_∞ é não vazio. Para cada n tomemos $x_n \in A_n$ e seja $S = \{x_n : n = 1,2,\dots\}$. Temos que

$$\begin{aligned}
\mu(S) &= \mu(\{x_1,\dots,x_{n-1}\} \cup \{x_n, x_{n+1},\dots\}) \\
&= \max\{\mu(\{x_1,\dots,x_{n-1}\}),\ \mu(\{x_n,x_{n+1},\dots\})\} \\
&= \mu(\{x_n,x_{n+1},\dots\}) \\
&\leq \mu(A_n),
\end{aligned}$$

pois $\{x_n, x_{n+1}, \ldots\} \subset A_n$. Logo $\mu(S) = 0$, e $\bar{S}$ é compacto. Podemos então extrair uma subseqüência x_{n_k}, convergindo para $x \in X$. Ocorre que $x \in A_m$, para todo m: fixado m existe k_0 tal que $n_k > m$ para todo $k > k_0$, donde $x_{n_k} \in A_{n_k} \subset A_m$ para $k > k_0$ e portanto $x = \lim_{k\to\infty} x_{n_k} \in A_m$. Logo $x \in A_\infty$.

Resta mostrar que $\lim_{n\to\infty} D(A_n, A_\infty) = 0$. Se isso não ocorrer, existe $\varepsilon > 0$ e uma subseqüência A_{n_k} tal que $D(A_{n_k}, A_\infty) > \varepsilon$. Como $D(A_n, A_\infty) = \inf\{r > 0 : A_n \subset N_r(A_\infty)\}$, segue-se que $A_{n_k} \not\subset N_\varepsilon(A_\infty)$ para todo k, donde $B_k = A_{n_k} \sim N_\varepsilon(A_\infty) \neq \emptyset$. Como B_k é uma seqüência decrescente de subconjuntos fechados, limitados e não vazios, com $\lim_{k\to\infty} \mu(B_k) = 0$, temos que $\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k \neq \emptyset$. Isto é absurdo, pois $\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k \subset A_\infty$ e $\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k \subset X - N_\varepsilon(A_\infty)$. ∎

(1.16) Observações. Outras abordagens axiomáticas da idéia de medida de não compacidade podem ser encontradas na literatura ([27], [15]). A escolha dos axiomas da definição (1.1) foi feita tendo em vista o emprego do conceito de medida de não compacidade nos teoremas de ponto fixo que estudaremos na próxima seção. A proposição seguinte mostra que as funções α, χ, ψ, β, ω, η, σ e τ definidas nesta seção gozam de outras propriedades comuns, que não foram privilegiadas como axiomas. Omitiremos a demonstração, que é trivial.

(1.17) Proposição. Se $\mu = \alpha, \chi, \beta, \omega, \eta, \sigma$ ou τ temos que

(i) $\mu(A + B) \leq \mu(A) + \mu(B)$ (semi-aditividade algébrica),

(ii) $\mu(x + A) = \mu(A)$ (invariância em relação a translações),

(iii) $\mu(\lambda A) = |\lambda| \mu(A)$ (semi-homogeneidade),

para quaisquer $A, B \in M$, $x \in X$ e λ escalar. A função ψ satisfaz somente (i) e (ii).

2. Medidas de não compacidade e teoremas de ponto fixo

(2.1) Definições. Seja X um espaço vetorial normado, μ uma medida de não compacidade em X, e Γ um subconjunto de X. Dizemos que uma aplicação $F : \Gamma \longrightarrow X$ é condensante em relação a μ (ou μ-condensante) se

(c_1) F é contínua;

(c_2) se $A \subset \Gamma$ é limitado então $F(A)$ é limitado;

(c_3) $\mu(F(A)) < \mu(A)$ para todo subconjunto limitado $A \subset \Gamma$ tal que $\mu(A) > 0$.

Se em vez da propriedade (c_3) acima, tivermos

(c_3)' existe $k \geq 0$ tal que $\mu(F(A)) \leq k\, \mu(A)$ para todo subconjunto limitado $A \subset \Gamma$,

diremos que F é uma aplicação μ-lipschitiziana com constante k. As aplicações μ-lipschitizianas com constante $k < 1$ são denominadas μ-contrações. É claro que toda μ-contração é μ-condensante. Para um exemplo de operador μ-condensante que não é μ-contração, veja-se [23].

(2.2) <u>Proposição</u>. Seja Γ um subconjunto do espaço vetorial normado X e μ uma medida de não compacidade em X.

(i) $F : \Gamma \longrightarrow X$ é completamente contínua se e somente se é μ-lipschitziana com constante zero.

(ii) Se $F_1 : \Gamma' \longrightarrow X$ ($\Gamma' \subset X$) e $F_2 : \Gamma \longrightarrow \Gamma'$ são μ-lipschitzianas com constantes k_1 e k_2, então $F_1 \circ F_2$ é μ-lipschitziana com constante $k_1\, k_2$.

(iii) Suponhamos que $\mu = \alpha, \chi, \beta, \omega, \eta, \sigma$ ou τ. Se $F_1, F_2 : \Gamma \longrightarrow X$ são μ-lipschitzianas com constantes k_1 e k_2 então $F_1 + F_2$ é μ-lipschitziana com constante $k_1 + k_2$.

(iv) Suponhamos que $\mu = \alpha$ ou χ. Se $F : \Gamma \longrightarrow X$ é lipschitziana com constante k então é μ-lipschitziana com constante k.

<u>Demonstração</u>. (i), (ii) e (iv) são triviais, (iii) decorre de (1.17.i). ∎

O teorema seguinte é devido a Darbo [3]. Darbo o enunciou numa forma mais particular, mas a prova é a mesma.

(2.3) <u>Teorema</u>. Seja Γ um subconjunto convexo, fechado e não vazio do espaço de Banach X, μ uma medida de não compacidade em X, e $F : \Gamma \longrightarrow \Gamma$ uma aplicação contínua e limitada. Façamos $A_1 = \overline{\text{conv}}(F(\Gamma))$ e $A_n = \overline{\text{conv}}(F(A_{n-1}))$ para $n > 1$. Se $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$ então F tem pelo menos um ponto fixo.

<u>Demonstração</u>. É claro que cada A_n é convexo, fechado, limitado e não vazio. Provemos que $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$: de $A_1 \subset \Gamma$ vem que $A_2 = \overline{\text{conv}}(F(A_1)) \subset \overline{\text{conv}}(F(\Gamma)) = A_1$. Suponhamos que $A_n \subset A_{n-1}$ para algum $n > 1$. Então
$A_{n+1} = \overline{\text{conv}}(F(A_n)) \subset \overline{\text{conv}}(F(A_{n-1})) = A_n$, e o resultado está provado por indução. De (1.15) segue-se que $A_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ é compacto e não vazio. Além disso, A_∞ é convexo, e é fácil ver que $F(A_\infty) \subset A_\infty$. Pelo teorema de Schauder, F tem pelo menos um ponto fixo em A_∞. ∎

(2.4) <u>Corolário</u> (o teorema de Darbo). Seja Γ um subconjunto convexo, fechado e não vazio do espaço de Banach X, e μ uma medida de não compacidade em X. Se $F : \Gamma \longrightarrow \Gamma$ é uma μ-contração limitada, então F tem pelo menos um ponto fixo.

<u>Demonstração</u>. Com a notação do teorema anterior, é suficiente provarmos que $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$. Como F é uma μ-contração, existe $k \in [0,1[$ tal que

$$\mu(A_n) = \mu(\overline{\text{conv}}(F(A_{n-1}))) = \mu(F(A_{n-1})) \leq k\mu(A_{n-1}) \quad (n \geq 2).$$

Segue-se que $\mu(A_n) \leq k^{n-1}\mu(A_1)$, e portanto $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$. ∎

O corolário (2.4) foi enunciado por Darbo [3] no caso $\mu = \alpha$. Uma consequência importante é o conhecido teorema de Krasnoselskii:

(2.5) Corolário (Krasnoselskii). Seja Γ um subconjunto convexo, fechado, limitado e não vazio do espaço de Banach X. Se $F : \Gamma \longrightarrow X$ é completamente contínua, $G : \Gamma \longrightarrow X$ é uma contração, e $(F+G)(\Gamma) \subset \Gamma$, então $F + G$ tem ao menos um ponto fixo.

Demonstração. De (2.2) vem que $F + G$ é uma α-contração. Aplicando (2.4) vem a tese. ∎

O teorema seguinte é uma versão abstrata da generalização de Sadovskii [26] do teorema de Darbo.

(2.6) Teorema. Seja Γ um subconjunto convexo, fechado e não vazio do espaço de Banach X, e μ uma medida de não compacidade em X. Se $F : \Gamma \longrightarrow \Gamma$ é uma aplicação μ-condensante limitada, então F tem pelo menos um ponto fixo.

Demonstração. Seja $D = \overline{\mathrm{conv}(F(\Gamma))}$. Então D é um subconjunto convexo, fechado, limitado e não vazio de Γ, e $F(D) \subset D$. Tomemos $x_0 \in D$. Seja $\mathcal{A}$ a família de todos os subconjuntos convexos e fechados $A \subset D$ tais que $x_0 \in A$ e $F(A) \subset A$. Essa família é não vazia, pois $D \in \mathcal{A}$. Seja $A_0 = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$. Então A_0 é convexo, fechado, e $x_0 \in A_0$. Além disso, temos que $F(A_0) \subset A_0$: se $x \in A_0$ então $x \in A$ para todo

$A \in \mathcal{A}$, donde $F(x) \in F(A) \subset A$, e portanto $F(x) \in A_0$. Afirmamos que A_0 é compacto. Se isso não ocorresse, então $\mu(F(A_0)) < \mu(A_0)$, já que F é μ-condensante. Seja $A_1 = \overline{\text{conv}}(F(A_0) \cup \{x_0\})$. De $F(A_0) \cup \{x_0\} \subset A_0$ decorre que $A_1 \subset A_0$, donde $F(A_1) \subset F(A_0) \subset A_1$. Portanto $A_1 \in \mathcal{A}$, e $A_0 \subset A_1$. Logo $A_1 = A_0$. Mas

$$\begin{aligned}\mu(A_1) &= \mu(\overline{\text{conv}}(F(A_0) \bigcup \{x_0\})) \\ &= \mu(F(A_0) \bigcup \{x_0\}) \\ &= \max\{\mu(F(A_0)), \mu(\{x_0\})\} \\ &= \mu(F(A_0)) \\ &< \mu(A_0),\end{aligned}$$

o que é absurdo. Logo A_0 é compacto. Pelo teorema de Schauder, F tem pelo menos um ponto fixo em A_0. ∎

A proposição seguinte é um exemplo de aplicação do teorema (2.6). Na demonstração aparecerá uma ω-contração que não se enquadra nos casos fornecidos pela proposição (2.2).

(2.7) <u>Proposição</u>. Sejam $r > 0$ e $K : [-r,r]\times[-r,r]\times[-r,r] \to \mathbb{R}$ uma função contínua, com $\|K\| = \sup\{|K(t,s,u)| : t,s,u \in [-r,r]\} < 1$. Dada $f \in C([-r,r], \mathbb{R})$, com $\|f\| \leq r(1 - \|K\|)$, existe pelo menos uma solução $x \in C([-r,r], \mathbb{R})$ da equação

$$x(t) = f(t) + \int_0^{x(t)} K(t,s,x(s))\, ds,$$

com $\|x\| \leq \dfrac{\|f\|}{1 - \|K\|} \leq r.$

Demonstração. Seja Γ a bola fechada em $C([-r,r], \mathbb{R})$ com centro na origem e raio r, e $F : \Gamma \longrightarrow C([-r,r], \mathbb{R})$ definida por $(Fy)(t) = f(t) + \int_0^{y(t)} K(t,s,y(s))\, ds$. Queremos provar que F tem um ponto fixo. De $|(Fy)(t)| \leq \|f\| + \|K\|\ |y(t)| \leq \|f\| + \|K\| r \leq r$ vem que $F(\Gamma) \subset \Gamma$. É facil verificar que F é contínua em Γ. Provemos que F é uma ω-contração. Temos que

$$|(Fy)(t) - (Fy)(t')|$$

$$\leq |f(t) - f(t')| + \left|\int_0^{y(t)} K(t,s,y(s))ds - \int_0^{y(t')} K(t',s,y(s))ds\right|$$

$$\leq |f(t) - f(t')| + \left|\int_0^{y(t)} K(t,s,y(s))ds - \int_0^{y(t')} K(t,s,y(s))ds\right|$$

$$+ \left|\int_0^{y(t')} K(t,s,y(s))ds - \int_0^{y(t')} K(t',s,y(s))ds\right|$$

$$\leq |f(t) - f(t')| + \left|\int_{y(t')}^{y(t)} K(t,s,y(s))ds\right|$$

$$+ \left|\int_0^{y(t')} |K(t,s,y(s)) - K(t',s,y(s))|ds\right|$$

$$\leq |f(t) - f(t')| + \|K\|\ |y(t) - y(t')|$$

$$+ r \max\{|K(t,s,y(s)) - K(t',s,y(s))| : s \in [-r,r]\}.$$

Tomemos $\varepsilon > 0$. Pela continuidade uniforme de f e de K existe $\delta_1 > 0$ tal que para $t,t' \in [-r,r]$ e $|t - t'| \leq \delta_1$, temos $|f(t) - f(t')| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ e $\max\{|K(t,s,u) - K(t',s,u)| : s,u \in [-r,r]\} \leq \frac{\varepsilon}{2r}$. Nestas condições, $|(Fy)(t) - (Fy)(t')| \leq \|K\| \, |y(t) - y(t')| + \varepsilon$, para qualquer $y \in \Gamma$. Portanto se $A \subset \Gamma$ temos que

$$\begin{aligned}\omega(F(A)) &\leq \sup\{|(Fy)(t) - (Fy(t')| : y \in A,\ t,t' \in [-r,r],\ |t - t'| \leq \delta\} \\ &\leq \|K\| \sup\{|y(t) - y(t')| : y \in A,\ t,t' \in [-r,r],\ |t - t'| \leq \delta\} + \varepsilon\end{aligned}$$

para $0 < \delta \leq \delta_1$. Segue-se que $\omega(F(A)) \leq \|K\| \, \omega(A) + \varepsilon$. Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, temos que $\omega(F(A)) \leq \|K\| \, \omega(A)$, e portanto F é uma ω-contração. De (2.6) (ou (2.4)) decorre que F tem pelo menos um ponto fixo. ∎

(2.8) Observação. É interessante notar que o operador F considerado na demonstração anterior não é necessariamente um operador compacto. Para ver isso, basta fazer $r = 1$, $K(t,s,u) = \frac{1}{2}$ para $t,s,u \in [-1,1]$, e $f(t) = \frac{1}{2}$ para $t \in [-1,1]$. Então Γ é a bola unitária fechada em $C([-1,1], \mathbb{R})$, e $F : \Gamma \longrightarrow \Gamma$ é dada por $(Fy)(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} y(t)$. É claro que F não é compacto, pois a sequência limitada $y_n(t) = t^n$ é levada na sequência $(Fy_n)(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} t^n$, que não tem subsequência convergente em $C([-1,1], \mathbb{R})$.

3. Dependência contínua para pontos fixos de operadores condensantes

(3.1) Definição. Sejam Λ e E espaços métricos. Consideremos uma multifunção $\Phi : \Lambda \longrightarrow E$, ou seja, uma aplicação $\Phi : \Lambda \longrightarrow P(E)$ (o conjunto das partes de E). Dizemos que Φ é semicontínua superiormente em $\lambda_0 \in \Lambda$ se para cada aberto $V \subset E$, tal que $\Phi(\lambda_0) \subset V$, existir um aberto $U \subset \Lambda$, com $\lambda_0 \in U$, tal que $\Phi(U) = \bigcup_{\lambda \in U} \Phi(\lambda) \subset V$. Se Φ for semicontínua superiormente em todo $\lambda_0 \in \Lambda_0 \subset \Lambda$, diremos que Φ é semicontínua superiormente em Λ_0.

Os teoremas seguintes, devidos a Cheng [2], são generalizações de resultados de Hale [10].

(3.2) Teorema. Seja Λ um espaço métrico, X um espaço de Banach, μ uma medida de não compacidade em X, Γ um subconjunto fechado de X, e $G : \Lambda \times \Gamma \longrightarrow \Gamma$ uma aplicação limitada satisfazendo as hipóteses seguintes:

(I) existe $\Lambda_0 \subset \Lambda$ tal que G é contínua em $\Lambda_0 \times \Gamma$;

(II) para todo $\lambda \in \Lambda$ a equação $x = G(\lambda, x)$ tem pelo menos uma solução $x \in \Gamma$;

(III) para todo $\Gamma' \subset \Gamma$, com $\mu(\Gamma') > 0$, existe um aberto $U \subset \Lambda$, com $\Lambda_0 \subset U$, tal que $\mu(G(\Lambda' \times \Gamma')) < \mu(\Gamma')$, para qualquer subconjunto relativamente compacto e não vazio $\Lambda' \subset U$.

Então a multifunção $\Phi : \Lambda \longrightarrow \Gamma$ definida por $\Phi(\lambda) = \{x \in \Gamma : G(\lambda, x) = x\}$ é semicontínua superiormente em Λ_0.

Demonstração. Suponhamos que Φ não é semicontínua superiormente em $\lambda_0 \in \Lambda_0$. Então existe um aberto A contendo $\Phi(\lambda_0)$, tal que para cada $n \geq 1$ existe $\lambda_n \in \Lambda$, com $d(\lambda_n, \lambda_0) < \frac{1}{n}$ e $\Phi(\lambda_n) \not\subset A$. Para cada $n \geq 1$, tomemos $x_n \in \Phi(\lambda_n) \sim A$, e seja $\Gamma' = \{x_n : n \geq 1\}$. Suponhamos que $\mu(\Gamma') > 0$. Tomemos k suficientemente grande, de modo que $\Lambda' = \{\lambda_n : n \geq k\} \subset U$. Podemos fazer isto, pois $\lambda_n \longrightarrow \lambda_0 \in \Lambda_0 \subset U$. Como Λ' é relativamente compacto, temos que $\mu(\Gamma') = \mu(\{x_n : n \geq k\}) \leq \mu(G(\Lambda' \times \Gamma')) < \mu(\Gamma')$, o que é absurdo. Logo $\mu(\Gamma') = 0$, e $\overline{\Gamma'}$ é compacto. Sendo (x_n) uma seqüência em $\overline{\Gamma'}$, dela podemos extrair uma subseqüência (x_{n_j}), com $x_{n_j} \longrightarrow x_0 \in \overline{\Gamma'}$. Logo, $(\lambda_{n_j}, x_{n_j}) \longrightarrow (\lambda_0, x_0)$, e $G(\lambda_{n_j}, x_{n_j}) \longrightarrow G(\lambda_0, x_0)$. Como $G(\lambda_{n_j}, x_{n_j}) = x_{n_j}$, temos que $x_0 = G(\lambda_0, x_0)$, ou seja, $x_0 \in \Phi(\lambda_0)$. Entretanto $x_{n_j} \notin A$ para qualquer j, e como o complementar de A é fechado segue-se que $x_0 \notin A$. De $\Phi(\lambda_0) \subset A$ vem que $x_0 \notin \Phi(\lambda_0)$, o que é absurdo. ∎

(3.3) Teorema. Seja Λ um espaço métrico, X um espaço de Banach munido de uma medida de não compacidade uniformemente contínua μ, Γ um subconjunto convexo, fechado e não vazio de X, e $G : \Lambda \times \Gamma \longrightarrow \Gamma$ uma aplicação limitada tal que

(i) para cada $\lambda \in \Lambda$, $G(\lambda, \cdot)$ é μ-condensante;

(ii) para cada $x \in \Gamma$, $G(\cdot, x)$ é contínua em Λ, sen do a continuidade uniforme em relação a $x \in \Gamma$. Então a multifunção $\Phi : \Lambda \longrightarrow \Gamma$ definida por $\Phi(\lambda) = \{x \in \Gamma : G(\lambda,x) = x\}$ é semicontínua superiormente em Λ.

Demonstração. $G(\lambda,\cdot)$, sendo μ-condensante, é contínua em Γ. Portanto a hipótese (I) do teorema anterior é consequência de (i) e (ii), com $\Lambda_0 = \Lambda$. Pelo teorema (2.6) a hipótese (II) também é satisfeita. Resta provar que (III) se verifica. Tomemos um subconjunto relativamente compacto $\Lambda' \subset \Lambda$ e provemos que $\mu(G(\Lambda' \times \Gamma')) < \mu(\Gamma')$, para todo subconjunto limitado $\Gamma' \subset \Gamma$, com $\mu(\Gamma') > 0$. Dado Γ', temos que $\mu(G(\lambda,\Gamma')) < \mu(\Gamma')$, para todo $\lambda \in \Lambda$. De (ii) e da continuidade de μ, temos que a função $\lambda \longmapsto \mu(G(\lambda,\Gamma'))$ é contínua em Λ, e portanto assume um máximo no compacto $\overline{\Lambda'}$. Temos então que

$$\max\{\mu(G(\lambda,\Gamma')) : \lambda \in \overline{\Lambda'}\} < \mu(\Gamma').$$

Seja $\varepsilon = \mu(\Gamma') - \max\{\mu(G(\lambda,\Gamma')) : \lambda \in \overline{\Lambda'}\}$. Como μ é uniformemente contínua, existe $\rho > 0$ tal que para quaisquer subconjuntos limitados $A, B \subset X$ temos que

$$D(A, B) \leq \rho \Longrightarrow |\mu(A) - \mu(B)| < \varepsilon.$$

De (ii) e da compacidade de $\overline{\Lambda'}$ decorre que existe $\delta > 0$ tal que para $\lambda,\lambda' \in \Lambda'$ temos que

$$d(\lambda,\lambda') < \delta \Longrightarrow \|G(\lambda,x) - G(\lambda',x)\| < \rho, \ \forall x \in \Gamma.$$

Seja $S_1,\ldots,S_k$ uma cobertura finita de Λ', tal que $\operatorname{diam}(S_i) < \delta$, $i = 1,\ldots,k$. Para cada i, tomemos $\lambda_i \in S_i$. Afir mamos que $G(\Lambda' \times \Gamma') \subset \bigcup_{i=1}^{k} N_\rho(G(\lambda_i,\Gamma'))$. Seja $x \in G(\Lambda' \times \Gamma')$. Então $x = G(\lambda,y)$, com $\lambda \in \Lambda'$ e $y \in \Gamma'$. Seja i tal que $\lambda \in S_i$. Temos que $\|x - G(\lambda_i,y)\| = \|G(\lambda,y) - G(\lambda_i,y)\| < \rho$, donde $x \in N_\rho(G(\lambda_i,\Gamma'))$, e a afirmação está demonstrada. Portanto

$$\begin{aligned}\mu(G(\Lambda' \times \Gamma')) &\le \mu(\bigcup_{i=1}^{k} N_\rho(G(\lambda_i,\Gamma'))) \\ &= \max\{\mu(N_\rho(G(\lambda_i,\Gamma'))) : i=1,\dots,k\} \\ &< \max\{\mu(G(\lambda_i,\Gamma')) : i=1,\dots,k\} + \varepsilon \\ &\le \mu(\Gamma').\end{aligned}$$ ∎

Encerraremos esta seção com um exemplo de aplicação do teorema (3.3). Sejam $k > 0$, e Λ o conjunto dos pares (f,K), onde $K : [-r,r] \times [-r,r] \times [-r,r] \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, com $\|K\| = \sup\{|K(t,s,u)| : t,s,u \in [-r,r]\} < 1$, e $f \in C([-r,r],\mathbb{R})$ é tal que $\|f\| \le r(1-\|K\|)$.

(3.4) <u>Proposição</u>. A multifunção $\Phi : \Lambda \longrightarrow C([-r,r],\mathbb{R})$ que a cada par $(f,K) \in \Lambda$ associa o conjunto das soluções $x \in C([-r,r],\mathbb{R})$ da equação

$$x(t) = f(t) + \int_0^{x(t)} K(t,s,x(s))ds$$

é semicontínua superiormente em Λ.

<u>Demonstração</u>. Seja Γ a bola fechada em $C([-r,r],\mathbb{R})$ com centro na origem e raio r, e $G : \Lambda \times \Gamma \longrightarrow \Gamma$ a aplicação definida por

$$G(f,K,y)(t) = f(t) + \int_0^{y(t)} K(t,s,y(s))ds.$$

Temos então que $\Phi(f,K)=\{y \in \Gamma : G(f,K,y)=y\}$. Com a mesma demonstração que a proposição (2.7) prova-se que $G(f,K,\cdot)$ é ω-condensante, para cada $(f,K) \in \Lambda$. É claro que para cada $y \in \Gamma$, $G(\cdot,\cdot,y)$ é contínua em Λ, sendo a continuidade uniforme em relação a $y \in \Gamma$. A tese decorre do teorema (3.3). ∎

4. Operadores lineares condensantes e a alternativa de Fredholm

(4.1) A alternativa de Fredholm. Sejam X e Y espaços de Banach, X^* e Y^* os respectivos duais topológicos, $T : X \longrightarrow Y$ uma aplicação linear contínua, e $T^* : Y^* \longrightarrow X^*$ a adjunta de T. Dizemos que vale a alternativa de Fredholm para o par de equações $T(x)=v$ e $T^*(y^*)=u^*$ se

(i) uma e apenas uma das possibilidades (a) ou (b) ocorre:

(a) para quaisquer $v \in Y$ e $u^* \in X^*$ as equações $T(x)=v\,(x \in X)$ e $T^*(y^*)=u^*(y^* \in Y^*)$ tem solução única,

(b) as equações homogêneas $T(x)=0\ (x \in X)$ e $T^*(y^*)=0\ (y^* \in Y^*)$ tem soluções não nulas;

(ii) caso ocorra (b), sejam verdadeiras as seguintes asserções:

(c) a dimensão do espaço vetorial das soluções de $T(x)=0\ (x \in X)$ é finita e é igual à dimensão do espaço vetorial das soluções de $T^*(y^*)=0$ $(y^* \in Y^*)$,

(d) para todo $v \in Y$, a equação $T(x)=v$ $(x \in X)$ tem solução se e somente se $(v,y^*)=0$ para todas as soluções $y^* \in Y^*$ de $T^*(y^*)=0$,

(e) para todo $u^* \in X^*$, a equação $T^*(y^*)=u^*$ $(y^* \in Y^*)$ tem solução se e somente se $(x,u^*)=0$ para todas as soluções $x \in X$ de $T(x)=0$.

(4.2) Definições. Sejam X e Y espaços de Banach e T uma aplicação linear contínua de X em Y. Denotamos por $\mathrm{nul}(T)$ a $\dim(\ker(T))$ e por $\mathrm{def}(T)$ a $\dim(Y/T(X))$, e dizemos que T é semi-Fredholm se

(i) $T(X)$ é fechado,

(ii) $\mathrm{nul}(T)$ e $\mathrm{def}(T)$ não são ambos infinitos.

Se T é semi-Fredholm definimos o índice de T por

$$\mathrm{ind}(T)=\mathrm{nul}(T)-\mathrm{def}(T).$$

Se $\mathrm{nul}(T)$ e $\mathrm{def}(T)$ forem ambos finitos dizemos que T é de Fredholm.

(4.3) Observações. Demonstra-se que

$$\mathrm{def}(T)<\infty \Longrightarrow T(X) \text{ é fechado}$$

(vide [24]), e portanto se T é de Fredholm então T é semi-Fredholm.

A motivação para as definições acima reside no seguinte fato: T é de Fredholm de índice zero se e somente se vale a alternativa de Fredholm para o par de equações $T(x)= v$ e $T^*(y^*)= u^*$.

Para demonstrarmos o teorema (4.5) usaremos o seguinte resultado da teoria da estabilidade de aplicações semi-Fredholm [16]: o índice é uma função constante em cada componente conexa do conjunto das aplicações semi-Fredholm.

(4.4) <u>Lema</u>. Seja X um espaço vetorial normado, munido de uma medida de não compacidade algebricamente semi-aditiva μ (veja (1.17)), e $T : X \longrightarrow X$ um operador linear contínuo, tal que T^n é μ-condensante, para algum $n \geq 1$. Se $K \subset X$ é compacto e $D \subset X$ é fechado e limitado então $D \cap (I - T)^{-1}(K)$ é compacto.

<u>Demonstração</u>. Seja $K_1 = D \cap (I - T)^{-1}(K) = \{x \in D : (I - T)(x) \in K\}$. Podemos calcular μ em K_1, pois K_1 é limitado. Como K_1 é fechado, basta provar que $\mu(K_1)= 0$. Se $x \in K_1$, então $x= T(x) + y$ para algum $y \in K$. Substituindo x à direita, ficamos com $x= T^2(x) + T(y) + y$, e continuando obtemos

$$(*) \qquad x= T^n(x) + (\sum_{i=0}^{n-1} T^i)(y).$$

O conjunto $K_2 = (\sum_{i=0}^{n-1} T^i)(K)$ é compacto, pois é a imagem de um compacto por uma aplicação contínua. De (*) segue-se que $K_1 \subset T^n(K_1) + K_2$, e portanto

$$\mu(K_1) \le \mu(T^n(K_1)) + \mu(K_2) = \mu(T^n(K_1)),$$

o que implica $\mu(K_1) = 0$. ∎

O teorema seguinte é uma versão abstrata de um resultado de Petryshyn [25].

(4.5) <u>Teorema</u>. Seja X um espaço de Banach, munido de uma medida de não compacidade μ, e $T : X \longrightarrow X$ um operador linear contínuo. Suponhamos que μ é semi-homogênea e algebricamente semi-aditiva (veja (1.17)). Se T^n é μ-condensante para algum $n \ge 1$, então $I - T$ é de Fredholm de índice zero.

<u>Demonstração</u>. Provemos que $\mathrm{nul}(I - T) < \infty$. Se isso não ocorresse a esfera $S = \{x \in \ker(I - T) : \|x\| = 1\}$ não seria compacta, ou seja, $\mu(S) > 0$. Mas $T(S) = S$, e portanto $T^n(S) = S$. Como T^n é μ-condensante, segue-se que $\mu(S) = \mu(T^n(S)) < \mu(S)$. Logo $\mathrm{nul}(I - T) < \infty$.

Provaremos agora que $(I - T)(X)$ é fechado. Pelo teorema (6.5) de [5, capítulo VI], basta provar que $I - T$ leva conjuntos fechados e limitados em conjuntos fechados. Tomemos então um subconjunto fechado e limitado $D \subset X$. Seja (x_k) uma seqüência em D tal que $y_k = x_k - T(x_k) \longrightarrow y$, para algum $y \in X$. Da compacidade de $K = \{y\} \cup \{y_k : k \ge 1\}$ e do lema (4.4) decorre que $D \cap (I - T)^{-1}(K)$ é compacto. Como $\{x_k : k \ge 1\} \subset D \cap (I - T)^{-1}(K)$, existe uma subseqüência (x_{k_j})

que converge para $x \in D$. Logo $x_{k_j} - T(x_{k_j}) \longrightarrow x - T(x)$, e portanto $y = x - T(x) \in (I - T)(D)$. Isto mostra que $(I - T)(D)$ é fechado.

Até agora demonstramos que $I - T$ é semi-Fredholm. Como $(\lambda T)^n$ é μ-condensante para cada $\lambda \in [0,1]$, a mesma argumentação garante que $F_\lambda = I - \lambda T$ é semi-Fredholm para cada $\lambda \in [0,1]$, e portanto $F_0 = I$ e $F_1 = I - T$ então na mesma componente conexa do conjunto dos operadores semi-Fredholm. Da última observação em (4.3) segue-se que $\operatorname{ind}(I - T) = \operatorname{ind}(I) = 0$, ou seja, $I - T$ é de Fredholm de índice zero. ∎

CAPÍTULO II

PROPRIEDADES ESPECIAIS DE CERTAS MEDIDAS DE NÃO COMPACIDADE

Neste capítulo estudaremos propriedades específicas de algumas medidas de não compacidade. Na seção (5) calcularemos $\alpha(B)$ e $\chi(B)$, onde B é a bola unitária de um espaço vetorial normado de dimensão infinita. Nas seções (6), (7) e (8) obteremos relações entre certas medidas de não compacidade, que generalizam os critérios usuais de compacidade.

5. Uma propriedade de α e χ

Seja X um espaço vetorial normado. A bola unitária $B = \{x \in X : \|x\| \le 1\}$ é compacta se e somente se $\dim(X) < \infty$. Temos então que $\alpha(B) = \chi(B) = 0$ se e somente se $\dim(X) < \infty$. Nesta seção provaremos que $\alpha(B) = 2$ e $\chi(B) = 1$, sempre que $\dim(X) = \infty$.

Começaremos enunciando um fato trivial, que vale mesmo quando consideramos α e χ definidas no conjunto das partes limitadas de um espaço métrico E (vide (1.14)).

(5.1) Proposição. Para todo subconjunto limitado $A \subset E$ temos que $\chi(A) \leq \alpha(A) \leq 2\chi(A)$.

O teorema de Lusternik, Schnirelman e Borsuk, enunciado a seguir, nos permitirá calcular $\alpha(B)$ e $\chi(B)$, no caso de dimensão infinita. Para a demonstração, veja-se [8].

(5.2) Lema (Lusternik - Schnirelman - Borsuk). Seja S^{n-1} a esfera unitária $\{x : |x| = 1\}$ do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$. Se $\{A_1, \ldots, A_k\}$ é uma família de conjuntos fechados com as propriedades

(i) $\bigcup_{i=1}^{k} A_i = S^{n-1}$

(ii) nenhum dos conjuntos A_i $(i=1,\ldots,k)$ contém um par de pontos antípodas (isto é, x e $-x$)

então $k > n$.

A partir desse resultado, obtem-se facilmente a seguinte generalização:

(5.3) Lema. Seja V um espaço normado real com dimensão finita n, e seja $S = \{x \in V : \|x\| = 1\}$. Se $\{A_1, \ldots, A_k\}$ é uma cobertura fechada de S e se nenhum dos A_i contém um par de pontos antípodas, então $k > n$.

Demonstração. Primeiro consideremos o caso $V = \mathbb{R}^n$. Como todas as normas no $\mathbb{R}^n$ são equivalentes, as esferas S^{n-1}

(na norma euclidiana $|\cdot|$) e S (na norma arbitrária $\|\cdot\|$) são homeomorfas por um homeomorfismo h que leva pontos antípodas em pontos antípodas. Basta tomarmos $h : S^{n-1} \longrightarrow S$ dado por $h(x) = \frac{1}{\|x\|} x$. Isso demonstra o lema para $V = \mathbb{R}^n$. Se V é um espaço n-dimensional real qualquer, basta tomarmos um isomorfismo $T : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ e escolhermos a norma no $\mathbb{R}^n$ de modo que T seja uma isometria. ∎

Podemos agora demonstrar o resultado principal desta seção, devido a Furi e Vignoli [6] e Nussbaum [23].

(5.4) Teorema. Seja X um espaço vetorial normado (real ou complexo) de dimensão infinita, $S = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ e $B = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$. Então $\alpha(S) = \alpha(B) = 2$ e $\chi(S) = \chi(B) = 1$.

Demonstração. Sendo $B = \operatorname{conv}(S)$, temos que $\alpha(S) = \alpha(B)$ e $\chi(S) = \chi(B)$. Como $\operatorname{diam}(S) = 2$, temos que $\alpha(S) \leq 2$. Suponhamos, por absurdo, que $\alpha(S) < 2$. Então existem $A_1, \dots, A_n$, com $\operatorname{diam}(A_i) < 2$ $(i=1,\dots,n)$, tais que $S = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Como $\bar{A}_i \subset S$ e $\operatorname{diam}(\bar{A}_i) = \operatorname{diam}(A_i)$, podemos supor que os A_i são fechados. Seja $V \subset X$ o espaço normado real formado pelas combinações lineares, com coeficientes reais, de n vetores linearmente independentes de X. Então $\{V \cap A_1, \dots, V \cap A_n\}$ é uma cobertura fechada de esfera unitária $V \cap S$ de V. Pelo lema (5.3), ao menos um dos conjuntos $V \cap A_i$ contém um par de pontos antípodas: para esse conjunto, temos $2 \leq \operatorname{diam}(V \cap A_i) \leq \operatorname{diam}(A_i)$, o que é absurdo. Logo $\alpha(S) = \alpha(B) = 2$. É claro que $\chi(S) = \chi(B) \leq 1$. De $\alpha(S) \leq 2\chi(S)$ decorre que $\chi(S) = \chi(B) = 1$. ∎

(5.5) Corolário. Seja $\dim(X) = \infty$, A um subconjunto totalmente limitado de X, e

$$N_r(A) = \{x \in X : \|x - y\| < r \text{ para algum } y \in A\}.$$

Então $\alpha(N_r(A)) = 2r$ e $\chi(N_r(A)) = r$.

6. Uma generalização do teorema de Ascoli

Se M e E são espaços métricos compactos e H é um subconjunto limitado de $C(M,E)$, o teorema de Ascoli nos diz que $\alpha(H) = 0$ se e somente se $\omega(H) = 0$. Existirá relação entre $\alpha(H)$ e $\omega(H)$ no caso geral em que E não é necessariamente compacto, nem temos necessariamente $\omega(H) = 0$? A resposta a essa pergunta foi dada por Nussbaum [22], que obteve desigualdades envolvendo $\alpha(H)$ e $\omega(H)$, e mostrou com exemplos que as desigualdades obtidas são as melhores que se pode conseguir. Para chegarmos a esse resultado, que generaliza o teorema clássico de Ascoli, precisaremos de dois lemas e das notações introduzidas a seguir.

(6.1) Notações. Se A é um conjunto e (E,d) é um espaço métrico, denotaremos por $\mathbb{B}(A,E)$ o espaço métrico das funções limitadas de A em E. A métrica ρ em $\mathbb{B}(A,E)$ é definida por $\rho(f,g) = \sup\{d(f(a),g(a)) : a \in A\}$.

Sejam (M,d) e (E,d') espaços métricos. Se $H \subset \mathbb{B}(M,E)$

e $m \in M$ definimos $H(m) = \{f(m) : f \in H\}$. Para $\delta > 0$ e $m \in M$, seja $V_\delta(m) = \{m' \in M : d(m,m') \leq \delta\}$. Dado $H \subset \mathbb{B}(M,E)$, denotaremos por $H(V_\delta(m))$ o espaço métrico $\{f|_{V_\delta(m)} : f \in H\}$, com a métrica induzida por $\mathbb{B}(V_\delta(m), E)$. Se H é limitado, escrevemos $\alpha(m,\delta;H) = \alpha(H(V_\delta(m)))$ e definimos

$$\alpha(m;H) = \inf\{\alpha(m,\delta;H) : \delta > 0\} = \lim_{\delta \to 0^+} \alpha(m,\delta;H)$$

(pois $\alpha(m,\delta;H)$ é uma função crescente de δ).

O lema seguinte foi enunciado por Nussbaum para $H \subset C(M,E)$. A demonstração é exatamente a mesma.

(6.2) <u>Lema</u> (Nussbaum [22]). Seja (M,d) um espaço métrico compacto e (E,d') um espaço métrico. Se H é um subconjunto limitado de $\mathbb{B}(M,E)$ então

$$\alpha(H) = \sup\{\alpha(m;H) : m \in M\}.$$

<u>Demonstração</u>. Seja $\alpha_0 = \sup\{\alpha(m;H) : m \in M\}$. Como $\alpha(H(V_\delta(m))) \leq \alpha(H)$ para quaisquer $\delta > 0$ e $m \in M$, temos que $\alpha(m;H) \leq \alpha(H)$ e portanto $\alpha_0 \leq \alpha(H)$. Para provar a desigualdade contrária fixemos $\varepsilon > 0$, e vamos mostrar que $\alpha(H) \leq \alpha_0 + \varepsilon$. Pela definição de α_0, para todo $m \in M$ existe $\delta(m) > 0$ tal que $\alpha(H(V_\delta(m))) \leq \alpha_0 + \frac{\varepsilon}{2}$, para $0 < \delta \leq \delta(m)$. Como M é compacto, existe um número finito de pontos $m_i \in M$, $1 \leq i \leq k$, tais que $M = \bigcup_{i=1}^{k} V_{\delta_i}(m_i)$, sendo $\delta_i = \delta(m_i)$. Da definição de α vem que dado i, $1 \leq i \leq k$, existe um número finito de conjuntos $S_{ij} \subset H(V_{\delta_i}(m_i))$, $1 \leq j \leq n_i$, tais que

$H(V_{\delta_i}(m_i)) = \bigcup_{j=1}^{n_i} S_{ij}$ e $\operatorname{diam}(S_{ij}) \leq (\alpha_0 + \frac{\varepsilon}{2}) + \frac{\varepsilon}{2} = \alpha_0 + \varepsilon$. Seja $\mathcal{J}$ o conjunto finito formado pelas k-uplas de inteiros $J = (j_1, \ldots, j_k)$, com $1 \leq j_i \leq n_i$. Se $J \in \mathcal{J}$, definimos $H_J = \{f \in H : f|_{V_{\delta_i}(m_i)} \in S_{ij_i},\ J = (j_1, \ldots, j_k)\}$. Temos então que $H = \bigcup_{J \in \mathcal{J}} H_J$. Além disso, $\operatorname{diam}(H_J) \leq \alpha_0 + \varepsilon$: tomemos $f, g \in H_J$ e $m \in M$, e provemos que $d'(f(m), g(m)) \leq \alpha_0 + \varepsilon$. Temos que $m \in V_{\delta_i}(m_i)$ para algum i, $1 \leq i \leq k$, e pela definição de H_J existe j_i tal que $f|_{V_{\delta_i}(m_i)}$ e $g|_{V_{\delta_i}(m_i)}$ pertencem a S_{ij_i}. Segue-se que $\sup\{d'(f(m'), g(m')) : m' \in V_{\delta_i}(m_i)\} \leq \alpha_0 + \varepsilon$, e em particular $d'(f(m), g(m)) \leq \alpha_0 + \varepsilon$. Logo $\operatorname{diam}(H_J) \leq \alpha_0 + \varepsilon$ e $\alpha(H) \leq \alpha_0 + \varepsilon$. ∎

(6.3) <u>Lema</u> (Michael [21]). Se N é um espaço métrico compacto então a família das partes fechadas e não vazias de N, munida da métrica de Hausdorff, é também um espaço métrico compacto.

Usando os lemas (6.2) e (6.3), Nussbaum provou o teorema seguinte, que generaliza o resultado clássico de Ascoli. Omitiremos a demonstração, pois as idéias envolvidas estão contidas na demonstração do teorema (7.1).

(6.4) <u>Teorema</u> (Nussbaum [22]). Seja (M,d) um espaço métrico compacto, (E,d') um espaço métrico, e H um subconjunto limitado de $C(M,E)$. Sejam

$$p = \omega(H) \text{ e } q = \sup\{\alpha(H(m)) : m \in M\}.$$

Temos então que

$$(*) \qquad \max\{\frac{1}{2} p, q\} \le \alpha(H) \le 2p + q.$$

Se existir um subconjunto compacto $N \subset E$ tal que $f(m) \in N$ para quaisquer $f \in H$ e $m \in M$, então

$$(**) \qquad \frac{1}{2} p \le \alpha(H) \le p.$$

(6.5) <u>Corolário</u> (Ambrosetti [1]). Seja (M,d) um espaço métrico compacto, (E,d') um espaço métrico, e H um subconjunto limitado e equicontínuo de $C(M,E)$. Então $\alpha(H) = \sup\{\alpha(H(m)) : m \in M\}$.

Com os exemplos seguintes, Nussbaum [22] mostrou que as desigualdades dadas pelo teorema (6.4) são as melhores que se pode obter.

(6.6) <u>Exemplo</u>. Seja $M = [0,1]$, $E = \mathbb{R}$ e $H = \{x_n : n \ge 2\}$, onde

$$x_n(t) = \begin{cases} 0 & , \text{ para } t \in [0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}] ; \\ (t - \frac{1}{2} + \frac{1}{n}) \frac{n}{2} & , \text{ para } t \in [\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}] ; \\ 1 & , \text{ para } t \in [\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1]. \end{cases}$$

É claro que $p = \omega(H) = 1$. Além disso, de $x_n(t) \in [0, \frac{1}{2}]$ para $t \in [0, \frac{1}{2}]$ e $x_n(t) \in [\frac{1}{2}, 1]$ para $t \in [\frac{1}{2}, 1]$ decorre que $|x_n(t) - x_m(t)| \le \frac{1}{2}$, para quaisquer x_n, $x_m \in H$ e $t \in [0,1]$. Logo $\alpha(H) \le \frac{1}{2}$. Do teorema (6.4) vem que $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} p \le \alpha(H)$, e portanto $\alpha(H) = \frac{1}{2}\, p$.

(6.7) <u>Exemplo</u>. Seja $M = [0,1]$, $E = \mathbb{R}$ e $H = \{x_n : n \geq 2\}$, onde

$$x_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{, para } t \in [0, \frac{1}{2}]; \\ n(t - \frac{1}{2}) & \text{, para } t \in [\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}]; \\ 1 & \text{, para } t \in [\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1]. \end{cases}$$

É claro que $p = \omega(H) = 1$. Pelo teorema (6.4), temos que $\alpha(H) \leq 1$, já que $[0,1]$ é compacto, e $x_n(t) \in [0,1]$ para quaisquer $n \geq 2$ e $t \in [0,1]$. Provemos que $\alpha(H) = 1$. Se $\alpha(H) < 1$, então $H = \bigcup_{i=1}^{m} S_i$, com diam $(S_i) \leq c < 1$. Tomemos $f_i \in S_i$, $1 \leq i \leq m$. Cada f_i é contínua, logo existe $\delta > 0$ tal que $f_i(t) < 1 - c$ para $|t - \frac{1}{2}| < \delta$ e $1 \leq i \leq m$. Então para $n > \frac{1}{\delta}$ e $t_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{n}$, temos que $|x_n(t_n) - f_i(t)| > c$ para $1 \leq i \leq m$, e portanto $x_n \notin S_i$ para $1 \leq i \leq m$, o que é absurdo. Logo $\alpha(H) = 1 = p$.

(6.8) <u>Exemplo</u>. Seja $M = [0,1]$ e $E = \ell_1 = \{x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots) : \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| < \infty\}$, com a norma $\|x\| = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|$. Seja e_n o vetor de ℓ_1 com 1 na n-ésima posição e 0 nas restantes. Tomemos uma seqüência real estritamente crescente $(t_n)_{n=1}^{\infty}$, tal que $0 \leq t_n < 1$ e $\lim_{n\to\infty} t_n = 1$. Para todo n seja $I_n = [t_n, t_{n+1}]$ e $s_n = (t_n + t_{n+1})/2$, e vamos definir funções f_{nj}, $1 \leq j \leq n$, por

$$f_{nj}(t) = \begin{cases} 0 & , \text{ para } t \in [0,1] \sim I_n ; \\ \left(1 - \dfrac{2|t - s_n|}{(t_{n+1} - t_n)}\right) e_j & , \text{ para } t \in I_n . \end{cases}$$

Seja $H = \{f_{nj} : 1 \leq n < \infty, 1 \leq j \leq n\}$. Para $t \in I_n$, $H(t)$ é um subconjunto limitado de um subespaço n-dimensional de ℓ_1. Como $H(t) = \{0\}$ para $t \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, temos que $q = \sup\{\alpha(H(t)) : t \in [0,1]\} = 0$. É fácil ver que $p = \omega(H) = 1$. Pelo teorema (6.4), $\alpha(H) \leq 2p + q = 2$. Provemos que $\alpha(H) = 2$. Se $\alpha(H) < 2$, então $H = \bigcup_{i=1}^{m} S_i$, com $\mathrm{diam}(S_i) < 2$ para $1 \leq i \leq m$. Tomemos $n > m$, e consideremos as funções f_{nj}, $1 \leq j \leq n$. Como $n > m$, existe k, $1 \leq k \leq m$, tal que S_k contém f_{ni} e f_{nj}, $n \neq j$. Mas $\|f_{ni} - f_{nj}\| \geq \|f_{ni}(s_n) - f_{nj}(s_n)\| = \|e_i - e_j\| = 2$, o que é absurdo, pois $\mathrm{diam}(S_k) < 2$. Logo $\alpha(H) = 2p + q$.

As demonstrações do Lema (6.2) e das desigualdades $\alpha(H) \leq 2p + q$ e $\alpha(H) \leq p$ (de (*) e (**) de (6.4), respectivamente) não permaneceriam válidas se substituíssemos α por χ. Porém lembrando que $\chi(H) \leq \alpha(H)$, podemos estimar $\chi(H)$, a partir da estimativa correspondente para $\alpha(H)$.

(6.9) <u>Proposição</u>. Seja (M,d) um espaço métrico compacto, (E,d') um espaço métrico, e H um subconjunto limitado de $C(M,E)$. Temos então que $\frac{1}{2}\,\omega(H) \leq \chi(H)$. Se existir um compacto $N \subset E$ tal que $f(m) \in N$ para quaisquer $f \in H$ e $m \in M$, então $\frac{1}{2}\,\omega(H) \leq \chi(H) \leq \omega(H)$.

Demonstração. A demonstração de $\frac{1}{2}\,\omega(H) \leq \chi(H)$ é análoga a de $\frac{1}{2}\,\eta(H) \leq \alpha(H)$ (teorema (7.1)) e idêntica a de $\frac{1}{2}\,\omega(H) \leq \alpha(H)$ (teorema (6.4), demonstrado em [22]). A desigualdade $\chi(H) \leq \omega(H)$ decorre de $\alpha(H) \leq \omega(H)$ (teorema (6.4)) e de $\chi(H) \leq \alpha(H)$. ∎

No caso $M = [a,b]$ e $E = \mathbb{R}$, o teorema seguinte (Goebel [7]) nos dá um resultado muito mais forte. Não tivemos acesso à demonstração de Goebel, pois seu trabalho não foi publicado.

(6.10) Teorema. Para todo subconjunto limitado $H \subset C([a,b], \mathbb{R})$ temos que $\chi(H) = \frac{1}{2}\,\omega(H)$.

Demonstração. Basta provar que $\chi(H) \leq \frac{1}{2}\,\omega(H)$. Fixemos $\varepsilon > 0$, e provemos que $\chi(H) \leq \frac{1}{2}\,\omega(H) + \varepsilon$. Seja $\delta > 0$ tal que $\sup\{|f(t) - f(t')| : t,t' \in [a,b],\ |t - t'| \leq \delta,\ f \in H\} \leq \omega(H) + \varepsilon$. Tomemos uma divisão $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{k+1} = b$ do intervalo $[a,b]$, com $t_i - t_{i-1} < \frac{1}{2\delta}$, $1 \leq i \leq k+1$. Para $1 \leq i \leq k$ e $f \in H$, definimos

$$m_i(f) = \frac{\max\{f(t) : t \in [t_{i-1}, t_{i+1}]\} + \min\{f(t) : t \in [t_{i-1}, t_{i+1}]\}}{2}.$$

Temos portanto que $\sup\{|f(t) - m_i(f)| : t \in [t_{i-1}, t_{i+1}]\} \leq \frac{1}{2}\,\omega(H) + \frac{\varepsilon}{2}$.

Para cada i $(1 \leq i \leq k)$ o subconjunto $\{m_i(f) : f \in H\} \subset \mathbb{R}$ é limitado, e portanto admite uma $\frac{\varepsilon}{2}$- rede finita $\{m_{i1}, m_{i2}, \ldots, m_{in_i}\} \subset \mathbb{R}$. Segue-se que para quaisquer $f \in H$ e $i(1 \leq i \leq k)$ existe $j_i(1 \leq j_i \leq n_i)$ tal que

$$(*) \qquad \sup\{|f(t) - m_{ij_i}| : t \in [t_{i-1}, t_{i+1}]\} \leq \frac{1}{2}\, \omega(H) + \varepsilon.$$

Seja $\mathcal{J}$ o conjunto finito formado pelas k-uplas de inteiros da forma $J = (j_1, \ldots, j_k)$, com $1 \leq j_i \leq n_i$. Para cada $J \in \mathcal{J}$ definimos uma função $f_J \in C([a,b], \mathbb{R})$, linear em cada intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ $(1 \leq i \leq k+1)$, por $f_J(t_0) = m_{1j_1}$, $f_J(t_i) = m_{ij_i}$ para $1 \leq i \leq k$, e $f_J(t_{k+1}) = m_{kj_k}$. Afirmamos que $\{f_J : J \in \mathcal{J}\}$ é uma $(\frac{1}{2}\, \omega(H) + \varepsilon)$-rede para o conjunto H. Se $f \in H$, seja $J = (j_1, \ldots, j_k)$ em $\mathcal{J}$ tal que (*) se verifica para $1 \leq i \leq k$. Temos então que $|f(t) - f_J(t_{i-1})| \leq \frac{1}{2}\, \omega(H) + \varepsilon$ e $|f(t) - f_J(t_i)| \leq \frac{1}{2}\, \omega(H) + \varepsilon$ para qualquer $t \in [t_{i-1}, t_i]$ $(1 \leq i \leq k+1)$. Como $f_J(t)$ está entre $f_J(t_{i-1})$ e $f_J(t_i)$ para $t \in [t_{i-1}, t_i]$, segue-se que

$$\sup\{|f(t) - f_J(t)| : t \in [a,b]\} \leq \frac{1}{2}\, \omega(H) + \varepsilon ,$$

o que demonstra nossa afirmativa. ∎

7. Uma generalização do teorema de Ascoli para funções regradas

Nesta seção seguiremos um roteiro semelhante ao da seção anterior. Consideraremos o espaço métrico $G([a,b], E)$

constituído pelas funções regradas do intervalo $[a,b]$ no espaço métrico E. No conjunto das partes limitadas de $G([a,b], E)$ definimos a medida de não equiregracidade η de modo análogo ao caso de $G([a,b], \mathbb{R}^n)$ (veja-se (1.10) e (1.11)). Seja H um subconjunto limitado de $G([a,b], E)$. Vamos obter desigualdades envolvendo $\alpha(H)$ e $\eta(H)$, e como corolário imediato teremos o teorema de Ascoli para funções regradas que empregamos em (1.11).

(7.1) Teorema. Seja (E,d) um espaço métrico e H um subconjunto limitado de $G([a,b], E)$. Sejam

$$p = \eta(H) \text{ e } q = \sup\{\alpha(H(t)) : t \in [a,b]\}.$$

Temos então que

$$(*) \qquad \max\{\tfrac{1}{2}p, q\} \leq \alpha(H) \leq 2p + q.$$

Se existir um subconjunto compacto $N \subset E$ tal que $f(t) \in N$ para quaisquer $f \in H$ e $t \in [a,b]$, então

$$(**) \qquad \tfrac{1}{2}p \leq \alpha(H) \leq p.$$

Demonstração. Começaremos demonstrando que $\max\{\frac{1}{2}p, q\} \leq \alpha(H)$. De $\alpha(H(t)) \leq \alpha(H)$ vem que $q \leq \alpha(H)$. Para provar que $\frac{1}{2}p \leq \alpha(H)$, fixamos $\varepsilon > 0$ e vamos mostrar que $p \leq 2\alpha(H) + \varepsilon$. Da definição de $\alpha(H)$, existem $S_1, \ldots, S_n \subset H$ tais que $H = \bigcup_{i=1}^{n} S_i$ e $\operatorname{diam}(S_i) \leq \alpha(H) + \frac{\varepsilon}{3}$. Para cada i, tomemos $f_i \in S_i$. Como f_i é regrada, existe $d_i \in \mathbb{D}$ tal que $\omega'_{d_i}(f_i) \leq \frac{\varepsilon}{3}$ (para notações, vide (1.10)). Seja

$d_* = \bigcup_{i=1}^{n} d_i \in \mathbb{D}$. Provemos que $\omega^{\cdot}_{d_*}(f) \leq 2\alpha(H) + \varepsilon$, para qualquer $f \in H$: de fato, dada $f \in H$ existe i tal que $f \in S_i$. Se s e t pertencem ao mesmo sub-intervalo aberto de d_*, pertencem também ao mesmo sub-intervalo aberto de d_i (pois $d_i \subset d_*$). Logo

$$\begin{aligned} d(f(s),f(t)) &\leq d(f(s),f_i(s)) + d(f_i(s),f_i(t)) + d(f_i(t),f(t)) \\ &\leq \alpha(H) + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \alpha(H) + \frac{\varepsilon}{3} = 2\alpha(H) + \varepsilon, \end{aligned}$$

donde se segue que $\omega^{\cdot}_{d_*}(f) \leq 2\alpha(H) + \varepsilon$, e portanto $p = \eta(H) \leq 2\alpha(H) + \varepsilon$.

Para provar que $\alpha(H) \leq 2p + q$ é suficiente, pelo lema (6.2), provar que $\alpha(t;H) \leq 2p + q$ para todo $t \in [a,b]$. Tomemos $t \in \,]a,b[$ e $\varepsilon > 0$, e vamos mostrar que $\alpha(t;H) \leq 2p + q + \varepsilon$. Da definição de $\eta(H)$ vem que existe $\delta > 0$ tal que

$$\omega_{]t,t+\delta]}(H) = \sup\{d(f(t),f(t')) : t,t' \in \,]t,t+\delta], f \in H\} \leq p + \frac{\varepsilon}{3}$$

e $\omega_{[t-\delta,t[}(H) = \sup\{d(f(t),f(t')) : t,t' \in [t-\delta,t[,\ f \in H\} \leq p + \frac{\varepsilon}{3}$.

Sejam $t_1 \in [t-\delta,t[$ e $t_2 \in \,]t,t+\delta]$. Pela definição de α existem

$S^1_1, S^1_2, \ldots, S^1_{n_1} \subset H(t_1)$ tais que $H(t_1) = \bigcup_{i=1}^{n_1} S^1_i$ e $\operatorname{diam}(S^1_i) \leq q + \frac{\varepsilon}{3}$;

$S^2_1, S^2_2, \ldots, S^2_{n_2} \subset H(t_2)$ tais que $H(t_2) = \bigcup_{j=1}^{n_2} S^2_j$ e $\operatorname{diam}(S^2_j) \leq q + \frac{\varepsilon}{3}$;

$S_1, S_2, \ldots, S_n \subset H(t)$ tais que $H(t) = \bigcup_{k=1}^{n} S_k$ e $\operatorname{diam}(S_k) \leq q + \frac{\varepsilon}{3}$.

Para $1 \leq i \leq n_1$, $1 \leq j \leq n_2$ e $1 \leq k \leq n$ seja

$$T_{ijk} = \{f \in H(V_\delta(t)) : f(t_1) \in S^1_i,\ f(t_2) \in S^2_j \text{ e } f(t) \in S_k\}.$$

É claro que $H(V_\delta(t)) = \bigcup_{ijk} T_{ijk}$. Provemos que $\operatorname{diam}(T_{ijk}) \leq 2p + q + \varepsilon$:

para isso precisamos mostrar que para quaisquer $f,\ g \in T_{ijk}$ e qualquer $s \in [t-\delta, t+\delta]$ temos que $d(f(s), g(s)) \leq 2p+q+\varepsilon$. Se $s \in [t-\delta, t[$, temos que

$$d(f(s),g(s)) \leq d(f(s),f(t_1)) + d(f(t_1),g(t_1)) + d(g(t_1),g(s))$$

$$\leq p + \frac{\varepsilon}{3} + q + \frac{\varepsilon}{3} + p + \frac{\varepsilon}{3} = 2p + q + \varepsilon \ ;$$

se $s \in]t, t+\delta]$, temos que

$$d(f(s),g(s)) \leq d(f(s),f(t_2)) + d(f(t_2),\ g(t_2)) + d(g(t_2),g(s))$$

$$\leq p + \frac{\varepsilon}{3} + q + \frac{\varepsilon}{3} + p + \frac{\varepsilon}{3} = 2p + q + \varepsilon \ ;$$

se $s = t$, temos que $d(f(t),g(t)) \leq q + \varepsilon \leq 2p + q + \varepsilon$. Portanto $\alpha(t;H) \leq \alpha(H(V_\delta(t))) \leq 2p + q + \varepsilon$, para quaisquer $t \in]a,b[$ e $\varepsilon > 0$. Se $t = a$ ou $t = b$ obtém-se a mesma desigualdade com um argumento mais simples e (*) fica demonstrada.

Suponhamos agora que existe um compacto $N \subset E$ tal que $f(t) \in N$ para quaisquer $f \in H$ e $t \in [a,b]$. Já demonstramos que $\frac{1}{2}p \leq \alpha(H)$. Pelo lema (6.2), para provar (**) basta mostrar que $\alpha(t;H) \leq \eta(H)$ para todo $t \in [a,b]$. Da definição de $p = \eta(H)$, dados $t \in]a,b[$ e $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\omega_{[t-\delta,t[}(H) \leq p + \varepsilon$ e $\omega_{]t,t+\delta]}(H) \leq p + \varepsilon$. Provemos que $\alpha(H(V_\delta(t))) \leq p + 2\varepsilon$. Seja $\mathcal{N} = \{A \subset N : A$ fechado e não vazio$\}$, munido da métrica de Hausdorff D. Pelo lema (6.3), $\mathcal{N}$ é um espaço métrico compacto. Seja $\mathcal{N}_1 = \{A \in \mathcal{N} : \text{diam}(A) \leq p + \varepsilon\}$. $\mathcal{N}_1$ é um subconjunto fechado de $\mathcal{N}$ (pois $\text{diam}: \mathcal{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua), logo $\mathcal{N}_1$ é compacto. Portanto existem conjuntos $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{N}_1$ tais que se $A \in \mathcal{N}_1$ então $D(A,A_i) < \frac{\varepsilon}{2}$ para algum i, $1 \leq i \leq n$. Pondo $B_i = N_{\frac{\varepsilon}{2}}(A_i) = \{y \in N : d(y, A_i) < \frac{\varepsilon}{2}\}$, temos que se $A \in N_1$ então $A \subset B_i$ para algum i. Para $f \in H$, definimos

$$A_f^1 = \{f(s) : s \in [t-\delta, t[\} \text{ e } A_f^2 = \{f(s) : s \in]t, t+\delta]\}.$$

Temos que $\mathrm{diam}(A_f^1) \leq p + \varepsilon$ e $\mathrm{diam}(A_f^2) \leq p + \varepsilon$, e portanto existem i, j, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$, tais que $A_f^1 \subset B_i$ e $A_f^2 \subset B_j$. Além disso, de $\alpha(H(t)) = 0$ decorre que existem $S_1, \ldots, S_m \subset H(t)$, com $\mathrm{diam}(S_k) \leq 2\varepsilon$, tais que $H(t) = \bigcup_{k=1}^{m} S_k$.

Para $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$ e $1 \leq k \leq m$, definimos

$$T_{ijk} = \{f \in H(V_\delta(t)) : A_f^1 \subset B_i,\ A_f^2 \subset B_j,\ f(t) \in S_k\}.$$

Temos então que $H(V_\delta(t)) = \bigcup_{ijk} T_{ijk}$ e

$\mathrm{diam}\,(T_{ijk}) \leq \max\{\mathrm{diam}(B_i), \mathrm{diam}(B_j), \mathrm{diam}(S_k)\} \leq p + 2\varepsilon$.

Portanto $\alpha(t;H) \leq \alpha(H(V_\delta(t))) \leq p + 2\varepsilon$, para quaisquer $t \in]a,b[$ e $\varepsilon > 0$. Para $t = a$ ou $t = b$ obtém-se a mesma desigualdade com um argumento mais simples. Como ε é qualquer, vem que $\alpha(t;H) \leq p$ para todo $t \in [a,b]$, donde $\alpha(H) \leq p$. ∎

(7.2) Corolário (o teorema de Ascoli para funções regradas-Honig [14]). Seja (E,d) um espaço métrico e H um subconjunto limitado de $G([a,b], E)$. São equivalentes as afirmações:

(i) H é relativamente compacto em $G([a,b], E)$;

(ii) H é equiregrado ($\eta(H) = 0$) e $H(t)$ é relativamente compacto para todo $t \in [a,b]$.

(7.3) <u>Observações</u>. As definições de $\omega(H)$ e $\eta(H)$ ainda fazem sentido quando H é um subconjunto limitado de $\mathbb{B}([a,b], E)$, e temos trivialmente que $\eta(H) \leq \omega(H)$. Além disso, se $H \subset C([a,b], E)$ é fácil provar que $\omega(H) \leq 2\eta(H)$.

No exemplo (6.7) temos um subconjunto limitado $H \subset C([0,1], \mathbb{R})$ tal que $\alpha(H) = \omega(H)$. Como $\alpha(H) \leq \eta(H) \leq \omega(H)$, temos que $\alpha(H) = \eta(H)$, e a desigualdade $\alpha(H) \leq p$ de (7.1 - **) não pode ser melhorada. No exemplo (6.8) vimos um subconjunto limitado $H \subset C([0,1]), \ell_1)$ tal que $\alpha(H) = 2\omega(H) + \sup\{\alpha(H(t)) : t \in [0,1]\}$. De $\alpha(H) \leq 2\eta(H) + \sup\{\alpha(H(t)) : t \in [0,1]\} \leq 2\omega(H) + \sup\{\alpha(H(t)) : t \in [0,1]\}$ decorre que $\alpha(H) = 2\eta(H) + \sup\{\alpha(H(t)) : t \in [0,1]\}$, e a desigualdade $\alpha(H) \leq 2p + q$ de (7.1 - *) não pode ser melhorada. O exemplo seguinte mostra que a desigualdade $\alpha(H) \geq \frac{1}{2}p$ de (7.1) não pode ser melhorada.

(7.4) <u>Exemplo</u>. Seja $H = \{f_n : n \geq 1\} \subset G([0,1], \mathbb{R})$, onde

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & , \text{ para } t \in [0,1] \sim \{\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n+1}\}; \\ \frac{1}{2} & , \text{ para } t = \frac{1}{2n}; \\ \frac{-1}{2} & , \text{ para } t = \frac{1}{2n+1}. \end{cases}$$

É fácil ver que $p = \eta(H) = 1$. Por outro lado, de $|f_n(t) - f_m(t)| \leq \frac{1}{2}$ para quaisquer $f_n, f_m \in H$ e $t \in [0,1]$ segue-se que $\alpha(H) \leq \frac{1}{2}$. Como $\alpha(H) \geq \frac{1}{2}p = \frac{1}{2}$ (teorema (7.1)), temos que $\alpha(H) = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}p$.

(7.5) Proposição. Seja (E,d) um espaço métrico e H um subconjunto limitado de $G([a,b], E)$. Temos então que $\frac{1}{2}\eta(H) \leq \chi(H)$. Se existir um compacto $N \subset E$ tal que $f(t) \in N$ para quaisquer $f \in H$ e $t \in [a,b]$, então $\frac{1}{2}\eta(H) \leq \chi(H) \leq \eta(H)$.

Demonstração. A demonstração de $\frac{1}{2}\eta(H) \leq \chi(H)$ é praticamente a mesma de $\frac{1}{2}\eta(H) \leq \alpha(H)$ (teorema (7.1)). A desigualdade $\chi(H) \leq \eta(H)$ decorre de $\alpha(H) \leq \eta(H)$ (teorema (7.1)) e de $\chi(H) \leq \alpha(H)$. ∎

(7.6) Teorema. Para todo subconjunto limitado $H \subset G([a,b], \mathbb{R})$ temos que $\chi(H) = \frac{1}{2}\eta(H)$.

Demonstração. Basta provar que $\chi(H) \leq \frac{1}{2}\eta(H)$. Fixemos $\varepsilon > 0$, e provemos que $\chi(H) \leq \frac{1}{2}\eta(H) + \varepsilon$. Seja d uma divisão de $[a,b]$ formada por pontos $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_r = b$, tal que $\omega_d^{\bullet}(H) \leq \eta(H) + \varepsilon$. Para $1 \leq i \leq r$ e $f \in H$, definimos

$$m_i(f) = \frac{\sup\{f(t) : t \in]t_{i-1},t_i[\} + \inf\{f(t) : t \in]t_{i-1},t_i[\}}{2}.$$

Temos portanto que $\sup\{|f(t) - m_i(f)| : t \in]t_{i-1},t_i[\} \leq \frac{1}{2}\eta(H) + \frac{\varepsilon}{2}$. Para cada i $(1 \leq i \leq r)$ o subconjunto $\{m_i(f) : f \in H\} \subset \mathbb{R}$ é limitado, e portanto admite uma $\frac{\varepsilon}{2}$- rede finita $\{m_{i1}, m_{i2}, \ldots, m_{in_i}\} \subset \mathbb{R}$. Segue-se que para quaisquer $f \in H$ e i $(1 \leq i \leq r)$ existe j_i $(1 \leq j_i \leq n_i)$ tal que

$$\sup\{|f(t) - m_{ij_i}| : t \in]t_{i-1}, t_i[\} \leq \frac{1}{2}\eta(H) + \varepsilon.$$

Para cada $i (0 \leq i \leq r)$ o subconjunto $\{f(t_i) : f \in H\} \subset \mathbb{R}$ é limitado, e portanto admite uma ε-rede finita $\{x_{i1}, x_{i2}, \ldots x_{i\ell_1}\} \subset \mathbb{R}$. Portanto para quaisquer $f \in H$ e i $(0 \leq i \leq r)$ existe k_i $(1 \leq k_i \leq \ell_i)$ tal que $|f(t_i) - x_{ik_i}| \leq \varepsilon$.

Seja $\mathcal{J}$ o conjunto finito formado pelas $(2r + 1)$-uplas de inteiros da forma $J = (j_1, \ldots, j_r, k_0, k_1, \ldots, k_r)$, com $1 \leq j_i \leq n_i$ e $1 \leq k_i \leq \ell_i$. Para cada $J \in \mathcal{J}$ definimos $f_J \in G([a,b], \mathbb{R})$ por $f_J(t) = m_{ij_i}$, se $t \in]t_{i-1}, t_i[$ $(1 \leq i \leq r)$ e $f_J(t_i) = x_{ik_i}$ $(0 \leq i \leq r)$. É fácil verificar que $\{f_J : J \in \mathcal{J}\}$ é uma $(\frac{1}{2}\,\eta(H) + \varepsilon)$-rede para o conjunto H. ∎

8. Critérios generalizados de compacidade em $L_p([a,b])$

Nesta seção consideraremos o espaço $L_p([a,b])$ $(1 < p < \infty)$, a medida de não compacidade de Hausdorff (exemplo (1.5)), e as medidas de não compacidade σ e τ definidas nos exemplos (1.12) e (1.13), e vamos provar desigualdades que generalizam os critérios de compacidade em $L_p([a,b])$.

Começaremos com uma generalização do critério de compacidade de Kolmogorov [18].

(8.1) Teorema. Se H é um subconjunto limitado de $L_p([a,b])$ $(1 \leq p < \infty)$ então $\frac{1}{2}\,\sigma(H) \leq \chi(H)$. Além disso, se $1 < p < \infty$ temos também que $\chi(H) \leq \sigma(H)$.

Demonstração. Para mostrar que $\frac{1}{2}\,\sigma(H) \leq \chi(H)$, tomemos $\varepsilon > 0$ e provemos que $\sigma(H) \leq 2\chi(H) + \varepsilon$. Pela definição de χ, H admite uma $(\chi(H) + \frac{\varepsilon}{3})$-rede finita $\{f_1,\ldots,f_n\}$. Como o conjunto das funções em escada (combinações lineares finitas de funções características de intervalos limitados) é denso em $L_p([a,b])$, podemos supor que cada f_i é uma função em escada. Se $h > 0$ e g_I é a função característica de um intervalo $I \subset [a,b]$, temos que $\|M_h g_I - g_I\|_p \leq (2h)^{\frac{1}{p}}$. Segue-se que $\lim_{h\to 0^+} \|M_h g - g\|_p = 0$ para qualquer função em escada g, e portanto existe $\delta > 0$ tal que $\|M_h f_i - f_i\|_p \leq \frac{\varepsilon}{3}$ para $1 \leq i \leq n$ e $0 < h \leq \delta$. Se $f \in H$ existe i tal que $\|f - f_i\|_p \leq \chi(H) + \frac{\varepsilon}{3}$. Temos então que

$$\|M_h f - f\|_p \leq \|M_h f - M_h f_i\|_p + \|M_h f_i - f_i\|_p + \|f_i - f\|_p$$

$$\leq \chi(H) + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \chi(H) + \frac{\varepsilon}{3} = 2\chi(H) + \varepsilon,$$

para $0 < h \leq \delta$, o que demonstra que $\sigma(H) \leq 2\chi(H) + \varepsilon$.

Suponhamos agora que $1 < p < \infty$ e vamos mostrar que $\chi(H) \leq \sigma(H)$. Inicialmente provaremos que para todo $h > 0$ o conjunto $\{M_h f : f \in H\}$ é equicontínuo. De fato, se $f \in H$

$$|(M_h f)(t_1) - (M_h f)(t_2)| = \frac{1}{2h}\left|\int_{t_1-h}^{t_1+h} f(s)ds - \int_{t_2-h}^{t_2+h} f(s)ds\right|$$

$$= \frac{1}{2h}\left|\int_{t_1-h}^{t_2-h} f(s)ds - \int_{t_1+h}^{t_2+h} f(s)ds\right| \leq \frac{1}{2h}\left(\left|\int_{t_1-h}^{t_2-h} f(s)ds\right| + \left|\int_{t_1+h}^{t_2+h} f(s)ds\right|\right)$$

$$\leq \frac{1}{h}\|f\|_p |t_2 - t_1|^{\frac{1}{p'}} \leq \frac{L}{h}|t_2 - t_1|^{\frac{1}{p'}},$$

onde $L = \sup\{\|f\|_p : f \in H\}$ e p' é tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Isto mostra que $\{M_h f : f \in H\}$ é equicontínuo. É fácil provar que esse conjunto é limitado na norma uniforme. Do teorema de Ascoli decorre que para todo $h > 0$ o conjunto $\{M_h f : f \in H\}$ é relativamente compacto na topologia de $C([a,b])$ e portanto na topologia de $L_p([a,b])$.

Fixemos $\varepsilon > 0$. Pela definição de $\sigma(H)$, existe $h > 0$ tal que $\|M_h f - f\|_p \leq \sigma(H) + \frac{\varepsilon}{2}$, para toda $f \in H$. Como $\{M_h f : f \in H\}$ é um subconjunto relativamente compacto de $L_p([a,b])$, admite uma $\frac{\varepsilon}{2}$-rede finita $R \subset L_p([a,b])$. É fácil ver que R é uma $(\sigma(H) + \varepsilon)$-rede para H, e portanto $\chi(H) \leq \sigma(H) + \varepsilon$. ∎

(8.2) Proposição. Se H é um subconjunto limitado de $L_p([a,b])$ $(1 \leq p < \infty)$ então $\sigma(H) \leq \tau(H)$.

Demonstração. Pela desigualdade de Hölder e pelo teorema de Tonelli, temos que

$$\|M_h f - f\|_p \leq \frac{1}{2h}\left[\int_a^b \left[\int_{-h}^h |f(t+s) - f(t)|\,ds\right]^p dt\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \frac{1}{2h}\left[\int_a^b \int_{-h}^h |f(t+s) - f(t)|^p ds \,.\, (2h)^{\frac{p}{p'}} dt\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \left[\frac{1}{2h}\int_{-h}^h \int_a^b |f(t+s) - f(t)|^p dt\, ds\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Logo $\|M_h f - f\|_p \leq \sup\{\|T_s f - f\|_p : |s| \leq h\}$, e portanto $\sigma(H) \leq \tau(H)$. ∎

O teorema seguinte é uma generalização do critério de compacidade de Riesz ([28], [18]).

(8.3) <u>Teorema</u>. Se H é um subconjunto limitado de $L_p([a,b])$ $(1 \leq p < \infty)$ então $\frac{1}{2}\,\tau(H) \leq \chi(H)$. Além disso, se $1 < p < \infty$ temos também que $\chi(H) \leq \tau(H)$.

<u>Demonstração</u>. A demonstração de $\frac{1}{2}\,\tau(H) \leq \chi(H)$ é análoga a feita em (8.1) para $\frac{1}{2}\,\sigma(H) \leq \chi(H)$. A desigualdade de $\chi(H) \leq \tau(H)$ decorre de (8.1) e (8.2). ∎

CAPÍTULO III

ALGUMAS APLICAÇÕES ÀS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS FUNCIONAIS DO TIPO NEUTRO

Vamos agora aplicar os resultados do Capítulo I ao estudo de certas equações diferenciais que exprimem $x'(t)$ como função dos valores de x e de x' no intervalo $[t-r,t]$ $(r \geq 0)$. Tais equações são denominadas equações diferenciais funcionais do tipo neutro (EDFNs). Em termos mais gerais (e mais vagos), uma EDFN é uma equação que envolve o valor presente e valores passados da função incógnita x, bem como da sua derivada x'. Esta idéia pode ser precisada de várias maneiras ([4],[11],[20]), e temos então diferentes teorias de existência e dependência contínua para equações diferenciais funcionais do tipo neutro.

Na literatura encontramos duas classes de teoremas gerais de dependência contínua para equações do tipo neutro, de acordo com a topologia considerada no espaço das soluções. Numa das classes o espaço das soluções é do tipo $W_p^{(1)}([a,b],\mathbb{R}^n)$, com a topologia dada pela norma $\|x\|_{1,p}^{[a,b]}=|x(a)|+\left[\int_a^b |x'(t)|^p dt\right]^{1/p}$. É o caso da abordagem de Driver [4], generalizada por Melvin [20]. Estes teoremas asseguram que, tomando condições iniciais suficientemente próximas, podemos fazer as soluções correspondentes da EDFN permanecerem arbitrariamente próximas, num intervalo compacto, na norma de $W_p^{(1)}$. Portanto as derivadas das soluções se aproximarão na norma de L_p. Na outra classe o espaço das soluções é munido da topologia da convergência uniforme; é o caso da abordagem de Hale [11]. Estes teoremas não afirmam nada a respeito da proximidade das derivadas das soluções. Somente para situações bem mais particulares encontramos teoremas de dependência contínua que asseguram a proximidade uniforme das derivadas das soluções de uma equação do tipo neutro (veja-se [9], por exemplo).

Na maior parte deste capítulo (da seção 9 à seção 13) estudaremos uma classe de EDFNs da forma $x'(t) = f(t,x_t,x'_t)$, onde f é uma função contínua num aberto de $\mathbb{R}\times C([-r,0],\mathbb{R}^n)\times L_p([-r,0],\mathbb{R}^n)$, satisfazendo certas hipóteses adicionais. Para estas equações demonstraremos teoremas de existência, unicidade, prolongabilidade das soluções e dependência contínua. A técnica que empregamos na seção 10 (existência de soluções) é análoga à que foi usada por Nussbaum [22], na demonstração de um teorema de existência para outra classe de EDFNs. Os resultados das seções 11 e 12 (unicidade e prolongabilidade das soluções) foram incluídos no presente capítulo com o objetivo de tornar auto-suficiente a exposição, uma vez que esses resultados não dependem da teoria de operadores condensantes apresentada no capítulo I. A classe de EDFNs que analisamos não é tão ampla quanto a que foi estudada por Melvin [20]. Entretanto, na seção 13 (dependência contínua) chegamos a resultados que, para as equações aqui abordadas, fornecem afirmativas mais fortes: os teoremas de dependência contínua (13.4) e (13.6) asseguram a proximidade uniforme das derivadas das soluções. Vale a pena ressaltar que o teorema (13.4) não pressupõe a unicidade das soluções.

Na última seção deste capítulo apresentaremos, como aplicação do teorema (4.5), um teorema de existência e unicidade para equações lineares do tipo neutro. Consideramos, como espaço das soluções, um conjunto de funções com derivada regrada. A exposição deixará de ser auto-suficiente: faremos uso da integral interior (ou de Dushnik) e de suas propriedades, bem como de um teorema de representação devido a Hönig. Esses assuntos encontram-se em [12].

9. Formulação do problema

(9.1) Notações. Consideraremos o espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ munido de uma norma qualquer $|.|$. Usaremos as notações habituais $C([a,b], \mathbb{R}^n)$, $C^{(1)}([a,b], \mathbb{R}^n)$, $L_p([a,b], \mathbb{R}^n)$ e $W_p^{(1)}([a,b], \mathbb{R}^n)$. Lembramos que $W_p^{(1)}([a,b], \mathbb{R}^n)$ é o espaço das funções absolutamente contínuas $x:[a,b] \to \mathbb{R}^n$, tais que $x' \in L_p([a,b], \mathbb{R}^n)$. Consideraremos sempre os quatro espaços acima munidos, respectivamente, das normas

$$\|x\|_{[a,b]}^{(0)} = \sup\{|x(t)| : t \in [a,b]\},$$

$$\|x\|_{[a,b]}^{(1)} = |x(a)| + \sup\{|x'(t)| : t \in [a,b]\},$$

$$\|x\|_p^{[a,b]} = [\int_a^b |x(t)|^p dt]^{1/p},$$

e $$\|x\|_{1,p}^{[a,b]} = |x(a)| + [\int_a^b |x'(t)|^p dt]^{1/p}.$$

Seja $r \geq 0$ um número real, fixado em todo este capítulo. Sejam $C = C([-r,0], \mathbb{R}^n)$, $C^{(1)} = C^{(1)}([-r,0], \mathbb{R}^n)$, $L_p = L_p([-r,0], \mathbb{R}^n)$ e $W_p^{(1)} = W_p^{(1)}([-r,0], \mathbb{R}^n)$. As normas nestes espaços serão denotadas, respectivamente, por $\|.\|^{(0)}$, $\|.\|^{(1)}$, $\|.\|_p$ e $\|.\|_{1,p}$. Se $\sigma \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$ e $x:[\sigma-r, \sigma+a] \to \mathbb{R}^n$, para cada $t \in [\sigma, \sigma+a]$ definimos $x_t:[-r,0] \to \mathbb{R}^n$ por $x_t(s) = x(t+s)$, $s \in [-r,0]$.

Seja Ω um aberto não vazio de $\mathbb{R}\times C\times L_p$, $f:\Omega\to\mathbb{R}^n$ uma função contínua. Consideremos a EDFN

(D) $$x'(t) = f(t,x_t,x'_t).$$

(9.2) <u>Definição</u>. Sejam $\sigma\in\mathbb{R}$ e $\phi\in W_p^{(1)}$, tais que $(\sigma,\phi,\phi')\in\Omega$. Dizemos que uma função $x:[\sigma-r,\sigma+a]\to\mathbb{R}^n$ $(a>0)$ é uma solução da equação (D) com função inicial ϕ em σ (ou simplesmente é uma solução de (D) por (σ,ϕ)) se

(i) $x_\sigma = \phi$ e $x\big|_{[\sigma,\sigma+a]}\in C^{(1)}([\sigma,\sigma+a],\mathbb{R}^n)$,

(ii) $(t,x_t,x'_t)\in\Omega$ para todo $t\in[\sigma,\sigma+a]$,

(iii) $x'(t) = f(t,x_t,x'_t)$ para todo $t\in[\sigma,\sigma+a]$,

sendo $x'(t)$ e $x'(\sigma+a)$ as derivadas à direita e à esquerda em σ e $\sigma+a$, respectivamente. Queremos encontrar condições, relativas à função f, que assegurem a existência e a unicidade das soluções de (D) por (σ,ϕ), bem como a dependência contínua dessas soluções em relação a (σ,ϕ).

(9.3) <u>Observação</u>. Suponhamos que $x:[\sigma-r,\sigma+a]\to\mathbb{R}^n$ é tal que

(i)' $x\in W_p^{(1)}([\sigma-r,\sigma+a],\mathbb{R}^n)$ e $x_\sigma = \phi$,

(ii) $(t,x_t,x'_t)\in\Omega$ para todo $t\in[\sigma,\sigma+a]$,

(iii)' $x'(t) = f(t,x_t,x'_t)$ para quase todo $t\in[\sigma,\sigma+a]$.

Temos então que $x(t) = x(\sigma) + \int_\sigma^t f(s,x_s,x'_s)ds$ para todo $t\in[\sigma,\sigma+a]$. Da continuidade de f e das funções $t\in[\sigma,\sigma+a]\mapsto x_t\in C$ e

$t \in [\sigma,\sigma+a] \longmapsto x'_t \in L_p$ decorre que o integrando da equação anterior é uma função contínua. Portanto $x'(t) = f(t, x_t, x'_t)$ para todo $t \in [\sigma,\sigma+a]$, e $x|_{[\sigma,\sigma+a]} \in C^{(1)}([\sigma,\sigma+a], \mathbb{R}^n)$. Vimos que as condições (i) e (iii) da definição (9.2) podem ser substituídas por (i)' e (iii)', graças à continuidade de f.

(9.4) Uma equação integral equivalente. É evidente que $x : [\sigma-r,\sigma+a] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ $(a > 0)$ é uma solução de (D) por (σ,ϕ) se e somente se

(1) $x_\sigma = \phi$ e $x(t) = \phi(0) + \int_\sigma^t f(s, x_s, x'_s)ds$, $t \in [\sigma,\sigma+a]$.

Para $\phi : [-r,0] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definimos $\tilde{\phi} : [-r,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^n$ por

$$\tilde{\phi}|_{[-r,0]} = \phi \quad \text{e} \quad \tilde{\phi}(t) = \phi(0) \text{ para } t \in [0,\infty[.$$

Se $x : [\sigma-r,\sigma+a] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é uma solução de (D) por (σ,ϕ), então $u : [-r,a] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dada por

(2) $u(t) = x(\sigma+t) - \tilde{\phi}(t)$, $t \in [-r,a]$,

satisfaz

(3) $$\begin{cases} u|_{[-r,0]} = 0 \\ u(t) = \int_0^t f(\sigma + s, \tilde{\phi}_s + u_s, \tilde{\phi}'_s + u'_s)ds \quad (t \in [0,a]). \end{cases}$$

Reciprocamente, se $u : [-r,a] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ satisfaz (3), então $x : [\sigma-r,\sigma+a] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dada por (2) satisfaz (1), e portanto é uma solução de (D) por (σ,ϕ).

Se $y : [0,a] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é tal que $y(0) = 0$, definimos $\hat{y} : [-r,a] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ por

$$\hat{y}|_{[-r,0]} = 0 \text{ e } \hat{y}(t) = y(t) \text{ para } t \in [0,a].$$

Temos então que $u : [-r,a] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ satisfaz (3) se e somente se $u = \hat{y}$, e y satisfaz

$$(4)\quad y(t) = \int_0^t f(\sigma+s, \tilde{\phi}_s + \hat{y}_s, \tilde{\phi}_s' + \hat{y}_s')ds, \; t \in [0,a].$$

Portanto $x : [\sigma-r, \sigma+a] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é uma solução de (D) por (σ,ϕ) se e somente se

$$x(\sigma+t) = \tilde{\phi}(t) + \hat{y}(t), \; t \in [-r,a],$$

e $y : [0,a] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ satisfaz (4). Na próxima seção veremos que, sob certas condições, o operador integral que aparece em (4) é condensante em relação a uma medida de não compacidade, e obteremos um teorema de existência.

10. Existência de soluções.

(10.1) Uma família de equações do tipo neutro. Seja Λ um espaço métrico, Ω um aberto não vazio de $\mathbb{R} \times C \times L_p$ $(1 < p < \infty)$, e $f : \Lambda \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma função contínua. Para cada $\lambda \in \Lambda$, temos uma EDFN

$$(D_\lambda)\qquad x'(t) = f(\lambda, t, x_t, x_t').$$

Pela seção anterior, $x : [\sigma-r, \sigma+a] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é uma solução de (D_λ) por (σ,ϕ) se e somente se

$$x(\sigma+t) = \tilde{\phi}(t) + \hat{y}(t), \; t \in [-r,a],$$

com $y : [0,a] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ satisfazendo

$$y(t) = \int_0^t f(\lambda, \sigma+s, \tilde{\phi}_s + \hat{y}_s, \tilde{\phi}_s' + \hat{y}_s')ds, \; t \in [0,a].$$

Definindo

$$F(\lambda,\sigma,\phi,y)(t)=\int_0^t f(\lambda,\sigma+s,\tilde{\phi}_s+\hat{y}_s,\tilde{\phi}'_s+\hat{y}'_s)ds,\ t\in[0,a],$$

o problema da existência de soluções de (D_λ) por (σ,ϕ) se reduz ao problema da existência de pontos fixos de $F(\lambda,\sigma,\phi,\cdot)$. Vamos então definir precisamente o domínio e o contradomínio da aplicação F, e impor condições adicionais sobre f para que $F(\lambda,\sigma,\phi,\cdot)$ seja condensante em relação a uma medida de não compacidade.

(10.2) <u>Definições</u>. Para $a>0$, seja

$$E(a)=\{y\in C^{(1)}([0,a],\mathbb{R}^n)\ :\ y(0)=0\}.$$

É claro que $E(a)$ é um subespaço fechado de $C^{(1)}([0,a],\mathbb{R}^n)$. Se $a>0$ e $\rho>0$, definimos

$$D(a,\rho)=\{y\in E(a)\ :\ \|\hat{y}_t\|^{(0)}\le\rho \text{ e } \|\hat{y}'_t\|_p\le\rho \text{ para } t\in[0,a]\}.$$

É facil demonstrar o seguinte fato:

(10.3) <u>Lema</u>. Se $a>0$ e $\rho>0$ então $D(a,\rho)$ é um subconjunto não vazio, convexo e fechado de $C^{(1)}([0,a],\mathbb{R}^n)$.

(10.4) <u>Lema</u>. Seja Λ um espaço métrico, Ω um aberto de $\mathbb{R}\times C\times L_p$ $(1<p<\infty)$, e $f:\Lambda\times\Omega\longrightarrow\mathbb{R}^n$ uma função contínua. Dados $\bar{\lambda}\in\Lambda$, $\bar{\sigma}\in\mathbb{R}$ e $\bar{\phi}\in W_p^{(1)}$, com $(\bar{\sigma},\bar{\phi},\bar{\phi}')\in\Omega$, existe $N(\bar{\lambda},\bar{\sigma},\bar{\phi})$, vizinhança de $(\bar{\lambda},\bar{\sigma},\bar{\phi})$ em $\Lambda\times\mathbb{R}\times W_p^{(1)}$, e existem constantes $M>0$, $a>0$ e $\rho>0$ tais que

$$(\lambda,\sigma+t,\tilde{\phi}_t+\hat{y}_t,\tilde{\phi}'_t+\hat{y}'_t)\in\Lambda\times\Omega$$

$$\text{e } |f(\lambda,\sigma+t,\tilde{\phi}_t+\hat{y}_t,\tilde{\phi}'_t+\hat{y}'_t)|<M$$

para $(\lambda,\sigma,\phi) \in N(\bar{\lambda},\bar{\sigma},\bar{\phi})$, $t \in [0,a]$ e $y \in D(a,\rho)$.

Demonstração. Seja $M > 0$ tal que $|f(\bar{\lambda},\bar{\sigma},\bar{\phi},\bar{\phi}')| < M$. Pela continuidade de f, existe U, vizinhança de $\bar{\lambda}$ em Λ, e existem $\delta > 0$ e $\rho > 0$ tais que para $\lambda \in U$ e $(s,\psi,\xi) \in \mathbb{R} \times C \times L_p$, com $|s-\bar{\sigma}| \leq 2\delta$, $\|\psi - \bar{\phi}\|^{(0)} \leq 3\rho$ e $\|\xi - \bar{\phi}'\|_p \leq 3\rho$, temos que $(s,\psi,\xi) \in \Omega$ e $|f(\lambda,s,\psi,\xi)| < M$. Seja $\delta_1 > 0$ tal que $\|\bar{\bar{\phi}}_t - \bar{\phi}\|^{(0)} \leq \rho$ e $\|\bar{\bar{\phi}}_t' - \bar{\phi}'\|_p \leq \rho$ para $t \in [0,\delta_1]$, e tomemos $a \leq \min\{\delta,\delta_1\}$. Sejam $I = \{\sigma \in \mathbb{R} : |\sigma - \bar{\sigma}| < \delta\}$ e

$V = \{\phi \in W_p^{(1)} : \|\phi - \bar{\phi}\|_{1,p} < \rho/\max\{1, r^{\frac{1}{p'}}\}\}$ (onde $p' \in]1,\infty[$ é dado por $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$). Para $\phi \in V$, temos que

$\|\phi - \bar{\phi}\|^{(0)} \leq \|\phi - \bar{\phi}\|_{1,p} \cdot \max\{1, r^{\frac{1}{p'}}\} < \rho$ e $\|\phi' - \bar{\phi}'\|_p \leq \|\phi - \bar{\phi}\|_{1,p} < \rho$. Tomemos $N(\bar{\lambda},\bar{\sigma},\bar{\phi}) = U \times I \times V$. Se $(\lambda,\sigma,\phi) \in N(\bar{\lambda},\bar{\sigma},\bar{\phi})$, $t \in [0,a]$ e $y \in D(a,\rho)$ temos que

$$|\sigma + t - \bar{\sigma}| \leq |t| + |\sigma - \bar{\sigma}| \leq 2\delta,$$

$$\|\tilde{\phi}_t + \hat{y}_t - \bar{\phi}\|^{(0)} \leq \|\hat{y}_t\|^{(0)} + \|\tilde{\phi}_t - \bar{\bar{\phi}}_t\|^{(0)} + \|\bar{\bar{\phi}}_t - \bar{\phi}\|^{(0)}$$
$$\leq \|\hat{y}_t\|^{(0)} + \|\phi - \bar{\phi}\|^{(0)} + \|\bar{\bar{\phi}}_t - \bar{\phi}\|^{(0)} \leq 3\rho,$$

e $$\|\tilde{\phi}_t' + \hat{y}_t' - \bar{\phi}'\|_p \leq \|\hat{y}_t'\|_p + \|\tilde{\phi}_t' - \bar{\bar{\phi}}_t'\|_p + \|\bar{\bar{\phi}}_t' - \bar{\phi}'\|_p$$
$$\leq \|\hat{y}_t'\|_p + \|\phi' - \bar{\phi}'\|_p + \|\bar{\bar{\phi}}_t' - \bar{\phi}'\|_p \leq 3\rho.$$

Portanto $(\lambda, \sigma+t, \tilde{\phi}_t + \hat{y}_t, \tilde{\phi}_t' + \hat{y}_t') \in \Lambda \times \Omega$ e $|f(\lambda, \sigma+t, \tilde{\phi}_t + \hat{y}_t, \tilde{\phi}_t' + \hat{y}_t')| < M$. ∎

No que segue usaremos também o fato de ser $N(\bar{\lambda},\bar{\sigma},\bar{\phi})$ da forma $U \times I \times V$, sendo U uma vizinhança de $\bar{\lambda}$ em Λ, I uma vizinhança compacta de $\bar{\sigma} \in \mathbb{R}$, e V uma vizinhança de $\bar{\phi}$ em $W_p^{(1)}$.

(10.5) Duas hipóteses adicionais. Para demonstrarmos teoremas de existência e dependência contínua para as equações (D_λ), vamos impor condições adicionais sobre a função f. Sem perda de generalidade, vamos supor doravante que o aberto $\Omega \subset \mathbb{R} \times C \times L_p$ é da forma $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, sendo Ω_1 um aberto de $\mathbb{R} \times C$ e Ω_2 um aberto de L_p. Como anteriormente, Λ é um espaço métrico. Consideraremos uma função contínua $f : \Lambda \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ satisfazendo as hipóteses (h_1) e (h_2) que seguem:

(h_1) f é lipschitziana em relação ao último argumento, ou seja, $\exists$ $k \geq 0$ tal que
$|f(\lambda,t,\psi,\xi^1) - f(\lambda,t,\psi,\xi^2)| \leq k \|\xi^1 - \xi^2\|_p$,
$\forall \lambda \in \Lambda$, $\forall (t,\psi) \in \Omega_1$, $\forall \xi^1, \xi^2 \in \Omega_2$.

(h_2) Se $K \subset \Omega_1$ é compacto, então a família de funções $\{g_\xi : \xi \in \Omega_2\}$, com $g_\xi : \Lambda \times K \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $g_\xi(\lambda,t,\psi) = f(\lambda,t,\psi,\xi)$, é equicontínua. Isto significa que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$, (t_1,ψ^1), $(t_2,\psi^2) \in K$, temos que $d(\lambda_1,\lambda_2) < \delta$, $|t_1,t_2| < \delta$ e $\|\psi^1 - \psi^2\|^{(0)} < \delta$
$\Longrightarrow |f(\lambda_1,t_1,\psi^1,\xi) - f(\lambda_2,t_2,\psi^2,\xi)| < \varepsilon$, $\forall \xi \in \Omega_2$.

(10.6) Lema. Seja $f : \Lambda \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma função con tínua, satisfazendo as hipóteses (h_1) e (h_2). Dados $\bar{\lambda} \in \Lambda$, $\bar{\sigma} \in \mathbb{R}$, e $\bar{\phi} \in W_p^{(1)}$, com $(\bar{\sigma},\bar{\phi},\bar{\phi}') \in \Omega$, tomamos a vizinhança $N(\bar{\lambda},\bar{\sigma},\bar{\phi})$ e as constantes $M > 0$, $a > 0$ e $\rho > 0$ fornecidas pelo lema (10.4). Seja

$$F : N(\bar{\lambda},\bar{\sigma},\bar{\phi}) \times D(a,\rho) \longrightarrow E(a) \subset C^{(1)}([0,a], \mathbb{R}^n)$$

definida por

$$F(\lambda,\sigma,\phi,y)(t) = \int_0^t f(\lambda,\sigma + s,\tilde{\phi}_s + \hat{y}_s,\tilde{\phi}_s' + \hat{y}_s')ds, \quad t \in [0,a].$$

Então F é uniformemente contínua, e sua imagem é um subconjunto limitado de $C^{(1)}([0,a], \mathbb{R}^n)$. Além disso, se $Ma \le \rho$ e $Ma^{\frac{1}{p}} \le \rho$ então $F : N(\bar{\lambda},\bar{\sigma},\bar{\phi}) \times D(a,\rho) \longrightarrow D(a,\rho)$.

<u>Demonstração</u>. Lembramos que $N(\bar{\lambda},\bar{\sigma},\bar{\phi}) = U \times I \times V$. Vamos mostrar que F é uniformemente contínua. Para usar a hipótese (h_2) fazemos $K_1 = \overline{\{\tilde{\phi}_t + \hat{y}_t : \phi \in V,\ y \in D(a,\rho),\ t \in [0,a]\}}$. Provemos que K_1 é um subconjunto compacto de C. Como $K_1 \subset \overline{H_1 + H_2}$, onde $H_1 = \{\tilde{\phi}_t : \phi \in V,\ t \in [0,a]\}$ e $H_2 = \{\hat{y}_t : y \in D(a,\rho),\ t \in [0,a]\}$, basta provarmos que H_1 e H_2 são relativamente compactos em C. Pela construção de V, existe $M_1 > 0$ tal que $\|\phi'\|_p < M_1$, para todo $\phi \in V$. Como

$$|\phi(s_1)-\phi(s_2)| = \left|\int_{s_1}^{s_2} \phi'(s)ds\right| \le \left|\int_{s_1}^{s_2} |\phi'(s)|^p ds\right|^{\frac{1}{p}} \cdot |s_2-s_1|^{\frac{1}{p'}} \le \|\phi'\|_p \cdot |s_1-s_2|^{\frac{1}{p'}}$$

para quaisquer $\phi \in V$, $s_1, s_2 \in [-r,0]$, temos que

$$\|\tilde{\phi}_{t_1} - \tilde{\phi}_{t_2}\|^{(0)} \le M_1 \cdot |t_1 - t_2|^{\frac{1}{p'}}, \text{ para } \phi \in V,\ t_1,\ t_2 \in [0,a] .$$

Do teorema de Ascoli decorre que H_1 é relativamente compacto em C. De modo análogo, temos que

$|y(t_1) - y(t_2)| \leq \|y'\|_p^{[t_1,t_2]} \cdot |t_1 - t_2|^{\frac{1}{p'}}$ para $y \in D(a,\rho)$, t_1, $t_2 \in [0,a]$, $t_1 < t_2$, donde

$\|\hat{y}_{t_1} - \hat{y}_{t_2}\|^{(0)} < \rho\, |t_1 - t_2|^{\frac{1}{p'}}$ para quaisquer $y \in D(a,\rho)$ e $t_1, t_2 \in [0,a]$, com $|t_1 - t_2| \leq r$. Logo H_2 é relativamente compacto em C, e portanto K_1 é compacto. Seja I_1 o compacto de $\mathbb{R}$ definido por $I_1 = \{\sigma + t : \sigma \in I,\ t \in [0,a]\}$. Tomemos $K \subset \Omega_1$ dado por $K = I_1 \times K_1$. Pela hipótese (h_2), dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta_1 > 0$ tal que para λ^0, $\lambda \in \Lambda$, σ^0, $\sigma \in I$, ϕ^0, $\phi \in V$ e y^0, $y \in D(a,\rho)$ temos que

$d(\lambda,\lambda^0) < \delta_1$, $|\sigma - \sigma^0| < \delta_1$, $\|\phi - \phi^0\|^{(0)} < \delta_1$ e $\|y - y^0\|^{(0)}_{[0,a]} < \delta_1$

$\Longrightarrow |f(\lambda,\sigma + t,\tilde{\phi}_t + \hat{y}_t, \tilde{\phi}'_t + \hat{y}'_t) - f(\lambda^0,\sigma^0 + t,\tilde{\phi}^0_t + \hat{y}^0_t, \tilde{\phi}'_t + \hat{y}'_t)| < \frac{\varepsilon}{2}$,

$\forall t \in [0,a]$.

Como $\|\phi - \phi^0\|^{(0)} \leq \|\phi - \phi^0\|_{1,p} \cdot \max\{1, r^{\frac{1}{p'}}\}$ e $\|y - y^0\|^{(0)}_{[0,a]} \leq a\,\|y - y^0\|^{(1)}_{[0,a]}$, tomamos $\delta_2 = \delta_1/\max\{1, r^{\frac{1}{p'}}, a\}$. Seja $\delta = \min\{\delta_2, \frac{\varepsilon}{4k}, a^{\frac{-1}{p}} \frac{\varepsilon}{4k}\}$. Para quaisquer $(\lambda^0, \sigma^0, \phi^0)$, $(\lambda,\sigma,\phi) \in N(\bar{\lambda},\bar{\sigma},\bar{\phi})$ e y^0, $y \in D(a,\rho)$, com $d(\lambda,\lambda^0) < \delta$, $|\sigma - \sigma^0| < \sigma$, $\|\phi - \phi^0\|_{1,p} < \delta$ e $\|y - y^0\|^{(1)}_{[0,a]} < \delta$, temos que

$$\left|\frac{d}{dt} F(\lambda,\sigma,\phi,y)(t) - \frac{d}{dt} F(\lambda^0,\sigma^0,\phi^0,y^0)(t)\right|$$

$$= |f(\lambda,\sigma+t,\tilde{\phi}_t+\hat{y}_t,\tilde{\phi}'_t+\hat{y}'_t) - f(\lambda^0,\sigma^0+t,\tilde{\phi}^0_t+\hat{y}^0_t,\tilde{\phi}^{0'}_t+\hat{y}^{0'}_t)|$$

$$\leq |f(\lambda,\sigma+t,\tilde{\phi}_t+\hat{y}_t,\tilde{\phi}'_t+\hat{y}'_t) - f(\lambda^0,\sigma^0+t,\tilde{\phi}^0_t+\hat{y}^0_t,\tilde{\phi}'_t+\hat{y}'_t)|$$

$$+ |f(\lambda^0,\sigma^0+t,\tilde{\phi}^0_t+\hat{y}^0_t,\tilde{\phi}'_t+\hat{y}'_t) - f(\lambda^0,\sigma^0+t,\tilde{\phi}^0_t+\hat{y}^0_t,\tilde{\phi}^{0'}_t+\hat{y}^{0'}_t)|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + k\,\|\tilde{\phi}'_t+\hat{y}'_t-\tilde{\phi}^{0'}_t-\hat{y}^{0'}_t\|_p$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + k\,\|\phi'-\phi^{0'}\|_p + k\,\|y'-y^{0'}\|_p^{[0,a]}$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + k\,\|\phi-\phi^0\|_{1,p} + k\,a^{\frac{1}{p}}\,\|y-y^0\|^{(1)}_{[0,a]} \leq \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon,$$

para todo $t \in [0,a]$. Portanto $\|F(\lambda,\sigma,\phi,y) - F(\lambda^0,\sigma^0,\phi^0,y^0)\|^{(1)}_{[0,a]} < \varepsilon$, o que demonstra a continuidade uniforme de F.

É claro que a imagem de F é limitada em $C^{(1)}([0,a],\mathbb{R}^n)$, pois $|f(\lambda,\sigma+t,\tilde{\phi}_t+\hat{y}_t,\tilde{\phi}'_t+\hat{y}'_t)| < M$, para $(\lambda,\sigma,\phi,y) \in N(\bar{\lambda},\bar{\sigma},\bar{\phi}) \times D(a,\rho)$ e $t \in [0,a]$. Daí temos que $\|F(\lambda,\sigma,\phi,y)\|^{(1)}_{[0,a]} < M$. Decorre também que $\|(\hat{F}(\lambda,\sigma,\phi,y))_t\|^{(0)} \leq \sup\{|\hat{F}(\lambda,\sigma,\phi,y)(t)| : t \in [-r,a]\}$

$$= \sup\{|F(\lambda,\sigma,\phi,y)(t)| : t \in [0,a]\} \leq M\,a$$

e que $\|(\hat{F}(\lambda,\sigma,\phi,y))'_t\|_p \leq \left|\int_0^a \left|\frac{d}{dt}F(\lambda,\sigma,\phi,y)(t)\right|^p dt\right|^{\frac{1}{p}} \leq M\,a^{\frac{1}{p}}$,

onde $\hat{F}(\lambda,\sigma,\phi,y)$ denota $\widehat{F(\lambda,\sigma,\phi,y)}$. Portanto a imagem de F estará contida em $D(a,\rho)$, caso $M\,a \leq \rho$ e $M\,a^{\frac{1}{p}} \leq \rho$. ∎

O lema seguinte é crucial para a existência e para a dependência contínua das soluções da equação $x'(t) = f(\lambda,t,x_t,x'_t)$.

Antes de enunciá-lo, vamos definir uma medida de não compacidade em $E(a)= \{y \in C^{(1)}([0,a], \mathbb{R}^n) : y(0)=0\}$. É claro que $E(a)$ é um espaço de Banach com a restrição da norma de $C^{(1)}([0,a], \mathbb{R}^n)$, ou seja, com a norma $\|y\|_{E(a)} = \|y'\|^{(0)}_{[0,a]}$.

(10.7) Definição. Para cada subconjunto limitado $A \subset E(a)$, definimos $\mu(A)=\omega(A')$, onde $A'=\{y' \in C([0,a], \mathbb{R}^n) : y \in A\}$ e ω é a medida de não equicontinuidade em $C([0,a], \mathbb{R}^n)$ (exemplo (1.9)). É fácil ver que μ é uma medida de não compacidade uniformemente contínua em $E(a)$. Isto porque ω é uma medida de não compacidade uniformemente contínua em $C([0,a], \mathbb{R}^n)$, e $x \longmapsto x'$ é uma isometria linear de $E(a)$ sobre $C([0,a], \mathbb{R}^n)$.

(10.8) Lema. Suponhamos que no lema (10.6) tomamos $a > 0$ tal que $Ma \leq \rho$ e $Ma^{\frac{1}{p}} \leq \rho$. Então a aplicação $F : N(\bar{\lambda},\bar{\sigma},\bar{\phi}) \times D(a,\rho) \longrightarrow D(a,\rho)$ é tal que $\mu(F(\lambda,\sigma,\phi,A)) \leq k\, a^{\frac{1}{p}}\, \mu(A)$, para todo subconjunto limitado $A \subset D(a,\rho)$ e para qualquer $(\lambda,\sigma,\phi) \in N(\bar{\lambda},\bar{\sigma},\bar{\phi})$.

Demonstração. Fixemos $(\lambda,\sigma,\phi) \in N(\bar{\lambda},\bar{\sigma},\bar{\phi})$ e A subconjunto limitado de $D(a,\rho)$. Tomemos $\varepsilon > 0$. Existe $\delta_1 > 0$ tal que para $t_1, t_2 \in [0,a]$ temos que

$$|t_1 - t_2| < \delta_1 \text{ e } \|\tilde{\phi}_{t_1} + \hat{y}_{t_1} - \tilde{\phi}_{t_2} - \hat{y}_{t_2}\|^{(0)} < \delta_1$$

$$\Longrightarrow |f(\lambda,\sigma + t_1, \tilde{\phi}_{t_1} + \hat{y}_{t_1},\xi) - f(\lambda,\sigma + t_2, \tilde{\phi}_{t_2} + \hat{y}_{t_2},\xi)| < \varepsilon,$$

para quaisquer $\xi \in \Omega_2$ e $y \in D(a,\rho)$. Isto decorre da hipótese (h_2) e do fato de $(\sigma + t_1, \tilde{\phi}_{t_1} + \hat{y}_{t_1})$ e $(\sigma + t_2, \tilde{\phi}_{t_2} + \hat{y}_{t_2})$ pertencerem ao compacto $K \subset \Omega_1$ definido na demonstração do lema (10.6). Nessa demonstração vimos também que $\|\tilde{\phi}_{t_1} - \tilde{\phi}_{t_2}\|^{(0)} \leq M_1 \cdot |t_1 - t_2|^{\frac{1}{p'}}$ e que $\|\hat{y}_{t_1} - \hat{y}_{t_2}\|^{(0)} \leq \rho \cdot |t_1 - t_2|^{\frac{1}{p'}}$, para $|t_1 - t_2| \leq r$. Tomando $\delta_2 = \min\{\delta_1, (\delta_1/2M_1)^{p'}, (\delta_1/2\rho)^{p'}, r\}$, temos que para $t_1, t_2 \in [0,a]$

$$|t_1 - t_2| < \delta_2 \Longrightarrow |f(\lambda,\sigma + t_1,\tilde{\phi}_{t_1} + \hat{y}_{t_1},\xi) - f(\lambda,\sigma + t_2,\tilde{\phi}_{t_2} + \hat{y}_{t_2},\xi)| < \varepsilon,$$

$$\forall \xi \in \Omega_2,\ \forall y \in D(a,\rho).$$

Pela definição de $\mu(A)$, existe $\delta_3 > 0$ tal que $\sup\{|y'(t_1) - y'(t_2)| : y \in A, t_1, t_2 \in [0,a], |t_1 - t_2| \leq \delta_3\} \leq \mu(A) + \varepsilon$. Tomemos $\delta_4 > 0$ tal que $\|\tilde{\phi}'_{t_1} - \tilde{\phi}'_{t_2}\|_p \leq \varepsilon$ para $|t_1 - t_2| < \delta_4$, $t_1, t_2 \in [0,a]$. Seja $M_2 > 0$ tal que $\sup\{|y'(t)| : y \in A,\ t \in [0,a]\} < M_2$. Existe um tal M_2, pois A é limitado em $C^{(1)}([0,a], \mathbb{R}^n)$. Seja finalmente $\delta > 0$ dado por $\delta = \min\{\delta_2, \delta_3, \delta_4, (\varepsilon/M_2)^p\}$. Para $t_1, t_2 \in [0,a]$, $|t_1 - t_2| < \delta$, $t_1 < t_2$ e $y \in A$ temos que

$$\left|\frac{d}{dt} F(\lambda,\sigma,\phi,y)(t_1) - \frac{d}{dt} F(\lambda,\sigma,\phi,y)(t_2)\right|$$

$$= |f(\lambda,\sigma + t_1, \tilde{\phi}_{t_1} + \hat{y}_{t_1}, \tilde{\phi}'_{t_1} + \hat{y}'_{t_1}) - f(\lambda,\sigma + t_2, \tilde{\phi}_{t_2} + \hat{y}_{t_2}, \tilde{\phi}'_{t_2} + \hat{y}'_{t_2})|$$

$$\leq |f(\lambda,\sigma + t_1, \tilde{\phi}_{t_1} + \hat{y}_{t_1}, \tilde{\phi}'_{t_1} + \hat{y}'_{t_1}) - f(\lambda,\sigma + t_2, \tilde{\phi}_{t_2} + \hat{y}_{t_2}, \tilde{\phi}'_{t_1} + \hat{y}'_{t_1})|$$

$$+ |f(\lambda,\sigma + t_2, \tilde{\phi}_{t_2} + \hat{y}_{t_2}, \tilde{\phi}'_{t_1} + \hat{y}'_{t_1}) - f(\lambda,\sigma + t_2, \tilde{\phi}_{t_2} + \hat{y}_{t_2}, \tilde{\phi}'_{t_2} + \hat{y}'_{t_2})|$$

$$\leq \varepsilon + k \, \| \tilde{\phi}'_{t_1} + \hat{y}'_{t_1} - \tilde{\phi}'_{t_2} - \hat{y}'_{t_2} \|_p$$

$$\leq \varepsilon + k \, \| \tilde{\phi}'_{t_1} - \tilde{\phi}'_{t_2} \|_p + k \, \| \hat{y}'_{t_1} - \hat{y}'_{t_2} \|_p$$

$$\leq \varepsilon + k\varepsilon + k \Big[\int_{-r}^{0} | \hat{y}'(t_1 + s) - \hat{y}'(t_2 + s) |^p \, ds \Big]^{\frac{1}{p}}$$

$$\overset{(*)}{\leq} \varepsilon + k\varepsilon + k \Big[\int_{-t_2}^{-t_1} |y'(t_2 + s)|^p ds \Big]^{\frac{1}{p}} + k \Big[\int_{-t_1}^{0} |y'(t_1 + s) - y'(t_2 + s)|^p ds \Big]^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \varepsilon + k\varepsilon + k \, M_2 \, |t_1 - t_2|^{\frac{1}{p}} + k \, t_1^{\frac{1}{p}} \, [\mu(A) + \varepsilon]$$

$$\leq \varepsilon + k\varepsilon + k\varepsilon + ka^{\frac{1}{p}} \, [\mu(A) + \varepsilon]$$

$$\leq ka^{\frac{1}{p}} \mu(A) + (1 + 2k + ka^{\frac{1}{p}}) \, \varepsilon .$$

Vamos justificar a desigualdade (*). Para $s < -t_2$, temos que $\hat{y}'(t_1 + s) = \hat{y}'(t_2 + s) = 0$, pois $t_1 < t_2$. Para $-t_2 < s < -t_1$, temos que $\hat{y}'(t_1 + s) = 0$ e $\hat{y}'(t_2 + s) = y'(t_2 + s)$. Para $-t_1 < s < 0$, temos que $\hat{y}'(t_1 + s) = y'(t_1 + s)$ e $\hat{y}'(t_2 + s) = y'(t_2 + s)$. Portanto

$$\Big[\int_{-r}^{0} | \hat{y}'(t_1 + s) - \hat{y}'(t_2 + s) |^p \, ds \Big]^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \Big[\int_{-t_2}^{-t_1} |y'(t_2 + s)|^p ds \Big]^{\frac{1}{p}} + \Big[\int_{-t_1}^{0} |y'(t_1 + s) - y'(t_2 + s)|^p \, ds \Big]^{\frac{1}{p}} ,$$

e vale a desigualdade (*).

Provamos que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\sup\left\{\left|\frac{d}{dt}F(\lambda,\sigma,\phi,y)(t_1)-\frac{d}{dt}F(\lambda,\sigma,\phi,y)(t_2)\right|:y\in A,t_1,t_2\in[0,a],|t_1-t_2|<\delta\right\}$$

$$\leq ka^{1/p}\mu(A)+(1+2k+ka^{1/p})\varepsilon.$$

Como ε é arbitrário, temos que

$$\mu(F(\lambda,\sigma,\phi,A))\leq ka^{1/p}\mu(A). \quad \blacksquare$$

Podemos finalmente demonstrar o principal resultado desta seção.

(10.9) <u>Teorema de existência</u>. Seja Λ um espaço métrico, Ω um aberto de $\mathbb{R}\times C\times L_p$ $(1<p<\infty)$ da forma $\Omega_1\times\Omega_2$, com $\Omega_1\subset\mathbb{R}\times C$ e $\Omega_2\subset L_p$, e $f:\ \Lambda\times\Omega\longrightarrow\mathbb{R}^n$ uma função contínua, satisfazendo as hipóteses (h_1) e (h_2). Para quaisquer $\bar\lambda\in\Lambda$, $\bar\sigma\in\mathbb{R}$ e $\bar\phi\in W_p^{(1)}$, com $(\bar\sigma,\bar\phi,\bar\phi')\in\Omega$, existem $a>0$ e $N(\bar\lambda,\bar\sigma,\bar\phi)$, vizinhança de $(\bar\lambda,\bar\sigma,\bar\phi)$ em $\Lambda\times\mathbb{R}\times W_p^{(1)}$, tais que para qualquer $(\lambda,\sigma,\phi)\in N(\bar\lambda,\bar\sigma,\bar\phi)$ existe pelo menos uma solução $x:[\sigma-r,\sigma+a]\longrightarrow\mathbb{R}^n$ da equação (D_λ) com função inicial ϕ em σ.

<u>Demonstração</u> - Tomemos $\bar\lambda\in\Lambda$, $\bar\sigma\in\mathbb{R}$ e $\bar\phi\in W_p^{(1)}$, com $(\bar\sigma,\bar\phi,\bar\phi')\in\Omega$. Seja $N(\bar\lambda,\bar\sigma,\bar\phi)$ a vizinhança cuja existência é assegurada pelo lema (10.4), e $M>0$, $a>0$ e $\rho>0$ as constantes dadas pelo mesmo lema. Podemos escolher a de modo que $Ma\leq\rho$, $Ma^{1/p}\leq\rho$ e $ka^{1/p}<1$. Pelo lema (10.6), temos definida uma aplicação contínua e limitada

$$F:\ N(\bar\lambda,\bar\sigma,\bar\phi)\times D(a,\rho)\longrightarrow D(a,\rho).$$

Seja $(\lambda,\sigma,\phi)\in N(\bar\lambda,\bar\sigma,\bar\phi)$. A aplicação

$$F(\lambda,\sigma,\phi,\cdot)\times D(a,\rho)\longrightarrow D(a,\rho)$$

é um operador μ-condensante e limitado, definido no subconjunto convexo, fechado e não vazio $D(a,\rho)\subset C^{(1)}([0,a],\mathbb{R}^n)$ (lemas (10.8) e (10.3)). Pelo teorema (2.6) existe $y\in D(a,\rho)$ tal que $F(\lambda,\sigma,\phi,y)=y$, ou seja,

$$y(t) = \int_0^t f(\lambda,\sigma+s,\tilde{\phi}_s+\hat{y}_s,\tilde{\phi}_s'+\hat{y}_s')ds, \quad t\in[0,a].$$

Das considerações feitas em (9.4) decorre que a função $x: [\sigma-r,\sigma+a] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $x(\sigma+t)=\tilde{\phi}(t)+\tilde{y}(t)$, $t\in[-r,a]$, é uma solução da equação $x'(t)=f(\lambda,t,x_t,x_t')$ com função inicial ϕ em σ. ∎

Antes de prosseguirmos com a teoria, vejamos alguns exemplos de equações diferenciais que se enquadram nas hipóteses do teorema (10.9).

(10.10) <u>Exemplo</u>. A família de equações diferenciais funcionais com retardamento

$$x'(t) = g(\lambda,t,x_t)$$

sendo $g: \Lambda\times\Omega_1 \longrightarrow \mathbb{R}^n$ contínua, Λ um espaço métrico compacto e Ω_1 um aberto de $\mathbb{R}\times C$. Definindo $\Omega=\Omega_1\times L_p$ e $f: \Lambda\times\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $f(\lambda,t,\psi,\xi)=g(\lambda,t,\psi)$, vemos que as hipóteses do teorema (10.9) estão satisfeitas.

(10.11) <u>Exemplo</u>. A família de equações diferenciais funcionais do tipo neutro

$$x'(t) = g(\lambda,t,x_t, \int_{-r}^0 A(s)x'(t+s)ds).$$

A aplicação $A: [-r,0] \longrightarrow M(n,n)$ (o espaço das matrizes reais $n\times n$) pertence a $L_{p'}([-r,0],M(n,n))$ e a função $g: \Lambda\times\Omega_1\times B \longrightarrow \mathbb{R}^n$ $(B=\{v\in\mathbb{R}^n: |v|\leq b\})$ é contínua e lipschitziana em relação ao último argumento. Como antes, Λ é um espaço métrico compacto e Ω_1 é um aberto de $\mathbb{R}\times C$. Seja $\Omega_2 = \{\xi\in L_p : \|\xi\| < b/\|A\|_{p'}\}$ e $\Omega = \Omega_1\times\Omega_2$. Definindo $f: \Lambda\times\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ por

$$f(\lambda,t,\psi,\xi) = g(\lambda,t,\psi, \int_{-r}^{0} A(s)\xi(s)ds),$$

vemos que as hipóteses do teorema (10.9) estão satisfeitas. Notemos que

$$\left\{\int_{-r}^{0} A(s)\xi(s)ds:\ \xi\in\Omega_2\right\}\subset B$$

e que se $K\subset\Omega_1$ é compacto então g é uniformemente contínua em $\Lambda\times K\times B$, e portanto a hipótese (h_2) se verifica.

(10.12) Exemplo. A família de equações diferenciais funcionais do tipo neutro

$$x'(t) = g(\lambda,t,x_t,Tx_t').$$

O operador $T: L_p \longrightarrow L_p$ é definido por

$$(T\xi)(s) = \int_{-r}^{0} K(s,u)\xi(u)du, \qquad s\in[-r,0],$$

onde $K: [-r,0]\times[-r,0] \longrightarrow M(n,n)$ é um núcleo L_p, ou seja, K é tal que

$$\|K\|_p = \left[\int_{-r}^{0}\left[\int_{-r}^{0} |K(s,u)|^{p'}du\right]^{p/p'} ds\right]^{1/p} < \infty.$$

A função $g: \Lambda\times\Omega_1\times B \longrightarrow \mathbb{R}^n$ $(B = \{\xi\in L_p: \|\xi\|_p\leq b\}$ é contínua e lipschitziana em relação ao último argumento. Novamente Λ é um espaço métrico compacto e Ω_1 é um aberto de $\mathbb{R}\times C$. Escrevendo $\Omega_2 = \{\xi\in L_p: \|\xi\|_p < b/\|K\|_p\}$, $\Omega = \Omega_1\times\Omega_2$, e definindo $f:\Lambda\times\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ por $f(\lambda,t,\psi,\xi) = g(\lambda,t,\psi,T\xi)$, podemos aplicar o teorema (10.9). Vale a pena ressaltar que $\{T\xi\in L_p: \xi\in\Omega_2\}\subset B$ decorre de $\|T\xi\|_p \leq \leq \|K\|_p\|\xi\|_p$, e que $T(\Omega_2)$ é relativamente compacto, já que T é completamente contínuo. Se $K_1\subset\Omega_1$ é compacto então g é uniformemente contínua em $\Lambda\times K_1\times\overline{T(\Omega_2)}$, e portanto a hipótese (h_2) se verifica. Observe-se também que o exemplo anterior é um caso particular do presente exemplo: as equações do tipo visto em (10.11) correspondem a núcleos K independentes do seu primeiro argumento.

(10.13) Exemplo. A família de equações diferenciais funcionais do tipo neutro

$$x'(t) = g(\lambda,t,x_t, \int_{t-r+\tau}^{t} \langle x(s), Ax'(s-\tau)\rangle ds),$$

onde $\tau\in[0,r[$, $A\in M(n,n)$ e $\langle\cdot,\cdot\rangle$ denota o produto escalar no $\mathbb{R}^n$. A função $g: \Lambda\times\Omega_1\times[-b,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ $(b>0)$ é contínua e lipschitziana em relação ao último argumento. Desta vez assumiremos que Ω_1 é um aberto de $\mathbb{R}\times C$ tal que $\mathrm{proj}_C\Omega_1 = \{\psi\in C: (t,\psi)\in\Omega_1$ para algum $t\in\mathbb{R}\}$ é um subconjunto limitado de C. Como anteriormente, Λ é um espaço métrico compacto. Seja $M>0$ um limitante de $\mathrm{proj}_C\Omega_1$. Escrevendo $\Omega_2 = \{\xi\in L_p: \|\xi\|_p<b/\|A\|Mr^{1/p'}\}$, $\Omega = \Omega_1\times\Omega_2$, e definindo $f:\Lambda\times\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ por $f(\lambda,t,\psi,\xi) = g(\lambda,t,\psi, \int_{-r+\tau}^{0} \langle\psi(s), A\xi(s-\tau)\rangle ds)$, as hipóteses

do teorema (10.9) se verificam. A condição (h_2) decorre da continuidade uniforme de g em todo subconjunto da forma $\Lambda\times K\times[-b,b]$, onde $K\subset\Omega_1$ é compacto. Como caso particular deste exemplo temos a equação escalar $x'(t) = \int_{t-r+\tau}^{t} x(s)x'(s-\tau)ds$.

11. Unicidade das soluções

Nesta seção veremos um teorema que dá condições suficientes para a unicidade das soluções da EDFN

$$(D) \qquad x'(t) = f(t,x_t,x_t')$$

com função inicial ϕ em σ.

(11.1) Teorema (Unicidade das soluções). Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}\times C\times L_p$ $(1<p<\infty)$ da forma $\Omega_1\times\Omega_2$, com $\Omega_1\subset\mathbb{R}\times C$ e $\Omega_2\subset L_p$, e seja $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma função contínua. Suponhamos que f é lipschitziana em relação aos seus dois últimos argumentos, ou seja, existem $k,\ell \geq 0$ tais que

$$|f(t,\psi,\xi^1)-f(t,\psi,\xi^2)| \leq k\|\xi^1-\xi^2\|_p, \ \forall(t,\psi,\xi^1),(t,\psi,\xi^2)\in\Omega,$$

e

$$|f(t,\psi^1,\xi)-f(t,\psi^2,\xi)| \leq \ell\|\psi^1-\psi^2\|^{(0)}, \ \forall(t,\psi^1,\xi),(t,\psi^2,\xi)\in\Omega.$$

Sejam $\sigma\in\mathbb{R}$ e $\phi\in W_p^{(1)}$, com $(\sigma,\phi,\phi')\in\Omega$. Se $x\colon [\sigma-r,\sigma+a] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ e $y\colon [\sigma-r,\sigma+a] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ $(a>0)$ são soluções da EDFN $x'(f) = f(t,x_t,x_t')$ por (σ,ϕ), então $x = y$.

Demonstração. Seja

$$J = \{t\in[\sigma,\sigma+a]:\ x(s)=y(s) \text{ para } s\in[\sigma-r,t]\}.$$

Como J é não vazio (pois $\sigma\in J$) e é limitado, existe $\sup J$. Da continuidade de x e y decorre que $\sup J\in J$. Queremos provar que $\sup J=\sigma+a$. Se $\sup J<\sigma+a$ podemos, sem perda de generalidade, supor que $\sup J=\sigma$: basta colocarmos $\sigma_1=\sup J$, tomarmos $a_1>0$ dado por $\sigma_1+a_1=\sigma+a$, e considerarmos as restrições de x e y ao intervalo $[\sigma_1-r,\sigma_1+a_1]$. Suponhamos então que $\sup J=\sigma$. Para $t\in[\sigma,\sigma+a]$ temos que

$$\begin{aligned}|x'(t)-y'(t)| &= |f(t,x_t,x_t')-f(t,y_t,y_t')|\\ &\le |f(t,x_t,x_t')-f(t,y_t,x_t')|+|f(t,y_t,x_t')-f(t,y_t,y_t')|\\ &\le \ell\|x_t-y_t\|^{(0)}+k\|x_t'-y_t'\|_p \qquad (5)\end{aligned}$$

e que

$$\begin{aligned}|x(t)-y(t)| &= |x(\sigma)-y(\sigma)+\int_\sigma^t[x'(s)-y'(s)]ds|\le\int_\sigma^t|x'(s)-y'(s)|ds\\ &\le\left[\int_\sigma^t|x'(s)-y'(s)|^p ds\right]^{1/p}\cdot(t-\sigma)^{1/p'}\overset{(*)}{\le}\|x_t'-y_t'\|_p\cdot(t-\sigma)^{1/p'}\\ &\le a^{1/p'}\|x_t'-y_t'\|_p, \qquad (6)\end{aligned}$$

sendo que na desigualdade $(*)$ supusemos também que $t\le\sigma+r$. De (6) decorre que para $t\in[\sigma,\sigma+a]$ e $t\le\sigma+r$ temos que

$$\|x_t-y_t\|^{(0)}\le a^{1/p'}\cdot\sup\{\|x_s'-y_s'\|_p:\ s\in[\sigma,t]\} = a^{1/p'}\|x_t'-y_t'\|_p,$$

e por (5) temos que

$$|x'(t)-y'(t)|\le(k+\ell a^{1/p'})\|x_t'-y_t'\|_p.$$

Mas então

$$\|x'_t - y'_t\|_p = \left[\int_{-r}^{0} |x'(t+s)-y'(t+s)|^p ds\right]^{1/p} = \left[\int_{\sigma-t}^{0} |x'(t+s)-y'(t+s)|^p ds\right]^{1/p}$$

$$\leq (t-\sigma)^{1/p}\,(k+\ell a^{1/p'})\cdot \sup\{\|x'_s-y'_s\|_p:\ s\in[\sigma,t]\}$$

$$=(t-\sigma)^{1/p}\,(k+\ell a^{1/p'})\cdot\|x'_t-y'_t\|_p.$$

Para $t-\sigma$ suficientemente pequeno (de modo que $(t-\sigma)^{1/p}(k+\ell a^{1/p'})<1$), isto implica em $x'_t = y'_t$, e portanto em $x(s) = y(s)$ para $s\in[\sigma-r,t]$, o que contradiz $\sup J = \sigma$. ∎

(11.2) Observação. Na demonstração acima, usamos que $\Omega = \Omega_1\times\Omega_2$ quando, nas desigualdades (5), escrevemos $f(t,y_t,x'_t)$. É claro que essa hipótese não é essencial: se Ω é um aberto qualquer de $\mathbb{R}\times C\times L_p$, então todo ponto de Ω admite uma vizinhança aberta da forma $\Omega_1\times\Omega_2\subset\Omega$, sendo $\Omega_1\subset\mathbb{R}\times C$ e $\Omega_2\subset L_p$.

12. Prolongabilidade das soluções

Discutiremos agora a questão da prolongabilidade das soluções da EDFN

(D) $$x'(t) = f(t,x_t,x'_t),$$

sendo $f:\ \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ contínua no aberto $\Omega\subset\mathbb{R}\times C\times L_p$.

(12.1) Definição. Dizemos que uma função

$$x:\ [\sigma-r,\sigma+a] \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad (a>0)$$

é uma solução de (D) em $[\sigma-r,\sigma+a]$ se

(i) $x|_{[\sigma-r,\sigma]} \in W_p^{(1)}([\sigma-r,\sigma],\ \mathbb{R}^n)$ e $x|_{[\sigma,\sigma+a]} \in C^{(1)}([\sigma,\sigma+a],\ \mathbb{R}^n)$,

(ii) $(t,x_t,x_t') \in \Omega$ para todo $t \in [\sigma,\sigma+a]$,

(iii) $x'(t) = f(t,x_t,x_t')$ para todo $t \in [\sigma,\sigma+a]$,

sendo $x'(\sigma)$ e $x'(\sigma+a)$ as derivadas à direita e à esquerda em σ e $\sigma+a$, respectivamente. De modo análogo se define solução de (D) em $[\sigma-r,\sigma+a[$ $(a>0)$ e solução de (D) em $[\sigma-r,\infty[$.

(12.2) Definição. Seja x uma solução de (D) num intervalo J cujo extremo esquerdo é $\sigma-r$. Um prolongamento de x é uma solução $\bar{x}$, num intervalo $\bar{J} \supset J$, cujo extremo esquerdo é também $\sigma-r$, que coincide com x em J. Se $\bar{J}$ contém estritamente J, dizemos que $\bar{x}$ é um prolongamento estrito de x. Se x não admitir prolongamento estrito, diremos que x é não prolongável. Do lema de Zorn decorre que toda solução de (D) admite um prolongamento que é não prolongável.

(12.3) Proposição. Seja $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, Ω_1 aberto de $\mathbb{R} \times C$ e Ω_2 aberto de L_p $(1<p<\infty)$. Se $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua e satisfaz as hipóteses (h_1) e (h_2) (vide (10.5)), então toda solução não prolongável da EDFN

$$\text{(D)} \qquad x'(t) = f(t,x_t,x_t')$$

está definida num intervalo aberto à direita.

Demonstração. Uma solução x definida num intervalo $[\sigma-r,b]$ $(b>\sigma)$ é sempre estritamente prolongável: da definição de solução temos que $(b,x_b,x_b') \in \Omega$, e aplicando o teorema (10.9) com $\bar{\sigma} = b$ e $\bar{\phi} = x_b$, obtém-se um prolongamento estrito de x. ∎

(12.4) <u>Proposição</u>. Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}\times C\times L_p$ e $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma função contínua. Se $x\colon [\sigma-r,b[\longrightarrow \mathbb{R}^n$ $(b>\sigma)$ é uma solução não prolongável da equação (D), então para todo subconjunto fechado e limitado $A\subset\Omega$ existe $t_A\in[\sigma,b[$ tal que $(t,x_t,x_t')\notin A$ para $t\in[t_A,b[$.

<u>Demonstração</u>. Suponhamos que existe uma solução não prolongável $x\colon [\sigma-r,b[\longrightarrow \mathbb{R}^n$ e um subconjunto fechado e limitado $A\subset\Omega$ tal que para todo $s\in[\sigma,b[$ existe $t\in[s,b[$ com $(t,x_t,x_t')\in A$. Podemos então tomar uma seqüência $t_k \longrightarrow b^-$, com $t_k\in[\sigma,b[$, tal que $(t_k,x_{t_k},x_{t_k}')\in A$ para todo k. Consideremos a função

$$\zeta\colon [\sigma,b[\longrightarrow [0,\infty[$$

$$\theta \longmapsto \zeta(\theta) = \|x'\|_p^{[\sigma-r,\theta]}.$$

É claro que ζ é não decrescente. Se ζ for limitada, o limite $\lim_{\theta\to b^-}\zeta(\theta)$ existirá e será finito, e portanto $x'\in L_p([\sigma-r,b],\mathbb{R}^n)$ e $x_b'\in L_p$ (isto não depende do valor de x' em b, que não está definido). Segue-se que existe o limite

$$\lim_{t\to b^-} x(t) = x(\sigma) + \lim_{t\to b^-}\int_\sigma^t x'(s)\,ds,$$

e definimos $x(b) = \lim_{t\to b^-} x(t)$. Afirmamos que $(b,x_b,x_b')\in\Omega$. Isto porque $(t_k,x_{t_k},x_{t_k}') \longrightarrow (b,x_b,x_b')$ quando $k\to\infty$, e (t_k,x_{t_k},x_{t_k}') pertence ao subconjunto fechado $A\subset\Omega$. Da continuidade de f vem que $x'(t) = f(t,x_t,x'_t) \longrightarrow f(b,x_b,x'_b)$ quando $t \to b^-$, e portanto $x'(b) = f(b,x_b,x'_b)$. Obtemos assim um prolongamento estrito de x, o que é absurdo, e a proposição está demonstrada no caso em que ζ é limitada. Se ζ não for limitada teremos que $\lim_{\theta\to b^-}\zeta(\theta) = +\infty$. Como para $\theta\in[\sigma,b[$ temos que

$$\|x'\|_p^{[\theta-r,\theta]} \geq \|x'\|_p^{[\sigma-r,\theta]} - \|x'\|_p^{[\sigma-r,\theta-r]} \geq \zeta(\theta) - \|x'\|_p^{[\sigma-r,b-r]},$$

segue-se que $\|x'_{t_k}\|_p = \|x'\|_p^{[t_k-r,t_k]} \longrightarrow +\infty$ quando $k \longrightarrow \infty$ e isso contradiz o fato de (t_k,x_{t_k},x'_{t_k}) pertencer ao subconjunto limitado $A\subset\Omega$. A proposição está demonstrada. ∎

(12.5) <u>Observação</u>. Na realidade, provamos mais do que o enunciado da proposição (12.4) afirma. A demonstração acima garante a existência de t_A para qualquer subconjunto fechado $A\subset\Omega$ tal que $\mathrm{proj}_{L_p}(A)=\{\xi\in L_p\colon (t,\psi,\xi)\in A$ para algum $(t,\psi)\in\mathbb{R}\times C\}$ é limitado em L_p.

13. <u>Dependência contínua</u>

(13.1) <u>Introdução</u>. Nosso objetivo nesta seção é demonstrar que as soluções por (σ,ϕ) da equação

$$(D_\lambda) \qquad x'(t) = f(\lambda,t,x_t,x'_t)$$

dependem continuamente de (λ,σ,ϕ). A situação é a do teorema (10.9): Λ é um espaço métrico, Ω é um aberto de $\mathbb{R}\times C\times L_p$ $(1<p<\infty)$ da forma $\Omega_1\times\Omega_2$, com $\Omega_1\subset\mathbb{R}\times C$ e $\Omega_2\subset L_p$, e $f\colon \Lambda\times\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função contínua, satisfazendo as hipóteses (h_1) e (h_2). Fixemos

$\bar{\lambda}\in\Lambda$, $\bar{\sigma}\in\mathbb{R}$, e $\bar{\phi}\in W_p^{(1)}$, com $(\bar{\lambda},\bar{\sigma},\bar{\phi})\in\Omega$, e tomemos a vizinhança $N(\bar{\lambda},\bar{\sigma},\bar{\phi})\subset\Lambda\times\mathbb{R}\times W_p^{(1)}$, e as constantes $M>0$, $a>0$ e $\rho>0$ dadas pelo lema (10.4). Como na demonstração do teorema (10.9), escolhemos a de modo que $Ma\le\rho$, $Ma^{1/p}\le\rho$, e $ka^{1/p}<1$, e temos uma aplicação uniformemente contínua e limitada

$$F\colon N(\bar{\lambda},\bar{\sigma},\bar{\phi})\times D(a,\rho) \longrightarrow D(a,\rho)$$

tal que para cada $(\lambda,\sigma,\phi)\in N(\bar{\lambda},\bar{\sigma},\bar{\phi})$ o operador

$$F(\lambda,\sigma,\phi,\cdot)\colon D(a,\rho) \longrightarrow D(a,\rho)$$

é μ-condensante.

Definimos $Y\colon N(\bar{\lambda},\bar{\sigma},\bar{\phi}) \longrightarrow \mathcal{P}(D(a,\rho))$ (o conjunto das partes de $D(a,\rho)$) por

$$Y(\lambda,\sigma,\phi) = \{y\in D(a,\rho)\colon F(\lambda,\sigma,\phi,y)=y\}.$$

Pelo teorema (3.3), a multifunção Y é semicontínua superiormente em $N(\bar{\lambda},\bar{\sigma},\bar{\phi})$. Usaremos esse fato para demonstrar um teorema de dependência contínua para a equação (D_λ). Temos, porém, um problema prévio. Em (10.1), vimos que a cada ponto fixo de $F(\lambda,\sigma,\phi,\cdot)$ (ou, equivalentemente, a cada elemento de $Y(\lambda,\sigma,\phi)$) corresponde uma solução da equação (D_λ) por (σ,ϕ), definida em $[\sigma-r,\sigma+a]$. Dado $(\lambda,\sigma,\phi)\in N(\bar{\lambda},\bar{\sigma},\bar{\phi})$, será que toda solução da equação (D_λ) por (σ,ϕ) admite um prolongamento definido pelo menos em $[\sigma-r,\sigma+a]$, e corresponde a um elemento de $Y(\lambda,\sigma,\phi)$? Os próximos dois lemas dão a resposta.

(13.2) <u>Lema</u>. Nas condições do teorema (10.9), seja $(\lambda,\sigma,\phi)\in N(\bar{\lambda},\bar{\sigma},\bar{\phi})$. Se $x\colon [\sigma-r,b[\ \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é uma solução não prolongável da equação (D_λ) por (σ,ϕ), então $b>\sigma+a$.

<u>Demonstração</u>. Suponhamos que $\sigma<b\leq\sigma+a$. Definindo $y\colon [0,b-\sigma[\ \longrightarrow \mathbb{R}^n$ por $y(t)=x(\sigma+t)-\phi(0)$, $t\in[0,b-\sigma[$, temos que

$$(7)\qquad y(t) = \int_0^t f(\lambda,\sigma+s,\tilde{\phi}_s+\hat{y}_s,\tilde{\phi}_s'+\hat{y}_s')ds, \qquad t\in[0,b-\sigma[.$$

Definimos

$$\mathcal{D} = \{d\in[0,b-\sigma[:\|\hat{y}_t\|^{(0)}\leq\rho \text{ e } \|\hat{y}_t'\|_p\leq\rho \text{ para } t\in[0,d]\}.$$

Temos que $\mathcal{D}\neq\emptyset$, pois $0\in\mathcal{D}$. Seja $\bar{d}=\sup\mathcal{D}$. Afirmamos que $\bar{d}=b-\sigma$. Para todo $t\in[0,\bar{d}[$ temos que $\|\hat{y}_t\|^{(0)}\leq\rho$ e $\|\hat{y}_t'\|_p\leq\rho$. Se $\bar{d}<b-\sigma$, então $\|\hat{y}_{\bar{d}}\|^{(0)}\leq\rho$ e $\|\hat{y}_{\bar{d}}'\|_p\leq\rho$, pela continuidade das funções $t\longmapsto\|\hat{y}_t\|^{(0)}$ e $t\longmapsto\|\hat{y}_t'\|_p$. Pelo lema (10.4), temos que $|f(\lambda,\sigma+t,\tilde{\phi}_t+\hat{y}_t,\tilde{\phi}_t'+\hat{y}_t')|<M$ para $t\in[0,\bar{d}]$, já que $\|\hat{y}_t\|^{(0)}\leq\rho$ e $\|\hat{y}_t'\|_p\leq\rho$ para $0\leq t\leq\bar{d}<b-\sigma\leq a$. De (7) decorre então que

$$\|\hat{y}_{\bar{d}}\|^{(0)}\leq\|y\|^{(0)}_{[0,\bar{d}]}\leq M\bar{d}<M(b-\sigma)\leq Ma\leq\rho$$

e

$$\|\hat{y}_{\bar{d}}'\|_p\leq\|y'\|_p^{[0,\bar{d}]}\leq M\bar{d}^{1/p}<M(b-\sigma)^{1/p}\leq Ma^{1/p}\leq\rho.$$

Mas se $\|\hat{y}_{\bar{d}}\|^{(0)}<\rho$ e $\|\hat{y}_{\bar{d}}'\|_p<\rho$ então, por continuidade, existe $\varepsilon>0$ tal que $\|\hat{y}_t\|^{(0)}<\rho$ e $\|\hat{y}_t'\|_p<\rho$ para $t\in]\bar{d}-\varepsilon,\bar{d}+\varepsilon[$, e isto contradiz $\bar{d}=\sup\mathcal{D}$. Logo $\bar{d}=b-\sigma$, o que significa que $\|\hat{y}_t\|^{(0)}\leq\rho$ e $\|\hat{y}_t'\|_p\leq\rho$ para todo $t\in[0,b-\sigma[$. Mostraremos agora que isso contradiz a proposição (12.4). Sejam

$$K_1 = \{\tilde{\phi}_t \in C : t\in[0,b-\sigma]\} \quad e \quad K_2 = \{\tilde{\phi}_t' \in L_p : t\in[0,b-\sigma]\}.$$

Os conjuntos K_1 e K_2 são subconjuntos compactos de C e L_p, respectivamente. Seja H_1 a ρ-vizinhança fechada de K_1 em C, e H_2 a ρ-vizinhança fechada de K_2 em L_p. Então $A = [\sigma,b]\times H_1\times H_2$ é um subconjunto fechado e limitado de $\mathbb{R}\times C\times L_p$, e está contido em Ω (pela demonstração de (10.4)). Como $x_{\sigma+t} = \tilde{\phi}_t + \hat{y}_t$ para $t\in[0,b-\sigma[$, temos que $(t,x_t,x_t')\in A$ para $t\in[\sigma,b[$, o que contradiz a proposição (12.4). Essa contradição veio da hipótese $b \le \sigma+a$. ∎

(13.3) Lema. Nas condições do teorema (10.9), seja $(\lambda,\sigma,\phi)\in N(\bar{\lambda},\bar{\sigma},\bar{\phi})$. Seja $x\colon [\sigma-r,\sigma+a] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma solução da equação (D_λ) por (σ,ϕ) (pelo lema anterior, toda solução de (D_λ) por (σ,ϕ) admite um prolongamento definido num intervalo que contém $[\sigma-r,\sigma+a]$). Definindo $y\colon [0,a] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ por $y(t) = x(\sigma+t) - \phi(0)$, $t\in[0,a]$, temos que $y\in Y(\lambda,\sigma,\phi)$.

Demonstração. Para $t\in[0,a]$, temos que

$$y(t) = \int_0^t f(\lambda,\sigma+s,\tilde{\phi}_s+\hat{y}_s,\tilde{\phi}_s'+\hat{y}_s')ds.$$

Se provarmos que $y\in D(a,\rho)$, teremos então que $y = F(\lambda,\sigma,\phi,y)$ e portanto $y\in Y(\lambda,\sigma,\phi)$. Para provar que $y\in D(a,\rho)$, definimos

$$\mathcal{D} = \{d\in[0,a] : \|\hat{y}_t\|^{(0)} \le \rho \quad e \quad \|\hat{y}_t'\|_p \le \rho \text{ para } t\in[0,d]\}.$$

Com um procedimento igual ao adotado na demonstração do lema (13.2), demonstra-se que $\sup\mathcal{D} = a$, e portanto $y\in D(a,\rho)$. ∎

Os lemas (13.2) e (13.3) nos permitem reduzir o problema da dependência contínua das soluções da equação

$$(D_\lambda) \qquad x'(t) = f(\lambda,t,x_t,x'_t)$$

ao problema da dependência contínua dos pontos fixos de $F(\lambda,\sigma,\phi,\cdot)$.

(13.4) Teorema (Dependência semicontínua local). Seja $f\colon \Lambda\times\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma função que satisfaz as hipóteses do teorema (10.9). Dados $\bar\lambda\in\Lambda$, $\bar\sigma\in\mathbb{R}$ e $\bar\phi\in W_p^{(1)}$, com $(\bar\sigma,\bar\phi,\bar\phi')\in\Omega$, existem $a>0$ e $N(\bar\lambda,\bar\sigma,\bar\phi)$, vizinhança de $(\bar\lambda,\bar\sigma,\bar\phi)$ em $\Lambda\times\mathbb{R}\times W_p^{(1)}$, tais que:

(i) se $(\lambda,\sigma,\phi)\in N(\bar\lambda,\bar\sigma,\bar\phi)$ então toda solução de (D_λ) por (σ,ϕ) admite um prolongamento definido pelo menos em $[\sigma-r,\sigma+a]$;

(ii) as soluções $x\colon [\sigma-r,\sigma+a] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ da equação (D_λ) por (σ,ϕ) dependem semicontinuamente de $(\lambda,\sigma,\phi)\in N(\bar\lambda,\bar\sigma,\bar\phi)$, ou seja: dados $\varepsilon>0$ e $(\lambda^0,\sigma^0,\phi^0)\in N(\bar\lambda,\bar\sigma,\bar\phi)$, existe $V(\lambda^0,\sigma^0,\phi^0)$, vizinhança de $(\lambda^0,\sigma^0,\phi^0)$ em $\Lambda\times\mathbb{R}\times W_p^{(1)}$, tal que para qualquer $x\colon [\sigma-r,\sigma+a] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, solução de (D_λ) por (σ,ϕ), com $(\lambda,\sigma,\phi)\in V(\lambda^0,\sigma^0,\phi^0)$, existe

$$x^0\colon [\sigma^0-r,\sigma^0+a] \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

solução de (D_{λ^0}) por (σ^0,ϕ^0), com $\|x-x^0\|_J^{(1)} < \varepsilon$, sendo $J=[\sigma,\sigma^0+a]$ (caso $\sigma\geq\sigma^0$) ou $J=[\sigma^0,\sigma+a]$ (caso $\sigma\leq\sigma^0$).

Demonstração. Dados $\bar\lambda\in\Lambda$, $\bar\sigma\in\mathbb{R}$ e $\bar\phi\in W_p^{(1)}$, com $(\bar\sigma,\bar\phi,\bar\phi')\in\Omega$, tomamos a vizinhança $N(\bar\lambda,\bar\sigma,\bar\phi) = U\times I\times V\subset\Lambda\times\mathbb{R}\times W_p^{(1)}$ e as constantes $M>0$, $a>0$ e $\rho>0$ dadas pelo lema (10.4). Escolhemos a de modo que $Ma\leq\rho$, $Ma^{1/p}\leq\rho$ e $ka^{1/p}<1$. Então a multifunção $Y\colon N(\bar\lambda,\bar\sigma,\bar\phi) \longrightarrow D(a,\rho)$ definida por

$$Y(\lambda,\sigma,\phi) = \{y\in D(a,\rho):\ F(\lambda,\sigma,\phi,y)=y\}$$

é semicontínua superiormente em $N(\bar{\lambda},\bar{\sigma},\bar{\phi})$ (teorema (3.3)). Dados $\varepsilon>0$ e $(\lambda^0,\sigma^0,\phi^0)\in N(\bar{\lambda},\bar{\sigma},\bar{\phi})$, existe portanto $\delta_1>0$ tal que

$$Y(\lambda,\sigma,\phi)\subset N_{\varepsilon/4}(Y(\lambda^0,\sigma^0,\phi^0)) = \{y\in D(a,\rho):\|y-y^0\|^{(1)}_{[0,a]} < \varepsilon/4$$

para algum $y^0\in Y(\lambda^0,\sigma^0,\phi^0)\}$, sempre que $(\lambda,\sigma,\phi)\in N(\bar{\lambda},\bar{\sigma},\bar{\phi})$ for tal que $d(\lambda,\lambda^0)<\delta_1$, $|\sigma-\sigma^0|<\delta_1$ e $\|\phi-\phi^0\|_{1,p}<\delta_1$. Como $D(a,\rho)$ é um subconjunto equicontínuo de $C([0,a],\mathbb{R}^n)$ (vide demonstração do lema (10.6)), existe $\delta_2>0$ tal que $|y(t)|<\varepsilon/4$ para quaisquer $y\in D(a,\rho)$ e $t\in[0,\delta_2[$. Além disso, existe $\delta_3>0$ tal que

$$\sup\{|z'(t_1)-z'(t_2)|: t_1,t_2\in[0,a], |t_1-t_2|<\delta_3, z\in Y(\lambda^0,\sigma^0,\phi^0)\}<\varepsilon/4,$$

pois $\{z': z\in Y(\lambda^0,\sigma^0,\phi^0)\}$ é também um subconjunto equicontínuo de $C([0,a],\mathbb{R}^n)$. Prova: como $Y(\lambda^0,\sigma^0,\phi^0)=F(\lambda^0,\sigma^0,\phi^0,Y(\lambda^0,\sigma^0,\phi^0))$, temos que

$$\mu(Y(\lambda^0,\sigma^0,\phi^0)) = \mu(F(\lambda^0,\sigma^0,\phi^0,Y(\lambda^0,\sigma^0,\phi^0)))\le ka^{1/p}\mu(Y(\lambda^0,\sigma^0,\phi^0))$$

(lema (10.8)), donde $\mu(Y(\lambda^0,\sigma^0,\phi^0))=0$ (pois $ka^{1/p}<1$) e portanto $\omega(\{z': z\in Y(\lambda^0,\sigma^0,\phi^0)\})=0$.

Sejam $U_1=\{\lambda\in U: d(\lambda,\lambda^0)<\delta_1\}$, $I_1=\{\sigma\in I: |\sigma-\sigma^0|<\min\{\delta_1,\delta_2,\delta_3\}\}$ e $V_1=\{\phi\in V: \|\phi-\phi^0\|_{1,p}<\delta_1$ e $|\phi(0)-\phi^0(0)|<\varepsilon/4\}$. Tomemos $V(\lambda^0,\sigma^0,\phi^0)$ dada por $U_1\times I_1\times V_1$. Seja $(\lambda,\sigma,\phi)\in V(\lambda^0,\sigma^0,\phi^0)$ e $x: [\sigma-r,\sigma+a]\to\mathbb{R}^n$ uma solução de (D_λ) por (σ,ϕ). Definindo $y: [0,a]\longrightarrow\mathbb{R}^n$ por $y(t)=x(\sigma+t)-\phi(0)$ $(t\in[0,a])$, temos que $y\in Y(\lambda,\sigma,\phi)$ (lema (13.3)).

Como $Y(\lambda,\sigma,\phi)\subset N_{\varepsilon/4}(Y(\lambda^0,\sigma^0,\phi^0))$, existe $y^0\in Y(\lambda^0,\sigma^0,\phi^0)$ tal que $\|y-y^0\|^{(1)}_{[0,a]} < \varepsilon/4$. Seja $x^0\colon [\sigma^0-r,\sigma^0+a] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $x^0(t) = \tilde{\phi}^0(t-\sigma^0) + \hat{y}^0(t-\sigma^0)$, $t\in[\sigma^0-r,\sigma^0+a]$. É claro que x^0 é uma solução de (D_{λ^0}) por (σ^0,ϕ^0). Suponhamos que $\sigma^0 \leq \sigma$. De $y(t) = x(\sigma+t) - \phi(0)$ e $y^0(t) = x^0(\sigma^0+t) - \phi^0(0)$ $(t\in[0,a])$ segue-se que

$$\begin{aligned}
\|x-x^0\|^{(1)}_{[\sigma,\sigma^0+a]} &= |x(\sigma)-x^0(\sigma)|+\sup\{|x'(t)-x^{0\prime}(t)|:t\in[\sigma,\sigma^0+a]\} \\
&= |x(\sigma)-x^0(\sigma)|+\sup\{|y'(t-\sigma)-y^{0\prime}(t-\sigma^0)|:t\in[\sigma,\sigma^0+a]\} \\
&= |\phi(0)-\phi^0(0)-y^0(\sigma-\sigma^0)|+\sup\{|y'(t-\sigma)-y^{0\prime}(t-\sigma^0)|:t\in[\sigma,\sigma^0+a]\} \\
&\leq |\phi(0)-\phi^0(0)| + |y^0(\sigma-\sigma^0)| \\
&\quad + \sup\{|y'(t-\sigma)-y^{0\prime}(t-\sigma)|:t\in[\sigma,\sigma^0+a]\} \\
&\quad + \sup\{|y^{0\prime}(t-\sigma)-y^{0\prime}(t-\sigma^0)|:t\in[\sigma,\sigma^0+a]\} \\
&< \varepsilon/4 + \varepsilon/4 + \|y-y^0\|^{(1)}_{[0,a]} + \varepsilon/4 \leq \varepsilon,
\end{aligned}$$

e (i) está provada, caso $\sigma^0 \leq \sigma$. De modo análogo, demonstra-se (ii) quando $\sigma \leq \sigma^0$. ∎

(13.5) Observação. O caráter local do teorema (13.4) está no fato desse teorema assegurar a semicontinuidade superior, numa vizinhança $N(\bar{\lambda},\bar{\sigma},\bar{\phi})$, das soluções de (D_λ) por (σ,ϕ) definidas em intervalos da forma $[\sigma,\sigma+a]$, para um certo $a > 0$. O próximo resultado tem caráter diverso: se $\bar{x}\colon [\bar{\sigma}-r,b[\longrightarrow \mathbb{R}^n$ $(\bar{\sigma}<b\leq\infty)$ for a única solução não prolongável de $(D_{\bar{\lambda}})$ por $(\bar{\sigma},\bar{\phi})$,

o teorema seguinte assegura, para todo $c \in]\bar{\sigma},b[$, a semicontinuidade superior em $(\bar{\lambda},\bar{\sigma},\bar{\phi})$ das soluções de (D_λ) por (σ,ϕ), definidas em $[\sigma-r,c]$. A demonstração é análoga à de um teorema de Melvin [20].

(13.6) <u>Teorema</u>. Seja $f\colon \Lambda\times\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma função que satisfaz as hipóteses do teorema (10.9). Suponhamos que $\bar{\lambda}\in\Lambda$, $\bar{\sigma}\in\mathbb{R}$ e $\bar{\phi}\in W_p^{(1)}$, com $(\bar{\lambda},\bar{\sigma},\bar{\phi})\in\Omega$, e que $\bar{x}\colon [\bar{\sigma}-r,b[\longrightarrow \mathbb{R}^n$ $(\bar{\sigma}<b\le\infty)$ é a única solução não prolongável da equação $(D_{\bar{\lambda}})$ por $(\bar{\sigma},\bar{\phi})$. Dados $\varepsilon>0$ e $c\in]\bar{\sigma},b[$, existe $U(\bar{\lambda},\bar{\sigma},\bar{\phi})$, vizinhança de $(\bar{\lambda},\bar{\sigma},\bar{\phi})$ em $\Lambda\times\mathbb{R}\times W_p^{(1)}$, tal que para qualquer x, solução de (D_λ) por (σ,ϕ), com $(\lambda,\sigma,\phi)\in U(\bar{\lambda},\bar{\sigma},\bar{\phi})$, temos que:

(i) x admite um prolongamento, denotado também por x, definido pelo menos em $[\sigma-r,c]$;

(ii) $\|x-\bar{x}\|_J^{(1)}<\varepsilon$, sendo $J=[\sigma,c]$ (caso $\sigma\ge\bar{\sigma}$) ou $J=[\bar{\sigma},c]$ caso $\sigma\le\bar{\sigma}$).

<u>Demonstração</u>. Consideremos o conjunto

$$S = \{(\bar{\lambda},t,\bar{x}_t)\in\Lambda\times\mathbb{R}\times W_p^{(1)}\colon t\in[\bar{\sigma},c]\}.$$

Pelo teorema (13.4), para cada $q=(\bar{\lambda},t,\bar{x}_t)\in S$ existe uma vizinhança $N(q)\subset\Lambda\times\mathbb{R}\times W_p^{(1)}$ e uma constante $a(q)>0$, tais que toda solução de (D_λ) por (σ,ϕ), com $(\lambda,\sigma,\phi)\in N(q)$, admite um prolongamento x definido pelo menos em $[\sigma-r,\sigma+a(q)]$, tal que $\|x-\bar{x}\|_{J_q}^{(1)}<\varepsilon$, sendo $J_q=[\sigma,\bar{\sigma}+a(q)]$ (caso $\sigma\ge\bar{\sigma}$) ou $J_q=[\bar{\sigma},\sigma+a(q)]$ (caso $\sigma\le\bar{\sigma}$).

Para cada $q=(\bar{\lambda},t,\bar{x}_t)\in S$ tomemos $N'(q)$, vizinhança aberta de q em $\Lambda\times\mathbb{R}\times W_p^{(1)}$, tal que $N'(q)\subset N(q)$ e $|\sigma-t|<a(q)$ pa-

ra $(\lambda,\sigma,\phi)\in N'(q)$. Como S é um subconjunto compacto de $\Lambda\times\mathbb{R}\times W_p^{(1)}$, existem $q_0,q_1,\ldots,q_\nu\in S$ tais que $S=\bigcup_{i=1}^{\nu} N'(q_i)$. Sem perda de generalidade, podemos supor que os pontos $q_i=(\bar\lambda,t_i,\bar x_{t_i})$ são tais que $\bar\sigma=t_0<t_1<\ldots<t_\nu=c$. Para cada i, consideremos a multifunção $\Phi_i: N'(q_i)\longrightarrow \Lambda\times\mathbb{R}\times W_p^{(1)}$, definida por

$$\Phi_i(\lambda,\sigma,\phi) = \{(\lambda,\sigma+a(q_i),x_{\sigma+a(q_i)})\in\Lambda\times\mathbb{R}\times W_p^{(1)}:$$
$$x \text{ é solução de } (D_\lambda) \text{ por } (\sigma,\phi)\}.$$

Afirmamos que cada Φ_i é semicontínua superiormente em $N'(q_i)$. Isto decorre da semicontinuidade superior, para $0\le i\le\nu$, das multifunções

$$(\lambda,\sigma,\phi)\in N'(q_i)\longmapsto\{z\in C^{(1)}([0,a],\mathbb{R}^n): z(t)=x(\sigma+t),\ t\in[0,a(q_i)],$$

e $x: [\sigma-r,\sigma+a(q_i)]\longrightarrow\mathbb{R}^n$ é solução de (D_λ) por $(\sigma,\phi)\}$.
(Veja-se a demonstração do teorema (13.4)).

Tomemos $V_0=N'(q_\nu)$. Se já tomamos V_m, vizinhança aberta de algum q_i $(0<i\le\nu)$, usaremos o seguinte procedimento para obter V_{m+1}: seja j_m o menor índice $j\in\{0,1,\ldots,\nu\}$ tal que $(\bar\lambda,t_j+a(q_j),\ \bar x_{t_j+a(q_j)})\in V_m$. Temos então que $\Phi_{j_m}(q_{j_m})\subset V_m$. Como Φ_{j_m} é semicontínua superiormente em q_{j_m}, existe $V_{m+1}\subset N'(q_{j_m})$, vizinhança aberta de q_{j_m} em $\Lambda\times\mathbb{R}\times W_p^{(1)}$, tal que $\Phi_{j_m}(V_{m+1})\subset V_m$. Após um número finito $\bar m\le\nu$ de passos, obteremos uma vizinhança $V_{\bar m}$ de $q_0=(\bar\lambda,\bar\sigma,x_{\bar\sigma})=(\bar\lambda,\bar\sigma,\bar\phi)$ e tomaremos $U(\bar\lambda,\bar\sigma,\bar\phi)=V_{\bar m}$. ∎

14 . <u>Existência e unicidade de soluções para uma classe de equações lineares do tipo neutro</u>

(14.1). <u>Definições</u>. Seja X um espaço de Banach. Dizemos que uma função $f: [a,b] \longrightarrow X$ é regrada, e escrevemos $f \in G([a,b],X)$, se para todo $t \in [a,b[$ existe $f(t+) = \lim_{s \to t+} f(s)$ e para todo $t \in]a,b]$ existe $f(t-) = \lim_{s \to t-} f(s)$.

Dizemos que $f,g \in G([a,b],X)$ são equivalentes se $f(t-) = g(t-)$ para todo $t \in]a,b]$ (e portanto $f(t+) = g(t+)$ para todo $t \in [a,b[$; veja-se [12], teorema I.3.10).

Se $f \in G([a,b],X)$ definimos $f^{-} \in G([a,b],X)$ por $f^{-}(a) = f(a+)$ e $f^{-}(t) = f(t-)$, para $t \in]a,b]$.

(14.2) <u>Observações</u>. O conjunto $G([a,b],X)$ é um espaço vetorial e, com a norma da convergência uniforme, é um espaço de Banach ([12], teorema I.3.6).

Se $f \in G([a,b],X)$ então f é contínua fora de um subconjunto enumerável de $[a,b]$ ([12], corolário I.3.2).

(14.3) <u>Definição</u>. Indicaremos por $G^{(1)}([a,b],X)$ o conjunto das funções $f: [a,b] \longrightarrow X$ tais que para todo $t \in [a,b[$ existe

$$f'_{+}(t) = \lim_{h \to 0^{+}} \frac{f(t+h)-f(t)}{h}$$

e para todo $t \in]a,b]$ existe $f'_{-}(t) = \lim_{h \to 0^{-}} \dfrac{f(t+h)-f(t)}{h}$.

(14.4) <u>Observação</u>. Se $f \in G^{(1)}([a,b],X)$ então f é contínua em $[a,b]$, e fora de um conjunto enumerável de $[a,b]$ existe $f'(t)$. Definindo $f'(a) = f'_+(a)$, $f'(b) = f'_-(b)$, e $f'(t) = f'_-(t)$ nos pontos $t \in]a,b[$ para os quais não existe a derivada, temos que $f' \in G([a,b],\mathbb{R}^n)$ e $f(t) = f(a) + \int_a^t f'(s)ds$ ([12], teorema I.3.8).

(14.5) <u>Notações</u>. Se $d = \{t_0, t_1, \dots, t_m\}$ é uma divisão do intervalo $[a,b]$, isto é, se $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$, escrevemos $|d| = m$ e $\Delta d = \sup\{|t_i - t_{i-1}| : i = 1,\dots,|d|\}$. Denotaremos por $\mathbb{D}_{[a,b]}$ (ou simplesmente $\mathbb{D}$) o conjunto de todas as divisões de $[a,b]$.

Consideremos um espaço topológico E e uma aplicação $d \in \mathbb{D} \longrightarrow x_d \in E$. Escrevemos $\lim\limits_{d \in \mathbb{D}} x_d = x \in E$ se para cada vizinhança V de x existe $d_V \in \mathbb{D}$ tal que $d_V \subset d \in \mathbb{D}$ implica $x_d \in V$. O sentido de $\lim\limits_{\Delta d \to 0} x_d = x$ é óbvio.

(14.6) <u>Definições</u>. Sejam X e Y espaços de Banach, e $\gamma: [a,b] \longrightarrow L(X,Y)$ (o espaço das aplicações lineares contínuas de X em Y). A semivariação de γ (em $[a,b]$) é definida por

$$SV[\gamma] = SV_{[a,b]}[\gamma] = \sup\{SV_d[\gamma] : d \in \mathbb{D}\},$$

onde

$$SV_d[\gamma] = \sup\left\{\left\| \sum_{i=1}^{|d|} [\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})]x_i \right\| : x_i \in X, \|x_i\| \le 1\right\}.$$

Se $SV[\gamma] < \infty$ dizemos que γ é de semivariação limitada.

(14.7) <u>Observação</u>. Se γ é de variação limitada (no sentido usual) então γ é de semivariação limitada. A recíproca é verdadeira se e somente se $\dim(Y) < \infty$.

(14.8) Teorema. Se $\gamma: \longrightarrow L(X,Y)$ é de semivariação limitada e $f \in G([a,b],X)$ então

(i) existe a integral interior

$$\int_a^b \cdot d\gamma(t)\cdot f(t) = \lim_{d\in\mathbb{D}} \sum_{i=1}^{|d|} [\gamma(t_i)-\gamma(t_{i-1})]f(\xi_i^{\bullet}) \in Y,$$

onde $\xi_i^{\bullet} \in]t_{i-1},t_i[$;

(ii) essa integral depende apenas da classe de equivalência de f (vide (14.1));

(iii) $\left\| \int_a^b \cdot d\gamma(t)\cdot f(t) \right\| \leq SV[\gamma]\|f\|$.

Demonstração . Vide [12, teorema I.4.12].

(14.9) Observações. Se γ e f não tem pontos de descontinuidade comuns (por exemplo, se uma delas for contínua) a integral interior se reduz à integral usual de Riemann-Stieltjes

$$\int_a^b d\gamma(t)\cdot f(t) = \lim_{\Delta d\to 0} \sum_{i=1}^{|d|} [\gamma(t_i)-\gamma(t_{i-1})]f(\xi_i),$$

onde $\xi_i \in [t_{i-1},t_i]$ [12, teorema I.2.3]. Neste caso vale a fórmula de integração por partes

$$\int_a^b d\gamma(t)\cdot f(t) + \int_a^b \gamma(t)\cdot df(t) = \alpha(b)f(b) - \alpha(a)f(a)$$

que, em geral, não é válida para a integral interior [13, teorema 4.7].

Nas condições do teorema (14.8), é trivial demonstrar que

$$\int_a^b \cdot d\gamma(t)\cdot(\chi_{[a,c]}f)(t) = \int_a^b \cdot d(\chi_{[a,c]}\gamma)(t)\cdot f(t) + \gamma(c)f(c+),$$

onde $c\in[a,b[$ e $\chi_{[a,c]}$ denota a função característica de $[a,c]$.

(14.10). Uma equação linear do tipo neutro. Fixemos $t_0 < t_1$ e $r > 0$. Para $x\colon [t_0-r,t_1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ e $t\in[t_0,t_1]$ está definida a função $x_t\colon [-r,0] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, dada por $x_t(s) = x(t+s)$.

Suponhamos que $A\colon [t_0,t_1]\times C([-r,0],\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ e $B\colon [t_0,t_1]\times G([-r,0],\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ são regradas como funções da primeira variável e lineares contínuas como funções da segunda variável. Seja $g\in G([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)$. Consideremos a EDFN

$$\text{(E)} \qquad x'(t) = A(t,x_t) + B(t,x_t') + g(t).$$

(14.11) Definição. Seja $\phi\in G^{(1)}([-r,0],\mathbb{R}^n)$. Uma solução de (E) com função inicial ϕ é uma função $x\in G^{(1)}([t_0-r,t_1],\mathbb{R}^n)$ tal que

(i) $x_{t_0} = \phi$;

(ii) x satisfaz (E) fora de um subconjunto enumerável de $[t_0,t_1]$.

De acordo com esta definição, podem ocorrer descontinuidades de primeira espécie na derivada de uma solução de (E).

(14.12) Algumas hipóteses adicionais. Para demonstrarmos um teorema de existência e unicidade para a equação

(E), vamos impor as seguintes condições sobre a função $\mathcal{B}$:

(c_1) Para cada $t \in [t_0, t_1]$, a função

$$\xi \in G([-r,0],\mathbb{R}^n) \longmapsto \mathcal{B}(t,\xi) \in \mathbb{R}^n$$

só depende da classe de equivalência de ξ (vide (14.1)).

(c_2) Para qualquer $y \in G([t_0-r,t_1],\mathbb{R}^n)$ a função

$$t \in [t_0,t_1] \longmapsto \mathcal{B}(t,y_t) \in \mathbb{R}^n$$

é regrada.

(c_3) Existem $\tau \in]0,r]$, $k \in [0,1[$ e $\ell \geq 0$ tais que

$$|\mathcal{B}(t,\xi)| \leq k\|\xi\|^{(0)}_{[-\tau,0]} + \ell\|\xi\|^{(0)}_{[-r,-\tau]}$$

para quaisquer $\xi \in G([-r,0],\mathbb{R}^n)$ e $t \in [t_0,t_1]$.

(14.13) Observação. Suponhamos conhecida a existência e unicidade das soluções de (E) com função inicial ϕ no caso em que $t_1 - t_0 < r$. Se tivermos $t_1 - t_0 \geq r$, tomamos $t_0' = t_0$, $t_1' = t_0 + r/2$, e sabemos que existe uma única solução de (E) com função inicial ϕ, definida em $[t_0-r, t_1']$. A seguir, tomamos $t_0'' = t_1'$ e $t_1'' = t_1' + r/2$ e temos que essa solução pode ser prolongado de modo único até t_1''. Após um número finito de passos, teremos que existe uma única solução de (E) com função inicial ϕ, definida em $[t_0-r,t_1]$. Doravante vamos supor que $t_1 - t_0 < r$.

(14.14) Representação de A e $\mathcal{B}$. Do teorema I.5.10 de [12] (e da condição (c_1)) decorre que existem

$$A,B\colon [t_0,t_1]\times[-r,0] \longrightarrow M(n,n)$$

(o espaço das matrizes reais $n \times n$), regradas como funções da primeira variável, e de variação uniformemente limitada como funções da segunda variável, com $A(t,0) = B(t,0) = 0$ para $t\in[t_0,t_1]$, tais que

$$A(t,\psi) = \int_{-r}^{0} d_s A(t,s)\cdot\psi(s) \tag{8}$$

e

$$B(t,\xi) = \int_{-r}^{0\bullet} d_s B(t,s)\cdot\xi(s) \tag{9}$$

para quaisquer $t\in[t_0,t_1]$, $\psi\in C([-r,0],\mathbb{R}^n)$ e $\xi\in G([-r,0],\mathbb{R}^n)$. Como a integral de Riemann-Stieltjes em (8) não varia se alterarmos o valor de $A(t,\cdot)$ em um ponto interior de $[-r,0]$, podemos supor que $A(t,t_0-t) = 0$ para $t\in[t_0,t_1]$.

(14.15) Lema. Se $x\in C([t_0-r,t_1],\mathbb{R}^n)$ então a função $t\in[t_0,t_1] \longmapsto A(t,x_t)\in\mathbb{R}^n$ é regrada.

Demonstração. Pelo princípio da limitação uniforme, existe $M > 0$ tal que $\sup\{\|A(t,\cdot)\| : t\in[t_0,t_1]\} \leq M < \infty$. Tomemos $\varepsilon>0$. Pela continuidade uniforme da aplicação

$$t\in[t_0,t_1] \longmapsto x_t\in C([-r,0],\mathbb{R}^n)$$

existe $\delta > o$ tal que

$$s,t\in[t_0,t_1] \text{ e } |s-t| < \delta \implies \|x_s-x_t\|^{(0)} < \varepsilon/4M.$$

Seja $\bar{d}$ uma divisão de $[t_0,t_1]$, com $\Delta\bar{d} < \delta$, formada por pontos $t_0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_m = t_1$. Para cada s_i a função $A(\cdot,x_{s_i})$ é regrada, logo existe $d_i\in\mathbb{D}_{[t_0,t_1]}$ tal que $\omega^{\bullet}_{d_i}(A(\cdot,x_{s_i})) < \varepsilon/2$

([12], teorema I.3.1, vide (1.10) e (14.5) para notações). Seja $d = \left(\bigcup_{i=0}^{m} d_i\right) \cup \bar{d} \in \mathbb{D}_{[t_0,t_1]}$. Se s e t pertencem ao interior do mesmo sub-intervalo de d, existe $s_i \in \bar{d}$ tal que $|s-s_i| < \delta$ e $|t-s_i| < \delta$. Temos então que

$$|A(s,x_s) - A(t,x_t)|$$

$$\leq |A(s,x_s)-A(s,x_{s_i})| + |A(s,x_{s_i}) - A(t,x_{s_i})| + |A(t,x_{s_i})-A(t,x_t)|$$

$$\leq M\|x_s-x_{s_i}\|^{(0)} + |A(s,x_{s_i})-A(t,x_{s_i})| + M\|x_{s_i}-x_t\|^{(0)}$$

$$\leq \varepsilon/4 + \varepsilon/2 + \varepsilon/4 = \varepsilon.$$

De ([12], teorema I.3.1) decorre a tese. ∎

(14.16) <u>Observação</u>. Para $y \in G([t_0-t,t_1],\mathbb{R}^n)$, a aplicação $t \in [t_0,t_1] \longmapsto y_t \in G([-r,0],\mathbb{R}^n)$ não é necessariamente contínua (nem regrada). O lema (14.15) e a condição (c_2), entretanto, asseguram que o segundo membro da equação (E) define uma função regrada em $[t_0,t_1]$, para qualquer $x \in G^{(1)}([t_0-r,t_1],\mathbb{R}^n)$. Em termos do núcleo B, (c_2) significa que para todo $s \in [t_0-r,t_1]$ a função $t \in [t_0,t_1] \cap [s,s+r] \longmapsto B(t,s-t) \in M(n,n)$ é regrada ([13], p.37).

(14.17) <u>Observação</u>. A condição (c_3) será crucial para a demonstração do teorema de existência e unicidade (14.20). Essa condição exclui equações da forma

$$x'(t) = A(t,x_t) + x'(t) + g(t),$$

que não são equações diferenciais. Em termos do núcleo B, (c_3)

significa que existem $\tau\in]0,r]$ e $k\in[0,1[$ tais que

$$\sup\{SV_{[-\tau,0]}[B(t,\cdot)] : t\in[t_0,t_1]\} \le k$$

([12], teorema I.5.10).

(14.18) Lema. Seja $x\in G^{(1)}([t_0-r,t_1],\mathbb{R}^n)$. São regradas as funções

$$t\in[t_0,t_1] \longmapsto \int_{-r}^{t_0-t} d_sA(t,s)\cdot x_t(s)\in\mathbb{R}^n$$

e

$$t\in[t_0,t_1] \longmapsto \int_{-r}^{t_0-t} {}^{\bullet}\, d_sB(t,s)\cdot x_t'(s)\in\mathbb{R}^n.$$

Demonstração. Para $t\in[t_0,t_1]$, temos que

$$\int_{-r}^{t_0-t} d_sA(t,s)\cdot x_t(s) = \int_{-r}^{0} {}^{\bullet}\, d_sA(t,s)\cdot(\chi_{[-r,t_0-t]}x_t)(s)$$

$$= \int_{-r}^{0} {}^{\bullet}\, d_s[\chi_{[-r,t_0-t]}(s)A(t,s)]\cdot x_t(s) + A(t,t_0-t)x(t_0)$$

(pela última observação em (14.9))

$$= \int_{-r}^{0} d_sA_1(t,s)\cdot x_t(s),$$

onde $A_1(t,s) = \chi_{[-r,t_0-t]}(s)A(t,s)$. Para $\psi\in C([-r,0],\mathbb{R}^n)$ e $t\in[t_0,t_1]$, seja

$$A_1(t,\psi) = \int_{-r}^{0} d_sA_1(t,s)\cdot\psi(s).$$

Aplicando-se o lema (14.15) à função $t\in[t_0,t_1] \longmapsto A_1(t,x_t)$ obtemos a primeira parte da tese. Para $t\in[t_0,t_1]$ e $s\in[-r,0]$, seja $B_1(t,s) = \chi_{[-r,t_0-t]}(s)B(t,s)$. A segunda parte da tese se segue da observação (14.16) e da igualdade

$$\int_{-r}^{t_0-t} d_s B(t,s)\cdot x_t'(s) = \int_{-r}^{0} d_s B_1(t,s)\cdot x_t'(s) + B(t,t_0-t)x'(t_0+)$$

pois para todo $s\in[t_0-r,t_1]$ a função $t\in[t_0,t_1]\cap[s,s+r] \longmapsto B_1(t,s-t)$ é regrada (isto decorre da propriedade correspondente de B).∎

(14.19) <u>Observação</u>. Seja $x\in G^{(1)}([t_0-r,t_1],\mathbb{R}^n)$ e $t\in[t_0,t_1]$. Temos que

$$\int_{t_0-t}^{0} d_s A(t,s)\cdot x_t(s) = A(t,x_t) - \int_{-r}^{t_0-t} d_s A(t,s)\cdot x_t(s)$$

e

$$\int_{t_0-t}^{0} d_s B(t,s)\cdot x_t'(s) = \mathcal{B}(t,x_t') - \int_{-r}^{t_0-t} d_s B(t,s)\cdot x_t'(s).$$

De (c_2), (14.15) e (14.18) segue-se que os primeiros membros das igualdades acima definem funções regradas de $t\in[t_0,t_1]$.

(14.20) <u>Teorema</u>. Se as condições (c_1), (c_2) e (c_3) estão satisfeitas, então para toda $\phi\in G^{(1)}([-r,0],\mathbb{R}^n)$ existe uma e uma só solução da equação (E) com função inicial ϕ.

<u>Demonstração</u>. Com uma argumentação análoga à de (14.13), vemos que não perderemos generalidade supondo que $t_1-t_0\le\tau$. Uma função $x\in G^{(1)}([t_0-r,t_1],\mathbb{R}^n)$ é solução de (E) com função inicial ϕ se e somente se $x_{t_0} = \phi$ e

$$x'(t) - \int_{t_0-t}^{0} d_sA(t,s)\cdot x_t(s) - \int_{t_0-t}^{0}\!\!\!\!\bullet\ d_sB(t,s)\cdot x_t'(s)$$

$$= g(t) + \int_{-r}^{t_0-t} d_sA(t,s)\cdot x_t(s) + \int_{-r}^{t_0-t}\!\!\!\!\bullet\ d_sB(t,s)\cdot x_t'(s),$$

para t fora de um subconjunto enumerável de $[t_0,t_1]$. De (14.18) e (14.19) segue-se que todas as integrais da equação acima definem funções regradas de $t\in[t_0,t_1]$. Como $x_{t_0}=\phi$, o segundo membro dessa equação é igual a $\bar{g}(t)$, sendo $\bar{g}\in G([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)$ dada por

$$\bar{g}(t) = g(t) + \int_{-r}^{t_0-t} d_sA(t,s)\cdot\phi(t-t_0+s) + \int_{-r}^{t_0-t}\!\!\!\!\bullet\ d_sB(t,s)\cdot\phi'(t-t_0+s).$$

Pela fórmula de integração por partes,

$$\int_{t_0-t}^{0} d_sA(t,s)\cdot x_t(s) = A(t,0)x(t) - A(t,t_0-t)x(t_0) - \int_{t_0-t}^{0} A(t,s)x'(t+s)ds$$

$$= -\int_{t_0}^{t} A(t,s-t)x'(s)ds.$$

Das igualdades acima decorre que uma função $x\in G^{(1)}([t_0-r,t_1],\mathbb{R}^n)$ é solução de (E) com função inicial ϕ se e somente se $x_{t_0}=\phi$ e

$$x'(t) + \int_{t_0}^{t} A(t,s-t)x'(s)ds - \int_{t_0}^{t}\!\!\!\!\bullet\ d_sB(t,s-t)\cdot x'(s) = \bar{g}(t),$$

para t fora de um subconjunto enumerável de $[t_0,t_1]$. Seja

$$T: G([t_0,t_1],\mathbb{R}^n) \longrightarrow G([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)$$

definida por

$$T(y)(t) = \int_{t_0}^{t} \cdot\, d_s B(t,s-t)\cdot y(s) - \int_{t_0}^{t} A(t,s-t)y(s)ds.$$

O teorema estará demonstrado se provarmos que para toda $f \in G([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)$ a equação $y - T(y) = f$ tem uma única solução $y \in G([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)$. De fato, $x \in G^{(1)}([t_0-r,t_1],\mathbb{R}^n)$ é solução de (E) com função inicial ϕ se e somente se $x_{t_0} = \phi$ e

$$x(t) = \phi(0) + \int_{t_0}^{t} y(s)ds \quad (t_0 \le t \le t_1),$$

onde $y \in G([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)$ é tal que $y - T(y) = \bar{g}$.

Sejam $T_1, T_2 \colon G([t_0,t_1],\mathbb{R}^n) \longrightarrow G([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)$ definidas por

$$T_1(y)(t) = \int_{t_0}^{t} \cdot\, d_s B(t,s-t)\cdot y(s)$$

e

$$T_2(y)(t) = -\int_{t_0}^{t} A(t,s-t)y(s)ds.$$

Se provarmos que T_1 é uma contração e T_2 é completamente contínua, saberemos (por (2.2)) que $T = T_1 + T_2$ é uma α-contração. Temos que

$$|T_1(y)(t)| = \left| \int_{t_0-t}^{0} \cdot\, d_s B(t,s)\cdot y(t+s) \right|$$

$$\le SV_{[t_0-t,0]}[B(t,\cdot)]\cdot \|y\|^{(0)} \quad ([12], \text{ teorema I.5.I})$$

$$\leq SV_{[-\tau,0]}[B(t,\cdot)]\cdot\|y\|^{(0)} \quad (\text{pois } t_1-t_0\leq\tau)$$

$$\leq k\|y\|^{(0)} \quad (\text{por } (c_3)),$$

e portanto T_1 é uma contração.

Provemos que T_2 é completamente contínua. Para $y\in G([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)$ definimos $Jy\in G^{(1)}([t_0-r,t_1],\mathbb{R}^n)$ por

$$(Jy)(t) = \begin{cases} \int_{t_0}^{t} y(s)ds, & \text{para } t\in[t_0,t_1]; \\ 0, & \text{para } t\in[t_0-r,t_0]. \end{cases}$$

Temos então que

$$T_2(y)(t) = -\int_{t_0}^{t} A(t,s-t)\cdot d(Jy)(s)$$

$$= -A(t,0)(Jy)(t) + A(t,t_0-t)(Jy)(t_0) + \int_{t_0}^{t} d_sA(t,s-t)\cdot(Jy)(s)$$

(pela fórmula de integração por partes)

$$= \int_{t_0-t}^{0} d_sA(t,s)\cdot(Jy)(t+s) = \int_{-r}^{0} d_sA(t,s)\cdot(Jy)_t(s)$$

$$= A(t,(Jy)_t).$$

Para $t\in[t_0,t_1]$ e $x\in C([t_0-r,t_1],\mathbb{R}^n)$, seja $(\Phi x)(t) = A(t,x_t)$. Pelo lema (14.15), temos que Φ: $C([t_0-r,t_1],\mathbb{R}^n) \longrightarrow G([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)$. Além disso, Φ é contínua: se $x,\bar{x}\in C([t_0-r,t_1],\mathbb{R}^n)$ e $t\in[t_0,t_1]$, temos que

$$|(\Phi x)(t)-(\Phi\bar{x})(t)| = |A(t,x_t)-A(t,\bar{x}_t)| \leq M\|x_t-\bar{x}_t\|^{(0)} \leq M\|x-\bar{x}\|^{(0)},$$

onde $M = \sup\{\|A(t,\cdot)\| : t\in[t_0,t_1]\}$.

Se S é um subconjunto limitado de $G([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)$ então $J(S) = \{Jy : y\in S\}$ é um subconjunto equicontínuo (e portanto relativamente compacto) de $C([t_0-r,t_1],\mathbb{R}^n)$. Logo $T_2(S) = \Phi(J(S))$ é um subconjunto relativamente compacto de $G([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)$. Portanto T_2 é completamente contínua, e $T = T_1 + T_2$ é uma α-contração. Do teorema (4.5) temos que $I - T$ é de Fredholm de índice zero, e vale a alternativa de Fredholm para a equação $y-T(y) = f$. Logo o teorema estará demonstrado se provarmos que a única solução de $y - T(y) = 0$ é a função identicamente nula.

Seja $y\in G([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)$ tal que $y - T(y) = 0$, isto é,

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} \cdot\, d_sB(t,s-t)\cdot y(s) - \int_{t_0}^{t} A(t,s-t)\cdot y(s)ds$$

para $t\in[t_0,t_1]$. Seja $c = \sup\{t\in[t_0,t_1] : y|_{[t_0,t]}=0\}$. Provemos que $c = t_1$. É claro que $y|_{[t_0,c]} = 0$. Se $c < t_1$, para $t\in[c,t_1]$ temos que

$$y(t) = \int_{c}^{t} \cdot\, d_sB(t,s-t)\cdot y(s) - \int_{c}^{t} A(t,s-t)y(s)ds,$$

e portanto

$$\begin{aligned} |y(t)| &\leq \left|\int_c^t \cdot\, d_sB(t,s-t)\; y(s)\right| + \left|\int_c^t A(t,s-t)y(s)ds\right| \\ &\leq k\|y\|^{(0)}_{[c,t]} + (t-c)L\|y\|^{(0)}_{[c,t]}, \end{aligned}$$

onde $k\in[0,1[$ é dado pela observação (14.17) (aqui usamos que

$t_1 - t_0 \leq \tau)$ e $L = \sup\{\|A(t,s)\| : t \in [t_0, t_1], s \in [-r, 0]\}$.

Seja $\theta \in]c, t_1]$. Para $t \in [c, \theta]$, temos que

$$|y(t)| \leq k\|y\|^{(0)}_{[c,\theta]} + (\theta - c)L\|y\|^{(0)}_{[c,\theta]},$$

e portanto

$$\|y\|^{(0)}_{[c,\theta]} \leq k\|y\|^{(0)}_{[c,\theta]} + (\theta - c)L\|y\|^{(0)}_{[c,\theta]},$$

ou seja,

$$\|y\|^{(0)}_{[c,\theta]} \leq \frac{(\theta - c)L}{1 - k}\|y\|^{(0)}_{[c,\theta]}.$$

Para $\theta - c < (1-k)/L$ temos que $\|y\|^{(0)}_{[c,\theta]} = 0$, o que contradiz a definição de c. Esta contradição veio da hipótese $c < t_1$. ∎

(14.21) <u>Observação</u>. Consideremos a EDFN

$$x'(t) = A(t, x_t) + x'(t-r) + g(t).$$

Não podemos aplicar o teorema (14.20) diretamente a essa equação, pois a condição (c_1) não está satisfeita. Entretanto, essa equação é equivalente à EDFN

$$x'(t) = A(t, x_t) + x'^{-}(t-r) + g(t),$$

que satisfaz a condição (c_1).

(14.22) <u>Exemplo</u>. Seja $(r_i)_{i=1}^{\infty}$ uma seqüência monótona, com $r_i \in]0, r]$, e sejam $B_i \in G([t_0, t_1], M(n,n))$ $(i = 1, 2, \ldots)$ tais que $\sum_{i=1}^{\infty} \|B_i\|^{(0)} < \infty$. Com uma observação análoga à feita em (14.21), podemos aplicar o teorema (14.20) à EDFN

$$x'(t) = A(t,x_t) + \sum_{i=1}^{\infty} B_i(t)x'(t-r_i) + g(t).$$

- ▯ -

BIBLIOGRAFIA

[1] - AMBROSETTI,A., Un teorema di esistenza per le equazioni differenziali negli spazi di Banach, *Rend.Sem.Mat. Univ.Padova, 39*:349-361, 1967.

[2] - CHENG,M.F., On certain condensing operators and the behavior of their fixed points with respect to parameters, *J. Math. Anal. Appl., 64*(3): 505-517, 1978.

[3] - DARBO,G., Punti uniti in transformazioni a codominio non compatto, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 24*: 84-92, 1955.

[4] - DRIVER,R.D., Existence and continuous dependence of solutions of a neutral functional-differential equation, *Arch. Rational Mech. Anal., 19*: 149-166, 1965.

[5] - DUNFORD,N. & SCHWARTZ,J.T., *Linear operators*, New York,Interscience, 1958, v. 1, (Pure and Applied Mathematics, 7).

[6] - FURI,M. & VIGNOLI,A., On a property of the unit sphere in a linear normed space, *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys., 18*(6): 333-334, 1970.

[7] - GOEBEL,K., *Grubōsč zbiorōw w przestrzeniach metrycznych i jej zastosowania w teorii punktōw stalych*, Lublin, Univ. M.Curie-Sklodowskiej, 1970, (Rozprawa habilitacyjna) (citado em [15]).

[8] - GRANAS,A., *Introduction to topology of functional spaces*, s.1,University of Chicago, 1961, (Math. Lecture Notes).

[9] - HALE,J.K., α-contractions and differential equatons, In: JANSSENS, P.;MAWHIN,J.;ROUCHE,N.(Eds.),Equations differentielles et fonctionnelles non linéairès: conférence internationale "Equa-Diff. 73", Bruxelles, 1973. *Actes*, Paris, Hermann, 1973, p.15-41,(Actualités Scientifiques et Industrielles, 1361).

[10] - HALE, J.K., Continuous dependence of fixed points of condensing maps, *J.Math.Anal.Appl.*, *46*(2): 388-394, 1974.

[11] - HALE, J.K., *Theory of functional differential equations*, New York, Springer, 1977, 365p. (Applied Mathematical Sciences, 3).

[12] - HÖNIG,C.S., *Volterra Stieltjes-integral equations: functional analytic methods, linear constraints*, Amsterdam,North-Holland,1975, 175p. (North-Holland Mathematics Studies, 16).

[13] - HÖNIG,C.S., Volterra Stieltjes-integral equations, In: *Functional differential equations and bifurcation: proceedings of the São Carlos Conference*, 1979, Berlin, Springer, p-173-216, (Lecture Notes in Mathematics,).

[14] - HÖNIG,C.S., Fredholm Stieltjes-integral equations, I, In: ESCUELA LATINOAMERICANA DE MATEMATICA, 4º, Lima, 1978, *Actas*, Lima,s.c. p., 1979, p.126-160.

[15] - JANICKA,R.& KACZOR,W., On the construction of some measures of non-compactness, *Ann.Univ.Mariae Curie-Sklodowska,Sect A,30*: 49-56, 1976.

[16] - KATO,T., *Perturbation theory for linear operators*,Berlin,Springer, 1966, 592p. (Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 132).

[17] - KURATOWSKI,C., Sur les espaces complets, *Fund. Math.*, *15*:301-309, 1930.

[18] - LUSTERNIK, L.A. & SOBOLEV,V.J., *Elements of fuctional analysis*, Delhi, Hindustan, 1961, 411p.

[19] - MARTIN Jr.,R.H., *Nonlinear operators and differential equations in Banach spaces*, New York, Interscience, 1976, 440p.

[20] - MELVIN,W.R., A class of neutral functional differential equations, *J.Differential Equations*, *12*(3): 524-534, 1972.

[21] - MICHAEL,E., Topologies on spaces of subsets, *Trans.Amer.Math.Soc.*, *71*: 172-182, 1951.

[22] - NUSSBAUM,R.D., A generalization of the Ascoli theorem and an application to functional differential equations, *J.Math.Anal.Appl.*, *35*(3): 600-610, 1971.

[23] - NUSSBAUM,R.D., The fixed point index for local condensing maps, *Ann.Mat.Pura Appl.*, *89*: 217-258, 1971.

[24] - PALAIS,R.S. Fredholm operators, In: *Seminar on the Atiyah-Singer index theorem*, Princeton, University Press,1965, p.113-124,(Annals of Mathematics Studies, 57).

[25] - PETRYSHYN,V.W., Remarks on condensing and k-set-contractive mappings, *J.Math.Anal.Appl.*, *39*(3): 717-741, 1972.

[26] - SADOVSKII,B.N., On a fixed point principle, *Functional Anal. Appl.*, *1*: 151-153, 1967.

[27] - SADOVSKII,B.N., Limit-compact and condensing operators, *Russian Math. Surveys*, *27*(1): 85-155, 1972.

[28] - YOSIDA,K., *Functional analysis*, Berlin, Springer, 1965, 458p. (Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 123).

- [] -