TEOREMA DE FROBENIUS - FORMULAÇÃO GLOBAL
APLICAÇÕES A GRUPOS DE LIE

Reinaldo Salvitti

Tese apresentada no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo para a obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Domingos Pisanelli

Outubro de 1980

São Paulo

À Nana, ao Dudu e Marina que muito perturbaram nosso trabalho.

AGRADECIMENTOS

As colegas Vera e Lourdes pelo trabalho de datilografia.

Aos meus colegas de seminários.

Ao meu orientador pela sugestão do tema e pelo constante trabalho de orientação.

ÍNDICE

Notações e Nomenclatura 6

Introdução 7

CAPÍTULO 1 -

§1. Escala de Espaços de Banach 11

§2. O espaço de germes gh(n,C) 13

CAPÍTULO 2 -

§1. Teorema de Ovcyannikov - Treves 21

§2. Teorema de Frobenius global 23

CAPÍTULO 3 -

§1. Variedade Integral 33

§2. Distribuição Integrável 34

§3. Distribuição involutiva e Teorema de Frobenius local 44

CAPÍTULO 4 -

§1. Uma nova Topologia em U 53

§2. Existência de variedade integral maximal - Teorema de Frobenius - formulação global 58

§3. Existência de variedade integral maximal em escala de espaços de Banach 60

§4. Observações 61

CAPÍTULO 5 -

§1. Aplicação do Teorema de Frobenius a Grupos de Lie 63

§2. A integrabilidade das distribuições involutivas no contexto dos espaços de Banach 70

§3. A integrabilidade de uma distribuição dada por um sistema de Cauchy-Kovalewsky linear 72

Bibliografia 82

NOTAÇÕES E NOMENCLATURA

— $\mathbb{N}$: naturais.

— $\mathbb{N}^*$: naturais não nulos.

— C : conjunto dos números complexos.

— V(x): vizinhança de x.

— $B_s(0)$: bola de centro 0 e raio s em C^n.

— $f'_x(x,y)h$: diferencial de f(x,y) em relações à primeira variável com acréscimo h.

— C.I. : condição de integrabilidade.

— ELCHSc : espaço localmente convexo separado e sequencialmente completo.

— Analítica e holomorfa são sinônimos e significam G-analítica e contínua.

— M(2,C): matrizes quadradas complexas de ordem 2.

— $\varinjlim X_i$: limite indutivo localmente convexo da família X_i.

— domínio significa aberto e convexo.

INTRODUÇÃO

1. A Teoria dos Grupos de Lie

O estudo dos Grupos de Lie conduz necessariamente ao estudo prévio de teoremas de existência e unicidade de sistemas de equações diferenciais. Para isso é importante estar de posse do teorema da função inversa ou do teorema das funções implícitas, do teorema de existência e unicidade de equações diferenciais ordinário e do teorema de Frobenius. Quando se trata do estudo de Grupos de Lie em dimensão finita, tem-se resultados suficientemente claros e numerosas aplicações. Todavia em dimensão infinita esse estudo apresenta extremas dificuldades, já com suas ferramentas básicas tradicionais, desde uma "boa" definição de aplicação diferenciável até um teorema de Frobenius local. Em espaços de Banach de dimensão infinita temos um cálculo diferencial tão bom quanto àquele em dimensão finita; temos o teorema da função inversa e o teorema de Frobenius local. Entretanto não é clara a formulação global do teorema de Frobenius, por exemplo em [7], e além disso poucos exemplos novos são acrescentados àqueles já conhecidos em dimensão finita. Nesse sentido, em [16], Omori enumera uma série de razões para se extender a teoria dos grupos de Lie além dos espaços de Banach. Também H.H. Johnson comentando o artigo [17] diz

que o estudo da teoria dos grupos de Lie em espaços de Banach de dimensão infinita não inclui os espaços de funções da teoria de Cartan. Portanto não é só por simples generalização que vários matemáticos estão tentando obter resultados dessa teoria em espaços localmente convexos mais gerais que os de Banach. Mas como já afirmamos anteriormente existem dificuldades básicas para se obter resultados em E.L.C.

O caminho, que nos parece correto, é trabalharmos numa classe intermediária entre espaços de Banach e ELC, sempre motivados em exemplos concretos. Os melhores caminhos parecem ser aqueles apontados por Leslie e Pisanelli.

Leslie em [18] e [19] estudou por exemplo um teorema de Frobenius na integrabilidade de subfibrados de codimensão finita do fibrado tangente de variedades modeladas em cadeias de Banach.

Pisanelli em [5], [6], [10], [11], [12], [13] e [17] apresentou uma série de resultados em escalas de Banach. As abordagens de Leslie e Pisanelli não se superpõem, no entanto, a de Pisanelli parece incluir um maior número de exemplos como me confirmou F. Colombeau em recente passagem pelo IME-USP. Além disso H.H. Johnson comentando [17] no Math Review diz - "... this present paper is the first to apply modern funtional analysis to a infinite group occuring in the Lie-Cartan theory."

Recentemente Neculai Papaghiuc em [20] e [21], usando o Cálculo Diferencial e o Teorema da Função Inversa de Marinescu em ELC demonstrou um teorema de existência e unidade de equações diferenciais ordinárias em ELC e posteriormente um teorema de Frobenius em ELC. Todavia o único exemplo citado em ELC é o de Leslie

em [19] .

2. A origem da abordagem de Pisanelli

Em [14] , L. Fantappié, na introdução, sugere como uma das possíveis aplicações da Teoria dos Funcionais Analíticos o estudo dos grupos de Lie quando diz, "también Lie, y después Cartan, han desarollado la teoria de los grupos continuos infinitos, esto es, de grupos de transformaciones que dependen de infinitos parametros y, portanto, en substancia, de funciones arbitrárias; pero no disponiéndose entonces de la teoria de funcionales analíticos, estaban obligados a limitar suas investigaciones a aquellas transformaciones que podían definirse como soluciones de ciertas ecuaciones en derivadas parciales. Tales grupos infinitos son, portanto, muy particulares, y una teoria general de los grupos infinitos sólo puede construirse mediante el uso sistemático del concepto de funcional."

Omar Catunda já tinha recebido essa sugestão de L. Fantappié e em [15] iniciou um estudo nesse sentido. Todavia não se conhecia até aí um teorema de equações diferenciais ordinárias a valores num E.L.C. Em 1970 F. Treves em [4], demonstrou um teorema de E.D.O. a valores numa escala de espaços de Banach, classe que incluem os espaços de Silva e de Banach como exemplos. Logo após, Pisanelli, em [5], demonstrou um teorema de Frobenius local que abriu o caminho para o estudo dos grupos de Lie em escalas de Banach.

3. A formulação global do Teorema de Frobenius

Nosso trabalho tem por objetivo estudar a maximalidade de soluções de uma distribuição integrável no contexto das escalas

de espaços de Banach e aplicar à teoria dos grupos de Lie.

No Capítulo 1 colocamos os espaços onde vamos trabalhar bem como os resultados que serão usados mais adiante. No Capítulo 2, após o enunciado do teorema de Ovcyannikov-Treves, apresentamos uma demonstração do teorema de Frobenius local em escalas de espaços de Banach. Nos Capítulos 3 e 4 apresentamos definições e teoremas e procuramos separar os resultados mais gerais para depois aplicá-los nas escalas de espaços de Banach. Assim por exemplo, provamos em 2.5 - Capítulo 3 que se um certo sistema (S) tem solução então uma distribuição dada é integrável num ELCHSc, depois fazemos uso desse resultado em escalas de Banach e mais especificamente no Capítulo 5 apresentamos exemplos de quando esse sistema (S) tem solução.

Após uma série de resultados nos Capítulos 3 e 4 provamos a existência de variedades integrais maximais em distribuições integráveis em escalas de espaços de Banach. No Capítulo 5, além das aplicações a grupos de Lie e exemplos concretos, provamos que em espaços de Banach as hipóteses do teorema 2.5 - Capítulo 3, estão sempre satisfeitos e portanto nossos resultados incluem essa classe de espaços.

ABSTRACT

Our purpose in this work is to study maximal solution of integrable distributions in the context scale of Banach spaces and applied to the Lie Group theory.

In the first chapter we define the spaces where we are going to work and the results that we will be using later. In chapter 2, after Ovcyannikov-Treves theorem, we present a proof of Local Frobenius in Scale of Banach theorem. In the two next chapters, 3 and 4, we present new definitions and theorems that will be applied in the Scale of Banach Spaces. For instance we prove in 2.5, chapter 3, that if a system (S) has a solution then a given distribution is integrable in locally convex spaces, Hausdorff, sequentially complete, and the result is used in Banach Scales; in the last chapter, we present examples of such systems (S) with solution.

After some general results, in chapters 3 and 4, we prove the existence of integrable maximal manifolds in integrable distributions in Scale of Banach Spaces. In chapter 5 we give applications in Lie groups and concrete examples.

CAPÍTULO 1

§1. ESCALA DE ESPAÇOS DE BANACH

1.1. Definição

Uma escala de espaços de Banach complexo X é um espaço vetorial topológico, reunião de uma família de espaços de Banach complexo X_s com norma $\| \|_s$ e $0<s\leq 1$, com as seguintes propriedades:

(a) $X_s \subset X_{s'}$ e $\| \|_{s'} \leq \| \|_s$ para todo par s e s', tal que $0<s'<s\leq 1$;

(b) X é limite indutivo localmente convexo, separado e sequencialmente completo.

Exemplos

1. Se $X_s = X$ para todo s, $0<s\leq 1$ então X é um simples espaço de Banach.

2. Se $X = \bigcup_{n>1} Y_n$ é um espaço de Silva, tomando-se $X_s = Y_n$ para $\frac{1}{n+1} < s \leq \frac{1}{n}$ temos que todo espaço de Silva é uma escala de espaços de Banach.

1.2. Propriedades

1. Teorema do limitado ([2] - pag. 199)

Se $X = \bigcup_{i \in I} X_i$, X_i é Fréchet, X é o limite indutivo localmente convexo, e X é separado e sequencialmente completo então se $L \subset X$ é limitado em X existe $i \in I$ tal que $L \subset X_i$ e é limitado em X_i.

2. O limite indutivo dos espaços X_s numa escala é idêntico aquele dos espaços $X_{\frac{1}{n}}$, $n = 1, 2, \ldots$.

De fato para cada s, $0 < s \leq 1$, existe $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $\frac{1}{n} < s$ e por hipótese as imersões $X_s \longrightarrow X_{\frac{1}{n}}$ são lineares e contínuas.

3. Teorema

Seja $f: D \longrightarrow X$, D um domínio de C e X uma escala de espaços de Banach, uma aplicação holomorfa. Então para cada $\alpha_o \in D$ existe um índice s_{α_o} tal que f é holomorfa numa vizinhança de α_o a valores em $X_{s_{\alpha_o}}$.

Demonstração: De fato seja $V(\alpha_o) \subset D$ uma vizinhança compacta de α_o. Então $f(V(\alpha_o)$ é um compacto de X logo é limitado em X. A envoltária convexa e fechada $\overline{\Gamma f(V(\alpha_o)}$ é limitada em X. Pela desigualdade de Cauchy ([1] - pag. 14) temos

$$\frac{f^{(n)}(\alpha_o)}{n!} \in \frac{1}{r^n} \overline{f(B_r(\alpha_o))}$$

onde $B_r(\alpha_o)$ é uma bola de centro α_o e raio r contido em $V(\alpha_o)$. Pelo teorema do limitado existe s_{α_o} tal que $\overline{\Gamma f(B_r(\alpha_o))} \subset X_{s_{\alpha_o}}$. Existe então um número real $M > 0$ tal que

$$\left\| \frac{1}{n!} f^{(n)}(\alpha_o) \right\|_{s_{\alpha_o}} \leq \frac{1}{r^n} \cdot M$$

Por essa última desigualdade a série

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} f^{(n)}(\alpha_o) \ (\alpha - \alpha_o)^n$$

converge e é holomorfa em $B_r(\alpha_o)$ a valores em $X_{s_{\alpha_o}}$. Chamemos a série em α de $\overline{f}(\alpha)$. Como a inversão $X_{s_{\alpha_o}} \longrightarrow X$ é linear e contínua então $\overline{f}(\alpha)$ converge em X e então $\overline{f}(\alpha) = f(\alpha)$.

<u>Corolário</u> - Seja $f:\Omega \longrightarrow Y$, Ω aberto de um produto de escalas de espaços de Banach $\bigcup_{0<s\leq 1} X_s^{(1)} \times \ldots \times \bigcup_{0<s\leq 1} X_s^{(n)}$ e Y um espaço localmente convexo separado e sequencialmente completo. Então f é LF-analítica se e só se sua restrição à $\Omega \cap X_s^{(1)} \times \ldots \times X_s^{(n)}$ é LF-analítica $(0<s\leq 1)$.

§2. <u>O espaço de germes gh(n,C)</u>

2.1. <u>Definição</u>

Chamamos de $gh(n,C)$ ao conjunto de germes das transformações holomorfas de C^n definidas em vizinhanças da origem que se anulam na origem. Com a adição de germes e o produto de um complexo por um germe temos que $gh(n,C)$ é um espaço vetorial complexo.

Para tudo o que segue denotaremos da mesma forma um germe e um seu representante a menos de menção explícita.

2.2. Para cada $s>0$ associemos o espaço vetorial complexo X_s dos germes das transformações holomorfas de C^n definidas na bola $B_r(0)$ que se anulam na origem com

$$\sup_{|t|<s} |x(t)| < \infty \quad \text{para todo } x \in X_s,$$

onde $|t| = |t_1| + \ldots + |t_n|$.

O espaço X_s com a norma

$$\| x \|_s^1 = \sup_{|t|<s} |x(t)|$$

é um espaço de Banach complexo.

Com essas notações podemos afirmar que:

(a) $gh(n,C) = \bigcup_{0<s\leq 1} X_s$

(b) $X_s \subset X_{s'}$ e $\| \ \|_{s'}^1 \leq \| \ \|_s^1$ para todo s, s' com $0<s<s'\leq 1$.

(c) A bola unitária e fechada em X_s, denotada por $\overline{B(0,1)}$, é compacta em $X_{s'}$, $0<s'<s\leq 1$.

De fato seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de transformações holomorfas em C^n definidas na bola $B_s(0)$ e equilimitadas por 1.

Pelo teorema de Montel existe uma subseqüência x_{n_k} uniformemente convergente nos compactos de $B_s(0)$ para uma transformação holomorfa x e em particular holomorfa em $\overline{B_{s'}(0)}$, $0<s'<s\leq 1$. Então x_{n_k} converge uniformemente em $\overline{B_{s'}(0)}$ para x. Mas

$$\| x_{n_k} \|_s^1 \leq 1 \text{ e então } \| x \|_s^1 \leq 1 \text{ e assim } x \in \overline{B_s(0,1)} .$$

Podemos dizer também que

$$\varinjlim_{0<s\leq 1} X_s = \varinjlim_{n\in\mathbb{N}^*} X_{\frac{1}{n}}$$

e portanto gh(n,C) é um espaço de Silva e então é separado e sequencialmente completo.

2.3. Vamos agora olhar gh(n,C) de uma outra forma. Para cada s associemos o espaço vetorial complexo Y_s dos germes das transformações holomorfas de C^n definidas na bola $B_s(0)$ que se anulam na origem com

$$\sup_{|t|<s} |J(x)(t)| < \infty \quad \text{para todo } x \in Y_s,$$

onde se $A = (a_{ij})$ é uma matriz quadrada de complexos de ordem n

$$|A| = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| .$$

O espaço Y_s com a norma

$$\|x\|_s^2 = \sup_{|t|<s} |J(x)(t)|$$

é um espaço de Banach complexo, onde J(x)(t) é o jacobiano de x calculado em t.

Com essas notações podemos afirmar que

(a) $gh(n,C) = \bigcup_{0<s\leq 1} Y_s$;

(b) $Y_s \subset Y_{s'}$ e $\| \ \|_{s'}^2 \leq \| \ \|_s^2$ para todo par s,s' com $0<s<s'\leq 1$.

2.4. Teorema

Os limites indutivos localmente convexos de X_s e de Y_s dão o mesmo espaço localmente convexo para gh(n,C).

Demonstraremos primeiramente o seguinte,

Lema

(a) $\|x\|^2_{s'} \leqslant \frac{n}{s-s'} \|x\|^1_s$ para todo par s,s' com $0<s'<s\leqslant 1$.

(b) $\|x\|^1_s \leqslant s \|x\|^2_s$ para todo s, $0<s\leqslant 1$.

Demonstração

(a) Seja x holomorfa na bola $B_s(0)$ de C^n.

Para $|t|<s'<s$ temos

$$\left| \frac{\partial x_i}{\partial t_j}(t) \right| \leqslant \frac{1}{(s - \sum_{k\neq j} |t_k|) - (s' - \sum_{k\neq j} |t_k|)} \sup_{|t|<s} |x_i(t)|$$

$$\left| \frac{\partial x_i}{\partial t_j} \right| \leqslant \frac{1}{s-s'} \sup_{|t|<s} |x_i(t)| \quad \text{para } i= 1,\ldots,n.$$

Então

$$\sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial x_i}{\partial t_j}(t) \right| \leqslant \frac{n}{s-s'} \|x\|^1_s$$

e portanto

$$\|x\|^2_{s'} \leqslant \frac{n}{s-s'} \|x\|^1_s \quad .$$

(b) A desigualdade do valor médio nos dá para uma transformação holomorfa na bola $B_s(0)$ de C^n

$$|x(t)| \leq |t| \sup_{\alpha \in [0,t]} \| x'(\alpha) \|$$

para todo t, $|t|<s$, onde $\| x'(\alpha) \| = \sup_{|h| \leq 1} |x'(\alpha)h|$. Mas

$$|x'(\alpha)h| = |J(x)(\alpha)h| \leq \| x \|_s^2 \; |h|$$

e portanto $|x(t)| \leq s \| x \|_s^2$ o que implica $\| x \|_s^1 \leq s \; \| x \|_s^2$

<u>Demonstração do teorema</u>

O item (a) do Lema diz que a aplicação canônica

$$X_s \longrightarrow Y_{s'} \quad , \; 0<s'<s\leq 1$$

é contínua e portanto a inclusão

$$X_s \longrightarrow \varinjlim Y_s$$

é contínua acarretando que a topologia de $\varinjlim X_s$ é mais fina que a de $\varinjlim Y_s$. Analogamente o item (b) diz que a topologia de $\varinjlim Y_s$ é mais fina que a de $\varinjlim X_s$.

2.5. <u>Teorema do fechado</u>

Todo subespaço vetorial fechado H de um espaço de Silva $X = \varinjlim X_n$ é um espaço de Silva e $H = \varinjlim H \cap X_n$.

A demonstração deste fato, devido a Silva, está claramente feita em [3] página 148.

Mais adiante usaremos essa propriedade no espaço gh(n,C).

2.6. Grupo de Lie [6]

Seja X um espaço localmente convexo complexo separado e sequencialmente completo, G aberto de X munido de uma estrutura de grupo de modo que as aplicações:

$$\begin{array}{ccc} G \times G \longrightarrow G & \qquad & G \longrightarrow G \\ (x,y) \longrightarrow xy & \qquad & x \longrightarrow x^{-1} \end{array}$$

sejam LF-analíticas . G é chamado grupo de Lie .

Denotando a operação do grupo por $\emptyset$ as aplicações lineares

$$L(x): X \longrightarrow X$$
$$h \longrightarrow \emptyset'_y(x,e)h$$

e é a unidade do grupo

$$L(x): X \longrightarrow X$$
$$h \longrightarrow \emptyset'_y(x^{-1},x)h$$

são uma inversa da outra, $\forall x \in G$.

Usando-se a propriedade associativa do grupo e diferenciando-se com acréscimo h em relação à segunda variável para valores convenientes obtem-se as equações de Lie do grupo:

$$\begin{cases} \emptyset'_y(x,y)h = L(\emptyset)\ L(y)h \\ \emptyset(x,e) = x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \psi'_y(x,y)h = L(\psi)\ L(y)h \\ \psi(x,x) = e \end{cases} \qquad \text{onde } \psi(x,y) = \emptyset(x^{-1},y).$$

A aplicação LF-analítica Lh definida por

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow X \\ x &\longrightarrow L(x)h \end{aligned}$$

é chamada <u>transformação infinitesimal</u> do grupo G no vetor h. Verifica-se que $L(e)h = h$, $\forall h \in X$.

2.7. <u>Álgebra de Lie das transformações infinitesimais</u> [6]

Seja X um espaço localmente convexo separado e sequencialmente completo e $G \subset X$ um aberto.

O espaço vetorial $H(G,X)$ das aplicações LF-analíticas é uma <u>álgebra de Lie complexa</u> com o colchete

$$\left[\xi\ ,\ \eta\right] = \xi'\eta - \eta'\xi\ .$$

No caso de G ser um <u>grupo de Lie</u> o conjunto das <u>transformações infinitesimais</u> de um grupo de Lie G forma uma <u>sub-álgebra de Lie</u> de $H(G,X)$. Essa sub-álgebra é chamada álgebra de Lie do grupo G. É possível introduzir em X uma estrutura de álgebra de Lie isomorfa à das transformações infinitesimais, definida por

$$\left[h,k\right] = L'(e)kh - L'(e)hk.$$

2.8. O gh(n,C) como uma álgebra de Lie [6]

O espaço vetorial gh(n,C) com o colchete

$$[h,k] = J(h)k - J(k)h \quad ,$$

onde J(h) é a matriz jacobiana de h, é uma álgebra de Lie.

2.9. O grupo de Lie Gh(n,C)

Chamamos de Gh(n,C) ao subconjunto dos elementos x de gh(n,C) tais que

$$\det J(x)(0) \neq 0 \quad .$$

Como a aplicação determinante é contínua então Gh(n,C) é um aberto de gh(n,C).

Com a lei de composição Gh(n,C) é um grupo de Lie.

A álgebra de Lie de Gh(n,C) é gh(n,C).

Nesse grupo a transformação infinitesimal L(x) é igual a J(x), o jacobiano de x.

CAPÍTULO 2

§1. TEOREMA DE OVCYANNIKOV - TREVES

1.1. Teorema de Ovcyannikov - Treves [4]

Seja $X = \bigcup_{0<s\leq 1} X_s$ uma escala de espaços de Banach e o sistema

$$(S) \quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(t,x) \\ x(0) = x_o \end{cases}$$

onde $t \in C$, $x_o \in X_1$ e

$$(a.1) \qquad f(t,x) = \sum_{\substack{p\geq 0 \\ q\geq 0}} \hat{F}_{p,q}(x-x_o)\, t^q \quad , \quad \hat{F}_{p,q}(h) = F_{p,q}(h,\ldots,h)$$

$F_{p,q}(h_1,\ldots,h_p)$ é p-linear de X_s^p a valores em $X_{s'}$ para $p \in \mathbb{N}^*$ e $q \in \mathbb{N}$, $0<s'<s<1$, $\hat{F}_{o,q} \in \bigcap_{0<s<1} X_s$;

$$(b.1) \qquad \|F_{p,q}(h_1,\ldots,h_p)\|_{s'} \leq \frac{C}{s-s'} \|h_1\|_s \cdots \|h_p\|_s \frac{1}{r^p} \frac{1}{n^q}$$

$p \in \mathbb{N}^*$ e $q \in \mathbb{N}$

$$\| \hat{F}_{o,q} \|_{s'} \leq \frac{C}{s-s'} \frac{1}{\eta^q} \quad , q \in \mathbb{N}, \; r, \eta, C > 0.$$

Então existe uma única solução analítica $x(t)$ do sistema acima a valores na escala X no seguinte sentido:

(a) (existência) existe um número Δ, $0<\Delta<\eta$, tal que dado s, $0<s\leq 1$, $x(t)$ é uma função analítica de t, para $|t| < \Delta(1-s)$ a valores em X_s.

(b) (unicidade) se para algum s, $0<s\leq 1$, existe uma função analítica de t numa bola aberta centrada em 0, a valores em X_s e satisfazendo o sistema acima então ela deve ser igual a $x(t)$.

Observações

(1) $\Delta = \min\left(\frac{\eta}{2}, \frac{r}{32eC}\right)$

(2) Se $x_o \in X_{s_o}$, $0<s_o\leq 1$, então x está definida no disco de centro na origem, $|t| < \Delta(s_o-s)$.

Comentários sobre a demonstração

Para a demonstração escreve-se $x-x_o = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \, t^n$ e $x'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n \, x_n \, t^{n-1}$ e calcula-se os possíveis coeficientes

$$\begin{cases} x_{k+1} = \dfrac{1}{k+1} \displaystyle\sum_{q+n_1+\ldots+n_p=k} F_{p,q}(x_{n_1},\ldots,x_{n_p}) \\ x_1 = F_{o,o} \end{cases}$$

da expansão analítica de x em volta de o.

Isso determina x_{k+1} com função de x_n para $n \leq k$ e então prova a unicidade.

A existência é estabelecida por uma estimativa para $\|x_n\|_s$, provando-se que

$$\|x_n\|_s \leq \frac{r}{8Sn^2}\left(\frac{1}{\Delta(1-s)}\right)^n \quad , \quad S = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} \ .$$

1.2. Hipóteses equivalentes às do Teorema de Ovcyannicov [5]

Sejam η_1, R, $C_1 > 0$ constantes tais que $0<\eta_1<\eta$, $0<R<r$ e

$$C_1 = C \cdot \left(1 - \frac{\eta_1}{\eta}\right)^{-1} \left(1 - \frac{R}{r}\right)^{-1}$$

onde r, η e C são as constantes de (1.1).

(a.2) Para o sistema (S) de (1.1) seja $f(t,x)$ definida em $B_{\eta_1}(0) \times V(x_o,R)$ onde $V(x_o,R) = \bigcup_{0<s\leq 1} B_s(x_o,R)$ a valores em X;

(b.2) $f(t,x)$ é G-analítica em $B_{\eta_1}(o) \times B_s(x_o,R)$ a valores em $X_{s'}$, para todos $0<s'<s\leq 1$ e

$$\|f(t,x)\|_{s'} \leq \frac{C_1}{s-s'} \ .$$

Então as hipóteses (a.1) e (b.1) implicam (a.2) e (b.2). Reciprocamente se valem (a.2) e (b.2) e tomarmos $C = C_1$, $\eta = \eta_1$ e $r = \frac{R}{e}$ temos que valem (a.1) e (b.1).

§2. TEOREMA DE FROBENIUS LOCAL

2.1. Teorema

Sejam X e Y espaços localmente convexos, separados e sequencialmente completos. Sejam $A \subset X$ e $B \subset Y$ abertos e

$$f : A \times B \times X \longrightarrow Y$$

uma função LF-analítica tal que a expressão

$$(E) \quad f'_x(x,y)\,k\,h + f'_y(x,y)(f(x,y)k)\,h$$

é simétrica em (h,k) e $X \times Y$, para todo $(x,y) \in A \times B$, isto é, vale a condição de integrabilidade (C.I.) para $f(x,y)h$.

Se o sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dg(t,x)}{dt} = f\,[x_o + t(x-x_o), g]\,(x-x_o) \\ g(o,x) = y_o \end{cases}$$

com $(x_o,y_o) \in A \times B$, tem solução em $V \times U(x_o) \subset C \times A$, onde V é um aberto conexo que contem 0 e 1 e $U(x_o)$ é uma vizinhança de x_o, então o sistema

$$\begin{cases} y'(x)h = f(x,y)h \\ y(x_o) = y_o \end{cases}$$

tem uma única solução para x numa vizinhança de x_o.

<u>Demonstração</u>

<u>Unicidade</u>

Se o sistema tiver solução então $y'(x)h = f(x,y(x))h$,

$$y''(x)h^2 = f'_x(x,y(x))h^2 + f'_y(x,y(x))y'(x)h.h =$$

$$= f_x(x,y(x))h^2 + f_y(x,y(x))(f(x,y(x)h))h =$$

$$= (\delta^{(h,fh)} fh)(x,y(x)) = (\delta^{(h,fh)} \delta^{(h,fh)} p)(x,y(x))$$

$$= \left[(\delta^{(h,fh)})^2 p\right](x,y(x))$$

onde p é a projeção

$$X \times Y \longrightarrow Y$$
$$(x,y) \longrightarrow y$$

e $(\delta^{(h,fh)} fh)(x,y(x))$ é a diferencial de $f(x,y(x))h$ com acréscimo h. Por indução temos que

$$y^{(n)}(x_o)h^n = \left[(\delta^{(h,fh)})^n p\right](x_o,y_0) \qquad [9]$$

Desenvolvendo y em série

$$y(x_o+h) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}\left[(\delta^{(h,fh)})^n p\right](x_o,y_o)$$

e assim a unicidade decorre da expressão acima.

<u>Existência</u>

Por simplicidade tomemos $x_o=0$ e $y_o=0$. Então

$$\frac{d}{dt}\, g'_x(t,x)h = f'_x(tx,g)thx + f'_y(tx,g)g'_x(t,x)hx + f(tx,g)h$$

$$\frac{d}{dt}\left[tf(tx,g)h\right] = f(tx,g)h + tf'_x(tx,g)xh + tf'_y(tx,g)(f(tx,g)x)h$$

Então

$$\frac{d}{dt}\left[g'_x(t,x)h - tf(tx,g)h\right] =$$

$$= f'_y(tx,g)(g'_x(t,x)h)x - tf'_y(tx,g)(f(tx,g)x)h +$$

$$+ \underbrace{f'_x(tx,g)thx - tf'_x(tx,g)xh}_{(A)}$$

Pela simetria em (h,k) da expressão (E) temos

$$f'_x(x,y)hk - f'_x(x,y)kh = f'_y(x,y)(f(x,y)k)h - f'_y(x,y)(f(x,y)h)k,$$

aplicando em (A) vem

$$\frac{d}{dt}\left[g'_x(t,x)h - tf(tx,g)h\right] =$$

$$= f'_y(tx,g)(g'_x(t,x)h)x - tf'_y(tx,g)(f(tx,g)x)h +$$

$$+ tf'_y(tx,g)(f(tx,g)x)h - tf'_y(tx,g)(f(tx,g)h)x =$$

$$= f'_y(tx,g)\left[g'_x(t,x)h - tf(tx,g)h\right]x.$$

Mas $g(0,x) = 0$ e portanto $g'_x(0,x)h = 0$.

Seja então o sistema

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left[g'_x(t,x)h - tf(tx,g)h\right] = f'_y(tx,g)\left[g'_x(t,x)h - tf(tx,g)h\right]x \\ g'_x(o,x)h - of(o,g)h = 0 \end{cases}$$

Fixado x temos um sistema linear onde a aplicação nula é solução. Assim

$$g'_x(t,x)h - tf(tx,g)h = 0$$

para todo $t \in V$. Logo para $t=1$ temos

$$g'_x(1,x)h = f(x,g(1,x))h .$$

Assim $g(1,x)$ satisfaz a equação

$$y'(x) = f(x,y)h.$$

Provemos que $g(1,0)= 0$. De fato

$$\frac{d}{dt} g(t,x) = f(tx,g)x \quad \text{então} \quad \frac{d}{dt} g(t,0)= 0.$$

Mas V é convexo então $g(t,0)$ é constante e portanto $g(1,0)= g(0,0)=0$.

2.2. <u>Teorema</u>

Sejam X um espaço de Banach complexo e $Y= \bigcup_{0<s\leq 1} Y_s$ uma escala de espaços de Banach. Seja o sistema

$$(S)\begin{cases} y'(x)h = f(x,y)h \\ y(x_o) = y_o \end{cases}$$

onde $y_o \in Y_1$ e

$$f: B_R(0) \times \bigcup_{o<s\leq 1} B_s(0,R) \times X \longrightarrow Y$$

$$(x,y,h) \longrightarrow f(x,y)h.$$

$B_R(0)$: bola de X e $B_s(0,R)$: bola de X_s.

Além disso f restrita a $B_R(0) \times B_s(0,R) \times X$ assume valores em $Y_{s'}$, $o<s'<s\leq 1$ e é G-analítica com

$$\| f(x,y)h \|_{s'} \leq \frac{C}{s-s'} \| h \| \quad , \; C>0 .$$

Se vale a condição de integrabilidade para $f(x,y)h$ então existe uma única solução $y(x,x_o,y_o)$ LF-analítica para $x \in B_\rho(0)$, $x_o \in B_\rho(0)$, $y_o \in B_1(0,\rho)$ a valores em Y, onde $\rho = \dfrac{R}{192e^2C}$

<u>Demonstração</u>

Seja o sistema

$$(S') \quad \begin{cases} \dfrac{dg}{dt} = f\left[x_o + t(x-x_o), g\right](x-x_o) \\ g(0,x) = y_o \end{cases}$$

A mudança de variáveis $\bar{y} = g - y_o$ e $\bar{x} = x - x_o$ fornece o sistema equivalente

$$\begin{cases} \dfrac{d\bar{y}}{dt} = f\left[x_o + t\bar{x}, \; \bar{y} + y_o\right]\bar{x} \\ \bar{y}(0,x) = 0 \end{cases}$$

Para $|t|<3$; $\|\bar{x}\| < \frac{R}{6}$, k; $\|x_o\| < \frac{R}{2}$; $\|\bar{y}\| < \frac{R}{2}$, onde k é um número a ser determinado, e $\|y_o\|_1 < \frac{R}{2}$ temos $\|x_o + t\,\bar{x}\| = \|x_o + t(x-x_o)\| < R$ e $\|\bar{y}+y_o\| = \|g\| < R$. Portanto

$$\| f(x_o+t\bar{x}, \; \bar{y}+y_o)\bar{x} \|_{s'} \leq C \frac{1}{s-s'} k .$$

Pelo Teorema de Ovcyannikov, (1.1) e (1.2), existe $\bar{y}(t, \bar{x}, x_o, y_o)$ analítica para $|t|<\Delta(1-s)$ onde

$$\Delta = \min \left\{ \frac{3}{2}, \frac{R}{32e^2Ck} \right\}$$

$$\Delta = \frac{3}{2} \quad \text{quando} \quad k = \frac{R}{96e^2C} .$$

Então

$$g(t,x,x_o,y_o) = \overline{y}(t,x-x_o,x_o,y_o) + y_o$$

é LF-analítica e é solução de (S') quando $|t| < \frac{3}{2}$, $\| x \| < \rho$, $\| x_o \| < \rho$, $\| y_o \|_1 < \rho$ $(\rho = \frac{R}{192e^2C})$

$$g: (|t| < \frac{3}{2}(1-s)) \longrightarrow Y_s .$$

Como a imersão $Y_s \longrightarrow Y$ é linear e contínua temos a solução

$$g: (|t| < \frac{3}{2}) \longrightarrow Y .$$

Pelo teorema (2.2) existe uma única solução de (S)

$$y(x,x_o,y_o) = g(1,x,x_o,y_o) .$$

2.3. Teorema de Frobenius local

Sejam $X = \bigcup_{0<s\leq 1} X_s$ e $Y = \bigcup_{0<s\leq 1} Y_s$ escalas de espaços de Banach. Seja o sistema

$$(S) \quad \begin{cases} y'(x)h = f(x,y)h \\ y(x_o) = y_o \end{cases}$$

onde $x_o \in X$ e $y_o \in Y$ e

$$f: \bigcup_{0<s\leq 1} B_s(0,R) \times \bigcup_{0<s\leq 1} D_s(0,R) \times X \longrightarrow Y$$

com $B_s(0,R)$ = bola de centro 0 e raio R de X_s, e

$D_s(0,R)$ = bola de centro 0 e raio R de Y_s.

Suponhamos também que f restrita a $B_s(0,R)\times D_s(0,R)\times X_s$ toma valores em $Y_{s'}$, $0<s'<s\leq 1$, é G-analítica e

$$\| f(x,y)h\|_{s'} \leq C \frac{s}{s-s'} \| h\|_s$$

com f(x,y)h satisfazendo a condição de integrabilidade. Então existe uma única aplicação LF-analítica em $\bigcup_{0<s\leq 1} B_s(0,\rho)\times \bigcup_{0<s\leq 1} B_s(0,\rho)\times \bigcup_{0<s\leq 1} D_s(0,\rho)$ a valores em Y, onde $\rho = \dfrac{R}{192e^2C}$.

<u>Demonstração</u>

Seja α, $0<\alpha\leq 1$, $x_o \in X_\alpha$ e $y_o \in Y_\alpha$. Seja σ, $0<\sigma\leq 1$, $T_\sigma = Y_{\sigma\alpha}$ e $|\ |_\sigma = \|\ \|_{\alpha\sigma}$. Para $\| x \|_\alpha < R$, $|y|_\sigma < R$, $h \in X_\alpha$ e $0<\sigma'<\sigma\leq 1$ veremos que $|f(x,y)h|_{\sigma'} \leq \frac{C}{\sigma-\sigma'} \| h \|_\alpha$ e portanto teremos $y(x,x_o,y_o)$ solução para x numa bola de X_α, x_o numa bola de X_α e y_o numa bola de $T_1 = Y_\alpha$, como no teorema (2.2).

De fato para $\| x \|_\alpha < R$ temos $\| x \|_{\alpha\sigma} \leq \| x \|_\alpha < R$ então

$$\left.\begin{array}{l} \| x \|_{\alpha\sigma} < R \\ |y|_\sigma = \| y \|_{\alpha\sigma} < R \\ h \in X_\alpha \end{array}\right\} \Longrightarrow \| f(x,y)h\|_{\alpha\sigma'} \leq C \frac{\alpha\sigma}{\alpha\sigma-\alpha\sigma'} \| h \|_{\alpha\sigma}$$

$(0<\sigma'<\sigma\leq 1 \Longrightarrow 0<\alpha\sigma'<\alpha\sigma<\alpha\leq 1)$.

Portanto

$$|f(x,y)h|_{\sigma'} = \| f(x,y)h\|_{\alpha\sigma'} \leq \frac{C}{\sigma-\sigma'} \| h \|_\alpha .$$

Então como no teorema (2.2) teremos $y(x,x_o,y_o)$ soluções LF-analticas definida em $B_\alpha(0,\rho) \times B_\alpha(0,\rho)$, $\rho = \dfrac{R}{192e^2C}$, a valores em Y. Para cada α existe uma solução $y_\alpha(x,x_o,y_o)$ que coincide nos mesmos pontos independentemente de α devido à expressão recorrente dos coeficientes da expansão em série como em (1.1).

Assim temos uma aplicação y definida em

$$\left(\bigcup_{0<\alpha\leq 1} B_\alpha(0,\rho)\right) \times \left(\bigcup_{0<\alpha\leq 1} B_\alpha(0,\rho)\right) \times \left(\bigcup_{0<\alpha\leq 1} D_\alpha(0,\rho)\right) = \Omega$$

a valores em Y.

Provemos que y é LF-analítica. De fato seja uma função analítica γ de um aberto $V \subset C$ a valores em Ω

$$\begin{aligned} \gamma: V &\longrightarrow \Omega \\ t &\longrightarrow (x(t),x_o(t),y_o(t)). \end{aligned}$$

Pela propriedade 3, §1, capítulo 1, existe para cada $t \in V$ um α_t tal que γ restrita a uma vizinhança de t toma valores em $B_{\alpha_t}(0,\rho) \times B_{\alpha_t}(0,\rho) \times D_{\alpha_t}(0,\rho)$ e é analítica. Então $y \circ \gamma$ é analítica restrita a essa vizinhança de t e portanto y é LF-analítica.

<u>Observação</u>

No teorema de Frobenius se tivermos o mesmo sistema e

$$f: \left(\bigcup_{0<s\leq 1} B_s(w_o,R)\right) \times \left(\bigcup_{0<s\leq 1} D_s(z_o,R)\right) \times X \longrightarrow Y$$

tal que f restrita a $B_s(w_o,R) \times D_s(z_o,R) \times X_s$ assume valores em $Y_{s'}$, $0<s'<s\leq 1$, é G-analítica com $\|f(x,y)h\|_{s'} \leq C \cdot \frac{s}{s-s'} \|h\|_s$ e vale a C.I., então existe uma única $y(x,x_o,y_o)$ LF-analítica em

$$\left(\bigcup_{0<s\leq 1} B_s(w_o,\rho)\right) \times \left(\bigcup_{0<s\leq 1} B_s(w_o,\rho)\right) \times \left(\bigcup_{0<s\leq 1} D_s(z_o,\rho)\right)$$

a valores em Y, com $\rho = \dfrac{R}{192e^2C}$.

CAPÍTULO 3

Nesse capítulo os espaços em questão X, Y, etc., sempre serão espaços localmente convexos separados e sequencialmente completos.

§1. VARIEDADE INTEGRAL

1.1. Variedade analítica

Seja $M \subset X$ com $M = \bigcup_{i \in I} O_i$ onde:

(a) existe uma bijeção $\emptyset_i$ de O_i em $\emptyset_i(O_i)$, este um aberto de um espaço Y_i ;

(b) $\emptyset_i(O_i \cap O_j)$ é aberto em $\emptyset_i(O_i)$ para todo i,j de I;

(c) $\emptyset_i \circ \emptyset_j^{-1} : \emptyset_j(O_i \cap O_j) \longrightarrow \emptyset_i(O_i \cap O_j)$ é analítica para todo i, j de I;

(d) $\emptyset_i^{-1} : \emptyset_i(O_i) \longrightarrow X$ é analítica;

(e) $(\emptyset_i^{-1})'(z_i) : Y_i \longrightarrow X$ é injetora, para todo $z \in O_i$, para todo $i \in I$, onde $z_i = \emptyset_i(z)$.

Cada par $(\emptyset_i, O_i)$ é chamado carta da coleção $A=(\emptyset_i, O_i)_{i\in I}$ e A é chamado um atlas de M.

Existe uma única topologia em M tal que as aplicações $\emptyset_i$ são homeomorfismos e os subconjuntos O_i são abertos ([6] ou [7]).

Dois atlas A e $\tilde{A}$ em M são compatíveis se:

(a) as identidades $(M,A) \longrightarrow (M,\tilde{A})$ e $(M,\tilde{A}) \longrightarrow (M,A)$ são contínuas;

(b) as aplicações $\tilde{\emptyset}_j \circ \emptyset_i^{-1}$ e $\emptyset_i \circ \tilde{\emptyset}_j^{-1}$ são respectivamente analíticas em $\emptyset_i(O_i \cap \tilde{O}_j)$ e $\tilde{\emptyset}_j(\tilde{O}_j \cap O_i)$ para todo par de índices i,j.

Uma variedade analítica M em X é um conjunto M de X e uma classe de equivalência de atlas de M dado pela relação de compatibilidade.

1.2. Espaço tangente

Seja M uma variedade analítica em X e z um ponto de M . O espaço tangente a M em z é o espaço vetorial

$$T_z(M) = (\emptyset_i^{-1})'(z_i)Y_i$$

onde $z_i = \emptyset_i(z)$.

O espaço vetorial $T_z(M)$ não depende da carta $(\emptyset_i, O_i)$ escolhida ([6]).

§2. DISTRIBUIÇÃO INTEGRÁVEL

Seja $U \subset X$ um aberto de X e H um subespaço vetorial fechado de X com suplementar topológico.

2.1. Definição

Uma distribuição $\mathcal{D}$ em U é uma aplicação f,

$$f: U \times H \longrightarrow Y$$
$$(z,h) \longrightarrow f(z)h$$

analítica e tal que para cada $z \in U$ as aplicações,

$$f(z): H \longrightarrow X$$
$$h \longrightarrow f(z)h$$

são lineares e onde f(z)H e H são isomorfos topologicamente.

2.2. Definição

Seja $M \subset U$ uma variedade analítica em X. Dizemos que M é uma variedade integral de uma distribuição $\mathcal{D}$ em U se para cada $z \in M$

$$T_z(M) = f(z)H$$

Sempre que for conveniente denotaremos por M_z uma variedade integral M tal que $z \in M$ e diremos que M passa por z.

2.3. Definição

Seja $\mathcal{D}$ uma distribuição em U.

(a) Dizemos que $\mathcal{D}$ é integrável se para cada $z \in U$ existe uma variedade integral de $\mathcal{D}$ que passa por z.

(b) Dizemos que $\mathcal{D}$ tem a propriedade (P) se para cada $z_o \in U$ existe uma projeção p sobre $f(z_o)H$ e uma vizinhança $V(z_o) \subset U$ tal que para cada $a \in V(z_o)$ a restrição de p a

uma vizinhança W_a de $\underline{a}$ em M_a é uma carta. Além disso existe uma aplicação holomorfa $z = z(x,a)$,

$$\begin{aligned} z: V(p(z_o)) \times V(z_o) &\longrightarrow X \\ (x,a) &\longrightarrow z(x,a) \end{aligned}$$

onde $V(p(z_o))$ é vizinhança aberta de $p(z_o)$ em $f(z_o)H$ e tal que para cada $a \in V(z_o)$, a restrição da aplicação $z(x,a)$ a $p(w_a) \times \{a\}$ é inversa de p restrita a W_a.

<u>Observação</u>: Sempre podemos ter $p(V(z_o) \subset V(p(z_o))$ porque p é contínua.

2.4. <u>Teorema</u>

Seja $\mathcal{D}$ uma distribuição integrável em U com a propriedade (P). Seja $z_o \in U$ e suponhamos que para cada $z \in V(z_o)$ a aplicação

$$pof(z): H \longrightarrow f(z_o)H$$

seja inversível e para cada $h \in f(z_o)H$ a aplicação

$$\begin{aligned} V(z_o) &\longrightarrow H \\ z &\longrightarrow \left[pof(z)\right]^{-1} h \end{aligned}$$

seja LF-analítica. Então para $\underline{a}$ numa vizinhança de z_o e x numa vizinhança de $p(z_o)$ em $f(z_o)H$ o sistema (S) está satisfeito,

$$(S) \begin{cases} z'(x,a) = f(z) \circ \left[pof(z)\right]^{-1} \\ z(p(a),a) = a \end{cases}$$

onde $z'(x,a)$ é a notação da diferencial de z em relação a x.

Demonstração

Existem vizinhanças $V_1 = V_1(p(z_o))$ conexa, $V_1 \subset f(z_o)H$, e $V_2 = V_2(z_o)$ tal que $z(V_1, V_2) \subset V(z_o)$ porque z é contínua.

Seja $a \in V_2' = V_2 \cap p^{-1}(V_1)$. Sabemos que p restrita a uma vizinhança W_a em M_a é carta. Seja W_a tal que $W_a \subset V_2'$. Assim

$$p\left[z(x,a)\right] = x \quad , \quad x \in p(W_a) \quad \text{e}$$

diferenciando em relação a x obtemos

$$\text{(A)} \quad poz'(x,a)h = h \quad , \quad h \in f(z_o)H \ .$$

Como $\mathcal{D}$ é integrável

$$T_z(M_a) = f(z)H \quad , \quad z \in M_a$$

e portanto

$$\text{(B)} \quad z'(x,a)h = f(z(x,a))k \quad , \quad \text{para } k \in H \ .$$

Substituindo (B) em (A) temos

$$pof(z(x,a))k = h.$$

Mas $z(x,a) \in V(z_o)$ e então $pof(z(x,a))$ é inversível; o que permite escrever

$$k = \left[pof(z(x,a))\right]^{-1} h \ .$$

Para $x \in p(w_a)$ e $a \in V_2'(z_o)$ obtemos

$$\begin{cases} z'(x,a)h = f(z(x,a)) \left[pof(z(x,a)) \right]^{-1} h \\ z(p(a),a) = a \end{cases}$$

Do fato de $V_1(p(z_o))$ ser conexa e usando o teorema de extensão para funções G-analíticas, [8] , temos para $x \in V_1(p(z_o))$ e $a \in V_2'(z_o)$ o sistema (S),

$$(S) \quad \begin{cases} z'(x,a) = f(z(x,a)) \left[pof(z(x,a)) \right]^{-1} \\ z(p(a),a) = a \end{cases}$$

2.5. Teorema

Seja $\mathcal{D}$ uma distribuição em U e para cada $z_o \in U$ suponhamos que exista uma projeção p sobre $f(z_o)H$ tal que a aplicação

$$pof(z): H \longrightarrow f(z_o)H$$

seja inversível para todo z numa vizinhança $w(z_o)$ e para cada $h \in H$ a aplicação

$$\begin{aligned} w(z_o) &\longrightarrow H \\ z &\longrightarrow \left[pof(z) \right]^{-1} h \end{aligned}$$

seja LF-analítica. Se o sistema (S)

$$(S) \quad \begin{cases} z'(x,a) = f(z) \left[pof(z) \right]^{-1} \\ z(p(a),a) = a \end{cases}$$

tem solução holomorfa $z(x,a)$,

$$z(x,a): V(p(z_o)) \times V(z_o) \longrightarrow W(z_o) \quad ,$$

onde $V(p(z_o))$ é vizinhança de $p(z_o)$ em $f(z_o)H$ e $V(z_o)$ é vizinhança de z_o em U, então $\mathcal{D}$ é uma distribuição integrável com a propriedade (P).

Demonstração

Do sistema (S) vem que

$$z'(x,a)h = f(z(x,a)) \left[pof(z(x,a) \right]^{-1} h \ , \quad h \in f(z_o)H \ .$$

Aplicando p a ambos os membros temos

$$poz'(x,a)h = h$$

e como p é linear podemos escrever

$$(poz)'(x,a)h = h \ .$$

Da condição inicial vem

$$poz(p(a),a) = p(a) \ ,$$

tomando-se, sem perda de generalidade, $V(p(z_o))$ conexa e

$$V'(z_o) = V(z_o) \cap p^{-1}(V(p(z_o)))$$

temos que

$$(\Lambda) \quad poz(x,a) = x$$

para $x \in V(p(z_o))$ e $a \in V'(z_o)$.

De (A) temos que a aplicação $z(x,a)$ para $a \in V'(z_o)$ é injetora, logo para cada a fixado, $z(x,a)$ e p restrita à imagem de $V(p(z_o))$ são inversas.

Também do sistema (S) temos

$$z'(x,a)f(z_o)H = f(z(x,a))\left[pof(z(x,a))\right]^{-1}f(z_o)H \quad ,$$

como $z(x,a) \in W(z_o)$ temos que $pof(z(x,a))$ é inversível e então

$$z'(x,a)f(z_o)H = f(z(x,a))H \ .$$

Portanto a imagem pela aplicação $z(x,a)$ para $x \in V(p(z_o))$ é uma variedade integral, que passa por a, da distribuição $\mathcal{D}$ com a propriedade (P).

2.6. Corolário 1

Nas hipóteses do teorema (2.5) para a numa vizinhança de z_o em U e x e y numa vizinhança de $p(z_o)$ em $f(z_o)H$ temos

$$z(y,z(x,a)) = z(y,a) \quad .$$

Demonstração: Existem vizinhanças, $V_1(p(z_o))$ em $f(z_o)H$ conexa, $V_2(z_o)$ tal que $z(V_1,V_2) \subset V(z_o)$. Para $x,y \in V_1(p(z_o))$ e $a \in V_2(z_o)$ os valores $z(x,a)$, $z(y,a)$ e $z(y,z(x,a))$ estão bem definidos. Então as funções $z(y,a)$ e $z(y,z(x,a))$ satisfazem à mesma equação diferencial em y com a mesma condição inicial para $y=x$,

$$z(x,z(x,a)) = z(p(z(x,a)), z(x,a)) = z(x,a) \ ,$$

portanto $z(y,z(x,a)) = z(y,a)$ para $x,y \in V_1(p(z_o))$ e $a \in V_2(z_o)$.

2.7. Corolário 2

Seja S_o o suplementar topológico de $f(z_o)H$ segundo p. Se $a \in (z_o+S_o)$ então para a numa vizinhança de z_o $z(p(z_o),a) = a$.

Demonstração: De fato $p(a) = p(z_o)$ então para $a \in V(z_o)$

$$z(p(z_o),a) = z(p(a),a) = a..$$

2.8. Ainda sob as hipóteses do teorema (2.5) vamos definir duas funções holomorfas F e G em vizinhanças de z_o. Para isso sem perda de generalidade vamos tomar $V(z_o)$, como em (2.5), como um produto de vizinhanças de $p(z_o)$ em $f(z_o)H$ e de $q(z_o)$ em $f(z_o)H$. Definimos

$$F: V(z_o) \longrightarrow X \qquad F(a) = p(a) + z(p(z_o),a) - p(z_o)$$

$$G: V(z_o) \longrightarrow X \qquad G(A) = z(p(A),\ A-p(A) + p(z_o)) \quad .$$

Em particular vemos que $F(z_o) = z_o$ e $G(z_o) = z_o$.

2.9. Teorema

Para a e A em vizinhanças convenientes de z_o temos:

(i) $(G \circ F)(a) = a$

(ii) $(F \circ G)(A) = A$

Demonstração

(i) $(GoF)(a) = G(F(a)) = z(p(F(a)),\ F(a) - p(F(a)) + p(z_o)) =$

$$= z(p(a)+p(z(p(z_o),a)) - p(z_o),\ p(a)+z(p(z_o),a) -$$

$$- p(a)-p(z(p(z_o),a)-p(z_o)) = z(p(a)+p(z_o)-p(z_o), z(p(z_o),a)-p(z_o)+p(z_o)) =$$

$$= z(p(a), z(p(z_o)a) \quad .$$

Tomando-se a numa vizinhança conveniente, pelo Corolário (2.6) temos

$$z(p(a), z(p(z_o),a)) = z(p(a),a) = a$$

$$\text{(ii)} \quad (FoG)(A) = F(G(A)) = F\left[z(p(A), A-p(A)+p(z_o))\right] =$$

$$= p\left[z(p(A), A-p(A)+p(z_o))\right] +$$

$$+ z(p(z_o), z(p(A), A-p(A)+p(z_o)))-p(z_o)$$

Do fato de p ser inversa sobre a imagem de z e do Corolário (2.6) temos

$$(FoG)(A) = p(A) + z(p(z_o), A-p(A)+p(z_o)) - p(z_o) \quad .$$

Mas $\left[A-p(A)+p(z_o)\right] \in z_o+S_\sigma$ então pelo Corolário (2.6)

$$\left[FoG\right](A) = p(A)+A-p(A)+p(z_o)-p(z_o) = A$$

2.10. Observação

Seja X um espaço de Banach. Então

$$F'(G(A))G'(A) = I_X \quad \text{e} \quad G'(F(a))F'(a) = I_X \ .$$

Para $A = a = z_o$ temos

$$F'(z_o)G'(z_o) = I_X \quad e \quad G'(z_o)F'(z_o) = I_X \quad .$$

Então pelo teorema da função inversa existe uma vizinhança de z_o onde F e G são inversas.

2.11. Teorema

Para a numa vizinhança conveniente de z_o temos que

$$F'(a)f(a)H = f(z_o)H \quad .$$

Demonstração

$$F(a) = p(a) + z(p(z_o),a) - p(z_o)$$

Diferenciando com acréscimo k temos

$$(\Lambda) \quad F'(a)k = p(k) + z'_a(p(z_o),a)k \quad .$$

Pelo Corolário (2.6) para a e x em vizinhanças convenientes

$$z(p(z_o),z(x,a)) = z(p(z_o),a) \quad .$$

Diferenciando a expressão acima em relação a x com acréscimo $h \in f(z_o)H$ temos,

$$z'_a(p(z_o),z(x,a)).z'(x,a)h = 0 \quad .$$

Mas $z'(x,a)h = f(z(x,a))(pof(z(x,a)))^{-1}h$ logo

$$z'(x,a)f(z_o)H = f(z(x,a))H$$

e portanto

$$z'_a(p(z_o),z(x,a))f(z(x,a))H = 0$$

Para $x = p(a)$ essa última expressão fica

$$(B) \quad z_a'(p(z_o),a)f(a)H = 0$$

De (A) e (B) temos

$$F'(a)f(a)H = p(f(a)H) = f(z_o)H \quad .$$

§3. DISTRIBUIÇÃO INVOLUTIVA E TEOREMA DE FROBENIUS LOCAL

Nesse parágrafo continuaremos com as mesmas notações do parágrafo anterior.

3.1. Definição

Uma distribuição $\mathcal{D}$ é involutiva se $\left[f(z)h, f(z)k\right] \in f(z)H$ para todo $h,k \in H$ e para todo $z \in U$, onde o colchete $[,]$ significa

$$\left[f(z)h, f(z)k\right] = f'(z)(f(z)k)h - f'(z)(f(z)h)k \quad ,$$

e $f'(z)h$ é a diferencial de f em relação a z para h fixado.

3.2. Teorema

Seja $\mathcal{D}$ uma distribuição e para cada $z_o \in U$ seja p uma projeção sobre $f(z_o)H$. Se para cada z_o a aplicação

$$p \circ f(z) : H \longrightarrow f(z_o)H$$

é inversível para z numa vizinhança de $V(z_o)$ e para cada $h \in f(z_o)H$ fixado,

$$\begin{aligned} V(z_o) &\longrightarrow H \\ z &\longrightarrow \left[p \circ f(z)\right]^{-1} h \end{aligned}$$

é analítica então $\mathcal{D}$ é uma distribuição involutiva se e somente se o colchete $[\emptyset(z)h, \emptyset(z)k]$ pertence a $f(z)H$ para todo $h,k \in f(z_o)H$ onde $\emptyset(z)h = f(z)\left[pof(z)\right]^{-1}h$.

<u>Demonstração</u>: O teorema 27, página 61, [6] afirma: sejam X, Y e Z são espaços localmente convexos separados e sequencialmente completos, L é uma aplicação LF-analítica em $U \times Y$, U aberto de X, com valores em Z, onde a aplicação

$$\begin{aligned} Y &\longrightarrow Z \\ x &\longrightarrow L(x)h \end{aligned}$$

é linear para todo $x \in U$; seja ξ LF-analítica em U com valores em Y então a diferencial da aplicação

$$\begin{aligned} U &\longrightarrow Z \\ x &\longrightarrow L(x)\xi(x) \end{aligned}$$

no ponto x com acréscimo $h \in X$ é

$$L'(x)h\,\xi(x) + L(x)\xi'(x)h \quad .$$

Usando esse teorema para o colchete $[\emptyset(z)h, \emptyset(z)k]$ temos

$$\emptyset'(z)(\emptyset(z)k)h = f'(z)(\emptyset(z)k)\left[pof(z)\right]^{-1}h + f(z)\left\{\left[pof(z)\right]^{-1}h\right\}'\emptyset(z)k$$

$$\emptyset'(z)(\emptyset(z)h)k = f'(z)(\emptyset(z)h)\left[pof(z)\right]^{-1}k + f(z)\left\{\left[pof(z)\right]^{-1}k\right\}'\emptyset(z)h$$

Chamando $\left[pof(z)\right]^{-1}h = h' \in H$ e $\left[pof(z)\right]^{-1}k = k' \in H$ temos $\emptyset(z)h = f(z)h'$ e $\emptyset(z)k = f(z)k'$ e portanto

$$\emptyset'(z)(\emptyset(z)k)h = f'(z)(f(z)k')h' + f(z)\left\{\left[pof(z)\right]^{-1}h\right\}' f(z)k'$$

$$\emptyset'(z)(\emptyset(z)h)k = f'(z)(f(z)h')k' + f(z)\left\{\left[pof(z)\right]^{-1}k\right\}' f(z)h'$$

Reagrupando as parcelas temos

$$\left[\emptyset(z)h,\emptyset(z)k\right] = \left[f(z)h',f(z)k'\right] +$$

$$+ f(z)\underbrace{\left\{\left[(pof(z))^{-1}h\right]' f(z)k' - \left[(pof(z))^{-1}k\right]' f(z)h'\right\}}_{\nu}$$

Como $\left[pof(z)\right]^{-1}h$ tem valores em H, a diferencial em relação a z está em H, então $\nu \in H$. Portanto

$$\left[\emptyset(z)h,\emptyset(z)k\right] \in f(z)H \quad .$$

A demonstração da recíproca é evidente da última igualdade.

3.3. Observação

Seja $\mathcal{D}$ uma distribuição nas hipóteses do teorema (3.2) então para a equação

$$z'(x,a)h = f(z)\left[pof(z)\right]^{-1}h = \emptyset(z)h$$

vale a condição de integrabilidade (C.I.) se e só se $\left[\emptyset(z)h,\emptyset(z)k\right] = 0$. De fato, como o segundo membro não depende de x, podemos escrever

$$\emptyset'_x(x,z)kh + \emptyset'_z(x,z)(\emptyset(z)k)h = \emptyset'_z(\emptyset(z)k)h$$

$$\emptyset'_x(x,z)hk + \emptyset'_z(x,z)(\emptyset(z)h)k = \emptyset'_z(\emptyset(z)h)k \ .$$

3.4. Teorema

Seja $\mathcal{D}$ uma distribuição nas hipóteses do teorema (2.4) desse capítulo. Então o segundo membro da equação $z'(x,a)h = f(z)\left[pof(z)\right]^{-1}h$ satisfaz à condição de integrabilidade.

Demonstração: Chamando $\emptyset(z)h = f(z)\left[pof(z)\right]^{-1}h$

$$\left[\emptyset(z)h,\emptyset(z)k\right] = \emptyset'(z)(\emptyset(z)k)h - \emptyset'(z)(\emptyset(z)h)k .$$

Pelo teorema (2.4) para x numa vizinhança de $p(z_o)$ $z'(x,a)h = \emptyset(z(x,a))h$ e então

$$z''(x,a)kh = \emptyset'(z(x,a))z'(x,a)kh = \emptyset'(z(x,a))\emptyset(z(x,a))kh .$$

Analogamente

$$z''(x,a)hk = \emptyset'(z(x,a))\emptyset(z(x,a))hk .$$

Como $z(x,a)$ é analítica então z'' é bilinear e simétrica e assim

$$\emptyset'(z(x,a))\emptyset(z(x,a))kh = \emptyset'(z(x,a))\emptyset(z(x,a))hk .$$

Para $x= p(a)$ temos

$$\emptyset'(a)\emptyset(a)kh = \emptyset'(a)\emptyset(a)hk$$

para a numa vizinhança de z_o. Logo

$$\left[\emptyset(a)h,\emptyset(a)k\right] = 0$$

e portanto vale C.I. .

3.5. Corolário

Uma distribuição integrável com a propriedade (P) é involutiva.

Demonstração: Pelo teorema anterior o sistema (S) obedece à C.I. . Da observação (3.3) temos $\left[\emptyset(z)h,\emptyset(z)k\right] = 0$ e portanto usando o teorema (3.2) a distribuição é involutiva.

3.6. Teorema

Seja $\mathcal{D}$ uma distribuição involutiva e $z_o \in U$ tal que p seja uma projeção sobre $f(z_o)H$ com

$$pof(z): H \longrightarrow f(z_o)H$$

inversível para z numa vizinhança $V(z_o)$ e para cada $h \in f(z_o)H$ fixo,

$$\begin{aligned} V(z_o) &\longrightarrow H \\ z &\longrightarrow \left[pof(z)\right]^{-1}h \end{aligned}$$

analítica. Então o segundo membro da equação $z'(x,a)h = f(z)\left[pof(z)\right]^{-1}h$ satisfaz a C.I. para $z \in V(z_o)$.

Demonstração: Chamemos de q a aplicação $q(z) = z-p(z)$. Para $h, k \in f(z_o)H$ temos

$$\emptyset(z)h = f(z)\left[pof(z)\right]^{-1}h =$$

$$= p\left[f(z)\left[pof(z)\right]^{-1}h\right] + q\left[f(z)\left[pof(z)\right]^{-1}h\right] =$$

$$= h + \psi(z)h \quad ,$$

$$\left[\emptyset(z)h,\emptyset(z)k\right] = \psi'(z)(\emptyset(z)k)h - \psi'(z)(\emptyset(z)h)k \ .$$

Para h, k fixos chamemos a expressão acima de $g(z)$. Como $\psi(z)h$ está no suplementar de $f(z_o)H$ então $g(z)$ também está nesse suplementar logo,

$$p(g(z)) = 0 \ .$$

Do teorema (3.2) como $\mathcal{D}$ é involutiva $g(z) \in f(z)H$ e então $g(z) = f(z)k(z)$ com $k(z) \in H$. Aplicando p temos $p(g(z)) = 0 = \left[pof(z)\right]k(z)$. Mas $pof(z)$ é inversível em $V(z_o)$ logo $k(z) = 0$ em consequência $g(z) = 0 = \left[\emptyset(z)h,\emptyset(z)k\right]$. Da observação (3.3) vale a C.I. .

3.7. Teorema de Frobenius local numa distribuição de uma escala de espaços de Banach

Agora com as definições e os resultados do §3 podemos reenunciar o Teorema de Frobenius visto em (2.3), capítulo 2.

Vamos trabalhar com uma escala $X = \bigcup_{0<s\leq 1} X_s$ onde admitimos a propriedade de que se H é um subespaço vetorial fechado então H é também uma escala de espaços de Banach dada por

$$H = \varinjlim H \cap X_s \ .$$

Teorema: Seja $\mathcal{D}$ uma distribuição involutiva em U, $U \subset X$ aberto e $X = \bigcup_{0<s\leq 1} X_s$ uma escala de espaços de Banach tal que para cada $z_o \in U$ existe uma projeção p sobre $f(z_o)H$ com

$$pof(z): H \longrightarrow f(z_o)H$$

inversível para $z \in V(z_o) = \bigcup_{0<s\leq 1} B_s(z_o,R)$ é para cada $h \in f(z_o)H$

$$\begin{aligned} V(z_o) &\longrightarrow H, \\ z &\longrightarrow \left[pof(z)\right]^{-1}h \end{aligned}$$

seja LF-analítica. Seja o sistema

$$(S) \quad \begin{cases} z'(x,a) = f(z)\left[pof(z)\right]^{-1}h \\ z(p(a),a) = a \end{cases}$$

com

$$\| f(z)\left[pof(z)\right]^{-1}h\|_{s'} \leq C\,\frac{s}{s-s'}\,\|h\|_s$$

para $z \in V(z_o)$ e $h \in f(z_o)H$. Então a distribuição $\mathcal{D}$ é integrável.

<u>Demonstração</u>: Do teorema (3.6) temos que vale a condição de integrabilidade para $z'(x,a) = f(z)\left[pof(z)\right]^{-1}h$. Pelo teorema (2.3) do capítulo 2 o sistema (S) tem solução e portanto pelo teorema (2.5) desse capítulo $\mathcal{D}$ é uma distribuição integrável.

3.8. <u>Teorema</u>

Seja $G \subset X$ um grupo de Lie, X um espaço localmente convexo separado e sequencialmente completo e H uma sub-álgebra de Lie que é um fechado em X. Seja em G a distribuição L(z)H onde L é a transformação infinitesimal do grupo G. Se ξ e η são aplicações analíticas definidas em $\Omega \subset G$ a valores em X e tal que $\xi(z)$ e

$\eta(z)$ estão em $L(z)H$ então $\left[\xi,\eta\right]_z \in L(z)H$ onde

$$\left[\xi,\eta\right]_z = \xi'(z)\eta(z) - \eta'(z)\xi(z) .$$

Demonstração

$$\xi(z) \text{ e } \eta(z) \in L(z)H \Longrightarrow L(z)^{-1}\xi(z) \text{ e } L(z)^{-1}\eta(z) \in H \quad (1)$$

$$L(z) \circ L(z)^{-1} = I_X \Longrightarrow L'(z)h\,L(z)^{-1} + L(z)\left[L(z)^{-1}\right]' h = 0 \Longrightarrow$$

$$L(z)^{-1}L'(z)h\,L(z)^{-1} + \left[L(z)^{-1}\right]' h = 0 \quad (2)$$

Diferenciando $L(z)^{-1}\xi(z)$ e $L(z)^{-1}\eta(z)$, usando (1) e (2) temos,

$$\left[L(z)^{-1}\right]' h\,\xi(z) + L(z)^{-1}\xi'(z)h =$$

$$= -L(z)^{-1}L'(z)h\,L(z)^{-1}\,\xi(z) + L(z)^{-1}\xi'(z)h \quad \in H ,$$

Analogamente

$$-L(z)^{-1}L'(z)h\;L(z)^{-1}\eta(z) + L(z)^{-1}\eta'(z)h \quad \in H$$

Substituindo nas duas últimas desigualdades h por $\eta(z)$ e h por $\xi(z)$ temos

$$L(z)^{-1}\left(L'(z)\xi(z)L(z)^{-1}\eta(z) - L'(z)\eta(z)L(z)^{-1}\xi(z)\right) +$$

$$+ L(z)^{-1}\left(\xi'(z)\eta(z) - \eta'(z)\xi(z)\right) \in H$$

Mas $\left[L(z)h, L(z)k\right] = L(z)\left[h,k\right]$, [6] , e então

$$L(z)^{-1}\left(L'(z)L(z)kh - L'(z)L(z)hk\right) = \left[h,k\right]$$

Olhando k como $L(z)^{-1}\xi(z)$ e h como $L(z)^{-1}\eta(z)$ temos

$$L(z)^{-1}\left(L'(z)\xi(z)L(z)^{-1}\eta(z) - L'(z)\eta(z)L(z)^{-1}\xi(z)\right) =$$

$$= \left[L(z)^{-1}\xi(z)\ ,\ L(z)^{-1}\eta(z)\right] .$$

Então

$$\left[L(z)^{-1}\xi(z), L(z)^{-1}\eta(z)\right] + L(z)^{-1}\left[\xi,\eta\right]_z \in H .$$

Como $\left[L(z)^{-1}\xi(z), L(z)^{-1}\eta(z)\right] \in H$ então $L(z)^{-1}\left[\xi,\eta\right]_z \in H$ e portanto $\left[\xi,\eta\right]_z \in L(z)H$.

<u>Corolário 1</u>. Num grupo de Lie G a distribuição L(z)H é involutiva.

<u>Corolário 2</u>. Seja em G a distribuição L(z)H e para $z_o \in G$ suponhamos que p é uma projeção sobre $L(z_o)H$ com

$$p \circ L(z) : H \longrightarrow L(z_o)H$$

inversível para z numa vizinhança $V(z_o)$. Então o segundo membro da equação

$$z'(x,a)h = L(z)(p\circ L(z))^{-1}h$$

satisfaz à C.I. .

<u>Demonstração</u>: Evidente do corolário anterior e do teorema (3.6).

CAPÍTULO 4

Neste capítulo vamos supor que estamos sempre nas hipóteses do teorema 2.5 do capítulo 3. Em consequência temos uma distribuição $\mathcal{D}$ em U integrável com a propriedade (P). Assim, numa vizinhança de um ponto $z_o \in U$ as variedades integrais são soluções do sistema

$$(S) \begin{cases} z'(x,a) = f(z)[pof(z)]^{-1} \\ z(p(a),a) = a \end{cases}$$

Vamos demonstrar que para cada ponto $z_o \in U$ existe uma única <u>variedade integral maximal</u> conexa F_{z_o} isto é qualquer outra variedade integral conexa de $\mathcal{D}$ que passe por z_o está contida em F_{z_o}.

§1. UMA NOVA TOPOLOGIA EM U

Vamos definir em U uma nova topologia τ_N através de um sistema completo de vizinhanças em cada ponto $z \in U$ que será denotado por $\mathcal{V}_z$.

Uma vizinhança de z_o é qualquer subconjunto de U que

contenha a imagem de uma vizinhança de $p(z_o)$ em $f(z_o)H$ pela solução do sistema (S), com condição inicial $z(p(z_o),z_o)=z_o$.

1. Para cada z_o, $\mathcal{V}_{z_o}\neq\emptyset$ porque o sistema (S) por hipótese tem solução.
2. Para cada z_o e $V\in\mathcal{V}_{z_o}$ temos que $z_o\in V$ porque $z(p(z_o),z_o)=z_o$.
3. Se $V\in\mathcal{V}_{z_o}$ e $V'\supset V$ então $V'\in\mathcal{V}_{z_o}$.
4. Se $V,W\in\mathcal{V}_{z_o}$ então $V\cap W\in\mathcal{V}_{z_o}$ porque a solução $z(x,z_o)$ é injetora.
5. Provemos que se $V\in\mathcal{V}_{z_o}$ existe $O\in\mathcal{V}_{z_o}$ tal que $O\subset V$ e $O\in\mathcal{V}_z$ para todo $z\in O$.

Antes disso provemos dois lemas.

<u>Lema 1</u> - Seja $z_o\in U$. Para z_1 numa vizinhança conveniente de z_o em M_{z_o} temos que $(F\circ\phi_1)(x)-F(z_1)$ assume valores em $f(z_0)H$ para x numa vizinhança conveniente de $p_1(z_1)$ de $f(z_1)H$ onde

F é a função definida no item 2.2 do capítulo 3,

p_1 é uma projeção sobre $f(z_1)H$,

ϕ_1 é solução do sistema (S) com condição inicial em z_1 e p_1 no segundo membro ao invés de p e abreviamos $\phi_1(x,z_1)=\phi_1(x)$ e $z(x,z_o)=z(x)$.

<u>Demonstração</u>: Pelo teorema 2.2 do capítulo 3 para <u>a</u> numa vizinhança de $V(z_o)$ temos

$$F'(a)f(a)H = f(z_o)H.$$

Seja uma vizinhança $V(p(z_o))$ em $f(z_o)H$ tal que

$$z(V(p(z_o)) \subset V(z_o).$$

Tomemos $z_1 \in z(V(p(z_o)))$. Existe uma vizinhança $W(p_1(z_1))$ conexa em $f(z_1)H$ tal que

$$\phi_1(W(p_1(z_1))) \subset V(z_o).$$

Calculemos

$$[(Fo\phi_1)(x)-F(z_1)]'f(z_1)H = F'(\phi_1(x))\phi_1'(x)f(z_1)H =$$

$$= F'(\phi_1(x))f(\phi_1(x))(p_1 of(\phi_1(x)))^{-1}f(z_1)H =$$

$$= F'(\phi_1(x))f(\phi_1(x))H$$

mas $\phi_1(x) \in V(z_o)$ logo

$$[Fo\phi_1(x)-F(z_1)]'f(z_1)H = f(z_o)H$$

Aplicando-se $q=I-p$ a ambos os membros temos

$$[(qoFo\phi_1)(x)-(qoF)(z_1)]'f(z_1)H = 0.$$

Como $x \in W(p_1(z_1))$, conexa, temos

$$(qoFo\phi_1)(x)-(qoF)(z_1) = \text{constante}.$$

Para $x_1 = p_1(z_1)$ temos

$$(qoFo\phi_1(x_1)-(qoF)(z_1) = 0 \quad \text{e portanto}$$

$$[(Fo\phi_1)(x)-F(z_1)] \in f(z_o)H \quad \forall X \in W(p_1(z_1)).$$

<u>Observação</u>: $Fo\phi_1(p_1(z_1))-F(z_1) = F(z_1)-F(z_1) = 0$.

<u>Lema 2</u> - Seja $z_o \in U$; existe uma vizinhança $V(p(z_o))$ em $f(z_o)H$ tal que para cada $z_1 \in z(V(p(z_o)))$ existe uma vizinhança $W(p_1(z_1))$ em $f(z_1)H$ tal que

$$\phi_1(W(p_1(z_1))) \subset z(V(p(z_o))).$$

<u>Demonstração</u>: Seja $V(z_o)$ uma vizinhança tal que

$$F'(a)f(a)H = f(z_o)H$$

e

$$(GoF)(a) = a, \quad \text{para } a \in V(z_o),$$

que existe pelos teoremas 2.9 e 2.11, capítulo 3.

Como no lema 1 seja $V(p(z_o))$, $z(V(p(z_o))) \subset V(z_o)$, e $z_1 \in z(V(pz_o))$.

Chamando $p(z_1)=x_1$, seja uma vizinhança $V(0)$ em $f(z_o)H$ tal que

$$x_1+V(0) \subset V(p(z_o)) \quad \text{e} \quad F(z_1)+V(0) \subset V(z_o).$$

As aplicações ϕ_1 e $Fo\phi_1$ são contínuas, logo existe uma vizinhança $W=W(p_1(z_1))$ em $f(z_1)H$ tal que

$$\phi_1(W) \subset V(z_o) \quad \text{e} \quad (Fo\phi_1)(W)-F(z_1) \subset V(0).$$

Então

$$Fo\phi_1(W) \subset F(z_1)+V(0).$$

Aplicando G a ambos os membros vem

$$\phi_1(W) \subset G(F(z_1)+V(0)).$$

Calculemos $G(F(z_1)+V(0))$.

$$F(z_1) = p(z_1)+z(p(z_o),z_1)-p(z_o) = x_1+z_o-p(z_o).$$

Para $t \in V(0)$ temos

$$G(F(z_1)+t) = G(x_1+z_o-p(z_o)+t) =$$

$$= z(p(x_1+z_o-p(z_o)+t), x_1+z_o-p(z_o)+t-p(x_1+z_o-p(z_o)+t)-p(z_o)) =$$

$$= z(x_1+t, x_1+z_o-p(z_o)+t-x_1-t+p(z_o)) = z(x_1+t, z_o) = z(x_1+t).$$

Então $G(F(z_1)+V(0)) = z(x_1+V(0), z_o) = Z(x_1+V(0))$

Portanto

$$\phi_1(W) \subset z(x_1+V(0)) \subset z(V(p(z_o))).$$

Agora fica simples expressar a última propriedade 5 de vizinhanças.

Seja $V \in \mathcal{V}_{z_o}$ então pelo lema 2 existe $0=z(V(p(z_o))) \subset V$ tal que para cada $z_1 \in 0$ existe $W=W(p_1(z_1))$ com $\phi_1(W) \subset z(V(p(z_o)))$. Mas $W \in \mathcal{V}_{z_1}$.

Com essas 5 propriedades fica definida uma nova topologia em U que denotaremos por τ_N.

§2. EXISTÊNCIA DE VARIEDADE INTEGRAL MAXIMAL TEOREMA DE FROBENIUS - FORMULAÇÃO GLOBAL

2.1. Teorema. A aplicação idêntica

$$(U, \tau_N) \longrightarrow U$$

é contínua.

Demonstração: De fato seja $V(z_o)$ uma vizinhança de z_o. A solução z do sistema (S) é contínua logo existe uma vizinhança $V(p(z_o))$ de $p(z_o)$ tal que $z(V(p(z_o))) \subset V(z_o)$. Mas $z(V(p(z_o)))$ é uma vizinhança de z_o em (U, τ_N), logo a inclusão acima é contínua.

2.2. Teorema. Seja M uma variedade integral da distribuição $\mathcal{D}$ em U. Então a inclusão

$$M \longrightarrow (U, \tau_N)$$

é contínua.

Demonstração: Antes da demonstração do teorema vamos demonstrar um lema.

Lema 1 - Seja $z_o \in M$ e chamemos de π e ϕ uma carta e sua inversa numa vizinhança de z_o em M, assumindo valores num subespaço vetorial Y de X. Para x numa vizinhança conveniente de $x_o = \pi(z_o)$ em Y temos que

$$(F o \phi)(x) - z_o$$

assume valores em $f(z_o)H$, onde F é a aplicação definida em 2.8 do capítulo 3.

Demonstração: Na demonstração do lema 1 do §1 se substituirmos ϕ_1 por ϕ, z_1 por z_o e $f(z_1)H$ por Y a demonstração segue da mesma forma.

Lema 2 - Seja $z_o \in U$; dada uma vizinhança $V(p(z_o))$ em $f(z_o)H$ existe uma vizinhança $W(\pi(z_o))$ em Y de modo que

$$\phi(W(\pi(z_o))) \subset z(V(p(z_o))).$$

Demonstração: Usando o lema 1 procede-se como no lema 2 do §1 desse capítulo onde troca-se ϕ_1 por ϕ, z_1 por z_o e $f(z_1)H$ por Y.

Demonstração do teorema

Dada uma vizinhança $V(z_o)$ em (U, τ_N) existe uma vizinhança $V(p(z_o))$ em $f(z_o)H$ tal que $z(V(p(z_o))) \subset V(z_o)$. Pelo lema 2 existe $W(\pi(z_o))$ vizinhança de $\pi(z_o)$ em Y tal que

$$\phi(W(\pi(z_o))) \subset z(V(p(z_o))).$$

Mas $\phi(W(\pi(z_o)))$ é vizinhança de z_o em M logo a inclusão

$$M \longrightarrow (U, \tau_N)$$

é contínua.

Corolário: Para $z_o \in U$ seja z solução do sistema (S). A aplica

ção z restrita a uma vizinhança de $p(z_o)$ a valores em (U,τ_N) é contínua.

Demonstração: Evidente do fato que $z(V(p(z_o)))$ é variedade integral que passa por z_o e do teorema anterior.

Como consequência desse corolário existe um sistema fundamental de vizinhanças conexas em (U,τ_N) porque H é espaço localmente convexo. Então as componentes conexas de (U,τ_N) são abertas.

Agora em (U,τ_N) consideremos para cada ponto z_o a componente conexa F_{z_o}.

É fácil provar que F_{z_o} é uma variedade integral da distribuição $\mathcal{D}$ em U. De fato seja F_{z_o} com a topologia induzida de (U,τ_N). Para cada $z\in F_{z_o}$ seja $0=\phi(V,z)$ solução do sistema (S) com condição inicial z, p projeção sobre f(z)H, V é vizinhança de p(z) em f(z)H.

Cada 0 é aberto em F_{z_o}. Como ϕ é contínua numa vizinhança de p(z) a valores em (U,τ_N), ϕ e p restrita a 0 são inversas então $(p/_0, 0)$ forma um atlas de F_{z_o}.

Do teorema anterior se M_{z_o} é uma variedade integral conexa que passa por z_o então M_{z_o} é conexo em (U,τ_N), logo $M_{z_o}\subset F_{z_o}$. Portanto F_{z_o} é de fato variedade integral maximal da distribuição $\mathcal{D}$.

§3. EXISTÊNCIA DE VARIEDADE INTEGRAL MAXIMAL EM ESCALA DE ESPAÇOS DE BANACH

Nos dois parágrafos anteriores baseamos-nos na existên-

cia de solução de um sistema (S) na vizinhánça de cada ponto z_0 de um aberto U. Isso garantia que a distribuição $\mathcal{D}$ dada era integrável. A partir disso demonstramos a existência de variedade integrável maximal em cada ponto de U num espaço localmente convexo separado e sequencialmente completo.

Podemos agora aplicar esse resultado ao contexto de um espaço que é uma escala de espaços de Banach. Assim nas hipóteses do item 3.7 do capítulo 3 a distribuição $\mathcal{D}$ involutiva é integrável e para cada ponto do aberto U existe uma única variedade integral maximal conexa que o contém.

§4. OBSERVAÇÕES

1. Construirmos a variedade integral maximal conexa baseadas na existência de solução do sistema (S) para cada ponto $z_0 \in U$, U aberto onde está definida a distribuição $\mathcal{D}$. Então supusemos a existência de uma família de projeções p_z, $z \in U$. O teorema 2.2 desse capítulo mostra que a existência de variedade integral maximal conexa independe da família de projeções usada, isto é, se $p_z, z \in U$ e $p'_z, z \in U$ são duas famílias de projeções nas condições do teorema 2.5 do capítulo 3 então elas produzem a mesma variedade integral maximal conexa.

2. No caso de X ser um espaço de Banach complexo qualquer família de projeções satisfaz as hipóteses do teorema 2.5 do capítulo 3 como veremos mais adiante.

3. O teorema 2.2 mostra que toda variedade integral conexa

M_{z_o} está contida na variedade integral maximal conexa F_{z_o} mas não conseguimos demonstrar que M_{z_o} é um aberto em F_{z_o}. Devido a observação 1 se M_{z_o} é obtida à partir da solução de um sistema como no teorema 2.5 do capítulo 3 então M_{z_o} é um aberto em F_{z_o}.

CAPÍTULO 5

§1. APLICAÇÃO DO TEOREMA DE FROBENIUS A GRUPOS DE LIE

Teorema

Seja X um ELCHSc e $G \subset X$ um grupo de Lie. Seja H uma subálgebra de Lie de X com suplementar topológico. Em G consideremos a distribuição $\mathcal{D}$ dada por L(z)H, onde L é a transformação infinitesimal do grupo G. Suponhamos que para cada $z_o \in G$ exista uma projeção p sobre $L(z_o)H$ tal que

$$poL(z):H \longrightarrow L(z_o)H$$

seja inversível para todo $z \in W(z_o)$ e o sistema

$$(S) \begin{cases} \phi'(x,a)h = L(z)(poL(z))^{-1}h & h \in L(z_o)H \\ \phi(p(a),a) = a \end{cases}$$

tem solução holomorfa $\phi(x,a)$

$$\phi(x,a):V(p(z_o))\times V(z_o) \longrightarrow W(z_o)$$

onde $V(p(z_o))$ é vizinhança em $L(z_o)H$.

Então para cada ponto $z \in G$ passa uma única variedade integral maximal conexa, além disso, aquela que passa pela unidade e do grupo é um sub-grupo de Lie de G.

Demonstração: Os resultados do capítulo anterior garantem a existência de variedade integral maximal conexa passando por cada ponto $z \in G$. Resta-nos demonstrar que aquela que passa pela unidade do grupo G é um sub-grupo de Lie de G.

Para isso provemos dois lemas.

Lema 1 - Seja G com a topologia τ_N definida no capítulo 4 através da solução do sistema (S). Então fixado $a \in G$ a translação,

$$(G, \tau_N) \longrightarrow (G, \tau_N)$$
$$z \longrightarrow \emptyset(a,z) = az,$$

onde $\emptyset$ é a lei do grupo G, é contínua.

Demonstração: Antes observemos que se N é uma variedade integral da distribuição $\mathcal{D}$ então aN, $a \in G$, é também uma variedade integral de $\mathcal{D}$. De fato se $z(x)$ é uma parametrização de pontos de N, $x \in Y$, Y espaço dos parâmetros , seja $\emptyset(a,z(x))$.

$$[\emptyset(a,z(x))]'_x Y = \emptyset'_2(a,z(x)).z'(x)Y$$

Das equações de Lie do grupo G, 2.6 capítulo 1, e do fato de N ser variedade integral temos

$$[\emptyset(a,z(x))]'_x Y = L(\emptyset(a,z(x)))L(z(x))L(z(x))H$$

$$[\emptyset(a,z(x))]'_x Y = L(\emptyset(a,z(x)))H.$$

Logo o espaço tangente em az é $L(\emptyset(a,z))H$ e portanto aN é variedade integral de $\mathcal{D}$.

Seja agora um ponto $z_o \in G$ e W uma vizinhança de az_o em (G,τ_N). Do teorema 2.2, capítulo 4 sabemos que as inclusões

$$M \longrightarrow (G,\tau_N)$$

são contínuas, onde M é uma variedade integral de $\mathcal{D}$ em G. Em particular no caso de $M=aN$.

Logo existe uma vizinhança $V(p(z_o))$ em $L(z_o)H$ tal que

$$\emptyset(a,z(V(p(z_o)),z_o)) \subset W.$$

Mas $z(V(p(z_o)),z_o)$ é uma vizinhança de z_o em (G,τ_N) logo a translação

$$Z \longrightarrow az$$

é contínua.

<u>Lema 2</u> - A variedade integral maximal conexa M_e que passa pela unidade do grupo $\underline{e}$ é um grupo considerado com a operação induzida de G.

<u>Demonstração</u>: Sejam $x,y \in M_e$. Do lema 1 xM_e é uma variedade integral conexa que passa por x. Mas como $x \in M_e$ então $xM_e \subset M_e$ e portanto $xy \in M_e$. Analogamente $x^{-1}M_e$ contém $\underline{e}$ logo $x^{-1}M_e \subset M_e$ portanto $x^{-1} \in M_e$.

Demonstração do Teorema

Suponhamos, sem perda de generalidade, $e=0$ então se p é uma projeção sobre $L(e)H=H$ temos $p(e)=e$. Chamando $\Omega=p^{-1}(V(p(e)))$ vamos definir duas funções F e G, uma inversa da outra

$$F(z) = z-\phi(p(z))-p(z)$$
$$G(w) = \phi(p(w))+w-p(w)$$

onde $\phi(x)=\phi(x,0)$.

$$FoG=I_{\Omega} \quad e \quad GoF=I_{\Omega}$$

Da continuidade de F e G e da lei de grupo $\emptyset$ do grupo G existem U,V,W, $W=\Omega\cap G$ onde $(\emptyset_1,U,V,W)$ é um grupo local ([6]) em volta de 0 e

$$\emptyset_1(z,w) = F[\emptyset(G(z),G(w))]$$

Dessa forma temos,

$$L_1(z)h = (\emptyset_1)'_w(z,0)h = F'(G(z))\emptyset'_y(G(z),0).G'(0).h ,$$

mas para $z\in V(p(e))$ temos $G(z)=\phi(z)$.

Para $h\in H$

$$G'(o)h = \phi'(o)h = L(\phi(o))(poL(\phi(o)))^{-1}h = h.$$

Então

$$L(z)h = F'(G(z))L(G(z))h.$$

Como $FoG(z)=z$ para $z\in\Omega$

$$F'(G(z))G'(z)h=h, \quad h\in X.$$

Assim

$$F'(G(z))G'(z)H = H.$$

Para $z\in V(p(e))$ temos $G(z)=\phi(z)$ e $G'(z)=\phi'(z)$ então

$$\phi'(z)H = L(\phi(z))H$$
$$G'(z)H = L(G(z))H.$$

Portanto

$$F'(G(z))L(G(z)H = H.$$

Finalmente temos

$$L_1(z)H = H \quad \text{e então}$$
$$L_1(z)H = H \quad \text{para } z\in V(p(e))$$

Assim para z e w numa vizinhança de e em H temos

$$L_1(z)L_1(w)H\subset H, \quad (A)$$

Para z e w numa vizinhança de e em H e $h\in H$ sejam os sistemas

$$(S_1)\begin{cases}(\emptyset_1)'_w(z,w)h = L_1(\emptyset_1)L_1(w)h\\ \emptyset_1(z,e) = z\end{cases}$$

$$(S_2)\begin{cases}(\psi_1)'_w(z,w)h = L_1(\psi_1)L_1(w)h\\ \psi_1(z,z) = e\end{cases}$$

As soluções do sistema (S_1) e (S_2) são

$$zw = \emptyset_1(z,w) = \sum_{m\geq 0} [\delta^{(w-e, L_1 L_1(w-e))}\pi]^m(e,z), \qquad [10],$$

onde π é a projeção $\begin{array}{c} X\times X \longrightarrow X \\ (z,w) \longrightarrow W \end{array}$ e

$$[\delta^{(k,fk)}g](x,y) = g'_x(x,y)k+g'_y(x,y)(f(x,y)k),$$

e

$$z^{-1} = \psi_1(z,e) = \sum_{m\geq 0} [\delta^{(e-z, L_1 L_1(e-z))}\pi]^m(z,e), \qquad [10],$$

Devido a (A) cada parcela da série está em H e como H é fechado então a série está em H.

Temos então um grupo local em H

$$G_1 = (\emptyset_1, U_1, V_1, W_1)$$

e a aplicação G é um homomorfismo local de G_1 em G. Seja o grupo local em G, [11],

$$(\emptyset, G(U_1), G(V_1), G(W_1))$$

e considerando o grupo topológico que passa por $\underline{e}$,

$$N = \bigcup_{n\geq 1} [G(U_1)]^n = \bigcup_{n\geq 1} \bigcup_{a\in[G(U_1)]^{n-1}} aG(U_1) \quad ;$$

U_1 pode ser tomado conexo então $G(U_1)$ é conexo e portanto N é co-

nexo.

Como $G(U_1)$ é variedade integral conexa que passa por e então N é variedade integral conexa que passa por e. Então $N \subset F_e$.

Provemos que $N = F_e$.

N é aberto em F_e porque $G(U_1) = \phi(V(p(e)))$ é aberto em (G, τ_N)

também $\bigcup_{a \in F_e \setminus N} aN$ é aberto, portanto N é fechado em F_e.

Como F_e é conexo $N = F_e$.

Logo F_e é um grupo topológico.

Provemos que as operações

$$\begin{aligned} F_e \times F_e &\longrightarrow F_e \\ (z,w) &\longrightarrow zw \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_e &\longrightarrow F_e \\ z &\longrightarrow z^{-1} \end{aligned}$$

são analíticas.

De fato seja $z_o \in F_e$, $w_o \in F_e$ e $z(t)$, $w(\tau)$ parametrizações tal que $z(t_o) = z_o$ e $w(\tau_o) = w_o$. A aplicação

$$(t,\tau) \longrightarrow p_o(\emptyset(z(t), w(t)))$$

é analítica, onde p_o é projeção sobre $L(z_o w_o)H$. Logo a aplicação

$$\begin{aligned} F_e \times F_e &\longrightarrow F_e \\ (z,w) &\longrightarrow zw \end{aligned}$$

é analítica.

Analogamente a aplicação

$$\begin{aligned} F_e &\longrightarrow F_e \\ z &\longrightarrow z^{-1} \end{aligned}$$

é analítica.

§2. A INTEGRABILIDADE DAS DISTRIBUIÇÕES INVOLUTIVAS NO CONTEXTO DOS ESPAÇOS DE BANACH

2.1. Seja X um espaço de Banach complexo e $\mathcal{D}$ uma distribuição involutiva num aberto U, $U \subset X$. Vejamos que $\mathcal{D}$ é integrável e portanto por cada ponto de U passa uma única variedade integral maximal conexa.

De fato seja z_o um ponto de U e p uma projeção sobre $f(z_o)H$. Denotemos por $f(z_o)^{-1}$ a inversa da aplicação linear $f(z_o)$

$$\begin{aligned} f(z_o) : H &\longrightarrow f(z_o)H \\ h &\longrightarrow f(z_o)h \end{aligned}$$

Com essas notações

$$f(z_o)^{-1} o p o f(z_o) = 1_H = \text{identidade em } H$$

A aplicação g

$$\begin{aligned} g : U &\longrightarrow L(H) \\ z &\longrightarrow g(z) = f(z_o)^{-1} o p o f(f(z) \end{aligned}$$

é holomorfa porque a aplicação f

$$\begin{aligned} f: U &\longrightarrow L(H,X) \\ z &\longrightarrow f(z) \end{aligned}$$

é holomorfa e a aplicação $f(z_o)^{-1}op$ é linear e contínua. Mas $g(z_o)=1_H$ e portanto é inversível, logo pertence ao grupo de Lie G(H) das aplicações lineares contínuas e inversíveis de H. O conjunto G(H) é um aberto em $L(H)$ logo existe uma vizinhança $V(z_o)$ onde $g(z)=f(z_o)^{-1}opof(z)$ é inversível logo pof(z) é inversível em $V(z_o)$.

A aplicação $[pof(z)]^{-1}$ está em G(H) e também a aplicação

$$\begin{aligned} V(z_o) &\longrightarrow H \\ z &\longrightarrow [pof(z)]^{-1}h \end{aligned}$$

é holomorfa porque G(H) é um Grupo de Lie.

Além disso a aplicação

$$\begin{aligned} V(z_o) &\longrightarrow L(f(z_o)H,X) \\ z &\longrightarrow f(z)o[pof(z)]^{-1} \end{aligned}$$

é holomorfa e portanto limitada numa vizinhança de z_o.

Pelo teorema 3.7, de Frobenius, $\mathcal{D}$ é uma distribuição integrável e também existe uma única variedade integral maximal conexa que passa por cada ponto de U.

Esse raciocínio independe da projeção p tomada sobre

$f(z_0)H$ logo qualquer família de projeção p_z, $z \in U$ fornece as mesmas variedades integrais maximais conexas.

2.2. Seja $G \subset X$, G grupo de Lie de um espaço de Banach X, $H \subset X$, H uma sub-álgebra de Lie de X com suplementar topológico. Seja $\mathcal{D}$ a distribuição em G dada por $L(z)H$ onde L é a transformação infinitesimal do grupo G. Devido ao item 2.1 as hipóteses do teorema do §1 desse capítulo estão satisfeitas. Então a variedade integral maximal conexa que passa pela unidade do grupo é um sub-grupo de Lie de G.

§3. A INTEGRABILIDADE DE UMA DISTRIBUIÇÃO DADA POR UM SISTEMA DE CAUCHY-KOVALEWSKY LINEAR

3.1. Seja o sistema linear

$$(S) \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial t_1} = A \dfrac{\partial z}{\partial t_2} + Bz \\ z(0,t_2) = \phi(t_2) \end{cases}$$

onde $A(t_1,t_2)$, $B(t_1,t_2)$ são matrizes quadradas, de funções holomorfas, de ordem 2, limitadas por M para $|t_1|<\eta$ e $|t_2|<1$ e $\phi(t_2)$ uma aplicação holomorfa numa vizinhança de o a valores em C^2.

Chamemos de X_s, o espaço vetorial complexo das aplicações holomorfas u limitadas na bola $B_s(o)$ de C a valores em C^2. Definimos a norma

$$\|u\|_s = \sup_{|t|<s} |u(t)|.$$

Com essa norma X_s é um espaço de Banach complexo. Temos então a escala $X = \bigcup_{0<s\leq 1} X_s$.

Para cada $u \in X_s$ seja a aplicação

$$F(t_1,u)(t_2) = A(t_1,t_2)u'(t_2)+B(t_1,t_2)u(t_2).$$

Então para $|t_1|<\eta$ e $|t_2|<s'<s$ e da desigualdade de Cauchy

$$|u'(t_2)| \leq \frac{\|u\|_s}{s-s'}$$

temos

$$|F(t_1,u)(t_2)| \leq \frac{M}{s-s'} \|u\|_s + M\|u\|_s \leq \frac{2M}{s-s'} \|u\|_s$$

e portanto

(A) $$\|F(t_1,u)\|_{s'} \leq \frac{2M}{s-s'} \|u\|_s \quad \text{para } |t_1|<\eta.$$

Formemos o sistema

$$(S') \begin{cases} \dfrac{du}{dt_1} = F(t_1,u) \\ u(0) = \phi \end{cases}$$

A aplicação ϕ pertence a algum espaço X_{s_o}, $0<x_o\leq 1$. Seja $R>0$ tal que $\|\phi\|_{s_o} < R$, $\|u-\phi\|_s < R$ e $|t_1|<\eta$, temos então que

(B) $$\|u\|_s < R + \|\phi\|_s < R + \|\phi\|_{s_o} < 2R \quad \text{com } 0<s\leq s_o.$$

Substituindo (B) em (A) vem

$$\| F(t_1,u)\|_{s'} \leq \frac{4MR}{s-s'}.$$

Pelo teorema de Ovyannicov, §1 capítulo 2, existe uma única solução que depende de ϕ, $u_\phi(t_1)$ para $|t_1|<\Delta(s_o-s)$ tomando valores em X_s, onde $\Delta = \min(\frac{n}{2}, \frac{R}{32e^2 4MR})$ e tal que

$$\| u_\phi(t_1)-\phi \|_s < R.$$

Então para $\|\phi\|_{s_o} < R$ temos

$$\|u_\phi(t_1)\|_s \leq R+ \|\phi\|_s < 2R.$$

O sistema sendo linear a solução depende linearmente da condição inicial. Então

$$\|u_\phi(t_1)\|_s \leq 2\,\|\phi\|_{s_o} \quad \text{para todo } \phi\in X_{s_o}.$$

Mas $|t_1|<\Delta(s_o-s)$ e $|t_2|<s$ equivale a $\frac{|t_1|}{\Delta}+|t_2|<s_o$ e tomando-se sem perda de generalidade $\Delta\leq 1$ temos $|t_1|+|t_2|<s_o$ ou ainda $|t|<s_o$, $t=(t_1,t_2)$.

Concluindo a função $z(t_1,t_2)=u_\phi(t_1)(t_2)$ é solução do sistema (S) e usando a notação do item 2.2, capítulo 1,

$$\| z\|_s^1 = \sup_{|t|<s} |z(t_1,t_2)|$$

temos que

$$|z(t_1,t_2)| = |u_\phi(t_1)(t_2)| \leq \| u_\phi(t_1)\|_s \leq 2\,\|\phi\|_{s_o}$$

e portanto

(C) $$\| z \|^1_{s_o} \leq 2 \| \phi \|_{s_o} ,$$

como s_o é qualquer, a aplicação que associa condição inicial ϕ à solução do sistema (S) é um operador linear e contínuo.

3.2. Sejam agora $X=gh(2,C)$ e $U=Gh(2,C)$ e a equação (E) do sistema (S),

(E) $$\frac{\partial z}{\partial t_1} = Az+B \frac{\partial z}{\partial t_2}.$$

Chamemos de H o subespaço vetorial de X das soluções de (E) e suponhamos que H é uma sub-álgebra de Lie de X.

O conjunto H é um fechado em X porque operador

$$\frac{\partial}{\partial t_1} - AI - B\frac{\partial}{\partial t_2}$$

é linear e contínuo.

Existe uma correspondência biunívoca entre o espaço H e o subespaço H_1 dos germes ϕ de $gh(2,C)$, tal que ϕ só depende da segunda variável t_2. De fato a equação (E) tem uma única solução $z(t_1,t_2)$ tal que

$$\overline{z(0,t_2)} = \phi$$

A aplicação T que associa condição inicial à solução de (E) é, como foi visto em 3.1, linear e contínua

$$T:H_1 \longrightarrow gh(2,C)$$
$$\phi \longrightarrow z_\phi$$

Seja $S=\{z\in gh(2,C) \mid z(0,t_2)=0\}$.

Os espaços S e H_1 são suplementares topológicos porque

$$\| z(0,t_2) \|_s \leq \| z(t_1,t_2) \|_s$$

isto é a projeção de X sobre H_1 segundo S é contínua.

Existe um isomorfismo de espaços vetoriais topológicos entre H e H_1 porque,

(a) H sendo fechado é um espaço de Silva, 2.5 capítulo 1, com a topologia induzida de X, então a aplicação

$$T:H_1 \longrightarrow H$$

é contínua,

(b) a projeção sobre H_1, restrita a H, segundo S é também contínua e

$$Top_H = 1_H \quad e \quad p_H o T = 1_H$$

Então H tem suplementar topológico.

Vamos agora definir em U a distribuição $\mathcal{D}$ dada por J(z)H onde J(z) é a matriz jacobiana de z.

Fixado $z_o \in U$ seja a projeção p sobre $J(z_o)H$

$$p(z) = J(z_o)T\left[(J(z_o)^{-1}z)(0,t_2)\right].$$

De fato p é uma projeção porque é linear e

$$p(p(z)) = J(z_o)T\left\{\left[J(z_o)^{-1}J(z_o)T(J(z_o)^{-1}z)(0,t_2)\right](0,t_2)\right\} =$$

$$= J(z_o)T\left\{T\left[(J(z_o)^{-1}z)(0,t_2)\right](0,t_2)\right\} =$$

$$= J(z_o)T\left\{(J(z_o)^{-1}z)(0,t_2)\right\} = p(z) \ .$$

Vejamos que $poJ(z)$, restrito a H, é inversível para todo z numa vizinhança conveniente de z_o,

$$poJ(z): H \longrightarrow J(z_o)H \ .$$

Primeiro vejamos que $poJ(z)$ é injetora.

De fato se $poJ(z)k = 0$, $k \in H$, então

$$J(z_o)T\left[(J(z_o)^{-1}J(z)k)(0,t_2)\right] = 0$$

então

$$T\left[(J(z_o)^{-1}J(z)k)(0,t_2)\right] = 0$$

e da unicidade de solução de (S) temos

$$(J(z_o)^{-1}J(z)k)(0,t_2) = 0 \ .$$

Então $(J(z)k)(0,t_2) = 0$ o que acarreta

$$J(z)(0,t_2)k(0,t_2) = 0$$

e portanto $k(0,t_2) = 0$. Como $k \in H$ temos que $k = 0$.

Agora dado $h \in J(z_o)H$ procuremos $k \in H$ tal que $poJ(z)k = h$.

Assim

$$p(J(z)k) = J(z_o)T\left[J(z_o)^{-1}(J(z)k)(0,t_2)\right] = h$$

$$T\left[(J(z_o)^{-1}(J(z)k)(0,t_2)\right] = J(z_o)^{-1}h$$

$$J(z_o)^{-1}(J(z)k)(0,t_2) = (J(z_o)^{-1}h)(0,t_2)$$

$$(J(z)k)(0,t_2) = h(0,t_2)$$

$$k(0,t_2) = \left[J(z)^{-1}h\right](0,t_2)$$

(D) $$k = T\left[J(z)^{-1}h)(0,t_2)\right]$$

Vejamos em qual vizinhança de z_o vamos tomar z.

$$\sup_{|t|<s} |J(z)^{-1}(t)| = \sup_{|t|<s} \left|\left[J(z_o)-J(z_o-z)\right]^{-1}(t)\right| =$$

$$= \sup_{|t|<s} \left|\left[J(z_o)(I-J(z_o)^{-1}J(z_o-z))\right]^{-1}(t)\right| =$$

$$= \sup_{|t|<s} \left|\left[(I-J(z_o)^{-1}J(z_o-z))^{-1}J(z_o)^{-1}\right](t)\right| \leq \frac{1}{1-r} \sup_{|t|<s} |J(z_o)^{-1}(t)|$$

isso para $\sup_{|t|<s} |J(z_o)^{-1}J(z_o-z)(t)| < r$, $0<r<1$.

O germe z_o pertence a algum X_{s_o}. Tomando-se s, tal que $0<s<s_o<1$ temos para

$$\| z-z_o \|_s^2 = \sup_{|t|<s} |J(z_o-z)(t)| < \frac{r}{\sup_{|t|<s_o} |J(z_o)^{-1}(t)|}$$

que

$$\sup_{|t|<s} |J(z_o-z)(t)| . \sup_{|t|<s} |J(z_o)^{-1}(t)| < r$$

e então

$$\sup_{|t|<s} |J(z_o-z)(t)| . \sup_{|t|<s} |J(z_o)^{-1}(t)| < r .$$

Concluindo temos para $\| z-z_o \|_s^2 < \dfrac{r}{\sup_{|t|<s_o} |J(z_o)^{-1}(t)|}$

que

(F) $$\sup_{|t|<s} |J(z)^{-1}(t)| < \frac{1}{1-r} \sup_{|t|<s_o} |J(z_o)^{-1}(t)|$$

$0 < r < 1$.

Então $poJ(z)$ é inversível para

$$z \in \bigcup_{o<s\leq 1} B_s(z_o,R) \quad \text{com} \quad R = \frac{r}{\sup\limits_{|t|<s_o} |J(z_o)^{-1}(t)|} .$$

Resumindo temos

(1) a distribuição dada por $J(z)H$ é involutiva, de acordo com o Corolário 1 do item 3.8, capítulo 3;

(2) $poJ(z)$ é inversível para z numa vizinhança de z_o, então o segundo membro da equação

$$z'(x,a) = J(z)(poJ(z))^{-1}$$

satisfaz à condição de integrabilidade devido ao teorema 3.6, capítulo 3.

Vejamos que o segundo membro dessa equação satisfaz a uma majoração como no teorema de Frobenius.

Da expressão (D) temos

$$(poJ(z))^{-1}h = T\left[(J(z)^{-1}h)(0,t_2)\right]$$

então chamaremos de $g(z)$ a

$$g(z)h = J(z)(poJ(z))^{-1}h = J(z)T\left[(J(z)^{-1}h)(0,t_2)\right]$$

com $h \in J(z_o)H$.

Da desigualdade (a) do item 2.4, capítulo 1, temos

$$\| g(z)h\|^2_{s'} = \| J(z)T\left[(J(z)^{-1}h)(0,t_2)\right] \|^2_{s'} \leq$$

$$\leq \frac{2}{s-s'} \|J(z)T\left[(J(z)^{-1}h)(0,t_2)\right]\|^1_s =$$

$$= \frac{2}{s-s'} \sup_{|t|<s} |J(z)(t)| \cdot \|T\left[(J(z)^{-1}h)(0,t_2)\right]\|_s^1 =$$

$$= \frac{2}{s-s'} \|z\|_s^2 \cdot \|T\left[(J(z)^{-1}h)(0,t_2)\right]\|_s^1$$

Aplicando a desigualdade (C) anterior temos

$$\|g(z)h\|_{s'}^2 \leq \frac{4}{s-s'} \|z\|_s^2 \cdot \|(J(z)^{-1}h)(0,t_2)\|_s^1$$

para $0<s'<s\leq 1$.

Para

$$\|z-z_o\|_s^2 < \frac{r}{\sup\limits_{|t|<s_o} |J(z_o)^{-1}(t)|}$$

temos

$$\|z\|_s^2 < \|z\|_{s_o}^2 + \frac{r}{\sup\limits_{|t|<s_o} |J(z_o)^{-1}(t)|} = C_1 .$$

Então para $\|z\|_s^2 < C_1$ temos

$$\|g(z)h\|_{s'}^2 < \frac{4}{s-s'} C_1 \|J(z)^{-1}\|_s^1 \|h(0,t_2)\|_s^1 .$$

Ainda para

$$\|z-z_o\|_s^2 < \frac{r}{\sup\limits_{|t|<s_o} |J(z_o)^{-1}(t)|}$$

temos pela desigualdade (F) anterior

$$\|g(z)h\|_{s'}^2 < \frac{4}{s-s'} C_1 \frac{\sup\limits_{|t|<s_o} |J(z_o)^{-1}(t)| \cdot \|h(0,t_2)\|_s^1}{1-r} .$$

Chamando

$$\frac{4\, C_1 \sup\limits_{|t|<s_o} |J(z_o)^{-1}(t)|}{1-r} = C$$

e usando a desigualdade (b) do item 2.4, capítulo 1 temos

$$\| g(z) \|_s^2 \leq C \frac{s}{s-s'} \| h \|_s^2 \quad ,$$

isso para $0<s'<s\leq 1$

$$z \in \bigcup_{0<s\leq 1} B_s(z_o,R) \quad e \quad R = \frac{r}{\sup\limits_{|t|<s_o} |J(z_o)^{-1}(t)|}$$

Concluindo podemos dizer então que a distribuição $\mathcal{D}$ definida é integrável e para cada ponto $z \in U$ passa uma única variedade integral maximal conexa.

Além disso a variedade integral maximal conexa que passa pela unidade de $Gh(2,C)$ é um sub-grupo de Lie de $gh(2,C)$.

REFERÊNCIAS

[1] Hamilton Luiz Guidorizzi - Operadores Analíticos Lineares - Tese de Mestrado - IME-USP - 1971.

[2] A. Grothendieck - Espaces Vectoriels Topologiques - Publicação da Sociedade de Matemática de São Paulo - 1964.

[3] J. Mujica - Gérmenes Holomorfos e funciones holomorfas em espacios de Fréchet - Publicaciones del Departamento de Teoria de Funciones - Universidad de Santiago de Compostela.

[4] J.F. Treves - An abstract non linear Cauchy-Kovalewsky theorem - Trans. A.M.S. Vol. 150, 1970, pp. 77-92.

[5] D. Pisanelli - Solutions of a Non-linear Abstract Cauchy-Kovalevska System as a Local Banach Analytic Manifold-Proceedings of the Brazilian math. soc. symp. of Funcional Analysis - 1974 - ed. D.G. Figueiredo M. Dekker, Inc. - New York - 1976.

[6] D. Pisanelli - Grupos Analíticos finitos de transformações-Publicação da Sociedade Brasileira de Matemática - Escola de Análise - 1977.

[7] S. Lang - Differential Manifolds - Addison - Wesley D.C. - 1972.

[8] E. Hille - Funcional Analysis and Semi-groups - American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. XXXI - 1948.

[9] D. Pisanelli - Sull' integrazione di um sistema di differenziali totali in uno spazio di Banach. - Academia Nationa

le dei Lincei. Rendiconti della Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali Serie VII, Vol. XLVI, fase 6 - Giugno 1969.

[10] D. Pisanelli - Linear Conected subgroup of a Lie group in a locally convex space. Anais da Academia Brasileira de Ciências (1979), 51(4).

[11] D. Pisanelli - The connected finite dimentional Lie sub-groups of a Group Gh(n,C) - Publicação do 3º Seminário Brasileiro de Análise - 1976.

[12] D. Pisanelli - The proof of Frobenius theorem in a Banach scale. - Em publicação nas atas do "Simpósio de Análise Funcional, Holomorfa e Teoria da aproximação." - Rio de Janeiro, UFRJ - 1972.

[13] D. Pisanelli - The second Lie theorem in the group Gh(n,C) - Advances in Holomorphy. North Holland Mathematics Studies. Notas de Matemática. Editor Leopoldo Nachbin, nº 34.

[14] L.Fantappié - Teoria de los funcionales analíticos y sus aplicaciones - Consejo Superior de Investigaciones Científicas - Barcelona - 1943.

[15] O. Catunda - Sobre os sistemas de equações de variações totais em mais de um funcional incógnito - Anais de Academia Brasileira de Ciências - tomo XIV - 1942 - nº 2.

[16] H. Omori - Infinite Dimensional Lie transformation groups - Lecture Notes in Matematics - Vol. 427 - 1974 - Springer-Verlag.

[17] D. Pisanelli - An example of a infinite Lie group - Proc. Am. Math. Soc. 62 (1976) nº 1 - 156-160 (1977).

[18] J. A. Leslie - Some Frobenius theorems in global Analysis - J. Differential Geometry - 2(1968) 279-297.

[19] J. A. Leslie - On a differential structure for the group of diffem ou phisms, Topology - Topology - 1967, 6 263-271.

[20] Neculai Papaghiuc - Un théoreme d'existence pour les équations diffe'rentielles ordinaires dans les espaces localment convexes. - Analele stiintifice ale Universitãtii - Al. I. Cuza din Yasi, Tomul XXI, s. I a, 1975.

[21] Neculai Papaghiuc - Teorema lui Frobenius in spatiile local-convexe - Studii Si Cerc. Mat., Tom. 29, nº 6, p. 669-677, Bucoresti - 1977.

- o -