ESPAÇOS INVARIANTES POR REARRANJO
E TEOREMAS DE INTERPOLAÇÃO

MARINA PIZZOTTI

DISSERTAÇÃO APRESENTADA AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM
MATEMÁTICA

ORIENTADORA:

Profa.Dra. IRACEMA MARTIN BUND

Durante a elaboração deste trabalho, a autora recebeu apoio financeiro da FAPESP e da FINEP.

SÃO PAULO, Outubro de 1981

Ã Gabriela e ao Marcelo,
pelo colorido especial
que têm dado à minha vida.

ÍNDICE

Página

INTRODUÇÃO i

NOTAÇÕES iv

CONVENÇÕES vi

CAPÍTULO I

§ 1. Função distribuição 1

§ 2. Funções equimensuráveis 7

§ 3. Reordenadas não-crescentes. . . . 18

§ 4. Função média 40

CAPÍTULO II

§ 5. Funções de Young generalizadas e espaços de Birnbaum-Orlicz . . . 49

§ 6. Algumas noções sobre operadores . 65

§ 7. Uma generalização do Teorema de Marcinkiewicz 72

CAPÍTULO III

§ 8. Espaços invariantes por rearranjo 109

§ 9. Alguns tipos especiais de espaços r.i. 153

CAPÍTULO IV

§ 10. As classes $\Lambda(E)$, $M(E)$, $\Lambda(\phi_E, A)$ Ope-

Página

radores de tipo fraco (E,F) 168

§ 11. Um teorema de interpolação para espaços invariantes por rearranjo 179

APÊNDICE 197

BIBLIOGRAFIA 200

INTRODUÇÃO

Este trabalho teve início com a leitura de um artigo de Alberto Torchinsky ([12]) publicado em 1976, onde são estudados teoremas de interpolação para espaços de Orlicz e para espaços invariantes por rearranjo.

A teoria dos espaços invariantes por rearranjo dos quais os espaços de Orlicz L_A e de Lorentz $L_{p,q}$ são exemplos está diretamente relacionada com a teoria de interpolação mas é, por si só, interessante. Isto nos levou a dedicar boa parte deste trabalho ao estudo desses espaços. Por esta razão, esta dissertação tem duas partes de certa forma independentes : uma em que estudamos os espaços invariantes por rearranjo, constituída basicamente pelo Capítulo III e outra sobre interpolação de operadores cuja parte central são os teoremas dos parágrafos 7 e 11.

No Capítulo III, tratamos dos espaços invariantes por rearranjo num contexto um pouco mais geral do que o encontrado em [11], [12] e [13] . Nesses trabalhos são considerados apenas espaços invariantes por rearranjo sobre $]0,\infty[$ com a medida de Lebesgue; o que fizemos foi desenvolver o assunto para espaços de medida não-atômica, apresentando demonstrações

de muitos resultados lá citados sem prova.

No § 7, estudamos uma generalização para espaços L_A, do teorema de Marcinkiewicz, que foi publicado sem demonstração em 1939 ([6]). Este teorema, originalmente formulado para espaços L_p, foi também generalizado para espaços de Lorentz mas trataremos aqui, apenas da versão para os L_A, devida a Riordan, com a demonstração de Torchinsky. Não apresentamos outros teoremas encontrados em [12] pois certos pontos das demonstrações não estão claros para nós.

NO § 11, estudamos um dos teoremas de interpolação para espaços invariantes por rearranjo, devido a Torchinsky e as classes $\Lambda(\phi_E,A)$ que surgem como intermediárias são descritas no § 10. Nas demonstrações do § 7 e do § 11, seguimos de perto o artigo de Torchinsky, esclarecendo alguns pontos que julgamos obscuros.

No Capítulo I são apresentados conceitos básicos e resultados simples que serão utilizados tanto na parte relativa aos espaços invariantes por rearranjo quanto na parte de interpolação. O § 5 também pode ser considerado como material preliminar. Nesse parágrafo estudamos as funções de Young generalizadas e os espaços de Orlicz, fornecendo apenas o mínimo necessário para a leitura deste trabalho.

Os meus sinceros agradecimentos:

- à professora Iracema Martin Bund, pela maneira carinhosa e dedicada com que me orientou e pelo apoio que me deu nas várias fases difíceis pelas quais passei durante a elaboração deste trabalho;

- às colegas Carmem Silvia Cardassi e Martha Salerno Monteiro, pelo interesse e pelas valiosas sugestões;

- à minha família e em especial aos meus pais, pelo incentivo e pela paciência;

- aos meus amigos, sem os quais tudo seria muito mais difícil;

- à Srta. Regina Helena da Silva, pelo difícil trabalho de datilografia que tão bem soube realizar.

Marina Pizzotti

NOTAÇÕES

$(X,\mathcal{M},\mu)$, $(Y,\mathcal{N},\mu)$	espaços de medida (positiva)
$\mathcal{F}^r(X,\mathcal{M},\mu)$	conjunto das funções μ-mensuráveis definidas em X com valores em $\overline{\mathbb{R}}$.
$\mathcal{F}^c(X,\mathcal{M},\mu)$	conjunto das funções μ-mensuráveis definidas em X com valores em $\mathbb{C}$.
$\mathcal{F}^k(X,\mathcal{M},\mu)$	será utilizado para indicar $\mathcal{F}^r(X,\mathcal{M},\mu)$ ou $\mathcal{F}^c(X,\mathcal{M},\mu)$.
$\mathcal{F}^+(X,\mathcal{M},\mu)$	conjunto das funções μ-mensuráveis definidas em X com valores em $\|0,\infty\|$.
$\dot{f}$ ($f \in \mathcal{F}^k(X,\mathcal{M},\mu)$ finita)	$\{g \in \mathcal{F}^k(X, ,\mu): g$ é finita e $g = f$ μ-q.s$\}$
$F^r(X,\mathcal{M},\mu)$	$\{\dot{f}: f \in \mathcal{F}^r(X,\mathcal{M},\mu)\}$
$F^c(X,\mathcal{M},\mu)$	$\{\dot{f}: f \in \mathcal{F}^c(X,\mathcal{M},\mu)\}$
$F^k(X,\mathcal{M},\mu)$	$\{\dot{f}: f \in \mathcal{F}^k(X,\mathcal{M},\mu)\}$

m	medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$ ou restrição desta.
$\mathcal{A}$	σ-álgebra dos subconjuntos Lebesgue - mensuráveis de $\mathbb{R}$.
$\mathcal{M}_S$	será utilizado no caso em que $\mathcal{M}$ é uma σ-álgebra e $S \in \mathcal{M}$ para indicar o $\{D \in \mathcal{M} : D \subset S\}$.
μ_S	será utilizado no caso em que $(X,\mathcal{M},\mu)$ é um espaço de medida para indicar a restrição de μ a $\mathcal{M}_S$.
$f\big\|_S$	restrição da função f ao conjunto S.
$A \sim B$	$\{x \in A : x \notin B\}$
$(\operatorname{sgn} f)(x)$	$= \begin{cases} 0 & , \text{ se } f(x) = 0 \\ \dfrac{\bar{f}}{\|f\|} & , \text{ se } f(x) \neq 0 \text{ e } \|f(x)\| < \infty \\ 1 & , \text{ se } f(x) = \infty \\ -1 & , \text{ se } f(x) = -\infty \end{cases}$
$\mathbb{K}$	$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

CONVENÇÕES

1. Escreveremos simplesmente q.s. ao invés de μ=q.s. quando não houver perigo de confusão.

2. Para simplificar suprimiremos os parênteses em expressões do tipo $\mu(\{x \in X: f(x) \neq 0\})$, uma vez que não existe perigo de confusão.

3. Muitas vezes $X_{[0,a[}$ indicará a restrição da função característica do intervalo $[0,a[$ a $[0,\infty[$

4. Convencionaremos que:

$$\inf \phi = \infty$$

$$\sup \phi = 0$$

$$[a,a[= \phi \quad , \forall a \in \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{0} = \infty$$

$$0 \infty = 0$$

Nos parágrafos 6, 7, 9, 10 e 11 e em parte do parágrafo 8 escreveremos simplesmente f no lugar de $\dot{f}$.

CAPÍTULO I

Neste capítulo apresentaremos algumas noções básicas necessárias para o estudo dos espaços invariantes por rearranjo e para os teoremas do § 11 e do § 7.

§ 1. Função distribuição

(1.1) <u>Definição</u>. Seja $f \in F^k(X,M,\mu)$. A função m_f: $[0,\infty] \to [0,\infty]$, definida por

$$m_f(\lambda) = \mu\{x \in X : | f(x) | > \lambda\}$$

é chamada <u>função distribuição de f.</u>

(1.2) <u>Exemplos</u>

(i) Seja $S \in M$ e $f = X_S$. Então temos $m_f(\lambda) = 0$, se $\lambda \geq 1$ e $m_f(\lambda) = \mu(S)$ se $0 \leq \lambda < 1$ isto é, $m_f = \mu(S)X_{[0,1[}$.

(ii) Seja $f : [0,\infty[\to [0,\infty]$ uma função não crescente. Então, é fácil ver que para cada $\lambda \geq 0$ temos

$$m_f(\lambda) = \sup\{x \in [0,\infty[: f(x) > \lambda\}.$$

Se, em particular, f for contínua e (estritamente) decrescente então $m_f(\lambda) = f^{-1}(\lambda)$, se λ pertence à imagem de f e $m_f(\lambda) = 0$, caso contrário.

(1.3) Proposição. Sejam $f, g \in F^k(X, M, \mu)$. Então temos

(i) $m_f = m_{|f|}$;

(ii) $m_{\alpha f} = (\lambda) = m_f(\frac{\lambda}{\alpha})$, para $0 \leq \lambda < \infty$ e $\alpha \in C \sim \{0\}$

(iii) $m_{|f|^\alpha}(\lambda) = m_f(\lambda^{\frac{1}{\alpha}})$ para $0 \leq \lambda < \infty$ e $0 < \alpha < \infty$;

(iv) $|f| \leq |g|$ q.s implica $m_f \leq m_g$;

(v) $|f| = |g|$ q.s implica $m_f = m_g$;

(vi) m_f é não-crescente e portanto Lebesgue-mensurável;

(vii) m_f é contínua à direita.

Demonstração. Para os ítens (vi) e (vii) ver, por exemplo [1], teorema (1.18). Os demais, decorrem imediatamente da definição.

$\square$

(1.4) Proposição. Se $f, g \in F^k(X, M, \mu)$ e se $f+g$ está definida então temos

$$m_{f+g}(\lambda_1 + \lambda_2) \leq m_f(\lambda_1) + m_g(\lambda_2)$$

para $0 \leq \lambda_1 < \infty$ e $0 \leq \lambda_2 < \infty$.

<u>Demonstração</u>. Basta observar que

$$\{x\varepsilon X: |(f+g)(x)| > \lambda_1+\lambda_2\} \subset \{x\varepsilon X: |f(x)| > \lambda_1\} \cup \{x\varepsilon X: |g(x)| > \lambda_2\}.$$

$\square$

(1.5) <u>Observação</u>. É importante notar que não é verdade, em geral, que dadas $f, g \in F^k(X, M, \mu)$ tais que $f+g$ está definida então $m_{f+g}(\lambda) \leq m_f(\lambda) + m_g(\lambda)$ para todo $\lambda \geq 0$. Para um contra-exemplo, consideremos o espaço de medida $(\mathbb{R}, A, m)$ e $f=g= \chi_{[0,3]}$. Neste caso, temos $m_{f+g}(1) = 3$ e $m_f(1) + m_g(1) = 0$.

No entanto, se $\{x\varepsilon X: f(x)\neq 0\} \cap \{x\varepsilon X: g(x)\neq 0\} = \phi$ então para cada $\lambda \geq 0$ temos que

$$\{x\varepsilon X: |(f+g)(x)|>\lambda\}=\{x\varepsilon X: |f(x)|>\lambda\} \dot{\cup} \{x\varepsilon X: |g(x)|>\lambda\}$$

e portanto que $m_{(f+g)}(\lambda) = m_f(\lambda) + m_g(\lambda)$.

(1.6) <u>Proposição</u>. Seja (f_n) uma seqüência não-decrescente de funções de $F^+(X, M, \mu)$. Se $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ então a seqüência (m_{f_n}) é não-decrescente e $\lim_{n\to\infty} m_{f_n} = m_f$.

<u>Demonstração</u>. Ver [1], teorema (1.22).

Tendo em vista (1.6) e o conhecido resultado que toda função mensurável não-negativa é limite de uma seqüência não-decrescente de funções simples, é interessante que saibamos calcular a função distribuição de uma função simples. É isto que nos ensina nosso próximo resultado.

(1.7) <u>Proposição</u>. Sejam $S_1,\ldots,S_n$, subconjuntos mensuráveis de X, dois a dois disjuntos e $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in C\sim\{0\}$. Se $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{S_i}$ então

$$m_f(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \mu(S_i)\, \chi_{[0,|\alpha_i|[}(\lambda)$$

para $0 < \lambda < \infty$.

<u>Demonstração</u>. Seja $g_i = \alpha_i \chi_{S_i}$, para $1 \leq i \leq n$. Como $S_1,\ldots,S_n$ são dois a dois disjuntos, decorre de (1.5) que $m_f(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} m_{g_i}(\lambda)$ para $0 \leq \lambda < \infty$.

Tendo em vista (1.3.i) e (1.3.ii) temos $m_{g_i}(\lambda) = m_{|g_i|}(\lambda) = m_{|\alpha_i|\chi_{S_i}}(\lambda) = m_{\chi_{S_i}}\left(\frac{\lambda}{|\alpha_i|}\right)$ para $0 \leq \lambda < \infty$ e para $1 \leq i \leq n$. Mas, de acordo com (1.2.i) temos então que

$$m_{g_i}(\lambda) = \mu(S_i)\, \chi_{[0,1[}\left(\frac{\lambda}{|\alpha_i|}\right) = \mu(S_i)\chi_{[0,|\alpha_i|[}(\lambda)$$

para $0 \leq \lambda < \infty$ e para $1 \leq i \leq n$. Assim

$$m_f(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} m_{g_i}(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \mu(S_i)\chi_{[0,|\alpha_i|[}(\lambda)$$

para $0 \leq \lambda < \infty$.

$\square$

O lema seguinte será empregado em demonstrações de teoremas do § 7 e do § 11.

(1.8) Lema. Seja $f \in F^k(X, M, \mu)$ e seja $u > 0$. Consideremos

$$f_u = (\text{sgn } \bar{f}) \min \{u, |f|\}$$

e

$$f^u = f - f_u$$

(que são funções de $F^k(X, M, \mu)$).

Então

(i) $m_{f_u}(\lambda) = m_f(\lambda)$ se $0 \leq \lambda < u$;

(ii) $m_{f_u}(\lambda) = 0$ se $u \leq \lambda < \infty$;

(iii) $m_{f^u}(\lambda) = m_f(u + \lambda)$, para todo $\lambda \geq 0$.

Demonstração. Observemos inicialmente que para cada $x \in X$ temos

$$|f_u(x)| = \begin{cases} |f(x)| & , \text{ se } |f(x)| \leq u \\ u & , \text{ se } |f(x)| > u \end{cases}$$

$$|f^u(x)| = \begin{cases} 0 & , \text{ se } |f(x)| \leq u \\ |f(x)| - u & , \text{ se } |f(x)| > u \ . \end{cases}$$

Seja $\lambda > 0$. Então

$$\{x \varepsilon X : |f_u(x)| > \lambda\} = \{x \varepsilon X : |f(x)| \leq u \text{ e } |f_u(x)| > \lambda\} \dot{\cup} \{x \varepsilon X : |f(x)| > u \text{ e} |f_u(x)| > \lambda\}$$

Da observação inicial decorre que

$$\{x \varepsilon X : |f_u(x)| > \lambda\} = \{x \varepsilon X : \lambda < |f(x)| \leq u\} \dot{\cup} \{x \varepsilon X : \lambda < u < |f(x)|\} .$$

Portanto se $0 \leq \lambda < u$ então

$$\{x \varepsilon X : |f_u(x)| > \lambda\} = \{x \varepsilon X : |f(x)| > \lambda\} \quad ,$$

de onde segue-se (i).

Se $\lambda \geq u$ então $\{x \varepsilon X : |f_u(x)| > \lambda\} = \phi$ e (ii) está provado.

Para demonstrar (iii) observemos que para todo $\lambda \geq 0$ temos

$$\begin{aligned} \{x \varepsilon X : |f^u(x)| > \lambda\} &= \{x \varepsilon X : |f(x)| > u \text{ e } |f(x)| - u > \lambda\} \\ &= \{x \varepsilon X : |f(x)| > u + \lambda\} . \end{aligned}$$

Logo

$$m_{f^u}(\lambda) = m_f(u + \lambda), \text{ para todo } \lambda \geq 0 .$$

$\square$

§ 2. Funções equimensuráveis.

(2.1) <u>Definição</u>. Sejam $f \in F^k(X, M, \mu)$ e $g \in F^k(Y, N, \nu)$. Dizemos que <u>f é equimensurável com g</u> ou que <u>f e g são equimensuráveis</u> se $m_f = m_g$.

(2.2) <u>Exemplos</u>

(i) Sejam $S_1 \in M$ e $S_2 \in N$. Então, tendo em vista (1.2.i) podemos concluir que X_{S_1} e X_{S_2} são equimensuráveis se e só se $\mu(S_1) = \nu(S_2)$.

(ii) Seja $f \in F^k(\mathbb{R}, A, m)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ então a função $g(t) = f(\alpha + t)$ é equimensurável com f, uma vez que a medida de Lebesgue é invariante por translação.

(2.3) <u>Observação</u>. Em geral não é verdade que se $f_i, g_i \in F^k(X,M,\mu)$, f_i é equimensurável com g_i e $f_i + g_i$ está definida, para $i = 1, 2$, então $f_1 + g_1$ é equimensurável com $f_2 + g_2$ ou que $f_1 g_1$ é equimensurável com $f_2 g_2$. Basta considerar, por exemplo $f_1 = g_1 = f_2 = X_{[0,1]}$ e $g_2 = X_{]1,2]}$ como elementos de $F^r(\mathbb{R}, A, m)$.

No entanto, se $\{x \in X : f_i(x) \neq 0\} \cap \{x \in X : g_i(x) \neq 0\} = \phi$ para $i = 1,2$ então tendo em vista (1.5), temos que $f_1 + g_1$ é equimensurável com $f_2 + g_2$.

(2.4) <u>Proposição</u>. Sejam $f \in F^k(X, M, \mu)$ e $g \in F^k(Y, N, \nu)$. Então

(i) f é equimensurável com g se e somente se $|f|$ é equimensurável com $|g|$;

(ii) f equimensurável com g implica que αf é equimensurável com αg para todo $\alpha \in C$ e que $|f|^{\alpha}$ é equimensurável com $|g|^{\alpha}$, para $0 < \alpha < \infty$.

Demonstração. É conseqüência imediata de (1.3). $\square$

(2.5) Proposição. Sejam $f \in F^k(X, M, \mu)$ e $g \in F^k(Y, N, \nu)$ funções equimensuráveis. Se $m_f(\lambda) < \infty$ para $0 < \lambda < \infty$ (portanto $m_g(\lambda) < \infty$, para $0 < \lambda < \infty$) então se $0 < \beta < \alpha < \infty$ temos:

(i) $\mu\{x \in X: \beta < |f(x)| \leq \alpha\} = \nu\{y \in Y: \beta < |g(y)| \leq \alpha\} < \infty$;

(ii) $\mu\{x \in X: |f(x)| = \alpha\} = \nu\{y \in Y: |g(y)| = \alpha\} < \infty$;

(iii) $\mu\{x \in X: |f(x)| \geq \alpha\} = \nu\{y \in Y: |g(y)| \geq \alpha\} < \infty$;

(iv) $\mu\{x \in X: \beta < |f(x)| < \alpha\} = \nu\{y \in Y: \beta < |g(y)| < \alpha\} < \infty$;

(v) $\mu\{x \in X: \beta \leq |f(x)| < \alpha\} = \nu\{y \in Y: \beta \leq |g(y)| < \alpha\} < \infty$;

(vi) $\mu\{x \in X: \beta \leq |f(x)| \leq \alpha\} = \nu\{y \in Y: \beta \leq |g(y)| \leq \alpha\} < \infty$;

(vii) $\mu\{x \in X: |f(x)| \leq \alpha\} = \nu\{y \in Y: |g(y)| \leq \alpha\}$, no caso em que $\mu(X) = \nu(Y)$.

Além disso temos

(viii) $\mu\{x \in X: |f(x)| = \infty\} = \nu\{y \in Y: |g(y)| = \infty\} < \infty$.

Demonstração. (i) Como $m_f(\alpha) = m_g(\alpha) < \infty$ e $m_f(\beta) = m_g(\beta) < \infty$, temos

$$\begin{aligned}\mu\{x\varepsilon X:\beta<|f(x)| \leq \alpha\} &= m_f(\beta) - m_f(\alpha)\\ &= m_g(\beta) - m_g(\alpha)\\ &= \nu\{y\varepsilon Y:\beta<|g(y)|\leq\alpha\} < \infty .\end{aligned}$$

(ii) Seja $n_o \varepsilon \mathbb{N}$ tal que $\alpha - \frac{1}{n_o} > 0$. Então $\alpha - \frac{1}{n} > 0$ para todo natural $n > n_o$. Assim temos

$$\{x\varepsilon X:|f(x)|=\alpha\}= \bigcap_{n\geq n_o}^{\infty} \{x\varepsilon X:\alpha- \frac{1}{n} <|f(x)| \leq \alpha\} .$$

Como $\mu\{x\varepsilon X: \alpha - \frac{1}{n_o} \leq |f(x)|< \alpha\} \leq m_f(\alpha - \frac{1}{n_o})< \infty$, é bem conhecido que

$$\mu\{x\varepsilon X:|f(x)|= \alpha\}= \lim_{n \to \infty} \mu\{x\varepsilon X:\alpha - \frac{1}{n} <|f(x)|\leq\alpha\} < \infty .$$

De maneira análoga temos

$$\nu\{y\varepsilon Y:|g(y)|= \alpha\}= \lim_{n \to \infty} \nu\{y\varepsilon Y:\alpha - \frac{1}{n} <|g(y)|\leq\alpha\} < \infty$$

O resultado decorre, agora, de (i).

Omitiremos as demonstrações dos demais ítens.

[ ]

Veremos a seguir que algumas conclusões de (2.5) continuam verdadeiras, ainda que tornemos mais fracas algumas hipóteses. Preferimos, no entanto, esta formulação, pois é assim que o empregaremos.

(2.6) Observações

(a) As igualdades de (2.5.i) e (2.5.iv) continuam verdadeiras se $\beta = 0$. No entanto, se $\beta = 0$ não podemos garantir que as medidas que aparecerem são finitas.

(b) A igualdade de (2.5.viii) continua verdadeira se tivermos apenas que $m_f(\lambda) < \infty$ para algum $\lambda > 0$.

(c) As igualdades de (2.5.ii) e (2.5.iii) contiuam verdadeiras se tivermos apenas que $m_f(\lambda) < \infty$ para algum $\lambda \in]0,\alpha[$.

O leitor não terá dificuldades para perceber que observações semelhantes se aplicam aos demais ítens de (2.5).

(d) Convém salientar que não é verdade, em geral, que se $f \in F^k(X, M, \mu)$ e $g \in F^k(Y, N, \nu)$ e $\mu\{x \in X: |f(x)| = \alpha\} = \nu\{y \in Y: |g(y)| = \alpha\}$ para todo $\alpha > 0$ então f e g são equimensuráveis. Basta considerar, por exemplo f e g positivas e injetoras.

(2.7) Proposição. Sejam $S_1, \ldots, S_n$ subconjuntos mensuráveis de X que são dois a dois disjuntos, $D_1, \ldots, D_m$ subconjuntos mensuráveis de Y que são dois a dois disjuntos e $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_m \in C \sim \{0\}$. Sejam

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{S_i} \quad \text{e} \quad g = \sum_{i=1}^{m} \beta_i \chi_{D_j}.$$

Então temos

(i) Se $m=n$, $\mu(S_i)=\nu(D_i)$ e $|\alpha_i|=|\beta_i|$, para $i=1,..,n$ então f é equimensurável com g;

(ii) Se $|\alpha_1|< \dots <|\alpha_n|$, $|\beta_1|<\dots<|\beta_m|$, $0 < \mu(S_i) < \infty$ para $i = 1,..,n$, $0 < \nu(D_j) < \infty$ para $j = 1,\dots,m$ e f é equimensurável com g então $m = n$, $|\alpha_i|=|\beta_i|$ e $\mu(S_i)=\nu(D_i)$ para $i=1,..,n$.

<u>Demonstração</u>. (i) De (1.7) decorre que

$$m_f(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \mu(S_i)\, \chi_{[0,|\alpha_i|[}(\lambda)$$

e

$$m_g(\lambda) = \sum_{j=1}^{m} \nu(D_j)\, \chi_{[0,|\beta_j|[}(\lambda)$$

para $0 \leq \lambda < \infty$.

Decorre agora de nossas hipóteses que $m_f = m_g$ e portanto que f e g são equimensuráveis.

(ii) Como f e g são equimensuráveis, recorrendo a (1.7) temos

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(S_i)\, \chi_{[0,|\alpha_i|[} = \sum_{j=1}^{m} \nu(D_j)\, \chi_{[0,|\beta_j|[} \qquad (1)$$

Queremos então demonstrar que $m = n$, $\mu(S_i) = \nu(D_i)$ e $|\alpha_i| = |\beta_i|$, para $1 < i < n$.

Como $|\alpha_1|< \dots <|\alpha_n|$ e $|\beta_1|<\dots <|\beta_m|$ podemos reescrever a igualdade (1) obtendo

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \mu(S_k) X_{[|\alpha_{i-1}|,|\alpha_i|[} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{\ell=j}^{m} \nu(D_\ell) X_{[|\beta_{j-1}|,|\beta_j|[} \qquad (2)$$

onde convencionamos $\alpha_o = \beta_o = 0$

Observemos agora que se $\sum_{i=1}^{n} c_i X_{[a_{i-1},a_i[} =$ $= \sum_{j=1}^{m} d_j X_{[b_{j-1},b_j[}$, onde $c_i > 0$ para $1 \leq i \leq n$, $d_j > 0$ para $1 \leq j \leq m$, $0 \leq a_1 < .. < a_n$, $0 \leq b_1 .. b_m$, os c_i são dois a dois distintos e os d_j são dois a dois distintos então $n=m$, $c_i = d_i$ e $a_i = b_i$ para $1 \leq i \leq n$.

Façamos agora $c_i = \sum_{k=i}^{n} \mu(S_k)$, $d_j = \sum_{\ell=j}^{m} \nu(D_\ell)$, $a_i = |\alpha_i|$ e $b_j = |\beta_j|$. Nossas hipóteses garantem que $0 \leq a_i < ... < a_n$, $0 \leq b_1 < ... < b_m$, $c_i > 0$ para $1 \leq i \leq n$, $d_j > 0$ para $1 \leq j \leq m$, os c_i são distintos dois a dois e os d_j são distintos dois a dois. Tendo em vista (2) concluímos então que $n=m$, $|\alpha_i| = c_i = b_i = |\beta_i|$ e que $c_i = d_i$ para $1 \leq i \leq n$. É fácil ver agora que $\mu(S_i) = \nu(D_i)$ para $1 \leq i \leq n$, o que completa a prova.

$\square$

(2.8) <u>Proposição</u>. Seja (X, M, μ) um espaço de medida não-atômica. Se g e h ε $F^+(X, M, \mu)$ são funções simples equimensuráveis e f ε $F^+(X, M, \mu)$ é uma função simples que se anula sempre, que g se anula. Se $m_g(\lambda) < \infty$ para todo $\lambda > 0$, então existe uma função simples $\tilde{f} \varepsilon F^+(X,M,\mu)$ equimensurável com f e tal que

$$\int_X h \tilde{f} \, d\mu = \int_X g f \, d\mu .$$

Demonstração. Sejam $g = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{S_i}$, onde

$0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_n$ e $S_1, \ldots, S_n$ são dois a dois disjuntos e têm medida positiva e $h = \sum_{i=1}^{m} \beta_i \chi_{D_i}$ onde $0 < \beta_1 < \ldots < \beta_m$ e $D_1, \ldots, D_m$ são dois a dois disjuntos e têm medida positiva.

Como g e h são equimensuráveis, decorre de (2.7.ii) que $m = n$, $\alpha_i = \beta_i$ e $\mu(D_i) = \mu(S_i)$ para $i = 1, \ldots, n$.

Seja $f = \sum_{j=1}^{p} \gamma_j \chi_{U_j}$, onde $\gamma_1, \ldots, \gamma_p \in]0, \infty[$ e $U_1, \ldots, U_p$ são dois a dois disjuntos. Sendo $f(x) = 0$ para todo $x \notin \bigcup_{i=1}^{n} S_i$ então para $j = 1, \ldots, p$ temos:

$$\mu(U_j) = \mu(U_j \cap \bigcup_{i=1}^{n} S_i).$$

Seja $j \in \mathbb{N}$, $1 \leq j \leq p$. Para cada $i = 1, \ldots, n$ temos

$$\mu(S_i \cap U_j) \leq \mu(S_i) = \mu(D_i)$$

e sendo μ não-atômica existe $V_j^i \subset D_i$ tal que

$$\mu(V_j^i) = \mu(U_j \cap S_i).$$

Seja $V_j = \bigcup_{i=1}^{n} V_j^i$. É fácil ver que $V_j \cap D_i = V_j^i$ para $i = 1, \ldots, n$ e que

$$\mu(V_j) = \sum_{i=1}^{n} \mu(V_j^i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(S_i \cap U_j)$$

$$= \mu(U_j \cap \bigcup_{i=1}^{n} S_i)$$

$$= \mu(U_j) .$$

Tomemos $\tilde{f} = \sum_{j=1}^{p} \gamma_j \, \chi_{V_j}$. Decorre de (2.7.i) que f e $\tilde{f}$ são equimensuráveis. Além disso temos

$$\int_X g\, f\, d\mu = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} \alpha_i \gamma_j \mu(S_i \cap U_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} \beta_i \gamma_j \mu(V_j^i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} \beta_i \gamma_j \mu(V_j \cap D_i)$$

$$= \int_X h\, \tilde{f}\, d\mu .$$

□

(2.9) <u>Proposição</u>. Sejam (f_n) e (g_n) seqüências não-decrescentes de funções de $F^+(X, M, \mu)$ e $F^+(Y, N, \nu)$ respectivamente. Se f_n e g_n são equimensuráveis para todo $n \in \mathbb{N}$ então $\lim_{n\to\infty} f_n$ e $\lim_{n\to\infty} g_n$ são funções equimensuráveis.

<u>Demonstração</u>. É conseqüência imediata de (1.6).

□

Nosso próximo resultado é uma espécie de recíproca de (2.9).

(2.10) Proposição. Sejam $f \in \mathcal{F}^+(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $g \in \mathcal{F}^+(Y, \mathcal{N}, \nu)$ funções equimensuráveis. Suponhamos que $m_f(\lambda) < \infty$ para $0 < \lambda < \infty$ (e portanto $m_g(\lambda) < \infty$ para $0 < \lambda < \infty$). Então existe uma seqüência (f_n) de funções simples de $\mathcal{F}^+(X, \mathcal{M}, \mu)$ e uma seqüência (g_n) de funções simples de $\mathcal{F}^+(Y, \mathcal{N}, \nu)$, ambas não-decrescentes tais que

(i) $\lim\limits_{n \to \infty} f_n = f$;

(ii) $\lim\limits_{n \to \infty} g_n = g$;

(iii) f_n e g_n são equimensuráveis para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Para cada natural $n \geq 1$, definimos

$$S_n = \{x \varepsilon X : |f(x)| \geq n\}$$

$$D_n = \{y \varepsilon Y : |g(y)| \geq n\}$$

e para cada $r = 1, \ldots, n\, 2^n$ definimos

$$S_n^r = \{x \varepsilon X : \frac{r-1}{2^n} \leq |f(x)| \leq \frac{r}{2^n}\}$$

$$D_n^r = \{y \varepsilon Y : \frac{r-1}{2^n} \leq |g(y)| < \frac{r}{2^n}\}.$$

Sejam

$$g_n = \sum_{r=2}^{n^n} \frac{r-1}{2^n} \chi_{S_n^r} + n\, \chi_{S_n}$$

$$f_n = \sum_{r=2}^{n2^n} \frac{r-1}{2^n} \chi_{D_n^r} + n\, \chi_{D_n}.$$

É bem conhecido que as seqüências (f_n) e (g_n) são não-decrescentes e verificam respectivamente (i) e (ii).

Como f e g são equimensuráveis e $m_f(\lambda) < \infty$ para $0 < \lambda < \infty$, decorre de (2.5.iii) e de (2.5.v) que para cada $n \geq 1$ temos $\mu(S_n) = \nu(D_n)$ e para cada $r = 1,..,n$ temos $\mu(S_n^r) = \nu(D_n^r)$. Assim, de acordo com (2.7.i), f_n e g_n são equimensuráveis para todo $n \in \mathbb{N}$.

$\square$

O resultado que segue será utilizado na demonstração de (8.24).

(2.11) Notação. Seja (X, M, μ) um espaço de medida. Tomemos $S \in M$ e $f \in F^+(X, M, \mu)$ uma função simples. Para cada $\delta < 0$ indicaremos por $\sigma_{f,\delta,S}$ o conjunto das funções $g \in F^+(X, M, \mu)$ que têm as seguintes propriedades:

(i) g é uma função simples que pode ser escrita como combinação linear de funções características de subconjuntos de S que são dois a dois disjuntos e que têm a mesma medida;

(ii) $\mu\{x \in X : f(x) \neq g(x)\} \leq \delta$;

(iii) qualquer que seja $x \in X$ temos $g(x) = 0$ ou $g(x) = f(x)$ (e portanto temos $f(x) - g(x) \leq f(x)$ para todo $x \in X$).

(2.12) Proposição. Seja (X, M, μ) um espaço de medida não-atômica. Seja $S \in M$ tal que $0 < \mu(S) < \infty$ e $f \in F^+(X,M,\mu)$

u m a função simples que se anula em $X \sim S$. Então $\sigma_{f,\delta,S} \neq \phi$ para todo $\delta > 0$.

<u>Demonstração</u>. Se $f = 0$, o resultado é imediato. Suponhamos $f \neq 0$ e $f = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{S_j}$, onde $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ são reais positivos e $S_1,\ldots,S_n$ são subconjuntos mensuráveis de S, dois a dois disjuntos.

Dado $\delta > 0$, seja $K \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{n}{K} < \delta$ e $J = \{j \in \mathbb{N} : 1 \leq j \leq n, \mu(S_j) \geq \frac{1}{K}\}$ seja não vazio.

Para cada $j \in J$, seja p_j, o número natural tal que $\frac{p_j}{K} \leq \mu(S_j) < \frac{p_j+1}{K}$.

Como μ é não atômica, tendo em vista o teorema (B.4) de [1] temos que para cada $j \in J$, existem $D_{j,1},\ldots,D_{j,p_j}$ subconjuntos dois a dois disjuntos de S_j que têm medida igual a $\frac{1}{K}$.

Seja $g = \sum_{j\in J} \sum_{i=1}^{p_j} \alpha_j \chi_{D_{j,i}}$. Então para cada $j \in J$ temos

$$\mu\{x\in S_j : g(x)\neq f(x)\} = \mu(S_j \sim \bigcup_{i=1}^{p_j} D_{j,i})$$

$$= \mu(S_j) - \frac{p_j}{K} < \frac{1}{K} \qquad (1)$$

e portanto

$$\mu\{x\in X : g(x)\neq f(x)\} = \sum_{j=1}^{n} \mu\{x\in S_j : g(x)\neq f(x)\}$$

$$= \sum_{j\varepsilon J}^{n} \mu\{x\varepsilon S_j : g(x) \neq f(x)\}$$

$$+ \sum_{j\varepsilon\{1,..,n\}\sim J} \mu\{x\varepsilon S_j : g(x) \neq f(x)\}.$$

Tendo em vista (1) e lembrando que $\mu(S_j) < \frac{1}{K}$ se $j\varepsilon\{1,..,n\} \sim J$, concluímos que

$$\mu\{x\varepsilon X : g(x) \neq f(x)\} \leq \sum_{j\varepsilon J} \frac{1}{K} + \sum_{j\varepsilon\{1,..,n\}\sim J} \frac{1}{K}$$

$$= \frac{n}{K} < \delta .$$

É fácil ver agora que $g \in \sigma_{f,\delta,S}$.

$\square$

§ 3. Reordenadas não-crescentes.

Neste parágrafo, associaremos a c a d a função $f \in F^k(X, M, \mu)$ uma função que indicaremos por f^* e que será a única função não-crescente, contínua à direita e equimensurável com f (ver 3.10). De certa maneira f^* reproduz $|f|$, de modo que $\int_X |f|\, d\mu = \int_0^\infty f^*(t)dt$

(3.1) <u>Definição</u>. Seja $f \in F^k(X, M, \mu)$. A função f^* definida em $[0,\infty[$ pela relação

$$f^*(t) = \inf \{\lambda \geq 0 : m_f(\lambda) \leq t\}$$

é chamada função <u>reordenada</u> <u>não-crescente</u> <u>associada</u> <u>a</u> <u>f</u>.

(3.2) <u>Exemplos</u>

(i) Se $S \in M$ e $f = X_S$ então $f^* = X_{[0,\mu(S)[}$.

De fato, de acordo com (1.2.i) temos que:

$$f^*(t) = \inf \{\lambda \geq 0 : \mu(S)\, X_{[0,1[}(\lambda) \leq t\}$$

para todo $t \geq 0$.

Assim, se $\mu(S) \leq t$ então $f^*(t) = 0$ e se $0 \leq t < \mu(S)$ então teremos $\mu(S)\, X_{[0,1[}(\lambda) \leq t$ se e só se $\lambda \geq 1$ e portanto $f^*(t) = 1$.

(ii) Seja f a função identidade definida em $\mathbb{R}$. Então $m_f(\lambda) = \infty$, para todo $\lambda \geq 0$ e portanto

$$f^*(t) = \inf \{\lambda \geq 0 : m_f(\lambda) \leq t\} = \inf \phi = \infty$$, para todo $t \geq 0$.

(3.3) <u>Proposição</u>. Sejam $f, g \in F^k(X, M, \mu)$. Então temos:

(i) $f^* = |f|^*$;

(ii) $(\alpha f)^* = |\alpha| f^*$, para todo $\alpha \in \mathbb{C}$;

(iii) $(|f|^\alpha)^* = (f^*)^\alpha$, para $0 < \alpha < \infty$

(iv) $|f| \leq |g|$ q.s implica que $f^* \leq g^*$;

(v) $|f| = |g|$ q.s implica que $f^* = g^*$;

(vi) f^* é não-crescente e portanto Lebesgue-mensurável.

Demonstração. É imediata, tendo em vista (1.3).

□

(3.4) Proposição Se $f,g \in F^k(X,M,\mu)$ e se $f+g$ está definida, então temos

$$(f+g)^* (t_1+t_2) \leq f^*(t_1) + g^*(t_2),$$

se $t_1 \geq 0$ e $t_2 \geq 0$.

Demonstração. Sejam $t_1 \geq 0$ e $t_2 \geq 0$. Decorre de (1.4) que para cada $\lambda_1 \geq 0$ e para cada $\lambda_2 \geq 0$ tais que $m_f(\lambda_1) \leq t_1$ e $m_g(\lambda_2) \leq t_2$ temos que $m_{f+g}(\lambda_1+\lambda_2) \leq (t_1+t_2)$. Com isto

$$\{\lambda_1+\lambda_2 : \lambda_1 \geq 0,\ \lambda_2 \geq 0,\ m_f(\lambda_1) \leq t_1 \text{ e } m_g(\lambda_2) \leq t_2\}$$

é um subconjunto do

$$\{\lambda \geq 0 : m_{f+g}(\lambda) \leq t_1 + t_2\} .$$

Logo

$$\begin{aligned}
(f+g)^*(t_1 + t_2) &= \inf \{\lambda \geq 0 : m_{f+g}(\lambda) \leq t_1 + t_2\} \\
&\leq \inf \{\lambda_1+\lambda_2 : \lambda_1 \geq 0,\ \lambda_2 \geq 0,\ m_f(\lambda_1) \leq t_1,\ m_g(\lambda_2) \leq t_2\} \\
&= \inf \{\lambda_1 \geq 0 : m_f(\lambda_1) \leq t_1\} \\
&\quad + \inf \{\lambda_2 \geq 0 : m_g(\lambda_2) \leq t_2\} \\
&= f^*(t_1) + g^*(t_2).
\end{aligned}$$

□

(3.5) Observação. Em geral não é verdade que $(g_1+g_2)^* = g_1^*+g_2^*$ ou que $(g_1 g_2)^* = g_1^* g_2^*$. Por exemplo, se g_1 e g_2 são as funções já consideradas em (2.3) temos $g_1^* = \chi_{[0,1[}$, $g_2^* = \chi_{[0,1[}$ e portanto $(g_1+g_2)^* = (\chi_{[0,2]})^* = \chi_{[0,2[}$ e $(g_1 \cdot g_2)^* = 0$. No entanto $g_1^* + g_2^* = 2\,\chi_{[0,1[}$ e $g_1^*\, g_2^* = \chi_{[0,1[}$.

Cabe notar que este exemplo também mostra que não temos $(g_1+g_2)^* = g_1^* + g_2^*$ nem mesmo no caso em que

$$\{x \in X : g_1(x) \neq 0\} \cap \{x \in X : g_2(x) \neq 0\} = \phi .$$

(3.6) Proposição. Seja $f \in F^k(X, M, \mu)$. Dado $t \in [0, \infty[$ temos que:

(i) Se $0 \leq \lambda < f^*(t)$ então $m_f(\lambda) > t$;

(ii) Se $f^*(t) \leq \lambda < \infty$ então $m_f(\lambda) \leq t$;

(iii) $\{\lambda \geq 0 : m_f(\lambda) > t\} = [0, f^*(t)[$ e portanto $f^*(t) = m_{m_f}(t) = \sup\{\lambda \geq 0 : m_f(\lambda) > t\}$.

Conseqüentemente temos que

(iv) $m_f(\lambda) = \inf\{t \geq 0 : f^*(t) \leq \lambda\}$, para todo $\lambda > 0$;

(v) $f^* = 0$ se e só se $f = 0$ q.s.

Demonstração. (i) É conseqüência imediata da definição de f^*.

(ii) Se $f^*(t) < \lambda < \infty$ então existe λ' tal que $f^*(t) < \lambda' < \lambda$ e $m_f(\lambda') \leq t$. Como f^* é não-crescente temos que $m_f(\lambda) \leq t$.

Assim $m_f(\lambda) \leq t$ para todo $\lambda > f^*(t)$. Como m_f é contínua à direita então $m_f(f^*(t)) \leq t$.

(iii) Se $f^*(t) = \infty$ então $m_f(\lambda) > t$ para todo $\lambda > 0$. Logo

$$\{\lambda \geq 0 : m_f(\lambda) > t\} = [0,\infty[$$

Se $f^*(t) < \infty$, decorre de (i) e de (ii) que

$$\{\lambda \geq 0 : m_f(\lambda) > t\} = [0, f^*(t)[$$

Em qualquer caso temos então que

$$\{\lambda \geq 0 : m_f(\lambda) > t\} = [0, f^*(t)[$$

e portanto

$$\sup \{\lambda > 0 : m_f(\lambda) > t\} = f^*(t)$$

e

$$m_{m_f}(t) = m\{\lambda \geq 0 : m_f(\lambda) > t\} = m([0,f^*(t)[) = f^*(t) .$$

(iv) De (iii) decorre que para cada $\lambda \geq 0$ e para cada $t \geq 0$ temos $\lambda \geq f^*(t)$ se e só se $m_f(\lambda) \leq t$. Logo, para cada $\lambda \geq 0$ temos que

$$m_f(\lambda) = \inf\{t \geq 0 : m_f(\lambda) \leq t\}$$

$$= \inf\{t \geq 0 : f^*(t) \leq \lambda\}.$$

(v) Se $f^* = 0$ então, decorre de (ii) que $m_f(\lambda) \leq 0$ para todo $\lambda \geq 0$. Logo $m_f(0) = 0$ e portanto $f=0$ q.s. Reciprocamente, se $f = 0$ q.s então $m_f(\lambda) = 0$ para todo $\lambda \geq 0$ e portanto $f^*(t) = \inf\{\lambda \geq 0 : m_f(\lambda) \leq t\} = 0$, para todo $t \geq 0$.

$\square$

(3.7) Proposição. Seja $f \in F^k(X, M, \mu)$. Então f e f^* são equimensuráveis.

Demonstração. Seja $\lambda \geq 0$. Decorre de (3.6.iii) que

$$\{t \geq 0 : f^*(t) > \lambda\} = \{t \geq 0 : m_f(\lambda) > t\} = [0, m_f(\lambda)[.$$

Portanto

$$m_{f^*}(\lambda) = m\{t \geq 0 : f^*(t) > \lambda\} = m([0, m_f(\lambda)[) = m_f(\lambda) .$$

Assim f e f^* são equimensuráveis.

$\square$

(3.8) Proposição. Sejam $f \in F^k(X,M,\mu)$ e $g \in F^k(Y,N,\nu)$. Então f e g são equimensuráveis se e só se $f^* = g^*$. Em particular $(f^*)^* = f^*$.

Demonstração. Se f e g são equimensuráveis então $m_f = m_g$. Logo $f^* = g^*$.

Reciprocamente, se $f^* = g^*$ então $m_{f^*} = m_{g^*}$. Tendo em vista (3.7) concluímos que $m_f = m_{f^*} = m_{g^*} = m_g$ e portanto que f e g são equimensuráveis.

Como f e f* são equimensuráveis então $(f^*)^* = f^*$.

□

(3.9) Proposição. Seja $f \in F^k(X, M, \mu)$. Então f^* é contínua à direita.

Demonstração. Basta lembrar que, de acordo com (3.6.iii) temos que f^* é a função distribuição de m_f e que (1.3.vii) nos garante que toda função distribuição é contínua à direita.

□

(3.10) Proposição. Seja $f: [0,\infty[\to[0,\infty]$ uma função não-crescente e contínua à direita. Então $f = f^*$. Além disso, se $g \in F^k(X, M, \mu)$ então g^* é a única função definida em $[0,\infty[$ com valores em $[0,\infty]$ que é contínua à direita e equimensurável com g.

Demonstração. Vamos mostrar que para todo $t \geq 0$ temos

$$\{\lambda \geq 0 : m_f(\lambda) > t\} = [0, f(t)[\tag{1}$$

Com isto, decorrerá de (3.6.iii) que $f(t) = f^*(t)$ para todo $t \geq 0$.

Como f é não-crescente, para cada $\lambda \geq 0$ temos que

$$m_f(\lambda) = \sup\{s \geq 0 : f(s) > \lambda\} \tag{2}$$

Tomemos $t \geq 0$. Então se $m_f(\lambda) > t$, de acordo com (2) temos que existe $s > t$ tal que $f(s) > \lambda$ e portanto $f(t) > f(s) > \lambda$. Reciprocamente se $f(t) > \lambda$, como f é contínua à direita existe $s > t$ tal que $f(s) > \lambda$ e temos que $m_f(\lambda) > t$. Assim concluímos que $m_f(\lambda) > t$ se e só se $\lambda < f(t)$, de onde segue-se (1). A prova está, então, completa.

Para demonstrar a outra afirmação observemos que se $g \in F^k(X, M, \mu)$ então (3.7) e (3.9) nos garantem que g^* é equimensurável com g e contínua à direita. Por outro lado, se $g_1 : [0,\infty[\to [0,\infty]$ é contínua à direita e equimensurável com g então $g_1^* = g_1$ e $g_1^* = g$. Logo $g_1 = g^*$.

□

(3.11) <u>Observação</u>. Se a hipótese de f ser contínua à direita for suprimida em (3.9) teremos $f = f^*$ q.s. De fato, como f^* é não-crescente, existe g contínua à direita, não-crescente tal que $g = f$ q.s. Portanto $g^* = f^*$. Decorre de (3.10) que $g^* = g$. Logo, como $g = f$ q.s. temos que $f = f^*$ q.s.

Os dois resultados que seguem tratam do cálculo de reordenadas não-crescentes associadas a funções simples.

(3.12) <u>Proposição</u>. Sejam $S_1,..,S_n$ subconjuntos mensuráveis de X, dois a dois disjuntos, e $\alpha_1,..,\alpha_n$ números complexos tais que $0 < |\alpha_n| < \ldots < |\alpha_1|$. Seja $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{S_i}$. Então temos

(i) Se $\mu(S_1) = \infty$ então $f^*(t) = |\alpha_1|$ para todo $t \geq 0$;

(ii) Se existe i_0, $1 < i_0 \leq n$ tal que $\mu(S_i) < \infty$ para todo $i < i_0$ e $\mu(S_{i_0}) = \infty$ então

$$f^*(t) = |\alpha_1| X_{[0,\mu(S_1)[}(t) + \sum_{i=2}^{i_o-1} |\alpha_i| X_{[\sum_{k=1}^{i-1}\mu(S_k),\ \sum_{k=1}^{i}\mu(S_k)[}(t)$$

$$+ |\alpha_{i_o}| X_{\left[\sum_{k=1}^{i_o-1}\mu(S_k),\infty\right|}(t)$$

para todo $t \geq 0$;

(iii) Se $\mu(S_i) < \infty$ para $1 \leq i \leq n$ então

$$f^*(t) = |\alpha_1|\ X_{[0,\mu(S_1)[}(t) + \sum_{i=2}^{n} |\alpha_i| X_{\left[\sum_{k=1}^{i-1}\mu(S_k),\ \sum_{k=1}^{i}\mu(S_k)\right|}(t)$$

para todo $t \geq 0$.

<u>Demonstração</u>. Apresentaremos apenas a demonstração de (iii). As demonstrações de (i) e (ii) são análogas.

Seja

$$g(t) = |\alpha_1| X_{[0,\mu(S_1)[}(t) + \sum_{i=2}^{n} |\alpha_i|\ {}_{\left[\sum_{k=1}^{i-1}\mu(S_k),\ \sum_{k=1}^{i}\mu(S_k)\right|}(t)$$

É fácil ver que g é contínua à direita. Além disso g é não-crescente pois $0 < |\alpha_n| < \ldots |\alpha_1|$. Assim, (3.10) nos garante que $g^* = g$.

Por outro lado, de acordo com (1.7) para todo $\lambda \geq 0$ temos

$$m_f(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \mu(S_i)\, \chi_{[0,|\alpha_i|[}(\lambda) = m_g(\lambda),$$

sendo a última igualdade verdadeira pois $\mu(S_i)$ é a medida de Lebesgue do intervalo $\left[\sum_{k=1}^{i-1} \mu(S_i), \sum_{k=1}^{i} \mu(S_i)\right[$ para $1 \leq i \leq n$.

Logo f é equimensurável com g. Portanto $f^* = g^*$ e como $g^* = g$ concluímos que $f^* = g$.

$\square$

(3.13) <u>Proposição</u>. Seja f uma função simples de $F^+(X, M, \mu)$ tal que $m_f(\lambda) < \infty$ para todo $\lambda > 0$. Então existem números reais positivos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ e subconjuntos mensuráveis de X, $S_1, \ldots, S_n$ de medida positiva tais que

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, \chi_{S_i} \qquad \text{e} \qquad f^* = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|\, \chi_{|0,\mu(S_i)|}.$$

<u>Demonstração</u>. Nossas hipóteses sobre f garantem que existem números reais $0 < \beta_n < \ldots < \beta_1$ e subconjuntos $D_1, \ldots, D_n$ de X dois a dois disjuntos com $0 < \mu(D_i) < \infty$ para $i=1,\ldots,n$ tais que $f = \sum_{i=1}^{n} \beta_i\, \chi_{D_i}$

Tomemos agora $S_i = \bigcup_{j=1}^{i} D_j$, $\alpha_n = \beta_n$ e $\alpha_i = \beta_i - \beta_{i+1}$, se $1 \leq i < n-1$. Então temos que

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, \chi_{S_i} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\sum_{j=1}^{i} \chi_{D_j} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} (\beta_i - \beta_{i+1}) \left(\sum_{j=1}^{i} X_{D_j} \right) + \beta_n \sum_{j=1}^{n} X_{D_j}$$

$$= \sum_{i=2}^{n-1} \beta_i \left(\sum_{j=1}^{i} X_{D_j} - \sum_{j=1}^{i-1} X_{D_j} \right) + \beta_1 X_{D_1}$$

$$+ \beta_n \sum_{j=1}^{n} X_{D_j} - \beta_n \sum_{j=1}^{n-1} X_{D_j}$$

$$= \sum_{i=2}^{n-1} \beta_i X_{D_i} + \beta_1 X_{D_1} + \beta_n X_{D_n}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \beta_i X_{D_i} = f$$

Resta mostrar que $f^* = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_{[0,\ \mu(S_i)[}$. Sabemos, tendo em vista (3.12.iii) que

$$f^* = \beta_1 X_{[0,\ \mu(D_1)[} + \sum_{i=2}^{n} \beta_i X_{\left[\sum_{k=1}^{i-1} \mu(D_k),\ \sum_{k=1}^{i} \mu(D_k)\right[}$$

Logo

$$f^* = \beta_1 X_{[0,\mu(S_1)[} + \sum_{i=2}^{n} \beta_i X_{[\mu(S_{i-1}),\ \mu(S_i)[}$$

$$= \beta_1 X_{[0,\mu(S_1)[} + \sum_{i=2}^{n} \beta_i \left[X_{[0,\mu(S_i)[} - X_{[0,\mu(S_{i-1})[} \right]$$

$$= \beta_1 \chi_{[0,\mu(S_1)[} + \sum_{i=2}^{n} \beta_i \chi_{[0,\mu(S_i)[}$$

$$- \sum_{i=2}^{n} \beta_i \chi_{[0,\mu(S_{i-1})[}$$

$$= \beta_n \chi_{[0,\mu(S_n)[} + \sum_{i=1}^{n-1} (\beta_i - \beta_{i+1}) \chi_{[0,\mu(S_i)[}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{[0,\mu(S_i)[}$$

| |

(3.14) <u>Proposição</u>. Seja (f_n) uma seqüência não-decrescente de funções de $F^+(X, M, \mu)$. Então a seqüência (f_n^*) é não-decrescente e se $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ então $f^* = \lim_{n\to\infty} f_n^*$.

<u>Demonstração</u>. Decorre de (1.6) que a seqüência (m_{f_n}) é não-decrescente e que $\lim_{n\to\infty} m_{f_n} = m_f$. Aplicando novamente (1.6) temos que $\lim_{n\to\infty} m_{m_{f_n}} = m_{m_f}$ e que a seqüência $(m_{m_{f_n}})$ é não-decrescente. Assim, a prova está completa, uma vez que, de acordo com (3.6.iii) sabemos que $m_{m_{f_n}} = f_n^*$ e que $m_{m_f} = f^*$.

| |

(3.15) <u>Proposição</u>. Seja (f_n) uma seqüência de funções de $F^k(X, M, \mu)$. Então $\lim_{n\to\infty} f_n^*(t) = 0$ para todo $t > 0$ se e somente se (f_n) converge em medida para a função nula.

<u>Demonstração</u>. Se $\lim_{n\to\infty} f_n(t) = o$ para todo $t > 0$, então dados $\delta > 0$ e $\varepsilon > 0$ temos que $\lim_{n\to\infty} f_n^*(\delta) = 0$ e portanto existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq n_o$ então $f_n^*(\delta) < \varepsilon$. De (3.6.ii) decorre então que $m_{f_n}(\varepsilon) \leq \delta$ para todo $n \geq n_o$. Logo (f_n) converge em medida para a função nula.

Reciprocamente, se (f_n) converge em medida para a função nula então dados $t > 0$ e $\varepsilon > 0$, existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_o$ temos $m_{f_n}(\varepsilon) \leq t$. De (3.6.i) decorre então que $f_n^*(t) \leq \varepsilon$ para todo $n \geq n_o$. Portanto $\lim_{n\to\infty} f_n^*(t) = 0$ para todo $t > 0$.

$\square$

(3.16) <u>Observações</u>.

(a) A seqüência $(\chi_{|n,n+1|})$ mostra que $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ não implica que $\lim_{n\to\infty} f_n^* = f^*$.

(b) Se (f_n) converge em medida para a função nula, não podemos garantir que $\lim_{n\to\infty} f_n^*(0) = 0$. Um exemplo é a seqüência $(\chi_{[0, \frac{1}{n}]})$.

(3.17) <u>Proposição.</u> Seja $f \in F^k(X, M, \mu)$ tal que $m_f(\lambda) < \infty$ para todo $\lambda < 0$. Então temos

$$\mu\{x \in X: |f(x)| \geq f^*(t)\} \geq t$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ tal que $0 \leq t \leq \inf\{s \geq 0: f^*(s) = 0\}$.

Demonstração. Seja $0 \leq t < \inf \{S > 0: f^*(s) = 0\}$. Como f e f^* são equimensuráveis, decorre que (2.5.iii), no caso em que $f^*(t) < \infty$ e de (2.5.viii) no caso em que $f^*(t) = \infty$ que

$$\mu\{x \in X: |f(x)| \geq f^*(t)\} = m\{s \geq 0: f^*(s) \geq f^*(t)\}.$$

Como f^* é não-crescente temos que $f^*(s) \geq f^*(t)$ para todo $s \leq t$. Logo

$$\mu\{x \in X: |f(x)| \geq f^*(t)\} \geq t .$$

Se $t = \inf\{s \geq 0: f^*(s) = 0\}$ então como f^* é não-crescente temos que $f^*(s) = 0$ para todo $s > t$ e como f^* é contínua à direita temos $f^*(t) = 0$. Além disso

$$\begin{aligned} t = m\{s \geq 0: f^*(s) > 0\} &= \mu\{x \in X: f(x) \neq 0\} \\ &\leq \mu\{x \in X: |f(x)| \geq 0\} \\ &= \mu\{x \in X\ |f(x)| \geq f^*(t)\}, \end{aligned}$$

que completa a prova.

| |

É interessante observar que a hipótese $m_f(\lambda) < \infty$ para todo $\lambda > 0$ é essencial em (3.16). Por exemplo se $f(t) = 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$, então $f^*(t) = 1$ para todo $t \geq 0$ e no entanto $m\{x \in \mathbb{R}: |f(x)| \geq 1\} = 0$.

(3.18) Proposição. Seja $f \in F^r(X, M, \mu)$. Se $f^*(t) < \infty$ para todo $t > 0$ então $|f(x)| < \infty$ para quase todo $x \in X$.

Demonstração. Seja $S = \{x \in X: |f(x)| = \infty\}$. Sabemos que $S \in M$. Suponamos por absurdo que $\mu(S) > 0$. Então temos $m_f(\lambda) \geq \mu(S)$ para todo $\lambda \geq 0$ e portanto se $0 \leq t < \mu(S)$ então $m_f(\lambda) > t$ para todo $\lambda > 0$. Logo $f^*(t) = \infty$ para $0 \leq t < \mu(S)$ o que contradiz nossa hipótese.

$||$

O resultado que apresentaremos a seguir, é bastante útil porque reduz o cálculo de determinadas integrais de funções de $F^k(X, M, \mu)$ ao cálculo de integrais de funções definidas em $[0, \infty[$. Ele será utilizado na demonstração de muitos resultados do § 7.

(3.19) Lema. Seja $f \in F^k(X, M, \mu)$ e seja A a função definida por $A(u) = \int_0^u p(t)dt$, onde p é uma função Lebesgue o mensurável definida em $[0,\infty[$ com valores em $[0,\infty]$. Então

$$\int_X A(|f|)d\mu = \int_0^\infty m_f(t)\ p(t)dt = \int_0^\infty A(f^*(t))dt\ .$$

Demonstração. Ver [1], teorema (1.2.4).

(3.20) Proposição. Seja $g:[0,\infty[\to[0,\infty]$ uma função Lebesgue-mensurável. Dado $c \geq 0$, seja $G = \{t \in [0,\infty[: g(t) > c\}$. Se G é limitado e $\int_c^\infty m_g(t)dt < \infty$ então $\int_G g(t)dt < \infty$.

Demonstração. De (3.19) decorre que

$$\int_G g(t)dt = \int_0^\infty g(t)\, \chi_G(t)dt = \int_0^\infty m_{g\,\chi_G}(\lambda)\, d\lambda$$

$$= \int_0^c m_{g\,\chi_G}(\lambda)d\lambda + \int_c^\infty m_{g\,\chi_G}(\lambda)d\lambda \; . \qquad (1)$$

É fácil ver que se $\lambda \geq c$ então $m_{g\,\chi_G}(\lambda) = m_g(\lambda)$ e portanto que temos

$$\int_c^\infty m_{g\,\chi_G}(\lambda)d\lambda = \int_c^\infty m_g(\lambda)d\lambda < \infty \; . \qquad (2)$$

Por outro lado, existe $M \geq 0$ tal que $G \subset [0,M]$. Logo $g\,\chi_G \leq g\,\chi_{[0,M]}$. Assim

$$\int_0^c m_{g\,\chi_G}(\lambda)d\lambda \leq \int_0^c m_{g\chi_{[0,M]}}(\lambda)d\lambda \leq c\,M \qquad (3)$$

já que $m_{g\chi_{[0,M]}}(\lambda) \leq M$ para todo $\lambda \geq 0$.

Decorre de (1), (2) e (3) que $\int_G g(t)dt < \infty$ o que completa a prova.

$\square$

(3.21) <u>Proposição.</u> Seja $f \in \mathcal{F}^k(X, \mathcal{M}, \mu)$.

(i) Dado $c \geq 0$, seja $S = \{x \in X : |f(x)| > c\}$. Então $\int_c^\infty m_f(\lambda)d\lambda \leq \int_S |f|\, d\mu$.

(ii) Seja $a > 0$ tal que $f^*(a) < \infty$. Se $S = \{x \in X: |f(x)| > f^*(a)\}$ e $\int_S |f| d\mu < \infty$ então $\int_0^t f^*(s)ds < \infty$ para todo $t > 0$.

<u>Demonstração</u>.

(i) De (3.19) decorre que

$$\int_S |f| d\mu = \int_X |f\chi_S| d\mu = \int_0^\infty m_{f\chi_S}(\lambda) d\lambda \geq \int_c^\infty m_{f\chi_S}(\lambda) d\lambda . \qquad (1)$$

Mas para todo $\lambda \geq c$ temos $m_f(\lambda) = m_{f\chi_S}(\lambda)$ e portanto decorre de (1) que

$$\int_c^\infty m_f(\lambda) d\lambda = \int_c^\infty m_{f\chi_S}(\lambda) d\lambda \leq \int_S |f| d\mu$$

como queríamos demonstrar.

(ii) Em primeiro lugar, usando (i) e nossa hipótese obtemos

$$\int_{f^*(a)}^\infty m_{f^*}(\lambda)\, d\lambda = \int_{f^*(a)}^\infty m_f(\lambda) d\lambda \leq \int_S |f| d\mu < \infty . \qquad (1)$$

Consideremos agora $G = \{s \geq 0: f^*(s) > f^*(a)\}$ e $t_0 = \sup G$. Como f^* é não-crescente temos

$$[0, t_0[\subset G \subset [0, a[.$$

Assim, tendo em vista (1), sabemos que as hipóteses de (3.20) estão verificadas para a função f^* e portanto

$\int_G f^*(s)ds < \infty$. Logo se $t \leq t_0$ temos

$$\int_0 f^*(s)ds \leq \int_0^{t_0} f^*(s)ds \leq \int_G f^*(s)ds < \infty.$$

Por outro lado se $t > t_0$ temos que $f^*(t) \leq f^*(a)$ e portanto

$$\int_{t_0}^{t} f^*(s)ds \leq f^*(a)(t - t_0) < \infty$$

Assim $\int_0^t f^*(s)ds < \infty$, para todo $t > 0$.

$||$

Tratemos, agora, de mostrar que sob determinadas condições sobre $S \in M$, podemos reduzir o cálculo de $\int_0^{\mu(s)} A(|f|)\, d\mu$ ao cálculo de $\int_0^{\mu(S)} A(f^*(t))dt$.

(3.22) Proposição. Seja $f \in F^k(X, M, \mu)$. Sejam $S \in M$ e A uma função como em (3.19). Então temos

(i) $A((f\, X_S)^*) \leq A(f^*)\, X_{|0,\mu(S)|}$;

(ii) $\int_S A(|f|)d\mu \leq \int_0^{\mu(s)} A(f^*(t)dt.$

Demonstração. (i) Decorre de (3.3.iv) que $(fX_S)^* \leq f^*$ e como A é não-decrescente temos $A((fX_S)^*) \leq A(f^*)$. Além disso, se $t \geq \mu(s)$ então para todo $\lambda \geq 0$ temos

$m_{f\chi_S}(\lambda) \leq \mu(S) \leq t$. Portanto $(f\chi_S)^*(t) = 0$ para $t \geq \mu(S)$. Logo $A((f\chi_S)^*(t)) \leq A(f^*)\, \chi_{[0,\mu(S)[}(t)$ para todo $t \geq 0$.

(ii) Como $A(0) = 0$ então $\int_S A(|f|)d\mu = \int_X A(|f\chi_S|)d\mu$. .

De (3.19) e de (i) decorre então que

$$\int_S A(|f|)d\mu = \int_X A(|f\chi_S|)d\mu = \int_0^\infty A((f\chi_S)^*(t))dt$$

$$\leq \int_0^{\mu(S)} A(f^*(t))dt.$$

$\square$

(3.23) <u>Proposição</u>. Seja $f \in F^k(X, M, \mu)$ e seja A uma função como em (3.19). Se $t \in [0,\infty[$ e $S_t \in M$ é tal que $\mu(S_t) = t$ e

$$\{x \in X: |f(x)| > f^*(t)\} \subset S_t \subset \{x \in X: |f(x)| \geq f^*(t)\}$$

então temos

(i) $\quad A((f\chi_{S_t})^*) = A(f^*)\, \chi_{[0,t[}$;

(ii) $\quad \int_{S_t} A(|f|)d\mu = \int_0^t A(f^*(s))ds$.

<u>Demonstração</u>

(i) Como $\mu(S_t) = t$, decorre de (3.22.i) que

$A((f\chi_{S_t})^*) \leq A(f^*)\chi_{[0,t[}$. É suficiente, então, demonstrar que $A(f^*(s)) \leq A((f\chi_{S_t})^*(s))$ para todo $s < t$, ou ainda que $f^*(s) \leq (f\chi_{S_t})^*(s)$ para todo $s < t$, uma vez que A é não-decrescente.

Vamos mostrar, então, que se $s < t$ temos que

$$\{\lambda \geq 0 : m_{f\chi_{S_t}}(\lambda) \leq s\} \subset \{\lambda \geq 0 : m_f(\lambda) \leq s\} \quad , \qquad (1)$$

pois com isto teremos

$$(f\chi_{S_t})^*(s) = \inf\{\lambda \geq 0 : m_{f\chi_{S_t}}(\lambda) \leq s$$

$$\geq \inf\{\lambda \geq 0 : m_f(\lambda) \leq \lambda\} = f^*(s) \qquad (2)$$

e a prova estará completa.

Tomemos $s \in [0,t[$. Seja $\lambda \geq 0$ tal que $m_{f\chi_{S_t}}(\lambda) \leq s$. Vamos mostrar inicialmente que $\lambda \geq f^*(t)$. Se $f^*(t) = 0$, não há o que demonstrar. Se $f^*(t) > 0$, suponhamos por absurdo que $0 \leq \lambda < f^*(t)$. Então temos

$$S_t \subset \{x \in X : |f\chi_{S_t}(x)| \geq f^*(t)\} \subset \{x \in X : |f\chi_{S_t}(x)| > \lambda\}.$$

Logo $m_{f\chi_{S_t}}(\lambda) = \mu\{x \in X : |f\chi_{S_t}(x)| > \lambda\} = \mu(S_t) = t$

o que contradiz nossa escolha de λ, uma vez que $m_{f\chi_{S_t}}(\lambda) \leq s < t$. Portanto, se $m_{f\chi_{S_t}}(\lambda) \leq s$ então $\lambda \geq f^*(t)$, e temos

$$\{x \in X : |f(x)| > \lambda\} \subset \{x \in X : |f(x)| > f^*(t)\} \subset S_t.$$

Daí obtemos que

$$\{x\varepsilon X: |f\ \chi_{S_t}(x)| > \lambda\} = S_t \cap \{x\varepsilon X: |f(x)| > \lambda\}$$

$$= \{x\varepsilon X: |f(x)| > \lambda\}.$$

Logo, se $m_{f\chi_{S_t}}(\lambda) \leq s$ então $m_f(\lambda) = m_{f\chi_{S_t}}(\lambda) \leq s$ de onde decorre (1). A prova está, assim, completa.

(ii) Decorre de (3.19) e de (i).

□

(3.24) <u>Proposição</u>. Seja (X, M, μ) um espaço de medida não-atômica e seja $f \varepsilon F^k(X, M, \mu)$ tal que $m_f(\lambda) < \infty$ para todo $\lambda > 0$. Então para cada $t\varepsilon\mathbb{R}$ tal que $0 \leq t \leq \inf\{s\geq 0: f^*(s)=0\}$ existe $S_t \varepsilon M$, com $\mu(S_t) = t$ tal que

$$\int_{S_t} |f|d\mu = \int_0^t f^*(s)ds .$$

<u>Demonstração</u>. Seja $t \varepsilon \mathbb{R}$ tal que $0 \leq t \leq \inf\{s \geq 0: f^*(s) = 0\}$. Se $f^*(t) < \infty$, decorre (3.6.ii), e de (3.17) que

$$\mu\{x\varepsilon X: |f(x)| > f^*(t)\} \leq t \leq \mu\{x\varepsilon X: |f(x)| \geq f^*(t)\}.$$

Como μ é não-atômica existe $S_t \varepsilon M$ tal que $\mu(S_t) = t$ e

$$\{x\varepsilon X: |f(x)| > f^*(t)\} \subset S_t \subset \{x\varepsilon X: |f(x)| \geq f^*(t)\}.$$

O resultado decorre então de (3.21.ii).

Se $f^*(t) = \infty$ então $f^*(s) = \infty$ para todo $s \leq t$. Logo $\int_0^t f^*(s)ds = \infty$. Temos também que $m_f(\lambda) > t$ para todo $\lambda \geq 0$. Assim, se $S_n = \{x \varepsilon X : |f(x)| > n\}$ temos $t < \mu(S_n) = m_f(n) < \infty$ e $S_n \supset S_{n+1}$ para todo $n \varepsilon \mathbb{N}$. Logo

$\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n) = \lim\limits_{n\to\infty} (S_n) \geq t$ e portanto, como μ é não-atômica, existe $S_t \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n$ tal que $\mu(S_t) = t$. Mas se $x \varepsilon S_t$ então $|f(x)| = \infty$ e portanto

$$\int_{S_t} |f| d\mu = \infty = \int_0^t f^*(s)ds.$$

$||$

O lema que apresentamos a seguir será utilizado na demonstração de (11.1).

(3.25) <u>Lema</u>. Seja $f \varepsilon F^k(X, M, \mu)$ e seja $u > 0$. Consideremos

$$f_u = (\text{sgn } \bar{f}) \min \{u, |f|\}$$

e

$$f^u = f - f_u .$$

Então temos

(i) $$(f_u)^*(t) \leq \begin{cases} u & , \text{ se } t < m_f(u) \\ f^*(t), & \text{ se } t \geq m_f(u) \end{cases}$$

(ii) $(f^u)^*(t) \leq \begin{cases} f^*(t) & , \text{ se } t < m_f(u) \\ 0 & , \text{ se } t \geq m_f(u) . \end{cases}$

Demonstração

(i) Como $f_u \leq |f|$, decorre de (3.3.iv) que $(f_u)^*(t) \leq f^*(t)$ para todo $t \geq 0$. Por outro lado temos $|f_u|(s) \leq u$ para todo $s \geq 0$. Assim $(f_u)^*(t) \leq \min\{u, f^*(t)\}$ para todo $t \geq 0$. Como $f^*(t) > u$, para $t < m_f(u)$, podemos concluir que (i) se verifica.

(ii) Como $f^u \leq |f|$, temos também que $(f^u)(t) \leq f^*(t)$ para todo $t \geq 0$. Por outro lado, tendo em vista (1.8.iii), sabemos que $m_{f^u}(\lambda) = m_f(u + \lambda)$, para todo $\lambda \geq 0$. Assim, se $t \geq m_f(u)$ temos $m_{f^u}(\lambda) = m_f(u + \lambda) \leq m_f(u) \leq t$ para todo $\lambda \geq 0$, de onde segue-se que $(f^u)^*(t) = 0$ se $t \geq m_f(u)$, o que completa a prova.

| |

§ 4. Função Média.

Neste parágrafo, faremos algumas considerações sobre funções μ-localmente integráveis. O leitor perceberá que a nossa definição de função μ-localmente integrável não é a usual, uma vez que não estamos levando em conta nenhuma topologia do espaço X.

(4.1) <u>Definição</u>. Dizemos que uma função $f \varepsilon F^k(X,M,\mu)$ é <u>μ-localmente integrável</u> se $\int_S |f|\, d\mu < \infty$, para todo $S \varepsilon M$, com $\mu(S) < \infty$.

(4.2) <u>Proposição</u>. Seja (X, M, μ) um espaço de medida não-atômica. Se $f \varepsilon F^k(X, M, \mu)$ é μ-localmente integrável então $f^*(t) < \infty$ para todo $t > 0$.

(4.3) <u>Demonstração</u>. Seja $t_0 > 0$. Suponhamos que $f^*(t_0) = \infty$. Então $m_f(\lambda) > t_0$, para todo $\lambda \geq 0$.

Para cada $n \varepsilon \mathbb{N}$, seja

$$S_n = \{x \varepsilon X : |f(x)| > n\, 2^n\}.$$

Então $\mu(S_n) > t_0$, para todo $n \varepsilon \mathbb{N}$.

Como $\mu(S_1) > t_0$ e μ é não-atômica, existe $D_1 \subset S_1$ com $\mu(D_1) = \frac{t_0}{2}$. Portanto temos $\mu(S_2 \sim D_1) > t_0 - \frac{t_0}{2} = \frac{t_0}{2}$. Podemos então tomar $D_2 \subset S_2 \sim D_1$ tal que $\mu(D_2) = \frac{t_0}{2^2}$.

Temos agora que $\mu(S_3 \sim (D_1 \cup D_2)) > t_0 - \frac{t_0}{2} - \frac{t_0}{2^2}$ e portanto existe $D_3 \subset S_3 \sim (D_1 \cup D_2)$ tal que $\mu(D_3) = \frac{t_0}{2^3}$.

É fácil ver então que podemos escolher uma seqüência (D_n) de conjuntos dois a dois disjuntos tais que $\mu(D_n) = \frac{t_0}{2^n}$ e $D_n \subset S_n$ para todo $n \varepsilon \mathbb{N}$.

Seja $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$. Então $\mu(D) < \infty$ e

$$\int_D |f|\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{D_n} |f|\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} n\, 2^n\, \mu(D_n)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n\, 2^n\, \frac{t_0}{2^n} = \infty$$

o que contradiz a hipótese de f ser μ-localmente integrável. $\square$

(4.3) <u>Proposição</u>. Seja (X, M, μ) um espaço de medida não-atômica. Se $f \in F^k(X, M, \mu)$ é μ-localmente integrável então f^* é m-localmente integrável.

<u>Demonstração</u>. De acordo com (4.2) sabemos que $f^*(t) < \infty$ para todo $t > 0$.

Seja $a > 0$. Então $f^*(a) < \infty$ e como

$\mu\{x \in X : |f(x)| > f^*(a)\} = m_f(f^*(a)) = m_{f^*}(f^*(a)) \leq a$, temos que estão verificadas as hipóteses de (3.21.ii) já que f é μ-localmente integrável. Portanto $\int_0^t f^*(s)ds < \infty$ para todo $t \geq 0$. Assim, dado $G \subset [0,\infty[$ com $m(G) < \infty$, temos

$$\int_G f^*(s)ds = \int_{G \cap [0,1]} f^*(s)ds + \int_{G \cap [1,\infty[} f^*(s)ds$$

$$\leq \int_0^1 f^*(s)ds + f^*(1)\, m(G) < \infty .$$

$\square$

(4.4) <u>Definição</u>. Seja $f \in F^k(X, M, \mu)$. A função f^{**}

definida em $]0,\infty[$ pela relação

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s)\,ds$$

é chamada <u>função média de f</u> .

Devido a (4.3), podemos assegurar que se (X, M, μ) é um espaço de medida não-atômica e se f é μ-localmente integrável então $f^{**}(t) < \infty$ para todo $t > 0$. Além disso, é fácil ver que f^{**} é não-crescente.

(4.5) <u>Proposição</u>. Sejam $f,g \in F^k(X, M, \mu)$. Então

(i) $(\alpha f)^{**} \leq |\alpha|\, f^{**}$, para todo $\alpha \in C$;

(ii) $f^*(t) \leq f^{**}(t)$, para todo $t > 0$;

(iii) $|f| \leq |g|$ q.s. implica que $f^{**} \leq g^{**}$.

<u>Demonstração</u>. As partes (i) e (iii) decorrem de propriedades análogas para f^*. Para demonstrar (ii) basta observar que, como f^* é não-crescente temos

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s)\,ds \geq \frac{1}{t}\, f^*(t) \quad t = f^*(t)$$

para todo $t > 0$.

$\square$

(4.6) <u>Proposição</u>. Seja (f_n) uma seqüência não-decrescente de funções de $F^+(X, M, \mu)$ tal que $\lim_{n\to\infty} f_n = f$. Então a seqüência (f_n^{**}) é não-decrescente e $\lim_{n\to\infty} f_n^{**} = f^{**}$.

Demonstração. É conseqüência imediata de (3.14) e do teorema da convergência monótona.

$\square$

(4.7) Proposição. Se (X,M,μ) é um espaço de medida não-atômica e $f\in F^k(X,M,\mu)$ temos

(i) $$t\, f^{**}(t) = \sup\{ \int_S |f|d\mu : (S) \leq t\}$$

para todo $t > 0$, e

(ii) Se f é μ-localmente integrável e $m_f(\lambda) < \infty$ para todo $\lambda > 0$, então para cada $t > 0$ existe $S \in M$, com $\mu(S)=t$ tal que $t\, f^{**}(t) = \int_S |f|\, d\mu$.

Demonstração. De (3.22.ii) decorre que para cada $t > 0$ e para cada $S \in M$ com $\mu(S) \leq t$ temos

$$\int_S |f|\, d\mu \leq \int_0^{\mu(S)} f^*(s)\, ds \leq \int_0^t f^*(s)\, ds = t\, f^{**}(t)$$

Logo

$$\sup\{ \int_S |f|\, d\mu : \mu(S) \leq t\} \leq t\, f^{**}(t)$$

para todo $t > 0$. (1)

(i) Suponhamos inicialmente $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_{S_i}$ onde $0 < \alpha_n <\ldots< \alpha_1$ e $S_1,\ldots,S_n$ são subconjuntos mensuráveis de X, dois a dois disjuntos de medida positiva.

Se $\mu(S_i) < \infty$ para $1 \leq i \leq n$ então de acordo com (3.12.iii) temos que:

$$\int_0^t f^*(s)ds = \alpha_1 \; t \;, \text{ se } t \leq \mu(S_1) \;;$$

$$\int_0^t f^*(s)ds = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \; \mu(S_i) \;, \text{ se } t > \sum_{i=1}^{n} \mu(S_i) \;;$$

e

$$\int_0^t f^*(s)ds = \sum_{i=1}^{i_0} \alpha_i \; \mu(S_i) + \alpha_{i_{0+1}} \left(t - \sum_{i=1}^{i_0} \mu(S_i)\right)$$

se $\sum_{i=1}^{i_0} \mu(S_i) < t \leq \sum_{i=1}^{i_0+1} \mu(S_i)$ para algum i_0, $1 \leq i_0 < n$.

Assim, se $t \leq \mu(S_1)$, como μ é não-atômica existe $D_1 \subset S_1$, tal que $\mu(D_1) = t$ e portanto

$$\sup\{ \int_S |f| d\mu \; : \; \mu(S) \leq t\} \geq \int_{D_1} |f| d\mu \geq \alpha_1 \; t = \int_0^t f^*(s)ds$$

Se $t > \sum_{i=1}^{n} \mu(S_i)$, então tomando $D = \bigcup_{i=1}^{n} S_i$ temos

$$\sup\{ \int_S |f| d\mu \; : \; \mu(S) \leq t\} \geq \int_D |f| d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \; \mu(S_i) = \int_0 f^*(s)ds$$

Se $\sum_{i=1}^{i_0} \mu(S_i) < t \leq \sum_{i=1}^{i_0+1} \mu(S_i)$ para algum i_0, $1 \leq i_0 < n$

então $t - \sum_{k=1}^{i_0} \mu(S_k) < \mu(S_{i_0+1})$ e portanto, como μ é não-atômica existe $D_{i_0+1} \subset S_{i_0+1}$ tal que $\mu(D_{i_0+1}) = t - \sum_{k=1}^{i_0} \mu(S_k)$.

Tomando $D = S_1 \cup \ldots \cup S_{i_0} \cup D_{i_0+1}$ temos que

$$\mu(D) = \sum_{i=1}^{i_o} \mu(S_i) + t - \sum_{i=1}^{i_o} \mu(S_i) = t$$

e

$$\sup \{\int_S |f|\, d\mu : \mu(S) \leq t\} \geq \int_D |f| d\mu$$

$$= \sum_{i=1}^{i_0} \alpha_i\, \mu(S_i) + \alpha_{i_0+1}(t - \sum_{i=1}^{i_0} \mu(S_i))$$

$$= \int_0^t f^*(s) ds$$

Temos, assim, que para todo $t > 0$ vale que

$$\sup \{\int_S |f|\, d\mu : \mu(S) \leq t\} \geq \int_0^t f^*(s) ds = t\, f^{**}(t)$$

e de (1) concluímos que

$$\sup \{\int_S |f|\, d\mu : \mu(S) \leq t\} = t\, f^{**}(t)$$

Raciocínio semelhante mostra que a igualdade acima vale, também, se $\mu(S_i) = \infty$ para algum $i = 1,\ldots,n$.

Tomemos agora $f \in F^k(X, M, \mu)$ qualquer e (f_n) uma seqüência não-decrescente de funções simples de $F^+(X, M, \mu)$

tal que $\lim_{n\to\infty} f_n = |f|$. Então, de acordo com (4.6) temos que $\lim_{n\to\infty} t\, f_n^{**}(t) = t\, f^{**}(t)$ para todo $t > 0$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$t\, f_n^{**}(t) = \sup \{ \int_S |f|d\mu : \mu(S) \leq t\}$$

$$\leq \sup \{ \int_S |f|d\mu : \mu(S) \leq t\} .$$

Portanto

$$t\, f_n^{**}(t) \leq \sup \{ \int_S |f|d\mu : \mu(S) \leq t\}$$

o que completa a prova de (i), tendo em vista (1).

(ii) Se $f^*(s) \neq 0$ para todo $s > 0$, o resultado decorre de (3.24).

Suponhamos que $f^*(s) = 0$ para algum $s > 0$. Seja $s_0 = \inf \{s \geq 0 : f^*(s) = 0\}$. Como f^* é contínua à direita então $f^*(s_0) = 0$. Sabemos de (4.2) que $f^*(t) < \infty$ para todo $t > 0$. Assim, se $0 \leq t \leq s_0$ o resultado decorre de (3.24). Se $t > s_0$ então como f é não-crescente e $f^*(s_0) = 0$ temos $f^*(s)=0$ para $s_0 \leq s \leq t$. Logo

$$t\, f^{**}(t) = \int_0^t f^*(s)ds = \int_0^{s_0} f^*(s)ds = s_0\, f^{**}(s_0) .$$

Logo existe S_0 com $\mu(S_0) = s_0$ tal que

$$t\, f^{**}(t) = \int_{S_0} |f|\, d\mu \ ,$$

o que demonstra (ii), uma vez que $\mu(S_0) = s_0 \leq t$.

□

(4.8) Corolário. Sejam (X,M,μ) um espaço de medida não-atômica e $f \in F^k(X,M,\mu)$. Se $f^{**}(t) < \infty$ para todo $t \in \mathbb{R} \cap \,]0,\mu(X)[$ então f é μ-localmente integrável.

Demonstração. É conseqüência de (4.7.i).

□

(4.9) Proposição. Seja (X,M,μ) um espaço de medida não-atômica e sejam $f,g \in F^k(X, M,\mu)$. Então se f+g está definida temos

$$(f + g)^{**} \leq f^{**} + g^{**}.$$

Demonstração. De acordo com (4.7.i) temos para todo $t > 0$ que

$$\begin{aligned} t(f+g)^{**}(t) &= \sup \{ \int_S |f+g|\, d\mu : \mu(S) \leq t\} \\ &\leq \sup \{ \int_S |f|\, d\mu : \mu(S) \leq t\} \\ &\quad + \sup \{ \int_S |g|\, d\mu : \mu(S) \leq t\} \\ &= t\, f^{**}(t) + t\, g^{**}(t) \ . \end{aligned}$$

Logo $(f+g)^{**} \leq f^{**} + g^{**}$.

□

CAPÍTULO II

§ 5. Funções de Young generalizadas e espaços de Birnbaum Orlicz.

(5.1) <u>Definição</u>. Uma função A definida em $[0,\infty[$ com valores em $[0,\infty]$ é chamada <u>função de Young generalizada</u> se

(i) $A(0) = 0$;

(ii) A é contínua à esquerda em $]0,\infty[$;

(iii) $\frac{A(t)}{t}$ é não-decrescente.

A função nula e a função que é igual a zero no zero e igual a ∞ em $]0,\infty[$ são funções de Young generalizadas que chamamos triviais.

(5.2) <u>Definição</u>. Dizemos que uma função A definida em $[0,\infty[$ com valores em $[0,\infty]$ é uma <u>função de Young</u> se existe uma função

$p: [0,\infty[\to [0,\infty]$ não-decrescente, e tal que

$$A(t) = \int_0^t p(s)ds \text{ , para todo } t > 0 \text{ .}$$

É fácil ver que toda função de Young generalizada é não-decrescente e que toda função de Young é uma função de Young generalizada.

(5.3) Proposição. Se A é uma função de Young generalizada então a função A_0 definida em $[0,\infty[$ por

$$A_0(t) = \int_0^t \frac{A(s)}{s}\, ds$$

é uma função de Young (que chamamos de regularização de A). Valem as seguintes relações

(i) $A_0(t) \leq A(t) \leq A_0(2t)$, para $0 \leq t < \infty$;

(ii) $\{t : A(t)=0\} = \{t : A_0(t) = 0\}$;

(iii) $\inf\{t : A(t) = \infty\} = \inf\{t : A_0(t) = \infty\}$.

Demonstração. É imediato que A_0 é uma função de Young e que (ii) e (iii) estão verificados. Para demonstrar (i), notemos que se $0 \leq t < \infty$ então

$$A_0(t) = \int_0^t \frac{A(s)}{s}\, ds \leq A(t) \leq \int_t^{2t} \frac{A(s)}{s}\, ds \leq A_0(2t)$$

$\square$

(5.4) Definição. Seja A uma função não-decrescente definida em $[0,\infty[$ com valores em $[0,\infty]$. A função A^{-1} definida, em $[0,\infty[$ pela relação

$$A^{-1}(v) = \inf\{t : A(t) > v\} = \sup\{t : A(t) \leq v\}$$

é chamada inversa à direita de A.

É fácil ver que A^{-1} é uma função não-decrescente, contínua à direita.

(5.5) Proposição. Seja A uma função de Young generalizada não trivial. Sejam $a=\sup\{t:A(t)=0\}$ e $b=\inf\{t:A(t)=\infty\}$. Então temos

(i) $A^{-1}(v) < \infty$, se $0 \leq v < \infty$;

(ii) $A^{-1}(0) = a$;

(iii) $A^{-1}(v) = 0$ implica que $v = 0$;

(iv) $A^{-1}(A(u)) = u$ e $a \leq u < b$;

(v) $\frac{A^{-1}(v)}{v}$ é não-decrescente ;

(vi) A^{-1} é contínua em $]0,\infty[$;

(vii) $A(A^{-1}(u)) \leq u$, se $0 \leq u < \infty$;

(viii) $A(A^{-1}(u)) = u$,se $u > 0$ e A é contínua em $A^{-1}(u)$.

Demonstração. Ver [1] , (2.30.v) e (2.3.1).

$\square$

Verifica-se facilmente que se A é inversível então A^{-1} é a inversa usual de A.

Os resultados que seguem são preliminares para (5.10) (5.11) e (5.12). Estes, por sua vez serão utilizados nas demonstrações do § 7.

(5.6) Proposição. Seja $A:]0,\infty[\to [0,\infty]$ uma função não-decrescente e não trivial. Se $\frac{A(t)}{t^\alpha}$ é não-decrescente para algum $\alpha > 0$ então $0 < A(t) < \infty$ para todo $t > 0$ e A é contínua.

Demonstração. Suponhamos que $A(t_0) = 0$ para algum $t_0 > 0$. Então como $\frac{A(t)}{t^\alpha}$ é não-crescente temos $\frac{A(t)}{t^\alpha} \leq \frac{A(t_0)}{t_0^\alpha} = 0$ para todo $t \geq t_0$. Logo $A(t) = 0$, se $t \geq t_0$. Por outro lado como A é não-decrescente concluímos que $A(t) = o$ se $t \leq t_0$. Assim temos que A é identicamente nula. Logo se A é não-trivial então $A(t) > 0$ para todo $t > 0$.

Argumento análogo demonstra que $A(t) < \infty$ para todo $t \geq 0$.

Vamos mostrar agora que A é contínua. Seja $t_0 > 0$. Lembrando que A é não-decrescente e que $\frac{A(t)}{t^\alpha}$ é não-crescente concluímos que:

- se $t > t_0$ então

$$|A(t)-A(t_0)| = A(t) - A(t_0) = t^\alpha \frac{A(t)}{t^\alpha} - t_0^\alpha \frac{A(t_0)}{t_0^\alpha}$$

$$\leq (t^\alpha - t_0^\alpha) \frac{A(t_o)}{t_0^\alpha} .$$

- se $t < t_0$ então

$$|A(t)-A(t_0)| = A(t_0)-A(t) = t_0^\alpha \frac{A(t_0)}{t_0^\alpha} - t^\alpha \frac{A(t)}{t^\alpha}$$

$$\leq (t_0^\alpha - t^\alpha) \frac{A(t_0)}{t^\alpha} .$$

A continuidade de A é, agora, imediata.

| |

(5.7) Proposição. Se A é uma função de Young generalizada tem-se que

(i) se existe t_0 tal que $A(t_0) > 0$ então A é não--limitada;

(ii) se $0 < A(t) < \infty$ para todo $t > 0$ então A é (estritamente) crescente.

<u>Demonstração</u>.

(i) Suponhamos que exista t_0 tal que $A(t_0) > 0$. Então $t_0 \neq 0$ e como $\frac{A(t)}{t_0}$ é não-crescente temos $A(t) \geq \frac{t}{t_0} A(t_0)$ para todo $t \geq t_0$. Logo A é não limitada.

(ii) Suponhamos que $0 < A(t) < \infty$ para todo $t > 0$. Tomemos $0 \leq t_1 < t < \infty$. Se $t_1 = 0$ então $A(t_1) = 0 < A(t_2)$. Se $t_1 \neq 0$, como $\frac{A(t)}{t}$ é não-decrescente temos $A(t_1) \leq \frac{t_1}{t_2} A(t_2) < A(t_2)$.

$\square$

(5.8) <u>Corolário</u>. Seja A uma função de Young generalizada não-trivial tal que $\frac{A(t)}{t^\alpha}$ é não-crescente para algum $\alpha > 0$. Então A é contínua, (estritamente) crescente e não limitada. Portanto A é inversível.

<u>Demonstração</u>. É conseqüência de (5.6) e (5.7).

$\square$

(5.9) <u>Proposição</u>. Seja A uma função de Young generalizada contínua não trivial. Então para cada $\alpha > 0$ temos

(i) $\frac{A(t)}{t^\alpha}$ é não-crescente se e só se $\frac{A^{-1}(t)}{\frac{1}{t^\alpha}}$ é não-decrescente;

(ii) $\frac{A(t)}{t^{\alpha}}$ é não-decrescente se e só se $\frac{A^{-1}(t)}{t^{\frac{1}{\alpha}}}$ é não-crescente.

Demonstração. Vamos demonstrar apenas (i) uma vez a prova de (ii) é inteiramente análoga.

Suponhamos que $\frac{A(t)}{t^{\alpha}}$ seja não-crescente. Tomemos $0 < t_1 < t_2$. Queremos mostrar que

$$\frac{A^{-1}(t_2)}{t_2^{\frac{1}{\alpha}}} \geq \frac{A^{-1}(t_1)}{t_1^{\frac{1}{\alpha}}} . \tag{1}$$

Como $\frac{A(t)}{t^{\alpha}}$ é não-crescente e $\frac{t_1}{t_2} < 1$ então

$$\frac{A\left(\left(\frac{t_1}{t_2}\right)^{\frac{1}{\alpha}} s\right)}{\frac{t_1}{t_2}\, s^{\alpha}} \geq \frac{A(s)}{s^{\alpha}}$$

para todo $s > 0$, isto é $A\left(\left(\frac{t_1}{t_2}\right)^{\frac{1}{\alpha}} s\right) \geq \frac{t_1}{t_2} A(s)$ para todo $s > 0$.

Assim, se $A(s) > t_2$ temos que

$$A\left(\left(\frac{t_1}{t_2}\right)^{\frac{1}{\alpha}} s\right) > t_1$$

ou ainda que

$$\left(\frac{t_1}{t_2}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \{s : A(s) > t_2\} \subset \{u : A(u) > t_1\} .$$

Portanto

$$\left(\frac{t_1}{t_2}\right)^{\frac{1}{\alpha}} A^{-1}(t_2) \geq A^{-1}(t_1)$$

o que mostra que vale (1).

Suponhamos agora que $\dfrac{A^{-1}(t)}{t^{\frac{1}{\alpha}}}$ seja não-decrescente. Tomemos $0 < t_1 < t_2 < \infty$ e vamos mostrar que

$$\frac{A(t_2)}{t_2^{\alpha}} \leq \frac{A(t_1)}{t_1^{\alpha}} . \tag{2}$$

Suponhamos por absurdo que (2) não seja verdadeira. Então existe $M > 0$ tal que

$$\left(\frac{t_2}{t_1}\right)^{\alpha} A(t_1) < M < A(t_2) \leq \infty . \tag{3}$$

Como $\left(\frac{t_1}{t_2}\right)^{\alpha} M < M$ e $\dfrac{A^{-1}(t)}{t^{\frac{1}{\alpha}}}$ é não-decrescente temos

$$A^{-1}\left(\left(\frac{t_1}{t_2}\right)^{\alpha} M\right) \leq \frac{t_1}{t_2} A^{-1}(M) . \tag{4}$$

Por outro lado como $M < A(t_2)$ temos que $A^{-1}(M) \leq t_2$ e portanto (4) nos garante que

$$A^{-1}\left(\left(\frac{t_1}{t_2}\right)^{\alpha} M\right) \leq t_1 .$$

Lembrando que A é contínua e recorrendo a (5.5.viii) obtemos

$$\left(\frac{t_1}{t_2}\right)^{\alpha} M \leq A(t_1),$$

o que contraria a relação (3). Assim temos (2) e a prova está completa.

$||$

(5.10). <u>Proposição</u>. Sejam A e B funções de Young generalizadas contínuas e sejam γ, ε, p, q números reais tais que $\varepsilon \neq 0$, $p > 0$, e $q > 0$. Suponhamos que:

(i) $B^{-1}(t) = A^{-1}(t^{\varepsilon})t^{\gamma}$ para todo $t > 0$;

(ii) $\frac{p}{\varepsilon}\left(\frac{1}{q} - \gamma\right) = 1$.

Então temos:

(iii) Se $\varepsilon > 0$ e $\frac{B(t)}{t^q}$ é não-crescente então $\frac{A(t)}{t^p}$ é não-crescente;

(iv) Se $\varepsilon < 0$ e $\frac{B(t)}{t^q}$ é não-crescente então $\frac{A(t)}{t^p}$ é não-decrescente;

(v) Se $\varepsilon > 0$ e $\frac{B(t)}{t^q}$ é não-decrescente então $\frac{A(t)}{t^p}$ é não-decrescente;

(vi) Se $\varepsilon < 0$ e $\frac{B(t)}{t^q}$ é não-decrescente então $\frac{A(t)}{t^p}$ é não-crescente.

<u>Demonstração</u>. Vamos demonstrar apenas (iii). As demonstrações dos outros ítens são análogas.

Se $\frac{B(t)}{t^q}$ é não-crescente, então, de (5.9.i) decorre que $\dfrac{B^{-1}(t)}{t^{\frac{1}{q}}}$ é não-decrescente.

Substituindo B^{-1} pela expressão dada em (i) temos que $\dfrac{A^{-1}(t^{\varepsilon})t^{\gamma}}{t^{\frac{1}{q}}}$ é não-decrescente. Como $\varepsilon > 0$ temos que $\dfrac{A^{-1}(s)\ s^{\frac{\gamma}{\varepsilon}}}{s^{\frac{1}{q\varepsilon}}}$ é não-decrescente. De (ii) decorre então que $\dfrac{A^{-1}(s)}{s^{\frac{1}{p}}}$ é não-decrescente. Recorrendo novamente a (5.9.i) temos agora que $\dfrac{A(s)}{s^{p}}$ é não-crescente.

| |

(5.11) <u>Proposição</u>. Sejam A e B funções de Young generalizadas contínuas e sejam ε, p, γ números reais tais que $\varepsilon \neq 0$ e $p > 0$. Suponhamos que

(i) $B^{-1}(t) = A^{-1}(t^{\varepsilon})t^{\gamma}$, para todo $t > 0$;

(ii) $\varepsilon = -p\gamma$.

Então temos

(iii) Se $\varepsilon > 0$ então $\dfrac{A(t)}{t^{p}}$ é não-crescente;

(iv) Se $\varepsilon < 0$ então $\dfrac{A(t)}{t^{p}}$ é não-decrescente.

<u>Demonstração</u>. Vamos demonstrar apenas (iv). Como B^{-1} é não-decrescente então nossa hipótese (i) garante que $A^{-1}(t^{\varepsilon})t^{\gamma}$ é não-decrescente. Decorre de (ii) que $\dfrac{A^{-1}(t^{\varepsilon})}{t^{\frac{\varepsilon}{p}}}$ é

não-decrescente e como $\varepsilon < 0$ temos que $\frac{A^{-1}(t)}{t^{\frac{1}{p}}}$ é não-crescente. De (5.9.ii) concluímos então que $\frac{A(t)}{t^p}$ é não-decrescente.

$\square$

(5.12). Proposição. Sejam A e B funções de Young generalizadas contínuas e sejam p e q reais positivos. Suponhamos que

(i) $A^{-1}(t^{\frac{p}{q}}) = B^{-1}(t)$ para todo $t > 0$;

(ii) $\frac{B(t)}{t^q}$ é não-decrescente .

Então $\frac{A(t)}{t^p}$ e não-decrescente.

Demonstração. Análoga às demonstrações de (5.10) e (5.11).

Passaremos agora ao estudo dos espaços de Birnbaum--Orlicz.

(5.13) Definição. Seja A uma função de Young generalizada. Denotemos por $L_A(X, M, \mu)$ o subconjunto de $F^c(X,M,\mu)$, das classes de funções f tais que

$$\int_X A\left(\frac{|f|}{K}\right) d\mu < \infty$$

para algum $K > 0$. Nessas condições dizemos que $L_A(X, M, \mu)$ é um espaço de Birnbaum-Orlicz.

Se A é trivial dizemos que $L_A(X, M, \mu)$ é trivial.

É conveniente observar que se f é μ-mensurável então $A(\frac{|f|}{K})$ é, também μ-mensurável uma vez que A é monótona.

Quando não houver perigo de confusão escreveremos simplesmente L_A ao invés de $L_A(X, M, \mu)$.

(5.14) Proposição. Todo espaço de Birnbaum-Orlicz é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$.

Demonstração. Ver [1] teorema (3.9) .

$||$

(5.15) Definição. Seja A uma função de Young generalizada. Definimos a função p_A em L_A pela igualdade

$$p_A(\dot{f}) = \inf\{K > 0 : \int_X A(\frac{|f|}{K})\, d\mu \leq 1\}.$$

(5.16) Proposição. Se A é uma função de Young generalizada não trivial então

(i) $p_A(\alpha\dot{f}) = |\alpha|\, p_A(\dot{f})$, para toda $f \in L_A$ e para todo $\alpha \in \mathbb{C}$;

(ii) $p_A(\dot{f}) = 0$ se e só se $\dot{f} = 0$;

(iii) se $p_A(\dot{f}) \neq 0$ então $\int_X A(\frac{|f|}{p_A(\dot{f})})\, d\mu \leq 1$, e

e portanto $p_A(\dot{f}) \leq 1$ se e só se $\int_X A(|f|)\, d\mu \leq 1$.

Se A é uma função de Young então p_A é uma norma sobre L_A.

<u>Demonstração</u>. Ver [1] , teoremas (3.21) e (3.22).

(5.17) <u>Observação</u>. Seja A uma função de Young generalizada. Como $A_0(t) \leq A(t) \leq A_0(2t)$ para $0 \leq t < \infty$ (5.3.i.) temos

$$\int_X A_0\left(\frac{|f|}{K}\right)d\mu \leq \int_X A\left(\frac{|f|}{K}\right)d\mu \leq \int_X A_0\left(\frac{2|f|}{K}\right)d\mu$$

para todo $K > 0$ e para toda $f \in F^C(X, M, \mu)$. Assim é fácil ver que $L_A = L_{A_0}$. Logo, tendo em vista (5.16) e lembrando que A_0 é uma função de Young, podemos garantir que se A é não trivial então p_{A_0} é uma norma sobre L_A.

(5.18) <u>Notação</u>. Quando A for uma função de Young não trivial escreveremos $||\dot{f}||_A$ ao invés de $p_A(\dot{f})$. Se A for apenas de Young generalizada não trivial o símbolo $||\dot{f}||_A$ indicará $p_{A_0}(\dot{f})$. É imediato que $||\ \ ||_A$ é então uma norma em L_A.

Além disso, tendo em vista (5.17) temos $\frac{1}{2}\, p_A(\dot{f}) \leq ||\dot{f}||_A \leq p_A(\dot{f})$ para toda $\dot{f} \in L_A$.

(5.19) <u>Proposição</u>. Seja A uma função de Young generalizada não trivial. Se $f,g \in F^C(X, M, \mu)$, $\dot{f} \in L_A$ e $|g| \leq |f|$ q.s. então $\dot{g} \in L_A$ e $||\dot{g}||_A \leq ||\dot{f}||_A$.

<u>Demonstração</u>. É conseqüência imediata da definição de $|| \ ||_A$.

$\square$

(5.20) <u>Proposição</u>. Seja A uma função de Young generalizada não-trivial. Consideremos uma seqüência (f_n) de funções não-negativas de $F^c(X, M, \mu)$ e uma função $f : X \to [0,\infty]$ μ-mensurável. Se

(a) $(f_n(x))$ é uma seqüência não-decrescente para quase todo $x \in X$;

(b) $\dot{f}_n \in E$ para todo $n \in \mathbb{N}$;

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ q.s. ;

(d) existe $M \geq 0$ tal que $||\dot{f}_n||_A \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$,

então existe $h \in F^c(X, M, \mu)$ tal que $h = f$ q.s., $\dot{h} \in L_A$ e $||\dot{h}||_A \leq M$.

<u>Demonstração</u>. Faremos a demonstração supondo que A é uma função de Young. Se A for uma função de Young generalizada a demonstração é análoga.

Se $M = 0$, basta tomar $h = 0$ e a prova está completa. Suponhamos $M > 0$. Vamos mostrar que f é finita q.s.

Nossas hipóteses garantem que existe $S \in M$, tal que $\mu(S) = 0$ e $(f_n(x))$ é uma seqüência não-decrescente para todo $x \in X \sim S$.

Seja $D = \{x \in X : |f(x)| = \infty\}$.

Para cada $K \in \mathbb{N}$ e para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos

$$D_{n,K} = \{x \in X \sim S : |f_n(x)| > K\}$$

e

$$D_K = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_{n,K} .$$

É fácil ver que

$$D \cap (X \sim S) = \bigcap_{K\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_{n,K} = \bigcap_{K\in\mathbb{N}} D_K .$$

e que

$$\mu(D_K) = \mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_{n,K}) = \lim_{n\to\infty} \mu(D_{n,K})$$

para todo $K \in \mathbb{N}$.

De acordo com (d) temos que

$$\mu(D_{n,K})\, A(\frac{K}{M}) \leq \int_{D_{n,K}} A(\frac{|f_n|}{M})\, d\mu \leq \int_X A(\frac{|f_n|}{M})\, d\mu \leq 1$$

para todo K, $n \in \mathbb{N}$. Como A é não trivial existe $K_0 \in \mathbb{N}$ tal que $A(\frac{K_0}{M}) > 0$. Assim $\mu(D_{n,K}) \leq \frac{1}{A(\frac{K}{M})}$ para todo $K \geq K_0$, de onde segue que $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(D_{n,K}) \leq \frac{1}{A(\frac{K}{M})}$ para $K \geq K_0$. Portanto $\mu(D_K) \leq \frac{1}{A(\frac{K}{M})} < \infty$ para todo $K \geq K_0$, o que mostra que

$\mu(D \cap (X \sim S)) = \lim\limits_{K\to\infty} \mu(D_K) \leq \lim\limits_{K\to\infty} \frac{1}{A(\frac{K}{M})}$. Como A é não-limitada concluímos que $\mu(D \cap (X \sim S)) = 0$ e portanto que $\mu(D)=0$. Logo f é finita q.s.

Seja h a função definida em X por

$$h(x) = \begin{cases} f(x) \ , & \text{se} \quad x \in X \sim D \\ 0 \ , & \text{se} \quad x \in D \ . \end{cases}$$

É evidente que $h \in F^c(X, M, \mu)$ e que $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ q.s. Do teorema da convergência monótona e de (d) decorre que $\dot{h} \in L_A$ e que $||\dot{h}||_A \leq M$.

| |

(5.21) Proposição. Se A é uma função de Young generalizada não trivial então $(L_A, || \ ||_A)$ é um espaço de Banach.

Demonstração. Ver [1] teorema (3.29).

| |

(5.22) Exemplos de espaços de Birnbaum-Orlicz são os espaços L_p para $1 \leq p \leq \infty$. Indiquemos por M_p a função $M_p(t) = t^p$ se $1 \leq p < \infty$ e por M_∞ a função $M_\infty(t) = \begin{cases} 0 \text{ se } 0 \leq t < 1 \\ \infty \text{ se } 1 \leq t < \infty \end{cases}$

É fácil ver que M_p é uma função de Young, $L_p = L_{M_p}$ e $p_{M_p} = || \ ||_p$ se $1 \leq p \leq \infty$.

(5.23) Proposição. Seja A uma função de Young generalizada não-trivial, p um número real positivo e $f \in F^c(X, M, \mu)$. Para cada $u > 0$ consideremos f_u e f^u como em (1.8). Então se $\dot{f} \in L_A$ temos que

(i) se $\frac{A(t)}{t^p}$ é não-crescente então $\dot{f}_u \in L_p$;

(ii) se $\frac{A(t)}{t^p}$ é não-decrescente então $\dot{f}^u \in L_p$.

<u>Demonstração</u>. Tomemos $u > 0$. Se $f \in L_A$ então

$$\int_X A(\frac{|f|}{K})\, d\mu < \infty . \qquad (1)$$

(i) Como $|f_u(x)| \leq u$ para todo $x \in X$ e $\frac{A(t)}{t^p}$ é não-crescente temos

$$\frac{A(\frac{u}{K})}{(\frac{u}{K})^p} \leq \frac{(\frac{|f_u(x)|}{K})}{(\frac{|f_u(x)|}{K})^p} ,$$

para todo $x \in X$, tal que $f_u(x) \neq 0$. Logo

$$A(\frac{u}{K})\ |f_u(x)|^p \leq u^p\ A(\frac{f_u(x)}{K}) ,$$

para todo $x \in X$ e portanto

$$A(\frac{u}{K}) \int_X |f_u(x)|^p\, d\mu \leq u^p \int_X A(\frac{f_u(x)}{K})\, d\mu \qquad (2)$$

Mas como $|f_u(x)| = \min\{u, |f(x)|\} \leq |f(x)|$, para todo $x \in X$, lembrando que $A(\frac{u}{K}) > 0$ decorre de (1) e de (2) que

$$\int_X |f_u(x)|^p d\mu < \infty .$$

Portanto $f_u \in L_p$.

(ii) Como $\frac{A(t)}{t^p}$ é não-decrescente temos

$$\frac{A(\frac{u}{K})}{(\frac{u}{K})^p} \leq \frac{A(\frac{|f(x)|}{K})}{(\frac{|f(x)|}{K})^p}$$

para todo $x \in X$ tal que $|f(x)| > u$. Logo

$$A(\tfrac{u}{K})\ |f(x)|^p \leq u^p\ A(\frac{|f(x)|}{K})$$

para todo $x \in X$ tal que $|f(x)| > u$.

Lembremos agora que $|f^u(x)| = |f(x)| - u < |f(x)|$ se $|f(x)| > u$ e $f^u(x) = 0$ se $|f(x)| \leq u$. Logo, se $f^u(x) \neq 0$ então

$$A(\tfrac{u}{K})\ |f^u(x)|^p \leq A(\tfrac{u}{K})\ |f(x)| \leq u^p\ A(\frac{|f(x)|}{K}).$$

Portanto

$$A(\tfrac{u}{k}) \int_X |f^u(x)|^p\, d\mu \leq u^p \int_X A(\frac{|f|}{K})\, d\mu\,.$$

Decorre agora de (1) que $\dot{f}_u \in L_p$.

$\square$

§ 6. Algumas noções sobre operadores

Introduziremos aqui as definições e algumas propriedades de operadores sublineares, de tipo forte e fraco entre espaços de Orlicz, como material preliminar para os teoremas do § 7.

Nesta parágrafo A e B indicarão funções de Young generalizadas não triviais.

(6.1) <u>Definição</u>. Dizemos que um operador T definido em $L_A(X, M, \mu)$ com valores em $L_B(Y, N, \nu)$ é de <u>tipo forte (A,B)</u> se existe $K > 0$ tal que

$$\text{(i)} \quad \int_Y B\left(\frac{|Tf|}{K}\right) d\nu \leq 1$$

para toda $f \in L_A$ com $p_A(f) \leq 1$.

Se T é de tipo forte (A,B) o número

$$||T||_{(A,B)} = \inf\{K>0 : \int_Y B\left(\frac{|Tf|}{K}\right) d\nu \leq 1, \ \forall\, f\in L_A \ \text{com } p_A(f) \leq 1\}$$

é chamado <u>norma</u> (forte) de T.

(6.2) <u>Definição</u>. Dizemos que um operador T definido em $L_A(X, M, \mu)$ com valores em $F^C(Y, N, \nu)$ é de <u>tipo fraco (A,B)</u> se existe $K > 0$ tal que para toda $f \in L_A$ com $p_A(f) \leq 1$ e para todo $\lambda > 0$ temos

$$\text{(i)} \quad B\left(\frac{\lambda}{K}\right) m_{Tf}(\lambda) \leq 1 .$$

Se T é de tipo fraco (A,B), o número

$$||T||^{W}_{(A,B)} = \inf\{K>0 : B\left(\frac{\lambda}{K}\right) m_{Tf}(\lambda) \leq 1, \ \forall f\in L_A \ \text{com } p_A(f) \leq 1, \ \forall\, \lambda > 0\}$$

é chamado <u>norma fraca</u> de T.

(6.3) <u>Observações</u>

(a) Como toda função de Young generalizada é contínua à esquerda é fácil ver que se T é de tipo forte (A, B) e $||T||_{(A,B)} \neq 0$ então $\int_Y B\left(\frac{|Tf|}{||T||_{(A,B)}}\right) d\nu \leq 1$, para $f \in L_A$ para $p_A(f) \leq 1$.

De modo análogo temos que se T é de tipo fraco (A,B) e $||T||^w_{(A,B)} \neq 0$ então temos $B\left(\frac{\lambda}{||T||^w_{(A,B)}}\right) m_{Tf}(\lambda) \leq 1$ para $f \in L_A$ com $p_A(f) \leq 1$ e para todo $\lambda > 0$.

(b) Sejam $B(t) = M_\infty$ e A uma função de Young generalizada não trivial arbitrária. Seja T um operador definido em $L_A(X, M, \mu)$ com valores em $F^c(Y, N, \nu)$ e tomemos $K > 0$. Para cada $f \in L_A$ temos

$$\int_Y B\left(\frac{|Tf|}{K}\right) d\nu = \infty \quad m_{Tf}(K)$$

e portanto $\int_Y B\left(\frac{|Tf|}{K}\right) d\nu \leq 1$ se e só se $m_{Tf}(K) = 0$. Isto equivale a dizer que $m_{Tf}(\lambda) = 0$ para todo $\lambda \geq K$.

Por outro lado, temos $B\left(\frac{\lambda}{K}\right) m_{Tf}(\lambda) \leq 1$ para todo $\lambda > 0$ se e só se $m_{Tf}(\lambda) = 0$ para todo $\lambda > K$, o que equivale a dizer que $m_{Tf}(\lambda) = 0$ para todo $\lambda \geq K$, uma vez que m_{Tf} é contínua à direita.

É imediato então que neste caso, T é de tipo forte (A,B) se e só se T é de tipo fraco (A,B) e que $||T||_{(A,B)} = ||T||^{w}_{(A,B)}$.

(6.4) <u>Notação</u>. Se $1 \leq p, q \leq \infty$, escreveremos "T é de tipo fraco |forte| (p,q)", quando T for de tipo fraco |forte| (A,B), com $A(t) = M_p$ e $B(t) = M_q$.

Com isto, (6.3) garante que T é de tipo fraco (p, ∞) se e só se T é de tipo forte (p, ∞) e $||T||_{(A,B)} = ||T||^{w}_{(A,B)}$.

Como o leitor poderia esperar, se T é um operador de tipo forte (A,B) então T é de tipo fraco (A,B). É justamente isto que nos diz o teorema seguinte. No entanto não vale a recíproca. Um contra-exemplo é o operador maximal de Hardy--Littlewod.

(6.5) <u>Proposição</u>. Seja T um operador definido em $L_A(X, M, \mu)$ com valores em $L_B(Y, N, \nu)$. Sejam $f \in L_A$ com $p_A(f) \leq 1$ e $K > 0$ tais que

$$\int_Y B\left(\frac{|Tf|}{K}\right) d\nu \leq 1 .$$

Então tem-se

$$B\left(\frac{\lambda}{K}\right) m_{Tf}(\lambda) \leq 1 ,$$

para todo $\lambda > 0$.

Conseqüentemente, se T é de tipo forte (A,B) Então T é de tipo fraco (A,B) e $||T||^{w}_{(A,B)} \leq ||T||_{(A,B)}$.

Demonstração. Para cada $\lambda > 0$ seja $S_\lambda = \{y \in Y: |Tf(y)| > \lambda\}$. Então de acordo com nossa hipótese temos

$$B(\frac{\lambda}{K}) m_{Tf}(\lambda) \leq \int_S B(\frac{|Tf|}{K}) d\nu \leq \int_Y B(\frac{|Tf|}{K}) d\nu \leq 1$$

o que completa a prova.

$\square$

(6.6) Definição. Um operador T definido num sub-espaço vetorial de $F^c(X, M, \mu)$ com valores em $F^c(Y, N, \nu)$ é chamado sublinear se

(i) $|T(f+g)| \leq |Tf| + |Tg|$, $\forall$ f,g ε Dom (T);

(ii) $|T(\alpha f)| = |\alpha||Tf|$, para todo $\alpha \in \mathbb{C}$.

(6.7) Proposição. Seja T um operador sublinear. Se f,g ε Dom (T) então para todo $\alpha \geq 0$ temos

$$m_{T(f+g)}(\alpha) \leq m_{Tf}(\frac{\alpha}{2}) + m_{Tg}(\frac{\alpha}{2}).$$

Demonstração. Como $|T(f+g)| \leq |Tf| + |Tg|$ então de acordo com (1.3.iv) temos

$$m_{T(f+g)}(\alpha) \leq m_{|Tf|+|Tg|}(\alpha)$$

para todo $\alpha \geq 0$. O resultado decorre, agora de (1.4).

$\square$

(6.7) Proposição. Seja T um operador sublinear de tipo fraco (A,B), onde A e B são funções de Young generalizadas não limitadas. Então se $||T||^{w}_{(A,B)} = 0$, T é nulo.

<u>Demonstração</u>. Como $||T||^{w}_{(A,B)} = 0$ então existe uma seqüência de números reais (K_n) que decresce para zero tal que

$$B(\frac{\lambda}{K_n})\ m_{Tf}\ (\lambda) \ \leq 1$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, para todo $\lambda > 0$ e para toda f tal que $p_A(f) \leq 1$.

Tomemos $f \in L_A$ tal que $p_A(f) \leq 1$ e temos que a seqüência $(B(\frac{\lambda}{K_n}))$ não é limitada. Como $B(\frac{\lambda}{K_n})\ m_{Tf}(\lambda) \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, concluímos que $m_{Tf}(\lambda) = 0$.

Assim, se $f \in L_A$ e $p_A(f) \leq 1$ então $m_{Tf}(\lambda) = 0$ para todo $\lambda > 0$, o que mostra que $Tf = 0$.

Resta demonstrar que $Tf = 0$ para uma f qualquer em L_A. Se $f = 0$, então temos $|Tf| = |T(0\ f)| = 0$, uma vez que T é sublinear. Tomemos agora $f \in L_A$, $f \neq 0$. Como A é não trivial, decorre de (5.16.ii) que $p_A(f) \neq 0$. Concluímos então de (5.16.iii) que $p_A(\frac{f}{p_A(f)}) \leq 1$ e portanto que $T(\frac{f}{p_A(f)}) = 0$. Da sublinearidade de T decorre, agora que $Tf = 0$.

$\square$

Em particular se T é de tipo forte (A,B) e A e B são funções de Young generalizadas não limitadas, de (6.5) e (6.7) concluímos que se $||T||_{(A,B)} = 0$ então T é nulo.

(6.8) <u>Observação</u>. Se T é operador de tipo forte

(A,B), onde A e B são funções de Young generalizadas não-triviais e não limitadas então

$$p_B(Tf) \leq ||T||_{(A,B)}\ p_A(f)$$

para toda $f \in L_A$.

De fato, no caso em que $||T||_{(A,B)} = 0$ já sabemos que T é nulo e portanto não há o que demonstrar. Se $||T||_{(A,B)} \neq 0$, de acordo com (6.3.a) temos que

$$\int_Y B\left(\frac{|Tf|}{||T||_{(A,B)}}\right) d\nu \leq 1$$

para toda $f \in L_A$ tal que $p_A(f) \leq 1$.

Se $f \in L_A$ e $f \neq 0$ então tomando $g = \dfrac{f}{p_A(f)}$ temos que $p_A(g) = 1$. Lembrando que $|Tg| = \dfrac{|Tf|}{p_A(f)}$ concluímos então que

$$\int_Y B\left(\frac{|Tf|}{p_A(f)\,||T||_{(A,B)}}\right) d\nu = \int_Y B\left(\frac{|Tg|}{||T||_{(A,B)}}\right) d\nu \leq 1$$

e portanto $p_B(Tf) \leq p_A(f)\,||T||_{(A,B)}$.

$\square$

§ 7. Uma generalização do teorema de Marcinkiewicz

Neste parágrafo mostraremos que sob determinadas condições sobre p_0, q_0, p_1, q_1 e sobre as funções de Young generalizadas A e B, todo operador sublinear que é de tipo fraco (p_0,q_0) e de tipo fraco (p_1,q_1) é também de tipo forte (A,B). Esse resultado generaliza o Teorema de Marcinkiewicz que enunciaremos em (7.1).

No que segue a expressão "T é simultaneamente de tipos fracos (p_0, q_0) e (p_1,q_1)", usada para um operador sublinear T, significa que T está definido num subespaço vetorial de $F^c(X, M, \mu)$ que contém $L_{p_i}(X, M, \mu)$ para $i = 0,1$, que T toma valores em $F^c(Y, M, \nu)$ e que a restrição de T a $L_{p_i}(X,M,\mu)$ é um operador de tipo fraco (p_i,q_i), para $i = 0,1$.

(7.1) <u>Teorema</u> (Marcinkiewicz). Sejam p_0,q_0,p_1,q_1 tais que $0 \leq \frac{1}{q_0} \leq \frac{1}{p_0} \leq 1$, $0 \leq \frac{1}{q_1} \leq \frac{1}{p_1} \leq 1$ e $q_0 \neq q_1$. Se T é um operador sublinear simultaneamente de tipo fraco (p_0,q_0) e (p_1,q_1)

então para cada (α, β) do segmento aberto que une $(\frac{1}{p_0}, \frac{1}{q_0})$ a $(\frac{1}{p_1}, \frac{1}{q_1})$ existe $M > 0$ tal que

$$\int_Y \left|\frac{|Tf|}{M}\right|^{\frac{1}{\beta}} d\nu \leq 1$$

sempre que $f \in L_{\frac{1}{\alpha}}(X, M, \mu)$ e $\int_X |f|^{\frac{1}{\alpha}} d\mu \leq 1$, isto é, T é de tipo forte $(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta})$.

Demonstração. Ver [14] ou nossa observação (7.3) e os teoremas (7.7) e (7.8).

(7.2) Notação. Sejam $p_0, q_0, p_1, q_1 \in |0, \infty|$ tais que $p_0 \neq p_1$.

1. Se $0 < p_i < \infty$ e $0 < q_i < \infty$ para $i = 0,1$ definimos

$$\text{(i)} \qquad \varepsilon = \frac{\frac{1}{q_0} - \frac{1}{q_1}}{\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}},$$

e

$$\text{(ii)} \qquad \gamma = \frac{\frac{p_0}{q_0} - \frac{p_1}{q_1}}{p_0 - p_1} = \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1}\,\frac{\frac{1}{q_0} - \frac{1}{q_1}}{\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}}$$

$$= \frac{1}{q_1} - \frac{\varepsilon}{p_1}.$$

Com isto, a equação da reta que passa por $(\frac{1}{p_0}, \frac{1}{q_0})$ e $(\frac{1}{p_1}, \frac{1}{q_1})$ é $y = \varepsilon x + \gamma$. Assim temos também que $\varepsilon = \frac{1}{q_0} - \frac{\varepsilon}{p_0}$. É fácil ver então que se $\varepsilon \neq 0$ (isto é, se $q_0 \neq q_1$) temos

$$\text{(iii)} \quad \frac{p_i}{\varepsilon}\left(\frac{1}{q_i} - \gamma\right) = 1 \quad \text{para } i = 0,1.$$

2. No caso em que $0 < p_i < \infty$ para $i = 0,1$, $0 < q_0 < \infty$ e $q_1 = \infty$, definimos

$$\text{(iv)} \quad \varepsilon = \frac{1}{q_0} \frac{1}{\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}}$$

e

$$\text{(v)} \quad \gamma = -\frac{\varepsilon}{p_1}.$$

Assim temos, neste caso,

$$\text{(vi)} \quad \frac{p_0}{\varepsilon}\left(\frac{1}{q_0} - \gamma\right) = \frac{p_0}{q_0\,\varepsilon} + \frac{p_0}{p_1}.$$

3. Se $0 < p_0 < \infty$, $0 < q_0 < \infty$ e $p_1 = q_1 = \infty$ definimos

$$\text{(vii)} \quad \varepsilon = \frac{p_0}{q_0}$$

e

$$\text{(viii)} \quad \gamma = 0.$$

(7.3) Observação. Nas condições de (7.1) façamos $m=\min(q_0,q_1)$; $\ell=\max(q_0,q_1)$, $B(t)=t^{\frac{1}{\beta}}$ e $A(t)=t^{\frac{1}{\alpha}}$. Como (α,β) é um ponto do segmento aberto que une $(\frac{1}{p_0},\frac{1}{q_0})$ a $(\frac{1}{p_1},\frac{1}{q_1})$, é fácil ver que $m < \frac{1}{\ell} < \ell$ e cálculos simples mostram que

- $\frac{B(t)}{t^m}$ é não-decrescente ;

- existe uma constante $K_m > 0$ $(K_m = \frac{1}{\frac{1}{\beta} - m})$ tal que

$$\int_0^t \frac{B(s)}{s^{m+1}}\, ds \leq K_m \frac{B(t)}{t^m}$$

para todo $t > 0$;

- se $\ell < \infty$ então $\frac{B(t)}{t^\ell}$ é não-crescente e existe $K_\ell > 0$ $(K_\ell = \frac{1}{\frac{1}{\beta} - \ell})$ tal que

$$\int_t^\infty \frac{B(s)}{s^{\ell+1}}\, ds \leq K_\ell \frac{B(t)}{t^\ell}$$

para todo $t > 0$;

- se $\ell = \infty$ existe $q > m$ tal que $\frac{B(t)}{t^q}$ é não-crescente;

- $B^{-1}(t) = t^\beta = t^{\alpha\varepsilon+\gamma} = A^{-1}(t^\varepsilon)t^\gamma$

Com isto, no caso em que $p_0 \neq p_1$, o Teorema de

Marcinkiewicz torna-se um caso particular de (7.7) e (7.8) e no caso em que $p_0 = p_1$, dos teoremas (7.9) e (7.10).

A seguir apresentaremos dois lemas que simplificarão as demonstrações dos teoremas (7.7) e (7.8).

(7.4) Lema. Sejam p, q, $\bar{q}$, $\bar{p}$ números reais positivos, $1 \leq p \leq q$ e sejam $\varepsilon \neq 0$ e γ números reais tais que

(i) $\frac{p}{q}\left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma\right) = 1$.

Sejam A e B funções de Young generalizadas não triviais definidas por

$$A(t) = \int_0^t a(s)ds$$

$$B(t) = \int_0^t b(s)ds$$

onde a e b são não-negativas e Lebesgue mensuráveis.

Vamos supor que A seja inversível[1] e que tenhamos

(ii) $B^{-1}(t) = A^{-1}(t^{\varepsilon})t^{\gamma}$, para todo $t > 0$;

(iii) $\frac{B(t)}{t^q}$ não-decrescente

---

(1) É suficiente que A seja estritamente crescente e não limitada e esta será a situação em nossos teoremas (7.7) e (7.8).

e

(iv) $\dfrac{B(t)}{t^{\bar{q}}}$ não-crescente.

Definindo $u(\lambda)=B^{-1}(A^{\frac{1}{\varepsilon}}(\lambda))$ e tomando $f\varepsilon L_A$ com $p_A(f) \leq 1$ temos o seguinte

(a) Se $\varepsilon > 0$ e se existe $K_q > 0$ tal que

$$\int_0^t \frac{B(s)}{s^{q+1}}\, ds \leq K_q \frac{B(t)}{t^q},$$

para todo $t > 0$ então

$$\int_0^\infty \frac{b(\lambda)}{\lambda^q}\left[\int_0^\infty m_f(s+u^{-1}(\lambda))\, s^{p-1} ds\right]^{\frac{q}{p}} d\lambda \leq \bar{q}\; K\left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{q}{p}} .$$

b) Se $\varepsilon < 0$, $\dfrac{A(t)}{t^{\bar{p}}}$ é não-decrescente e existe $K_q > 0$ tal que

$$\int_0^\infty \frac{B(s)}{s^{q+1}}\, ds \leq K_q \frac{B(t)}{t^q}$$

para todo $t > 0$ então

$$\int_0^\infty \frac{b(\lambda)}{\lambda^q}\left[\int_0^{u^{-1}(\lambda)} m_f(s)\, s^{p-1} ds\right]^{\frac{q}{p}} d\lambda \leq \bar{q}\; K_q\left(\frac{1}{\bar{p}}\right)^{\frac{q}{p}} .$$

c) Se $\varepsilon > 0$ e se existe $K_q > 0$ tal que

$$\int_t^\infty \frac{B(s)}{s^{q+1}}\, ds \le K_q \frac{B(t)}{t^q}$$

para todo $t > 0$ então

$$\int_0^\infty \frac{b(\lambda)}{\lambda} \left[\int_{u^{-1}(\lambda)}^\infty m_f(s) s^{p-1} ds \right]^{\frac{q}{p}} d\lambda \le \bar{q}\, K_q \left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{q}{p}} .$$

d) Se $\varepsilon < 0$, $\dfrac{A(t)}{t^{\bar{p}}}$ é não-decrescente e se existe $K_q > 0$ tal que

$$\int_t^\infty \frac{B(s)}{s^{q+1}}\, ds \le K_q \frac{B(t)}{t^q}$$

para todo $t > 0$ então

$$\int_0^\infty \frac{b(\lambda)}{\lambda^q} \left[\int_0^\infty m_f(s+u^{-1}(\lambda)) s^{p-1} ds \right]^{\frac{q}{p}} d\lambda \le \bar{q}\, K_q \left(\frac{1}{\bar{p}}\right)^{\frac{q}{p}} .$$

Demonstração. Em primeiro lugar observemos que u^{-1} é monótona e contínua. Como m_f é não-crescente é fácil ver que as funções que estamos integrando em relação a λ em (a), (b), (c) e (d) são Lebesgue-mensuráveis.

Vamos demonstrar apenas (a) e (d). As demonstrações de (b) e de (c) são análogas às demonstrações de (a) e de (d) respectivamente.

Tendo em vista (i) e (iv) e recorrendo a (5.8) sabemos que B é inversível e como A é inversível temos que $0 < u(\lambda) < \infty$ para todo $\lambda > 0$.

A função B é derivável q.s. e temos $B'(\lambda) = b(\lambda)$ para quase todo $\lambda > 0$. Como $\frac{B(\lambda)}{\lambda^{\bar{q}}}$ é não-crescente é claro que

$$b(\lambda) \leq \bar{q}\, \frac{B(\lambda)}{\lambda} \quad \text{q.s.} \tag{1}$$

a) Seja $I = \displaystyle\int_0^\infty \frac{b(\lambda)}{\lambda^q} \left[\int_0^\infty m_f(s+u^{-1}(\lambda))\, s^{p-1} ds\right]^{\frac{q}{p}} d\lambda$

$$= \int_0^\infty \left[\int_0^\infty \left(\frac{b(\lambda)}{\lambda}\right)^{\frac{p}{q}} m_f(s+u^{-1}(\lambda))\, s^{p-1} ds\right]^{\frac{q}{p}} d\lambda$$

Fazendo a mudança de variáveis $t = s + u^{-1}(\lambda)$, concluímos que

$$I = \int_0^\infty \left[\int_{u^{-1}(\lambda)}^\infty \left(\frac{b(\lambda)}{\lambda^q}\right)^{\frac{p}{q}} m_f(t)\,(t-u^{-1}(\lambda))^{p-1} dt\right]^{\frac{q}{p}} d\lambda$$

e como $p \geq 1$ temos que

$$I \leq \int_0^\infty \left[\int_0^\infty \left(\frac{b(\lambda)}{\lambda^q}\right)^{\frac{p}{q}} \chi_{(0,1)}\left(\frac{u^{-1}(\lambda)}{t}\right) m_f(t)\, t^{p-1} dt\right]^{\frac{q}{p}} d\lambda$$

ou ainda que

$$I^{\frac{p}{q}} \leq \left\{\int_0^\infty \left[\int_0^\infty \left(\frac{b(\lambda)}{\lambda^q}\right)^{\frac{p}{q}} \chi_{(0,1)}\left(\frac{u^{-1}(\lambda)}{t}\right) m_f(t)\, t^{p-1} dt\right]^{\frac{q}{p}} d\lambda\right\}^{\frac{p}{q}}$$

Tendo em vista a desigualdade de Minkowisky obtemos

$$I^{\frac{p}{q}} \leq \int_0^{\infty} m_f(t)\ t^{p-1} \left[\int_0^{\infty} \frac{b(\lambda)}{\lambda^q}\ \chi_{(0,1)}\left(\frac{u^{-1}(\lambda)}{t}\right) d\lambda \right]^{\frac{p}{q}} dt \qquad (2)$$

Como $\varepsilon > 0$ então u é não-decrescente e portanto se $u^{-1}(\lambda) < t$ temos que $\lambda < u(t)$. Logo temos

$$\int_0^{\infty} \frac{b(\lambda)}{\lambda^q}\ \chi_{(0,1)} \left(\frac{u^{-1}(\lambda)}{\lambda}\right) d\lambda \leq \int_0^{u(t)} \frac{b(\lambda)}{\lambda^q}\ d\lambda$$

para todo $t > 0$. Decorre de (1) e da hipótese de (a) que

$$\int_0^{\infty} \frac{b(\lambda)}{\lambda^q}\ \chi_{(0,1)} \left(\frac{u^{-1}(\lambda)}{t}\right) d\lambda \leq \bar{q} \int_0^{u(t)} \frac{B(\lambda)}{\lambda^{q+1}}\ d\lambda$$

$$\leq \bar{q}\ K_q\ \frac{B(u(t))}{[u(t)]^q}$$

para todo $t > 0$.

Assim, tendo em vista (2) temos

$$I^{\frac{p}{q}} \leq (\bar{q}\ K_q)^{\frac{p}{q}} \int_0^{\infty} m_f(t)\ t^{p-1}\ \frac{[B(u(t))]^{\frac{p}{q}}}{[u(t)]^p}\ dt\ .$$

Como $u(t) = B^{-1}(A^{\frac{1}{\varepsilon}}(t))$ temos que

$$I^{\frac{p}{q}} \leq (\bar{q}\ K_q)^{\frac{p}{q}} \int_0^\infty m_f(t)\ t^{p-1} \frac{[A(t)]^{\frac{p}{\varepsilon q}}}{\left[B^{-1}(A^{\frac{1}{\varepsilon}}(t))\right]^p}\ dt\ .$$

Usando sucessivamente nossas hipóteses (ii) e (i) obtemos

$$\frac{[\,A(t)\,]^{\frac{p}{\varepsilon q}}}{\left[B^{-1}(A^{\frac{1}{\varepsilon}}(t))\,\right]^p} = \frac{[\,A(t)\,]^{\frac{p}{\varepsilon q}}}{t^p[A(t)\,]^{\frac{p\gamma}{\varepsilon}}} = \frac{A(t)}{t^p}$$

e portanto

$$I^{\frac{p}{q}} \leq (\bar{q}\ K_q)^{\frac{p}{q}} \int_0^\infty m_f(t)\ t^{p-1} \frac{A(t)}{t^p}\ dt$$

$$= (\bar{q}\ K_q)^{\frac{p}{q}} \int_0^\infty m_f(t) \frac{A(t)}{t}\ dt\ .$$

Como A e B são funções de Young generalizadas contínuas, decorre de (i), (iii) e de (5.10.v) que $\frac{A(t)}{t^p}$ é não-decrescente e portanto que $\frac{A(t)}{t} \leq \frac{1}{p}\, a(t)$ para quase todo $t > 0$. Logo

$$I^{\frac{p}{q}} \leq (\bar{q}\ K_q)^{\frac{p}{q}} \frac{1}{p} \int_0^\infty m_f(t) a(t) dt\ .$$

A asserção está agora demonstrada uma vez que $p_A(f) \leq 1$ e portanto $\int_0^\infty m_f(t) a(t) = \int_X A(|f|) d\mu \leq 1$.

(d) Seja $I = \int_0^\infty \frac{b(\lambda)}{\lambda^q} \left[\int_0^\infty m_f(s+u^{-1}(\lambda))s^{p-1}ds\right]^{\frac{q}{p}} d\lambda$

$$= \int_0^\infty \left[\int_0^\infty \left(\frac{b(\lambda)}{\lambda^q}\right)^{\frac{p}{q}} m_f(s+u^{-1}(\lambda))s^{p-1}\, ds\right]^{\frac{q}{p}} d\lambda\ .$$

Fazendo a mudança de variáveis $t = s + u^{-1}(\lambda)$ concluímos que

$$I = \int_0^\infty \left[\int_{u^{-1}(\lambda)}^\infty \left(\frac{b(\lambda)}{\lambda^q}\right)^{\frac{p}{q}} m_f(t)(t-u^{-1}(\lambda))^{p-1} dt\right]^{\frac{q}{p}} d\lambda$$

e como $p \geq 1$ temos que

$$I \leq \int_0^\infty \left[\int_0^\infty \left(\frac{b(\lambda)}{\lambda^q}\right)^{\frac{p}{q}} \chi_{(0,1)}\left(\frac{u^{-1}(\lambda)}{t}\right) m_f(t)\ t^{p-1}\ dt\right]^{\frac{q}{p}} d\lambda$$

ou ainda que

$$I^{\frac{p}{q}} \leq \left\{\int_0^\infty \left[\int_0^\infty \left(\frac{b(\lambda)}{\lambda^q}\right)^{\frac{p}{q}} \chi_{(0,1)}\left(\frac{u^{-1}(\lambda)}{t}\right) m_f(t) t^{p-1} dt\right]^{\frac{q}{p}} d\lambda\right\}^{\frac{p}{q}}$$

Tendo em vista a desigualdade de Minkowisky obtemos

$$I^{\frac{p}{q}} \leq \int_0^\infty m_f(t) t^{p-1} \left[\int_0^\infty \frac{b(\lambda)}{\lambda^q}\ \chi_{(0,1)}\left(\frac{u^{-1}(\lambda)}{t}\right)\ d\lambda\right]^{\frac{p}{q}} dt \quad (3)$$

Como $\varepsilon < 0$ então u é não-crescente e portanto $u^{-1}(\lambda) < t$ implica $\lambda > (t)$. Logo

$$\int_0^\infty \frac{b(\lambda)}{\lambda^q} \; \chi_{(0,1)} \left(\frac{u^{-1}(\lambda)}{t}\right) d\lambda \leq \int_{u(t)}^\infty \frac{b(\lambda)}{\lambda^q} \, d\lambda$$

para todo $t > 0$.

Lembrando (1) e a hipótese do caso (d) obtemos que

$$\int_0^\infty \frac{b(\lambda)}{\lambda^q} \; \chi_{(0,1)} \left(\frac{u^{-1}(\lambda)}{t}\right) d\lambda \leq \bar{q} \, K_q \, \frac{B(u(t))}{[u(t)]^q}$$

para todo $t > 0$. Decorre então de (3) que

$$I^{\frac{p}{q}} \leq (\bar{q} \, K_q)^{\frac{p}{q}} \int_0^\infty m_f(t) \, t^{p-1} \, \frac{[B^{-1}(u(t))]}{[u(t)]^p} \, dt$$

Como $\dfrac{A(t)}{t^{\bar{p}}}$ é não-decrescente, procedendo como na demonstração de (a) concluímos que

$$I^{\frac{p}{q}} \leq (\bar{q} \, K_q)^{\frac{p}{q}} \, \frac{1}{\bar{p}} \qquad \text{e}$$

portanto que

$$I \leq \bar{q} \, K_q \, \left(\frac{1}{\bar{p}}\right)^{\frac{q}{p}}$$

(7.5) Lema. Sejam p_0, $q_0 \in \,]0,\infty[$, $p_1, q_1 \in \,]0,\infty]$ e A e B funções de Young generalizadas não triviais contínuas tais que

(i) $B^{-1}(t) = A^{-1}(t^{\varepsilon})\, t^{\gamma}$, para todo $t > 0$, onde ε e γ são tomados como em (7.2).

Seja $f \in L_A$ e $u > 0$. Então considerando f_u e f^u como em (1.8) temos

(a) Se $p_1 < \infty$, $q_1 < \infty$, $\varepsilon > 0$,, se $\frac{B(t)}{t^{q_0}}$ é não-decrescente e $\frac{B(t)}{t^{p_1}}$ é não-crescente temos que $\frac{A(t)}{t^{p_0}}$ é não-decrescente, $\frac{A(t)}{t^{p_1}}$ é não-crescente e portanto que $f_u \in L_{p_1}$ e $f^u \in L_{p_0}$.

(b) Se $p_1 < \infty$, $q_1 < \infty$, $\varepsilon > 0$, $\frac{B(t)}{t^{q_0}}$ é não-crescente e $\frac{B(t)}{t^{q_1}}$ é não-decrescente temos que $\frac{A(t)}{t^{p_0}}$ é não-crescente, $\frac{B(t)}{t^{q_1}}$ é não-decrescente e portanto que $f_u \in L_{p_0}$ e $f^u \in L_{p_1}$.

(c) Se $p_1 < \infty$, $q_1 < \infty$, $\frac{B(t)}{t^{q_0}}$ é não-decrescente e $\frac{B(t)}{t^{q_1}}$ é não-crescente temos que $\frac{A(t)}{t^{p_0}}$ é não-crescente, $\frac{A(t)}{t^{p_1}}$ é não-decrescente e portanto que $f_u \in L_{p_0}$ e $f^u \in L_{p_1}$.

(d) Se $p_1 < \infty$, $q_1 < \infty$, $\varepsilon < 0$, $\frac{B(t)}{t^{q_0}}$ é não-crescente e $\frac{B(t)}{t^{q_1}}$ é não-decrescente então $\frac{A(t)}{t^{p_0}}$ é não-decrescente ,

$\frac{A(t)}{t^{p_1}}$ é não-crescente e portanto $f_u \in L_{p_1}$ e $f^u \in L_{p_0}$.

(e) Se $p_1 < \infty$, $q_1 = \infty, \varepsilon > 0$ e $\frac{B(t)}{t^{q_0}}$ é não-decrescente então $\frac{A(t)}{t^{p_0}}$ é não-decrescente e portanto $f^u \in L_{p_0}$. Além disso $\frac{A(t)}{t^{p_1}}$ é não-crescente e portanto $f_u \in L_{p_1}$.

(f) Se $p_1 < \infty$, $q_1 = \infty$, $\varepsilon > 0$ e $\frac{B(t)}{t^{q_0}}$ é não-decrescente então $\frac{A(t)}{t^{p_0}}$ é não-crescente e portanto $f_u \in L_{p_0}$. Além disso, $\frac{A(t)}{t^{p_1}}$ é não-decrescente e portanto $f^u \in L_{p_1}$.

(g) Se $p_1 = \infty$, $q_1 = \infty$ e $\frac{B(t)}{t^{q_0}}$ é não-decrescente então $\frac{A(t)}{t^{p_0}}$ é não-decrescente e portanto $f^u \in L_{p_0}$. Além disso, como f_u é limitada temos que $f_u \in L_{p_1} = L_\infty$.

Demonstração. Os ítens (a), (b), (c) e (d) decorrem de (5.10) e (5.23), uma vez que por (7.2.iii) sabemos que $\frac{p_i}{\varepsilon}(\frac{1}{q_i} - \gamma) = 1$, para $i = 0, 1$.

A primeira afirmação de (e), decorre de (5.10.v) já que de (7.2.iv) sabemos que $\frac{p_0}{\varepsilon}(\frac{1}{q_0} - \gamma) = 1$. De (5.11.i) decorre que $\frac{A(t)}{t^{p_1}}$ é não-crescente uma vez que $\varepsilon = -p_1\gamma$ (ver (7.2.vii)). A outra afirmação é conseqüência de (5.23).

A demonstração de (f) é análoga à de (e).

Para demonstrar (g) recorremos a (5.12) lembrando que $\varepsilon = \frac{p_0}{q_0}$ (ver(7.2.vii) e a (5.19.ii).

$\square$

(7.6) Observações

(a) Em todos os teoremas que apresentaremos a seguir, B será uma função de Young generalizada não-trivial, contínua, para a qual existe $\alpha > 0$ tal que $\frac{B(t)}{t^{\alpha}}$ é não-crescente. Assim, de acordo com (5.8), B será inversível.

(b) Em qualquer uma das situações (a), (b), (c),(d), (e), (f) de (7.5), existem $\alpha, \beta > 0$ tais que $\frac{A(t)}{t^{\hat{\alpha}}}$ é não-crescente e $\frac{A(t)}{t^{\beta}}$ é não-decrescente. Como A é não-trivial e contínua podemos concluir, tendo em vista (5.9.a), que A é inversível (e portanto que $0 < A(t) < \infty$ se $t \in \,]0,\infty[$).

Assim em qualquer uma das situações (a), (b), (c) , (d), (e), (f) de (7.5), que serão situações de nossos próximos teoremas, a função $u(\lambda) = B^{-1} A^{\frac{1}{\varepsilon}}(\lambda))$ estará bem definida para todo $\lambda > 0$.

Vamos mostrar que isto também ocorre quando estamos na situação de (7.5.g). (que aparece no teorema (7.7)). Neste caso, a relação $B^{-1}(t)=A^{-1}(t^{\varepsilon})t^{\gamma}$ reduz-se a $B^{-1}(t)=A^{-1}(t^{\frac{p_0}{q_0}})$ (ver (7.2.vii). Vamos observar inicialmente que $0 < A(t) < \infty$

para todo $t > 0$. De fato, se existisse $t_0 > 0$ tal que $A(t_0) = 0$ teríamos $A(t) = 0$ para todo $t \leq t_0$. Assim teríamos $A^{-1}(s) \geq t_0$ para todo $s > 0$ e portanto $B^{-1}(s) \geq t_0$ para todo $s > 0$; Mas isto contradiz o fato de B ser inversível (ver (i)). Da mesma forma, se $A(t_0) = \infty$ para algum t_0 então $B^{-1}(s) \leq t_0$ para todo $s > 0$, o que também é uma contradição . Logo $0 < A(t) < \infty$ para todo $t > 0$ e portanto u está bem definida e $0 < u(\lambda) < \infty$ para todo $\lambda > 0$. Além disso, como A é contínua, $\frac{A(t)}{t^{p_0}}$ é não-decrescente e como $0 < A(t) < \infty$ para todo $t > 0$, podemos concluir de (5.8) que A é inversível.

(7.7) <u>Teorema</u>. Sejam $p_0, q_0, p_1 \in [1,\infty]$ tais que $p_0 \leq q_0 < \infty$, $p_0 \neq p_1$. Seja T um operador sublinear simultaneamente de tipos fracos (p_0,q_0) e (p_1, ∞).

Sejam A e B funções de Young generalizadas não-triviais definidas por

$$\text{(i)} \qquad A(t) = \int_0^t a(s)ds ,$$

$$\text{(ii)} \qquad B(t) = \int_0^t b(s)ds ,$$

onde a e b são funções não-negativas e Lebesgue-mensuráveis.

Suponhamos que

$$\text{(iii)} \qquad \frac{B(t)}{t^{q_0}} \text{ é não-decrescente ;}$$

(iv) existe $\bar{q} \in]0,\infty[$ tal que $\frac{B(t)}{t^{\bar{q}}}$ é não-crescente;

(v) existe $K_{q_0} > 0$ tal que

$$\int_0^t \frac{B(s)}{s^{q_0+1}}\, ds \leq K_{q_0} \frac{B(t)}{t^{q_0}}$$

para todo $t > 0$;

(vi) $B^{-1}(t) = A^{-1}(t^{\varepsilon})t^{\gamma}$ para todo $t > 0$, onde ε e γ são como em (7.2).

Então T é de tipo forte (A,B), isto é, existe $K > 0$ tal que

$$\int_Y B\left(\frac{|Tf|}{K}\right) d\nu \leq 1$$

para toda $f \in L_A$ com $p_A(f) \leq 1$.

Demonstração. Vamos mostrar inicialmente que T está definido em L_A.

Para cada $f \in L_A$ e para cada $u > 0$ consideremos f_u e f^u como em (1.8). Como $\frac{B(t)}{t^{q_0}}$ é não-decrescente, recorrendo a (7.5) concluímos que:

- Se $p_1 < \infty$ e $\varepsilon > 0$ então $f_u \in L_{p_1}$ e $f^u \in L_{p_0}$.

- Se $p_1 < \infty$ e $\varepsilon < 0$ então $f_u \in L_{p_0}$ e $f^u \in L_{p_1}$.

- Se $p_1 = \infty$ então $f_u \in L_{p_1} = L_\infty$ e $f^u \in L_{p_0}$.

Assim se $f \in L_A$, f pode ser escrita como soma de uma função de L_{p_0} com outra de L_{p_1}. Como T é sublinear e L_{p_1} e L_{p_0} estão contidos no domínio de T concluímos que T está definido em L_A.

Sejam M_0 e M_1, respectivamente, as normas fracas de T como operador sublinear de tipos fracos (p_0,q_0) e (p_1,∞).

De acordo com (3.19) para cada $f \in L_A$ e para cada $K > 0$ temos

$$\int_Y B\left(\frac{|Tf|}{K}\right) d\lambda = \int_0^\infty m_{\frac{Tf}{K}}(\lambda)\, b(\lambda)\, d\lambda$$

$$= \int_0^\infty m_{Tf}(K\lambda)\, b(\lambda)\, d\lambda \quad .$$

Consideremos $u(\lambda) = B^{-1}(A^{\frac{1}{\varepsilon}}(\lambda))$. De (7.6) sabemos que $0 \leq u(\lambda) < \infty$ para todo $\lambda > 0$ e que u é inversível.

Como T é sublinear, decorre de (6.7) que para cada $f \in L_A$, para cada $\lambda > 0$ e para cada $K > 0$ temos

$$m_{Tf}(K\lambda) \leq m_{Tf_{u^{-1}(\lambda)}}\left(\frac{K}{2}\lambda\right) + m_{Tf^{u^{-1}(\lambda)}}\left(\frac{K}{2}\lambda\right)$$

Fixemos $\lambda > 0$ e $f \in L_A$ com $p_A(f) \leq 1$ e vamos obter majorações para o segundo membro da desigualdade acima nos diversos casos.

1. Se $p_1 = \infty$ ou se $p_1 < \infty$ e $\varepsilon > 0$ sabemos que $f^{u^{-1}(\lambda)} \in L_{p_0}$ e por ser T de tipo fraco (p_0, q_0) temos

$$m_{Tf^{u^{-1}(\lambda)}}\left(\frac{K}{2}\lambda\right) \leq \left(\frac{M_0}{\frac{K}{2}\lambda}\right)^{q_0} \|f^{u^{-1}(\lambda)}\|_{p_0}^{q_0} ,$$

para todo $K > 0$.

De (3.19) concluímos então que para todo $K > 0$ temos

$$m_{Tf^{u^{-1}(\lambda)}}\left(\frac{K}{2}\lambda\right) \leq \left(\frac{2M_0}{K}\right)^{q_0} \frac{p_0^{\frac{q_0}{p_0}}}{\lambda^{q_0}} \left[\int_0^\infty m_{f^{u^{-1}(\lambda)}}(s)\, s^{p_0-1}\, ds\right]^{\frac{q_0}{p_0}}$$

e recorrendo a (1.8) obtemos

$$m_{Tf^{u^{-1}(\lambda)}}\left(\frac{K}{2}\lambda\right) \leq \left(\frac{2M_0}{K}\right) \frac{p_0^{\frac{q_0}{p_0}}}{\lambda^{q_0}} \left[\int_0^\infty m_f(s+u^{-1}(\lambda))\, s^{p_0-1}\, ds\right]^{\frac{q_0}{p_0}}$$

para todo $K > 0$. (1)

2. Se $p_1 < \infty$ e $\varepsilon > 0$ então $f_{u^{-1}(\lambda)} \in L_{p_1}$ e portanto como T é de tipo fraco (p_1, ∞) temos

$$\|Tf_{u^{-1}(\lambda)}\|_\infty \leq M_1 \|f_{u^{-1}(\lambda)}\|_{p_1}$$

$$= M_1\, p_1^{\frac{1}{p_1}} \left[\int_0^{\infty} m_{f_{u^{-1}(\lambda)}}(s)\, s^{p_1-1}\, ds\right]^{\frac{1}{p_1}}$$

$$= M_1\, p_1^{\frac{1}{p_1}} \left[\int_0^{\infty} m_{f_{u^{-1}(\lambda)}}(s)\, \frac{s^{p_1}}{A(s)}\, \frac{A(s)}{s}\, ds\right]^{\frac{1}{p_1}}$$

Recorrendo a (1.8) e lembrando que (7.5.e) nos garante que $\frac{A(s)}{s^{p_1}}$ é não-decrescente temos

$$\|Tf_{u^{-1}(\lambda)}\|_{\infty} \leq M_1\, p_1^{\frac{1}{p_1}} \left[\int_0^{u^{-1}(\lambda)} m_f(s)\, \frac{s^{p_1}}{A(s)}\, \frac{A(s)}{s}\, ds\right]^{\frac{1}{p_1}}$$

$$\leq M_1\, p_1^{\frac{1}{p_1}} \frac{u^{-1}(\lambda)}{\left[A(u^{-1}(\lambda))\right]^{\frac{1}{p_1}}} \left|\int^{\infty} m_f(s)\, \frac{A(s)}{s}\, ds\right|^{\frac{1}{p_1}}$$

Mas (7.5.e) nos garante também que $\frac{A(s)}{p_0}$ é não-decrescente e portanto como $A'(s) = a(s)$ q.s. temos que $\frac{A(s)}{s} \leq \frac{1}{p_0}\, a(s)$ q.s. Logo

$$\|Tf_{u^{-1}(\lambda)}\|_{\infty} \leq M_1 \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{1}{p_1}} \frac{u^{-1}(\lambda)}{\left[A(u^{-1}(\lambda))\right]^{\frac{1}{p_1}}} \left|\int_0^{\infty} m_f(s)\, a(s)\, ds\right|^{\frac{1}{p_1}}$$

e lembrando que $p_A(f) \leq 1$ temos

$$||Tf_{u^{-1}(\lambda)}||_\infty < M_1 \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{1}{p_1}} \frac{u^{-1}(\lambda)}{\left[A(u^{-1}(\lambda))\right]^{\frac{1}{p_1}}} .$$

Mas como $u^{-1}(\lambda) = A^{-1}(B^{\varepsilon}(\lambda))$ e $B^{-1}(t)=A^{-1}(t^{\varepsilon})t^{\gamma}$ para todo $t > 0$ temos

$$\frac{u^{-1}(\lambda)}{\left[A(u^{-1}(\lambda))\right]^{\frac{1}{p_1}}} = \frac{A^{-1}(B^{\varepsilon}(\lambda))}{\left(A\left[A^{-1}(B^{\varepsilon}(\lambda))\right]\right)^{\frac{1}{p_1}}} = \frac{\lambda\left[B(\lambda)\right]^{-\gamma}}{\left[B(\lambda)\right]^{\frac{\varepsilon}{p_1}}}$$

$$= \lambda\left[B(\lambda)\right]^{-\gamma - \frac{\varepsilon}{p_1}} .$$

De (7.2.v.) sabemos que $\gamma = -\frac{\varepsilon}{p_1}$ e portanto

$$||Tf_{u^{-1}(\lambda)}||_\infty \leq M_1 \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{1}{p_1}} \lambda \tag{2}$$

3. Se $p_1 = \infty$ então $f_{u^{-1}(\lambda)} \in L_\infty$ e como T é de tipo fraco (p_1, ∞) temos

$$||Tf_{u^{-1}(\lambda)}||_\infty \leq M_1 \, ||f_{u^{-1}(\lambda)}||_\infty .$$

Mas neste caso $\gamma = 0$ e portanto (vi) se reduz a $A^{-1}(t^{\varepsilon}) = B^{-1}(t)$ para todo $t > o$, o que nos garante que $A^{-1}(B^{\varepsilon}(\lambda)) = B^{-1}(B(\lambda)) = \lambda$. Logo

$$||Tf_{u^{-1}(\lambda)}||_{\infty} \leq M_1 \lambda. \tag{3}$$

Se $p_1 < \infty$ e $\varepsilon > 0$ então u é não-crescente. Temos, também, de acordo com (7.5.f) que $\frac{A(t)}{t^{p_0}}$ é não-crescente, $\frac{A(t)}{t^{p_1}}$ é não-decrescente, $f_{u^{-1}(\lambda)} \varepsilon L_{p_0}$ e $f^{u^{-1}(\lambda)} \varepsilon L_{p_1}$. Estes fatos serão utilizados em 4. e 5.

4. Se $p_1 < \infty$ e $\varepsilon > 0$ então como T é de tipo fraco (p_1,∞) e como $f^{u^{-1}(\lambda)} \varepsilon L_{p_1}$ temos

$$||Tf^{u^{-1}(\lambda)}||_{\infty} \leq M_1 \; ||f^{u^{-1}(\lambda)}||_{p_1}$$

$$= M_1 \, p_1^{\frac{1}{p_1}} \left[\int_0^{\infty} m_{f^{u^{-1}(\lambda)}}(s) s^{p_1-1} ds\right]^{\frac{1}{p_1}}$$

Recorrendo a (1.8) temos que

$$||Tf^{u^{-1}(\lambda)}||_\infty \le M_1\, p_1^{\frac{1}{p_1}} \left[\int_0^\infty m_f(s+u^{-1}(\lambda))\, s^{p_1-1}\, ds \right]^{\frac{1}{p_1}}$$

$$= M_1\, p_1^{\frac{1}{p_1}} \left[\int_{u^{-1}(\lambda)}^\infty m_f(s)\,(s-u^{-1}(\lambda))^{p_1-1}\, ds \right]^{\frac{1}{p_1}} .$$

Como $p \ge 1$ temos

$$||Tf^{u^{-1}(\lambda)}||_\infty \le M_1\, p_1^{\frac{1}{p_1}} \left[\int_{u^{-1}(\lambda)}^\infty m_f(s)\, s^{p_1-1}\, ds \right]^{\frac{1}{p_1}}$$

$$= M_1\, p_1^{\frac{1}{p_1}} \left[\int_{u^{-1}(\lambda)}^\infty m_f(s)\, \frac{s^{p_1}}{A(s)}\, \frac{A(s)}{s}\, ds \right]^{\frac{1}{p_1}} .$$

Lembrando que $\frac{A(s)}{s^{p_1}}$ é não-crescente temos

$$||Tf^{u^{-1}(\lambda)}||_\infty \le M_1\, p_1^{\frac{1}{p_1}}\, \frac{u^{-1}(\lambda)}{|A(u^{-1}(\lambda))|^{\frac{1}{p_1}}} \left| \int_{u^{-1}(\lambda)}^\infty m_f(s)\, \frac{A(s)}{s}\, ds \right|^{\frac{1}{p_1}}$$

e também que $\frac{A(s)}{s} \le \frac{1}{p_1}\, a(s)$ para quase todo $s > 0$. Como

$p_A(f) \leq 1$ concluímos que

$$||Tf^{u^{-}(\lambda)}||_\infty \leq M_1 \frac{u^{-1}(\lambda)}{[A(u^{-1}(\lambda))]^{\frac{1}{p_1}}} \left[\int_{u^{-1}(\lambda)}^{\infty} m_f(s)a(s)ds\right]^{\frac{1}{p_1}}$$

$$\leq M_1 \frac{u^{-1}(\lambda)}{[A(u^{-1}(\lambda))]^{\frac{1}{p_1}}}$$

Procedendo como em *2.* obtemos

$$||Tf^{u^{-1}(\lambda)}||_\infty \leq M_1 \lambda . \tag{4}$$

5. Se $p_1 < \infty$ e $\varepsilon < 0$ então $f_{u^{-1}(\lambda)} \varepsilon L_{p_0}$. Lembrando que T é de tipo fraco (p_0, q_0) e recorrendo a (1.8) temos

$$m_{Tf_{u^{-1}(\lambda)}}(\tfrac{K}{2}\lambda) \leq (\frac{2M_0}{K\lambda})^{q_0} p_0^{\frac{q_0}{p_0}} \left|\int_0^\infty m_{f_{u^{-1}(\lambda)}}(s)s^{p_0-1}ds\right|^{\frac{q_0}{p_0}}$$

$$= (\frac{2M_0}{K\lambda})^{q_0} p_0^{\frac{q_0}{p_0}} \left|\int_0^{u^{-1}(\lambda)} m_f(s)s^{p_0-1}ds\right|^{\frac{q_0}{p_0}} \tag{5}$$

para todo $K > 0$.

Podemos agora completar a demonstração considerando três casos.

<u>1º Caso</u>: $p_1 < \infty$ e $\varepsilon > 0$.

Seja $K = \max \{2M_1 (\frac{p_1}{p_0})^{\frac{1}{p_1}}, 2\, M_0 (\bar{q}\; K_0)^{\frac{1}{q_0}}\}$. Como $K \geq 2M_1 (\frac{p_1}{p_0})^{\frac{1}{p_1}}$ decorre de (2) que $m_{Tf_{u^{-1}(\lambda)}} (\frac{K}{2}\lambda) = 0$ para todo $\lambda > 0$ e portanto

$$m_{Tf}(K\lambda)\; b(\lambda) \leq m_{Tf_{u^{-1}(\lambda)}} (\frac{K}{2}\lambda)\; b(\lambda) \text{ para todo } \lambda > 0.$$

Tendo em vista (1) temos

$$m_{Tf}\; (K\lambda) b(\lambda) \leq (\frac{2M_0}{K})^{q_0}\; p_0^{\frac{q_0}{p_0}}\; \frac{b(\lambda)}{q_0} \left| \int_0^{\infty} m_f(s+u^{-1}(\lambda))\, s^{p_0-1} ds \right|^{\frac{q_0}{p_0}}$$

para todo $\lambda > 0$.

Sabemos, devido a (7.6.b) que nossas hipóteses garantem que A é inversível. É fácil ver então que as hipóteses de (7.4.a) estão verificadas e portanto levando em conta nossa escolha de K concluímos que

$$\int_0^\infty m_{Tf}(K\lambda)b(\lambda)d\lambda \leq \left(\frac{2M_0}{K}\right)^{q_0} p_0^{\frac{q_0}{p_0}} \bar{q}\, K_{q_0}\left(\frac{1}{p_0}\right)^{\frac{q_0}{p_0}}$$

$$= \left(\frac{2M_0}{K}\right)^{q_0} \bar{q}\, K_0$$

$$\leq 1.$$

Logo $\displaystyle\int_Y B\left(\frac{|Tf|}{K}\right) dr \leq 1$.

2º Caso: $p_1 < \infty$ e $\varepsilon < 0$.

A demonstração é análoga a do primeiro caso, se recorrermos (4), (5) e (7.4.b).

3º Caso: $p_1 = \infty$.

Também se demonstra de modo análogo se levarmos em conta (1), (3) e (7.4.a).

$\sqcup$

(7.8) Teorema. Sejam p_0, q_0, p_1, q_1 números reais tais que $1 \leq p_0 \leq q_0$, $1 \leq p_1 \leq q_1$, $p_0 \neq p_1$, $q_0 \neq q_1$. Seja T um operador sublinear simultaneamente de tipos f r a c o s (p_0,q_0) e (p_1,q_1).

Sejam A e B funções de Young generalizadas não-triviais definidas por

(i) $A(t) = \int_0^t a(s)ds,$

(ii) $B(t) = \int_0^t b(s)ds,$

onde a e b são não-negativas Lebesgue-mensuráveis.

Tomemos $m = \min\{q_0, q_1\}$ e $\ell = \max\{q_0, q_1\}$ e suponhamos que

(iii) $\dfrac{B(t)}{t^m}$ é não-decrescente,

(iv) $\dfrac{B(t)}{t^\ell}$ é não-crescente,

(v) existe $K_m > 0$ tal que

$$\int_0^t \frac{B(s)}{s^{m+1}} ds \leq K_m \frac{B(t)}{t^m}$$

para todo $t > 0$;

(vi) existe $K_\ell > 0$ tal que

$$\int_t^\infty \frac{B(s)}{s^{\ell+1}} ds \leq K \frac{B(t)}{t^\ell}$$

para todo $t > 0$;

(vii) $B^{-1}(t) = A^{-1}(t^{\varepsilon})t^{\gamma}$, para todo $t > 0$ onde ε e γ são tomados como em (7.2).

Então T é de tipo forte (A,B).

Demonstração. Temos quatro casos a considerar

- $p_0 < p_1$ e $q_0 < q_1$;

- $p_0 < p_1$ e $q_1 < q_0$;

- $p_1 < p_0$ e $q_0 < q_1$;

- $p_1 < p_0$ e $q_1 < q_0$.

Nós faremos apenas a demonstração do caso em que $p_0 < p_1$ e $q_1 < q_0$ empregando (7.4). A demonstração nos outros casos é análoga.

Como $p_0 < p_1$ e $q_1 < q_0$ temos que $\varepsilon < 0$. Nossas hipóteses (iii) e (iv) nos dizem então que $\frac{B(t)}{t^{q_1}}$ é não-decrescente e que $\frac{B(t)}{t^{q_0}}$ é não-crescente. Recorrendo a (7.5.d) concluímos que $\frac{A(t)}{t^{p_0}}$ é não decrescente e $\frac{A(t)}{t^{p_1}}$ é não-crescente.

Além disso, (7.5.d) nos garante que se $f \in L_A$ e $u > 0$ então $f_u \in L_{p_1}$ e $f^u \in L_{p_0}$, de onde concluímos, devido a sublinearidade de T, que T f está definido. Logo T está definido em L_A.

Sejam M_0 e M_1 as normas fracas de T como operador sub-linear de tipos fracos (p_0, q_0) e (p_1,q_1) respectivamente.

Vamos agora encontrar $K > 0$ tal que

$$\int_Y B(\frac{|Tf|}{K})dr = \int_0^\infty m_{Tf}(K\lambda)\ b(\lambda)d\lambda \leq 1$$

para toda $f \in L_A$ com $p_A(f) \leq 1$.

Consideremos então $u(\lambda) = B^{-1}(A^{\frac{1}{\varepsilon}}(\lambda))$ que é não-crescente, uma vez que $\varepsilon < 0$. Recorrendo a (7.6.b) sabemos que u é inversível e portanto u^{-1} é também não-crescente.

Fixemos $f \in L_A$, $\lambda > 0$ e $K > 0$. Sabemos que $f_{u^{-1}(\lambda)} \in L_{p_1}$ e que $f^{u^{-1}(\lambda)} \in L_{p_0}$. Assim nossas hipóteses sobre T garantem que

$$m_{Tf_{u^{-1}(\lambda)}}(\frac{K}{2}\lambda) \leq (\frac{M_1}{\frac{K}{2}\lambda})^{q_1} ||f_{u^{-1}(\lambda)}||_{p_1}^{q_1}$$

e

$$m_{Tf^{u^{-1}(\lambda)}}(\frac{K}{2}\lambda) \leq (\frac{M_0}{\frac{K}{2}\lambda})^{q_0} ||f^{u^{-1}(\lambda)}||_{p_0}^{q_0} .$$

Recorrendo a (3.19) concluímos então que

$$m_{Tf_{u^{-1}(\lambda)}}(\frac{K}{2}\lambda) \leq (\frac{2M_1}{K\lambda})^{q_1} p_1^{\frac{q_1}{p_1}} \left[\int_0^\infty m_{f_{u^{-1}(\lambda)}}(s)s^{p_1-1}ds\right]^{\frac{q_1}{p_1}}$$

e

$$m_{Tf^{u^{-1}(\lambda)}}(\frac{K}{2}\lambda) \leq (\frac{2M_0}{K\lambda})^{q_0} p_0^{\frac{q_0}{p_0}} \left[\int_0^\infty m_{f^{u^{-1}(\lambda)}}(s)s^{p_0-1}ds\right]^{\frac{q_0}{p_0}}.$$

De (1.8) decorre que

$$m_{Tf_{u^{-1}(\lambda)}}(\frac{K}{2}\ ) \leq (\frac{2M_1}{\lambda})^{q_1} p_1^{\frac{p_1}{q_1}} \left[\int_0^{u^{-1}(\lambda)} m_f(s)s^{p_1-1}ds\right]^{\frac{q_1}{p_1}}$$

e

$$m_{Tf^{u^{-1}(\lambda)}}(\frac{K}{2}\ \lambda) \leq (\frac{2M_0}{K\lambda})^{q_0} p_0^{\frac{q_0}{q_0}} \left[\int_0^\infty m_f(s+u^{-1}(\lambda))s^{p_0-1}ds\right]^{\frac{q_0}{p_0}}$$

Portanto, como T é sublinear decorre, de (6.7) que

$$m_{Tf}(K\lambda)b(\lambda) \leq m_{Tf_{u^{-1}(\lambda)}}(\frac{K}{2}\ \lambda)\ b(\lambda) + m_{Tf^{u^{-1}(\lambda)}}(\frac{K}{2}\ \lambda)\ b(\lambda)$$

$$\leq (\frac{2M_1}{K})^{q_1} p_1^{\frac{q_1}{p_1}} \frac{b(\lambda)}{\lambda^{q_1}} \left|\int_0^{u^{-1}(\lambda)} m_f(s)s^{p_1-1}ds\right|^{\frac{q_1}{p_1}}$$

$$+ \left(\frac{2M_0}{K}\right)^{q_0} p_0^{\frac{q_0}{p_0}} \frac{b(\lambda)}{\lambda^{q_0}} \left[\int_0^\infty m_f(s+u^{-1}(\lambda))\, s^{p_0-1}\, ds \right]^{\frac{q_0}{p_0}}$$

Assim se $f \in L_A$ e $K > 0$ temos

$$\int_0^\infty m_{Tf}(K\lambda)b(\lambda)d\lambda \leq \left(\frac{2M_1}{K}\right)^{q_1} p_1^{\frac{q_1}{p_1}} \int_0^\infty \frac{b(\lambda)}{\lambda^{q_1}} \left[\int_0^{u^{-1}(\lambda)} m_f(s)\, s^{p_1-1}\, ds \right]^{\frac{q_1}{p_1}} d\lambda$$

$$+ \left(\frac{2M_0}{K}\right)^{q_0} p_0^{\frac{q_0}{p_0}} \int_0^\infty \frac{b(\lambda)}{\lambda^{q_0}} \left[\int_0^\infty m_f(s+u^{-1}(\lambda))\, s^{p_0-1}\, ds \right]^{\frac{q_0}{p_0}} d\lambda$$

O leitor não terá agora dificuldades para perceber que de (7.4.b) e (7.4.d) obtemos que

$$\int_0^\infty m_{Tf}(K\lambda)\, b(\lambda)d\lambda \leq \left(\frac{2M_1}{K}\right)^{q_1} \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{q_1}{p_1}} q_0\, K_{q_1} + \left(\frac{2M_0}{K}\right)^{q_0} q_0\, K_{q_0}$$

sempre que $f \in L_A$ e $p_A(f) \leq 1$.

Tomando $K = 2 \max \left\{ 2M_1 \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{1}{p_1}} (q_0\, K_{q_1})^{\frac{1}{q_1}},\ 2M_0 (q_0 K_{q_0})^{\frac{1}{q_0}} \right\}$

temos então que

$$\int^\infty m_{Tf}(K\lambda)b(\lambda)d\lambda \leq 1$$

se $f \in L_A$ e $p_A(f) \leq 1$, o que completa a prova.

$\square$

O leitor certamente percebeu que nos teoremas (7.7) e (7.8) estávamos supondo $p_0 \neq p_1$. Em (7.1), no entando não havia esta hipótese. Os teoremas que apresentaremos a seguir são os teoremas correspondentes a (7.7) e (7.8) no caso em que $p_0 = p_1$. As demonstrações são evidentemente muito mais simples.

(7.9) <u>Teorema</u>. Sejam p_0 e q_0 números reais tais que $0 < p_0 \leq q_0$. Seja T um operador sublinear simultaneamente de tipos fracos (p_0, q_0) e (p_0, ∞).

Seja B uma função de Young generalizada não-trivial definida por

(i) $$B(t) = \int_0^t b(s)ds$$

onde b é não-negativa e Lebesgue mensuráveis.

Suponhamos que

(ii) existe $q > 0$ tal que $\frac{B(t)}{t^q}$ é não-crescente;

(iii) existe $K_{q_0} > 0$ tal que

$$\int_0^t \frac{B(s)}{s^{q_0+1}} ds \leq K_{q_0} \frac{B(t)}{t^{q_0}},$$

para todo $t > 0$.

Então T é de tipo forte (A,B), onde $A = M_{p_0}$.

Demonstração. Indiquemos por M_0 e M_1 as normas fracas de T como operador de tipo fraco (p_0,q_0) e (p_0,∞) respectivamente. Podemos supor $M_0 \neq 0$ e $M_1 \neq 0$ pois caso contrário teríamos $T = 0$ e o resultado seria imediato.

Como B é não-trivial e $\frac{B(t)}{t^q}$ é não-crescente então (5.8) nos garante que $0 < B(u) < \infty$ para todo $u > 0$. Fixemos $u > 0$. Seja

$$K = \max\{\frac{M_0}{u}(q\, K_{q_0}\, B(u))^{\frac{1}{q_0}}, \frac{M_1}{u}\}$$

Fixemos $f \in L_A$ com $p_A(f) \leq 1$ e vamos mostrar que

$$\int_Y B(\frac{|Tf|}{K})d\nu = \int_0^\infty m_{Tf}(K\lambda)b(\lambda)d\lambda \leq 1 .$$

Como T é de tipo fraco (p_0,∞) com norma M_1 então $m_{Tf}(\lambda) = 0$ se $\lambda > M_1$. Em particular, se $\lambda > u$ temos $K\lambda \geq \frac{M_1 u}{u} \geq M_1$ e portanto $m_{Tf}(K\lambda) = 0$. Assim

$$\int_Y B(\frac{|Tf|}{K})d\nu = \int_0^u m_{Tf}(K\lambda)b(\lambda)d\lambda .$$

$$= (\frac{M_0}{K})^{q_0} \int_0^u m_{Tf}(K\lambda)\ (\frac{K\lambda}{M_0})^{q_0}\ \frac{b(\lambda)}{\lambda^{q_0}}\ d\lambda$$

Como T é de tipo fraco (p_0,q_0) com norma M_0 então

$$m_{Tf}(K\lambda)\ \left(\frac{K\lambda}{M_0}\right)^{q_0} \leq 1 \text{ para todo } \lambda > 0.$$

Logo

$$\int_Y B\left(\frac{|Tf|}{K}\right) d\nu \leq \left(\frac{M_0}{K}\right)^{q_0} \int_0^u \frac{b(\lambda)}{\lambda^{q_0}}\, d\lambda\ .$$

De (i) e (ii) concluímos que para quase todo $\lambda > 0$ temos $b(\lambda) \leq q\ \frac{B(\lambda)}{\lambda}$ e portanto

$$\int_Y B\left(\frac{|Tf|}{K}\right) d\nu \leq \left(\frac{M_0}{K}\right)^{q_0} q \int_0^u \frac{B(\lambda)}{\lambda^{q_0+1}}\, d\lambda\ .$$

Tendo em vista (iii) obtemos

$$\int_Y B\left(\frac{Tf}{K}\right) d\nu \leq \left(\frac{M_0}{K}\right)^{q_0} q\ K_{q_0} \frac{B(u)}{u^{q_0}}\ .$$

Nossa escolha de K mostra agora que

$$\int_Y B\left(\frac{|Tf|}{K}\right) d\nu \leq 1$$

$\square$

(7.10) <u>Teorema</u>. Sejam p_0, q_0, q_1 números reais positivos. Seja T um operador sublinear simultaneamente de tipos fracos (p_0, q_0) e (p_0, q_1).

Seja B uma função de Young generalizada não-trivial definida por

$$\text{(i)} \qquad B(t) = \int_0^t b(s)\,ds$$

onde b é não-negativa e Lebesgue-mensurável.

Suponhamos que

(ii) existe $q > 0$ tal que $\frac{B(t)}{t^q}$ é não-crescente;

(iii) existe $K_{q_0} > 0$ tal que

$$\int_0^t \frac{B(s)}{s^{q_0+1}}\,ds \leq K_{q_0} \frac{B(t)}{t^{q_0}}$$

para todo $t > 0$.

(iv) existe $K_{q_1} > 0$ tal que

$$\int_0^\infty \frac{B(s)}{s^{q_1+1}}\,ds \leq K_{q_1} \frac{B(t)}{t^{q_1}}$$

para todo $t > 0$.

Então T é de tipo forte (A,B) com $A = M_p$.

Demonstração. Sejam M_0 e M_1 as normas fracas de T como operador de tipo fraco (p_0,q_0) e (p_0,q_1) respectivamente.

Assim como em (7.9) podemos supor $M_0 \neq 0$ e $M_1 \neq 0$.

Como B é não-trivial e $\frac{B(t)}{t^q}$ é não crescente, para todo $u > 0$ temos que $0 < B(u) < \infty$. Tomemos $u > 0$ e

$$K = \max\{ \frac{M_0}{u}(2q\, K_{q_0}\, B(u))^{\frac{1}{q_0}},\ \frac{M_1}{u}(2q\, K_{q_1}\, B(u))^{\frac{1}{q_1}}\}$$

Fixemos $f \in L_A$ com $p_A(f) \leq 1$ e vamos mostrar que

$$\int_Y B(\frac{Tf}{K})d\nu = \int_0^\infty m_{Tf}(K\lambda)b(\lambda)d\lambda \leq 1.$$

Temos que

$$\int_0^\infty m_{Tf}(K\lambda)b(\lambda)d\lambda = \int_0^u m_{Tf}(K\lambda)b(\lambda)d\lambda + \int_u^\infty m_{Tf}(K\lambda)b(\lambda)d\lambda$$

$$= (\frac{M_0}{K})^{q_0}\int_0^u m_{Tf}(K\lambda)\,(\frac{K\lambda}{M_0})^{q_0}\,\frac{b(\lambda)}{\lambda^{q_0}}\,d\lambda$$

$$+ (\frac{M_1}{K})^{q_1}\int_u^\infty m_{Tf}(K\lambda)\,(\frac{K\lambda}{M_1})^{q_1}\,\frac{b(\lambda)}{\lambda^{q_1}}\,d\lambda$$

Como T é de tipo fraco (p_0,q_i) com norma M_i para $i = 0,1$ temos

$$m_{Tf}(K\lambda)\ \left(\frac{K\lambda}{M_0}\right)^{q_0} \le 1$$

e

$$m_{Tf}(K\lambda)\ \left(\frac{K\lambda}{M_1}\right)^{q_1} \le 1$$

para todo $\lambda > 0$.

Logo

$$\int_Y B\left(\frac{|Tf|}{K}\right) d\nu \le \left(\frac{M_0}{K}\right)^{q_0} \int_0^u \frac{b(\lambda)}{\lambda^{q_0}}\, d\lambda + \left(\frac{M_1}{K}\right)^{q_1} \int_u^\infty \frac{b(\lambda)}{\lambda^{q_1}}\, d\lambda$$

De (i) e (ii) concluímos que $b(\lambda) \le q\ \frac{B(\lambda)}{\lambda}$ para quase todo $\lambda > 0$. Assim (iii), (iv) e nossa escolha de K garantem que

$$\begin{aligned}
\int_Y^\infty B\left(\frac{|Tf|}{K}\right) d\nu &\le \left(\frac{M_0}{K}\right)^{q_0} q \int_0^u \frac{B(\lambda)}{\lambda^{q_0+1}}\, d\lambda + \left(\frac{M_1}{K}\right)^{q_1} q \int_u^\infty \frac{B(\lambda)}{\lambda^{q_1+1}}\, d\lambda \\
&\le \left(\frac{M_0}{K}\right)^{q_0} q\ K_{q_0}\ \frac{B(u)}{u^{q_0}} + \left(\frac{M_1}{K}\right)^{q_1} q\ K_{q_1}\ \frac{B(u)}{u^{q_1}} \\
&\le 1
\end{aligned}$$

o que completa a prova.

$\square$

CAPÍTULO III

§ 8. Espaços invariantes por rearranjo.

Os espaços invariantes por rearranjo de que trataremos neste parágrafo são espaços vetoriais normados contidos em $F^k(X, M, \mu)$ que possuem algumas propriedades comuns aos espaços de Orlicz e de Lorentz. A classe dos espaços invariantes por rearranjo é bastante grande pois a cada função $\phi : [0,\infty[\to[0,\infty[$ não-decrescente e tal que $\frac{\phi(t)}{t}$ é não-crescente "corresponde" um espaço invariante por rearranjo. (ver (8.14))

A partir de (8.6) e até o final deste parágrafo em todas as proposições e definições, (X, M, μ) indicará um espaço de medida não-atômica.

(8.1) Definição. Seja E um subespaço vetorial de $F^k(X, M, \mu)$ e $\|\ \|$ uma norma sobre E. Dizemos que $(E, \|\ \|)$ é um <u>espaço de funções sobre (X, M, μ)</u> se as seguintes condições estão verificadas:

(i) se f e g são funções finitas de $F^k(X, M, \mu)$ tais que $|g| \leq |f|$ q.s. e $\dot{f} \in E$ então $\dot{g} \in E$ e $\|\dot{g}\| \leq \|\dot{f}\|$;

(ii) se uma seqüência (f_n) de funções não negativas de $F^k(X,\mathcal{M},\mu)$ e uma uma função $f:X \to [0,\infty]$ μ-mensurável são tais que:

(a) $(f_n(x))$ é uma seqüência não-decrescente para quase todo $x \in X$;

(b) $\dot{f}_n \in E$ para todo $n \in \mathbb{N}$;

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ q.s. ;

(d) existe $M \geq 0$ tal que $||\dot{f}_n|| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$,

então existe $h \in F^k(X,\mathcal{M},\mu)$ finita tal que $h=f$ q.s. $\dot{h} \in E$ e $||\dot{h}|| \leq M$.

(8.2) Observação. Se $(E, ||\ ||)$ é um espaço de funções sobre $(X, \mathcal{M}, \mu)$, a condição (i) de (8.1) nos garante que para cada $f \in F^k(X, \mathcal{M}, \mu)$ finita temos que $\dot{f} \in E$ se e somente se $\dot{|f|} \in E$. Além disso, se $\dot{f} \in E$ então $||\dot{f}|| = ||\ \dot{|f|}\ ||$.

Em (8.9) apresentaremos alguns exemplos de espaços de funções.

Se E é o espaço vetorial gerado por uma função $\dot{f} \in L_1$ não nula então E munido da restrição da norma de L_1 não é um espaço de funções pois (8.1.i) não se verifica.

Mostraremos a seguir que se (8.1.i) se verifica então (8.1.ii) é equivalente a uma condição aparentemente mais forte, que por razões óbvias é chamada condição de Fatou.

(8.3) Proposição. Seja E um subespaço vetorial de $F^k(X, M, \mu)$ e $|| \ ||$ uma norma sobre E. Então E é um espaço de funções sobre (X, M, μ) se e só se estão verificadas a condição (i) de (8.1) e a condição (iii) que enunciamos abaixo:

(iii) se uma seqüência (g_n) de funções não-negativas de $F^k(X,M,\mu)$ e uma função $g:X \to [0,\infty]$ μ-mensurável são tais que:

(b') $\dot{g}_n \in E$ para todo $n \in \mathbb{N}$;

(c') $g = \underline{\lim}_{n\to\infty} g_n$ q.s.;

(d') existe $M \geq 0$ tal que $||\dot{g}_n|| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$,

então existe $h \in F^k(X,M,\mu)$ finita tal que $h = g$, q.s. $\dot{h} \in E$ e $||\dot{h}|| \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} ||\dot{g}_n|| \leq M$.

Demonstração. É imediato que se (8.1.i) e (iii) se verificam então $(E,|| \ ||)$ é um espaço de funções sobre (X, M, μ).

Para demonstrar a recíproca, suponhamos que (8.1.i) e (8.1.ii) se verifiquem e consideremos uma seqüência (g_n) de funções não negativas de $F^k(X, M, \mu)$ e uma função $g:X \to [0,\infty]$ μ-mensurável verificando (b') (c') e (d').

Para cada $n \in \mathbb{N}$ seja $f_n = \inf_{k\leq n} g_k$. Então para cada $n \in \mathbb{N}$, f_n é uma função não-negativa de $F^k(X, M, \mu)$ e para cada $K \geq n$, temos $f_n \leq g_k$. Assim (b'), (8.1.i) e (d') nos garantem que $\dot{f}_n \in E$ e que $||\dot{f}_n|| \leq ||\dot{g}_k|| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e para todo $K \geq n$. Logo $||\dot{f}_n|| \leq \inf_{k\geq\infty} ||\dot{g}_k|| < \underline{\lim}_{k\to\infty} ||\dot{g}_k|| \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$

Além disso, a seqüência (f_n) é não-decrescente e $g = \underline{\lim}_{n\to\infty}\, g_n = \lim_{k\to\infty} f_n$ q.s. Decorre então de (8.1.ii) que existe $h \in F^k(X, M, \mu)$ finita tal que $h = g$ q.s., $\dot{h} \in E$ e $||\dot{h}|| \leq \lim_{k\to\infty} ||\dot{g}_k|| \leq M$, o que completa a prova.

$\square$

Em [11] e [12], por exemplo, um espaço de funções é sempre um espaço vetorial cujos elementos são classes de funções que tomam valores em $\mathbb{R}$. Na definição de espaço de funções encontrada nesses trabalhos, os autores assumem que o espaço seja de Banach. Procuramos escrever essa definição de maneira mais precisa e mostraremos a seguir que deste modo a exigência de que o espaço seja de Banach é redundante.

(8.4) <u>Proposição</u>. Todo espaço de funções é um espaço de Banach.

<u>Demonstração</u>. Seja $(E, ||\ \ ||)$ um espaço de funções sobre (X, M, μ). Tomemos $(\dot{f}_n)$ uma seqüência de Cauchy em E.

Seja (n_j) a seqüência de números naturais construída da seguinte maneira: n_1 é tal que $||\dot{f}_n - \dot{f}_m|| < \frac{1}{2}$ se $n, m \geq n_1$ e se n_j esta escolhido tomamos n_{j+1} tal que $n_{j+1} > n_j$ e $||\dot{f}_n - \dot{f}_m|| < \frac{1}{2^j}$ se $n, m \geq n_{j+1}$. Com isto a seqüência (n_j) é crescente e $||\dot{f}_{n_{j+1}} - \dot{f}_{n_j}|| \leq \frac{1}{2^j}$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

Para cada $\ell \in \mathbb{N}$, seja

$$g_\ell = |f_{n_1}| + |f_{n_2} - f_{n_1}| + \ldots + |f_{n_{\ell+1}} - f_{n_\ell}|.$$

A seqüência (g_ℓ) assim construída é uma seqüência não-decrescente de funções não negativas de $F^k(X, M, \mu)$ e para cada $\ell \in \mathbb{N}$ temos que $\dot{g}_\ell \in E$ e

$$||\dot{g}_\ell|| \leq ||f_{n_1}|| + ||f_{n_2} - f_{n_1}|| + \ldots + ||f_{n_{\ell+1}} - f_{n_\ell}||$$

$$\leq ||f_{n_1}|| + 1 .$$

$$\text{Seja } g = \lim_{\ell\to\infty} g_\ell = |f_{n_1}| + \sum_{j=1}^{\infty} |f_{n_j} - f_{n_j}| .$$

Como $(E, ||\ ||)$ é um espaço de funções concluímos que g é finita q.s. (já que (8.1.ii)) nos garante que g é igual q.s. a uma função finita). Assim, temos que a série $\sum_{j=1}^{\infty} |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}|$ converge q.s. e portanto que $f_{n_1} + \sum_{j=1}^{\infty} (f_{n_{j+1}} - f_{n_j})$ converge q.s. para uma função que toma valores em K. Logo, a seqüência (f_{n_j}) converge q.s. para uma função que toma valores em K.

Consideremos $S \in M$ tal que $\mu(S) = 0$ e $(f_{n_j}(x))$ seja convergente em K para todo $x \in X \sim S$. Seja $h : X \to K$ a função definida por

$$h(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in S \\ \lim_{j\to\infty} f_{n_j}(x), & \text{se } x \in X \sim S \end{cases}$$

que é evidentemente μ-mensurável.

Temos então que

$$\lim_{j\to\infty} |f_{n_j} - f_n| = |h - f_n| \text{ q.s. para todo } n \in \mathbb{N} \qquad (1)$$

Vamos mostrar que $\dot{h} \in E$ e que $\lim_{n\to\infty} ||\dot{h} - \dot{f}_n|| = 0$.

Tomemos $\varepsilon > 0$. Como $(\dot{f}_n)$ é de Cauchy, existem $n_0 \in \mathbb{N}$ e $j_0 \in \mathbb{N}$ tais que se $n \geq n_0$ e $j \geq n_0$ então $||\dot{f}_{n_j} - \dot{f}_n|| \leq \varepsilon$. Recorrendo a (8.3) e tendo em vista (1) concluímos que para todo $n \geq n_0$ temos que $|\dot{f}_n - \dot{h}| \in E$ e que $||\ |\dot{f}_n - \dot{f}|\ || \leq \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$. De (8.2) decorre então que para todo $n \geq n_0$ temos que $\dot{f}_n - \dot{h} \in E$ (e portanto que $\dot{h} \in E$) e que $||\dot{f}_n - \dot{h}|| \leq \varepsilon$.

□

(8.5) Definição. Seja $(E, ||\ ||)$ um espaço de funções sobre (X, M, μ). Dizemos que $(E, ||\ ||)$ é um espaço invariante por rearranjo sobre (X, M, μ) se quaisquer que sejam $f, g \in F^k(X, M, \mu)$ finitas tais que f é equimensurável com g, $m_f(\lambda) < \infty$ para todo $\lambda > 0$ e $\dot{f} \in E$ temos que $\dot{g} \in E$ e que $||\dot{g}|| = ||\dot{f}||$.

Como é usual na literatura, passaremos a escrever abreviadamente "espaço r.i." ao invés de "espaço invariante por rearranjo".

Conforme já havíamos anunciado à partir daqui, salvo nos exemplos, (X, M, μ) indicará um espaço de medida não-atômica.

(8.6) Proposição. Seja $(E, ||\ ||)$ um espaço r.i. sobre (X, M, μ). Se $E \neq \{0\}$ então $\dot{\chi}_S \in E$ para todo $S \in M$ tal que $\mu(S) < \infty$.

<u>Demonstração</u>. Seja $\dot{f} \in E$, $\dot{f} \neq 0$. Então existe $\lambda > 0$ tal que $m_f(\lambda) > 0$. Seja $D = \{x \in X: |f(x)| > \lambda\}$. Como $\lambda \chi_D \leq |f|$, temos $\chi_D \leq \frac{1}{\lambda} |f|$ e portanto $\dot{\chi}_D \in E$.

Seja $S \in M$ tal que $\mu(S) < \infty$. Se $\mu(S) \leq \mu(D)$ então existe $D_1 \subset D$ tal que $\mu(S) = \mu(D_1)$ uma vez que μ é não-atômica. Assim $\chi_{D_1} \leq \chi_D$ e portanto $\dot{\chi}_{D_1} \in E$. Como $\mu(S) = \mu(D_1) < \infty$ então χ_{D_1} e χ_S são equimensuráveis e portanto $\dot{\chi}_S \in E$.

Resta considerar o caso em que $S \in M$ e $\mu(D) < \mu(S) < \infty$. Neste caso existem $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{R}$, $0 \leq r < \mu(D)$ tais que $\mu(S) = n\,\mu(D) + r$. Decorre então do teorema (B.4) de [1] que existem $A, A_1, \ldots, A_n \in M$ dois a dois disjuntos tais que $\mu(A_i) = \mu(D)$ para $i = 1,\ldots,n$ e $\mu(A) = r < \mu(D)$. Assim $\dot{\chi}_A \in E$ e $\dot{\chi}_{A_i} \in E$ para $i = 1,\ldots,n$. Logo

$$\dot{\chi}_{A \cup A_1 \ldots \cup A_n} = \dot{\chi}_A + \dot{\chi}_{A_1} + \ldots + \dot{\chi}_{A_n} \in E$$

uma vez que E é um espaço vetorial. Como

$$\mu(A \cup A_1 \ldots \cup A_n) = n\,\mu(D) + r = \mu(S)$$

então $\dot{\chi}_S$ e $\dot{\chi}_{A \cup A_1 \cup \ldots A_n}$ são equimensuráveis e portanto $\dot{\chi}_S \in E$.

$\square$

É imediato agora que se $\mu(X) < \infty$ e $f \in F^k(X, M, \mu)$ é limitada então $\dot{f} \in E$.

(8.7) <u>Observação</u>. Sendo (X, M, μ) um espaço de medida não-atomica, para cada $t \in [0, \mu(X)]$ existe $S_t \in M$ tal que $\mu(S_t) = t$. Se $(E, ||\ ||)$ é um espaço r.i., sobre (X, M, μ) e $E \neq \{0\}$ podemos garantir devido a (8.6) que $\dot{X}_{S_t} \in E$ sempre que $t \in \mathbb{R}$ e $0 \leq t \leq \mu(X)$. Além disso se $S \in M$ e $\mu(S) = t$ então X_S é equimensurável com X_{S_t} e portanto $\dot{X}_S \in E$ e $||\dot{X}_S|| = ||\dot{X}_{S_t}||$. Isto mostra que a função ϕ_E que apresentaremos a seguir estará bem definida.

(8.8) <u>Definição</u>. Seja $(E, ||\ ||)$ um espaço r.i. sobre (X, M, μ), $E \neq \{0\}$. Para cada $t \in \mathbb{R}$, $0 \leq t \leq \mu(X)$, seja $\phi_E(t) = ||\dot{X}_{S_t}||$, onde $S_t \in M$ e $\mu(S_t) = t$. A função ϕ_E assim definida chama-se <u>função fundamental de E</u>.

É imediato que $\phi_E(t) = 0$ se e só se $X_{S_t} = 0$ para $S_t \in M$ com $\mu(S_t) = t$. Logo $\phi_E(t) = 0$ se e só se $t = 0$.

(8.9) <u>Exemplos</u>

(i) Seja A uma função de Young generalizada não-trivial. Tomemos $E = L_A(X, M, \mu)$. Então $(E, ||\ ||_A)$ é um espaço r.i. sobre (X, M, μ).

De fato (5.14), (5.18) (5.19) e (5.20) mostrem $(E, ||\ ||_A)$ é um espaço de funções sobre (X, M, μ).

Para mostrar que $(E, ||\ ||_A)$ é um espaço r.i. tomemos $f, g \in F^c(X, M, \mu)$ equimensuráveis. Então de acordo com (2.4) e (3. 8) temos que $(\frac{f}{k})^* = (\frac{g}{k})^*$ para todo $k > 0$. Assim, tendo em vista (3.19) podemos garantir que se $\dot{f} \in L_A$ então $\dot{g} \in L_A$ e $||\dot{g}||_A = ||\dot{f}||_A$.

Em particular os espaços L_p, $1 \leq p \leq \infty$ são espaços r.i.

Se A é uma função de Young e μ é não-atômica então $\phi_{L_A}(t) = \dfrac{1}{A^{-1}(\frac{1}{t})}$ se $t \in \mathbb{R}$ e $0 \leq t \leq \mu(X)$. (Tendo-se em vista (5.5.iii) podemos garantir que $A^{-1}(\frac{1}{t}) \neq 0$ para todo $t > 0$).

De fato, se $t \in \mathbb{R}$, $0 < t \leq \mu(X)$ e $S_t \in M$ é tal que $\mu(S_t) = t$ então para todo $K > 0$ temos

$$\int_X A\left(\frac{\chi_{S_t}}{K}\right) d\mu = \int_{S_t} A\left(\frac{1}{K}\right) d\mu = A\left(\frac{1}{K}\right) t .$$

Logo

$$\begin{aligned} ||\dot{\chi}_{S_t}|| &= \inf\{K > 0 : A(\tfrac{1}{K})\, t \leq 1 \\ &= \inf\{K > 0 : A(\tfrac{1}{t}) \leq \tfrac{1}{t}\} \\ &= \left[\sup\{s > 0 : A(s) \leq \tfrac{1}{t}\}\right]^{-1} \\ &= \frac{1}{A^{-1}(\frac{1}{t})} . \end{aligned}$$

No caso em que A é uma função de Young generalizada (e μ é não-atômica) temos $\phi_{L_A}(t) = \dfrac{1}{A_0^{-1}(\frac{1}{t})}$, para todo $t \in \mathbb{R}$

tal que $0 < t \leq \mu(X)$.

(ii) Sejam $1 \leq q \leq p \leq \infty$. Para cada $f \in F^k(X, M, \mu)$ consideremos

$$||\dot{f}||_{p,q} = \left[\int_0^\infty (f^*(t)\, t^{\frac{1}{p}})^q \frac{dt}{t} \right]^{\frac{1}{q}}, \text{ se } p < \infty$$

e

$$||\dot{f}||_{p,\infty} = \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t) .$$

Seja

$$L^k_{p,q} = \{f \in F^k(X, M, \mu) : ||f||_{p,q} < \infty \}$$

Então $(L^k_{p,q}, || \; ||_{p,q})$ é um espaço r.i. sobre (X,M,μ).

Omitiremos a demonstração de que $(L^k_{p,q}, || \; ||_{p,q})$ é um espaço vetorial sobre K e que $|| \; ||_{p,q}$ é uma norma sobre $L_{p,q}$.

A verificação de que $(L^k_{p,q}, || \; ||_{p,q})$ é um espaço de funções sobre (X, M, μ) é simples se levarmos em conta (3.3.iv), (3.13) e o teorema da convergência monotôna. Temos também que se f e g são equimensuráveis então $f^* = g^*$ e portanto $(L^k_{p,q}, || \; ||_{p,q})$ é um espaço r.i.. Esses espaços são chamados espaços de Lorentz e para o leitor interessado, indicamos |3| |4| e |8|.

(iii) Seja ϕ: $[0, \mu(X)] \cap \mathbb{R} \to [0,\infty[$ uma função não identicamente nula, não-decrescente e tal que $\frac{\phi(t)}{t}$ é não-decrescente. Para cada $f \in F^k(X, M, \mu)$ definimos

$$||\dot{f}||_{\Lambda(\phi)} = \int_0^{\mu(X)} f^*(t) \, \frac{\phi(t)}{t} \, dt$$

e

$$||\dot{f}||_{M(\phi)} = \sup_{t \in]0,\mu(X)] \cap \mathbb{R}} \phi(t) \, f^{**}(t)$$

$$= \sup_{t \in]0,\mu(X)] \cap \mathbb{R}} \frac{\phi(t)}{t} \int_0^t f^*(s)ds.$$

Sejam

$$\Lambda(\phi) = \{\dot{f} \in F^k(X, M, \mu) : ||\dot{f}||_{\Lambda(\phi)} < \infty\}$$

e

$$M(\phi) = \{\dot{f} \in F^k(X, M, \mu) : ||\dot{f}||_{\Lambda(\phi)} < \infty\}$$

Então $(\Lambda(\phi), || \; ||_{\Lambda(\phi)})$ e $(M(\phi), || \; ||_{M(\phi)})$ são espaços r.i. sobre (X, M, μ), se μ não-atômica.

Inicialmente observemos que nossas hipóteses sobre ϕ garantem que $\phi(t) = 0$ se e só se $t = 0$ (ver (5.6)).

Vamos mostrar que em primeiro lugar que $\Lambda(\phi)$ e $M(\phi)$ são espaços vetoriais e que $|| \; ||_{\Lambda(\phi)}$ e $|| \; ||_{M(\phi)}$ são normas sobre $\Lambda(\phi)$ e $M(\phi)$ respectivamente.

Tomemos então $\dot{f}, \dot{g} \in M(\phi)$. De (4.5.i) e (4.9) concluímos então que $\alpha\dot{f}+\dot{g} \in M(\phi)$, $||\alpha\dot{f}||_{M(\phi)} = |\alpha| \, ||\dot{f}||_{M(\phi)}$ para todo $\alpha \in K$ e que $||\dot{f}+\dot{g}||_{M(\phi)} \leq ||\dot{f}||_{M(\phi)} + ||\dot{g}||_{M(\phi)}$. Além disso, se $||\dot{f}||_{M(\phi)} = 0$, como $\phi(t) = 0$ se e só se $t = 0$ temos que $\int_0^t f^*(s)ds = 0$ para todo $t \in [0,\mu(X)] \cap \mathbb{R}$ e que portanto $f^* = 0$ q.s. Como f^* é não-crescente temos que $f^* = 0$ e de (3.5.v) concluímos que $f = 0$.

Portanto $M(\phi)$ é um espaço vetorial sobre K e $||\ ||_{M(\phi)}$ é uma norma sobre $M(\phi)$.

De modo análogo demonstra-se que se $||\dot{f}||_{\Lambda(\phi)} = 0$ então $f = 0$. Tendo em vista (3.3.ii) concluímos que se $f \in \Lambda(\phi)$ e $\alpha \in K$ então $\alpha\dot{f} \in \Lambda(\phi)$ e $||\alpha\dot{f}||_{\Lambda(\phi)} = |\alpha|\ ||\dot{f}||_{\Lambda(\phi)}$.

Resta apenas demonstrar a propriedade traingular para $||\ ||_{\Lambda(\phi)}$. Para isto tomemos $f, g \in \Lambda(\phi)$. De acordo com (4.9), para todo $a \in [0,\mu(X)]$ temos

$$\int_0^a (f+g)^*(t)dt = a(f+g)^{**}(t) \leq a\, f^{**}(a)+ag^{**}(a)$$

Assim se $h = \sum_{i=1}^n \alpha_i X_{[0,a_i]}$, onde $\alpha_i > 0$ e $a_i \leq \mu(x)$ para $i = 1,\dots,n$ então

$$\int_0^{\mu(X)} (f+g)^*(t)\ h(t)dt = \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_0^{a_i} (f+g)^*(t)dt$$

$$\leq \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_0^{a_i} f^*(t)dt$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int_0^{a_i} g^*(t)\,dt$$

$$= \int_0^{\mu(X)} f^*(t)h(t)\,dt + \int_0^{\mu(X)} g^*(t)h(t)\,dt$$

Recorrendo agora a (A.1) sabemos que existe uma seqüência (h_n) de funções simples de $F^+(X, M, \mu)$ que é não-decrescente e tal que $\lim_{n\to\infty} h_n(t) = \frac{\phi(t)}{t}$ para quase todo $t \in \mathbb{R} \cap [0,\mu(X)]$ de tal forma que para cada $n \in \mathbb{N}$, existem $\alpha_1^n, \ldots, \alpha_{K_n}^n \in]0,\infty[$ e $a_1^n, \ldots, a_{K_n}^n \in]0,\mu(X)[$ tais que

$$h_n = \sum_{i=1}^{K_n} \alpha_i^n \, \chi_{[0,a_i^n]} .$$

Do teorema da convergência monótona concluímos então que

$$\int_0^{\mu(X)} (f+g)^*(t) \frac{\phi(t)}{t}\,dt = \lim_{n\to\infty} \int_0^{\mu(X)} (f+g)^*(t)h_n(t)\,dt$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \int_0^{\mu(X)} f^*(t)h_n(t)\,dt$$

$$+ \lim_{n\to\infty} \int_0^{\mu(X)} g^*(t)h_n(t)\,dt$$

$$= \int_0^{\mu(X)} f^*(t)\,\frac{\phi(t)}{t}\,dt + \int_0^{\mu(X)} g^*(t)\,\frac{\phi(t)}{t}\,dt$$

Assim $f+g \in \Lambda(\phi)$ e $\|f+g\|_{\Lambda(\phi)} \leq \|f\|_{\Lambda(\phi)} \quad \|g\|_{\Lambda(\phi)}$

Vamos mostrar agora que $(\Lambda(\phi), \|\ \|_{\Lambda(\phi)})$ verifica (8.1.ii). Tomemos (f_n) uma seqüência de funções não-negativas de $F^+(X, M, \mu)$ e $f:X \to [0,\infty]$ uma função μ-mensurável verificando (a), (b), (c) e (d) de (8.1.i) (obviamente considerando-se $E = \Lambda(\phi)$). Sabemos então que existe $S \in M$ tal $\mu(S) = 0$ e $(f_n(x))$ é uma seqüência não-decrescente para todo $x \in X \sim S$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ tomemos g_n a função definida por

$$g_n(x) = \begin{cases} f_n(x) & , \text{ se } x \in X \sim S \\ 0 & , \text{ se } x \in S \end{cases}$$

e seja

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & , \text{ se } x \in X \sim S \\ 0 & , \text{ se } x \in S \end{cases}$$

É fácil ver que essas funções são funções não-negativas de $F^k(X, M, \mu)$, que a seqüência $(g_n(x))$ é não-decrescente e que $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = g(x)$ para todo $x \in X$. De acordo com (3.14) e tendo em vista o teorema da convergência monótona, podemos assegurar que

$$\int_0^\infty g^*(t)\ \frac{\phi(t)}{t}\ dt = \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty g_n^*(t)\ \frac{\phi(t)}{t}\ dt \leq M\ .$$

Como $\phi(t) = 0$ se e só se $t = 0$ e g^* é não-decrescente é fácil ver que $g^*(t) < \infty$ para todo $t > 0$ e de (3.18) concluímos que g é finita q.s. e portanto que f é finita q.s. Então existe $h \in F^k(X, M, \mu)$ finita tal que $h = f = g$ q.s. Recorrendo a (3.3.v) obtemos que

$$\int_0^\infty h^*(t)\ \frac{\phi(t)}{t}\ dt = \int_0^\infty g^*(t)\ \frac{\phi(t)}{t}\ dt \leq M$$

isto é, $\dot{h} \in \Lambda(\phi)$ e $||\dot{h}||_{\Lambda(\phi)} \leq M$.

Analogamente demonstra-se que $(M(\phi), ||\ \ ||_{M(\phi)})$ verifica (8.1.i). Com isto recorrendo a (3.3.iv) temos que $(\Lambda(\phi), ||\ \ ||_{\Lambda(\phi)})$ e $(M(\phi), ||\ \ ||_{M(\phi)})$ são espaços de funções e de (3.8) concluímos que esses espaços são invariantes por rearranjo.

(iv) Seja $E = L_1(\mathbb{R}, A, m)$. Para cada $f \in L_1(\mathbb{R}, A, m)$ seja

$$||\dot{f}|| = \int_0^\infty |f(t)|\ dt + 2 \int_{-\infty}^0 |f(t)| dt\ .$$

É imediato que $(E, ||\ \ ||)$ é um espaço de funções sobre (X, M, μ). No entanto $(E, ||\ \ ||)$ não é um espaço r.i. sobre (X, M, μ) pois $X_{[0,1]}$ e $X_{[-1,0]}$ são equimensuráveis mas não têm a mesma norma.

(8.10) Proposição. Seja $(E, \| \ \|)$ um espaço r.i. sobre (X, M, μ), $E \neq \{0\}$. Então a função ϕ_E é não-decrescente.

Demonstração. Sejam $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ tais que $0 \leq t_1 < t_2 \leq \mu(X)$. Seja $S_{t_2} \in M$ tal que $\mu(S_{t_2}) = t_2$. Como μ é não-atômica e $0 \leq t_1 < t_2 \leq \mu(X)$, existe $S_{t_1} \in M$ tal que $S_{t_1} \subset S_{t_2}$ e $\mu(S_{t_1}) = t_1$. Logo $\dot{X}_{S_{t_1}} \leq \dot{X}_{S_{t_2}}$ e $\phi_E(t_1) = \|\dot{X}_{S_{t_1}}\| \leq \|\dot{X}_{S_{t_2}}\| = \phi_E(t_2)$.

$\square$

As proposições seguintes nos ajudarão a demonstrar que $\frac{\phi_E(t)}{t}$ é não-crescente no conjunto $\{t \in \mathbb{R} : 0 \leq t \leq \mu(X)\}$.

Em (8.11), (8.12), (8.13) e (8.14), $(E, \| \ \|)$ indicará um espaço r.i sobre (X, M, μ), tal que $E \neq \{0\}$

(8.11) Proposição. Sejam $K, n \in \mathbb{N}$, $1 < K \leq n$ e $t \in \mathbb{R}$, tal que $0 < t \leq \mu(X)$. Então

$$\frac{\phi_E\left(\frac{K}{n} t\right)}{\frac{K}{n} t} \leq \frac{\phi_E\left(\frac{K-1}{n} t\right)}{\frac{K-1}{n} t} .$$

Demonstração. Como $0 < \frac{K}{n} \leq 1$ e $t \in \mathbb{R} \cap [0, \mu(X)]$ então $\frac{K}{n} t \in \mathbb{R} \cap [0, \mu(X)]$. Logo existe $S \in M$ tal que $\mu(S) = \frac{K}{n} t$ e portanto $\dot{X}_S \in E$. Do teorema de (B.4) de | 1 |

concluímos que existem $S_1,..,S_k \in M_S$, dois a dois$_k$ disjuntos tais que $\mu(S_j) = \frac{t}{n}$, para $1 \leq j \leq K$. Portanto $\mu(\bigcup_{j=1} S_j) = \mu(S)$ e $X_S = \sum_{j=1}^{k} X_{S_j}$ q.s. Logo

$$(K-1)\, X_S = \sum_{j=1}^{k} (X_S - X_{S_j}) = \sum_{j=1}^{k} X_{S \sim S_j} .$$

Assim temos $(K-1)\,||\dot{X}_S|| \leq \sum_{j=1}^{k} ||\dot{X}_{S \sim S_j}||$ e como

$\mu(S \sim S_j) = \mu(S \sim S_1) = \frac{K-1}{n}\, t$, para $1 \leq j \leq n$, temos que

$$(K-1)\,||\dot{X}_S|| \leq \sum_{j=1}^{k} ||\dot{X}_{S \sim S_j}|| = K\, \phi_E\left(\frac{K-1}{n}\, t\right) .$$

Lembrando que $\mu(S) = \frac{K}{n}\, t$, concluímos que

$$(K-1)\, \phi_E\left(\frac{K}{n}\, t\right) \leq K\, \phi_E\left(\frac{K-1}{n}\, t\right) ,$$

de onde se segue o resultado.

$||$

(8.12) <u>Proposição</u>. Sejam $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ tais que $0 < r_1 < r_2 \leq 1$ e $t \in \mathbb{R} \cap |0,\mu(X)|$. Então

$$\frac{\phi_E(r_2 t)}{r_2 t} \leq \frac{\phi_E(r_1 t)}{r_1 t}$$

<u>Demonstração.</u> De (8.11) decorre facilmente que

$$\frac{\phi_E(\frac{K}{n}\, t)}{\frac{K}{n}\, t} \leq \frac{\phi_E(\frac{p}{n}\, t)}{\frac{p}{n}\, t}$$

se $K, p, n \in \mathbb{N}$ e $1 < p < K \leq n$.

Como $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ e $0 < r_1 < r_2 \leq 1$, existem $K,p,n \in \mathbb{N}$ tais que $1 < p < K \leq n$, $r_1 = \frac{p}{n}$ e $r_2 = \frac{k}{n}$. Portanto

$$\frac{\phi_E(r_2 t)}{r_2 t} \leq \frac{\phi_E(r_1 t)}{r_1 t} \quad .$$

$\square$

(8.13) <u>Proposição</u>. Se $t_1, t_2 \in \mathbb{R} \cap [0,\mu(X)]$ e $t_1 < t_2$ então

$$\frac{\phi_E(t_2)}{t_2} \leq \frac{\phi_E(t_1)}{t_1} \quad ,$$

isto é, $\frac{\phi_E(t)}{t}$ é não-crescente.

<u>Demonstração</u>. Seja $r = \frac{t_1}{t_2}$. Então $r < 1$. Tomemos (r_n) uma seqüência crescente de racionais positivos convergindo para r. Assim $r_n \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Decorre de (8.12) que

$$\frac{\phi_E(t_2)}{t_2} \leq \frac{\phi_E(r_n\, t_2)}{r_n\, t_2} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N} \,. \tag{1}$$

Como ϕ_E é não-decrescente e $r_n \leq r$ para todo $n \in \mathbb{N}$, concluímos que

$$\frac{\phi_E(r_n\, t_2)}{r_n\, t_2} \leq \frac{\phi_E(r\, t_2)}{r_n\, t_2} = \frac{\phi_E(r\, t_2)}{r\, t_2}\ \frac{r}{r_n}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Lembrando que $(\frac{r}{r_n})$ decresce e converge para 1, concluímos, tendo em vista (1) e (2) que

$$\frac{\phi_E(t_2)}{t_2} \leq \frac{\phi_E(r\, t_2)}{r\, t_2} = \frac{\phi_E(t_1)}{t_1} \quad ,$$

o que completa a prova.

$\square$

(8.14) Proposição. Uma função $\phi:[0,\ \mu(X)]\cap\mathbb{R}\to[0,\infty[$ é função fundamental de um espaço r.i. sobre $(X,\ M,\ \mu)$ (o espaço $M(\phi)$ de (8.9.iii)) se e só se ϕ é não-decrescente, $\frac{\phi(t)}{t}$ é não-crescente e ϕ não é identicamente nula.

Demonstração. De (8.10) e (8.13) decorre que se ϕ é função fundamental de um espaço r.i. sobre $(X,\ M,\ \mu)$ então ϕ é não-decrescente e $\frac{\phi(t)}{t}$ é não-crescente. Sabemos também que nessas condições temos $\phi(t) = 0$ se e só se $t = 0$.

Para demonstrar a recíproca consideremos $\phi:\mathbb{R}\cap[0,\mu(X)]\to[0,\infty[$ uma função não identicamente nula não-decrescente e tal que $\frac{\phi(t)}{t}$ é não-crescente. Vamos mostrar que ϕ é a função fundamental do espaço $M(\phi)$.

De fato, tomemos $S \varepsilon M$, com $\mu(S) < \infty$. Então

$$||\chi_S||_{M(\phi)} = \sup_{t\varepsilon \mathbb{R} \cap [0,\mu(X)|} \phi(t)\ (\chi_S)^{**}(t)$$

$$= \sup_{t\varepsilon \mathbb{R} \cap [0,\mu(X)|} \frac{\phi(t)}{t} \int_0^t \chi_{[0,\mu(S)[}(s)ds$$

$$= \max\left\{ \sup_{0<t\leq \mu(S)} \phi(t), \sup_{t\varepsilon|\mu(S),\mu(X)| \cap \mathbb{R}} \frac{\phi(t)}{t}\mu(S)\right\}.$$

Como $\phi(t)$ é não-decrescente e $\frac{\phi(t)}{t}$ é não-crescente temos $\sup\limits_{0<t\leq\mu(S)} \phi(t) = \phi(\mu(S))$ e

$$\sup_{t\ \varepsilon\ \mathbb{R} \cap [\mu(S),\mu(X)|} \frac{\phi(t)}{t}\mu(S) = \phi(\mu(S)).$$ Logo

$$||\chi_S||_{M(\phi)} = \phi(\mu(S)) ,$$

o que completa a prova.

$\square$

(8.15) <u>Proposição</u>. Seja $\phi : [0,b] \to [0,\infty|$ (ou $\phi : [0,\infty[\to[0,\infty[$) uma função não identicamente nula, não-decrescente e tal que $\frac{\phi(t)}{t}$ é não-crescente. Então ϕ é absolutamente contínua em $|a,b|$ (ou $|a,\infty[$) para todo $a\ \varepsilon\ |0,b|$ (ou $a\ \varepsilon\ |0,\infty|$) e

(i) $\frac{d\phi}{dt}(t_0) \leq \frac{\phi(t_0)}{t_0}$ q.s.

Em particular se ϕ é a função fundamental de um espaço r.i. sobre (X, M, μ) então ϕ é absolutamente contínua em $[a, \mu(X)] \cap \mathbb{R}$ para todo $a > 0$ (e portanto ϕ é contínua em $]0,\mu(X)[$) e ϕ verifica (i).

<u>Demonstração</u>. Seja $a \in]0,b[$. Se $a \leq a_1 < b_1 \leq \ldots \leq a_n < b_n \leq b$ então

$$\frac{\phi(b_i)}{b_i} \leq \frac{\phi(a_i)}{a_i} \leq \frac{\phi(a)}{a}, \quad \text{para } i = 1,\ldots, n. \text{ Logo}$$

$$\sum_{i=1}^{n} [\phi(b_i) - \phi(a_i)] = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\phi(b_i)}{b_i} b_i - \frac{\phi(a_i)}{a_i} a_i\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\phi(a_i)}{a_i} (b_i - a_i)$$

$$= \frac{\phi(a)}{a} \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) .$$

De acordo com (5.6), temos que $\phi(a) > 0$. Assim dado $\varepsilon > 0$, tomando $\delta = \dfrac{a}{\phi(a)} \varepsilon$ temos que $\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) < \delta$ implica $\sum_{i=1}^{n} [\phi(b_i) - \phi(a_i)] < \varepsilon$.

Resta provar (i). Como ϕ é não-decrescente então ϕ é derivável q.s. Tomemos $t_0 \in]0,b[$ tal que ϕ seja derivável em em t_0. Para todo $h > 0$ tal que $t_0 + h < b$ temos

$$\frac{\phi(t_0+h)}{t_0+h}\,\frac{1}{h} \leq \frac{\phi(t_0)}{t_0}\,\frac{1}{h} \quad \text{e portanto}$$

$$\frac{\phi(t_0+h)-\phi(t_0)}{h} = \frac{1}{h}\left[\frac{\phi(t_0+h)}{t_0+h}(t_0+h) - \frac{\phi(t_0)}{t_0}\,t_0\right]$$

$$= \frac{1}{h}\,\frac{\phi(t_0)}{t_0}\,(t_0+h-t_0)$$

$$= \frac{\phi(t_0)}{t_0}\,.$$

Assim

$$\frac{d\phi}{dt}(t_0) = \lim_{h\downarrow 0}\frac{\phi(t_0+h)-\phi(t_0)}{h} \leq \frac{\phi(t_0)}{t_0}$$

$\square$

(8.16) <u>Observação</u>. Sabemos agora que se ϕ é a função fundamental de um espaço (invariante por rearranjo sobre (X, M, μ) então ϕ é contínua em $]0,\mu(X)[\,\cap\,\mathbb{R}$. No entanto não podemos garantir que ϕ é contínua à direita em 0. Um contra-exemplo é a função $\chi_{]0,\infty[}$ que é a função fundamental de $L_\infty(\mathbb{R}, A, m)$.

A partir daqui escreveremos simplesmente f ao invés de $\dot{f}$, desde que não haja perigo de confusão.

(8.17) Definição. Seja $(E, \|\ \|)$ um espaço r.i. sobre (X, M, μ). Para cada $g \in F^k(X, M, \mu)$ definimos

$$\|g\|_{E'} = \sup \left\{ \int_X |fg| d\mu : \|f\| \leq 1 \right\}$$

e indicamos por E' o espaço vetorial das funções $g \in F^k(X, M, \mu)$ tais que $\|g\|_{E'} < \infty$

(8.18) Observação. É fácil demonstrar que $\|g\|_{E'} = \sup \left\{ \left| \int_X fg\, d\mu \right| : \|f\| \leq 1 \right\}$ mas omitiremos esta demonstração.

(8.19) Proposição. Se E é um espaço r.i. sobre (X, M, μ), $E \neq \{0\}$ então $\|\ \|_{E'}$ é uma norma sobre E'.

Demonstração. Da definição decorre imediatamente que se $\alpha \in K$ e $g \in E'$ então $\|\alpha g\|_{E'} = |\alpha|\ \|g\|_{E'}$. Também é fácil ver que $\|h+g\|_{E'} \leq \|h\|_{E'} + \|g\|_{E'}$ para toda $f, g \in E'$.

Resta mostrar que se $\|g\|_{E'} = 0$ então $g = 0$ q.s. Suponhamos que $\|g\|_{E'} = 0$. Então

$$\int_X |fg| d\mu = 0 \text{ , para toda } f \in E \text{ .}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ seja $J_n = \{x \in X : |g(x)| > \frac{1}{n}\}$. Suponhamos por absurdo que $\mu(J_{n_0}) > 0$ para algum $n_0 \in \mathbb{N}$. Então, como μ é não-atômica existe $J \subset J_{n_0}$ tal que $0 < \mu(J) < \mu(J_{n_0})$ e portanto $\chi_J \in E$. Assim

$$\int_X \frac{|\chi_J g|}{||\chi_J||} d\mu \geq \frac{1}{n} \int_J \frac{1}{||\chi_J||} d\mu = \frac{1}{n} \frac{\mu(J)}{||\chi_J||} > 0$$

o que contradiz (1).

Portanto $\mu(J_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, isto é $g = 0$ q.s.

$\square$

(8.20) Proposição. Se $(E, || \ ||)$ é um espaço r.i. sobre (X, M, μ), e $E \neq \{0\}$, então $(E', || \ ||_{E'})$ é um espaço de de funções sobre (X, M, μ).

Demonstração. É imediato que se $g, h \in F^k(X, M, \mu)$ $h \in E'$ e $|g| \leq |h|$ q.s então $g \in E'$ é $||g||_{E'} \leq ||h||_{E'}$.

Seja (g_n) uma seqüência de funções não negativas de E' tal que $(g_n(x))$ é não-decrescente para quase todo $x \in X$. Suponhamos que exista $M \geq 0$ tal que $||g_n|| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então para todo $n \in \mathbb{N}$ e para toda $f \in E$, com $||f|| \leq 1$ temos $\int_X |fg_n| d\mu \leq M$.

Se $g : X \to [0, \infty]$ é uma função μ-mensurável e $\lim_{n\to\infty} g_n = g$ q.s. então o teorema da convergência monótona ga rante que $\int_X |fg|d\mu \leq M$ para toda $f \in E$ com $||f|| \leq 1$. Vamos mostrar que g é finita q.s. Seja $S = \{x \in X : g(x) = \infty\}$ e suponhamos por absurdo que $\mu(S) > 0$. Então como μ é não-atômica existe $D \subset S$ tal que $0 < \mu(D) < \infty$ e portanto $\chi_D \in E$. Assim temos $\infty \dfrac{\mu(D)}{||\chi_D||} = \int_X \dfrac{\chi_D g}{||\chi_D||} d\mu \leq M$, o que é uma contradição.

É imediato então existe $h : X \to K$ μ-mensurável finita tal que $h = g$ q.s. e portanto $\int_X |fh|d\mu \leq 1$ para toda $f \in E$ com $||f|| \leq 1$. Logo $h \in E'$ e $||h||_{E'} \leq M$.

$\square$

(8.21) Proposição. Se $(E, ||\ ||)$ é um espaço r.i. sobre (X, M, μ), $E \neq \{0\}$ então $(E', ||\ ||_{E'})$ é um espaço r.i. sobre (X, M, μ).

Demonstração. Já sabemos que $(E', ||\ ||_{E'})$ é um espaço de funções sobre (X, M, μ). Vamos demonstrar que se $h \in E'$, $m_h(\lambda) < \infty$ para todo $\lambda > 0$ e $g \in F^k(X, M, \mu)$ é equimensurável com h então $g \in E'$ e $||g||_{E'} = ||h||_{E'}$.

Suponhamos inicialmente que g e h sejam funções simples positivas. Seja $f \in F^k(X, M, \mu)$ uma função simples positiva com $||f|| \leq 1$. Como $m_g(\lambda) = m_h(\lambda) < \infty$ para todo $\lambda > 0$, podemos garantir, uma vez que g é simples, que se
$S = \{x \in X : g(x) \neq 0\}$ então $\mu(S) < \infty$.

Seja $f_1 = f\, \chi_S$. De acordo com (2.8) existe $\tilde{f}_1 \in F^k(X, M, \mu)$ simples positiva e equimensurável com f_1 tal que

$$\int_X h\, \tilde{f}_1\, d\mu = \int_X g\, f_1\, d\mu = \int_X g\, f\, d\mu$$

Como $\tilde{f}_1$ e f_1 são equimensuráveis e $m_{\tilde{f}_1}(\lambda) \leq (S) < \infty$ para todo $\lambda > 0$ então $\tilde{f}_1 \in E$ e $||\tilde{f}_1|| = ||f_1|| \leq ||f|| \leq 1$.

Tomemos agora uma função $f \in E$ arbitrária com $||f|| \leq 1$ e uma seqüência (f_n) de funções simples positivas de $F^k(X,M,\mu)$ que é não-decrescente e converge para $|f|$.

De acordo com o que fizemos anteriormente, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $\tilde{f}_n \in F^k(X, M, \mu)$ simples positiva tal que e $||\tilde{f}_n|| \leq ||f_n|| \leq ||f|| \leq 1$ e

$$\int_X g\, f_n\, d\mu = \int_X h\, \tilde{f}_n\, d\mu \leq ||h||_{E'} .$$

Aplicando o teorema da convergência monótona podemos garantir que

$$\int_X |gf|\, d\mu \leq ||h||_{E'} .$$

Logo $g \in E'$ e $||g||_{E'} \leq ||h||_{E'}$.

Invertendo-se os papéis de g e h concluímos que

$||h||_{E'} \leq ||g||_{E'}$ e portanto $||h||_{E'} = ||g||_{E'}$.

Para o caso geral, lembremos que, de acordo com (2.10), podemos garantir que existem (h_n) e (g_n), seqüências não-decrescentes de funções simples positivas de $F^k(X, M, \mu)$ tais que $\lim_{n\to\infty} g_n = |g|$, $\lim_{n\to\infty} h_n = |h|$ e g_n é equimensurável com h_n para todo $n \in \mathbb{N}$. (Portanto $m_{g_n}(\lambda) = m_{h_n}(\lambda) \leq m_h(\lambda) < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e para todo $\lambda >$).

Para cada $n \in \mathbb{N}$, como $|h_n| < |h|$ temos que $h_n \in E'$ e $||h_n||_{E'} \leq ||h||_{E'}$ e como g_n é equimensurável com h_n, de acordo com nossas considerações anteriores temos que $||g_n||_{E'} = ||h_n||_{E'} \leq ||h||_{E'}$. Como $(E', ||\ ||_{E'})$ é espaço de funções temos que $g \in E'$ e $||g||_{E'} \leq ||h||_{E'}$.

Invertendo-se os papéis de g e h podemos garantir que $||g||_{E'} = ||h||_{E'}$.

$\square$

(8.22) <u>Proposição</u>. Se $(E, ||\ ||)$ é um espaço r.i. sobre (X, M, μ) então

$$\int_X |fg|d\mu \leq ||f||\ ||g||_{E'}$$

para toda $f \in E$ e para toda $g \in E'$.

Em particular, se $E' \neq \{0\}$ e $f \in E$ então f é μ-localmente integrável.

Demonstração. Se $f = 0$, o resultado é imediato. Caso contrário, se $f \in E$ temos que $\frac{f}{||f||} \in E$ e tem norma igual a 1. Logo

$$\int_X \frac{|f|}{||f||} g \, d\mu \leq ||g||_{E'}$$

para toda $g \in E'$.

Para verificar que f é μ-localmente integrável basta lembrar que como $(E', || \ ||_{E'})$ é um espaço r.i. sobre (X, M, μ) e μ é não-atômica então se $E' \neq \{0\}$, $\chi_S \in E'$ para todo $S \in M$ com $\mu(S) < \infty$. Portanto $\int_S |f| d\mu \leq ||f|| \ ||\chi_S||$ para todo $S \in M$ com $\mu(S) < \infty$.

$\square$

(8.23) Exemplos

(i) Se $1 < p < \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ então

$$(L_p)' = L_{p'} \quad \text{e} \quad || \ ||_{p'} = || \ ||_{(L_p)'}.$$

É imediato, devido à desigualdade de Hölder que se $g \in L_{p'}$ e $f \in L_p$ é tal que $||f||_p \leq 1$ então

$\int_X |fg| d\mu \leq ||g||_{p'} < \infty$. Logo se $g \in L_{p'}$ então $g \in (L_p)'$ e

$||g||_{(L_p)'} \leq ||g||_{p'}$. Para a outra inclusão, observemos que se $g \in (L_p)'$ então $\int_X |fg|d\mu \leq ||g||_{(L_p)'} < \infty$ para toda $f \in L_p$ com $||f||_p \leq 1$ e portanto o funcional linear $T:L_p \to K$ por $T(f) = \int_X f\, g\, d\mu$ é contínuo. Logo $g \in L_{p'}$ e

$$||g||_{p'} = ||T|| = \sup\{|\int_X f\, g\, d\mu| : ||f||_p \leq 1\} \leq ||g||_{(L_p)'} .$$

(ii) É bastante fácil verificar que $(L_\infty)' = L_1$ e que $||\ ||_1 = ||\ ||_{L_\infty}$, e omitiremos esta prova.

(iii) Vamos demonstrar que se μ é não-atômica temos que $(L_1)' = L_\infty$. Se $g \in L_\infty$ então $\int_X |fg|d\mu \leq ||g||_\infty$ sempre $f \in L_1$ e $||f||_1 \leq 1$. Portanto L_∞ $(L_1)'$ e $||\ ||_{(L_1)'} \leq ||\ ||_\infty$.

Tomemos agora $g \in (L_1)'$. Então $\int_X |fg|d\mu \leq ||g||_{(L_p)'} < \infty$ para toda $f \in L_1$ com $||f||_1 \leq 1$. Vamos mostrar que $g \in L_\infty$.

Suponhamos por absurdo que $g \notin L_\infty$. É fácil ver então que existe uma seqüência (a_n) de números reais positivos e uma seqüência (A_n) de elementos de M tais que $0 < a_1 < a_2 < \ldots a_n < \ldots$, $0 < \mu(A_n) < \infty$, $A_n \subset \{x \in X : a_n < |g(x)| \leq a_{n+1}\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} < \infty$

De fato, como $g \in L_\infty$, existe $a_1 > 2$ tal que $m_f(a_1)>0$. Como g é finita podemos então escolher $a_2 > \max\{4, a_1\}$ de forma que $\mu\{x \in X: a_1 < |g(x)| \leq a_2\} > 0$. Assim tomamos $A_1 \subset \{x \in X: a_1 < |g(x)| \leq a_2\}$ tal que $0 < \mu(A_1) < \infty$. Tendo a_n tomo $a_{n+1} > \{\max 2^n, a_n\}$ tal que

$\mu\{x \in X : a_n < |g(x)| \leq a_{n+1}\} > 0$ e

$A_{n+1} \subset \{x \in X: a_n < |g(x)| \leq a_{n+1}\}$ tal que $\mu(A_{n+1}) < \infty$.

Se tomamos $f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{A_n}}{\mu(A_n) a_n}$ então

$$\int_X f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} < \infty$$

e portanto $f \in L_1$. No entanto

$$\int_X f|g| d\mu \geq \sum_{n=1}^{\infty} \int_X \frac{\chi_{A_n} |g|}{a_n \ \mu(A_n)} \geq \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty$$

o que contradiz o fato de que $g \in (L_1)'$.

Resta demonstrar que $||g||_\infty \leq ||g||_{(L_1)'}$. Suponhamos $g \neq 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos

$B_n = \{x \in X: |g(x)| \geq ||g||_\infty - \frac{1}{n}\}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ temos que $\mu(B_n) > 0$ e portanto que existe $D_n \subset B_n$ tal que $0 < \mu(D_n) < \infty$. Assim $\frac{\chi_{D_n}}{||\chi_{D_n}||} \in L_1$ e tem norma igual a 1. Além disso temos

$$||g||_{\infty} - \frac{1}{n} \leq \int_X |g| \frac{\chi_{D_n}}{||\chi_{D_n}||} d\mu \leq ||g||_{(L_1)'}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto $||g||_{\infty} \leq ||g||_{(L_1)'}$, o que completa a prova.

(iv) Se A é uma função de Young generalizada não-trivial e (X, M, μ) não contém átomos de medida infinita então indicando por $\bar{A}$ a função de Young definida por

$$\bar{A}(u) = \sup \{uv - A(v) \; : \; v \geq 0\}$$

temos $(L_{\bar{A}})' = L_A$. Além disso $|| \;||_{(L_{\bar{A}})'}$ e $|| \;||_A$ são normas equivalentes em L_A. Para a demonstração, ver [7], teoremas (4.11) e (4.13).

Vamos agora estudar $(L_A)'$.

Se existe $K > 0$ tal que $A(2t) \leq K\,A(t)$ para todo $t > 0$, $A(t) > 0$ e $\bar{A}(t) > 0$ para todo $t > 0$ então está demonstrado em [7], teoremas (5.1) e (5.7) que $T : L_A \to \mathbb{C}$ é um funcional linear contínuo se e só se existe $g \in L_{\bar{A}}$ tal que $T(f) = \int_X f\, g\, d\mu$ para toda $f \in L_A$. Além disso g é única nessas condições.

Assim, como $g \in (L_A)'$ se e só se o funcional linear $T_g : L_A \to \mathbb{C}$ definido por $T_g(f) = \int_X f\, g\, d\mu$ é contínuo (ver (8.18)) temos que $g \in (L_A)'$ se e só se $g \in L_{\bar{A}}$.

Também neste caso $\|\ \|_{\bar{A}}$ e $\|\ \|_{(L_A)'}$, são equivalentes.

Uma questão que se apresenta tendo em vista os exemplos (i), (ii), (iii) de (8.23) é a seguinte: se $(E, \|\ \|)$ é um espaço r.i. sobre (X, M, μ), que relação existe entre E' e o dual topológico de E. É fácil ver, tendo em vista (8.18) que $g \in E'$ se e só se o funcional linear $T_g : E \to K$ definida por $T_g(f) = \int f\, g\, d\mu$ é um funcional linear contínuo e $\|T_g\| = \|g\|_{E'}$. A questão é, então encontrar condições para que todo funcional linear contínuo $T : E \to K$ seja do tipo T_g para alguma $g \in E'$. Uma resposta para esta questão é dada em [3] no caso em que $\mu(X) < \infty$.

$\square$

(8.24) <u>Proposição</u>. Seja $(E, \|\ \|)$ um espaço r.i. sobre (X, M, μ). Então para cada $S \in M$ tal que $0 < \mu(S) < \infty$ temos

(i) $$\sup\{ \int_S |f| d\mu : \|f\| \leq \} = \frac{\mu(S)}{\|\chi_S\|}$$

Assim se $E' \neq 0$ então $\phi_E(t) \quad \phi_{E'}(t) = t$ para todo $t \in \mathbb{R} \cap [0, \mu(X)]$.

<u>Demonstração</u>. Nesta prova usaremos a notação introduzida em (2.11).

Seja $S \in \mathcal{M}$ tal que $0 < \mu(S) < \infty$. Então, como $\chi_S \in E$ temos

$$\sup\{ \int_S |f| d\mu : ||f|| \leq 1\} \geq \int_S \frac{|\chi_S|}{||\chi_S||} d\mu = \frac{\mu(S)}{||\chi_S||}$$

Para demonstrar (i) é suficiente, então, mostrar que para toda f com $||f|| \leq 1$ temos

$$\int_S |f| d\mu \leq \frac{\mu(S)}{||\chi_S||}$$

Suponhamos $f \neq 0$ pois se $f = 0$ o resultado é imediato.

Inicialmente tomemos $f = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{S_j}$, onde $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ números reais positivos e $S_1, \ldots, S_n$ são subconjuntos de S dois a dois disjuntos que têm medida $\mu_0 \neq 0$. Suponhamos $0 < ||f|| < 1$.

Para cada $K = 1, \ldots, n-1$ seja $g_k = \sum_{j=1} \alpha_j \chi_{S_{j+k(\text{mod } n)}}$. É fácil ver que cada g_k é equimensurável com f e que portanto temos $||g_k|| = ||f||$ para $k = 1, \ldots, n-1$. Assim $||g_1 + \ldots + g_{n-1} + f|| \leq n||f||$. Mas $g_1 + \ldots + g_{n-1} + f = (\alpha_1 + \ldots + \alpha_n)\chi_{\bigcup_{j=1}^{n} S_j}$. Logo

$||f|| \geq \frac{1}{n} (\alpha_1 + \ldots + \alpha_n) ||\chi_{\bigcup_{j=1}^{n} S_j}||$ e portanto como $||f|| \leq 1$ temos $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n \leq \dfrac{n}{||\chi_{\bigcup_{j=1}^{n} S_j}||}$. Assim

$$\int_S f\,d\mu = (\alpha_1 + \ldots + \alpha_n)\,\mu_0 \leq \frac{n}{\|\chi_{\bigcup_{j=1}^{n} S_j}\|}\,\mu_0 = \frac{\mu(\bigcup_{j=1}^{n} S_j)}{\|\chi_{\bigcup_{j=1}^{n} S_j}\|}$$

Tendo em vista (8.13) concluímos que

$$\int_S f\,d\mu \leq \frac{\mu(S)}{\|\chi_S\|}$$

Tomemos agora $f \in E$, uma função simples positiva tal que $0 \leq \|f\| \leq 1$ e seja $\alpha = \sup_{x \in S} f(x)$. De acordo com (2.12) para cada $\varepsilon > 0$ existe $g \in \sigma_{f\chi_S \frac{\varepsilon}{\alpha}, S}$. De (2.11.iii) e (2.12) concluímos que $g \leq f\chi_S$ e portanto que $\|g\| \leq 1$. Das considerações anteriores concluímos que

$$\int_S g\,d\mu \leq \frac{\mu(S)}{\|\chi_S\|} .$$

Recorrendo novamente a (2.11.ii) e a (2.11.iii) temos

$$\int_S (f-g)\,d\mu = \int_{\{x \in S : f(x) \neq g(x)\}} (f-g)\,d\mu \leq \alpha\,\frac{\varepsilon}{\alpha} = \varepsilon$$

Portanto

$$\int_S f\,d\mu \leq \frac{\mu(S)}{\|\chi_S\|} + \varepsilon$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário temos

$$\int_S f\,d\mu \le \frac{\mu(S)}{||\chi_S||}$$

Se f é uma função arbitrária tal que $0 \le ||f|| \le 1$ tomemos uma seqüência (f_n) não-decrescente de funções simples de $F^+(X, M, \mu)$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = |f|$. Assim $||f_n|| \le 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e do teorema da Convergência Monótona decorre que

$$\int_S |f|d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_S f_n\,d\mu \le \frac{\mu(S)}{||\chi_S||}$$

o que completa a prova de (i).

A outra afirmação é, agora, trivial.

$\square$

(8.25) Notação. Sempre que $(E', ||\ \ ||_{E'})$ for um espaço r.i. sobre (X, M, μ) indicaremos por E" o espaço $(E')'$ e por $||\ \ ||_{E''}$ a norma correspondente.

Com isto, se μ é não-atômica, $(E, ||\ \ ||)$ é um espaço r.i. sobre (X, M, μ) e $E \ne \{0\}$ então $(E'', ||\ \ ||_{E''})$ é também um espaço r.i. sobre (X, M, μ).

Nosso objetivo, agora, é demonstrar que sob determinadas condições temos $E = E''$ e $||\ \ || = ||\ \ ||_{E''}$. A partir daqui, sempre que $(E, ||\ \ ||)$ for um espaço r.i., estaremos supondo $E \ne \{0\}$ e $E' \ne \{0\}$.

(8.26) Proposição. Se $(E, ||\ \ ||)$ é um espaço r.i.

sobre (X, M, μ) então $E \subset E''$ e $||f||_{E''} \leq ||f||$ para toda $f \in E$.

Demonstração De (8.22) decorre que $\int |fg| d\mu \leq ||f||$, para toda $f \in E$ e para toda $g \in E'$ com $||g||_{E'} \leq 1$. Logo

$$\sup \{\int |fg| d\mu : ||g||_{E'} \leq 1\} \leq ||f||$$

para toda $f \in E$ e portanto se $f \in E$ então $f \in E''$ e $||f||_{E''} \leq ||f||$.

$\square$

(8.27) Teorema. Seja (X, M, μ) um espaço de medida finita (e não-atômica). Se $(E, || \ ||)$ é um espaço r.i. sobre (X, M, μ) então $E'' \subset E$ e $||f|| \leq ||f||_{E''}$, para toda $f \in E''$.

Demonstração. Preliminarmente consideremos

$$U = \{g \in E : ||g|| \leq 1\} .$$

É fácil ver que U é um subconjunto convexo, fechado e equilibrado de E.

Seja $U_1 = U \cap L_2$. Vamos mostrar agora que U_1 é fechado em L_2. Seja (g_n) uma seqüência de elementos de U_1 que converge para g em L_2. É bem conhecido que existe uma subseqüência (g_{n_k}) que converge para g q.s. Como $g_{n_k} \in E$ e $||g_{n_k}|| \leq 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$, decorre de (8.3) que $|g| \in E$ e que

$$||g|| = || \ |g| \ || \leq \underline{\lim}_{k\to\infty} ||g_{n_k}|| \leq 1 .$$

Logo $g \varepsilon U$ e como $g \varepsilon L_2$ temos que $g \varepsilon U_1$.

É fácil ver também que U_1 é convexo e equilibrado em L_2.

Tomemos agora $f \varepsilon E''$ e vamos provar que $f \varepsilon E$ e que $||f|| \leq ||f||_{E''}$. Se $f = 0$, o resultado é imediato. Suponhamos então $f \neq 0$.

Se f é limitada então como $\mu(X) < \infty$ e μ é não-atômica temos que $f \varepsilon E \cap L_2$. Portanto no caso em que f é limitada precisamos mostrar apenas que $||f|| \leq ||f||_{E''}$.

Vamos dividir a prova em três casos.

<u>1º caso</u>: f é limitada e $||f|| = 1$. Vamos mostrar que para cada $\varepsilon > 0$ temos $||f||_{E''} > (1+\varepsilon)^{-1}$, de onde concluiremos que $||f||_{E''} \geq 1 = ||f||_E$.

Seja $\varepsilon > 0$ e consideremos $f_0 = (1+\varepsilon)f$. Então $f_0 \varepsilon L_2$ e $f_0 \not\varepsilon U_1$ pois $||f_0|| = (1+\varepsilon)||f|| = 1+\varepsilon$. De acordo com (2.2.4) (2) de [2], existe um funcional linear contínuo T definido em L_2 com valores em K e um número $c \geq 0$ tal que $|T(f_0)| > c$ e $|T(g)| \leq c$ para todo $g \varepsilon U_1$. (Cabe observar aqui que podemos sempre tomar $c \neq 0$ pois se $|T(f_0)| > 0$ e $|T(g)| = 0$ para todo $g \varepsilon U_1$ então $|T(f_0)| > \delta$ e $|T(g)| \leq \delta$ para todo $g \varepsilon U_1$, sempre que $0 < \delta < |T(f_0)|$).

Pelo teorema de representação de Riez para espaços de Hilbert existe $h \varepsilon L_2$ tal que

$$T(g) = \int g\, \bar{h}\, d\mu \text{ , para toda } g \in L_2$$

e portanto

$$\left| \int f_0\, \bar{h}\, d\mu \right| > c$$

e

$$\left| \int g\, \bar{h}\, d\mu \right| \leq c \text{ , se } g \in U_1.$$

Vamos provar que $h \in E'$, mostrando que

$$\int |g\, h|\, d\mu \leq c \text{ , para toda } g \in U. \tag{1}$$

Inicialmente tomemos $g \in U_1$. Então como $||g|| = 1$, a função $g_0 = g \text{ sgn } (g\bar{h})$ também tem norma 1 e portanto $g_0 \in U_1$. Logo $\left| \int g_0\, \bar{h}\, d\mu \right| \leq c$.

Mas tomando $S = \{x \in X : (gh)(x) \neq 0\}$ temos

$$\left| \int_X g_0\, \bar{h}\, d\mu \right| = \left| \int_S \frac{g\ \bar{g}\ h\ \bar{h}}{|\bar{g}h|}\, d\mu \right| = \int_S |g\bar{h}|\, d\mu$$

$$\int_X |g\bar{h}|\, d\mu$$

e portanto

$$\int_X |gh|\, d\mu \leq c \text{ para toda } g \in U_1. \tag{2}$$

Tomemos agora $g \in U$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ seja $g_n = \inf\{|g|, n\}$. Como $g_n \leq |g|$ então $g_n \in U$. Além disso

$g_n \in L_2$, uma vez que g_n é limitada e $\mu(X) < \infty$. Logo $g_n \in U_1$. Decorre do Teorema da Convergência Monótona e de (2) que

$$\int_X |gh|d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X |g_n\, h|\, d\mu \leq c\ .$$

Assim temos (1) e portanto $h \in E'$ e $||h||_{E'} \leq c$.

Como T não é o funcional nulo, sabemos que $h \neq 0$ e portanto $||h||_{E'} \neq 0$.

Lembrando então que $f_0 = (1+\varepsilon)f$, temos

$$\int_X |fh|d\mu = (1+\varepsilon)^{-1} \int_X |f_0 h|d\mu > c\ (1+\varepsilon)^{-1}$$
$$\geq ||h||_{E'}\ (1+\varepsilon)^{-1}$$

e portanto

$$\int_X |f|\ \frac{|h|}{||h||}\ d\mu > (1+\varepsilon)^{-1}$$

Logo $||f||_{E''} \geq (1+\varepsilon)^{-1}$, o que completa a prova.

2º caso: Seja f uma função limitada qualquer. Sabemos, então que $f \in E$ e portanto que $\frac{f}{||f||} \in U$. Assim, o 1º caso nos garante que $\frac{f}{||f||} \in E''$ e que $\left|\left| \frac{f}{||f||} \right|\right|_{E''} \geq 1$. Portanto $f \in E''$ e $||f||_{E''} \geq ||f||$.

3º caso: Seja $f \in E''$ arbitrária. Para cada $n \in \mathbb{N}$

consideremos $f_n = \inf(|f|,n)$ que é, portanto, uma função limitada. Como $f \in E''$ e $f_n \leq |f|$ então $f_n \in E''$. Pelo 2º caso temos então que $f_n \in E$ e $||f_n|| \leq ||f_n||_{E''} \leq ||f||_{E''}$. Além disso $\lim_{n\to\infty} f_n = |f|$ e (f_n) é não-decrescente. Portanto por (8.1.ii) temos que $f \in E$ e $||f|| \leq ||f||_{E''}$.

$\square$

Nosso objetivo, agora, é mostrar que se substituimos a hipótese de μ ser finita por μ- σ-finita, o teorema anterior continua verdadeiro. O resultado que demonstraremos em (8.31) é, na verdade, um pouco mais geral.

(8.28) <u>Proposição</u>. Seja $(E,|| \ ||)$ um espaço r.i. sobre (X, M, μ). Dado $S \in M$ consideremos

$$E_S = \{ f|_S : f \in E\} .$$

Para cada $f \in E$, seja $||f|_S||_{E_S} = ||f\chi_S||$. Então temos

(i) Se $g \in E_S$, a função $g^{\#}$ definida em X por $g^{\#}(x) = g(x)$, se $x \in S$ e $g^{\#}(x) = 0$, se $x \in X \sim S$ é um elemento de E e $||g||_{E_S} = ||g^{\#}||$;

(ii) $(E_S,|| \ ||_{E_S})$ é um espaço r.i. sobre (S,M_S, μ_S).

<u>Demonstração</u>

(i) Se $g \in E_S$, existe $f \in E$ tal que $f|_S = g$. Com isto $f(x) = g^{\#}(x) = g(x)$, para todo $x \varepsilon S$ e portanto $|g^{\#}|<|f|$ e $g^{\#} \chi_S = f\chi_S$. Assim $g^{\#} \varepsilon E$ e $||g||_{E_S} = ||f\chi_S||\ ||g^{\#}\chi_S||\ ||g^{\#}||$.

(ii) É fácil ver que $||\ ||_{E_S}$ é uma norma sobre E_S e que $(E_S, ||\ ||_{E_S})$ é um espaço de funções sobre (X, M, μ).

Tomemos agora $g_1, g_2 \varepsilon F^k(S, M_S, \mu_S)$ funções equimensuráveis. Suponhamos que $g_1 \varepsilon E_S$ e que $m_{g_1}(\lambda) < \infty$ para todo $\lambda > 0$. Vamos provar que $g_2 \varepsilon E_S$. Em primeiro lugar é fácil ver que $m_{g_1^{\#}}(\lambda) < \infty$ e que $m_{g_1^{\#}}(\lambda) = m_{g_2^{\#}}(\lambda)$ para todo $\lambda>0$. Como $g_1^{\#} \varepsilon E$ então $g_2^{\#} \varepsilon E$ e portanto lembrando que $g_2 = g_2^{\#}\Big|_S$ concluímos que $g_2 \varepsilon E_S$. Além disso, como $||g_1^{\#}||=||g_2^{\#}||$, (i) nos garante que $||g_1||_{E_S} = ||g_2||_{E_S}$.

Assim, $(E_S, ||\ ||_{E_S})$ é um espaço r.i. sobre (S, M_S, μ_S).

$\square$

(8.29) <u>Proposição</u>. Nas condições de (8.28) temos $[E_S]' = [E']_S$ e $||\ ||_{[E_S]'} = ||\ ||_{[E']_S}$.

<u>Demonstração</u>. Vamos provar que para cada $g \varepsilon F^k(X, M, \mu)$ temos

$$\text{(i)}\quad \sup\{\int_X |g\chi_S f|d\mu : ||f||<1\} = \sup\{\int_S |g|_S f_1|d\mu_S : ||f_1||_{E_S} \leq 1\}$$

É imediato que para cada $f \in E$ com $||f|| \leq 1$, a função $f_1 = f|_S \in E_S$ e $||f_1||_{E_S} = ||f \chi_S|| \leq ||f|| \leq 1$. Além disso, para cada $g \in F^k(X, M, \mu)$ temos

$$\int_X |g \chi_S f| d\mu = \int_S |g|_S f_1| d\mu_S .$$

Logo

$$\{\int_X |g \chi_S f| d\mu : ||f|| \leq 1 \} \quad \{\int_S |g|_S f_1| d\mu_S : ||f_1||_{E_S} \leq 1\} \tag{1}$$

Por outro lado se $f_1 \in E_S$ e $||f_1||_{E_S} \leq 1$ tendo em vista (8.28.i), sabemos que $f = f_1^{\#} \in E$ e $||f|| = ||f_1||_{E_S} \leq 1$. Além disso dada $g \in F^k(X, M, \mu)$ temos

$$\int_S |g|_S f_1| d\mu_S = \int_S |gf| d\mu = \int_X |g \chi_S f| d\mu .$$

Concluímos, então de (1) que

$$\{ \int_X |g \chi_S f| d\mu : ||f|| \leq 1\} = \{ \int_S |g|_S f_1| d\mu_S : ||f_1||_{E_S} \leq 1\}$$

o que demonstra (i).

Basta observar agora que

$$\sup\{ \int_X |g \chi_S f| d\mu : ||f|| \leq 1\} = ||g \chi_S||_{E'} = ||g|_S||_{|E'|_S}$$

e que

$$\sup\{ \int_S |g|_S f_1| d\mu_S : ||f_1||_{E_S} \leq 1\} = ||g|_S||_{|E_S|'}$$

para perceber que a prova está completa.

$\square$

(8.30) Observação. Seja $(E, \|\ \|)$ um espaço r.i. sobre (X, M, μ), onde é não-atômica. Aplicando sucessivamente (8.30) concluímos que para cada $S \in M$ temos

$$[E'']_S = [(E')']_S = [E']_S' = [E_S]'' \quad e$$

$$\|\ \|_{[E_S]''} = \|\ \|_{[E'']_S}$$

(8.31) Teorema. Seja $(E, \|\ \|)$ um espaço r.i. sobre (X, M, μ). Então

(i) Se $f \in E''$ e f se anula fora de um conjunto σ-finito então $f \in E$ e $\|f\| \leq \|f\|_{E''}$. Em particular se (X, M, μ) é σ-finito temos $E'' \subset E$ e $\|f\| \leq \|f\|_{E''}$ para toda $f \in E''$ e decorre então de (8.26) que $E''=E$ e $\|\ \|=\|\ \|_{E''}$.

Demonstração. Seja $f \in E''$, uma função que se anula fora de um conjunto σ-finito S. Seja (S_n) uma seqüência de conjuntos de medida finita tal que $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$ e $S_1 \subset S_2 \subset \ldots$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ seja $f_n = f|_{S_n}$. Como $f \in E''$ então $f_n \in [E'']_{S_n}$ e tendo em vista (8.3) temos que $f_n \in [E_{S_n}]''$ e que $\|f_n\|_{[E_{S_n}]''} = \|f_n\|_{[E'']_{S_n}}$. Mas como $\mu(S_n) < \infty$, (8.27)

nos garante que $f_n \in E_{S_n}$ e $||f_n||_{E_{S_n}} \leq ||f_n||_{|E_{S_n}|"}$.
Logo

$$||f_n||_{E_{S_n}} \leq ||f_n||_{[E_{S_n}]"} = ||f_n||_{[E"]_{S_n}}$$

De (8.28.i) concluímos que

$$||f_n^{\#}|| = ||f_n||_{E_{S_n}} \leq ||f_n||_{|E"|_{S_n}} = ||f_n^{\#}||_{E"}$$

$$\leq ||f||_{E"} \qquad (1)$$

É fácil ver que nossa escolha de (S_n) garante que $(f_n^{\#})$ é não-decrescente e que $\lim_{n\to\infty} f_n^{\#} = f$. Logo de (1) concluímos que $||f|| \leq ||f||_{E"}$.

A outra afirmação é evidente.

$\square$

§ 9. Alguns Tipos Especiais de Espaços r.i

Estudaremos a seguir alguns tipos especiais de espaços r.i. caracterizados por propriedades da função fundamental.

No que segue (X, M, μ) indicará um espaço de medida infinita e não atômica. Muitas vezes escreveremos simplesmente E ao invés de $(E, \| \ \|)$ para indicar um espaço r.i. sobre (X, M, μ) e estaremos supondo sempre $E \neq \{0\}$.

(9.1) <u>Definição</u>. Dizemos que $E \in U$ se existem $\delta > 0$, $\theta > 0$ e $\alpha \in \,]0,1[$ tais que

$$\frac{\phi_E(u)}{\phi_E(v)} \leq \theta \left(\frac{u}{v}\right)^{\alpha}, \quad \text{se} \quad \frac{u}{v} \geq \delta .$$

Dizemos que $E \in L$ se existem $\gamma > 0$, $\theta > 0$ e $\beta \in \,]0,1[$ tais que

$$\frac{\phi_E(u)}{\phi_E(v)} \leq \theta \left(\frac{u}{v}\right)^{\beta}, \quad \text{se} \quad \frac{u}{v} \leq \gamma .$$

(9.2) <u>Observação</u>.

Sabemos de (8.13) que $\dfrac{\phi_E(t)}{t}$ é não-crescente. Assim temos

$$\frac{\phi_E(u)}{\phi_E(v)} \leq \frac{u}{v}, \quad \text{se} \quad \frac{u}{v} \geq 1 .$$

Por outro lado, como (8.13) nos garante que ϕ_E é não decrescente temos também

$$\frac{\phi_E(u)}{\phi_E(v)} \leq 1 \quad , \quad \text{se} \quad \frac{u}{v} \leq 1 \; .$$

Isto corresponderia a tomar respectivamente $\alpha=1$ e $\beta=0$ em (9.1).

(9.3) Exemplos

(i) É fácil ver que $L_p \in \mathcal{U}$ e $L_p \in \mathcal{L}$ se $1 < p < \infty$. No entanto $L_1 \in \mathcal{L}$ mas $L_1 \notin \mathcal{U}$.

Para ver que $L_1 \in \mathcal{L}$ basta lembrar que $\phi_{L_1}(t) = t$ para todo $t \geq 0$. Portanto tomando $\theta = 1$ e $\beta = \frac{1}{2}$, por exemplo, temos

$$\frac{\phi_{L_1}(u)}{\phi_{L_1}(v)} = \frac{u}{v} \leq \theta \left(\frac{u}{v}\right)^{\beta} \quad , \quad \text{se} \quad \frac{u}{v} \leq 1 \; .$$

Para demonstrar que $L_1 \notin \mathcal{U}$, observemos que não existem $\theta > 0$, $\delta > 0$ e $\alpha \in \,]0,1[$ tais que

$$\frac{u}{v} = \frac{\phi_{L_1}(u)}{\phi_{L_1}(v)} \leq \theta \left(\frac{u}{v}\right)^{\alpha} \quad , \quad \text{se} \quad \frac{u}{v} \geq \delta \; . \tag{1}$$

De fato, se existissem $\theta > 0$, $\delta > 0$ e $\alpha \in \,]0,1[$ verificando (1) teríamos

$$t^{1-\alpha} \leq \theta \quad \text{para todo} \quad t \geq \delta \quad .$$

o que evidentemente não é possível.

De modo análogo demonstra-se que $L_\infty \in \mathcal{U}$ e que $L_\infty \notin L$

(ii) Seja A uma função de Young não-trivial. Vamos demonstrar agora que $L_A \in \mathcal{U}$ se e só se existem $\alpha \in]0,1[$ e $K > 0$ tais que

$$\frac{A^{-1}(t_1)}{t_1^\alpha} \leq K \frac{A^{-1}(t_2)}{t_2^\alpha} \quad , \text{ se } t_1 \geq t_2 > 0 . \tag{2}$$

Suponhamos que existam $\alpha \in]0,1[$ e $K > 0$ verificando (2). Então de acordo com (8.9.i) temos que

$$\frac{\phi_{L_A}(u)}{\phi_{L_A}(v)} = \frac{A^{-1}(\frac{1}{v})}{A^{-1}(\frac{1}{u})} \leq K \frac{(\frac{1}{v})^\alpha}{(\frac{1}{u})^\alpha} \text{ , se } \frac{1}{v} \geq \frac{1}{u}$$

ou ainda que

$$\frac{\phi_{L_A}(u)}{\phi_{L_A}(v)} \leq K \left(\frac{u}{v}\right)^\alpha \quad , \quad \text{se } \frac{u}{v} \geq 1 .$$

Assim $L_A \in \mathcal{U}$.

Reciprocamente se $L_A \in \mathcal{U}$ então existem $\delta > 0, \theta > 0$ e $\alpha \in]0,1[$ tais que

$$\frac{A^{-1}(\frac{1}{v})}{A^{-1}(\frac{1}{u})} \leq \theta \left(\frac{u}{v}\right)^\alpha \quad , \text{ se } \frac{u}{v} \geq \delta ,$$

isto é,

$$\frac{A^{-1}(\frac{1}{v})}{(\frac{1}{v})^{\alpha}} \leq \theta \frac{A^{-1}(\frac{1}{u})}{(\frac{1}{u})^{\alpha}}, \text{ se } \frac{u}{v} \geq \delta$$

ou ainda

$$\frac{A^{-1}(t_1)}{t_1^{\alpha}} \leq \theta \frac{A^{-1}(t_2)}{t_2^{\alpha}}, \text{ se } \frac{t_1}{t_2} \geq \delta .$$

Façamos $\delta_1 = \max\{1,\delta\}$. Temos então que

$$\frac{A^{-1}(t_1)}{t_1^{\alpha}} \leq \theta \frac{A^{-1}(t_2)}{t_2^{\alpha}}, \text{ se } \frac{t_1}{t_2} \geq \delta_1 . \tag{3}$$

Em particular temos

$$\frac{A^{-1}(\delta_1 t)}{(\delta_1 t)^{\alpha}} \leq \theta \frac{A^{-1}(t)}{t^{\alpha}} \quad \text{para todo } t > 0 .$$

Suponhamos em primeiro lugar que $0 < t_2 < t_1 \leq \delta_1 t_2$. Usando sucessivamente o fato de que A^{-1} é não-decrescente e a última relação temos

$$\frac{A^{-1}(t_1)}{(\delta_1 t_1)^{\alpha}} \leq \frac{A^{-1}(\delta_1 t_2)}{(\delta_1 t_2)^{\alpha}} \leq \theta \frac{A^{-1}(t_2)}{t_2^{\alpha}}$$

e portanto

$$\frac{A^{-1}(t_1)}{t_1^{\alpha}} \leq \theta\, \delta_1^{\alpha} \frac{A^{-1}(t_2)}{t_2^{\alpha}}$$

Se $t_1 \geq \delta_1 t_2$ decorre de (3) que

$$\frac{A^{-1}(t_1)}{t_1^\alpha} \leq \theta \; \delta_1^\alpha \; \frac{A^{-1}(t_2)}{t_2^\alpha}$$

e como $\delta_1 \geq 1$ temos

$$\frac{A^{-1}(t_1)}{t_1^\alpha} \leq \theta \, \delta_1^\alpha \, \frac{A^{-1}(t_2)}{t_2^\alpha} .$$

Assim tomando $K = \theta \, , \delta_1^\alpha$ temos (2).

(9.4) <u>Proposição</u>

(i) $E \in \mathcal{U} \iff E' \in \mathcal{L}$.

(ii) $E \in \mathcal{L} \iff E' \in \mathcal{U}$.

<u>Demonstração</u>. (i) Se $E \in \mathcal{U}$ existem $\theta > 0$, $\delta > 0$ e $\alpha \in \,]0,1[$ tais que

$$\frac{\phi_E(u)}{\phi_E(v)} \leq \theta \left(\frac{u}{v}\right)^\alpha \quad , \text{ se } \frac{u}{v} \geq \delta \, .$$

Como $\phi_E(t) \; \phi_{E'}(t) = t$ para todo $t > 0$ temos

$$\frac{u}{v} \frac{\phi_{E'}(v)}{\phi_{E'}(u)} \leq \theta \left(\frac{u}{v}\right)^\alpha , \text{ se } \frac{u}{v} \geq \delta$$

ou ainda

$$\frac{\phi_{E'}(v)}{\phi_{E'}(u)} \leq \theta \left(\frac{u}{v}\right)^{\alpha-1} , \quad \text{se } \frac{u}{v} \geq \delta \,;$$

Basta então tomar $\beta = 1 - \alpha \in]0,1[$ e $\gamma = \frac{1}{\delta}$.

A recíproca de (i) e (ii) podem ser demonstradas de modo análogo.

$| \; |$

(9.5) Proposição. Para todo $t \geq 0$ temos

$$\phi_{E'}(t) \leq \int_0^t \frac{1}{\phi_E(s)} \, ds.$$

Se $E \in \mathcal{U}$ então existe $K > 0$ tal que

$$\int_0^t \frac{1}{\phi_E(s)} \, ds \leq K \, \phi_{E'}(t)$$

para todo $t \geq 0$.

Demonstração. Se $t = 0$, o rssultado é imediato. Suponhamos $t \neq 0$. Como $\phi_E(t) \quad \phi_{E'}(t) = t$ e ϕ_E é não-decrescente temos

$$\phi_{E'}(t) = \int_0^t \frac{ds}{\phi_E(t)} \leq \int_0^t \frac{ds}{\phi_E} \; .$$

Assim a primeira afirmação está demonstrada.

Para a segunda afirmação, lembremos que, como $E \in \mathcal{U}$

existem $\delta > 0, \theta > 0$ e $\alpha \in \left]0,1\right[$ tais que

$$\frac{\phi_E(u)}{\phi_E(v)} \leq \theta \left(\frac{u}{v}\right)^{\alpha} \quad , \text{ se } \frac{u}{v} \geq \delta .$$

Tomando $\delta_1 = \max\{1,\delta\}$ temos então que

$$\frac{\phi_E(u)}{\phi_E(v)} \leq \theta \left(\frac{u}{v}\right)^{\alpha} , \text{ se } \frac{u}{v} \geq \delta_1 . \tag{1}$$

Fixemos $t > 0$. Então

$$\int_0^t \frac{1}{\phi_E(s)} ds = \frac{\phi_{E'}(t)\ \phi_E(t)}{t\ \phi_E(t\ \delta_1)} \int_0^t \frac{\phi_E(t\ \delta_1)}{\phi_E(s)} ds .$$

Como $\delta_1 \geq 1$, temos $t \leq t\ \delta_1$ e portanto $\phi_E(t) \leq \phi_E(t\ \delta_1)$ e

$$\int_0^t \frac{1}{\phi_E(s)} ds \leq \frac{\phi_{E'}(t)}{t} \int_0^t \frac{\phi_E(t\ \delta_1)}{\phi_E(s)} ds .$$

Decorre de (1) que

$$\frac{\phi_E(t\ \delta_1)}{\phi_E(s)} \leq \theta \left(\frac{t\ \delta_1}{s}\right)^{\alpha}$$

para $0 \leq s \leq t$ e temos então

$$\int_0^t \frac{1}{\phi_E(s)} ds \leq \frac{\phi_{E'}(t)}{t} \theta \int_0^t \left(\frac{t\ \delta_1}{s}\right)^{\alpha} ds$$

$$= \frac{\phi_{E'}(t)\ \theta\ t^{\alpha} \delta_1^{\alpha}}{t} \int_0^t \frac{1}{s^{\alpha}} ds .$$

$$= \phi_{E'}(t)\ \theta\ t^{\alpha-1}\ \delta_1^{\alpha}\ \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

uma vez que $\alpha \in]0,1[$. Logo

$$\int_0^t \frac{1}{\phi_E(s)}\, ds \le \frac{\theta\, \delta_1^{\alpha}}{1-\alpha}\, \phi_{E'}(t)$$

e tomando $K = \dfrac{\theta\, \delta_1^{\alpha}}{1-\alpha}$, a prova estará completa.

$\square$

(9.6) <u>Corolário</u>. Se $E \in L$ então existe $K > 0$ tal que

$$\int_0^t \frac{\phi_E(s)}{s}\, ds \le K\, \phi_E(t).$$

<u>Demonstração</u>. Se $E \in L$, temos de acordo com (9.4.ii) que $E' \in U$. Assim, (9.5) garante que existe $K > 0$ tal que

$$\int_0^t \frac{1}{\phi_{E'}(s)}\, ds \le K\, \phi_{E''}(t)$$

para todo $t > 0$. Lembrando que $\phi_E(t)\phi_{E'}(t) = t = \phi_{E'}(t)\phi_{E''}(t)$ obtemos

$$\int_0^t \frac{\phi_E(s)}{s}\, ds \le K\, \phi_E(t)$$

para todo $t > 0$.

$\square$

(9.7) <u>Proposição</u>. Se $E \in U$ então existe $K > 0$ tal que

$$\int_t^\infty \frac{\phi_E(s)}{s} \frac{ds}{s} \leq \frac{K}{\phi_{E'}(t)} .$$

<u>Demonstração</u>. Se $E \in \mathcal{U}$ então existem $\delta > 0$, $\theta > 0$ e $\beta \in \,]0,1[$ tais que

$$\frac{\phi_E(u)}{\phi_E(v)} \leq \theta \left(\frac{u}{v}\right)^\alpha , \text{ se } \frac{u}{v} \geq \delta .$$

Fazendo $\delta_1 = \max\{1,\delta\}$ obtemos que

$$\frac{\phi_E(u)}{\phi_E(v)} \leq \theta \left(\frac{u}{v}\right)^\alpha, \text{ se } \frac{u}{v} \geq \delta_1 . \tag{1}$$

Fixemos $t > 0$. Temos então que

$$\int_t^\infty \frac{\phi_E(s)}{s} \frac{ds}{s} = \phi_E(t) \int_t^\infty \frac{\phi_E(s)}{\phi_E(t)} \frac{ds}{s^2} .$$

Como $\delta_1 \geq 1$ temos $\phi_E(s) \leq \phi_E(s\delta_1)$ para todo $s > 0$ e portanto

$$\int_t^\infty \frac{\phi_E(s)}{s} \frac{ds}{s} \leq \phi_E(t) \int_t^\infty \frac{\phi_E(s\,\delta_1)}{\phi_E(t)} \frac{ds}{s^2} .$$

Decorre de (1) que

$$\frac{\phi_E(s\,\delta_1)}{\phi_E(t)} \leq \theta \left(\frac{s\delta_1}{t}\right)^\alpha$$

para todo $s \geq t$.

Assim

$$\int_t^\infty \frac{E(s)}{s} \frac{ds}{s} \leq \theta\ \delta_1^\alpha \frac{\phi_E(t)}{t^\alpha} \int_t^\infty \frac{s^\alpha}{s^2}\, ds\,.$$

Uma vez que $\alpha < 1$ temos

$$\int_t^\infty \frac{E(s)}{s} \frac{ds}{s} \leq \theta\ \delta_1^\alpha \frac{\phi_E(t)}{t^\alpha} \frac{t^{\alpha-1}}{1-\alpha}$$

$$= \frac{\theta\delta_1^\alpha}{1-\alpha} \frac{\phi_E(t)}{t} = \frac{\theta\delta_1^\alpha}{1-\alpha} \frac{1}{\phi_{E'}(t)}\,.$$

Basta então considerar $K = \dfrac{\theta\delta_1^\alpha}{1-\alpha}$.

$\square$

(9.8) Corolário. Se $E \in L$ então existe $K > 0$ tal que

$$\int_t^\infty \frac{1}{\phi_E(s)} \frac{ds}{s} \leq \frac{K}{\phi_E(t)}\,.$$

Demonstração. Basta recorrer a (9.4.ii) e (9.7).

$\square$

(9.9) Proposição. Se $E \in L$, podemos definir uma norma sobre E, que indicaremos por $\|\ \|_0$ tal que

(i) $(E, \|\ \|_0)$ é um espaço r.i.;

(ii) $\|\ \|_0$ é equivalente a $\|\ \|$;

(iii) a função fundamental ϕ_{E_0} relativa à $\|\ \|_0$ é côncava;

(iv) existe $K_1 > 0$ tal que

$$K_1 \frac{\phi_{E_0}(t)}{t} \leq \frac{d\,\phi_{E_0}(t)}{dt} \leq \frac{\phi_{E_0}(t)}{t}$$

para todo $t > 0$.

<u>Demonstração</u>. Se $E \in L$, de acordo com (9.4.ii) temos que $E' \in U$ e portanto de (9.5) decorre que existe $K > 0$ tal que para todo $t > 0$ temos

$$\phi_{E''}(t) \int_0^t \frac{1}{\phi_{E'}(s)}\, ds \leq K\, \phi_{E''}(t).$$

Como $\phi_{E''} = \phi_E$ temos

$$\phi_E(t) \leq \int_0^t \frac{1}{\phi_{E'}(s)}\, ds \leq K\, \phi_E(t)$$

para todo $t > 0$.

Seja $\bar{\phi}(t) = \int_0^t \frac{1}{\phi_{E'}(s)}\, ds$. Então temos

$$\phi_E(t) \leq \bar{\phi}(t) \leq K\, \phi_E(t) \quad \text{para todo } t > 0. \tag{1}$$

Como $\frac{1}{\phi_{E'}(s)} = \frac{\phi_E(s)}{s}$, para todo $s > 0$ podemos garantir tendo em vista (8.13) que $\bar{\phi}$ é côncava e portanto que $\frac{\bar{\phi}(t)}{t}$ é não-crescente.

Para cada $f \in E$ sejam

$$||f||_0 = \max\{||f||, \sup_{t>0} f^{**}(t)\ \bar{\phi}(t)\}$$

$$= \max\{||f||, ||f||_{M(\bar{\phi})}\} .$$

Recorrendo a (8.9.iii) é fácil ver que $||\ ||_0$ é uma norma sobre E. Também é imediato que $(E,||\ ||_0)$ é um espaço r.i.

Vamos demonstrar (ii). Para isto, lembremos que, de acordo com (4.7.i) e (8.23) temos que para toda $f \in E$ e para todo $t > 0$ vale

$$t\ f^{**}(t) = \sup\ \{\int_S |f|\ d\mu : \mu(S) \leq t\}$$

$$\leq \sup\ \{\ ||f||\ ||\chi_S||_{E'} : \mu(S) \leq t\}$$

$$\leq ||f||\ \phi_{E'}(t) = ||f||\ \frac{t}{\phi_E(t)} .$$

Assim podemos concluir, de (1) que $f^{**}(t)\ \bar{\phi}(t) \leq K\ ||f||$ para todo $t > 0$ e para toda $f \in E$. Logo $||f||_0 \leq K||f||$ para toda $f \in E$. É imediato, agora que $||\ ||$ e $||\ ||_0$ são normas equivalentes sobre E, isto é, que vale (ii).

Para provar (iii), é suficiente verificar que $\phi_{E_0} = \bar{\phi}$, uma vez que $\bar{\phi}$ é côncava.

Tomemos $S \in M$, com $\mu(S) < \infty$. Então de acordo com (8.14) sabemos que $||\chi_S||_{M(\bar{\phi})} = \bar{\phi}(\mu(S))$. Como, de acordo com (1) temos $||\chi_S|| = \phi_E\ (\mu(S)) \leq \bar{\phi}(\mu(S))$ então

$$\phi_{E_0}(\mu(S)) = ||\chi_S||_0 = \sup\{||\chi_S||,\ ||\chi_S||_{M(\phi)}\} = \bar{\phi}(\mu(s))$$

o que completa a prova de (iii).

Resta apenas demonstrar (iv). Como $\frac{1}{\phi_{E'}}$ é contínua em $]0,\infty[$ temos

$$\frac{\phi_E(t)}{t} = \frac{1}{\phi_{E'}(t)} = \frac{d\bar{\phi}}{dt}(t) \quad \text{para todo } t > 0 . \qquad (2)$$

De (1) e de (2) concluímos então que

$$\frac{\bar{\phi}(t)}{t} \leq K \frac{d\bar{\phi}}{dt}(t) \leq K \frac{\bar{\phi}(t)}{t} .$$

para todo $t > 0$. Tomando $K_1 = K^{-1}$ temos

$$K_1 \frac{\bar{\phi}(t)}{t} \leq \frac{d\bar{\phi}}{dt}(t) \leq \frac{\bar{\phi}(t)}{t}$$

para todo $t > 0$, o que completa a prova.

| |

(9.10) <u>Observação</u>. Se $(E,|| \ ||)$ é um espaço r.i. e $|| \ ||_0$ é uma norma sobre E equivalente a $|| \ ||_0$ e tal que $(E, || \ ||_0)$ é também um espaço r.i. então $(E,|| \ ||) \in \mathcal{U}$ (a $\mathcal{L}$) se e só se $(E, || \ ||_0) \in \mathcal{U}$ (respectivamente a $\mathcal{L}$). De fato, se ϕ_{E_0} é a função fundamental de $(E,|| \ ||_0)$, existem $c_1, c_2 > 0$ tais que $c_2 \phi_E \leq \phi_{E_0} \leq c_1 \phi_E$. Assim, se $(E,|| \ ||) \in \mathcal{U}$ existem $\delta > 0, \theta > 0$ e $\alpha \in]0,1[$ tais que

$$\frac{\phi_E(u)}{\phi_E(v)} \leq \theta \left(\frac{u}{v}\right)^{\alpha} \quad , \text{ se } \frac{u}{v} \geq \delta .$$

Logo

$$\frac{\phi_{E_0}(u)}{\phi_{E_0}(v)} \leq \frac{c_1}{c_2} \frac{\phi_E(u)}{\phi_E(v)} \leq \frac{c_1}{c_2} \theta \left(\frac{u}{v}\right)^{\alpha} \quad , \text{ se } \frac{u}{v} \geq \delta,$$

o que mostra que $(E, \| \ \|_0) \in \mathcal{U}$.

As outras afirmações podem ser demonstradas de modo análogo.

$\Box$

CAPÍTULO IV

Em todo este capítulo $(X, \mathcal{M}, \mu)$ indicará um espaço de medida infinita e não-atômica. As letras E e F, muitas vezes acompanhadas de índices, serão utilizadas sempre para indicar espaços r.i. sobre $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ respectivamente e estaremos supondo $E \neq \{0\}$ e $F \neq \{0\}$. Quando houver necessidade escreveremos $\| \ \|_E$ para indicar a norma de E.

Os teoremas do § 7 nos deram condições suficientes para que um operador de tipos fracos (p_0, q_0) e (p_1, q_1) fosse um operador contínuo de L_A em L_B. No § 10 trataremos de estender a definição de operador de tipo fraco e estudaremos as classes $\Lambda(\phi_E, A)$. No § 11 mostraremos que sob determinadas condições um operador de tipos fracos (E_0, F_0) e (E_1, F_1) é um operador contínuo de $\Lambda(\phi_E, A)$ em $\Lambda(\phi_F, A)$.

§ 10. As classes $\Lambda(E)$, $M(E)$, $\Lambda(\phi_E, A)$. Operadores de tipo fraco (E,F).

Em (8.9.iii) mostramos que $\Lambda(\phi)$ e $M(\phi)$ são espaços r.i. sempre que $\phi: [0,\infty[\to [0,\infty[$ é uma função não identicamente nula, não-decrescente e tal que $\frac{\phi(t)}{t}$ é não-crescente. Então, em particular se ϕ é a função fundamental de um espaço r.i., temos de acordo com (8.10) e (8.13) que $\Lambda(\phi)$ e $M(\phi)$ são espaços r.i.

(10.1) Notação. Escreveremos simplesmente $\Lambda(E)$ e $M(E)$ ao invés de $\Lambda(\phi_E)$ e $M(\phi_E)$. Assim as notações $\|\ \|_{\Lambda(\phi_E)}$ e $\|\ \|_{M(\phi_E)}$ serão substituídas por $\|\ \|_{\Lambda(E)}$ e $\|\ \|_{M(E)}$, respectivamente.

(10.2) Proposição. $\Lambda(E) \subset E \subset M(E)$ e estas inclusões são contínuas, isto é, $\|\ \|_{M(E)} \le \|\ \|_E \le \|\ \|_{\Lambda(E)}$

Demonstração. Seja $f \in E$. De (4.7.i) e de (8.22) decorre que para todo $t > 0$ temos

$$t\, f^{**}(t) = \sup\{ \int_S |f|\,d\mu : \mu(S) \le t\}$$
$$\le \|f\|_E\, \phi_{E'}(t) .$$

Logo, tendo em vista (8.24) temos que $f^{**}(t)\phi_E(t) \le \|f\|_E$ pa ra todo $t > 0$, isto é, $f \in M(E)$ e $||f||_{M(E)} \leq ||f||_E$. Portanto $E \subset M(E)$ e $|| \ ||_{M(E)} \leq || \ ||_E$.

Vamos mostrar agora que $\Lambda(E) \subset E$.

Se $f \in \Lambda(E)$ então $m_f(\lambda) < \infty$ para todo $\lambda > 0$. De fato, se $m_f(\lambda) = \infty$ para algum $\lambda > 0$ então $m_{f^*}(\lambda) = \infty$ o que significa que $f^*(t) > \lambda$ para todo $\lambda > 0$. Lembrando que ϕ_E é não-decrescente temos

$$\int_0^\infty f^*(t) \frac{\phi_E(t)}{t} dt \geq \lambda \int_0^\infty \frac{\phi_E(t)}{t} dt \geq \lambda\phi_E(1) \int_1^\infty \frac{1}{t} dt = \infty$$

o que é uma contradição pois $f \in \Lambda(E)$.

Tomemos inicialmente $f \in \Lambda(E)$ uma função simples positiva. Então (3.13) nos garante que podemos encontrar números reais positivos $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ e subconjuntos mensuráveis de X, $S_1,\ldots,S_n$ (que têm medida finita) tais que $f = \sum_{i=1}^n \alpha X_{S_i}$ e $f^* = \sum_{i=1}^n \alpha_i X_{|0,\mu(S_i)|}$. Como $\mu(S_i) < \infty$ para $i = 1,\ldots,n$ é imediato que $f \in E$. Além disso temos

$$\int_0^\infty f^*(t) \frac{\phi_E(t)}{t} dt = \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_0^{\mu(S_i)} \frac{\phi_E(t)}{t} dt$$

e lembrando que $\dfrac{\phi_E(t)}{t}$ é não-crescente concluímos que

$$\begin{aligned}\int_0^\infty f^*(t) \frac{\phi_E(t)}{t} dt &\geq \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_E(\mu(S_i)) \\ &\geq \Big|\Big| \sum_{i=1}^n \alpha_i X_{S_i} \Big|\Big|_E = ||f||_E .\end{aligned}$$

Logo $||f||_{\Lambda(E)} \geq ||f||_E$.

Para o caso geral tomemos $f \in \Lambda(E)$ arbitrária e (f_n) uma seqüência não-decrescente de funções simples positivas que converge para $|f|$. Como $f \in \Lambda(E)$ e $|f_n| \leq |f|$ para todo $n \in \mathbb{N}$ então $f_n \in E$. Como cada f_n é simples temos $||f_n||_E \leq ||f_n||_{\Lambda(E)} \leq ||f||_{\Lambda(E)}$ e lembrando que $f \in E$ temos que $||f|| \leq ||f||_{\Lambda(E)}$.

Portanto $\Lambda(E) \subset E$ e $|| \ ||_E < || \ ||_{\Lambda(E)}$.

$\square$

(10.3) <u>Definição</u>. Seja A uma função de Young generalizada não-trivial. Indicamos por $\Lambda(\phi_E, A)$ o conjunto das funções $f \in F^k(X, M, \mu)$ tais que $f^{**}(t) < \infty$ para todo $t > 0$ e

$$\int_0^\infty A\left(\frac{f^{**}(t)\ \phi_E(t)}{K}\right) \frac{dt}{t} \leq 1 \text{ para algum } K > 0, \text{ isto é}$$

$$f^{**}\ \phi_E \in L_A((0,\infty),\ A_{(0,\infty)},\ \frac{dt}{t})$$

Para cada $f \in \Lambda(\phi_E, A)$ definimos

$$||f||_{\Lambda(\phi_E, A)} = ||f^{**}\ \phi_E||_A .$$

(10.4) <u>Observações</u>

(a) Se A é uma função de Young generalizada tal que

$A(u) > 0$ para todo $u > 0$ e $f \in \Lambda(\phi_E, A)$ então $m_f(\lambda) < \infty$ para todo $\lambda > 0$. De fato, se $m_f(\lambda) = \infty$ para algum $\lambda > 0$ então $f^*(t) > \lambda$ para todo $t > 0$, e de (4.5.ii) concluímos que $f^{**}(t) > \lambda$ para todo $t > 0$. Assim para cada $K > 0$ temos

$$\infty = A\left(\frac{\phi_E(1)\ \lambda}{K}\right) \int_1^\infty \frac{dt}{t} \leq \int_0^\infty A\left(\frac{f^{**}(t)\ {}_E(t)}{K}\right) \frac{dt}{t}$$

e portanto $f \notin \Lambda(\phi_E, A)$.

(b) É fácil ver que $(\ \Lambda(\phi_E, A), \| \ \|_{\Lambda(\phi_E, A)}\ )$ é um espaço r.i.

(10.5) <u>Proposição</u>. Seja A uma função de Young tal que $\frac{A(t)}{t^p}$ é não-crescente para algum $p > 0$. Se existe $\theta > 0$ (podemos assumir $\theta \geq 1$) tal que

$$\text{(i)} \quad \frac{1}{\phi_{E'}(t)} \int_0^t \phi_{E'}(s) \frac{ds}{s} \leq \theta \quad \text{para todo } t > 0 \text{ ;}$$

$$\text{(ii)} \quad \phi_{E'}(t) \int_t^\infty \frac{1}{\phi_{E'}(s)} \frac{ds}{s} \leq \theta \quad \text{para todo } t > 0 \text{ ,}$$

então para toda $f \in F^k(X, M, \mu)$ tal que $f^{**}(t) < \infty$ para todo $t > 0$ temos

$$\text{(iii)} \quad \int_0^\infty A(f^{**}(t)\phi_E(t)) \frac{dt}{t} \leq \theta^p \int_0^\infty A(f^*(t)\phi_E(t)) \frac{dt}{t} .$$

Demonstração. Seja $f \in F^k(X, M, \mu)$ tal que $f^{**}(t) > \infty$ para todo $t > 0$. De acordo com (8.24) para todo $t > 0$ temos

$$f^{**}(t)\ \phi_E(t) = \frac{\phi_E(t)}{t} \int_0^t f^*(s)ds$$

$$= \frac{1}{\phi_{E'}(t)} \int_0^t f^*(s)ds$$

$$= \frac{\displaystyle\int_0^t \phi_{E'}(s)\ \frac{ds}{s}}{\theta\ \phi_{E'}(t)} \ \frac{\displaystyle\theta \int_0^t f^*(s)ds}{\displaystyle\int_0^t \phi_{E'}(s)\ \frac{ds}{s}} . \qquad (1)$$

Tendo em vista (i) temos

$\displaystyle\int_0^t \phi_{E'}(s)\ \frac{ds}{s} \leq \theta\ \phi_{E'}(t)$ para todo $t > 0$ como $\dfrac{A(u)}{u}$ é não-decrescente decorre de (1) que

$$A(f^{**}(t)\phi_E(t)) = A\left(\frac{\displaystyle\int_0^t \phi_{E'}(s)\ \frac{ds}{s}}{\theta\ \phi_{E'}(t)} \ \frac{\displaystyle\theta \int_0^t f^*(s)ds}{\displaystyle\int_0^t \phi_{E'}(s)\ \frac{ds}{s}} \right)$$

$$\leq \frac{\displaystyle\int_0^t \phi_{E'}(s)\ \frac{ds}{s}}{\theta\ \phi_{E'}(t)}\ A\left(\frac{\displaystyle\theta \int_0^t f^*(s)ds}{\displaystyle\int_0^t \phi_{E'}(s)\ \frac{ds}{s}} \right) \qquad (2)$$

para todo $t > 0$.

Vamos agora majorar $A\left(\dfrac{\theta}{\int_0^t \phi_{E'}(s)\,\frac{ds}{s}}\int_0^t f^*(s)\,ds\right)$.

Seja $t > 0$. Como $f^{**}(t) < \infty$ então

$$\int_0^t f^*(s)\,\phi_E(s)\phi_{E'}(s)\,\frac{ds}{s} = \int_0^t f^*(s)\,ds < \infty \quad .$$

Além disso, de acordo com (i) temos que $\int_0^t \phi_{E'}(s)\,\frac{ds}{s} < \infty$.

Como A é convexa decorre da desigualdade de Jensen (ver [3]) que

$$A\left(\frac{\int_0^t \theta\, f^*(s)\,ds}{\int_0^t \phi_{E'}(s)\,\frac{ds}{s}}\right) \leq \frac{\int_0^t A(\theta f^*(s)\,\phi_E(s))\phi_{E'}(s)\,\frac{ds}{s}}{\int_0^t \phi_{E'}(s)\,\frac{ds}{s}} \quad . \tag{3}$$

Decorre de (2) e de (3) que

$$A\,(f^{**}(t)\phi_E(t)) \leq \frac{1}{\theta\ \phi_{E'}(t)}\int_0^t A(\theta f^*(s)\,\phi_E(s))\,\phi_{E'}(s)\,\frac{ds}{s} \,.$$

Com isto temos

$$\int_0^\infty A(f^{**}(t)\phi_E(t)\,)\,\frac{dt}{t} < \int_0^\infty \frac{1}{\theta\ \phi_{E'}(t)}\left|\int_0^t A(\theta f^*(s)\phi_E(s))\phi_{E'}(s)\,\frac{ds}{s}\right|\frac{dt}{t}$$

Como $\dfrac{A(t)}{t^p}$ é não-crescente e $\theta \geq 1$ é fácil ver que $A(\theta t) \leq \theta^p A(t)$ para todo $t > 0$. Logo

$$\int_0^\infty A(f^{**}(t)\phi_E(t))\,\frac{dt}{t} \le \theta^{p-1}\int_0^\infty \frac{1}{\phi_{E'}(t)}\left[\int_0^t A(f^*(s)\phi_E(s))\ \phi_{E'}(s)\ \frac{ds}{s}\right]\frac{dt}{t}$$

Do Teorema de Tonelli concluímos que

$$\int_0^\infty A(f^{**}(t)\phi_E(t))\,\frac{dt}{t} \le \theta^{p-1}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{1}{t\phi_{E'}(t)}\ \frac{A(f^*(s)\phi_E(s))}{s}\ \phi_{E'}(s)\chi_{]0,t]}(s)\,ds\,dt$$

$$= \theta^{p-1}\int_0^\infty \frac{A(f^*(s)\phi_E(s))}{s}\ \phi_{E'}(s)\int_s^\infty \frac{1}{t\ \phi_{E'}(t)}\ dt\,ds$$

e de (ii) decorre então que

$$\int_0^\infty A(f^{**}(t)\ \phi_E(t))\ \frac{dt}{t} \le \theta^p\int_0^\infty A(f^*(s)\ \phi_E(s))\ \frac{ds}{s}$$

$\square$

(10.5) <u>Observações</u>

(a) Se $A : [0,\infty[\ \to [0,\infty]$ é uma função não-decrescente e $f \in F^k(X, M, \mu)$ é tal que $f^{**}(t) < \infty$ para todo $t > 0$ então de acordo com (4.5.ii) temos que

$$\int_0^\infty A(f^*(t)\ \phi_E(t))\frac{dt}{t} \le \int_0^\infty A(f^{**}(t)\ \phi_E(t))\ \frac{dt}{t}$$

É fácil ver agora que nas condições de (10.4) temos que se $f \in F^k(X, M, \mu)$ e $f^{**}(t) < \infty$ para todo $t<0$ então $f \in \Lambda(\phi_E, A)$ se e só se $\int_0^\infty A\left(\frac{f^*(t)\,\phi_E(t)}{K}\right)\frac{dt}{t} < \infty$ para algum $K > 0$.

Em particular, tomando $A = M_1$ temos que $\Lambda(\phi_E, A) = \Lambda(E)$ e $\|\ \|_{\Lambda(\phi_E,A)}$ é equivalente a $\|\ \|_{\Lambda(E)}$.

(b) De acordo com (9.5) e (9.6) sabemos que se $E \in \mathcal{U}$ então (10.5.i) e (10.5.ii) estão verificadas. Assim (10.5) continua verdadeira se as hipóteses (i) e (ii) forem substituídas pela hipótese de que $E \in \mathcal{U}$.

(c) Tomemos $1 < p,\ q < \infty$, $E = L_p$, $A = M_q$. Então se $f \in F^k(X, M, \mu)$ temos que $f \in \Lambda(\phi_E, A)$ se e só se $f^{**}(t) < \infty$ para todo $t > 0$ e $\int_0^\infty \left[f^{**}(t)\,t^{\frac{1}{p}}\right]^q \frac{dt}{t} < \infty$. Como $L_p \in \mathcal{U}$, nossas observações anteriores asseguram que se $f \in F^k(X, M, \mu)$ então $f \in \Lambda(\phi_E, A)$ se e só se $f^{**}(t) < \infty$ para todo $t > 0$ e $\int_0^\infty \left[f^*(t)\,t^{\frac{1}{p}}\right]^q \frac{dt}{t} < \infty$, isto é $f \in L_{p,q}$.

(10.6) <u>Definição</u>. Dizemos que um operador T definido em $\Lambda(E)$ com valores em $F^k(X, M, \mu)$ é de <u>tipo fraco (E,F)</u> se existe $K > 0$ tal que para toda $f \in \Lambda(E)$ temos

$$\sup_{t>0}\ (Tf)^*(t)\ \phi_F(t) \leq K\ \|f\|_{\Lambda(E)}$$

Se T é de tipo fraco (E,F), o número

$$||T||_{w(E,F)} = \inf\{K>0 : \sup_{t>0}(Tf)^*(t)\phi_F(t) \leq K\,||f||_{\Lambda(E)}\ ,\ \forall\, f \in \Lambda(E)\}$$

é chamado <u>norma fraca de T</u>.

(10.7) <u>Observações</u>.

(i) É fácil ver que se T é de tipo fraco (E,F) então $\sup_{t>0} (Tf)^*(t)\,\phi_F(t) \leq ||T||_{w(E,F)}\ ||f||_{\Lambda(E)}$, para toda $f \in \Lambda(E)$.

(ii) Se T é um operador contínuo definido em E com valores em F então de acordo com (10.2), $T(f) \in M(F)$ para toda $f \in \Lambda(E)$. Além disso temos, tendo em vista (4.5.ii) que

$$\sup_{t>0}(Tf)^*(t)\phi_F(t) \leq \sup_{t>0}(Tf)^{**}(t)\phi_F(t)$$

$$= ||Tf||_{M(F)}$$

para toda $f \in \Lambda(E)$. É imediato então que T é de tipo fraco (E,F) e que a norma fraca de T é menor ou igual que a norma do operador contínuo $T|_{\Lambda(E)} : \Lambda(E) \to M(F)$.

(iii) Neste ítem vamos relacionar as noções de operador de tipo fraco dadas em (6.2) e (10.6).

Sejam A uma função de Young generalizada não trivial e B uma função de Young inversível. Seja T um operador de tipo fraco (A,B). De acordo com (10.2) sabemos que T está definido em $\Lambda(L_A)$. Temos também que existe $K > 0$ tal que

$$B(\frac{\lambda}{K})\ m_{Tf}(\lambda) \leq 1$$

para toda $f \in L_A$ com $p_A(f) \leq 1$ e para todo $\lambda > 0$.

Seja $f \in L_A$ tal que $0 < p_A(f) \leq 1$. Decorre de (3.5.ii) que para todo $\lambda > 0$ temos

$$(Tf)^*\ (\frac{1}{B(\frac{\lambda}{K})}) \leq \lambda$$

Tomemos $t > 0$ e $\lambda = K\ B^{-1}(\frac{1}{t})$. Então $B(\frac{\lambda}{K}) = \frac{1}{t}$ e portanto

$$(Tf)^*(t) \leq K\ B^{-1}(\frac{1}{t}) = \frac{K}{\phi_{L_B}(t)}$$

Como $p_A \leq 2||\ ||_A \leq 2||\ ||_{\Lambda(L_A)}$ temos que se $f \in \Lambda(L_A)$ e $||f||_{\Lambda(L_A)} \leq \frac{1}{2}$ então

$$\sup_{t>0}\ (Tf)^*\ \phi_{L_B}(t) \leq K$$

É imediato então que se A e B são funções de Young generalizadas não triviais e se B é inversível então todo operador sublinear de tipo fraco (A,B) é também de tipo fraco (L_A, L_B).

(10.8) <u>Proposição</u>. Se $E \in \mathcal{U}$, existe $K > 0$ tal que

$$\sup_{t>0} f^{**}(t)\ \phi_E(t) \leq K \sup_{t>0} f^{*}(t)\ \phi_E(t)$$

para toda $f \in F^k(X, M, \mu)$.

Demonstração. Para cada $f \in F^k(X, M, \mu)$ e para cada $s > 0$ temos

$$f^*(s) \leq \left(\sup_{x>0} f^*(x)\ \phi_E(x)\right) \frac{1}{\phi_E(s)} \ .$$

Logo, para todo $t > 0$ temos

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)ds \leq \frac{\sup_{x>0} f^*(x)\phi_E(x)}{t} \int_0^t \frac{1}{\phi_E(s)}\ ds$$

Recorrendo a (9.5) e tendo em vista a última desigualdade concluímos que existe $K > 0$ tal que para toda $f \in F^k(X, M, \mu)$ temos

$$f^{**}(t) \leq K\ \frac{\phi_{E'}(t)}{t} \sup_{x>0} f^*(x)\ \phi_E(x)$$

$$= \frac{K}{\phi_E(t)} \sup_{x>0} f^*(x)\ \phi_E(x)$$

para todo $t > 0$.

Logo

$$\sup_{t>0} f^{**}(t)\ \phi_E(t) \leq K \sup_{x>0} f^{*}(x)\ \phi_E(x)$$

para toda $f \in F^k(X,M,\mu)$, o que completa a prova . $\square$

(10.9) Corolário. Se $F \in \mathcal{U}$ e T é um operador de tipo fraco (E,F) então T é um operador contínuo de $\Lambda(E)$ em $M(F)$.

§ 11. Um teorema de interpolação para espaços invariantes por rearranjo.

(11.1) Sejam E_0, E_1, F_0, F_1 espaços r.i. Suponhamos que

(i) $$\eta(t) = \frac{\phi_{E_0}(t)}{\phi_{E_1}(t)} \quad \text{e} \quad \xi(t) \frac{\phi_{F_0}(t)}{\phi_{F_1}(t)}$$

são estritamente crescentes e assumem todos os valores de $]0,\infty[$.

Sejam E e F espaços r.i. e suponhamos que

(ii) $\dfrac{\phi_{E_0}(t)}{\phi_E(t)}$ é não-crescente;

(iii) $\dfrac{\phi_E(t)}{\phi_{E_1}(t)}$ é não-decrescente;

(iv) $$\phi_F(t) = \phi_E[\eta^{-1}(\xi(t))]\, \phi_{F_0}(t) \frac{1}{\phi_{E_0}[\eta^{-1}(\xi(t))]}$$

para todo $t > 0$;

v) existe $K_0 > 0$ tal que

$$\int_0^t \frac{\phi_{E_0}(s)}{\phi_E(s)} \frac{ds}{s} \le K_0 \frac{\phi_{E_0}(t)}{\phi_E(t)} \quad \text{para todo } t > 0 \text{ ;}$$

(vi) existe $K_1 > 0$ tal que

$$\int_0^t \frac{\phi_F(s)}{\phi_{F_0}(s)} \frac{ds}{s} \leq K_1 \frac{\phi_F(t)}{\phi_{F_0}(t)} \quad \text{para todo } t > o \ ;$$

(vii) existem $K_2 > 0$ tal que

$$\int_0^t \frac{\phi_{E_1}(s)}{\phi_E(s)} \frac{ds}{s} \leq K_2 \frac{\phi_{E_1}(t)}{\phi_E(t)} \quad \text{para todo } t > 0 \ ;$$

(viii) existe $K_3 > 0$ tal que

$$\int_0^t \frac{\phi_F(s)}{\phi_{F_1}(s)} \frac{ds}{s} \leq K_3 \frac{\phi_F(t)}{\phi_{F_1}(t)} \quad \text{para todo } t > 0 \ ;$$

(ix) existe $K_4 > 0$ tal que

$$\int_0^t \frac{\phi_{E_1}(s)}{s} \, ds \leq K_4 \ \phi_{E_1}(t) \quad \text{para todo } t > 0 \ ;$$ (o que, em particular se verifica se $E_1 \in L$, de acordo com (9.6)).

Seja A uma função de Young não trivial tal que $\frac{A(t)}{t^p}$ é não-crescente para algum $p > 0$.

Se T é um operador sublinear de tipos fracos (E_0,F_0) e (E_1,F_1) então existe $M > 0$ tal que

(x) $$\int_0^\infty A((Tf)^*(t)\phi_F(t)) \frac{dt}{t} \leq M \int_0^\infty A(f^*(t) \ \phi_E(t)) \frac{dt}{t}$$

para toda $f \in \Lambda(\phi_E, A)$.

Demonstração. Como A é uma função de Young não-trivial e $\frac{A(t)}{t^p}$ é não-crescente, sabemos de (5.8) que $A(t) > 0$ para todo $t > 0$. Assim, tendo em vista (10.4.i) podemos afirmar que se $f \in \Lambda(\phi_E, A)$ então $m_f(\lambda) < \infty$ para todo $\lambda > 0$.

Tomemos $f \in \Lambda(\phi_E, A)$ e $u > 0$. Vamos mostrar que $f_u \in \Lambda(E_1)$ e que $f^u \in \Lambda(E_0)$. De acordo com (3.25) temos

$$(f^u)^*(t) < \begin{cases} f^*(t) & , \text{ se } t < m_f(u) \\ 0 & , \text{ se } t \geq m_f(u) \end{cases}$$

e

$$(f_u)^*(t) < \begin{cases} u & , \text{ se } t < m_f(u) \\ f^*(t) & , \text{ se } t \geq m_f(u) \end{cases} .$$

Como $f \in \Lambda(\phi_E, A)$, A é não-decrescente, $\frac{A(t)}{t^p}$ é não--decrescente, e $f^* \leq f^{**}$, é fácil ver que $\int_0^\infty A(f^*(t)\phi_E(t)) \frac{dt}{t} < \infty$.

Se $m_f(u) = 0$ então $(f^u)^* = 0$ e portanto $f^u \in \Lambda(E_0)$. Caso contrário, nossa hipótese (ii) garante que

$$\int_0^{m_f(u)} A(f^*(t)\phi_E(t)) \frac{\phi_{E_0}(t)}{\phi_E(t)} \frac{dt}{t} \leq \frac{\phi_{E_0}(m_f(u))}{\phi_E(m_f(u))} \int_0^{m_f(u)} A(f^*(t)\phi_E(t)) \frac{dt}{t} < \infty .$$

Assim considerando a medida μ_1 definida em $A_{[0, m_f(u)]}$ por $\mu_1(S) = \int_S \frac{\phi_{E_0}(t)}{\phi_E(t)} \frac{dt}{t}$ temos que

$f^* \phi_E \in L_A([0,m_f(u)], A_{[0,m_f(u)]}, \mu_1)$. De acordo com (v) sabemos que $\mu_1([0,m_f(u)]) < \infty$ e portanto $f^* \phi_E \in L_1([0,m_f(u)], A_{[0,m_f(u)]}, \mu_1)$.

Logo

$$\int_0^{m_f(u)} (f^u)^*(t)\phi_{E_0}(t)\,\frac{dt}{t} \le \int_0^{m_f(u)} f^*(t)\phi_E(t)\,\frac{\phi_{E_0}(t)}{\phi_E(t)}\,\frac{dt}{t} < \infty\,,$$ o que mostra

que $f^u \in \Lambda(E_0)$.

De maneira análoga, nossas hipóteses (iii) e (iv) garantem que

$$\int_{m_f(u)}^{\infty} f^*(t)\,\frac{\phi_{E_1}(t)}{t}\,dt < \infty\,.$$

De (ix), sabemos que $\int_0^{m_f(u)} u\,\frac{\phi_{E_1}(t)}{t}\,dt < \infty$ e portanto

$\int_0^{\infty} (f_u)^*(t)\,\phi_{E_1}(t)\,\frac{dt}{t} < \infty$. Logo $f_u \in \Lambda(E_1)$.

Uma vez que T é sublinear e está definido em $\Lambda(E_0)$ e $\Lambda(E_1)$ e que $f = f_u + f^u$, concluímos eue $T(f)$ está definido.

Vamos agora demonstrar (x).

Seja $\Psi(t) = \eta^{-1}(\xi(t))$ e consideremos $u(t)=f^*(\Psi(t))$.

Sejam $M_0 = ||T||_{w(E_0,F_0)}$ e $M_1 = ||T||_{w(E_1,F_1)}$.

Fixemos $t > 0$. Então como T é de tipo fraco (E_0,F_0) temos

$$[T(f^{u(t)})]^*(t)\phi_F(t) = [T(f^{u(t)})]^*(t) \frac{\phi_F(t)}{\phi_{F_0}(t)} \phi_{F_0}(t)$$

$$\leq M_0 \frac{\phi_F(t)}{\phi_{F_0}(t)} \int_0^\infty (f^{u(t)})^*(s) \frac{\phi_{E_0}(s)}{s} ds$$

$$\leq M_0 \frac{\phi_F(t)}{\phi_{F_0}(t)} \int_0^{m_f(u(t))} f^*(s) \frac{\phi_{E_0}(s)}{s} ds .$$

De acordo com (3.5.ii) temos $m_f(f^*(\Psi(t))) \leq \Psi(t)$ e lembrando que $u = f^* \circ \Psi$ concluímos que

$$[T(f^{u(t)})]^*(t)\phi_F(t) \leq M_0 \frac{\phi_F(t)}{\phi_{F_0}(t)} \int_0^{\Psi(t)} f^*(s) \frac{\phi_{E_0}(t)}{s} ds \qquad (1)$$

De modo análogo como T é de tipo fraco (E_1,F_1) temos

$$[T(f_{u(t)})]^*(t)\phi_F(t) = [T(f_{u(t)})]^*(t) \frac{\phi_F(t)}{\phi_{F_1}(t)} \phi_{F_1}(t)$$

$$\leq M_1 \frac{\phi_F(t)}{\phi_{F_1}(t)} \int_0^\infty (f_{u(t)})^*(s) \frac{\phi_{E_1}(s)}{s} ds$$

$$= M_1 \frac{\phi_F(t)}{\phi_{F_1}(t)} \int^{\Psi(t)} (f_{u(t)})^*(s) \frac{\phi_{E_1}(s)}{s} ds$$

$$+ M_1 \frac{\phi_F(t)}{\phi_{F_1}(t)} \int_{\Psi(t)}^{\infty} (f_{u(t)})^*(s) \frac{\phi_{E_1}(s)}{s} ds .$$

Como $(f_{u(t)})^*(s) \leq u(t)$ para todo $s > 0$ e como $s > \Psi(t)$ implica que $s > m_f(u(t))$ e portanto $(f_{u(t)})^*(s) = f^*(s)$ temos

$$[T(f_{u(t)})]^*(t)\phi_F(t) \leq M_1 \frac{\phi_F(t)}{\phi_{F_1}(t)} \int_0^{\Psi(t)} u(t) \frac{\phi_{E_1}(s)}{s} ds$$

$$+ M_1 \frac{\phi_F(t)}{\phi_{F_1}(t)} \int_{\Psi(t)}^{\infty} f^*(s) \frac{\phi_{E_1}(s)}{s} ds . \qquad (2)$$

Sejam

$$I(t) = \frac{\phi_F(t)}{\phi_{F_0}(t)} \int_0^{\Psi(t)} f^*(s) \frac{\phi_{E_0}(s)}{s} ds$$

$$I_1(t) = \frac{\phi_F(t)}{\phi_{F_1}(t)} \int_0^{\Psi(t)} u(t) \frac{\phi_{E_1}(s)}{s} ds$$

$$J(t) = \frac{\phi_F(t)}{\phi_{F_1}(t)} \int_{\Psi(t)}^{\infty} f^*(s) \frac{\phi_{E_1}(s)}{s} ds .$$

Como $f_{\Psi(t)} \in \Lambda(E_1)$ e $f^{\Psi(t)} \in \Lambda(E_0)$ temos que e

$I(t) < \infty$, $J(t) < \infty$ e $I_1(t) < \infty$.

Vamos mostrar que $I_1(t) \leq \frac{2K_4}{\ell n2} I(t)$.

De acordo com (ix) temos

$$I_1(t) \leq K_4 \frac{\phi_F(t)}{\phi_{F_1}(t)} u(t) \phi_{E_1}(\Psi(t)).$$

Por outro lado (iv) e (i) nos garantem que

$$\frac{\phi_F(t)}{\phi_{F_1}(t)} = \frac{\phi_{F_0}(t)}{\phi_{F_1}(t)} \frac{\phi_F(t)}{\phi_{F_0}(t)} = \xi(t) \frac{\phi_E(\Psi(t))}{\phi_{E_0}(\Psi(t))}$$

$$= \xi(t) \frac{\phi_{E_1}(\Psi(t))}{\phi_{E_0}(\Psi(t))} \frac{\phi_E(\Psi(t))}{\phi_{E_1}(\Psi(t)}$$

$$= \frac{\xi(t)}{\eta(\Psi(t))} \frac{\phi_E(\Psi(t))}{\phi_{E_1}(\Psi(t))} = \frac{\phi_E(\Psi(t))}{\phi_{E_1}(\Psi(t))} .$$

Logo

$$I_1(t) \leq K_4 u(t)\phi_E(\Psi(t)) = K_4 f^*(\Psi(t))\phi_E(\Psi(t))$$

e tendo em vista (iv) temos

$$I_1(t) \leq K_4 f^*(\Psi(t))\phi_E(\Psi(t)) = K_4 f^*(\Psi(t))\phi_{E_0}(\Psi(t) \frac{\phi_F(t)}{\phi_{F_0}(t)}$$

$$\leq \frac{\phi_F(t)}{\phi_{F_0}(t)} \frac{K_4}{\ell n2} \int_{\frac{\Psi(t)}{2}}^{\Psi(t)} f^*(\Psi(t))\phi_{E_0}(\Psi(t)) \frac{ds}{s} .$$

Como $f^* \circ \Psi$ é não-crescente e ϕ_{E_0} é não-decrescente concluímos que

$$I_1(t) \leq \frac{\phi_F(t)}{\phi_{F_0}(t)} \frac{K_4}{\ln 2} \int_{\frac{\Psi(t)}{2}}^{\Psi(t)} f^*(s) \frac{\phi_{E_0}(2s)}{s} ds .$$

Lembrando agora que $\frac{\phi_{E_0}(s)}{s}$ é não-cresccente t e m o s qu e

$\phi_{E_0}(2s) \leq 2\, \phi_{E_0}(s)$ para todo $s > 0$ e portanto

$$I_1(t) \leq \frac{\phi_E(t)}{\phi_{F_0}(t)} \frac{2K_4}{\ln 2} \int_0^{\Psi(t)} f^*(s) \frac{\phi_{E_0}(s)}{s} ds$$

$$= \frac{2}{\ln 2} K_4\, I(t). \tag{3}$$

Observemos agora que como T é de tipos f r a c o s (E_0,F_0) e (E_1,F_1) temos $(Tf^u)^*(t) < \infty$ e $(Tf_u)^*(t) < \infty$ para todo $u > 0$. Da sublinearidade de T, de (3.3.iv) e de (3.4) decorre que

$$|Tf|^*(2t) = |T(f_u+f^u)|^*(2t) \leq |Tf_u|^*(t) + |Tf^u|^*(t) < \infty$$

para todo $u > 0$.

Lembrando que A é não-decrescente e que $\frac{\phi_F(s)}{s}$ é não-crescente temos

$$A[(Tf)^*(2t)\phi_F(2t)] \leq A\left[((Tf_{u(t)})^*(t)+(Tf^{u(t)})^*(t))\phi_F(2t)\right]$$

$$\leq A\left[2((Tf_{u(t)})^*(t)+(Tf^{u(t)})^*(t))\phi_F(t)\right]$$

e uma vez que $\frac{A(t)}{t^p}$ é não-crescente concluímos que

$$A\left[(Tf)^*(2t)\phi_F(2t)\right] \leq 4^p\, A\left[\frac{((Tf_{u(t)})^*(t)+(Tf^{u(t)})^*(t)}{2}\quad \phi_F(t)\right].$$

De (1) , (2) e (3) concluímos agora que

$$\int_0^\infty A\left[(Tf)^*(t)\phi_F(t)\right]\frac{dt}{t} = \int_0^\infty A\left[(Tf)^*(2t)\phi_F(2t)\right]\frac{dt}{t}$$

$$\leq 4^p\int_0^\infty A\left[\frac{M_1}{2}I(t) + \frac{M_1}{2}J(t) + \frac{M_0}{2}I(t)\right]\frac{dt}{t}$$

$$\leq 4^p\int_0^\infty \left[(M_1\frac{2K_4}{\ell n2} + M_0)\frac{I(t)}{2} + \frac{M_1}{2}J(t)\right]\frac{dt}{t}$$

e como A é convexa temos

$$\int_0^\infty A\left[(Tf)^*(t)\phi_F(t)\right]\frac{dt}{t} \leq \frac{4^p}{2}\int_0^\infty A\left[(M_1\frac{2K_4}{\ell n2} + M_0)\, I(t)\right]\frac{dt}{t}$$

$$+ \frac{4^p}{2}\int_0^\infty A\left[M_1\, J(t)\right]\frac{dt}{t}. \qquad (4)$$

Trataremos agora de majorar cada uma das integrais do segundo membro de (4).

Seja $\alpha = M_1 \frac{2}{\ell n 2} K_4 + M_0$. Temos que

$$A[\alpha\ I(t)] = A\left[\alpha \frac{\phi_F(t)}{\phi_{F_0}(t)} \int_0^{\Psi(t)} f^*(s) \frac{\phi_{E_0}(s)}{s} ds\right]$$

para todo $t > 0$.

De acordo com (v) e (iv), para cada $t > 0$ temos

$$\int_0^{\Psi(t)} \frac{\phi_{E_0}(s)}{\phi_E(s)} \frac{ds}{s} \leq K_0 \frac{\phi_{E_0}(\Psi(t))}{\phi_E(\Psi(t))} = K_0 \frac{\phi_{F_0}(t)}{\phi_F(t)}$$

e portanto

$$A[\alpha I(t)] \leq A\left[\frac{K_0}{\int_0^{\Psi(t)} \frac{\phi_{E_0}(s)}{\phi_E(s)} \frac{ds}{s}} \int_0^{\Psi(t)} \alpha\ f^*(s)\phi_E(s) \frac{\phi_{E_0}(s)}{\phi_E(s)} \frac{ds}{s}\right]$$

Como $I(t) < \infty$,aplicando a desigualdade de Jensen (ver [3]) temos

$$A[\alpha I(t)] \leq \frac{\int_0^{\Psi} A[\alpha K_0 f^*(s)\phi_E(s)] \frac{\phi_{E_0}(s)}{\phi_E(s)} \frac{ds}{s}}{\int_0^{\Psi(t)} \frac{\phi_{E_0}(t)}{\phi_E(s)} \frac{ds}{s}}$$

para todo $t > 0$.

De (iv) sabemos que

$$\frac{\phi_{F_0}(t)}{\phi_F(t)} = \frac{\phi_{E_0}(\Psi(t))}{\phi_E(\Psi(t))} \leq \int_0^{\Psi(t)} \frac{\phi_{E_0}(s)}{\phi_E(s)} \frac{ds}{s}$$

e portanto

$$A[\alpha I(t)] \leq \frac{\phi_F(t)}{\phi_{F_0}(t)} \int_0^{\Psi(t)} [\alpha K_0 f^*(s)\phi_E(s)] \frac{\phi_{E_0}(s)}{\phi_E(s)} \frac{ds}{s}$$

para todo $t > 0$.

Assim

$$\int_0^\infty A[\alpha I(t)] \frac{dt}{t} \leq \int_0^\infty \frac{\phi_F(t)}{\phi_{F_0}(t)} \int_0^{\Psi(t)} [\alpha K_0 f^*(s)\phi_E(s)] \frac{\phi_{E_0}(s)}{\phi_E(s)} \frac{ds}{s} \frac{dt}{t} .$$

Invertendo a ordem de integração, lembrando que Ψ é estritamente crescente e recorrendo a (vi) obtemos

$$\int_0^\infty A[\alpha I(t)] \frac{dt}{t} \leq \int_0^\infty A(\alpha K_0 f^*(s)\phi_E(s) \left[\int_{\Psi^{-1}(s)}^\infty \frac{\phi_F(t)}{\phi_{F_0}(t)} \frac{dt}{t} \right] \frac{\phi_{E_0}(s)}{\phi_E(s)} \frac{ds}{s}$$

$$\leq \int_0^\infty A(\alpha K_0 f^*(s)\phi_E(s))\, K_1 \frac{\phi_F(\Psi^{-1}(s))}{\phi_{F_0}(\Psi^{-1}(s))} \frac{\phi_{E_0}(s)}{\phi_E(s)} \frac{ds}{s} .$$

De (iv) decorre que

$$\int_0^\infty A[\alpha I(t)]\ \frac{dt}{t} \leq K_1 \int_0^\infty A[\alpha\ K_0 f^*(s)\phi_E(s)]\ \frac{ds}{s}\ ,$$

Uma vez que A é não-decrescente e que $\dfrac{A(t)}{t^p}$ é não-crescente temos

$$\int_0^\infty A[\alpha I(t)]\ \frac{dt}{t} \leq K_1 \max\{1,\ \alpha^p\ K_0^p\} \int_0^\infty A(f^*(s)\phi_E(s))\ \frac{ds}{s}\ .$$

De modo análogo nossas hipóteses (vii), (iii), (iv), (viii) garantem que

$$\int_0^\infty A[M_1\ J(t)]\ \frac{dt}{t} \leq K_3 \max\{1,\ M_1^p\ K_2^p\} \int_0^\infty A(f^*(s)\phi_E(s))\ \frac{ds}{s}$$

De (4) e (5) decorre que tomando

$M = \frac{4^{p'}}{2} K_1 K_3 \max\{1, \alpha^p K_0^p, M_1^p\ K_2^p\}$ temos

$$\int_0^\infty A[(Tf)^*(t)\phi_F(t)]\ \frac{dt}{t} \leq M \int_0^\infty A[f^*(s)\phi_E(s)]\ \frac{ds}{s}$$

o que completa a prova.

$\square$

(11.2) Corolário. Sejam E_0, E_1, F_0, F_1, e F espaços r.i. cujas funções fundamentais verificam as hipóteses (i) a (ix) de (11.1). Seja A uma função de Young não-trivial tal que $\frac{A(t)}{t^p}$ é não-crescente para algum $p > 0$. Se $F \in \mathcal{U}$ e T é um operador sublinear de tipos fracos (E_0, F_0) e (E_1, F_1) então existe $M > 0$ tal que $||T||_{\Lambda(\phi_F, A)} \leq M \, || \; ||_{\Lambda(\phi_E, A)}$ para toda $f \in \Lambda(\phi_E, A)$.

Demonstração. De (11.1) sabemos que existe $M > 0$ tal que

$$\int_0^\infty A\left[(Tg)^*(t)\phi_F(t)\right] \frac{dt}{t} \leq M \int_0^\infty A\left[g^*(t)\phi_E(t)\right] \frac{dt}{t}$$

para toda $g \in \Lambda(\phi_E, A)$. (1)

Por outro lado como $F \in \mathcal{U}$, de acordo com (10.5.ii) temos que existe $C > 0$ tal que

$$\int_0^\infty A\left[h^{**}(t)\phi_F(t)\right] \frac{dt}{t} \leq C \int_0^\infty A\left[h^*(t)\phi_F(t)\right] \frac{dt}{t}$$

para toda $h \in \Lambda(\phi_F, A)$. (2)

Podemos obviamente supor $C\,M > 1$.

Tomemos $f \in \Lambda(\phi_E, A)$. Então $\frac{f}{K} \in \Lambda(\phi_E, A)$ e portanto $T(\frac{f}{K}) \in \Lambda(\phi_F, A)$ para todo $K > 0$.

Assim, de (1) e de (2) concluímos que

$$||Tf||_q \leq M\, ||f||_{p,q}$$

para toda $f \in L_{p,q}$.

Mas como $p < q$, de acordo com o teorema 6 do §4 de [8] sabemos que $||\ \ ||_{p,q} \leq C||\ \ ||_p$ para algum $C > 0$.

Com isto, o teorema de Marcinkiewicz (7.1) é um caso particular de (11.1) se $1 \leq p_0 \leq q_0 < \infty$ e $1 \leq p_1 \leq q_1 < \infty$.

(b) O teorema (11.1) continua verdadeiro se a função ξ for estritamente decrescente e se substituirmos as hipóteses (v) e (vii) por

- Existe $K_0 > 0$ tal que

$$\int_0^t \frac{\phi_E(s)}{\phi_{E_0}(s)} \frac{ds}{s} \leq K_0 \frac{\phi_E(t)}{\phi_{E_0}(t)} \quad \text{para todo} \quad t > 0.$$

- Existe $K_2 > 0$ tal que

$$\int_0^t \frac{\phi_E(s)}{\phi_{E_1}(s)} \frac{ds}{s} \leq K_2 \frac{\phi_E(t)}{\phi_{E_1}(t)} \quad \text{para todo} \quad t > 0$$

A demonstração é análoga e por esta razão não a apresentaremos aqui.

(c) Em [12], podem ser encontrados outros resultados semelhantes para o caso em que A é uma função côncava definida em $[0,\infty[$ com valores em $[0,\infty[$ e tal que $A(0) = 0$.

Decidimos não incluí-los neste trabalho pois as demonstrações são bastante longas, a técnica é basicamente a mesma dos outros teoremas que apresentamos e as hipóteses, a nosso ver são um tanto artificiais.

APÊNDICE

Muitas vezes neste texto, usamos o resultado bastante conhecido que nos garante que se $f \in F^+(X, M, \mu)$ então existe uma seqüência (f_n) de funções de $F^+(X, M, \mu)$ tal que (f_n) é não-decrescente e $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$.

Em (8.9.iii) no entanto foi importante observar que se $f:]0,\infty[\to [0,\infty[$ é não-crescente, as funções f_n podem ser tomadas de uma forma especial. A justificativa, bastante simples, está na proposição que apresentaremos a seguir.

(A.1) Proposição. Seja $f:]0,\infty[\to [0,\infty[$ uma função não-crescente. Então existe uma seqüência (h_n) de funções simples não-negativas, que é não-decrescente, converge para f e tal que cada h_n é da forma $\sum\limits_{i=1}^{K_n} \alpha_i^n X_{]0,a_i^n]}$ exceto num número finito de pontos, onde $K_n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1^n,\ldots,\alpha_{K_n}^n$ e $a_1^n,\ldots,a_{K_n}^n$ são números reais positivos.

Demonstração. Tomemos a seqüência (f_n) definida por

$$f_n = \sum_{r=1}^{n2^n} \frac{r-1}{2^n} X_{S_{n,r}} + n\, X_{S_n}$$

onde

$$S_{n,r} = \{t > 0 : \frac{r-1}{2^n} \leq f(t) < \frac{r}{2^n}\}$$

e

$$S_n = \{t > 0 : f(t) \geq n\}$$

É bem conhecido que a seqüência (f_n) é não-decrescente e converge para f.

Fixemos $n \in \mathbb{N}$. Observemos que para cada $r=2,\ldots,n\,2^n$ temos

$$\{t > 0 : \frac{r-1}{2^n} \leq f(t) < n\} = \bigcup_{j=r}^{n2^n} S_{n,j}$$

Assim

$$\sum_{r=2}^{n2^n} \chi_{\{t>0:\ \frac{r-1}{2^n} \leq f(t) < n\}} = \sum_{r=2}^{n2^2} \sum_{j=r}^{n2^n} \chi_{S_{n,j}}$$

$$= \sum_{r=2}^{n2^n} (r-1)\, \chi_{S_{n,r}}$$

Portanto

$$\sum_{r=2}^{n2^n} \frac{r-1}{2^n} \chi_{S_{n,r}} = \sum_{r=2}^{n2^n} \frac{1}{2^n} \chi_{\{t>0:\ \frac{r-1}{2^n} \leq f(t) < n\}}$$

e temos que

$$f_n = \sum_{r=2}^{n2^n} \frac{1}{2^n} \chi_{\{t>0:\ \frac{r-1}{2^n} \leq f(t) < n\}} + \frac{n2^n}{2^n} \chi_{D_n}$$

$$\sum_{r=2}^{n2^n} \frac{1}{2^n} \chi_{\{t>0:\ \frac{r-1}{2^n} \leq f(t)\}} + \frac{1}{2^n} \chi_{D_n} .$$

Como f é não-crescente, para cada $\lambda > 0$, o $\{t > 0 : f(t) \geq \lambda\}$ é um intervalo do tipo $]0,a[$ ou $]0,a]$. Assim, cada f_n é do tipo $\sum_{n=1}^{K_n} \alpha_i^n \chi_{|0,a_i^n|}$, exceto num número finito de pontos.

BIBLIOGRAFIA

[1] BUND, I.M. *Birnbaum-Orlicz spaces.* São Paulo, IME-USP, 1978. 161p. (Notas do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo. Série Matemática, 4)

[2] EDWARDS, R.E. *Functional analysis: theory and application.* Chicago, Holt, 1965. 781p.

[3] HUNT, R.A. On L(p,q) spaces. *Enseign.Math., Serie II, 12*(4):249-276, 1966.

[4] LORENTZ, G.G. On the theory of spaces Λ. *Pacific J. Math., 1*(3):411-429, 1951.

[5] LUXEMBURG, W.A. Rearrangement invariant Banach function spaces. In: SYMPOSIUM IN ANALYSIS, Kingston, 1967. *Proceedings.* Ontario, Queen's University, 1967. p.83-144. (Queen's Papers in Pure and Applied Mathematics, 10)

[6] MARCINKIEWICZ, M.J. Sur l'interpolation l'opérations. *C.R.Acad.Sci.Paris, 208*(17):1272-1273, 1939.

[7] MONTEIRO, M.S. *Funcionais lineares contínuos em espaços de Birnbaum-Orlicz.* São Paulo, 1980. 80p. Dissertação(Mestrado) - IME-USP.

[8] OKLANDER, E.T. *Interpolacion, espacios de Lorentz y el teorema de Marcinkiewicz.* Buenos Aires, Universidad de Buenos Aires, 1965. 110p. (Cursos y Seminarios de Matematica, 20)

[9] SEMENOV, E.M. Imbedding theorems for Banach spaces of measurable functions. *Soviet Math.Dokl., 5*(3):831-834, 1964.

[10] SEMENOV, E.M. A new interpolation theorem. *Functional Anal.Appl.*, 2(2):158-168, 1968.

[11] SHARPLEY, R. Spaces $\Lambda_\alpha(x)$ and interpolation. *J.Funct. Anal.*, 11(4):479-513, 1972.

[12] TORCHINSKY, A. Interpolation of operations and Orlicz classes. *Studia Math.*, 59(2):177-207, 1976.

[13] ZIPPIN, M. Interpolation of operators of weak type between rearrangement invariant function spaces. *J. Funct.Anal.*, 7(2):267-284, 1971.

[14] ZYGMUND, A. On a theorem of Marcinkiewicz concerning interpolation of operations. *J.Math.Pures Appl.*, *Serie* 9, 35:223-248, 1956.

IV. BIBLIOGRAFIA

[1] M.Cassandro; A.Galves, P.Picco. " *Dynamical Phase Transition in Disordered Systems: the study of a random walk model* " , Annales de L Institut Henri Poincaré. **55-2**,689 (1991).

[2] M.Cassandro,A.Galves,E.Olivieri,M.E.Vares. " *Metastable behavior of stochastic dynamics: a pathwise approach* ", J. Stat. Phys. **35**,603 (1984).

[3] R.Bellman,T.H.E.Harris. Pac. J. Math. **1**.179 (1951).

[4] F.Spitzer *Principles of Random Walk*,(1964, Princeton, Van Nostrand).

[5] W. Feller *An Introdution to Probability Theory and its Applications*, (vol.I,1950, N.Y. John Wiley).