REFLEXIVIDADE, APROXIMAÇÃO ÓTIMA E OTIMIZAÇÃO CONVEXA

RUY EXEL FILHO

DISSERTAÇÃO APRESENTADA

AO

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

DA

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE

EM

MATEMÁTICA

ORIENTADOR:

PROF. DR. JÖRG BLATTER

-SÃO PAULO, NOVEMBRO DE 1978-

Ao meu avô Nicanor,

com saudades.

INTRODUÇÃO

Consideraremos pré-requisito para a leitura deste texto um certo conhecimento dos fatos básicos da topologia geral e da teoria dos espaços localmente convexos.

Invocaremos, vez por outra, as várias formas do teorema de Hahn-Banach, bem como os teoremas de Eberlein, Tychonov, Zorn e alguns outros. Admitiremos também, alguns fatos básicos envolvendo sequências generalizadas ("nets").

Os símbolos $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{N}$ serão usados para o corpo dos números reais, o corpo dos números complexos e o conjunto dos números naturais, respectivamente. $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ terão sempre a topologia usual.

Espaços vetoriais serão denotados por X ou Y e seus elementos por x, y, z, etc. Funcionais lineares serão normalmente indicados por x', y', z', etc. O espaço vetorial de todos os funcionais lineares definidos em X será chamado dual algébrico de X e denotado por X^*. Se em X consideramos alguma topologia e queremos nos referir ao subespaço de X^* formado pelos funcionais contínuos, escrevemos X'. X' será chamado dual topológico de X.

Assim, por exemplo, X'^* significa o espaço dos funcionais lineares sobre o espaço dos funcionais lineares contínuos em X.

Se X é um espaço localmente convexo, então chamaremos de topologia fraca em X à topologia menos fina que permite a continuidade dos funcionais $x' \in X'$. A topologia forte em X' é a topologia da convergência uniforme sobre os limitados de X, ou, quando X é normado, a topologia dada pela norma habitual $\|x'\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |x'(x)|$, $x' \in X'$.

Consideraremos, exceto em (3.4), apenas espaços vetoriais reais, pois julgamos que é neste contexto que se tem as melhores aplicações dos resultados que obteremos. Se queremos saber como se comportam os espaços complexos sob tais pontos de vista, basta em geral, considerar sua estrutura real subjacente.

Se A é um subconjunto do espaço localmente convexo X, indicaremos por coA a envoltória convexa de A, isto é, o menor subconjunto convexo de X que contém A. Por $\overline{co}A$, entenderemos a envoltória convexa fechada de A, ou seja, o menor convexo fechado de X que contém A. Sabe-se que $\overline{co}A$ é o fecho de coA em X.

Agradecemos ao Prof. Dr. Jörg Blatter pela sugestão do tema deste trabalho, bem como pela dedicada orientação.

São Paulo, novembro de 1978.

Ruy Exel Filho

ÍNDICE

1.PROXIMINALIDADE

Consideremos um espaço vetorial normado X. Se A é um subconjunto de X e $x \in X$, definimos a distância entre x e A como sendo o número real

$$\operatorname{dist}(x,A)=\inf_{a \in A} \| x-a \| .$$

Se $\bar{A}$ denota o fecho de A em X, então é claro que $x \in \bar{A}$ implica que $\operatorname{dist}(x,A)=0$ e, reciprocamente, se $\operatorname{dist}(x,A)=0$, então $x \in \bar{A}$.

Se, para $x \in X$, existe $a \in A$ tal que $\|x-a\| = \operatorname{dist}(x,A)$, dizemos que a é uma aproximação ótima de x em A.

Um subconjunto que tem uma aproximação ótima de cada elemento de X chama-se proximinal.

É óbvio que todo subconjunto proximinal é fechado.

Vejamos alguns exemplos.

1.1 Exemplo. Seja H um espaço de Hilbert e C um subconjunto convexo e fechado de H; então C é proximinal. De fato, se $x \in H$, podemos tomar uma sequência $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de pontos de C tal que

$$\lim_{n \to \infty} \| y_n - x \| = \operatorname{dist}(x,C)=d.$$

Pela lei do paralelogramo obtemos

$$\|y_n - y_m\|^2 = \| (y_n - x)-(y_m - x) \|^2 =$$
$$2(\| y_n - x\|^2 + \| y_m - x\|^2) - \| y_n - x + y_m - x \|^2 =$$
$$2(\| y_n - x\|^2 + \| y_m - x\|^2) - 4 \| \tfrac{1}{2}(y_n + y_m) - x \|^2 .$$

Observando que C é convexo temos que $\frac{1}{2}(y_n + y_m) \in C$ e, portanto, $\| \frac{1}{2}(y_n + y_m) - x \| \geq d$; assim,

$\|y_n-y_m\|^2 \leqq 2(\|y_n-x\|^2 + \|y_m-x\|^2)-4d^2$.

Como $\lim\limits_{n\to\infty} \|y_n-x\| = d$, concluímos que $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy. Se y é o limite de $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, então $y\in C$, pois C é fechado e é claro que $\|y-x\| = d$; assim, y é uma aproximação ótima de x em C.

Sabe-se ainda que y é único nestas condições. Para ver isto, notemos que, se y e $\bar{y}$ são aproximações ótimas de x em C, então a sequência $y,\bar{y},y,\bar{y},\ldots$ está nas condições da sequência $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tomada acima e, portanto, é de Cauchy; daí $y=\bar{y}$.

É possível provar que, se Y é um subespaço fechado de H, então a função que a cada $x\in H$ associa a (única) aproximação ótima, y, de x em Y é uma projeção linear contrativa.

Uma maneira bastante simples de se obter y é dada pela expressão:

$$y=\sum_{i\in I} \langle x,e_i\rangle e_i \quad ,$$

onde $\{e_i\}_{i\in I}$ é uma base ortonormal qualqer de Y.

Com isto podemos, por exemplo, determinar a melhor aproximação de $f\in L_2[-\pi,\pi]$ por elementos do subespaço Y gerado pelas funções $\{\cos(nx),\operatorname{sen}(nx): 0\leqq n\leqq N\}$; sabemos que $\{1, \cos x, \cos(2x),\ldots,\cos(Nx), \operatorname{sen} x, \operatorname{sen}(2x),\ldots,\operatorname{sen}(Nx)\}$ é uma base ortogonal de Y; portanto, a aproximação ótima de f é

$$\frac{\langle f,1\rangle}{\|1\|^2}+\sum_{n=1}^{N}\left\{\frac{\langle f,\cos(nt)\rangle}{\|\cos(nt)\|^2}\cos(nx) + \frac{\langle f,\operatorname{sen}(nt)\rangle}{\|\operatorname{sen}(nt)\|^2}\operatorname{sen}(nx)\right\}=$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\pi}\{\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos(nt)dt\}\cos(nx) +$$
$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\pi}\{\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\mathrm{sen}(nt)dt\}\mathrm{sen}(nx),$$

que é exatamente a reduzida de ordem N da série de Fourier de f.

1.2 Exemplo. Suponhamos que, dada uma função real contínua f, definida no intervalo $[-1,1]$, queremos encontrar um polinômio p de grau não maior que um certo N, prefixado, de modo que o erro cometido ao tomar-se p(x) no lugar de f(x) seja o menor possível.

Consideremos o espaço $C([-1,1])$ formado pelas funções reais contínuas em $[-1,1]$ com a norma do supremo. Reformulando o problema acima, queremos, de fato, uma aproximação ótima de f por elementos do subespaço P_N, formado pelos polinômios de grau menor ou igual a N.

Veremos (prop.(1.4) adiante) que subespaços de dimensão finita são sempre proximinais. Com isto podemos garantir que existe ao menos uma aproximação ótima de f em P_N. É possível provar-se também que tal aproximação é única [13, pág.11].

É claro que quanto maior for o número N, melhor será a precisão de nossa estimativa. Desta forma, antes de procurar o polinômio que melhor aproxima f, é conveniente saber qual será o erro que cometeremos para cada N escolhido.

O erro, isto é, o valor $\mathrm{dist}(f,P_N)$ pode ser computado pela fórmula [13, pág.28]:

$$\mathrm{dist}(f,P_N) = \sup_{1 \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_{N+2} \leq 1} |J(f,x_1,\ldots,x_{N+2})|,$$

onde

$$J(f,x_1,\ldots,x_{N+2}) = \frac{\begin{vmatrix} f(x_1) & f(x_2) & \ldots & f(x_{N+2}) \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_{N+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^N & x_2^N & \ldots & x_{N+2}^N \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & \ldots & (-1)^{N+2} \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_{N+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^N & x_2^N & \ldots & x_{N+2}^N \end{vmatrix}}$$

Considere o problema de encontrar a melhor aproximação de x^n por polinômios de P_{n-1} em $[-1,1]$.

Isto é evidentemente equivalente a encontrar, dentre os polinômios de grau n com coeficiente dominante igual a 1, aquêle com menor norma.

Por um teorema de Chebyshev [13, pág.9] tal polinômio é dado por:

$$\frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \text{ arc } \cos x),$$

É possível verificar que

$$\cos(n \text{ arc } \cos x) = \frac{(x+\sqrt{x^2-1})^n + (x-\sqrt{x^2-1})^n}{2}.$$

Nesta expressão, as potências ímpares de $\sqrt{x^2-1}$ cancelam-se, de modo que cos(n arc cosx) é, de fato, um polinômio de grau n em x que tem por coeficiente dominante 2^{n-1}.

Os polinômios $T_n = \cos(n \text{ arc } \cos x)$ são chamados polinômios de Chebyshev do primeiro tipo.

Consideremos agora o problema de encontrar aproximações por polinômios no espaço $L_1[-1,1]$.

Sabe-se (ainda pela prop.(1.4) adiante) que se $f \in L_1[-1,1]$, então para $N \in \mathbb{N}$, dado, existe um polinômio p em P_N tal que

$$\|f-p\| = \int_{-1}^{1} |f-p| = \inf_{q \in P_N} \int_{-1}^{1} |f-q| = \text{dist}(f, P_N).$$

Se f é contínua, podemos garantir a unicidade do polinômio p nas condições acima; em caso contrário, esta afirmação não é, em geral, válida [13, pág.57].

Seja $n \in \mathbb{N}$ dado; qual seria então a melhor aproximação de x^n em P_{n-1} com respeito à norma de $L_1[-1,1]$?

A resposta a esta pergunta é dada pelos polinômios

$$U_n = \frac{1}{n+1} T'_{n+1} ,$$

chamados polinômios de Chebyshev do segundo tipo [1,pág.87].

Sabe-se que os polinômios unitários $\frac{1}{2^n} U_n$ minimizam o valor da integral

$$\int_{-1}^{1} |x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0| dx, \quad a_i \in \mathbb{R}.$$

Segue-se, portanto, que o polinômio $x^n - \frac{1}{2^n} U_n$ é a única aproximação ótima de x^n em P_{n-1} relativamente à norma de $L_1[-1,1]$.

Não se tem, até hoje, uma teoria geral sobre aproximações ótimas, de sorte que em cada caso precisamos usar ferramentas particulares para procurar aproximações ótimas ou para determinar se tais aproximações são únicas.

Falando de unicidade, talvez o resultado mais geral que temos é o seguinte:

<u>1.3 Proposição</u>. Seja X um espaço normado. Uma condição necessária e suficiente para que todo ponto em X tenha no máximo uma aproximação ótima em cada convexo de X é que X seja estritamente convexo.

<u>Demonstração</u>. Suponhamos X estritamente convexo e seja C um convexo em X. Para $x \in X$, admitamos que existam $c_1, c_2 \in C$, aproximações ótimas, distintas, de x em C. Nestas condições, teríamos, obrigatòriamente $dist(x,C)>0$.

Assim, como X é estritamente convexo e, como

$$\|x-c_1\| = \|x-c_2\| = dist(x,C),$$

viria

$$\left\|\frac{1}{2}(x-c_1)+\frac{1}{2}(x-c_2)\right\| < dist(x,C),$$

que é um absurdo pois, sendo C convexo, temos que $\frac{1}{2}(c_1+c_2) \in C$ e, portanto, $\|x-\frac{1}{2}(c_1-c_2)\| \geq dist(x,C)$.

Reciprocamente, se X tem a propriedade de unicidade de aproximações ótimas em convexos, então, dados $x_1, x_2 \in X$ com $x_1 \neq x_2$ e $\| x_1 \| = \| x_2 \| = 1$, mostraremos que $\| \frac{1}{2}(x_1+x_2) \| < 1$. Suponhamos o contrário, isto é, $\| \frac{1}{2}(x_1+x_2) \| \geq 1$.

Para $\alpha \in \mathbb{R}$, temos:

i) $\alpha x_2+(1-\alpha)x_1 = (1-2\alpha)x_1+2\alpha\frac{1}{2}(x_1+x_2)$

ii) $\alpha x_2+(1-\alpha)x_1 = (2\alpha-1)x_2+(2-2\alpha)\frac{1}{2}(x_1+x_2)$

Aplicando a desigualdade triangular em (i), com $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$, vem

$$\| \alpha x_2+(1-\alpha)x_1 \| \geq \|2 \alpha\frac{1}{2}(x_1+x_2) \| - \|(1-2 \alpha)x_1 \| \geq$$
$$\geq |2\alpha|-|1-2\alpha| = 2\alpha-(2\alpha-1) = 1$$

Fazendo o mesmo com (ii), para $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$, temos

$$\| \alpha x_2+(1-\alpha)x_1 \| \geq \| (2-2\alpha)\frac{1}{2}(x_1+x_2) \| - \| (2\alpha-1)x_2 \| \geq$$
$$\geq |2-2\alpha|-|2\alpha-1| = 2-2\alpha-(1-2\alpha) = 1$$

Ainda, para $0 \leq \alpha \leq 1$, vale

$$\| \alpha x_2+(1-\alpha)x_1 \| \leq 1$$

Concluímos, portanto, que $\| \alpha x_2+(1-\alpha)x_1 \| = 1$ para $0 \leq \alpha \leq 1$. Isto diz que, no convexo $\{\alpha x_2+(1-\alpha)x_1 : 0 \leq \alpha \leq 1\}$, todos os pontos são aproximações ótimas da origem, contrariando as hipóteses assumidas sobre X.

Estaremos, daqui em diante, mais interessados na existência que na unicidade de aproximações ótimas. Um primeiro resultado nesta direção, que tem interessantes aplicações, é nosso próximo passo. (veja (1.2))

<u>1.4 Proposição</u>. Se X é um espaço normado e Y ⊂ X é um subespaço de dimensão finita, então Y é proximinal.

Demonstração. Tomemos $x \in X$ e procuremos uma aproximação ótima de x em Y. Para isto, seja $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de pontos de Y tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|x-y_n\| = \text{dist}\,(x,Y)$$

Como $\|y_n\| \leq \|x-y_n\| + \|x\|$, concluímos que a sequência $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada.

Sabemos que, em um espaço de dimensão finita, toda sequência limitada admite uma subsequência convergente. Seja, portanto, $\{y_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ uma subsequência convergente extraída de $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $y \in Y$ seu limite.

Temos

$$\|x-y\| = \lim_{k\to\infty} \|x-y_{n_k}\| = \text{dist}(x,Y)$$

Assim, y é uma aproximação ótima de x em Y.

Não é verdade que subespaços fechados são sempre proximais. Vejamos um exemplo.

1.5 Exemplo. Consideremos o espaço vetorial $C([0,1])$ formado pelas funções reais contínuas definidas em $[0,1]$.

Seja x' o funcional linear em $C([0,1])$ definido por

$$x'(f) = \int_0^{1/2} f(t)dt - \int_{1/2}^1 f(t)dt;\ f \in C([0,1])$$

É claro que, para $f \in C([0,1])$, temos

$$|x'(f)| \leq \left|\int_0^{1/2} f(t)dt\right| + \left|\int_{1/2}^1 f(t)dt\right| \leq$$
$$\leq \int_0^{1/2} |f(t)|dt + \int_{1/2}^1 |f(t)|dt = \int_0^1 |f(t)|dt$$

Para $1 \leq p < \infty$, indiquemos por $\|\ \|_p$ a norma definida em $C([0,1])$ por

$$\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}};\ f \in C([0,1])$$

e ponhamos $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|; f\in C([0,1])$

Assim, $|x'(f)| \leq \|f\|_1$ e, portanto, x' é contínuo com relação à norma $\|\ \|_1$. Como, para $f\in C([0,1])$ e $1\leq p\leq\infty$, vale $\|f\|_1 \leq \|f\|_p$, concluímos que x' é contínuo em relação a $\|\ \|_p$ para todo p e, portanto, Ker x' é fechado em todas estas normas.

Mostraremos que Ker x' é proximinal com relação a norma $\|\ \|_1$, mas não com $\|\ \|_p$, $1<p\leq\infty$.

Seja $f(t)=1-2t$. Provemos que

a. $\|f-g\|_1 \geq \frac{1}{2}$, $\forall$ $g\in$Ker x'

b. $\exists g_0\in$ Ker x' tal que $\|f-g_0\|_1 = \frac{1}{2}$

c. $\|f-g\|_1 < \|f-g\|_p$, $\forall$ $g\in$Ker x' e $1<p\leq\infty$

d. Dado $\varepsilon>0$, existe $g_\varepsilon\in$Ker x' tal que $\|f-g_\varepsilon\|_\infty \leq \frac{1}{2} + \varepsilon$

Para $g\in$Ker x', vale

$$\frac{1}{2}=x'(f)=x'(f-g)=\int_0^{1/2} (f(t)-g(t))dt-\int_{1/2}^1 (f(t)-g(t))dt\leq$$

$$\leq\int_0^{1/2} |f(t)-g(t)|dt+\int_{1/2}^1 |f(t)-g(t)|dt= \|f-g\|_1 ,$$

provando (a).

É fácil ver que a desigualdade em (a) torna-se igualdade se $f(t)-g(t)\geq 0$ para $0\leq t\leq\frac{1}{2}$ e $f(t)-g(t)\leq 0$ para $\frac{1}{2}\leq t\leq 1$. Assim, pondo $g_0=0$ vem $g_0\in$Ker x' e

$$\|f-g_0\|_1=\frac{1}{2} ,$$

provando (b).

Para verificar (c), notemos que para uma função contínua h não constante, temos $\|h\|_1 < \|h\|_p$ para $1<p\leq\infty$. Como

para $g\in Ker\ x'$, $f-g$ não é constante, vem $\|f-g\|_1 < \|f-g\|_p$

Seja

$$g_\varepsilon(t) = \begin{cases} -\dfrac{1-\varepsilon}{\frac{1}{2}-\varepsilon}t+\dfrac{1}{2} & 0\leqq t\leqq\dfrac{1}{2}-\varepsilon \\[2ex] \dfrac{\frac{1}{2}-\varepsilon}{\varepsilon}(t-\dfrac{1}{2}) & \dfrac{1}{2}-\varepsilon\leqq t\leqq\dfrac{1}{2}+\varepsilon \\[2ex] -\dfrac{1-\varepsilon}{\frac{1}{2}-\varepsilon}(t-1)-\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2}+\varepsilon\leqq t\leqq 1 \end{cases}$$

Notemos que

$$\int_0^{\frac{1}{2}-\varepsilon} g_\varepsilon(t)dt=-\int_{\frac{1}{2}-\varepsilon}^{\frac{1}{2}} g_\varepsilon(t)dt=\frac{1}{2}\varepsilon(\frac{1}{2}-\varepsilon)$$

e que

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\varepsilon} g_\varepsilon(t)dt=-\int_{\frac{1}{2}+\varepsilon}^{1} g_\varepsilon(t)dt=\frac{1}{2}\varepsilon(\frac{1}{2}-\varepsilon),$$

donde $g_\varepsilon\in Ker\ x'$; além disto, $\|f-g_\varepsilon\|_\infty=\frac{1}{2}+\varepsilon$, provando (d).

Como para $1\leqq p\leqq\infty$ e $g\in Ker\ x'$

$$\|f-g\|_1\leqq\|f-g\|_p\leqq\|f-g\|_\infty,$$

por (a) e (d) vem $dist(f, Ker\ x')=\frac{1}{2}$ em qualquer das normas.

Por (b), f admite aproximação ótima em Ker x' com a norma $\|\ \ \|_1$ e por (c), f não admite aproximação ótima em Ker x' com as normas $\|\ \ \|_p$, $1<p\leqq\infty$.

Conforme veremos em (2.2), Ker x' é proximinal com relação à norma $\| \quad \|_1$ e Ker x' não admite aproximação ótima para nenhuma função $h \notin$ Ker x'.

Notemos, então, que

i) Para o caso de $\| \quad \|_1$, temos um subespaço fechado com dimensão infinita de um espaço não completo, que é proximinal.

ii) Para $\| \quad \|_p$, $1<p<\infty$, temos um subespaço fechado de um espaço não completo que não admite aproximação ótima de nenhum ponto do seu complementar.

iii) Para $\| \quad \|_\infty$, temos um subespaço fechado de um espaço de Banach não reflexivo que não admite aproximação ótima de nenhum ponto do seu complementar.

iv) A existência de aproximações ótimas depende fortemente da norma considerada.

2. FUNCIONAIS LINEARES E APROXIMAÇÕES ÓTIMAS

Como veremos a seguir, a existência de aproximações ótimas em subconjuntos de um espaço normado está intimamente ligada a propriedades dos funcionais lineares nestes espaços. Esta relação é sugerida pelas observações seguintes.

<u>2.1 Lema</u>. Seja X um espaço normado e x' um funcional linear contínuo em X com $x'\neq 0$. Então, para cada $x \in X$, a distância entre x e o núcleo de x' pode ser computada pela fórmula:

$$\text{dist}(x, \text{Ker } x') = \frac{1}{\|x'\|} |x'(x)|$$

<u>Demonstração</u>. Para $y \in \text{Ker } x'$, temos

$$|x'(x)| = |x'(x-y)| \leq \|x'\| \quad \|x-y\|$$

Assim, vem

$$|x'(x)| \leq \|x'\| \inf_{y \in \text{Ker } x'} \|x-y\| = \|x'\| \text{ dist}(x, \text{Ker } x')$$

Para verificar a desigualdade contrária tomemos uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de pontos de X com $\|x_n\|=1$ e

$$\lim_{n\to\infty} |x'(x_n)| = \|x'\|$$

Pondo-se

$y_n = x - \dfrac{x'(x)}{x'(x_n)} x_n$ (é claro que podemos supor $x'(x_n)\neq 0$), teremos $y_n \in \text{Ker } x'$ e, portanto, $\text{dist}(x, \text{Ker } x') \leq \|x-y_n\| = \left\| \dfrac{x'(x)x_n}{x'(x_n)} \right\| =$

$$= \left| \frac{x'(x)}{x'(x_n)} \right|$$

Passando-se ao limite, vem

$$\text{dist}(x, \text{Ker } x') \leq \frac{1}{\|x'\|} |x'(x)| \square$$

Este resultado trivial nos dá subsídios para verificarmos uma primeira relação entre funcionais lineares e proximinalidade.

2.2 Proposição. Seja $x'\neq 0$ um funcional linear contínuo definido no espaço normado X. São equivalentes.

a. Existe $y\in X-\mathrm{Ker}\ x'$ que admite uma aproximação ótima em $\mathrm{Ker}\ x'$.

b. x' atinge a norma na bola unitária de X, isto é, existe $z\in X$ com $\|z\|\leq 1$, tal que $x'(z)=\|x'\|$.

c. $\mathrm{Ker}\ x'$ é proximinal.

Demonstração. Para provarmos que (a) implica (b) tomemos $y\in X-\mathrm{Ker}\ x'$ que admita uma aproximação ótima, digamos x, em $\mathrm{Ker}\ x'$.

Temos por (2.1)

$$\left|\frac{1}{\|x'\|}x'(y-x)\right|=\frac{1}{\|x'\|}|x'(y)|=\mathrm{dist}(y,\ \mathrm{Ker}\ x')=\|y-x\|,$$

de onde

$\left|\dfrac{x'(y-x)}{\|y-x\|}\right|=\|x'\|$ e, portanto, x' atinge sua norma no ponto $\pm\dfrac{y-x}{\|y-x\|}$, que pertence, é claro, à bola unitária de X.

Provemos que (b) implica (c). Se $z\in X$ é tal que $\|z\|=1$ e $x'(z)=\|x'\|$, então, para cada $x\in X$, temos $x-\dfrac{x'(x)}{\|x'\|}z\in\mathrm{Ker}\ x'$. Afirmamos que $x-\dfrac{x'(x)}{\|x'\|}z$ é uma aproximação ótima de x em $\mathrm{Ker}\ x'$. De fato,

$$\left\|x-\left(x-\frac{x'(x)}{\|x'\|}z\right)\right\|=\left\|\frac{x'(x)}{\|x'\|}z\right\|=\frac{|x'(x)|}{\|x'\|}=\mathrm{dist}(x,\ \mathrm{Ker}\ x')$$

Finalmente, é trivial que (c) implica (a).

Também se pode obter caracterizações de aproximações ótimas por meio de funcionais.

2.3 Proposição. Seja C um subconjunto convexo de um espaço normado X. Para que um elemento $y \in C$, seja uma aproximação ótima de $x \in X-\overline{C}$, é necessário e suficiente que exista um funcional linear contínuo x' com $\|x'\|=1$ tal que

i) $x'(x-y)=\|x-y\|$

ii) $x'(y)=\sup_{c \in C} x'(c)$

Demonstração. Suponhamos que $x \in X-\overline{C}$ e que y é uma aproximação ótima de x em Y. Se denotamos por d a distância entre x e C ($d \neq 0$) e por $B_d(x)$ a bola de centro em x e raio d, temos que a intersecção entre C e o interior de $B_d(x)$ é vazia; existe então, por Hahn-Banach, um funcional linear contínuo x' e um número real a tal que

a. $x'(c) \leq a \qquad \forall c \in C$

b. $x'(z) \geq a \qquad \forall z \in B_d(x)$

Podemos, sem perda de generalidade, supor que $\|x'\|=1$. Como $y \in C$ e $\|x-y\|=d$, temos $y \in C \cap B_d(x)$ e por (a) e (b) vem $x'(y)=a=\sup_{c \in C} x'(c)$, provando (ii)

Temos também $x'(y)=\inf_{z \in B_d(x)} x'(z)$; logo,

$$x'(x-y)=x'(x)-\inf_{z \in B_d(x)} x'(z)=x'(x)+\sup_{z \in B_d(x)}(-x'(z))=$$

$$=\sup_{z \in B_d(x)} x'(x-z)=\sup_{\|w\|\leq d} x'(w)=d\sup_{\|u\|\leq 1} x'(u)=d\|x'\|=d,$$ provando (i).

Reciprocamente, admitindo a existência de x', vem, para $c \in C$

$$\|x-y\|=x'(x-y)=x'(x)-x'(y)\leq x'(x)-x'(c)=x'(x-c)\leq\|x-c\|,$$

donde

$$\|x-y\|=\inf_{c\in C}\|x-c\|=\mathrm{dist}(x,c)$$

Geometricamente, esta proposição diz que y é uma aproximação ótima de x em C se e somente se existe um hiperplano fechado H que suporta C em y e que satisfaz dist(x,H) = =dist(x,C).

Dispensemos um minuto de atenção a um resultado simples sobre unicidade.

2.4 Proposição. Seja X um espaço normado estritamente convexo; então todo funcional linear contínuo não nulo atinge sua norma no máximo em um ponto da bola unitária.

Demonstração. Seja x' um tal funcional e suponhamos que $x_1,x_2 \in X$ são pontos distintos, com $\|x_1\|=\|x_2\|=1$ e

$$x'(x_1)=x'(x_2)=\|x'\|$$

Seguiria então

$$\|x'\|=x'(\tfrac{1}{2}(x_1+x_2))\leq\|x'\|\;\;\|\tfrac{1}{2}(x_1+x_2)\|<\|x'\|,$$

que é contraditório.

3. MINIMIZAÇÃO E MAXIMIZAÇÃO DE FUNÇÕES

Ainda uma outra maneira que dispomos para estudar os problemas acima é através da procura de pontos de mínimo de certas funções. Por exemplo, se num subconjunto A de um espaço normado queremos encontrar uma aproximação ótima para um ponto x dado, então estamos procurando um ponto de mínimo para a função.

$f(a)= \|x-a\|$, $a\in A$

Visto assim, o problema de minimizar funções abrange a procura de aproximações ótimas.

O caso mais simples que pode ocorrer é, certamente, quando se procura um ponto de mínimo de uma função contínua definida num compacto (veja demonstração de (1.4)). Neste contexto, sempre podemos garantir a existência de mínimos.

A situação é ainda bastante simples quando nossa função é apenas semi-contínua inferiormente com domínio enumeravelmente compacto. Ou seja:

<u>3.1 Proposição</u>. Se T é um espaço topológico enumeravelmente compacto e f é uma função real semi-contínua inferiormente em T, então f é limitada inferiormente e existe $t_0 \in T$ tal que

$$f(t_0)= \inf_{t\in T} f(t)$$

<u>Demonstração</u>. Sabemos que para todo $n\in\mathbb{N}$, $F_n=\{x\in T : f(x)\leq -n\}$ é fechado e também que a sequência $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é decrescente.

Se f for ilimitada inferiormente, então, para todo n,

$F_n \neq \emptyset$. Sendo $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = \emptyset$ chegaríamos a uma contradição.

Com isto, vemos que $a = \inf_{x \in T} f(x) > -\infty$.

Ponhamos para cada $n \in \mathbb{N}$, $G_n = \{x \in T : f(x) \leq a + \frac{1}{n}\}$.

É claro que a sequência $\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ assim definida é decrescente e que G_n é fechado e não vazio para todo n.

Sabendo-se que T é enumeravelmente compacto, concluímos que existe $x_0 \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n$. Temos então

$$f(x_0) \leq a + \frac{1}{n} \qquad \forall n \in \mathbb{N};$$

portanto,

$$f(x_0) = a = \inf_{x \in T} f(x).$$

<u>Observação</u>. De maneira análoga prova-se que funções semi-contínuas superiormente em espaços enumeravelmente compactos são limitadas superiormente e admitem pontos de máximo.

Se estamos preocupados com minimização de funções semi contínuas inferiormente, então é certamente útil conhecermos os espaços topológicos nos quais toda tal função é limitada inferiormente e atinge o ínfimo. A proposição acima mostra que entre tais espaços figuram os enumeravelmente compactos. É natural, portanto, perguntar quais outros tem esta propriedade. A proposição que segue diz que outros espaços simplesmente não existem.

<u>3.2 Proposição</u>. (J. Blatter [2]). Seja T um espaço topológico. Suponhamos que toda função semi-contínua inferiormente

em T é limitada inferiormente; então T é enumeravelmente compacto.

Demonstração. Precisamos provar que para toda sequência decrescente $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de fechados não vazios de T, tem-se $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.

Suponhamos que exista uma tal sequência com $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \emptyset$. Pomos, então, para cada $n\in\mathbb{N}$

$$f_n(x) = \begin{cases} -n & \text{se } x\in F_n \\ 0 & \text{se } x\notin F_n \end{cases}$$

É claro que, para $x\in X$, temos

$\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) > -\infty$, pois $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \emptyset$;

deste modo a função

$$f(x) = \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n(x),\ x\in T$$

está bem definida. Note que f é semi-contínua inferiormente, pois para todo $a\in\mathbb{R}$, $f^{-1}(-\infty,a]$ é T ou algum F_n; de qualquer modo, fechado.

Contrariando a hipótese, f não é limitada inferiormente.

Em face do resultado acima, seria natural perguntar quais são os espaços topológicos nos quais toda função contínua atinge o ínfimo. Muito embora possamos esperar que tais espaços sejam, ainda, os enumeravelmente compactos, temos exemplos de espaços pseudo-compactos (isto é, espaços onde toda função real contínua atinge o ínfimo e o supremo) que não são enumeravelmente compactos.

Nas aplicações, é bastante comum surgirem problemas de minimização de funções em subconjuntos convexos de espaços localmente convexos. Muitas vezes tais funções são convexas e semi-contínuas inferiormente.

Vejamos alguns exemplos.

<u>3.3 Exemplo</u>. Consideremos uma divisão $a \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_m \leq b$ do intervalo real $[a,b]$. Tomemeos um número natural n com $2 \leq n \leq m+1$.

Por "spline" de grau n-1 com nós $t_0, \ldots t_m$, entendere - mos qualquer função real de variável real que seja n-2 vezes contínuamente diferenciável e que, além disto, seja polinô- mial de grau $\leq$ n-1 nos intervalos $(-\infty, t_0]$, $[t_0, t_1]$, $\ldots [t_m, \infty)$, isto é, para cada um dos intervalos I, citados acima, existe um polinômio p_I de grau $\leq$ n-1 que coincide com f em I.

É evidente que f é um "spline" se e somente se $f \in C^{(n-2)}(\mathbb{R}) \cap C^{(\infty)}(\mathbb{R} - \{t_0, \ldots, t_m\})$ e $f^{(n)} = 0$ em $\mathbb{R} - \{t_0, \ldots, t_m\}$.

O conjunto de todos os "splines" de grau n-1 com nós $t_0, \ldots, t_m$ será indicado por $S(n, t_0, \ldots, t_m)$.

Um "spline" $s \in S(2n, t_0, \ldots, t_m)$ que seja polinomial de grau $\leq$ n-1 em $(-\infty, t_0]$ e $[t_m, \infty)$ será chamado "spline" natural.

Indicaremos por $S_0(2n, t_0, \ldots, t_m)$ o conjunto de todos os "splines" naturais de grau 2n-1 com nós $t_0, \ldots, t_m$.

É possível verificar que $S_0(2n, t_0, \ldots, t_m)$ é um espaço vetorial com dimensão m+1.

Este último fato, aliado a outras observações simples, permite-nos dizer que, para cada m+1 números reais $a_0,\dots,a_m$, existe um único "spline" natural $s \in S_0(2n,t_0,\dots,t_m)$ tal que $s(t_i)=a_i$, $i=0,1,\dots,m$.

Os "splines" naturais fornecem soluções para alguns problemas de minimização.

Problema 1. Sejam $a_0,\dots a_m \in \mathbb{R}$ e $A \subset C^{(n)}(\mathbb{R})$ o conjunto

$$A = \{f \in C^{(n)}(\mathbb{R}) : f(t_i)=a_i,\ i=0,1,\dots,m\}.$$

Denotemos por E a função

$$E : f \in A \to E(f)=\int_a^b (f^{(n)}(t))^2 dt.$$

Qual seria, então, um ponto de mínimo para E? Sabe-se que E tem como único ponto de mínimo em A o "spline" natural $s \in S_0(2n,t_0,\dots,t_m)$ que satisfaz $s(t_i)=a_i$, $i=0,1,\dots,m$.

A função E, acima definida, mede a energia elástica de um certo sistema físico. Desta forma, um ponto de mínimo para E representa um estado de energia mínimo e, portanto, uma posição de equilíbrio de tal sistema.

Problema 2. Suponhamos que, dada uma função $f \in C^{(m)}([a,b])$, queremos avaliar sua integral sabendo-se, apenas, os valores de f em um conjunto finito de pontos $a \leq t_0 < t_1 < \dots < t_m \leq b$.

Restringindo-nos a estimativas lineares, somos levados à procura de números $\alpha_0,\dots,\alpha_m \in \mathbb{R}$ tais que

$$\left|\int_a^b f(t)dt - \sum_{i=0}^{m} \alpha_i f(t_i)\right|$$

seja o mínimo possível.

Muitas maneiras existem para interpretarmos este problema; para isto consideremos a função

$$\Phi : (\alpha_0,\dots,\alpha_m)\in\mathbb{R}^{m+1} \to \sup\left|\int_a^b f(t)dt - \sum_{i=1}^{m}\alpha_i f(t_i)\right|$$

onde o supremo é tomado sobre as funções $f\in C^{(n)}([a,b])$ tais que $\int_a^b (f^{(n)}(t))^2 dt \leq 1$.

Procuremos um mínimo para Φ. É claro que Φ não é sempre finita; não sabemos, ao menos, se Φ é finita em algum ponto de seu domínio. Apesar disto, Φ tem um ponto de mínimo $(\beta_0,\dots,\beta_m)$ (onde Φ é finita), que é além do mais, único.

Através de "splines" naturais podemos calcular $(\beta_0,\dots,\beta_m)$.

Seja $\{s_0,\dots,s_m\}$ uma base para $S_0(2n,t_0,\dots,t_m)$ que satisfaça $s_j(t_i) = \delta_{ij}$ e seja

$$\beta_i = \int_a^b s_i(t)dt, \quad i=0,1,\dots,m.$$

A m+1-upla $(\beta_0,\dots,\beta_m)$ é o único ponto de mínimo para Φ.

Consideremos alguns exemplos concretos.

Para $m=1$, $n=2$, tomemos $t_0=a=0$ e $t_1=b=1$. O método acima nos fornece a solução $\beta_0=\beta_1=\frac{1}{2}$ e $\inf\phi=\frac{1}{120}$.

Isto é, se f é duas vezes continuamente diferenciavel, então o erro que se comete ao substituir-se $\int_0^1 f(t)dt$ por $\frac{1}{2}(f(a)+f(b))$ é menor que $\frac{1}{120}\int_0^1 (f^{(2)}(t))^2 dt$.

Este processo de integração numérica é conhecido como regra do trapézio.

Para $m=2$, $n=3$, $t_0=a=0$, $t_1=\frac{1}{2}$, $t_2=b=1$, obtemos $\beta_0=\frac{1}{6}$, $\beta_1=\frac{2}{3}$,

$\beta_2=\frac{1}{6}$ e inf $\Phi \doteq \frac{1}{1890}$.

Assim, temos que

$$\left|\int_0^1 f(t)dt - \left(\frac{1}{6}f(o)+\frac{2}{3}f\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{6}f(1)\right)\right|$$

é menor que

$$\frac{1}{1890}\int_0^1 (f^{(3)}(t))^2 dt$$

para toda função f que seja três vezes contínuamente diferenciável.

Este método é chamado de regra de Simpson.

3.4 Exemplo. Dizemos que dois abertos $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ são conformemente equivalentes se existe uma aplicação holomorfa injetora definida em Ω_1 com imagem Ω_2 (pelo teorema das funções inversas tal função terá inversa também holomorfa).

Segue-se que abertos conformemente equivalentes são difeomorfos.

Um resultado clássico de Riemann diz que qualquer aberto simplesmente conexo Ω de $\mathbb{C}$ é conformemente equivalente ao disco unitário $D=\{z\in\mathbb{C} : |z|<1\}$.

A seguir, damos um esboço de uma demonstração deste fato, que se relaciona com a teoria que ora estudamos.

Indiquemos pr $H(\Omega)$ o espaço vetorial das funções holomorfas em Ω. Com a topologia da convergência uniforme sobre os compactos, $H(\Omega)$ passa a ser um espaço localmente convexo.

Seja $\Sigma \subset H(\Omega)$ a classe das funções holomorfas em Ω cuja imagem é um subconjunto de D,

Toma-se $z_0 \in \Omega$ e considera-se o funcional linear

$\Delta(\psi)=\psi'(z_0)$, $\psi\in H(\Omega)$

Seja $\eta=\sup\limits_{\psi\in\Sigma}|\Delta(\psi)|$.

Em seguida, verifica-se que se $\psi\in\Sigma$ e $\psi(\Omega)\subsetneq D$, então existe $\phi\in\Sigma$ com $|\Delta(\phi)|>|\Delta(\psi)|$.

Aceitando-se estes fatos, fica claro que, se $\psi\in\Sigma$ é tal que $|\Delta(\psi)|=\eta$, então $\psi(\Omega)=D$. Mostra-se também que tal ψ é necessariamente injetora.

Com isto, fica, nosso problema, reduzido à procura de um ponto de máximo para $|\Delta|$.

Sabemos que $H(\Omega)$ é um espaço reflexivo (por ser um espaço de Montel) e que Σ é convexo, fechado e limitado.

Lembrando-se, também, que Δ é contínuo (veja fórmula integral de Cauchy) e, portanto, fracamente contínuo, concluímos que $|\Delta|$ é fracamente contínuo. Conforme veremos em (4.1), $|\Delta|$ atinge um máximo em Σ.

Para funções convexas semi-contínuas inferiormente temos um análogo à (3.1).

Lembremos primeiramente, que um subconjunto A de um espaço localmente convexo diz-se enumeravelmente convexo-compacto se para toda sequência decrescente $\{H_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos não vazios de A, que são convexos e fechados em A, tem-se $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} H_n\neq\emptyset$.

<u>3.5 Proposição</u>. Seja A um subconjunto convexo de um espaço localmente convexo. Se A é enumeravelmente convexo-compacto

então toda função real convexa f, semi-contínua inferiormente em A é limitada inferiormente e atinge o ínfimo.

Demonstração. Prova-se este fato exatamente do mesmo modo que fizemos em (3.1), notando-se que os conjuntos F_n e G_n ficam convexos neste contexto.

Como uma aplicação deste último fato, notemos que, se X é um espaço normado e $A \subset X$ é um subconjunto convexo fracamente enumeravelmente convexo-compacto, então A é proximinal; de fato, basta observar que para cada $x \in X$, a função

$$f(a) = \|x-a\| \quad , \; a \in A$$

é uma função convexa fracamente semi-contínua inferiomente.

Ainda como no caso anterior, não podemos esperar que uma classe de conjuntos, maior que a considerada em (3.5) (a classe dos enumeravelmente convexo-compactos), tenha a propriedade de minimização de funções convexas semi-contínuas inferiormente. É o que diz a proposição seguinte.

3.6 Proposição (J. Blatter [2]). Seja A um subconjunto convexo de um espaço localmente convexo X. Se toda função convexa semi-contínua inferiormente em A é limitada inferiormente e atinge o ínfimo, então A é enumeravelmente convexo-compacto.

Demonstração. Seja $\{H_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência decrescente de subconjuntos não vazios de A, convexos e fechados em A. Mostraremos que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} H_n \neq \emptyset$.

Consideremos a seguinte função em A

$\xi(x)=\sup\ \{x'(x)+a\}$,

onde o supremo é tomado sobre todos os funcionais lineares contínuos x' em X e números reais a satisfazendo

$$x'(x)+a \leq \frac{1}{n} \qquad \forall n\in\mathbb{N}\ ,\ x\in H_n$$

$$x'(x)+a \leq 1 \qquad \forall x\in A$$

Como ξ é o supremo de uma família de funções convexas contínuas, então ξ é convexa e semi-contínua inferiormente.

Seja, então $x_0\ \in A$ um ponto de mínimo para ξ. É fácil ver que $\inf\limits_{x\in A} \xi(x)=0$, donde $\xi(x_0)=0$.

Mostraremos que $x_0\in H_n$ para todo n. Suponhamos que assim não fosse. Seja então $m\in\mathbb{N}$ tal que $x_0\notin H_m$. Denotemos por $\overline{H}_m$ o fecho de H_n em X. É claro que $x_0\notin\overline{H}_m$, pois $x_0\in A$ e H_m é fechado em A.

Pelo teorema de Hahn-Banach, podemos tomar um funcional linear contínuo y' em X e um número real b tal que

$$(*) \quad y'(x) \leq b < y'(x_0) \qquad \text{para todo } x\in\overline{H}_m$$

Note que y' é superiormente limitado em A, pois senão, $-y'$ seria uma função convexa semi-contínua inferiormente, ilimitada inferiormente em A

Tomemos, portanto, $M>0$ tal que

i) $\dfrac{y'(x)-b}{M} \leq 1,\ \forall x\in A$

ii) $\dfrac{y'(x)-b}{M} \leq \dfrac{1}{n},\ \forall x\in H_n,\ n=1,2,\ldots,m-1$

Pondo-se $x'=\frac{y'}{M}$ e $a=-\frac{b}{M}$, temos

$$x'(x)+a \leqq \frac{1}{n}\ , \text{ para } x\in H_n \quad \text{e } n<m \quad \text{por (ii)}$$

$$x'(x)+a \leqq 0 < \frac{1}{n}\ , \text{ para } x\in H_n \text{ e } n\geqq m \quad \text{por } (*)$$

$$x'(x)+a \leqq 1\ , \text{ para } x\in A \text{ por (i)}$$

Portanto, para $x\in A$, temos $\xi(x) \geqq x'(x)+a$ e daí

$$\xi(x_0) \geqq x'(x_0)+a = \frac{y'(x_0)-b}{M} > 0 \quad \text{por } (*)$$

Mas, $\xi(x_0)=0$. Assim vem $x_0\in H_n$ para todo n e, portanto, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} H_n\neq\emptyset$.

Afim de relacionar os vários problemas de minimização em convexos de um espaço normado, enunciamos e demonstramos a proposição abaixo

<u>3.7 Proposição</u>. Consideremos as seguintes propriedades a respeito de um espaço normado X.

a. Toda função convexa semi-contínua inferiormente atinge o ínfimo em todo convexo fechado e limitado de X.

b. Todo funcional linear contínuo atinge o ínfimo (e portanto também o supremo) em todo convexo fechado e limitado de X.

c. Todo convexo fechado de X é proximinal.

Então (a) implica (b) e (b) implica (c).

<u>Demonstração</u>. Para ver que (a) implica (b) é suficiente notar que funcionais lineares contínuos são funções convexas semi-contínuas inferiormente.

Provemos então que (b) implica (c). Seja, para isto C um subconjunto convexo e fechado de X e $x \in X-C$; encontraremos uma aproximação ótima de x em C.

Sem perder generalidade, suporemos $x=0$ e $\operatorname{dist}(x,C) = 1$.

Pelo teorema de Hahn-Banach, podemos tomar um funcional linear contínuo x' tal que

i) $x'(x) \leq 1$, para $\|x\| \leq 1$ e

ii) $x'(x) \geq 1$, para $x \in C$.

Note que (i) implica

iii) $\|x'\| \leq 1$.

Seja $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de pontos de C tal que $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = 1$.

Pomos, para cada n, $y_n = \frac{n+1}{n} x_n$ e denotamos por H a envoltória convexa fechada de $\{y_n : n \geq 1\}$.

Por (ii) temos $x'(y_n) = x'(\frac{n+1}{n} x_n) = \frac{n+1}{n} x'(x_n) \geq 1$

e por (iii), $\lim_{n\to\infty} x'(y_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} x'(x_n) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \|x_n\| = 1$

Com isto concluímos que $\inf_{x \in H} x'(x) = 1$

Das hipóteses, seja $x_0 \in H$ tal que $x'(x_0) = 1$. Como H é a envoltória convexa fechada de $\{y_n : n \geq 1\}$, podemos escrever

$$x_0 = \lim_{p\to\infty} h_p \quad , \quad h_p \in H$$

e ainda

$$h_p = \sum_{n=1}^{n_p} \lambda_n^{(p)} y_n \ ,$$

onde $n_p \in \mathbb{N}$, $0 \leq \lambda_n^{(p)} \leq 1$, $\sum_{n=1}^{n_p} \lambda_n^{(p)}=1$

Com o único intuito de simplificar a notação escreveremos

$$h_p = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{(p)} y_n ,$$

entendendo que $\lambda_n^{(p)}=0$ para $n>n_p$.

Afirmamos que para todo n_0 vale

$$\lim_{p\to\infty} \lambda_{n_0}^{(p)}=0$$

Se assim não fosse, tomaríamos uma subsequência $\{\lambda_{n_0}^{(p_k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_{n_0}^{(p_k)} = a > 0$$

Assim, para todo k

$$x'(h_{p_k})=x'(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{(p_k)} y_n)= \sum_{n\neq n_0} \lambda_n^{(p_k)} x'(y_n) + \lambda_{n_0}^{(p_k)} x'(y_{n_0}) \geq$$

$$\geq \sum_{n\neq n_0} \lambda_n^{(p_k)} + \lambda_{n_0}^{(p_k)} \frac{n_0+1}{n_0} = 1 - \lambda_{n_0}^{(p_k)} + \lambda_{n_0}^{(p_k)} \frac{n_0+1}{n_0}$$

Passando-se k ao limite vem

$$x'(x_0) \geq 1-a+a\frac{n_0+1}{n_0} > 1,$$

que contradiz $x'(x_0)=1$. Assim, $\lim_{p\to\infty} \lambda_n^{(p)}=0$ para todo n.

Indicando por H_m a envoltória convexa fechada de $\{y_n : n\geq m\}$, mostraremos que $x_0 \in H_m$ para todo m. De fato,

$$x_0= \lim_{p\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{(p)} y_n= \lim_{p\to\infty} (\sum_{n=1}^{m-1} \lambda_n^{(p)} y_n + \sum_{n=m}^{\infty} \lambda_n^{(p)} y_n)$$

Como $\lim_{p\to\infty} \sum_{n=1}^{m-1} \lambda_n^{(p)} y_n = 0$, concluímos que existe

$\lim_{p\to\infty} \sum_{n=m}^{\infty} \lambda_n^{(p)} y_n$ e que

$$x_0 = \lim_{p\to\infty} \sum_{n=m}^{\infty} \lambda_n^{(p)} y_n ,$$

Para escrever x_0 como o limite de uma sequência de combinações convexas de $\{y_n: n\geq m\}$, procedemos como abaixo:

$$x_0 = \lim_{p\to\infty} \sum_{n=m}^{\infty} \lambda_n^{(p)} y_n = \lim_{p\to\infty} \Big(\sum_{n=1}^{m-1} \lambda_n^{(p)}\Big) y_m + \lim_{p\to\infty} \sum_{n=m}^{\infty} \lambda_n^{(p)} y_n =$$

$$\lim_{p\to\infty} \Big\{\Big(\sum_{n=1}^{m} \lambda_n^{(p)}\Big) y_m + \sum_{n=m+1}^{\infty} \lambda_n^{(p)} y_n\Big\}$$

Indicando por K a envoltória convexa fechada de $\{x_n: n\geq 1\}$, provaremos que $x_0 \in K$.

Em caso contrário tomaríamos, por Hahn-Banach, um funcional linear contínuo y' e $\alpha\in\mathbb{R}$ tal que

$y'(x_0) \geq \alpha + \varepsilon$ (para algum $\varepsilon>0$) e

$y'(x) \leq \alpha$, para $x\in K$.

Tomemos $m\in\mathbb{N}$ tal que $\frac{|\alpha|}{m} \leq \frac{\varepsilon}{2}$; assim, para todo $n\geq m$

$$y'(y_n) = \frac{n+1}{n} y'(x_n) \leq \frac{n+1}{n} \alpha \leq \alpha + \frac{|\alpha|}{n} \leq \alpha+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Como x_0 pertence à envoltória convexa fechada de $\{y_n: n\geq m\}$, viria $y'(x_0) \leq \alpha + \frac{\varepsilon}{2}$, que não é verdade.

Assim, $x_0\in K$ e, como $K\subset C$, também $x_0\in C$. Notando que

$$\lim_{n\to\infty} \|y_n\| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \|x_n\| = 1$$

e que $x_0\in H_m$ para todo m, vem $\|x_0\| = 1$.

Nota. É verdade, ainda, que (c) implica (a); não estamos, entretanto, em condições de provar isto. O corolário (1) da proposição (4.1) aliado à (8.1) acarretará que (c) implica (a).

4. REFLEXIVIDADE E APROXIMAÇÕES ÓTIMAS

Sabemos que os espaços localmente convexos semi reflexivos são caracterizados pelo fato de que todo subconjunto limitado é relativamente fracamente compacto [12, pág.144]. Com isto, tais espaços tornam se os melhores ambientes sob o ponto de vista de minimização de funções. Melhor dizendo, temos:

4.1 Proposição. Se X é um espaço localmente convexo semi reflexivo, então toda função fracamente semi-contínua inferiormente (superiormente) atinge o ínfimo (supremo) em todo conjunto convexo fechado limitado.

Demonstração. Seja C um subconjunto convexo fechado e limitado de X. Então C é fracamente fechado e limitado, portanto fracamente compacto. O resultado segue, então, de (3.1) e da observação feita em seguida.

Temos as seguintes consequências.

Corolário 1. Se X é um espaço localmente convexo semi reflexivo, então toda função convexa semi-contínua inferiormente atinge o ínfimo em todo convexo fechado limitado.

Demonstração. Basta observar que toda função convexa semi-contínua inferiormente é fracamente semi-contínua inferiormente.

Corolário 2. Se X é um espaço normado reflexivo, então todo subconjunto convexo fechado é proximinal.

<u>Demonstração</u>. Seja $C \subset X$ convexo e fechado. Para $x \in X$, consideremos a função

$$f(c) = \|x-c\| , \; c \in C \cap B,$$

onde B denota uma bola de centro x e raio maior que dist(x,C).

É claro que $B \cap C$ é convexo, fechado e limitado e que f é convexa e contínua. Assim, pelo corolario (1), f tem um ponto de mínimo em $C \cap B$. É claro que tal ponto é uma aproximação ótima de x em C.

<u>Corolário 3</u>. Se X é um espaço normado reflexivo, então todo funcional linear contínuo em X atinge sua norma na bola unitária.

Durante muitos anos esteve sem resposta a pergunta: Se X é um espaço normado tal que todo funcional linear contínuo atinge a norma na bola unitária, então, será X um espaço reflexivo ?

A resposta final e afirmativa para espaços de Banach foi dada por R. C. James [8]. Em primeiro lugar, James deu uma demonstração para espaços separáveis [6]. Em 1964 surgiu a forma final.

<u>4.2 Teorema</u> (James). Seja X um espaço de Banach. Uma condição necessária e suficiente para que X seja reflexivo é que todo funcional linear contínuo atinja sua norma na bola unitária.

Generalizando este resultado para espaços localmente convexos [7], James também provou que

<u>4.3 Teorema</u> (James). Seja X um espaço localmente convexo quasi completo e C um subconjunto de X fracamente fechado e limitado. Uma condição necessária e suficiente para que C seja fracamente compacto é que todo funcional linear contínuo atinja o supremo em C.

A primeira demonstração de James é extremamente longa e complicada. Mais tarde, James de uma outra prova, que embora mais simples, é ainda bastante artificial [10], [5, pag 12 e 15]. Provaremos, adiante, formas enfraquecidas destes teoremas.

Em vista de (2.2) podemos enunciar o teorema de James em termos de hiperplanos.

<u>4.4 Teorema</u>. Um espaço de Banach é reflexivo se e somente se todo hiperplano fechado é proximinal.

5. SUB-REFLEXIVIDADE

Após o teorema de James, passou-se a chamar um espaço de Banach X de sub-reflexivo quando os funcionais que atingem sua norma na bola unitária formarem um subconjunto denso no dual X' (dotado da topologia forte).

Bishop e Phelps demonstraram que dado um espaço de Banach X e um subconjunto convexo fechado e limitado C, a família dos funcionais que atingem seu supremo em C é densa em X'. Com isto fica estabelecido que todo espaço de Banach é sub-reflexivo e, portanto, esta propriedade não traz novas informações a respeito do espaço considerado.

Reproduzimos a seguir o trabalho de Bishop e Phelps [5,pág1]

Antes estabeleceremos alguma terminologia.

Consideremos um espaço de Banach X.

Um subconjunto K de X diz-se um cone convexo se K é convexo e para $\alpha \geq 0$ e $x \in K$ tem-se $\alpha x \in K$.

Dizemos que um cone convexo suporta um conjunto $C \subset X$ em $x_0 \in C$ se $(K+x_0) \cap C = \{x_0\}$.

Note que se K é um cone convexo com interior $\overset{\circ}{K}$ não vazio e C é um convexo, então, se K suporta C em $x_0 \in C$, existe, pelo teorema de Hahn-Banach, um funcional linear contínuo x' tal que

$$\sup_{c \in C} x'(c) = x'(x_0) = \inf_{k \in K} x'(k+x_0).$$

Para um funcional linear contínuo x' com $\|x'\|=1$ e $k \geq 1$ definimos

$K(x',k) = \{x \in X : \|x\| \leq kx'(x)\}$;

$K(x',k)$ é um cone convexo.

Se $k>1$, então existe $x \in X$ com $\|x\| = 1$ tal que $\frac{1}{k} < x'(x)$. Pela continuidade de x' e $\| \ \|$, segue que o interior de $K(x',k)$ é não vazio.

5.1 Lema. Suponha que C é fechado e convexo, e que x' é um funcional linear contínuo com $\|x'\| = 1$. Suponha também que x' é limitado em C e seja $k \geq 1$.

Se $z \in C$, então existe $x_0 \in C$ tal que $x_0 - z \in K(x',k)$ e $K(x',k)$ suporta C em x_0.

Demonstração. Consideremos a ordem parcial em C definida por: $x \leq y$ se $x-y \in K(x',k)$ ou equivalentemente $\|x-y\| \leq kx'(x)-kx'(y)$.

Mostraremos que $(C,\leq)$ tem um elemento maximal.

Seja $Z = \{x \in C : x \geq z\}$ e seja W um subconjunto totalmente ordenado de Z. Note que $\{x'(w) : w \in W\}$ é uma sequência generalizada crescente e limitada e, portanto, converge para seu supremo.

Em particular é de Cauchy e, portanto, W é uma sequência generalizada de Cauchy e, portanto, convergente para algum $x \in C$. A continuidade de x' e de $\| \ \|$ implica que x é um majorante para W.

Assim, pelo lema de Zorn, Z tem um elemento maximal x_0 ; é claro que $x_0 \geq z$.

Para mostrar que $K(x',k)$ suporta C em x_0 notemos que $x_0 \in C \cap (K(x',k)+x_0)$. Na verdade, x_0 é o único ponto nesta inter secção. Para ver isto, suponhamos que $\overline{x}\in C\cap(K(x',k)+x_0)$. Então, $\overline{x}-x_0\in K(x',k)$; portanto, $x_0\leq\overline{x}$. Por outro lado, $z\leq x_0$ e $x_0\leq\overline{x}$; Portanto $z\leq\overline{x}$; assim, $\overline{x}\in Z$ e da maximalidade de x_0 segue $x_0=\overline{x}$

<u>5.2 Lema</u>. Sejam x',y' funcionais lineares contínuos com $\|x\|=$ $=\|y'\|=1$. Seja $\varepsilon>0$ e suponhamos que

$$\|x\|\leq 1,\ x'(x)=0 \text{ implique } |y'(x)|\leq\frac{\varepsilon}{2}.$$

Então, ou $\|x'+y'\|\leq\varepsilon$ ou $\|x'-y'\|\leq\varepsilon$

<u>Demonstração</u>. Seja z' um funcional linear contínuo que coincide com y' em Ker x' e $\|z'\|\leq\varepsilon/2$ por Hahn-Banach. Assim, $y'-z'$ é nulo em Ker x'; portanto, $y'-z'=\alpha x'$ para algum $\alpha\in\mathbb{R}$. Note que

$$|1-|\alpha||=|\,\|y'\|-\|y'-z'\|\,|\leq\|z'\|\leq\varepsilon/2$$

Assim, se $\alpha\geq 0$, então

$$\|x'-y'\|=\|(1-\alpha)x'-z'\|\leq|1-\alpha|+\|z'\|\leq\varepsilon$$

Se $\alpha<0$, então

$$\|x'+y'\|=\|(1+\alpha)x'+z'\|\leq|1+\alpha|+\|z'\|\leq\varepsilon$$

<u>5.3 Lema</u>. Se $0<\varepsilon<1$, $\|x'\|=\|y'\|=1$, $k>1+2/\varepsilon$ e y' é não negativo em $K(x',k)$; então, $\|x'-y'\|\leq\varepsilon$.

<u>Demonstração</u>. Seja $x\in X$ tal que $\|x\|=1$ e $x'(x)>(1+\frac{2}{\varepsilon})/k$. Se $y\in X$ é tal que $\|y\|<\frac{2}{\varepsilon}$ e $x'(y)=0$, então $\|x\pm y\|\leq 1+\frac{2}{\varepsilon}<$ $<kx'(x)=kx'(x\pm y)$; portanto, $x\pm y\in K(x',k)$.

Assim, pela hipótese, $y'(x\pm y)\geq 0$ e, portanto, $|y'(y)|\leq y'(x)\leq\|x\|=1$.

Pelo lema (5.2), $\|x'+y'\|\leq\varepsilon$ ou $\|x'-y'\|\leq\varepsilon$.

Ora, $\|x'+y'\|\leq\varepsilon$ é impossível. De fato, como $\frac{1}{k}<1$,

$\varepsilon < 1$, então existe $z \in X$ com $\|z\| = 1$ e $x'(z) > \max\{1/k, \varepsilon\}$. Assim, $x'(z) > 1/k \; \|z\|$; portanto, $z \in K(x',k)$, donde $y'(z) \geqq 0$.

Disto vem

$$\|x'+y'\| \geqq (x'+y')(z) > \varepsilon .$$

Segue então que $\|x'-y'\| \leqq \varepsilon$.

<u>5.4 Teorema</u> (Bishop-Phelps). Seja C um subconjunto convexo fechado e limitado do espaço de Banach X.

A coleção de funcionais contínuos que atingem o máximo em C é densa no dual X'.

<u>Demonstração</u>. Podemos assumir $0 \in C$ e precisamos apenas aproximar os funcionais $x' \in X'$ com $\|x'\| = 1$. Seja $0<\varepsilon<1$ dado; escolhemos $k>1+2/\varepsilon>1$. Assim, $K(x',k)$ é um cone convexo com interior não vazio. Aplicando (5.1) para C com $z=0$, obtemos $x_0 \in C$ com $x_0 \in K(x',k)$ e $(K(x',k)+x_0) \cap C = \{x_0\}$; portanto, $K(x',k)$ suporta C em x_0. Com auxílio de Hahn-Banach obtemos um funcional y' com $\|y'\| = 1$ e

$$\sup_{c \in C} y'(c) = y'(x_0) = \inf_{k \in K(x',k)} y'(k+x_0) = \inf_{k \in K(x',K)} y'(k)+y'(x_0)$$

Em particular, $\inf\limits_{k \in K(x',k)} y'(k) = 0$ e pomo-nos nas hipóteses de (5.3). Temos então $\|y'-x'\| \leqq \varepsilon$.

6. O EXEMPLO DE JAMES

Sabemos que um espaço de Banach é reflexivo se todo funcional atinge a norma na bola unitária (4.2). É, portanto, natural perguntar se existe um espaço normado X que seja incompleto (e portanto não reflexivo) para o qual todo funcional atinja a norma na bola unitária.

O completamento $\hat{X}$ de um tal espaço deve ser reflexivo (4.2); não pode ocorrer, entretanto, que cada funcional em $\hat{X}$ atinja a norma em apenas um ponto; de fato, se $x \in \hat{X}-X$, $\|x\| = 1$, então existe por Hahn-Banach un funcional linear contínuo x' em $\hat{X}$ tal que $\|x'\| = 1$ e $x'(x) = 1$.

Se tal x' atinge sua norma apenas em x, então é claro que a restrição $x'|_X$ não atinge sua norma.

Decorre disto que $\hat{X}$ não pode ser estritamente convexo (2.4).

O exemplo abaixo foi construído por James [9] em resposta a uma pergunta de Frank Deutsch, que estava interessado em saber se é completo um espaço normado no qual todo subconjunto convexo fechado é proximinal.

A resposta a Deutsch resultaria afirmativa se fosse verdade que todo espaço incompleto admite um funcional contínuo que não atinge a norma na bola unitária (o núcleo de um tal funcional por (2.2) não seria proximinal). Isto não é, todavia, verdade.

O espaço que expomos a seguir, é um exemplo de um espaço normado incompleto para o qual todo funcional atinge a norma na bola unitária.

6.1 Exemplo (James). Para cada número natural $n \geq 1$ denotemos por $\mathbb{R}^n_\infty$ o espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ dotado da norma do máximo.

Seja $X = P_2\mathbb{R}^n_\infty$ o espaço vetorial formado pelas sequências infinitas $(x_1;x_2;\ldots)$, com $x_n \in \mathbb{R}^n_\infty$ e

$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2 < \infty$. Definimos a norma de $x = (x_1;x_2;\ldots) \in X$ por

$$\|x\| = (\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2)^{1/2}.$$

Se escrevemos $x = ((x_1);(x_1,x_2);(x_1,x_2,x_3);\ldots)$, então

$$(*) \qquad \|x\| = (|x_1^1|^2+(\sup\{|x_1^2|,|x_2^2|\})^2 + (\sup\{|x_1^3|,|x_2^3|, |x_3^3|\})^2 + \ldots)^{1/2}$$

Desde que X é um produto hilbertiano de espaços reflexivos, X é reflexivo [4,pág.35].

Seja Y o subespaço de X gerado pelos elementos que satisfazem

$$|x_1^n| = |x_2^n| = \ldots = |x_n^n| \text{ para todo } n.$$

Mostraremos que Y é denso em X. Para isto, consideremos a igualdade

$$((0);(0,0);\ldots;(0,0,\ldots,1,\ldots0);\ldots) =$$

$$= \frac{1}{2}((0);(0,0);\ldots;(1,1,\ldots1,\ldots,1);\ldots)+$$

$$+ \frac{1}{2}((0);(0,0);\ldots;(-1,-1,\ldots,1,\ldots,-1);\ldots).$$

Assim, Y contém todos os elementos com uma única coordenada não nula e, portanto, também todos os que tem uma quantidade finita de coordenadas não nulas. Decorre daí que Y é denso em X.

Mostra-se que $((1);(\frac{1}{2},\frac{1}{3});(\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{6});\dots)$ e X-Y para obter $Y\neq X$ e concluir que Y não é completo.

Seja x' um funcional linear contínuo em X. Sabe-se que existe uma sequência $\{\alpha_i^n\}_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ 1\leq i\leq n}}$ de números reais tal que, para $((x_1^1);(x_1^2,x_2^2);(x_1^3,x_2^3,x_3^3);\dots)\in X$, tem-se

$$x'((x_1^1);(x_1^2,x_2^2);(x_1^3,x_2^3,x_3^3);\dots) =$$

$$=\alpha_1^1x_1^1+(\alpha_1^2x_1^2+\alpha_2^2x_2^2)+(\alpha_1^3x_1^3+\alpha_2^3x_2^3+\alpha_3^3x_3^3)+\dots$$

Sendo X reflexivo existe, pelo corolário (3) da proposição (4.1), um elemento $z\in X$ com $\|z\| = 1$ e $x'(z) = \|x'\|$. Isto é:

$$(**)\quad \|x'\| = x'(z) = \alpha_1^1z_1^1+(\alpha_1^2z_1^2+\alpha_2^2z_2^2)+(\alpha_1^3z_1^3+\alpha_2^3z_2^3+\alpha_3^3z_3^3)+\dots$$

A norma de z dada por (*) não se altera se substituimos z_i^n por $\sup_{1\leq j\leq n}|z_j^n|$ quando $\alpha_i^n\geq 0$ e por $-\sup_{1\leq j\leq n}|z_j^n|$ quando $\alpha_i^n<0$.

A substituição não faz decrescer a soma em (**); portanto, a soma não se altera e o "novo z" assim obtido é um elemento da bola unitária de Y no qual x' atinge a norma.

As conclusões que obtemos a partir deste exemplo são as seguintes:

1. Não é verdade que um espaço normado é completo quan-

do todo hiperplano fechado é proximinal.

2. O teorema de James não se aplica para espaços não completos.

7. COMPLETEZA E APROXIMAÇÕES ÓTIMAS

Neste parágrafo daremos a resposta final à pergunta de Frank Deutsch devida a J. Blatter [3].

Nossa prova é uma simplificação daquela em [3]. Dado um espaço normado não completo X, construiremos um subconjunto convexo fechado $C\subset X$ de modo que a origem não tenha aproximação ótima em C.

<u>7.1 Teorema</u> (J. Blatter). Seja X um espaço normado.

Se todo convexo fechado de X é proximinal, então X é completo.

<u>Demonstração</u>. Suponhamos que X não seja completo. Denotemos por $\hat{X}$ o completamento de X e tomemos, portanto, $x_0 \in \hat{X}-X$. Podemos supor $\|x_0\| = 1$.

Seja x' um funcional linear contínuo em $\hat{X}$ com $\|x'\| = 1$ e $x'(x_0) = 1$. Para um número real $k > 1$, pomos, como em (6)

$$K(x',k) = \{x\in\hat{X}:\ \|x\| \leq kx'(x)\}.$$

Denotemos por C o conjunto

$$C = x_0 + K(x',k),$$

que é, obviamente, convexo e fechado.

Para $c = x_0 + y \in C$ $(y\in K(x',k))$, temos

$$\|c\| = \|x_0+y\| \geq x'(x_0+y) = 1+x'(y) \geq 1+\frac{1}{k}\|y\| \geq 1,$$

donde

$$\text{dist}(0,C) = \inf_{c\in C}\|c\| \geq 1$$

Como $\|x_0\| = 1$ e $x_0\in C$ temos $\text{dist}(0,C) = 1$

Mostraremos em seguida que $\mathrm{dist}(0, C\cap X) = 1$. É claro que $\mathrm{dist}(0, C\cap X) \geq 1$.

Note que pela continuidade de x' e $\|\ \|$,

$$L = \{x \in \hat{X}: \|x\| < kx'(x)\}$$

é aberto em $\hat{X}$. Como, para todo $\varepsilon > 0$,

$$\|\varepsilon x_0\| = \varepsilon < k\varepsilon = kx'(\varepsilon x_0),$$

concluímos que L tem pontos de norma arbitrariamente pequena; assim, $x_0 + L$ tem pontos de norma arbitrariamente próxima de $\|x_0\| = 1$, isto é, se $B_\varepsilon(x_0)$ denota a bola de centro x_0 e raio ε, então $(x_0 + L)\cap B_\varepsilon(x_0) \neq \emptyset$ para todo $\varepsilon > 0$.

Sendo $(x_0 + L)\cap B_\varepsilon(x_0)$ aberto, vem

$$((x_0 + L)\cap B_\varepsilon(x_0))\cap X \neq \emptyset,$$

pois X é denso em $\hat{X}$.

Disto decorre imediatamente que $\mathrm{dist}(o, (x_0 + L)\cap X) \leq 1$ e como $(x_0 + L)\cap X \subset C\cap X$, vem $\mathrm{dist}(0, C\cap X) \leq 1$; portanto, $\mathrm{dist}(0, C\cap X) = 1$.

Como C é convexo e fechado em $\hat{X}$, então $C\cap X$ é convexo e fechado em X. $C\cap X$ Não tem nenhuma aproximação ótima de 0, pois se $x \in C\cap X$ é tal que $\|x\| = \mathrm{dist}(0, C\cap X) = 1$, teríamos $x = x_0 + y$ para algum $y \in K(x', k)$ e, portanto,

$$\|x - x_0\| \leq kx'(x - x_0) = kx'(x) - kx'(x_0) \leq k\|x\| - k = 0,$$

donde $x = x_0$, que contradiz $x_0 \in \hat{X} - X$.

Levando em conta a proposição (3.7), obtemos também

<u>7.2 Teorema</u>. Se todo funcional linear contínuo atinge o ínfimo em todo subconjunto convexo fechado limitado do espaço normado X, então X é completo.

Não temos para espaços localmente convexos uma generalização destes resultados. No exemplo seguinte mostraremos um espaço localmente convexo tal que toda função fracamente semicontínua inferiormente atinge o ínfimo em todo subconjunto limitado fracamente fechado (em particular em todo convexo fechado limitado), mas que não é, nem mesmo, quasi-completo.

7.3 Exemplo. Seja $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ o espaço das funções reais de variável real com a topologia da convergência simples (note que a topologia fraca em $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ coincide com a topologia original).

Seja X o subespaço de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ definido por

$X = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : f$ é nula fora de um conjunto enumerável$\}$.

É fácil ver que se $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, então f é um ponto de acumulação fraco do seguinte subconjunto limitado de X:

$\{ f_A : A \subset \mathbb{R}$ enumerável $\}$,

onde $f_A(x) = f(x)$ se $x \in A$ e $f_A(x) = 0$ se $x \notin A$.

Com isto vemos que X não é quasi-completo.

Mostraremos que todo subconjunto limitado e fracamente fechado de X é fracamente enumeravelmento compacto. Assim, todas as conclusões seguirão de (3.1).

Seja C um tal conjunto e $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em C. Então, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada e pelo teorema de Tychonov existe $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ que é ponto de acumulação fraco de $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Se $g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, indicamos por supp g o conjunto dos números reais onde g não se anula.

É fácil ver que

$$\operatorname{supp} f \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \operatorname{supp} f_n$$

e, portanto, supp f é enumerável e $f \in X$.

Mostramos, com isto, que toda sequência em C tem ponto de acumulação fraco em C e, portanto, que C é fracamente enumeravelmente compacto.

8. UMA FORMA FRACA DO TEOREMA DE JAMES

Sabemos que se todo subconjunto convexo fechado de um espaço normado X é proximinal, então X é completo (7.1). Aliando este resultado à (4.4), temos que um espaço normado nas condições acima é necessariamente reflexivo. Com isto temos demonstrado que

8.1 Teorema. Se X é um espaço normado tal que todo subconjunto convexo e fechado é proximinal, então X é reflexivo.

Em resumo, o que temos é o seguinte.

Se em (4.4) dispensamos a hipótese sobre a completeza de X mas, em compensação, impomos que, não só os hiperplanos fechados são proximinais, mas sim que todos os convexos fechados o são, então ainda obtemos a conclusão desejada, isto é, a reflexividade de X.

Esta afirmação está fortemente apoiada no teorema de James. Dada a complexidade de sua demonstração, obteremos, a seguir, uma prova direta de (8.1).

Em primeiro lugar demonstraremos um lema preparatório que é, fundamentalmente, uma generalização do teorema de Helly (veja apêndice) para o caso enumerável. Este resultado não tem interesse intrínseco pois as hipóteses que faremos acarretam na reflexividade do espaço em questão.

8.2 Lema. Seja X um espaço normado tal que todo seu subconjunto convexo fechado é proximinal. Se $x'' \in X''$ atinge sua norma e $\{x'_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X'$ é uma sequência de funcionais, então é possível escolher $x \in X$ com $\|x\| = \|x''\|$ que satisfaz

$$x'_n(x) = x''(x'_n) \quad \text{para todo } n.$$

Demonstração. Tomemos $x' \in X'$ com $x''(x') = \|x''\|$ e $\|x'\| = 1$ e consideremos a sequência finita $x', x'_1, x'_2, \ldots x'_n$. Existe, portanto, pelo teorema de Helly, $\tilde{x}_n \in X$ com

$$\|\tilde{x}_n\| \leq (1+\tfrac{1}{n}) \|x''\|$$

$$x'(\tilde{x}_n) = x''(x') = \|x''\| \text{ e}$$

$$x'_k(\tilde{x}_n) = x''(x'_k), \quad \text{se } k \leq n$$

Pondo-se $x_n = (1+\frac{1}{n})\tilde{x}_n$, valem as seguintes propriedades

1. $x'(x_n) = \frac{n+1}{n} \|x''\| > \|x''\|$

2. $\|x_n\| \leq (\frac{n+1}{n})^2 \|x''\|$

De (1) concluímos que a sequência $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ está contida no semi espaço.

$$S = \{z \in X : x'(z) \geq \|x''\|\}$$

Como S é convexo e fechado, sabemos que a envoltória convexa fechada de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\overline{co}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, é um subconjunto de S.

Note que se $z \in S$, então $\|x''\| \leq x'(z) \leq \|x'\| \|z\| = \|z\|$; isto diz que $\mathrm{dist}(0,S) \geq \|x''\|$ e daí concluímos também que $\mathrm{dist}(0,\overline{co}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}) \geq \|x''\|$

Por outro lado, (2) acarreta $\inf\limits_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\| \leq \|x''\|$ e, portanto, $\mathrm{dist}(0,\overline{co}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}) \leq \|x''\|$

Temos então mostrado que $\mathrm{dist}(0,\overline{co}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}) = \|x''\|$.

Usando as hipóteses, tomemos $x \in \overline{co}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ com $\|x\| = \|x''\|$.

No que se segue mostraremos que $x'_n(x) = x''(x'_n)$ para todo n.

Como $x \in \overline{co}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, então x é limite de uma sequência $\{y_p\}_{p \in \mathbb{N}}$ de pontos de $co\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$

Para cada p, y_p tem a forma:

$$y_p = \sum_{n=0}^{n_p} \lambda_n^{(p)} x_n$$

com $n_p \in \mathbb{N}$, $0 \leq \lambda_n^{(p)} \leq 1$ e $\sum_{n=0}^{n_p} \lambda_n^{(p)} = 1$

Com o único intuito de simplificar a notação escreveremos

$$y_p = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^{(p)} x_n,$$

entendendo que $\lambda_n^{(p)} = 0$ sempre que $n > n_p$.

Afirmamos que para todo $n \in \mathbb{N}$ tem-se

$$\lim_{p\to\infty} \lambda_n^{(p)} = 0$$

Se assim não fosse poderíamos extrair uma sub-sequência $\{\lambda_{n_0}^{(p_k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$, para algum n_0, tal que

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_{n_0}^{(p_k)} = a > 0$$

Assim teríamos

$$x'(y_{p_k}) = x'(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{(p_k)} x_n) = \lambda_{n_0}^{(p_k)} x'(x_{n_0}) + \sum_{n \neq n_0} \lambda_n^{(p_k)} x'(x_n)$$

Notando que $\lim_{k\to\infty} x'(y_{p_k}) = x'(x)$ e que $\lim_{k\to\infty} \lambda_{n_0}^{(p_k)} x'(x_{n_0}) =$

$= ax'(x_{n_0})$, concluímos que existe $\lim\limits_{k\to\infty} \sum\limits_{n\neq n_0} \lambda_n^{(p_k)} x'(x_n)$ e que

$$x'(x) = ax'(x_{n_0}) + \lim_{k\to\infty} \sum_{n\neq n_0} \lambda_n^{(p_k)} x'(x_n) \qquad (*)$$

Lembrando que $x'(x_n) \geqq \|x''\|$, donde

$$\sum_{n\neq n_0} \lambda_n^{(p_k)} x'(x_n) \geqq \Big(\sum_{n\neq n_0} \lambda_n^{(p_k)}\Big) \|x''\|$$

e ainda que

$$\sum_{n\neq n_0} \lambda_n^{(p_k)} = 1 - \lambda_{n_0}^{(p_k)}$$

acarreta

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n\neq n_0} \lambda_n^{(p_k)} = 1-a$$

vem

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n\neq n_0} \lambda_n^{(p_k)} x'(x_n) \geqq \lim_{k\to\infty} \Big(\sum_{n\neq n_0} \lambda_n^{(p_k)}\Big) \|x''\| = (1-a) \|x''\|,$$

que aplicado à $(*)$ fornece

$$x'(x) \geqq ax'(x_{n_0}) + (1-a) \|x''\| ;$$

como $x'(x_{n_0}) > \|x''\|$, por (1), temos

$$x'(x) \geqq ax'(x_{n_0}) + (1-a) \|x''\| > a \|x''\| + (1-a) \|x''\| =$$
$$= \|x''\| ,$$

que é absurdo, já que $|x'(x)| \leq \|x'\| \ \|x\| = \|x''\|$.

Assim, como dissemos, $\lim\limits_{p\to\infty} \lambda_n^{(p)} = 0$ para todo n.

Nosso próximo passo será provar que para todo n_0,

$x \in \overline{co}\{x_n : n \geq n_0\}$.

Para isto notemos que

$$x = \lim_{p\to\infty} \left(\sum_{n=0}^{n_0-1} \lambda_n^{(p)} x_n + \sum_{n=n_0}^{\infty} \lambda_n^{(p)} x_n \right)$$

Como $\lim\limits_{p\to\infty} \sum\limits_{n=0}^{n_0-1} \lambda_n^{(p)} x_n = 0$, então existe $\lim\limits_{p\to\infty} \sum\limits_{n=n_0}^{\infty} \lambda_n^{(p)} x_n$ e vale:

$$x = \lim_{p\to\infty} \left(\sum_{n=0}^{n_0-1} \lambda_n^{(p)} x_n \right) + \lim_{p\to\infty} \left(\sum_{n=n_0}^{\infty} \lambda_n^{(p)} x_n \right) =$$

$$= \lim_{p\to\infty} \sum_{n=n_0}^{\infty} \lambda_n^{(p)} x_n$$

O leitor desatento poderá pensar que obtivemos assim, $x \in \overline{co}\{x_n : n \geq n_0\}$; ocorre, entretanto, que

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \lambda_n^{(p)} x_n$$

não é, em geral, uma combinação convexa; contornamos esta situação escrevendo:

$$x = \lim_{p\to\infty} \sum_{n=n_0}^{\infty} \lambda_n^{(p)} x_n = \lim_{p\to\infty} \sum_{n=n_0}^{\infty} \lambda_n^{(p)} x_n + \lim_{p\to\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^{(p)} \right) x_{n_0} =$$

$$= \lim_{p\to\infty} \left\{ \left(\sum_{n=0}^{n_0-1} \lambda_n^{(p)} + \lambda_{n_0}^{(p)} \right) x_{n_0} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \lambda_n^{(p)} x_n \right. ,$$

que é um elemento de $\overline{co}\{x_n : n \geq n_0\}$.

Se temos $x \in \overline{co}\{x_n : n \geq n_0\}$, então para todo k,

$$x'_k(x) \in \overline{co}\{x'_k(x_n) : n \geq n_0\}$$

mas $x'_k(x_n) = x'_k(\frac{n+1}{n} \tilde{x}_n) = \frac{n+1}{n} x'_k(\tilde{x}_n) = \frac{n+1}{n} x''(x'_k)$

desde que $k \leq n$; assim,

$$\lim_{n\to\infty} x'_k(x_n) = x''(x'_k);$$

disto decorre que $\bigcap_{n_0 \in \mathbb{N}} \overline{co}\; x'_k\{(x_n) : n \geq n_0\} = \{x''(x'_k)\}$

e daí resulta finalmente $x'_k(x) = x''(x'_k)$, com o que fica terminada a demonstração.

<u>8.3 Demonstração de (8.1)</u>. Em primeiro lugar, reduziremos o problema para o caso separável. Para isto mostraremos que se X não é reflexivo, então existe um subespaço separável e fechado $Y \subset X$ que também não é reflexivo. Como todo convexo fechado de X é proximinal, então é claro que o mesmo acontece com Y.

Da existência de um tal Y deduziremos uma contradição.

Suponhamos, como dissemos, X não reflexivo. Pelo teorema de Eberlein [12, pág. 185] existe uma sequência limitada $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ que não tem ponto de acumulação na topologia fraca. Seja Y o subespaço fechado gerado por $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. É claro então que Y não é reflexivo pois contém uma sequência limitada sem ponto de acumulação na topologia fraca; é claro, também, que Y é separável.

Consideremos o dual topológico Y' de Y e o dual topológico Y'' de Y' (com a topologia forte). Por um abuso de linguagem escreveremos $Y \subset Y''$.

Por Bishop-Phelps, existe $y'' \in Y''-Y$ que atinge sua norma na bola unitária de Y'. Seja d a distância entre y'' e Y.

Tomemos $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ denso em Y.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ escolhemos $y_n' \in Y'$ com $\|y_n'\| = 1$ que satisfaça

$$|(y''-y_n)\ (y_n')| \geq \frac{1}{2} \|y''-y_n\| \geq \frac{d}{2}$$

Usando o lema, seja $y \in Y$ com

$y_n'(y) = y''(y_n')$ para todo n.

Qualquer que seja o número $\varepsilon > 0$, é possível encontrar n tal que $\|y_n-y\| \leq \varepsilon$; assim

$$|(y_n-y'')\ (y_n')| = |(y_n-y)\ (y_n')| \leq \|y_n-y\|\ \|y_n'\| \leq \varepsilon;$$

por outro lado, temos

$$|(y''-y_n)\ (y_n')| \geq \frac{d}{2},$$

trazendo uma contradição. Assim, demonstraremos que X é, de fato reflexivo.

Com auxílio de (3.7) concluímos também que

<u>8.4 Teorema</u>. Se todo funcional linear contínuo atinge o ínfimo em todo subconjunto convexo fechado e limitado do espaço normado X, então X é reflexivo.

Para espaços localmente convexos vale um resultado análogo.

8.5 Teorema. Se todo funcional linear contínuo atinge o ínfimo (e portanto também o supremo) em todo subconjunto convexo fechado limitado do espaço localmente convexo X, então todo tal conjunto é enumeravelmente convexo-compacto.

Demonstração. Seja C um convexo fechado limitado de X e $\{H_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência decrescente de convexos fechados não vazios, com $H_n \subset C$, para todo n. Mostraremos que $\bigcap_{n\geq 1} H_n \neq \emptyset$.

Consideremos as inclusões

$C \subset X \subset X'' \subset X'^*$

Seja $\overline{C}$ o fecho de C em X'^* (dotado da topologia da convergência simples); pelo teorema de Tychonov, sabemos que $\overline{C}$ é compacto (porque é limitado e, portanto, fracamente limitado em X).

É possível mostrar também que $\overline{C} \subset X''$, [12, pág.143] já que C é limitado.

Assim, indicando por $\overline{H}_n$ o fecho de H_n em X'^* teremos $\bigcap_{n\geq 1} \overline{H}_n \neq \emptyset$, pois $\overline{C}$ é compacto e, para todo n, $\overline{H}_n \subset \overline{C}$.

Seja, então, $x'' \in X''$ tal que $x'' \in \overline{H}_n$, $\forall n \geq 1$. Se $x'' = 0$ não há mais nada a provar. Senão, tomamos $x' \in X'$ com $x''(x') = 1$.

Fixemos n; é claro que, para todo $\varepsilon > 0$,

$V_\varepsilon = \{z'' \in X'' : |z''(x') - x''(x')| < \varepsilon\}$ é uma vizinhança de x'' (na topologia da convergência simples). Como $x'' \in \overline{H}_n$, é claro, também, que $V_\varepsilon \cap H_n \neq \emptyset$; podemos tomar, então, $x_\varepsilon \in H_n$ tal que $|x'(x_\varepsilon) - 1| < \varepsilon$.

Com isto fica claro que

$$\inf_{x \in H_n} x'(x) \leq 1 \leq \sup_{x \in H_n} x'(x)$$

Queremos agora tomar $y_n \in H_n$ tal que $x'(y_n) = 1$. Se ambas as desigualdades acima forem estritas, então y_n existe pela convexidade de H_n; senão, usamos a hipótese. De qualquer maneira, tal y_n existe.

Seja, para cada $n \geq 1$, $x_n = \frac{n+1}{n} y_n$. Denotemos por A a envoltória convexa fechada de $\{x_n : n \geq 1\}$

$$A = \overline{co}\{x_n : n \geq 1\}$$

É claro que $\inf_{u \in A} x'(u) = 1$; assim, tomamos $x \in A$ tal que $x'(x) = 1$ (já que A é convexo fechado e limitado).

Seja $\{u_i\}_{i \in I}$ uma sequência generalizada de pontos de A que converge para x. Para cada $i \in I$ escrevemos

$$u_i = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{(i)} x_n,$$

onde $\lambda_n^{(i)} = 0$ para n maior que um certo n_i, $0 \leq \lambda_n^{(i)} \leq 1$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{(i)} = 1$.

Afirmamos que para todo n temos

$$\lim_{i \in I} \lambda_n^{(i)} = 0$$

Se assim não fosse, para algum m poderíamos tomar uma sub sequência generalizada $\{\lambda_m^{(i_j)}\}_{j \in J}$ tal que

$$\lim_{j \in J} \lambda_m^{(i_j)} = a > 0$$

Assim teríamos

$$x'(u_{i_j}) = x'\left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{(i_j)} x_n\right) = x'\left(\sum_{n \neq m} \lambda_n^{(i_j)} x_n\right) + x'(\lambda_m^{(i_j)} x_m) \geq$$

$$\geq \sum_{n \neq m} \lambda_n^{(i_j)} + \lambda_m^{(i_j)} \frac{m+1}{m},$$

pois $x'(x_n) = x'(\frac{n+1}{n} y_n) = \frac{n+1}{n} x'(y_n) = \frac{n+1}{n} > 1$.

Prosseguindo, vem

$$x'(u_{i_j}) \geq 1 - \lambda_m^{(i_j)} + \lambda_m^{(i_j)} \frac{m+1}{m}$$

Passando j ao limite obteríamos

$$x'(x) \geq 1 - a + a \frac{m+1}{m},$$

que é um absurdo.

Denotando por A_m a envoltória convexa fechada de $\{x_n : n \geq m\}$ e procedendo como em (3.7) ou (8.2), podemos mostrar que $x \in A_m$, $\forall m$. Afirmamos que $x \in H_n$ para todo n. Se existisse n_0 tal que $x \notin H_{n_0}$, tomaríamos um funcional linear contínuo y' e $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$y'(x) \leq \alpha, \; \forall x \in H_{n_0}$$

$$y'(x) \geq \alpha + \varepsilon \text{ (para algum } \varepsilon > 0)$$

Seja $m > n_0$ tal que $\frac{|\alpha|}{m} < \frac{\varepsilon}{2}$.

Para $n \geq m$ teríamos

$$y'(x_n) = y'(\frac{n+1}{n} y_n) = \frac{n+1}{n} y'(y_n) \leq (\frac{n+1}{n})\alpha \leq \alpha + \frac{|\alpha|}{n},$$

pois $y_n \in H_{n_0}$. Ainda como $\frac{|\alpha|}{n} \leq \frac{|\alpha|}{m} < \frac{\varepsilon}{2}$,

$$y'(x_n) \leq \alpha + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Desde que $x \in A_m = \overline{co}\,\{x_n : n \geq m\}$ viria

$$y'(x) \leq \alpha + \frac{\varepsilon}{2} < \alpha + \varepsilon$$

contradizendo $y'(x) \geq \alpha + \varepsilon$

Mostramos com isto que $x \in \bigcap_{n \geq 1} H_n$, donde $\bigcap_{n \geq 1} H_n \neq \emptyset$.

O teorema de Elberlein, na sua versão para espaços localmente convexos [12,pãg. 187], permite-nos então enunciar.

8.6 Teorema. Seja X um espaço localmente convexo quasi-completo. Suponhamos que todo funcional linear contínuo atinge o ínfimo em todo convexo fechado limitado de X. Então X ẽ semi-reflexivo.

Gostaríamos de ressaltar aqui uma certa diferença entre espaços normados e localmente convexos, sob o ponto de vista que temos abordado.

Em primeiro lugar, observamos que a propriedade "todo funcional linear contínuo atinge o ínfimo em todo convexo fechado limitado" em um espaço normado implica completeza (cf(7.2)), mas, como vimos em (7.3), o mesmo não se dá em espaços localmente convexos.

O mãximo que se pode garantir ẽ que, se X ẽ um espaço lo calmente convexo que satisfaz tal hipótese, então X é sequencialmente completo; de fato, se $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em X, então, por (8.5) temos que

$$\bigcap_{m\in\mathbb{N}} \overline{co}\,\{x_n : n \geq m\} \neq \emptyset ,$$

já que toda sequência de Cauchy é limitada.

Assim, é claro que, se $x \in \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \overline{co}\,\{x_n : n \geq m\}$, então x é o limite de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Podemos, portanto, dizer que

8.7 Teorema. Se X é um espaço localmente convexo metrizável e todo funcional linear contínuo atinge o ínfimo em todo convexo fechado limitado de X, então X é reflexivo.

Demonstração. Pela observação feita há pouco, X é sequencialmente completo e, sendo metrizável, é também quasi-completo ; por (8.5) segue que X é semi-reflexivo.

Sabemos que espaços de Frechet são tonelados e que espaços semi-reflexivos e tonelados são reflexivos, assim X é reflexivo.

Se estamos interessados em minimizar funções ou encontrar aproximações ótimas, então gostaríamos que a classe dos espaços onde tais problemas tem sempre solução fosse a maior possível.

Infelizmente, os resultados que obtivemos aqui mostram que esta classe é apenas formada por espaços reflexivos ou semi-reflexivos. Como vimos nos exemplos, muitas vezes surgem, na prática problemas de minimização em espaços não reflexivos. Estes casos são, como foram, tratados à parte da teoria que desenvolvemos aqui. Apesar disto, muitas vezes obtemos respostas afirmativas e, com isto, consequências importantes.

APÊNDICE

O TEOREMA DE HELLY

O teorema que exibimos aqui, devido a E. Helly é a mais importante ferramenta que usamos na demonstração de (8.2). Poucos são os textos em análise funcional que trazem este resultado e, quando o fazem, fornecem apenas a prova para espaços de Banach. Na verdade, quando usamos o teorema de Helly em (8.2), já sabíamos que o espaço lá considerado era completo (veja (7.1))e assim, isto seria suficiente.

Apesar disto, insistimos em dar a demonstração de Kakutani [11] para espaços normados quaisquer, primeiro pela sua elegância e em segundo lugar porque temos nos preocupado um tanto com as diferenças entre espaços completos e não completos.

<u>Teorema</u> (E. Helly). Seja X um espaço <u>normado</u>, $x_1', \ldots, x_n'$ uma sequência finita de funcionais lineares contínuos em X e $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$.

Uma condição necessária e suficiente para que exista, para todo $\varepsilon > 0$, um elemento $x \in X$ com $\|x\| \leqq \gamma + \varepsilon$ tal que

$$x_i'(x) = \alpha_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

é que a desigualdade

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_i\right| \leqq \gamma \left\|\sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i'\right\|$$

valha para toda escolha de números $\beta_1, \ldots, \beta_n$.

Demonstração. Suponhamos que exista, para todo $\varepsilon > 0$, um tal x; então, é claro que para $\beta_1,\ldots,\beta_n \in \mathbb{R}$ vale

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \beta_i\alpha_i\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i'(x)\right| = \left|\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i'\right)(x)\right| \leq$$

$$\leq \|x\| \left\|\sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i'\right\| \leq (\gamma+\varepsilon) \left\|\sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i'\right\| .$$

Como ε é qualquer teremos

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \beta_i\alpha_i\right| \leq \gamma \left\|\sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i'\right\| .$$

Provaremos a recíproca. Admitiremos, sem perda de generalidade, que os funcionais tomados são linearmente independentes. Em caso contrário, tomaríamos um subconjunto linearmente independente de $\{x_i' : 1 \leq i \leq n\}$ que gere o mesmo subespaço que o conjunto original.

Consideremos a transformação linear $L: X \to \mathbb{R}^n$ dada por $L(x) = (x_1'(x),\ldots,x_n'(x))$.

Indicando por $B_{\gamma+\varepsilon}(0)$ a bola de centro 0 e raio $\gamma+\varepsilon$ em X, temos que provar que

$$(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in L(B_{\gamma+\varepsilon}(0))$$

Suponhamos que assim não fosse.

Queremos então, tomar um funcional linear que separe $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ de $L(B_{\gamma+\varepsilon}(0))$. É claro que $L(B_{\gamma+\varepsilon}(0))$ é um convexo.

Ocorre, entretanto, que todas as formas do teorema de Hahn-Banach para separação de convexos e pontos em espaços normados exigem propriedades que não podemos garantir aqui (em geral, pede-se que o convexo seja fechado ou que tenha interior não vazio). Para nossa felicidade, temos um teorema de separação de convexos, que só se aplica em dimensão finita, que diz:

Dados dois convexos A e B, disjuntos, em um espaço de dimensão finita, então existe um hiperplano que separa A e B [14, pág.25].

Seja então, w', um funcional linear não nulo em $\mathbb{R}^n$ tal que

$$\sup_{\|x\| \leq \gamma+\varepsilon} w'(L(x)) \leq w'(\alpha_1,\dots,\alpha_n).$$

Tomemos $\beta_1,\dots,\beta_n \in \mathbb{R}$ tal que

$$w'(x_1,\dots,x_n) = \beta_1 x_1+\dots+\beta_n x_n \qquad \forall\ (x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$$

É claro que $w' o L = \beta_1 x_1' + \dots + \beta_n x_n'$ não é nulo, já que estamos assumindo que $\{x_i'\}_{1\leq i\leq n}$ é linearmente independente.

Temos então

$$\sup_{\|x\| \leq \gamma+\varepsilon} w'(L(x)) = (\gamma+\varepsilon)\,\|w' o L\| =$$

$$= (\gamma+\varepsilon)\,\|\beta_1 x_1'+\dots+\beta_n x_n'\| > \gamma\,\|\beta_1 x_1'+\dots+\beta_n x_n'\| \geq \left|\sum_{i=1} \beta_i\alpha_i\right| =$$

$$|w'(\alpha_1,\dots,\alpha_n)| \geq |w'(\alpha_1,\dots,\alpha_n).$$

Da contradição acima concluímos que

$(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in L(B_{\gamma+\varepsilon}(0))$, ou seja, existe $x\in X$ com $\|x\| \leq \gamma+\varepsilon$ tal que

$$(\alpha_1,\dots,\alpha_n) = L(x) = (x_1'(x),\dots,x_n'(x)).$$

BIBLIOGRAFIA

[1] Achieser, N. I., Theory of Approximation, F. Ungar Publishing Co.,(1956).

[2] Blatter, J., Grothendieck Spaces in Approximation Theory, Mem. Amer. Math. Soc. 120, (1972), 98-113.

[3] Blatter, J., Approximation Theory II, Reflexivity and the existence of Best Approximations, Acad. Press, (1976),299-301.

[4] Day, M. M., Normed Linear Spaces, Springer-Verlag, (1973).

[5] Diestel, J., Geometry of Banach Spaces - Selected Topics, Lecture Notes in Mathematics 485, Springer-Verlag, (1975).

[6] James, R. C., Reflexivity and the supremum of linear functionals, Ann. of Math. 66, (1957), 159-169.

[7] James, R. C., Weakly compact sets, Trans. Amer. Math. Soc. 113, (1964), 129-140.

[8] James, R. C., Characterizations of reflexivity, Studia Math. 23, (1964), 205-216.

[9] James, R. C., A counterexample for a sup theorem in normed spaces, Israel J. Math. 9, (1971), 511-512.

[10] James, R. C., Reflexivity and the sup of linear functionals, Israel J. Math. 13, (1972), 289-300.

[11] Kakutani, S., Weak Topology and Regularity of Banach Spaces, Proc. Imp. Acad. Tokyo 15, (1939), 169-173.

[12] Schaefer, H. H., Topological Vector Spaces, Springer-Verlag, (1971).

[13] Shapiro, H. S., Topics in Approximation Theory, Lecture Notes in Mathematics 187, Springer-Verlag, (1971).

[14] Valentine, F. A., Convex Sets, McGraw-Hill, (1976).