

FUNÇÕES DE MORSE:
UM TEOREMA DE CLASSIFICAÇÃO
EM DIMENSÃO 2

Sebastião Antonio Izar

Tese apresentada ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Mário Barone Júnior

Durante a realização deste trabalho, o autor teve apoio financeiro das instituições: CAPES, CNPq e FINEP.

SÃO PAULO

Ao Prof. Alberto Augusto Jr.

INTRODUÇÃO

O objetivo central deste trabalho é obter um teorema de classificação para funções de Morse em dimensão dois. Esta classificação será feita associando-se a uma função de Morse um certo grafo, de tal forma que duas funções de Morse serão equivalentes se, e só se, seus grafos forem isomorfos num sentido a ser definido.

A relação de equivalência aqui mencionada é a conjugação: duas funções de uma variedade M na reta \mathbb{R} conjugam se existem difeomorfismos h e k de M e \mathbb{R} respectivamente tais que

$$k \circ f = g \circ h.$$

Embora o teorema principal só apareça no final do trabalho, sua demonstração, por ser muito elaborada, foi dividida em proposições que estão distribuídas pelos diversos parágrafos.

No capítulo 0 é feita uma exposição de alguns conceitos de topologia diferencial que são utilizados na demonstração do teorema. Esta exposição é dirigida de tal forma que em cada parágrafo aparece uma proposição que é parte integrante da demonstração do teorema central.

A idéia central da demonstração é considerar a variedade como reunião de subvariedades com bordo, cada uma das quais contém um único ponto crítico da função de Morse; a conjugação nessas subvariedades é obtida nos parágrafos 2 e 4 do capítulo 0.

Surge então o problema de colar os difeomorfismos obtidos. Para isto foi estudada a noção de variedade quociente no parágrafo 1 do capítulo 0 e a colagem é obtida com a aplicação deste conceito, que garante que a variedade quociente obtida colando-se essas subvariedades tem a mesma estrutura dife-

renciável que a variedade original e também que os difeomorfismos parciais se estendem a um global conjugando as funções.

No capítulo 1 é construído o grafo que permite obter a classificação. Note-se que o fato de que funções equivalentes têm grafos isomorfos é demonstrado em dimensão n .

Finalmente os conceitos e proposições anteriores são reunidos para se obter o teorema central, em dimensão 2, para funções de Morse estáveis segundo o qual duas funções que têm grafos (de Reeb) isomorfos são equivalentes.

Aparece também um contra-exemplo que mostra que isto é falso para funções não estáveis.

Agradeço ao Prof. Mário Barone Júnior pela sua dedicada e paciente orientação desde o início de meus estudos no IME-USP; aos Profs. Alciléa A.H. de Mello, Francisco C. P. Milies e Plínio A.Q. Simões pelo estímulo constante; ao Grupo de Sistemas Dinâmicos e Topologia Diferencial do IME-USP e aos colegas Cláudio, Jacques, Marcelo e Zara, por tantas coisas...; e à Raquel pelo seu trabalho de datilografia.

S. A. Izar

São Paulo, junho de 1978.

Í N D I C E

CAPÍTULO 0. Noções Fundamentais sobre Funções de Morse

| | |
|--|----|
| 0. Introdução..... | 3 |
| 1. Estruturas Diferenciáveis e Variedades Quociente... | 5 |
| 2. Funções de Morse e Cobordismos..... | 23 |
| 3. Isotopias de S^1 | 47 |
| 4. Cirurgias..... | 53 |
| 5. Grafos..... | 75 |

CAPÍTULO 1. O Teorema de Classificação

| | |
|--|-----|
| 0. Introdução..... | 83 |
| 1. Equivalência de Funções..... | 85 |
| 2. Grafo de Reeb de uma Função de Morse..... | 89 |
| 3. O Teorema de Classificação..... | 105 |

C A P Í T U L O 0

NOÇÕES FUNDAMENTAIS SOBRE

FUNÇÕES DE MORSE

§.0. Introdução

Neste capítulo vamos apresentar alguns conceitos de Topologia Diferencial que serão utilizados nesse trabalho.

Ressaltamos, porém, que não se trata de um capítulo puramente expositivo, já que tais conceitos serão apresentados de maneira dirigida para a demonstração do Teorema de Classificação do Cap. 1, parágrafo 3, de tal forma que em cada parágrafo desse capítulo aparecem uma ou mais proposições que farão parte integrante da demonstração daquele teorema.

§.1. Estruturas Diferenciáveis e
Variedades Quociente

Dividiremos este parágrafo em duas partes: na primeira lembramos algumas definições e resultados sobre Variedades Diferenciáveis que são assumidos como pré-requisitos e na segunda, estudaremos condições para que, dada uma variedade diferenciável sem bordo M e uma relação de equivalência sobre ela, o espaço quociente tenha uma estrutura de variedade que de certa forma, seja "proveniente" da de M .

A - Preliminares

Uma aplicação $f:U \rightarrow V$ com $U \subset \mathbb{R}^m$ e $V \subset \mathbb{R}^n$, U aberto, é dita diferenciável (C^∞) se todas as derivadas parciais $\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}$ existem e são contínuas. Também $f:X \rightarrow Y$, com

X e Y subconjuntos de \mathbb{R}^m e \mathbb{R}^n , respectivamente, é diferenciável se existe uma extensão de f a uma função diferenciável definida sobre um aberto $U \subset \mathbb{R}^m$ que contém X .

Uma aplicação $f:X \rightarrow Y$ é um difeomorfismo se f leva X sobre Y homeomorficamente com f e f^{-1} diferenciáveis. Se existe um difeomorfismo entre X e Y , dizemos que X e Y são difeomorfos e denotamos isto por $X \approx Y$.

Definição 1.0. Uma n -variedade topológica ou uma variedade topológica n -dimensional é um espaço topológico de Hausdorff com base enumerável tal que todo ponto tem uma vizinhança homeomorfa a um aberto de $\mathbb{R}_+^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\}$.

O bordo de uma variedade M , denotado ∂M , é constituído dos pontos de M que admitem vizinhanças homeomorfas a

abertos de \mathbb{R}_+^n mas não de \mathbb{R}^n .

Se $\partial M = \emptyset$, M é dita uma variedade sem bordo. Também, M é uma variedade fechada se M é compacta e $\partial M = \emptyset$.

Definição 1.1. Um atlas diferenciável \mathcal{D} sobre uma n -variedade topológica M é uma coleção de pares (ϕ_i, U_i) , $i \in I$, consistindo de abertos U_i de M e homeomorfismos

$$\phi_i: U_i \rightarrow V_i$$

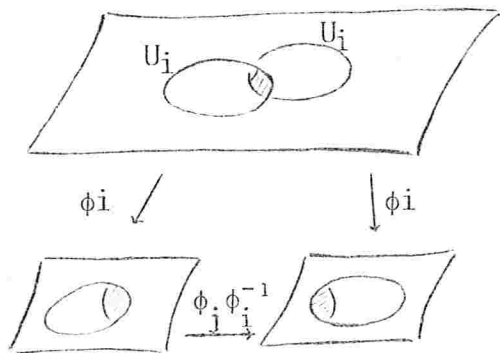
com V_i aberto de \mathbb{R}_+^n , tais que

i) $M = \bigcup_{i \in I} U_i$

ii) $\forall i, j \in I,$

$$\phi_j \phi_i^{-1}: \phi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_j(U_i \cap U_j)$$

é um difeomorfismo.



O par (ϕ_i, U_i) é denominado uma carta ou um sistema de coordenadas para M com domínio U_i .

Dizemos que dois atlas diferenciáveis \mathcal{D} e \mathcal{D}' sobre uma n -variedade topológica M são equivalentes se $\mathcal{D} \cup \mathcal{D}'$ é um atlas diferenciável sobre M . Claramente a relação acima é de equivalência e um atlas diferenciável em M determina um único atlas diferenciável maximal \mathcal{D} , no sentido de que se $\mathcal{D} \cup \mathcal{D}'$ é um atlas, então $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}'$.

Definição 1.2. Uma estrutura diferenciável sobre uma n -variedade topológica M é um atlas diferenciável maximal \mathcal{D} para M e o par (M, \mathcal{D}) é denominado uma variedade diferenciável de dimensão n .

Observações

- i) Segue da definição 1.1. que se M é uma variedade diferenciável de dimensão n com bordo, en-

tão ∂M é uma $(n-1)$ -variedade diferenciável sem bordo.

- ii) Neste trabalho, por M é uma variedade, entendemos que M é uma n -variedade diferenciável com bordo, cujo bordo pode ser vazio.
- iii) \mathbb{R}^n é considerado uma variedade diferenciável com a estrutura diferenciável que contém $\mathcal{D} = \{(1_{\mathbb{R}^n}, \mathbb{R}^n)\}$.

Definição 1.3. Um subconjunto N de uma n -variedade M é uma subvariedade de M se, para algum inteiro n , $0 \leq n \leq m$, todo ponto de N está no domínio de uma carta (ϕ, U) da estrutura de M tal que

$$U \cap N = \phi^{-1}(\mathbb{R}_+^n), \text{ onde } \mathbb{R}_+^n \text{ é identificado com } \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m / x_n \geq 0 \text{ e } x_j = 0 \text{ para } n+1 \leq j \leq m\}.$$

Claramente se N é subvariedade de M , então N é uma variedade diferenciável com uma estrutura diferenciável que é induzida da de M .

Também, se M é variedade com bordo, ∂M é subvariedade de M .

Com as notações da definição 1.3., o número $m-n$ é denominado co-dimensão de N .

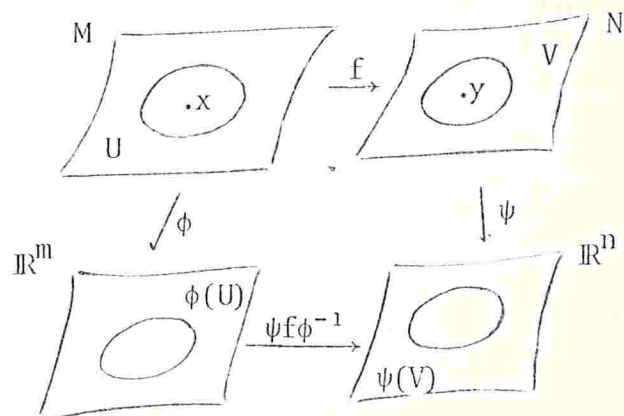
Definição 1.4. Sejam M e N variedades e $f: M \rightarrow N$ uma aplicação contínua.

Um par de cartas (ϕ, U) de M com $x \in M$ e (ψ, V) de N é adaptado a f se $f(U) \subset V$.

Neste caso a aplicação

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1}: \phi(U) \rightarrow \psi(V)$$

é denominada uma representação de f em coordenadas locais no ponto $x \in U$.



Definição 1.5. Com as notações da definição 1.4., $f:M \rightarrow N$ é diferenciável em $x \in M$ se tem uma representação local diferenciável em $x \in M$; $f:M \rightarrow N$ é diferenciável se é diferenciável em todo ponto de M .

Note-se que, se $f:M \rightarrow N$ tem uma representação local diferenciável em $x \in M$, então toda representação local de f em x é diferenciável, pois

$$\psi^1 f \phi^{1-1} = \psi^1 \psi^{-1} (\psi f \phi^{-1}) \phi \phi^{1-1}$$

1.6. Fibrado Tangente de uma Variedade Diferenciável (vide [2],[5],[8],[9]).

Seja M uma variedade diferenciável n -dimensional e $p \in M$. Sobre o conjunto das funções diferenciáveis $f:U \rightarrow \mathbb{R}$ definidas sobre vizinhanças abertas de p em M definimos uma relação que resulta numa equivalência:

$f:U \rightarrow \mathbb{R}$ e $g:V \rightarrow \mathbb{R}$ são equivalentes se existe uma vizinhança aberta $W \subset U \cap V$ de p em M tal que $f|_W = g|_W$. As classes desta relação são denominadas germes de funções sobre M em p e o conjunto desses germes é denotado por G_p .

Sobre G_p as operações definidas por

$$(\bar{f}, \bar{g}) \rightarrow \overline{f + g} \quad \text{e}$$

$$(\bar{f}, \bar{g}) \rightarrow \overline{f \cdot g} \quad \text{são bem definidas e dão a}$$

G_p a estrutura de álgebra real.

Um vetor tangente x a M em p é uma derivação na álgebra G_p , isto é,

$$x:G_p \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{tal que}$$

$$x(\lambda f + \mu g) = \lambda x(f) + \mu x(g) \quad \text{e}$$

$$x(f \cdot g) = x(f) \cdot g(p) + f(p) \cdot x(g) \quad \text{para}$$

$$\lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad f, g \in G_p.$$

Denotamos por $T_p M$ o conjunto das derivações sobre G_p

que resulta um espaço vetorial real n -dimensional. Tomando-se coordenadas (x_1, \dots, x_n) numa vizinhança de p em M dada por (ϕ, U) tal que p corresponde a $(0, 0, \dots, 0)$ todo vetor tangente a M em p pode ser representado, unicamente, sob a forma

$$\sum_{i=1}^n a_i \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p, \quad \text{onde}$$

$$(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \quad e$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p : G_p \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p (f) = \frac{\partial f \phi^{-1}}{\partial x_i}(0),$$

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

Definiremos agora o espaço fibrado tangente a $M:TM$. O conjunto TM consta de todos os pares ordenados (p, u) , onde $p \in M$ e $u \in T_p M$. Existe uma projeção natural $\pi: TM \rightarrow M$ dada por $\pi(p, u) = p$ e, se (ϕ, U) , é uma carta em M , seja $\tilde{U} = \pi^{-1}(U)$ e a aplicação

$$\tilde{\phi}: \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$$

$$\tilde{\phi}(p, v) = (\phi(p); \alpha_1, \dots, \alpha_n) \quad \text{se}$$

$$v = \sum_{i=1}^n \alpha_i \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p. \quad \text{Os sistemas de coordenadas assim obtidos}$$

constituem um atlas diferenciável de dimensão $2n$ e a projeção $\pi: TM \rightarrow M$ resulta diferenciável.

Definição 1.7. Se M e N são variedades e $f: M \rightarrow N$ é diferenciável tem-se um homomorfismo de álgebras

$$f_p^*: G_{f(p)}(N) \rightarrow G_p(M) \quad \text{dado}$$

por $f_p^*(\bar{g}) = \overline{g \circ f}$ que induz uma aplicação linear

$$df_p: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$$

$(df_p(v))(g) = v(f_p^*(g))$, onde $v \in T_p M$ e $g \in G_{f(p)}(N)$. Estas aplicações produzem uma aplicação diferenciável

$df: TM \rightarrow TN$ que torna o diagrama seguinte comutativo:

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{df} & TN \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

df é dita a diferencial de $f: M \rightarrow N$ e df_p é a diferencial de f no ponto $p \in M$.

Definição 1.8. Seja $f: M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável. Dizemos que:

- i) f é uma imersão em $p \in M$ se $df_p: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ é injetiva; f é uma imersão se for imersão em todo ponto $p \in M$.
- ii) f é um mergulho se é imersão e $f(M)$ é subvariedade de N .
- iii) f é uma submersão em $p \in M$ se df_p é sobrejetiva. f é submersão se é submersão em todo ponto $p \in M$.

Definição 1.9. Um ponto $p \in M$ é regular para $f: M \rightarrow N$ se df_p é sobrejetiva ou injetiva; p é ponto crítico caso contrário.

Um ponto $q \in N$ se diz um valor regular de f se todo ponto de $f^{-1}(q)$ é regular; um valor crítico, caso contrário.

Teorema 1.10. (Teorema da Função Inversa)

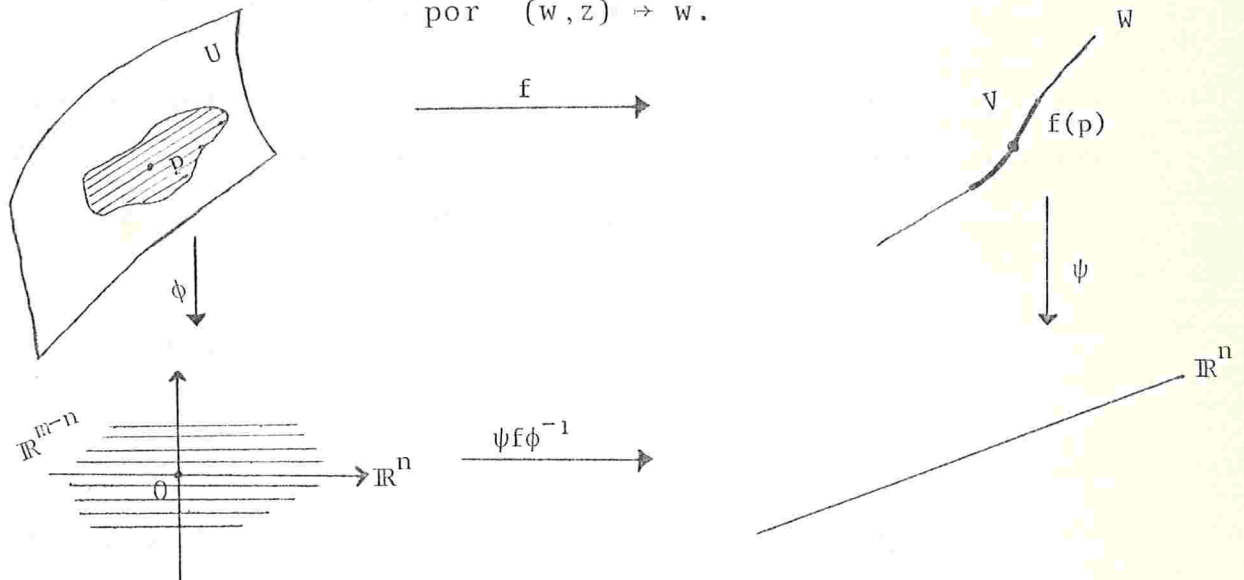
Seja $f: M \rightarrow N$ diferenciável e $p \in M$ com $df_p: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ um isomorfismo. Então f é um difeomorfismo de uma vizinhança de p em uma vizinhança de $f(p)$.

Como consequência do teorema 1.10. tem-se o seguinte

corolário 1.11. Se $f: M \rightarrow N$ é submersão em $p \in M$, existem cartas (ϕ, U) e (ψ, V) para $p \in M$ e $f(p) \in N$ com $f(U) \subset V$ e $\phi: U \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$ (onde $m = \dim M$ e $n = \dim N$) é um mergulho com $\phi(U) = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$, tais que

o $\psi \circ f \circ \phi^{-1}: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é dada

por $(w, z) \mapsto w$.



Como consequência tem-se o

corolário 1.12. Se q é um valor regular da aplicação diferenciável $f: M \rightarrow N$, então $f^{-1}(q)$ é subvariedade de M de codimensão igual à dimensão de N .

Teorema 1.13. Se $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ são valores regulares de f e $\partial M \cap f^{-1}([a, b]) = \emptyset$, então $f^{-1}[a, b]$ é subvariedade com bordo de M , cujo bordo é $f^{-1}(a) \cup f^{-1}(b)$.

Admitiremos ainda o seguinte resultado, cuja demonstração pode ser vista em ([3], pág. 75) ou ([11], pág. 55):

Teorema 1.14. Uma 1-variedade diferenciável compacta e conexa é difeomorfa a S^1 ou ao intervalo $[a,b]$ da reta real.

Para concluir, duas definições e um teorema relativos a campos de vetores:

Definição 1.15. Seja M uma variedade diferenciável. Um campo de vetores sobre M é uma secção diferenciável do fibrado tangente, isto é, uma aplicação diferenciável

$$\xi: M \rightarrow TM \quad \text{com} \quad \xi(p) \in T_p M, \quad \forall p \in M.$$

Definição 1.16. Um grupo a um parâmetro de difeomorfismos de uma variedade diferenciável M é uma aplicação diferenciável

$$\phi: \mathbb{R} \times M \rightarrow M \quad \text{tal que:}$$

- i) $\forall t \in \mathbb{R}, \phi_t: M \rightarrow M$ definida por
 $\phi_t(q) = \phi(t, q)$ é um difeomorfismo, e
- ii) $\forall s, t \in \mathbb{R},$ tem-se
 $\phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s$

Dado um grupo a um parâmetro ϕ de difeomorfismos de M , definimos um campo de vetores ξ sobre M como segue:

se $q \in M$ e $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função a valores reais, ξ_q é a derivação de $T_q M$ dada por

$$\xi_q(f) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\phi_h(q)) - f(q)}{h} \quad (I)$$

Teorema 1.17. Dado um campo de vetores ξ sobre uma variedade compacta M , existe um único grupo a um parâmetro de difeomorfismos de M tal que vale (I).

Demonstração: Vide ([13], pág. 10).

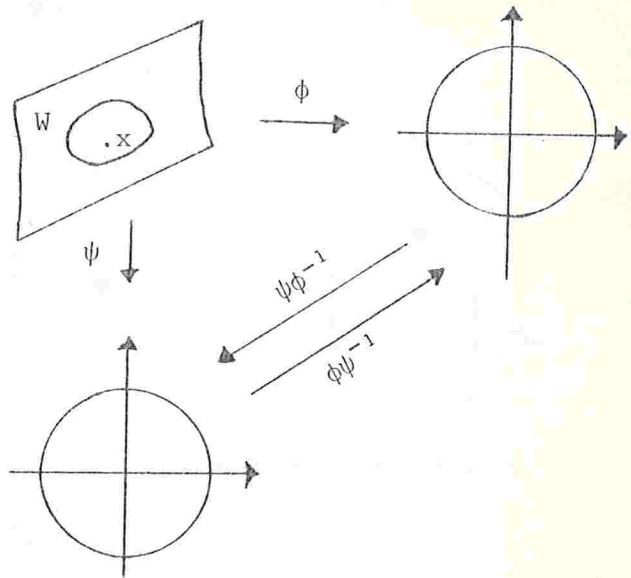
Nota: O campo de vetores ξ sobre M é dito gerador do grupo ϕ .

B - Variedades Quociente

Tendo em vista a definição 1.2. é evidente que duas estruturas diferenciáveis numa variedade M coincidem se, e so mente se a aplicação identidade $1_M: M \rightarrow M$ é um difeomorfismo. Além disso a proposição seguinte é bastante útil.

Proposição 1.18. Duas estruturas diferenciáveis numa variedade M coincidem se, e somente se toda função diferenciável numa é também na outra.

Demonstração: Seja $x \in M$ e $(\phi, U), (\psi, V)$ cartas para x em (M, S) e (M, S') , respectivamente, onde S e S' são duas estruturas sobre M com as mesmas funções diferenciáveis. Se $W = U \cap V$, tem-se que $(\phi|_W, W)$ e $(\psi|_W, W)$ são cartas para $x \in M$ em S e S' , respectivamente. Ora, $\phi: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ é diferenciável em S , logo em S' e $\psi: W \rightarrow \mathbb{R}^n$ é diferenciável em S' , logo em S . Assim $\phi\psi^{-1}, \psi\phi^{-1}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ são diferenciáveis e a carta $(\phi, W) \in S'$ pois é compatível com as demais cartas de S' . Segue-se que $S = S'$.



A recíproca é automática.

Q.E.D.

A definição e os resultados que se seguem encontram-se em ([1], pág. 51).

Definição 1.19. Seja R uma relação de equivalência sobre uma variedade sem bordo M . Diz-se que R é regular se existe sobre o quociente M/R uma estrutura de variedade tal que a projeção

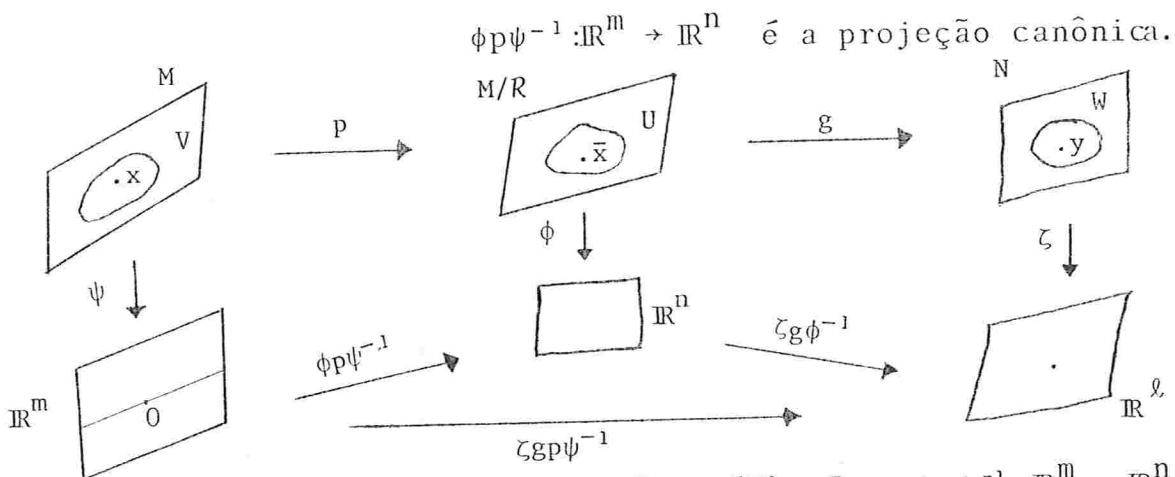
$p: M \rightarrow M/R$ seja uma submersão.

Proposição 1.20. Para que uma aplicação $g:M/R \rightarrow N$, onde M e N são variedades e R é regular sobre M (M sem bordo), seja diferenciável é necessário e suficiente que $g \circ p:M \rightarrow N$ seja diferenciável.

Demonstração: Com efeito, se $g:M/R \rightarrow N$ é diferenciável, então $g \circ p:M \rightarrow N$ o é, pois é composta de aplicações diferenciáveis.

Reciprocamente, $p:M \rightarrow M/R$ submersão e $g \circ p:M \rightarrow N$ diferenciável, seja $x \in M$ e $y = g \circ p(x)$.

Se (ζ, W) é uma carta para y em N , seja $V_1 = (g \circ f)^{-1}(W)$. Do fato de p ser submersão, existem cartas (ψ, V_2) e $(\phi, p(V_2))$ para $x \in M$ e $p(x) = \bar{x} \in M/R$ tais que



Sejam $V = V_1 \cap V_2$ e $U = p(V)$. Como $\phi p \psi^{-1} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é a projeção canônica, segue-se que

$$\phi p \psi^{-1} |_{\mathbb{R}^n \times 0} : \mathbb{R}^n \times 0 \rightarrow \mathbb{R}^n$$

é um difeomorfismo. Também

$$\zeta g p \psi^{-1} = (\zeta g \phi^{-1}) (\phi p \psi^{-1}) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$$

sendo diferenciável, vem

$$[(\zeta g \phi^{-1}) (\phi p \psi^{-1})] |_{\mathbb{R}^n \times 0} : \mathbb{R}^n \times 0 \rightarrow \mathbb{R}^l \text{ é}$$

diferenciável. Assim, tem-se

$$[(\zeta g \phi^{-1}) (\phi p \psi^{-1})] |_{\mathbb{R}^n \times 0} = (\zeta g \phi^{-1}) \circ (\phi p \psi^{-1}) |_{\mathbb{R}^n \times 0}$$

diferenciável com $(\phi\psi^{-1})|_{\mathbb{R}^n \times 0}$ difeomorfismo. Logo $\zeta g\phi^{-1}$ é diferenciável, donde g é diferenciável.

Q.E.D.

Proposição 1.21. Se M é variedade diferenciável sem bordo e R é uma relação de equivalência regular sobre M , existe uma única estrutura diferenciável sobre M/R tal que

$$p: M \rightarrow M/R$$

é submersão.

Demonstração Sejam S e S' duas estruturas diferenciáveis sobre M/R tais que $p: M \rightarrow M/R$ seja submersiva. Se $g: M/R \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável em $(M/R, S)$,

$$\begin{array}{ccc} & \nearrow & \\ M & & (M/R, S) \xrightarrow{g} \mathbb{R} \\ & \searrow & \\ & & (M/R, S') \xrightarrow{g} \mathbb{R} \end{array}$$

tem-se $g \circ p: M \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável, donde g é diferenciável em $(M/R, S')$ pela proposição 1.20. Assim, $(M/R, S)$ e $(M/R, S')$ tem as mesmas funções diferenciáveis e, pela proposição 1.18., coincidem.

Q.E.D.

Teorema 1.22. Sejam M uma variedade diferenciável sem bordo, R uma relação de equivalência sobre M e $C \subset M \times M$ o gráfico de R . Para que R seja regular é necessário e suficiente que as seguintes condições sejam satisfeitas:

- i) C é subvariedade de $M \times M$;
- ii) C é fechado em $M \times M$; e
- iii) a aplicação $pr_1: C \rightarrow M$ ($pr_1(x, y) = x$) é uma submersão.

Demonstração

a) necessidade

Se R é regular, vem que existe uma estrutura de variedade sobre M/R tal que $p:M \rightarrow M/R$ é submersão. Automaticamente (Topologia Geral) vale ii), pois sendo M/R variedade, é um espaço de Hausdorff e, por conseguinte, o gráfico de R é fechado em $M \times M$.

Seja $(a,b) \in C$. Pela forma local das submersões, existem cartas (ϕ, V_a) , (ψ, V_b) para M em a e b e (ϕ', V) , (ψ', V) para $\bar{a} = \bar{b}$ em M/R tais que

$$\psi^1 p \psi^{-1} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ e}$$

$$\phi^1 p \phi^{-1} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ são as projeções canônicas.}$$

Se $V'_b = \psi^{-1}(\mathbb{R}^n \times 0)$, tem-se

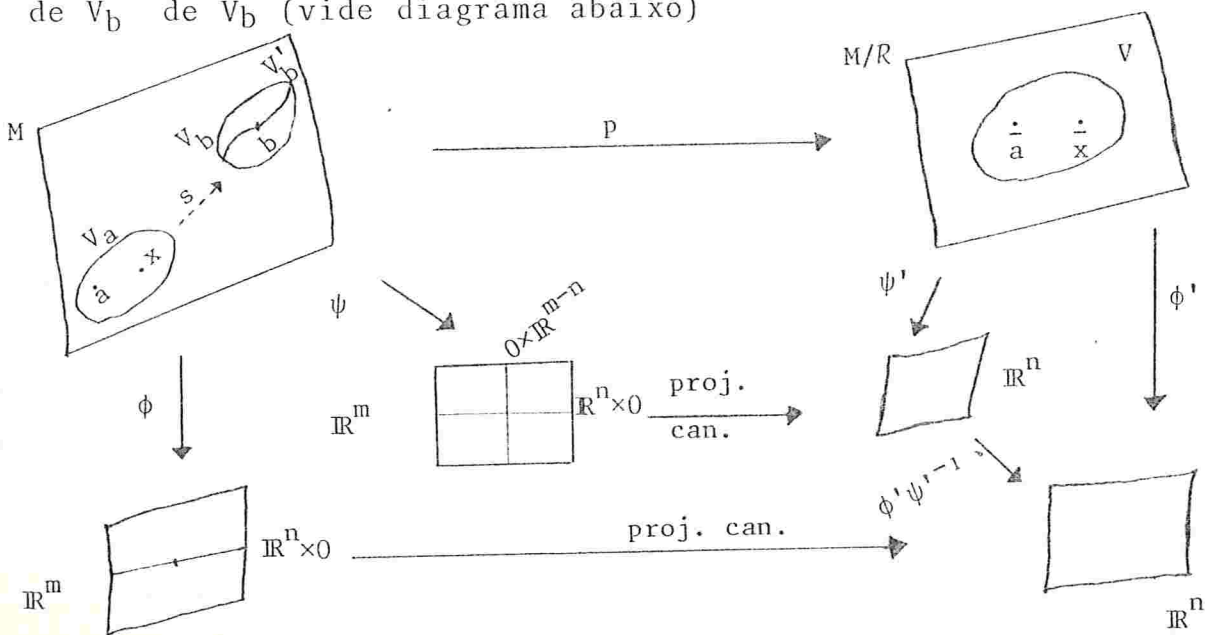
$$p|_{V'_b} : V'_b \rightarrow V \text{ é um}$$

difeomorfismo, donde a aplicação

$$s : V_a \rightarrow V'_b$$

$$s(x) = (p|_{V'_b})^{-1}(p(x)) \text{ é}$$

bem definida, diferenciável e aplica V_a sobre uma subvariedade de V'_b de V_b (vide diagrama abaixo)



Relativamente a $s:V_a \rightarrow V_b$ temos o seguinte:

$$\begin{aligned} s(a) = b \text{ e } p(s(x)) &= p\left(p^{-1}_{V_b'}(p(x))\right) = \\ &= \left(p \circ p^{-1}_{V_b'}\right)(p(x)) = p(x), \text{ donde } xRs(x), \forall x \in V_a. \end{aligned}$$

Por outro lado $x, y \in V_a$ e $xRy \Leftrightarrow s(x) = s(y)$ e, se $s(x) \neq s(y)$, então $s(x) \not R s(y)$. Com efeito, $x, y \in V_a$ e $xRy \Rightarrow p(x) = p(y) \Rightarrow p^{-1}_{V_b'}(\bar{x}) = p^{-1}_{V_b'}(\bar{y}) \Rightarrow s(x) = s(y)$ e, reciprocamente, $s(x) = s(y)$, então $x, y \in V_a$ e $p(s(x)) = p(s(y))$, donde $p p^{-1}_{V_b'}(\bar{x}) = p p^{-1}_{V_b'}(\bar{y})$ e $\bar{x} = \bar{y}$ e xRy . Claramente $s(x) \neq s(y)$, então $p(s(x)) \neq p(s(y))$ pois $p^{-1}_{V_b'}$ é difeomorfismo, donde $s(x) \not R s(y)$.

Para demonstrar i), é suficiente se provar que $V_a \times V_b \cap C$ é uma subvariedade de $V_a \times V_b$. Denotaremos por V_b'' a subvariedade $\psi^{-1}(0 \times \mathbb{R}^{m-n})$ de V_b e identificamos V_b com $V_b' \times V_b''$. Nestas condições, dado $y \in V_b$, escrevemos $y = (y', y'')$, com $y' \in V_b'$ e $y'' \in V_b''$.

Isto posto, se $(x, y) \in (V_a \times V_b) \cap C$, temos yRx e como $xRs(x)$, vem $yRs(x)$ e, por conseguinte, $y' = s(x)$ e $y \in s(x) \times V_b''$, isto é, em termos de coordenadas, $s(x) = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$ e $y = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$. Assim identificamos y com $(s(x), y'')$. Além disso, se $y = (s(x), y'')$, então xRy e $(x, y) \in V_a \times V_b \cap C$. Também se $(x, (s(z), y'')) \in V_a \times V_b \cap C$, vem $xR(s(z), y'')$ e como $xR(s(x), y'')$, segue-se que $(s(z), y'')R(s(x), y'')$ e, portanto $s(x) = s(z)$, donde

$$(x, (s(z), y'')) = (x, (s(x), y'')).$$

Em vista disso temos:

$$V_a \times V_b \cap C = \{(x, (s(x), y'')) \mid x \in V_a \text{ e } y'' \in V_b''\}.$$

Por outro lado, como $s: V_a \rightarrow V_b'$ é diferenciável, segue-se que $\text{graf}(s)$ é subvariedade de $V_a \times V_b'$ e daí, $\text{graf}(s) \times V_b''$ é subvariedade de $(V_a \times V_b') \times V_b'' \approx V_a \times V_b$.

A aplicação

$$\theta: \text{graf}(s) \times V_b'' \rightarrow V_a \times V_b$$

$$((x, s(x)), y) \rightarrow (x, (s(x), y))$$

é um difeomorfismo de $\text{graf}(s) \times V_b''$ em $V_a \times V_b \cap C$, cujo inverso é dado por

$$\theta^{-1}: V_a \times V_b \cap C \rightarrow \text{graf}(s) \times V_b''$$

$$(x, (s(x), y)) \rightarrow ((x, s(x)), y).$$

Logo $V_a \times V_b \cap C$ é subvariedade de $V_a \times V_b$ e também

$\text{pr}_1: C \rightarrow M$ é submersão:

é composta de submersões.

$$\begin{array}{ccc} \text{graf}(s) \times V_b'' & \xrightarrow{\theta} & V_a \times V_b \cap C \\ \text{pr}_1 \downarrow & & \downarrow \text{pr}_1 \\ \text{graf}(s) & \xrightarrow{\pi} & V_a \end{array}$$

b) suficiência

Suponhamos que são válidas as condições i), ii) e iii).

Em primeiro lugar, mostraremos que $p: M \rightarrow M/R$ é uma aplicação aberta. Com efeito, se U é aberto em M e $x \in p^{-1}(p(U))$, existe $y \in U$, com $(x, y) \in C$ e do fato de

$pr_1: C \rightarrow M$ ser submersão com C subvariedade de $M \times M$, existem vizinhanças V_x e V_y de x e y em M , tais que

$$pr_1: V_x \times V_y \cap C \rightarrow V_x$$

é submersiva. Reduzindo V_x , se necessário, podemos supor que $V_y \subset U$.

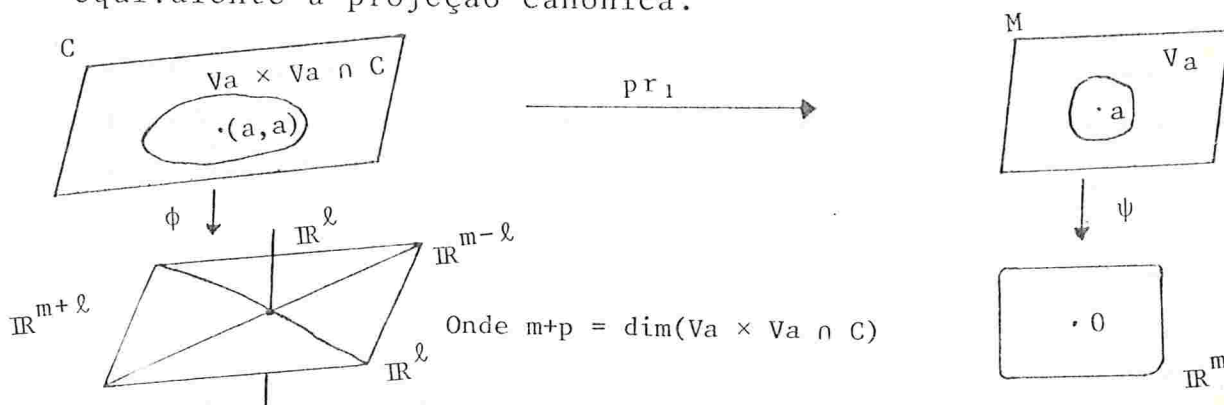
Assim $V_x \subset p^{-1}(p(U))$, pois dado $z \in V_x$, existe $w \in V_y$ com $(z, w) \in V_x \times V_y \cap C$, donde zRw e como $w \in U$, vem $z \in p^{-1}(p(U))$.

Logo p é aberta, pois o saturado de todo aberto de M é, ainda, aberto em M .

Sendo $pr_1: C \rightarrow M$ submersão e C subvariedade de $M \times M$, dado $a \in M$, $(a, a) \in C$ (R é reflexiva) e existe vizinhança V_a de a em M com

$$pr_1: V_a \times V_a \cap C \rightarrow V_a$$

equivalente a projeção canônica.



A classe de $a \in M$ em V_a é $\bar{a} \cap V_a = \{x \in V_a | xRa\}$ e, em termos do gráfico R , pode ser dada por

$$pr_1\{(x, y) \in V_a \times V_a | xRa \text{ e } yRa\}.$$

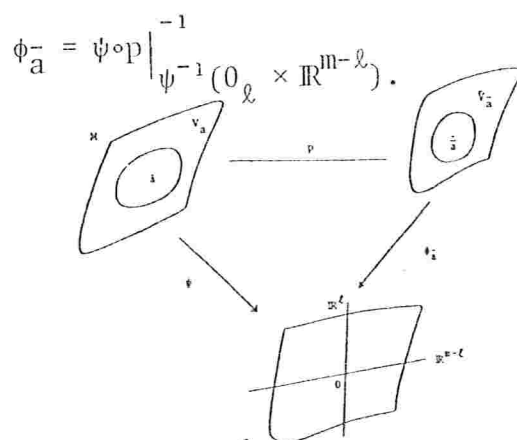
Em vista disto,

$pr_1(\phi^{-1}(0_m \times \mathbb{R}^l)) \subset \bar{a} \cap V_a$ e como R é simétrica e transitiva, segue-se $pr_1(\phi^{-1}(\mathbb{R}^l \times 0_{m-l} \times \mathbb{R}^l)) = \bar{a} \cap V_a$.

O mesmo pode ser dito para cada $x \in V_a$, pois $(x, x) \in V_a \times V_a \cap C$.
 Segue-se disso que, se $x \in V_a$ e $\psi(x) = (x_1, \dots, x_\ell, y_1, y_2, \dots, y_{m-\ell})$,
 $\bar{x} \cap V_a = \{z \in V_a \mid \psi(z) = (z_1, \dots, z_\ell, y_1, \dots, y_{m-\ell})\}$, donde $\psi^{-1}(0_\ell \times \mathbb{R}^{m-\ell})$
 é um sistema de representantes para R em V_a .

Definimos uma carta $(\phi_{\bar{a}}, \bar{V}_{\bar{a}})$ em $\bar{a} \in M/R$ por $\bar{V}_{\bar{a}} = p(V_a)$

$$\text{e } \phi_{\bar{a}}: \bar{V}_{\bar{a}} \rightarrow \mathbb{R}^{m-\ell}$$



$\phi_{\bar{a}}$ é um homeomorfismo de $\bar{V}_{\bar{a}}$ em $\mathbb{R}^{m-\ell}$ e, claramente, se $(\phi, \bar{V}_{\bar{a}})$
 é outra carta em $\bar{a} \in M/R$ construída dessa forma, a mudança
 é um difeomorfismo de $\mathbb{R}^{m-\ell}$. Além disso, $p: M \rightarrow M/R$ é uma sub-
 mersão pela própria construção da estrutura de M/R que é da-
 da pelo atlas obtido acima.

Q.E.D.

Proposição 1.23. Sejam M e M' duas variedades, R e R' rela-
 ções de equivalência regulares sobre M e M' e $f: M \rightarrow M'$ dife-
 renciável, compatível com R e R' , isto é, $xRy \Rightarrow f(x)R'f(y)$.

A aplicação $\bar{f}: M/R \rightarrow M'/R'$ deduzida de f por passa-
 gem ao quociente é, então, diferenciável. Além disso, f di-
 feomorfismo implica \bar{f} difeomorfismo.

Demonstração

Com efeito, tem-se o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & M' \\ p \downarrow & & \downarrow p' \\ M/R & \xrightarrow{\bar{f}} & M'/R' \end{array} \text{ , isto é, } p' \circ f = \bar{f} \circ p.$$

Assim, $\bar{f} \circ p: M \rightarrow M'/R'$ é diferenciável e pela proposição 1.20. $\bar{f}: M/R \rightarrow M'/R'$ é diferenciável.

Evidentemente f difeomorfismo implica \bar{f} homeomorfismo diferenciável e considerando-se o diagrama

$$\begin{array}{ccc} M' & \xrightarrow{f^{-1}} & M \\ p' \downarrow & & \downarrow p \\ M'/R' & \xrightarrow{\bar{f}^{-1}} & M/R \end{array}$$

com o argumento anterior, vê-se que \bar{f}^{-1} é diferenciável.

Q.E.D.

§.2. Funções de Morse e Cobordismos

Um ponto crítico de uma função $F:U \rightarrow \mathbb{R}$, U aberto de \mathbb{R}^n é um ponto tal que $\frac{\partial f}{\partial x_1}(p) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(p) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) = 0$.

Pela regra da cadeia, sabe-se que se $\psi:V \rightarrow U$ é um difeomorfismo entre abertos de \mathbb{R}^n , então $f \circ \psi$ tem um ponto crítico em $\psi^{-1}(p)$ se, e somente se, p é ponto crítico de f . Assim, se $f:M \rightarrow \mathbb{R}$, onde M é uma variedade, tem um ponto crítico em $p \in M$ se p é ponto crítico de f em algum representante de f em coordenadas locais.

Definição 2.0. Seja $f:U \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável, U aberto de \mathbb{R}^n e $p \in U$ um ponto crítico de f . Dizemos que p é não degenerado se a matriz Hessiana

$$H(f)_p = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) \right)_{n \times n}$$

é não singular, isto é, $\det H \neq 0$.

Lema 2.1. Se 0 é um ponto crítico não degenerado para $f:\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $\psi:\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um difeomorfismo com $\psi(0) = 0$; então $f \circ \psi$ tem um ponto crítico não degenerado em 0 .

Demonstração Com efeito, se $f' = f \circ \psi$, pela regra da cadeia,

temos $\frac{\partial f'}{\partial x_i}(p) = \sum_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(\psi(p)) \cdot \frac{\partial \psi_k}{\partial x_i}(p)$, donde

$\frac{\partial f'}{\partial x_i}(0) = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$. Nova aplicação da regra da cadeia

$$\begin{aligned} \text{em } \frac{\partial f'}{\partial x_i} \text{ produz } \frac{\partial^2 f'}{\partial x_i \partial x_j}(0) &= \sum_k \sum_\ell \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_\ell}(0) \frac{\partial \psi_k}{\partial x_i}(0) \frac{\partial \psi_\ell}{\partial x_j}(0) + \\ &+ \sum_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(0) \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial x_i \partial x_j}(0) = \sum_k \sum_\ell \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_\ell}(0) \frac{\partial \psi_k}{\partial x_j}(0) \frac{\partial \psi_\ell}{\partial x_j}(0) \quad \text{e} \end{aligned}$$

$$H(f \circ \psi)_0 = \left(\frac{\partial^2 f'}{\partial x_i \partial x_j}(0) \right)_{n \times n} = {}^t J(\psi)_0 \cdot H(f)_0 \cdot J(\psi)_0, \text{ onde } J(\psi)_0$$

é a matriz jacobiana de ψ no ponto 0 e t indica a transposição de matrizes. Logo $\det H(f\psi)_0 \neq 0$ se $\det H(f)_0 \neq 0$.

Q.E.D.

Tendo em vista o lema 2.1., podemos definir ponto crítico não degenerado em variedades:

Definição 2.2. Um ponto crítico de $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, onde M é uma variedade é não degenerado se é não degenerado para alguma (e portanto para toda, pelo lema 2.1.) representação de f em coordenadas locais.

Definição 2.3. i) Uma função de Morse sobre uma variedade M é função diferenciável $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ cujos pontos críticos são interiores e não degenerados.

ii) Uma função de Morse $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ é estável se é injetiva quando restrita ao conjunto de seus pontos críticos.

Lema 2.4. (Lema de Morse). Se $p \in M$ é um ponto crítico não degenerado para $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, existe um sistema de coordenadas (ϕ, U) em p tal que

$$f\phi^{-1}(x_1, \dots, x_n) = f(p) - \sum_{i=1}^{\lambda} x_i^2 + \sum_{i=\lambda+1}^n x_i^2$$

para algum λ , $0 \leq \lambda \leq n$.

Demonstração Com efeito, seja (ψ, U') uma carta para p em M com $\psi(p) = 0$ e $\psi(U')$ um aberto convexo (ou, simplesmente, es trelado com relação à origem) em \mathbb{R}^n .

Tem-se que

$$g = f\psi^{-1}: \psi(U') \rightarrow \mathbb{R}$$

tem um ponto crítico não degenerado em 0 , e como tal, $\det H(g)_0 \neq 0$.

Como toda matriz real e simétrica é diagonalizável, por uma mudança de coordenadas (linear), podemos supor que $H(g)_0$ é uma matriz diagonal:

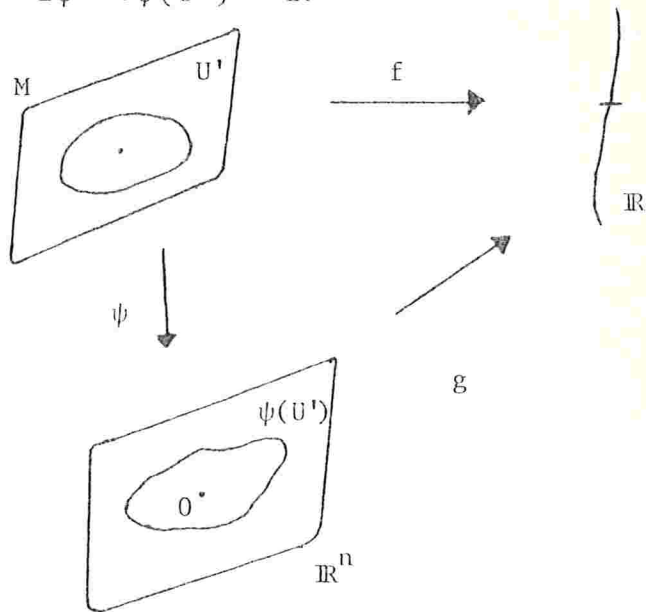
$$H(g)_x = (g_{ij}(x))_{n \times n} \quad \text{com}$$

$$H(g)_0 = \begin{pmatrix} g_{11}(0) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & g_{nn}(0) \end{pmatrix} \quad \text{onde}$$

$$g_{ii}(0) = \begin{cases} -1 & \text{se } i \leq \lambda \\ 1 & \text{se } i > \lambda \end{cases} \quad \text{para algum } 0 \leq \lambda \leq n.$$

Através da fórmula de Taylor com resto integral, podemos escrever

$$g(x) - g(0) = \int_0^1 (1-t) g^{(2)}(tx) \cdot x^2 dt =$$



$$\begin{aligned}
 &= \int_0^1 (1-t) \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} (tx) x_i x_j dt = \\
 &= \sum_{i,j=1}^n x_i x_j \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} (tx) dt
 \end{aligned}$$

Portanto $g(x) = g(0) + \sum_{i,j=1}^n f_{ij}(x) x_i x_j$, onde

$$f_{ij}(x) = \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} (tx) dt.$$

Seja $A(x) = (f_{ij}(x))_{n \times n}$. Temos

$$A(0) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} g_{11}(0) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & g_{nn}(0) \end{pmatrix}$$

Por continuidade de f_{ij} e da função determinante, existe uma vizinhança $V \subset \psi(U')$ de 0, na qual

$$\partial_1(x) = f_{11}(x), \quad \partial_2(x) = \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) \end{vmatrix}, \dots,$$

$$\partial_{n-1}(x) = \begin{vmatrix} f_{11}(x) \dots f_{1,n-1}(x) \\ \vdots \\ f_{n-1,1}(x) \dots f_{n-1,n-1}(x) \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad \partial_n(x) = \det A(x)$$

tem o mesmo sinal de $\partial_i(0)$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Isto posto, seja

$$\Lambda_x: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

a forma bilinear associada à matriz $\Lambda(x)$ relativamente à base canônica do $\mathbb{R}^n: \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$. Como toda forma bilinear simétrica real é diagonalizável, vamos diagonalizar Λ_x , para cada x , utilizando o processo de Jacobi que é descrito em (15, pág. 127). Para isso, seja a base de \mathbb{R}^n dada por:

$$\begin{aligned} e_1^{(x)} &= b_1 \\ e_2^{(x)} &= h_{11}(x)b_1 + b_2 \\ &\vdots \\ e_{k+1}^{(x)} &= \sum_{i=1}^k h_{ik}(x)b_i + b_{k+1} \\ &\vdots \\ e_n^{(x)} &= \sum_{i=1}^{n-1} h_{i,n-1}(x)b_i + b_n, \end{aligned}$$

onde as funções $h_{ij}: V \rightarrow \mathbb{R}$ são determinadas com a condição $\Lambda_x(e_{k+1}^{(x)}, b_i) = 0$ para $1 \leq i \leq k$. Com efeito, o sistema

$$\begin{cases} \Lambda_x(e_{k+1}^{(x)}, b_1) = \sum_{i=1}^k h_{ik}(x)\Lambda_x(b_i, b_1) + \Lambda_x(b_{k+1}, b_1) = 0 \\ \vdots \\ \Lambda_x(e_{k+1}^{(x)}, b_k) = \sum_{i=1}^k h_{ik}(x)\Lambda_x(b_i, b_k) + \Lambda_x(b_{k+1}, b_k) = 0 \end{cases}$$

onde os coeficientes são $\Lambda_x(b_i, b_j) = f_{ij}(x)$, admite solução única, pois $\forall x \in V$ seu determinante é $\partial_k(x)$ que é diferente de zero. Logo tem-se, bem definidas, funções diferenciáveis

$$h_{ij}: V \rightarrow \mathbb{R},$$

relativamente às quais, $A_x(e_i^{(x)}, e_j^{(x)}) = 0$ se $i \neq j$, $\forall x \in V$ e $A_x(e_i^{(x)}, e_j^{(x)}) = \ell_i(x)$. As funções $\ell_i(x)$ são calculadas restringindo-se a forma bilinear a \mathbb{R}^1 . Como as matrizes

$$\begin{pmatrix} \ell_1(x) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \ell_i(x) \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} f_{11}(x) & \dots & f_{1i}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{i1}(x) & \dots & f_{ii}(x) \end{pmatrix}$$

são semelhantes, temos

$$\begin{vmatrix} \ell_1(x) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \ell_i(x) \end{vmatrix} = \partial_i(x) \text{ e, por indução,}$$

$$\ell_i(x) = \frac{\partial_i(x)}{\partial_{i-1}(x)}$$

Tem-se, então, para cada $x \in V$ um isomorfismo

$$\phi_{(x)}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ dado por}$$

$$(y_1, \dots, y_n) \mapsto \sum_{i=1}^n y_i c_i^{(x)}.$$

Seja $\theta: V \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\theta(x) = \phi_x^{-1}(x), \text{ que matricialmente se escreve}$$

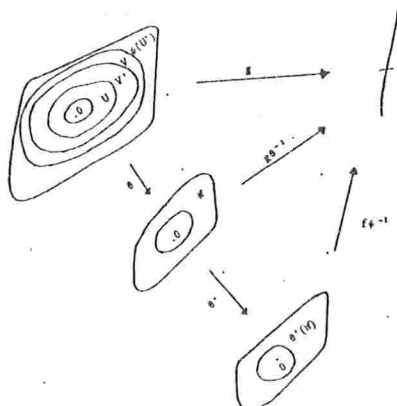
$x \xrightarrow{\theta} B_x^{-1} \cdot x$, onde B_x é a matriz de $\phi_{(x)}$ relativamente à base canônica de \mathbb{R}^n .

Vê-se que a matriz jacobiana de θ em 0 é a identidade que é inversível. Como $\theta(0) = \phi_0^{-1}(0) = 0$, pelo Teorema da Função Inversa, existem vizinhanças V' e W de 0 em V e \mathbb{R}^n , respectivamente, tais que θ aplica V' em W difeomorficamente.

Seja $y = \theta(x)$.

Em notação matricial

$$y = \phi_X^{-1}(x) = B_X^{-1} \cdot x.$$



Temos:

$$\begin{aligned} g(x) &= {}^t_x(f_{ij} \cdot (x))_{n \times n} \cdot x = {}^t_{(B_X \cdot y)}(f_{ij}(x))(B_X \cdot y) = \\ &= {}^t_y({}^t_{B_X}(f_{ij}(x))B_X)y = {}^t_y(\text{diag}(\ell_i(x))) \cdot y = \\ &= \sum_{i=1}^n \ell_i(x) y_i^2. \end{aligned}$$

Como $x = \theta^{-1}(y)$, vem

$$g\theta^{-1}(y) = \sum_{i=1}^n \ell_i(\theta^{-1}(y)) y_i^2. \text{ A aplicação } \theta': W \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ dada por}$$

$$(y_1, \dots, y_n) \mapsto (\sqrt{|\ell_1(y)|} |y_1|, \dots, \sqrt{|\ell_n(y)|} |y_n|)$$

é um difeomorfismo de W em $\theta'(W)$ cujo inverso é dado por

$$(y_1, \dots, y_n) \mapsto \left[\frac{y_1}{\sqrt{|\ell_1(y)|}}, \dots, \frac{y_n}{\sqrt{|\ell_n(y)|}} \right].$$

Assim (ϕ, U) , onde $\phi = \theta' \circ \theta \circ \psi$ e $U = \psi^{-1} \theta^{-1}(W)$ é uma carta para M em p com a condição anunciada.

Q.E.D.

Observação 2.5. Segue-se da lei de inércia de Sylvester que λ não depende da particular carta (ϕ, U) para p em M . λ é dito o índice da forma quadrática em 0 e, por analogia, o índice do ponto crítico não degenerado p de $f: M \rightarrow \mathbb{R}$.

Denotamos $\lambda = \text{ind}_f p$.

Definição 2.6. A carta (ϕ, U) para p em M , relativamente à qual $f\phi^{-1}(x) = f(p) - |\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2$, onde $\vec{x} = (x_1, \dots, x_\lambda) \in \mathbb{R}^\lambda$ e $\vec{y} = (x_{\lambda+1}, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-\lambda}$ é denominada uma carta de Morse para p em M .

O lema 2.4. tem um corolário importante que é o seguinte:

Corolário 2.7. Se p é um ponto crítico não degenerado para $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, então p é isolado e, em consequência, se M é compacta e $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ é de Morse, f tem somente um número finito de pontos críticos.

Demonstração Pelo Lema de Morse existe uma carta (ϕ, U) para p em M tal que

$$f\phi^{-1}(x) = f(p) - |\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 \text{ e,}$$

nessa vizinhança, p é o único ponto crítico de f .

Q.E.D.

Teorema 2.8. O conjunto das funções de Morse sobre uma variedade M é denso no espaço das funções contínuas $C^0(M, \mathbb{R})$. Além disso, se M é compacta esse conjunto é aberto.

Definição 2.9. Seja M uma variedade compacta, $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse sobre M e

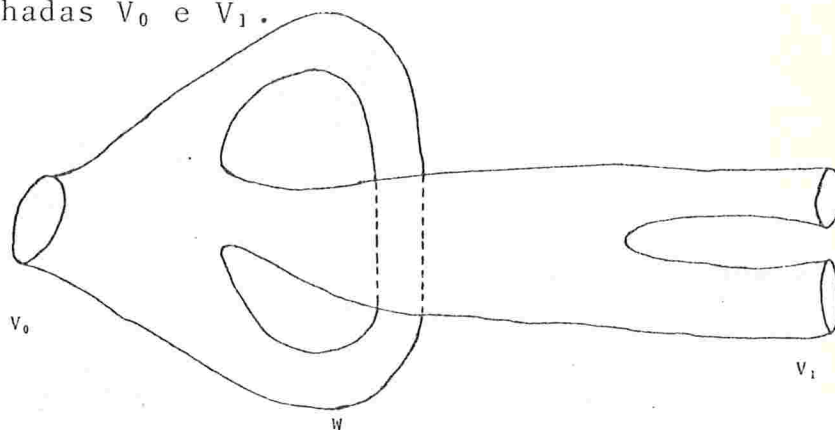
$$\eta_f = \# \{p \in M | p \text{ é ponto crítico de } f\}.$$

O número $\eta_M = \min_{f \text{ Morse sobre } M} \eta_f$ é o número de Morse da variedade M .

Nota - $\eta_M \geq 2$ se M é compacta e sem bordo.

No que se segue, introduziremos a noção de cobordismo e passaremos a estudar cobordismos munidos de funções de Morse, enfatizando propriedades que serão relevantes ao nosso objetivo.

Definição 2.10. $(W; V_0, V_1)$ é uma tríada diferenciável se W é uma n -variedade compacta e ∂W é reunião disjunta de duas subvariedades fechadas V_0 e V_1 .



Definição 2.11. Uma função de Morse sobre uma tríada $(W; V_0, V_1)$ é uma função diferenciável $f: W \rightarrow [a, b]$ tal que

- i) $f^{-1}(a) = V_0, f^{-1}(b) = V_1$;
- ii) todos os pontos críticos de f são interiores e não degenerados.

Se, além disso, tivermos

- iii) f é injetiva quando restrita ao conjunto de seus pontos críticos, a função de Morse é dita estável.

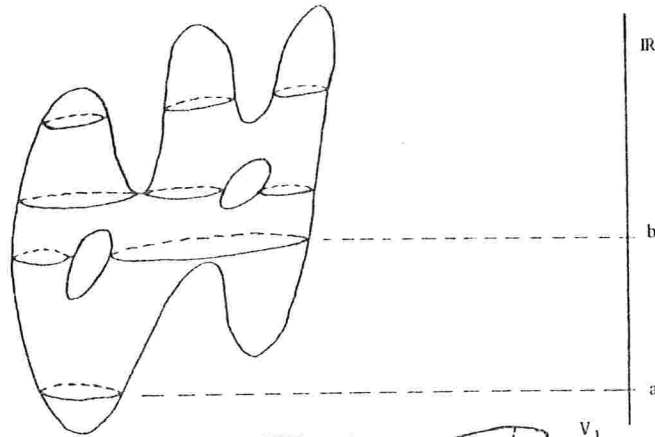
Exemplo 2.12. Seja M uma variedade compacta sem bordo $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse e $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$, valores regulares de f . Segue-se das definições 2.10. e 2.11. e do teorema 1.13.

que

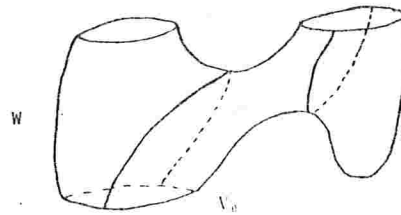
$$(W = f^{-1}([a,b]); V_0 = f^{-1}(\{a\}), V_1 = f^{-1}(\{b\}))$$

é uma tríada com função de Morse $f|_W$.

A figura abaixo representa o bi-toro em \mathbb{R}^3 com a função altura, isto é, $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = z$ restrita ao bi-toro.



Aqui, W é



Exemplo 2.13. Seja

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x,y,z) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2 + y^2 + z^2$$

Temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = x^3 - x^2 - 2x,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 2y \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 2z,$$

donde os pontos críticos de f são $(0,0,0)$, $(-1,0,0)$ e $(2,0,0)$ com valores críticos 0 , $\frac{-5}{12}$ e $\frac{-8}{3}$, respectivamente.

A matriz Hessiana de f é:

$$H(f)_{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} 3x^2 - 2x - 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

donde

$$H(f)_{(0,0,0)} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad H(f)_{(-1,0,0)} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{e } H(f)_{(2,0,0)} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Logo todos os pontos críticos de f são não degenerados e, portanto, f é uma função de Morse sobre \mathbb{R}^3 . Temos também:

$$\text{ind}_{(0,0,0)} f = 1 \text{ e } \text{ind}_{(-1,0,0)} f = \text{ind}_{(2,0,0)} f = 0.$$

Prova-se (vide [5]) que, se $a > 0$, então

$$f^{-1}((-\infty, a]) \approx D^3, \text{ onde}$$

$$D^3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

Com o fim de que a exposição tenha seqüência, enunciaremos o seguinte teorema cuja demonstração se encontra em [12].

Teorema 2.14. Sobre uma tríada existe uma função de Morse.

Definição 2.15. i) Dadas duas n -variedades fechadas M_0 e M_1 , um cobordismo de M_0 a M_1 é uma 5-upla

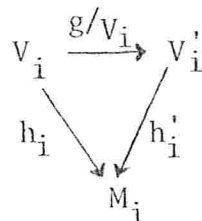
$(W; V_0, V_1, h_0, h_1)$ onde $(W; V_0, V_1)$ é uma tríada e $h_i: V_i \rightarrow M_i$, $i = 0, 1$ é um difeomorfismo.

Essencialmente, um cobordismo entre duas variedades sem bordo e de mesma dimensão é uma terceira variedade cujo bordo é união disjunta das variedades dadas.

No caso em que $M_1 = \emptyset$ e W é uma variedade cujo bordo é difeomorfo a M_0 , W é um bordismo de M_0 .

ii) Dois cobordismos $(W; V_0, V_1; h_0, h_1)$ e $(W'; V'_0, V'_1; h'_0, h'_1)$ de M_0 a M_1 são equivalentes se existe um difeomorfismo

$g: W \rightarrow W'$ levando V_0 em V'_0 e V_1 em V'_1 tal que para $i = 0, 1$, o triângulo abaixo



comuta.

Claramente a relação acima é de equivalência para os cobordismos de M_0 a M_1 .

Uma tríada é um cobordismo $(W; V_0, V_1; l_{V_0}, l_{V_1})$, onde l_{V_i} é a identidade de V_i .

iii) Uma tríada é um cobordismo produto se $(W; V_0, V_1) \approx (V_0 \times [0, 1], V_0 \times \{0\}, V_1 \times \{1\})$.

iv) Um cobordismo elementar é um cobordismo com número de Morse 1.

A definição seguinte seleciona o tipo de campos de vetores que iremos considerar sobre uma variedade M . A título de revisão, lembramos que se $\xi: M \rightarrow TM$ é um campo de vetores e $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, $\xi(f)$ é a derivada dire-

cional de f ao longo do campo (vide 1.6.).

Definição 2.16. Seja f uma função de Morse para a tríada $(W; V, V')$. Um campo de vetores ξ sobre W é um campo pseudo-gradiente (gradient-like) para f se:

- i) $\xi(f) > 0$ ao longo do complemento do conjunto dos pontos críticos de f , e
- ii) dado qualquer ponto crítico p de f , existem coordenadas $(\vec{x}, \vec{y}) = (x_1, \dots, x_\lambda, y_1, \dots, y_{n-\lambda})$ dadas por uma carta (ϕ, U) em p tais que $f\phi^{-1}(\vec{x}, \vec{y}) = f(p) - |\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2$ e ξ tem coordenadas $(-\vec{x}, \vec{y})$ ao longo de U .

Lema 2.17. Para toda função de Morse f sobre uma tríada $(W; V_0, V_1)$, existe um campo pseudo-gradiente ξ .

Demonstração (Seguindo [12], pág. 20) Assumimos que f tem somente um ponto crítico p . No caso geral a prova é semelhante, pois pontos críticos são isolados.

Pelo Lema de Morse existe um sistema de coordenadas (\vec{x}, \vec{y}) numa vizinhança U_0 de p tal que $f = f(p) - |\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2$ ao longo de U_0 . Seja U uma vizinhança de p tal que $\bar{U} \subset U_0$. Todo ponto $p' \in W \setminus U_0$ não é ponto crítico de f , donde f é uma submersão quando restrita a $W \setminus U_0$; portanto pela forma local das submersões, existem coordenadas x'_1, \dots, x'_n numa vizinhança U' de p' tais que $f = f(p') + x'_i$ em U' .

Existem vizinhanças U_1, \dots, U_k em W tais que:

- i) $W \setminus U_0 \subset \bigcup_{i=1}^k U_i$
- ii) $U \cap U_i = \emptyset, i = 1, 2, \dots, k$

iii) U_i tem coordenadas x_1^i, \dots, x_n^i e $f = c + x^i$ sobre U_i , $i = 1, 2, \dots, k$ onde c é uma constante.

Com efeito, para cada $p' \in W \setminus U$, seja U'_p , uma vizinhança de p' em W sobre a qual, em coordenadas x'_1, \dots, x'_n se tem $f = c + x'$. $\{U'_p\}_{p' \in W \setminus U}$ é cobertura aberta de $W \setminus U$ que é compacto, logo tem-se subcobertura finita U_1, \dots, U_k com as condições acima verificadas.

Sobre U existe o campo de vetores cujas coordenadas são $(-x_1, \dots, -x_\lambda, x_{\lambda+1}, \dots, x_n)$ e sobre U_i existe o campo $\frac{\partial}{\partial x_1^i}$ com coordenadas $(1, 0, \dots, 0)$, $i = 1, \dots, k$. Seja $\alpha_i: W \rightarrow [0, 1]$,

$0 \leq i \leq k$, uma partição da unidade subordinada à cobertura $\{U_i\}_{i=0}^k$ (vide [9], pág. 14).

O campo de vetores

$$\xi: W \rightarrow TW$$
$$\xi(x) = \sum_{j=1}^{\ell} \alpha_{i_j}(x) \xi_{i_j}(x)$$

se $x \in U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_\ell}$ satisfaz as condições i) e ii) da definição 1.16.

Q.E.D.

Notas - Seja M uma variedade diferenciável e TM o fibrado tangente de M .

- 1) Uma métrica Riemanniana sobre M (estrutura ortogonal sobre TM) é uma família $\alpha = \{ \langle \cdot, \cdot \rangle_p \}_{p \in M}$, onde $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ é um produto interno sobre $T_p M$ (uma forma bilinear, simétrica, positiva e definida) tal que a aplicação

$$\theta: \{(p, x, y) \in M \times TM \times TM / x, y \in T_p M\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\theta(p, x, y) = \langle x, y \rangle_p$$

é diferenciável.

Demonstra-se, utilizando-se partição da unidade, que toda variedade diferenciável (paracompacta e Hausdorff) possui uma métrica Riemanniana.

- 2) Se $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável define-se o vetor $\text{grad } f(p) \in T_p M$ como o único vetor tal que $df_p(x) = \langle \text{grad } f(p), x \rangle_p$, $\forall x \in T_p M$. Assim $\text{grad } f: M \rightarrow TM$ é um campo de vetores sobre M : o campo gradiente de $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ relativamente à métrica Riemanniana \langle, \rangle_p sobre M .
- 3) Pode-se demonstrar que, nas notações do Lema 2.17., dado um campo pseudo-gradiente ξ para f , existe uma métrica Riemanniana sobre M tal que $\xi = \text{grad } f$.

Teorema 2.18. Uma tríada com número de Morse 0 é um cobordismo produto.

Demonstração Seja $f: W \rightarrow [0, 1]$ uma função de Morse sem pontos críticos, com campo pseudo-gradiente ξ . Sobre W tem-se $\xi(f) > 0$, donde substituindo-se ξ por $\frac{1}{\xi(f)} \cdot \xi$ podemos assumir que $\xi(f) \equiv 1$ sobre W .

Seja $\phi: \mathbb{R} \times W \rightarrow W$ o grupo a um parâmetro de difeomorfismos gerado por ξ . Como $\frac{d\phi_t(q)}{dt}(f) = \xi_{\phi_t(q)}(t) = 1$,

segue-se que a função $t \rightarrow f(\phi_t(q))$ para todo $q \in W$ é linear de derivada 1. O difeomorfismo $\psi: f^{-1}(0) \times [0,1] \rightarrow W$ definido por $\psi(x,t) = \phi_t(x)$, cujo inverso é dado por

$$\theta(y) = \left(\phi_{-f(y)}(y), f(y) \right), \text{ pois}$$

$$\psi\theta(y) = \psi\left(\phi_{-f(y)}(y), f(y)\right) = \phi_{f(y)}(\phi_{-f(y)}(y)) = y$$

$$\begin{aligned} \text{e } \theta(\psi(x,t)) &= \theta(\phi_t(x)) = \left(\phi_{-f(\phi_t(x))}(\phi_t(x)), f(\phi_t(x)) \right) = \\ &= (\phi_0(x), t) = (x, t), \end{aligned}$$

demonstra o teorema.

Q.E.D.

O corolário seguinte afirma que duas funções de Morse sem pontos críticos sobre variedades difeomorfas são, essencialmente, a mesma função. Este corolário será usado na demonstração de um teorema que é fundamental neste trabalho.

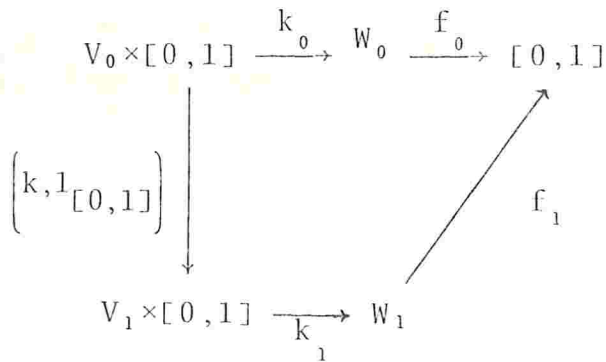
Corolário 2.19. Se $f_i: (W_i; V_i, V_i') \rightarrow ([0,1], \{0\}, \{1\})$, $i=0,1$ são funções de Morse sem pontos críticos e se $V_0 \approx V_1$, então existe um difeomorfismo $h: W_0 \rightarrow W_1$ tal que $f_0 = f_1 \circ h$.

Demonstração Com efeito, W_i tem número de Morse 0 e como vimos na demonstração do teorema 2.18., tem-se difeomorfismos

$$h_i: V_i \times [0,1] \rightarrow W_i, \quad i = 0,1 \quad \text{com}$$

$$f_i \circ k_i(x,t) = t.$$

Se $k: V_0 \rightarrow V_1$ é um difeomorfismo,



definimos

$$h = k_{10}(k, l) \circ k_0^{-1}.$$

Tem-se $f_0 = f_1 \circ h$.

Com efeito,

$$\begin{aligned}
 f_1 \circ h(y) &= f_1 \circ k_1 \circ (k, l) \circ k_0^{-1}(y) = \\
 &= f_1 \circ k_1 \circ (k, l)(\psi_y(0), f_0(y)) = \\
 &= f_1(k_1(k\psi_y(0), f_0(y))) = \\
 &= f_1(\psi'_{k\psi_y(0)}(f_0(y))) = \\
 &= f_0(y).
 \end{aligned}$$

Q.E.D.

Corolário 2.20. (Teorema da Vizinhança Colarinho).

Seja W uma variedade compacta com bordo. Existe uma vizinhança de ∂W (chamada vizinhança colarinho) difeomorfa a $\partial W \times [0, 1]$.

Demonstração A prova é feita considerando-se uma função diferenciável $f: W \rightarrow \mathbb{R}_+$ tal que $f^{-1}(0) = \partial W$ e $df \neq 0$ sobre uma vizinhança U de ∂W e aplicando-se o teorema 2.18. Considere f uma função de Morse sobre W .

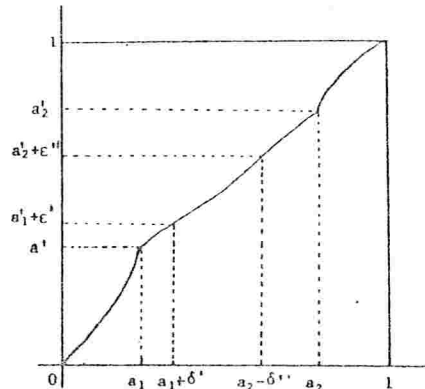
Q.E.D.

O lema seguinte é útil para o próximo corolário e também é usado no §.3.

Lema 2.21. Dados os números reais a_1, a_2, a'_1, a'_2 , tais que $0 < a_1 < a_2 < 1$ e $0 < a'_1 < a'_2 < 1$ e difeomorfismos

$h_0: [0, a_1] \rightarrow [0, a'_1]$ e $h_1: [a_2, 1] \rightarrow [a'_2, 1]$ que preservam a orientação (isto é, derivada positiva), existe um difeomorfismo $h: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ que estende h_0 e h_1 .

Demonstração Com efeito, como h_0 é contínua, dado $\epsilon' > 0$, $\epsilon' < \frac{a'_1 - a_1}{4}$, existe $\delta' > 0$ tal que $h_0([a_1 - \delta', a_1]) = (a_1 - \epsilon', a'_1]$, com δ' tal que $a_1 + \delta' < a_2$.



h_0 admite uma extensão \bar{h}_0 a $[0, a_1 + \delta')$ dada por: se $0 < x < \delta'$ e $h_0(a_1 - x) = a'_1 - y$, colocamos $\bar{h}_0(a_1 + x) = a'_1 + y = 2a'_1 - h_0(a_1 - x)$. Claramente \bar{h}_0 é um difeomorfismo de $[0, a_1 + \delta')$ em $[0, a'_1 + \epsilon')$ que estende h_0 . Analogamente o difeomorfismo h_1 admite uma extensão $\bar{h}_1: (a_2 - \delta'', 1] \rightarrow (a'_2 - \epsilon'', 1]$. Se $\epsilon = \min \{\epsilon', \epsilon''\}$ existem δ_1 e δ_2 tais que $\bar{h}_0: [0, a_1 + \delta_1) \rightarrow [0, a'_1 + \epsilon)$ e $\bar{h}_1: (a_2 - \delta_2, 1] \rightarrow (a'_2 - \epsilon, 1]$ são extensões de h_0 e h_1 , respectivamente. Sejam $\bar{h}'_0: [0, a_1 + \delta_1) \rightarrow (0, +\infty)$ e $\bar{h}'_1: (a_2 - \delta_2, 1] \rightarrow (0, +\infty)$ as derivadas de \bar{h}_0 e \bar{h}_1 , respectivamente; e $\bar{h}'_0(a_1) = x$, $\bar{h}'_1(a_2) = y$.

Seja $k: [a_1, a_2] \rightarrow (0, +\infty)$ uma função C^∞ tal que $k(a_1) = x$ e $k(a_2) = y$ e $\int_{a_1}^{a_2} k(t) dt < \epsilon$.

Se $\{\alpha_i\}_{i=0}^2$ é uma partição da unidade subordinada

à cobertura $[0, a_1 + \delta_1)$, (a_1, a_2) , $(a_2 - \delta_2, 1]$ de $[0, 1]$, a função $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(t) = \alpha_0(t)\bar{h}'_0 + \alpha_1(t)k(t) + \alpha_2(t)\bar{h}'_1(t) \quad \tilde{e} \quad C^\infty$$

e estritamente positiva, donde $g:[0,1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$g(x) = \int_0^x f(t) dt$$

é um difeomorfismo de $[0,1]$ em $\text{Im}(g)$. Também g estende h_0 , pois para $x \leq a_1$,

$$g(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^x \bar{h}'(t) dt = h(x).$$

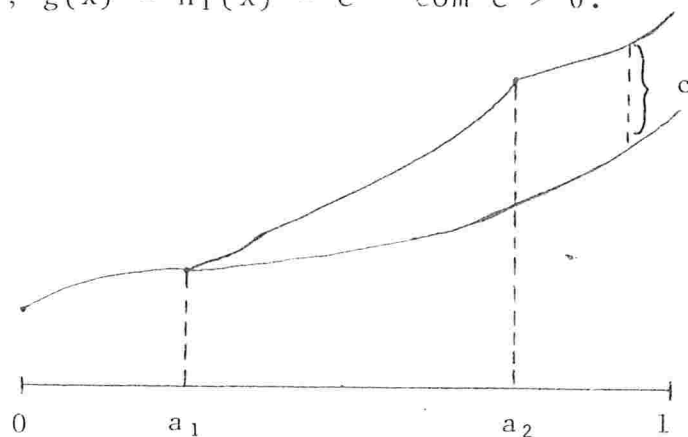
Para $x \geq a_2$,

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_0^x f(t) dt = \int_0^{a_2} f(t) dt + \int_{a_2}^x f(t) dt = \\ &= \int_0^{a_2} f(t) dt + \bar{h}_0(x) - a_2' \quad \text{com} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{a_2} f(t) dt &= \int_0^{a_1} f(t) dt + \int_{a_1}^{a_2} f(t) dt = a_1' + \\ &+ \int_{a_1}^{a_2} \alpha_0(t) \bar{h}'(t) dt + \int_{a_1}^{a_2} \alpha_1(t) k(t) dt + \\ &+ \int_{a_1}^{a_2} \alpha_2(t) \bar{h}'(t) dt < a_1' + \bar{h}_0(a_1 + \delta_1) - \end{aligned}$$

$$- \bar{h}_0(a_1) + \varepsilon + \bar{h}_1(a_2) - \bar{h}_1(a_2 - \delta_2) < a_1 + 3\varepsilon < a_2.$$

Logo para $x \geq a_2$, $g(x) = h_1(x) - c$ com $c > 0$.



Seja $\lambda: [0,1] \rightarrow [0,c]$ uma função C^∞ tal que

$$\lambda(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t \leq a_1 \\ c & \text{para } t \leq a_2 \\ 0 \leq (t) \leq c & \text{para } a_1 \leq t \leq a_2 \end{cases}$$

Tal função é explicitada em 3.1.

$$k: [0,1] \rightarrow [0,1]$$

$$k(t) = g(t) + \lambda(t)$$

é o difeomorfismo requerido.

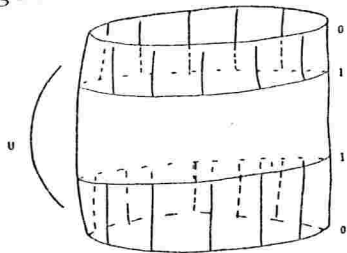
Q.E.D.

Corolário 2.22. Se W é uma variedade compacta com bordo, existe um mergulho de W em $W \setminus \partial W$.

Demonstração Se U é uma vizinhança colarinho de ∂W em W e

$$\phi: \partial W \times [0,3) \rightarrow U$$

é um difeomorfismo do corolário 2.20., consideremos o diagrama



The diagram consists of a cylinder-like shape on the left, representing a neighborhood of the boundary. It has a curved arrow labeled 'v' on its left side. To the right of the cylinder is a commutative diagram:

$$\begin{array}{ccc} \partial W \times [0,3) & \xrightarrow{\phi} & U \\ k \downarrow & & \vdots \psi \\ \partial W \times [1,3) & \xrightarrow{\phi/\partial W \times [1,3)} & U \end{array}$$

onde $\psi = \phi/\partial W \times [1,3) \circ k \circ \phi^{-1}$ e

$k = (1,h)$ com $h: [0,3) \rightarrow [1,3)$ um difeomorfismo tal que $h(t) = t$ para $2 \leq t < 3$ cuja construção é feita utilizando-se o lema anterior.

A aplicação

$$\theta: W \rightarrow W \setminus \partial W$$

$$\theta(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in W \setminus U \\ \psi(x) & \text{se } x \in U \end{cases}$$

é o mergulho desejado.

Q.E.D.

Sejam $(W; V_0, V_1)$ e $(W'; V'_1, V'_2)$ duas triádas e $h: V_1 \rightarrow V'_1$ um difeomorfismo. Tem-se, automaticamente, uma triáda topológica $(W \cup_h W'; V_0, V'_1)$, onde $W \cup_h W'$ é o espaço quociente de $W \times \{0\} \cup W' \times \{1\}$ pela relação de equivalência que identifica os pontos $(x,0)$ e $(h(x),1)$ para $x \in V_1$.

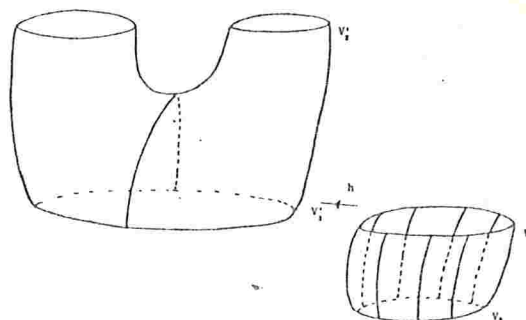
$W \cup_h W'$ é o espaço de adjunção de W e W' pela aplicação $h: V_1 \rightarrow V'_1$. (vide [6], pág. 121).

Sobre a triáda $(W \cup_h W'; V_0, V'_1)$ vamos colocar uma estrutura diferenciável que estende as estruturas de W e W' , isto é, as inclusões de W e W' em $W \cup_h W'$ são mergulhos. Em [12], pág. 25 encontra-se uma demonstração do teorema 2.23. escolhemos a dada em 2.23. por apresentar uma aplicação do teorema 1.22. que será utilizado neste trabalho.

Teorema 2.23. Existe uma única estrutura diferenciável S para $W \cup_h W'$ compatível com as estruturas de W e W' .

Demonstração Sejam $\phi: W \rightarrow W \setminus \partial W$ e $\phi': W' \rightarrow W' \setminus \partial W'$ os mergulhos do corolário 2.22. Tem-se o diagrama

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{\phi/V_1} & \phi(V_1) = \bar{V}_1 \\ \downarrow h & & \downarrow \bar{h} \\ V'_1 & \xrightarrow{\phi'/V'_1} & \phi'(V'_1) = \bar{V}'_1 \end{array}$$



onde $\bar{h} = \phi' / V'_1 \circ h \phi / V_1^{-1}$.

\bar{V}_1 e \bar{V}'_1 admitem vizinhanças U e U' em $W \setminus \partial W$ e $W' \setminus \partial W'$

difeomorfas a $\bar{V}_1 \times (-1,1)$ e $\bar{V}'_1 \times (-1,1)$, tais que nesses difeomorfismos \bar{V}_1 corresponde a $\bar{V}_1 \times \{0\}$ e \bar{V}'_1 corresponde a $\bar{V}'_1 \times \{0\}$, respectivamente:

$$\begin{aligned} U &\xrightarrow{\alpha} \bar{V}_1 \times (-1,1) \\ U' &\xrightarrow{\alpha'} \bar{V}'_1 \times (-1,1). \end{aligned}$$

Definimos $H:U \rightarrow U'$ como o difeomorfismo que torna o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\alpha} & \bar{V}_1 \times (-1,1) \\ H \downarrow & & \downarrow (h,-1) \\ U' & \xrightarrow{\alpha'} & \bar{V}'_1 \times (-1,1) \end{array}$$

Sobre $M = (W \setminus \partial W) + (W' \setminus \partial W')$ definimos a relação de equivalência R que identifica $x \in U$ com $H(x) \in U'$.

O gráfico de R é subvariedade de $M \times M$, subconjunto fechado de $M \times M$ e tal que a projeção $pr_1: C \rightarrow M$ é submersão. Com efeito, C é união disjunta de gráficos de funções diferenciáveis:

$C = \text{graf}(1_M) \cup \text{graf}(H)$ com H um difeomorfismo entreabertos.

Pelo teorema 1.22., o quociente M/R tem uma única estrutura de variedade tal que $p:M \rightarrow M/R$ é submersão. Claramente M/R estende as estruturas de W e W' , pois sendo p uma submersão e $\dim(M/R) = \dim W = \dim W'$, segue-se que p é uma imersão. Resta demonstrar que as variedades topológicas $W \cup_h W'$ e $p(\phi + \phi')(W + W')$ são homeomorfos. Com efeito, a aplicação

$$\theta = p \circ (\phi + \phi') : W + W' \rightarrow M/R$$

é uma aplicação contínua que induz sobre $W + W'$ a relação de equivalência que define $W \cup_h W'$:

$$(x,0) \sim (y,0) \Rightarrow p(\phi + \phi')(x,0) = p(\phi + \phi')(y,0)$$

$$p(\phi(x),0) = p(\phi(y),0)$$

$$\Rightarrow \phi(x) = \phi(y) \Rightarrow x = y.$$

Analogamente $(x,1) \sim (y,1) \Rightarrow x = y$

$$(x,0) \sim (y,1) \Rightarrow p(\phi(x),0) = p(\phi(y),1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\phi(x),0) R (\phi(y),1) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \phi'(y) = H(\phi(x))$ e isto só é possível, dado o fato que $x \in W$ e $y \in W'$, quando $x \in V_1$ e $y \in V'_1$. Assim $y = h(x)$ e a relação induzida por θ em $W + W'$ é a mesma obtida de h .

Em vista disto tem-se uma aplicação

$$\bar{\theta}: W \cup_h W' \rightarrow M/R$$

bem definida e que é contida pois $\bar{\theta} \circ \pi = \theta$, onde $\pi: W + W' \rightarrow W \cup_h W'$ é a projeção. Também $\bar{\theta}$ é injetiva e como $W \cup_h W'$ é compacto e M/R é um espaço de Hausdorff, segue-se que $\bar{\theta}: W \cup_h W' \rightarrow \bar{\theta}(W \cup_h W') = \theta(W + W')$ é um homeomorfismo.

Q.E.D.

Para concluir este parágrafo, um teorema sobre funções de Morse que afirma que se M é compacta, o conjunto das funções de Morse estáveis é denso no espaço nas funções de Morse sobre M .

Teorema 2.24. Seja $f: W \rightarrow [0,1]$ uma função de Morse para a triáda $(W; V_0, V_1)$ com pontos críticos p_1, \dots, p_k . Então f pode ser aproximada por uma função de Morse g com os mesmos pontos críticos e tal que $g(p_i) \neq g(p_j)$ para $i \neq j$.

Demonstração (Seguindo [12], pág. 17) Suponhamos que $f(p_1) = f(p_2)$. Seja $\lambda: W \rightarrow [0,1]$ uma função tal que $\lambda = 1$ numa vizinhança U de p_1 e $\lambda = 0$ fora de uma vizinhança N de p_1 , tal que $N \subset W \setminus \partial W$ e N não contém p_i para $i \neq 1$.

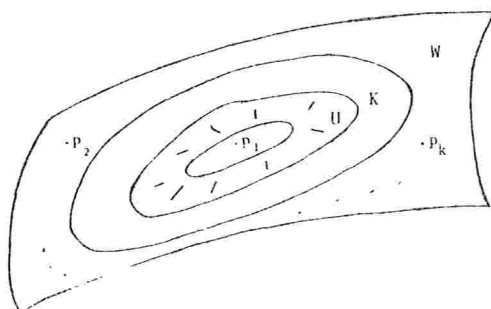
Seja $\varepsilon_1 > 0$ tal que $f_0 = f + \varepsilon_1 \lambda$ tenha valores em $[0,1]$ e $f_0(p_1) \neq f_0(p_i)$, $i \neq 1$.

Introduzimos uma métrica Riemanniana em W e determinamos c e c' tais que

$$0 \leq c \leq |\text{grad } f| =$$

$$= \sqrt{\langle \text{grad } f, \text{grad } f \rangle} \quad \text{ao longo do compacto}$$

$$K = \{p \in M / 0 < \lambda(p) < 1\} \text{ e } |\text{grad } \lambda| \leq c' \text{ sobre } K.$$



Seja $0 < \varepsilon < \min\left\{\varepsilon_1, \frac{c}{c'}\right\}$. Então $f_1 = f + \varepsilon\lambda$ é, de novo, uma função de Morse, $f_1(p_1) \neq f(p_1)$ para $i \neq 1$ e f_1 tem os mesmos pontos críticos de f , pois sobre K ,

$$|\text{grad } (f + \varepsilon\lambda)| \geq |\text{grad } f| - \varepsilon|\text{grad } \lambda| > c - \varepsilon c' > 0. \text{ Fora de } K, |\text{grad } \lambda| = 0, \text{ donde } |\text{grad } f_1| = |\text{grad } f|.$$

Indutivamente se obtém uma função de Morse g que separa todos os pontos críticos.

Q.E.D.

§.3. Isotopias de S^1

Com este parágrafo nosso propósito é obter os teoremas 3.3. e 3.4. que serão utilizados no parágrafo seguinte.

Definição 3.0. Dois difeomorfismos $h_0, h_1: M \rightarrow M'$ são isotópos se existe uma aplicação

$$F: M \times I \rightarrow M'$$

onde $I = [0,1]$ tal que:

- i) F é diferenciável;
- ii) cada $F_t: M \rightarrow M'$ definida por $F_t(x) = F(x,t)$ é um difeomorfismo; e
- iii) $F_0 = h_0$ e $F_1 = h_1$.

A aplicação $F: M \times I \rightarrow M'$ da definição acima é denominada uma isotopia entre os difeomorfismos h_0 e h_1 .

Proposição 3.1. A relação \approx sobre o conjunto dos difeomorfismos de M em M' dada por

$f \approx g \Leftrightarrow f$ é isotópico a g
é uma relação de equivalência.

Demonstração Com efeito, claramente \approx é reflexiva e simétrica e para ver que é transitiva, seja

$$\alpha: [0,1] \rightarrow [0,1]$$

$$\alpha(t) = \frac{\lambda\left(t - \frac{1}{3}\right)}{\lambda\left(t - \frac{1}{3}\right) + \lambda\left(\frac{2}{3} - t\right)},$$

onde $\lambda(0) = 0$ e $\lambda(t) = e^{-\frac{1}{t}}$ para $t \neq 0$.

α é tal que $\alpha(t) = 0$ para $0 \leq t \leq \frac{1}{3}$ e $\alpha(t) = 1$ para $\frac{2}{3} \leq t \leq 1$.

Dada uma isotopia $F: M \times I \rightarrow M'$ entre h_0 e h_1 , de finimos

$$\tilde{F}: M \times I \rightarrow M'$$

$$\tilde{F}(x, t) = F(x, \alpha(t)).$$

\tilde{F} é uma isotopia entre h_0 e h_1 , com

$$\tilde{F}_t = h_0 \text{ para } t \leq \frac{1}{3} \text{ e}$$

$$\tilde{F}_t = h_1 \text{ para } t \geq \frac{2}{3}.$$

Isto posto, se $h_0 \approx h_1$ e $h_1 \approx h_2$ com isotopias F e G , respectivamente, consideramos isotopias \tilde{F} e \tilde{G} definidas acima.

A aplicação

$$H: M \times I \rightarrow M'$$

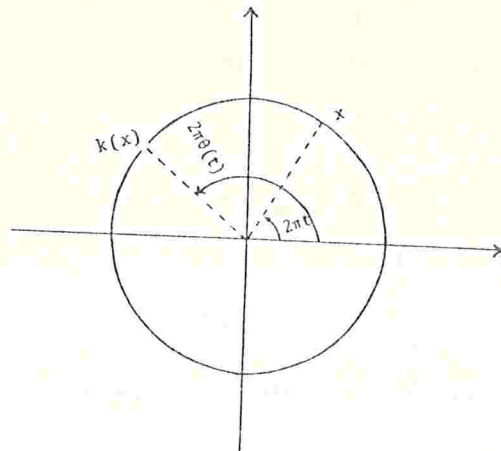
$$H(x, t) = \begin{cases} \tilde{F}(x, 2t) & \text{se } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \tilde{G}(x, 2t - 1) & \text{se } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

é uma isotopia entre h_0 e h_2 , donde \approx é transitiva.

Q.E.D.

Definição 3.2. Seja $k: S^1 \rightarrow S^1$ um difeomorfismo. Dado $y \in S^1$, podemos escrever $y = e^{2\pi i t}$ com $t \in [0, 1]$. Seja $\theta: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ tal que $k(e^{2\pi i t}) = e^{2\pi i \theta(t)}$. Como k é um difeomorfismo, resulta que θ é um difeomorfismo e dizemos que k preserva a orientação de S^1 se θ é crescente (derivada positiva) e inverte a orientação no caso contrário. (vide [5], pág. 105).

Teorema 3.3. Se k é um difeomorfismo preservando a orientação de S^1 , então k é isotópico à identidade 1_{S^1} .



Demonstração Dividiremos a prova em dois casos.

1º caso $k(a) = a$ onde $a = (1,0)$. Se x é o ponto de ângulo polar $2\pi t$, $t \in [0,1]$, escrevemos

$$k(x) = e^{2\pi i\theta(t)},$$

onde $\theta:[0,1] \rightarrow [0,1]$ é um difeomorfismo com $\theta(0) = 0$ e $\theta(1) = 1$ (aqui se usa o fato de que k preserva a orientação: θ é crescente).

Para $s \in [0,1]$, a função

$$\theta_s(t) = s\theta(t) + (1-s)t$$

é crescente de t e tem-se $\theta_s(0) = 0$ e $\theta_s(1) = 1$, pois $\theta'_s(t) = s\theta'(t) + (1-s) > 0$.

Definimos

$$k_s: S^1 \rightarrow S^1$$

$$k_s(x) = e^{2\pi i\theta_s(t)}$$

k_s é um difeomorfismo. Com efeito, $k_s(x_1) = k_s(x_2) \Rightarrow e^{2\pi i(\theta_s(t_1) - \theta_s(t_2))} = 1 \Rightarrow 2\pi i(\theta_s(t_1) - \theta_s(t_2)) = 2n\pi i \Rightarrow$

$$\Rightarrow \theta_s(t_1) - \theta_s(t_2) = n \text{ para algum } n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Daí } \theta_s(t_1) - \theta_s(t_2) = \begin{cases} -1 \\ 0 \\ 1 \end{cases} \text{ e se}$$

$|\theta_s(t_1) - \theta_s(t_2)| = 1$, vem $\theta_s(t_1) = 0$ e $\theta_s(t_2) = 1$, donde $t_1 = 0$ e $t_2 = 1$ ou $\theta_s(t_1) = 1$ e $\theta_s(t_2) = 0$ o que significa $t_1 = 1$ e $t_2 = 0$. Se $\theta_s(t_1) - \theta_s(t_2) = 0$ segue-se que $t_1 = t_2$ por ser θ_s injetiva. Assim, de qualquer forma, $x_1 = x_2$ e k_s é injetiva.

k_s é também sobrejetiva, pois θ_s é bijeção contínua de $[0,1]$. Como k_s é bijeção contínua de S^1 compacto e Hausdorff, segue-se que k_s é um homeomorfismo.

Também k_s é diferenciável com derivada dada por

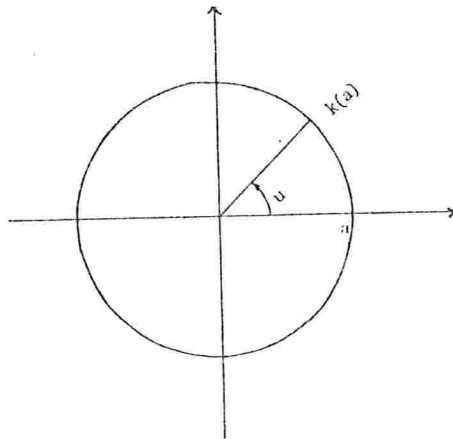
$$k'_s(x) = 2\pi i \theta'_s(t) e^{2\pi i \theta_s(t)} \neq 0$$

donde, pelo Teorema da Função Inversa k_s é um difeomorfismo.

A aplicação

$K: S^1 \times [0,1] \rightarrow S^1$ dada por $K(x,s) = k_s(x)$ é uma isotopia entre 1_{S^1} e k .

2º caso Se $k(a) \neq a$, seja $u \in (0, 2\pi)$ o ângulo polar do ponto $k(a)$. Tem-se $k(u) = r_u \circ k_1(u)$, onde $r_u: S^1 \rightarrow S^1$ é a rotação de ângulo u e $k_1: S^1 \rightarrow S^1$ é um difeomorfismo tal que $k_1(a) = a$.



Seja $R:S^1 \times I \rightarrow S^1$, $R(x,s) = r_{su}(u)$ e $K_1:S^1 \times I \rightarrow S^1 \times I$, $(x,t) \mapsto (k_{1_t}(x), t)$.

K_1 é um difeomorfismo e, $R \circ K_1:S^1 \times I \rightarrow S^1$ é uma isotopia entre 1_{S^1} e k . Com efeito, $R(k_1(x,s)) = R(k_{1_t}(x), s) = r_{su}(k_1(x))$, donde $R \circ K_1(x,0) = r_0(k_{1_0}(x)) = k_{1_0}(x) = x$

e

$$R \circ K_1(x,1) = r_u(k_{1_1}(x)) = r_u(k_1(x)) = (r_u \circ k)(x) = k(x).$$

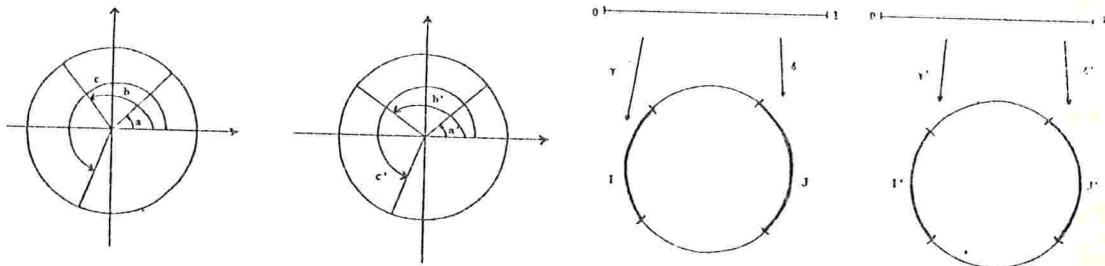
Q.E.D.

Teorema 3.4. Sejam $\gamma, \delta, \gamma', \delta':[0,1] \rightarrow S^1$ mergulhos de imagens I, J, I', J' , respectivamente. Suponhamos que $I \cap J = \emptyset$, $I' \cap J' = \emptyset$ e que I e I' , J e J' tem a mesma orientação. Existe um difeomorfismo $k:S^1 \rightarrow S^1$ preservando a orientação de S^1 e tal que

$$k \circ \gamma = \gamma', \quad k(I) = I' \quad \text{e}$$

$$k \circ \delta = \delta', \quad k(J) = J'.$$

Demonstração



É suficiente construir um difeomorfismo $\theta:[0,1] \rightarrow [0,1]$ tal que

$$e^{2\pi i\theta} / [0, \frac{a}{2\pi}] = \delta' \delta^{-1} \quad \text{e}$$

$e^{2\pi i\theta} / [\frac{b}{2\pi}, \frac{c}{2\pi}] = \delta' \delta^{-1}$. O lema 2.21. produz o difeomorfismo requerido.

Q.E.D.

§.4. Cirurgias

Denotamos por B^n o disco aberto de dimensão n :

$B^n = \{x \in \mathbb{R}^n / |\vec{x}| < 1\}$, por
 \bar{B}^n o fecho de B^n e por

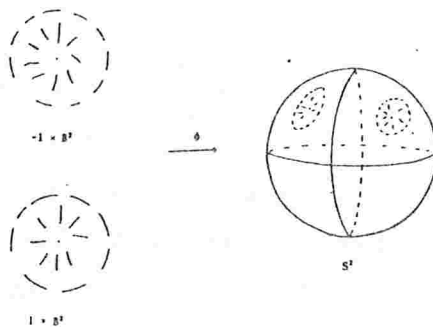
$$S^{n-1} = \partial \bar{B}^n = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n / |\vec{x}| = 1\}.$$

Definição 4.0. Dada uma variedade V de dimensão $n-1$ e um mergulho $\phi: S^{\lambda-1} \times B^{n-\lambda} \rightarrow V$, seja $\chi(V, \phi)$ a variedade quociente obtida da reunião disjunta

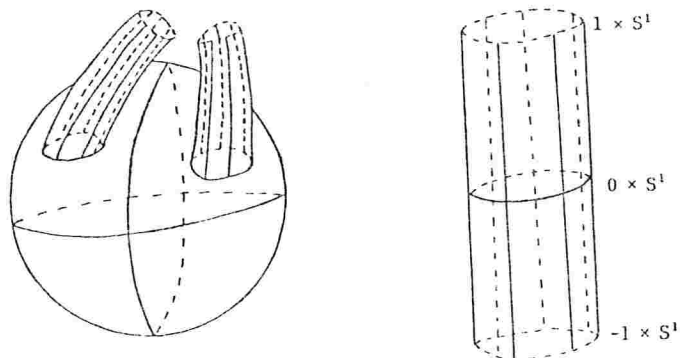
$(V \setminus \phi(S^{\lambda-1} \times \{0\})) + (B^\lambda \times S^{n-\lambda-1})$
 identificando-se $\phi(u, \theta v)$ com $(\theta u, v)$ para $u \in S^{\lambda-1}$, $v \in S^{n-\lambda-1}$
 $0 < \theta < 1$.

Se V' denota qualquer variedade difeomorfa a $\chi(V, \phi)$, então dizemos que V' pode ser obtida de V por uma cirurgia do tipo $(\lambda, n-\lambda)$.

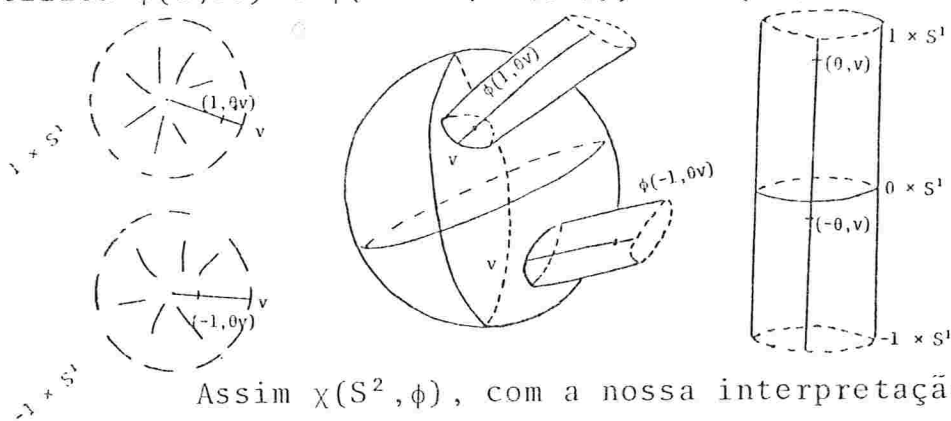
Exemplo Seja $V = S^2$ e $\phi: S^0 \times B^2 \rightarrow S^2$ o mergulho representado na figura abaixo:



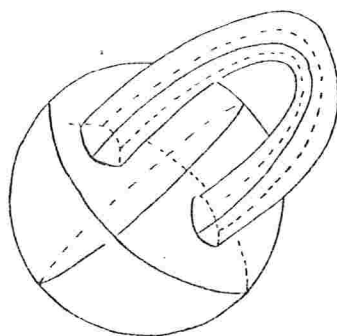
Tem-se que $S^2 \setminus \phi(S^0 \times \{0\})$ é S^2 menos dois pontos e $B^1 \times S^1$ é o cilindro:



A relação de equivalência da definição 4.0. identifica $\phi(u, \theta v) \in \phi(S^0 \times (B^2 \setminus \{0\}))$ com $(\theta u, v) \in B^1 \times S^1$.



Assim $\chi(S^2, \phi)$, com a nossa interpretação de ϕ é o toro.



- Notas 4.1.
- i) $\chi(V, \phi)$ é sempre uma variedade, pois o gráfico da relação de equivalência é reunião finita e disjunta de gráficos de funções diferenciáveis.
 - ii) Uma cirurgia do tipo $(\lambda, n-\lambda)$ sobre uma $(n-1)$ -variedade substitui uma esfera de dimensão $\lambda-1$ por outra de dimensão $n-\lambda-1$: na definição 4.0., $\phi(S^{\lambda-1} \times \{0\})$ é substituí-

da por $\{0\} \times S^{n-\lambda-1}$.

iii) Neste parágrafo seguimos a terminologia de [12]. Para uma visão alternativa das definições e teoremas aqui tratados, vide [16] e [17] onde uma cirurgia do tipo $(\lambda, n-\lambda)$ é definida como uma modificação esférica do tipo $\lambda-1$.

Vamos detalhar em um lema as cirurgias que, efetivamente, são utilizadas no Capítulo 1. Este lema consta de quatro partes:

Lema 4.2. 1.^a parte - Se V é uma $n-1$ variedade, por uma cirurgia do tipo $(0, n)$ se obtém uma reunião disjunta de V com uma esfera S^{n-1} .

Demonstração Com efeito, $\phi: S^{-1} \times B^n \rightarrow V$ é o mergulho vazio, logo $\chi(V, \phi) = \frac{(V \setminus \phi(S^{-1} \times \{0\})) + B^0 \times S^{n-1}}{\sim} = V + B^0 \times S^{n-1} =$
 $= V + S^{n-1}$.

2.^a parte - Uma cirurgia do tipo $(n, 0)$ sobre uma $(n-1)$ esfera produz o conjunto vazio.

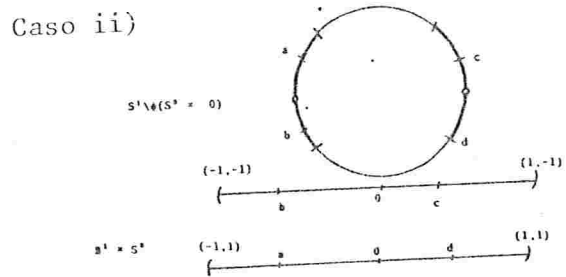
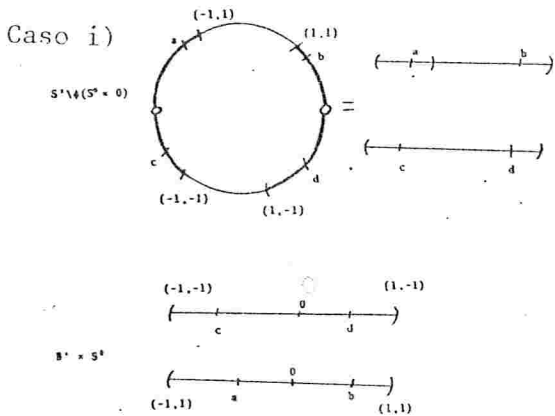
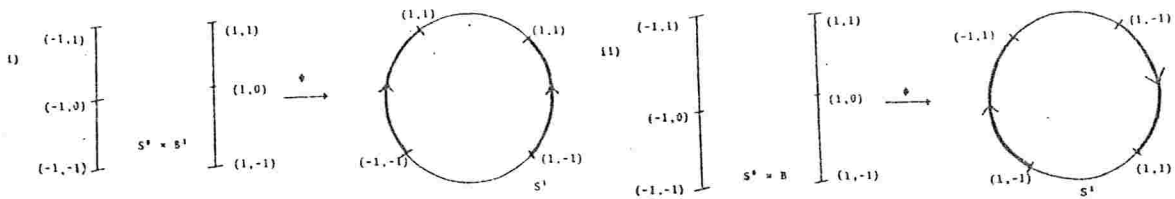
Demonstração De fato

$\phi: S^{n-1} \times B^0 \rightarrow S^{n-1}$ é um mergulho, logo um difeomorfismo, pois $\phi(S^{n-1} \times B^0)$ é fechado em S^{n-1} por ser $S^{n-1} \times B^0$ compacto e S^{n-1} Hausdorff é também aberto porque sendo mergulho e $\dim(S^{n-1} \times B^0) = \dim(S^{n-1})$ vem que é submersão, donde ϕ é aberta. Como a esfera S^{n-1} é conexa (aqui supomos $n > 1$, pois o caso $n = 1$ é trivial), segue-se que ϕ é sobrejetiva, donde um difeomorfismo. Assim

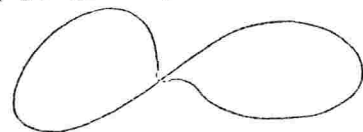
$$\chi(S^{n-1}, \phi) = \frac{(S^{n-1} \setminus \phi(S^{n-1} \times \{0\})) + B^n \times S^{-1}}{\sim} = \emptyset.$$

3.^a parte - Uma cirurgia do tipo (1,1) sobre S^1 produz reunião disjunta de duas cópias de S^1 ou S^1 .

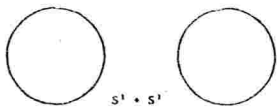
Demonstração Com efeito, dado $\phi: S^0 \times B^1 \rightarrow S^1$, temos dois casos a considerar:



Tem-se uma cópia de S^1 .

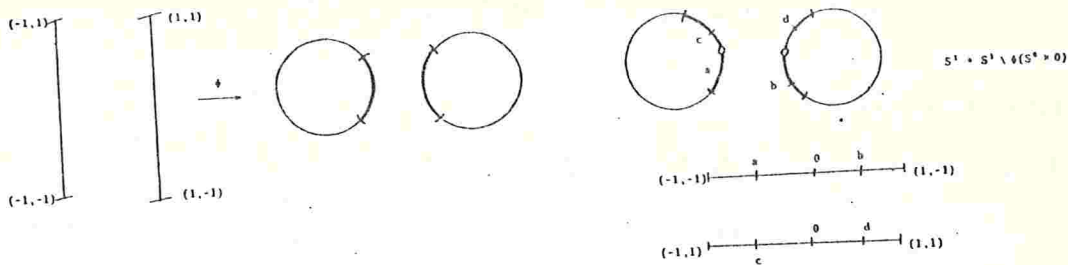


Neste caso, tem-se duas cópias de S^1 .



4.^a parte - Uma cirurgia do tipo (1,1) sobre duas cópias de S^1 produz uma, duas ou três cópias de S^1 .

Demonstração Seja $\phi: S^0 \times B^1 \rightarrow S^1 + S^1$



e tem-se $\psi(S^1 + S^1, \phi) = S^1$.

Os outros casos são dados pelas partes anteriores.

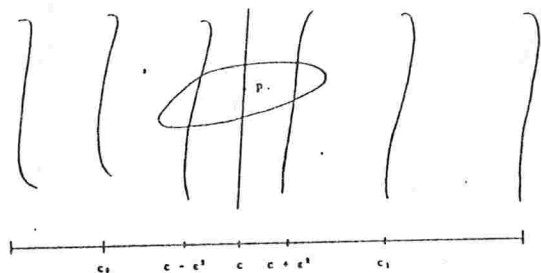
Q.E.D.

Definição 4.3. Mergulho Característico

Sejam $(W; V, V')$ uma tríada, $f:W \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse e ξ um campo pseudo-gradiente para f . Suponha que $p \in W$ é um ponto crítico para f e $V_0 = f^{-1}(c_0)$ e $V_1 = f^{-1}(c_1)$ são níveis tais que $c_0 < c = f(p) < c_1$ e que c é o único valor crítico de f em $[c_0, c_1]$.

Existe uma parametrização $\alpha: B_{2\varepsilon}^n \rightarrow U$ com U vizinhança de p em W tal que $f \circ \alpha(\vec{x}, \vec{y}) = f(p) - |\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2$ e ξ tem coordenadas $(-\vec{x}, \vec{y})$ ao longo de U , onde $\vec{x} = (x_1, \dots, x_\lambda)$, $\vec{y} = (x_{\lambda+1}, \dots, x_n)$, para algum $0 \leq \lambda \leq n$ e $\varepsilon > 0$.

Pomos $V_{-\varepsilon} = f^{-1}(c - \varepsilon^2)$ e $V_\varepsilon = f^{-1}(c + \varepsilon^2)$ e assumimos que $4\varepsilon^2 < \min(|c - c_0|, |c - c_1|)$, para que $V_{-\varepsilon}$ esteja entre V_0 e $f^{-1}(c)$ e V_ε entre $f^{-1}(c)$ e V_1 :

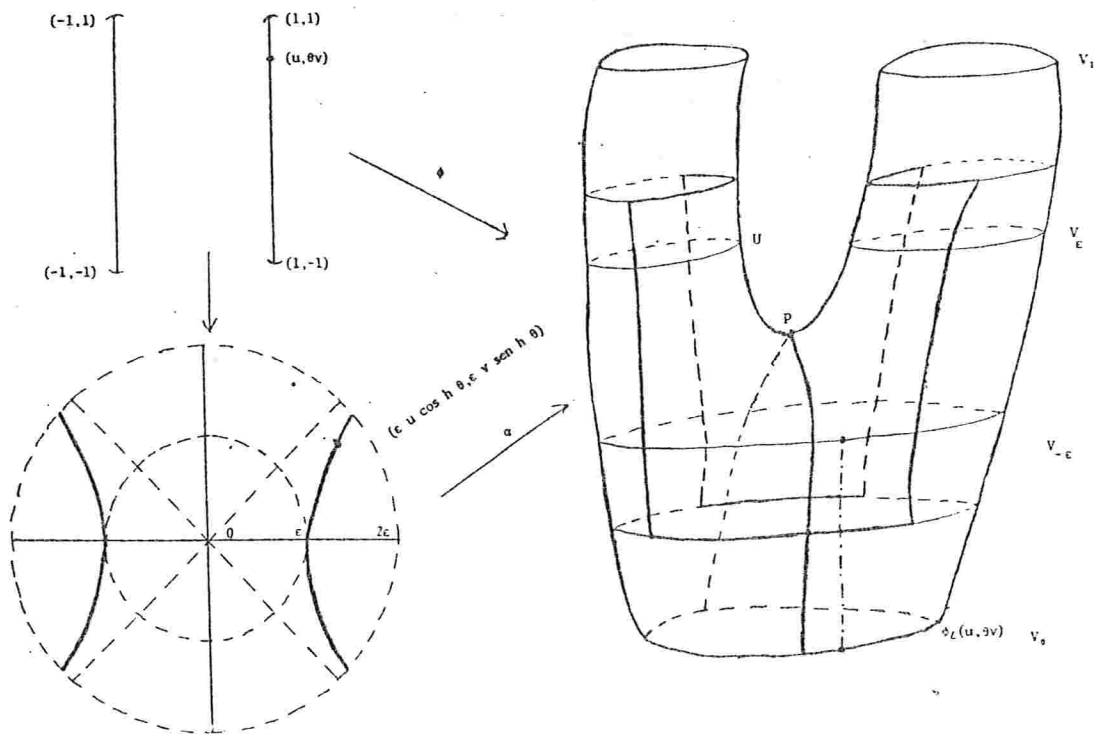


O mergulho característico à esquerda

$$\phi_L : S^{\lambda-1} \times B^{n-\lambda} \rightarrow V_{-\epsilon}$$

é obtido definindo-se $\phi : S^{\lambda-1} \times B^{n-\lambda} \rightarrow V_{-\epsilon}$ por $\phi(u, \theta v) = (\epsilon u \cos h\theta, \epsilon v \operatorname{sen} h\theta)$ para $u \in S^{\lambda-1}$, $v \in S^{n-\lambda-1}$ e $0 \leq \theta < 1$, e pela curva integral de ξ que passa pelo ponto $\alpha(u, \theta v)$ em $V_{-\epsilon}$ associe este ponto a $\phi_L(u, \theta v) \in V_0$.

Analogamente se define $\phi_R : B^\lambda \times S^{n-\lambda-1} \rightarrow V_1$: o mergulho característico à direita.



No que se segue demonstramos que um cobordismo elementar fica caracterizado quando se dá uma função de Morse sobre ele.

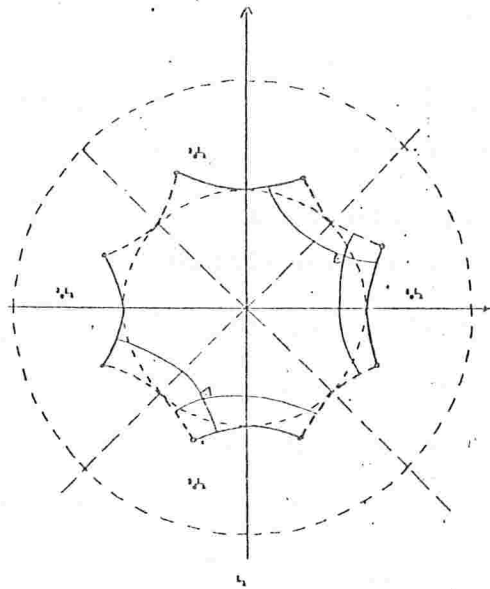
Teorema 4.4. Se $V' = \chi(V, \phi)$ pode ser obtida de V por uma cirurgia do tipo $(\lambda, n-\lambda)$, então existe um cobordismo elementar $(W; V, V')$ e uma função de Morse $f: W \rightarrow \mathbb{R}$ com exatamente um ponto crítico de índice λ .

Demonstração (Seguindo [12], pág. 30)

Seja

$$L_L = \{(\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{R}^\lambda \times \mathbb{R}^{n-\lambda} / -1 \leq -|\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 \leq 1 \text{ e } |\vec{x}| |\vec{y}| < (\text{sen } h \ 1)(\text{cos } h \ 1)\}.$$

L_L é uma variedade cujo bordo é reunião de duas subvariedades; a esquerda corresponde a $-|\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 = -1$ difeomorfa a $S^{\lambda-1} \times B^{n-\lambda}$ pela correspondência $(u, \theta v) \leftrightarrow (u \cos h \ \theta, v \text{ sen } h \ \theta)$, $0 \leq \theta < 1$ e, a direita, corresponde a $-|\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 = 1$ é difeomorfa a $B^\lambda \times S^{n-\lambda-1}$ sobre a correspondência $(\theta u, v) \leftrightarrow (u \text{ sen } h \ \theta, v \text{ cos } h \ \theta)$.



Consideremos as trajetórias ortogonais das superfícies $-|\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 = \text{constante}$. A trajetória que passa pelo ponto (\vec{x}, \vec{y}) pode ser parametrizada por $t \rightarrow (t\vec{x}, t^{-1}\vec{y})$. Se \vec{x} ou \vec{y} é 0, esta trajetória é um segmento de reta tendendo à origem e para \vec{x} e \vec{y} diferentes de zero ela é uma hipérbole que leva algum ponto $(u \cos h \theta, v \sen h \theta)$ do bordo esquerdo de L_λ no ponto correspondente $(u \sen h \theta, v \cos h \theta)$ sobre o bordo direito.

Construção de $W = \omega(V, \phi)$

Sobre a união disjunta $V \setminus \phi(S^{\lambda-1} \times \{0\}) \times \bar{B}^1 + L_\lambda$, para cada $u \in S^{\lambda-1}$, $v \in S^{n-\lambda-1}$, $0 < \theta < 1$ e $c \in \bar{B}^1$, identificamos o ponto $(\phi(u, \theta v), c)$ no primeiro somando com o único ponto $(\vec{x}, \vec{y}) \in L_\lambda$ tal que:

i) $-|\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 = c,$

ii) (\vec{x}, \vec{y}) está sobre a trajetória ortogonal que passa pelo ponto $(u \cos h \theta, v \sen h \theta)$. Esta correspondência define um difeomorfismo entre

$$\phi(S^{\lambda-1} \times (B^{n-\lambda} \setminus \{0\})) \times \bar{B}^1 \text{ e } L_\lambda \cap (\mathbb{R}^\lambda \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R}^{n-\lambda} \setminus \{0\}).$$

Segue-se disto que $\omega(V, \phi)$ é uma n-variedade bem definida cujo bordo é reunião de duas componentes que são correspondentes aos valores $c = -|\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 = -1$ ou 1 .

A fronteira esquerda ($c = -1$) é identificada com V , tomando-se $z \in V$ correspondendo a

$$(z, -1) \in (V \setminus \phi(S^{\lambda-1} \times \{0\})) \times \bar{B}^1$$

para $z \notin \phi(S^{\lambda-1} \times \{0\})$ e

$$(u \cos h \theta, v \sen h \theta) \in L_\lambda \text{ para } z = \phi(u, \theta v).$$

A fronteira direita ($c = 1$) é identificada com $\chi(V, \phi)$, fazendo $z \in V \setminus \phi(S^{\lambda-1} \times \{0\})$ corresponder a $(z, 1)$ e $(\theta u, v) \in B^\lambda \times S^{n-\lambda-1}$ corresponder a $(u \sen h \theta, v \cos h \theta)$.

A função

$f: \omega(V, \phi) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

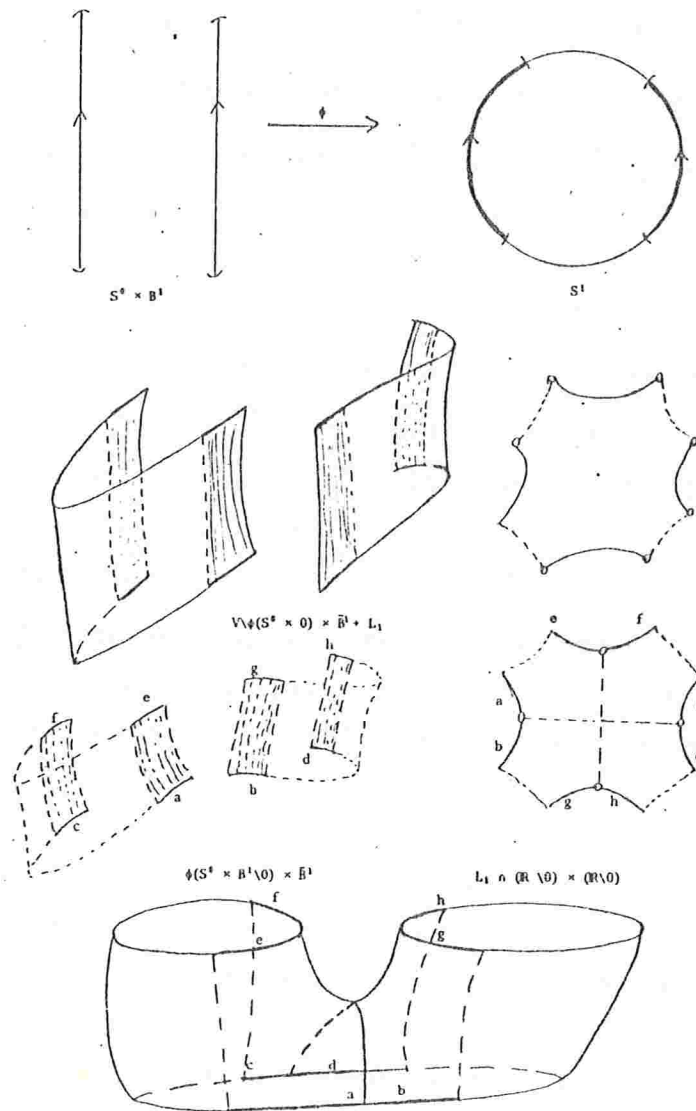
$$f(z, c) = c \text{ se } (z, c) \in (V \setminus \phi(S^{\lambda-1} \times \{0\})) \times \bar{B}^1$$

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = -|\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 \text{ para } (\vec{x}, \vec{y}) \in L_\lambda$$

é uma função de Morse bem definida com um único ponto crítico de índice λ .

Q.E.D.

Ilustração do Teorema 4.4.



Teorema 4.5. Seja $(W; V_0, V_1)$ um cobordismo elementar com função de Morse $f:W \rightarrow \mathbb{R}$ e mergulho característico $\phi_L:S^{\lambda-1} \times B^{n-\lambda} \rightarrow V_0$. Então $(W; V_0, V_1)$ é difeomorfa a triáda $(\omega(V_0, \phi_L); V_0, \chi(V_0, \phi_L))$.

Demonstração (Seguindo [12], pág. 31).

Seja $f:W \rightarrow [c_0, c_1]$ a função de Morse sobre W com um único ponto crítico p e $f(p) = c$.

Com as notações da definição 4.3., sejam $W_\epsilon = f^{-1}([c - \epsilon^2, c + \epsilon^2])$, $V_{-\epsilon} = f^{-1}(c - \epsilon^2)$ e $V_\epsilon = f^{-1}(c + \epsilon^2)$.

Temos:

$(W; V_0, V_1) \approx (W_\epsilon; V_{-\epsilon}, V_\epsilon)$ pois $(f^{-1}[c_0, c - \epsilon^2]; V_0, V_{-\epsilon})$ e $(f^{-1}[c + \epsilon^2]; V_\epsilon, V_1)$ são cobordismos produto. Visto que $(\omega(V, \phi_L); V, \chi(V, \phi_L))$ é difeomorfo com $(\omega(V_{-\epsilon}, \phi); V_{-\epsilon}, \psi(V_{-\epsilon}, \phi))$ é suficiente demonstrar que $(W_\epsilon; V_{-\epsilon}, V_\epsilon) \approx (\omega(V_{-\epsilon}, \phi); V_{-\epsilon}, \chi(V_{-\epsilon}, \phi))$.

Definimos um difeomorfismo $k:\omega(V_{-\epsilon}, \phi) \rightarrow W_\epsilon$ como segue: para cada $(z, t) \in (V_{-\epsilon} \setminus \phi(S^{\lambda-1} \times \{0\})) \times \bar{B}^1$, seja $k(z, t)$ o único ponto de W_ϵ tal que $k(z, t)$ está sobre a curva integral de ξ que passa pelo ponto z e tal que $f(k(z, t)) = \epsilon^2 t + c$; para cada $(\vec{x}, \vec{y}) \in L_\lambda$, seja $k(\vec{x}, \vec{y}) = \alpha(\epsilon \vec{x}, \epsilon \vec{y})$.

Segue-se das definições de ϕ e de $\omega(V_{-\epsilon}, \phi)$ e do fato que α leva trajetórias ortogonais em L_λ em curvas integrais em W_ϵ , que k é um difeomorfismo bem definido de $\omega(V_{-\epsilon}, \phi)$ em W_ϵ .

Q.E.D.

Lema 4.6. Se $(W; V_0, V_1)$ é um cobordismo elementar com função de Morse $f:W \rightarrow \mathbb{R}$, mergulho característico $\phi_L:S^{\lambda-1} \times B^{n-\lambda} \rightarrow V_0$, $k:\omega(V_0, \phi) \rightarrow W$ é o difeomorfismo do Teorema 4.5. e $g:\omega(V_0, \phi) \rightarrow \mathbb{R}$ é a função de Morse sobre $\omega(V_0, \phi_L)$ do Teorema 4.4., então $g = f \circ k$.

Demonstração Com efeito, nas notações dos Teoremas 4.4. e 4.5., $k':\omega(V_{-\epsilon},\phi) \rightarrow W_{\epsilon}$ é dado por: $k'(z,t)$ é o ponto de W_{ϵ} que está sobre a curva integral de ξ que passa por z e $f(k'(z,t)) = \epsilon^2 t + c$, quando $(z,t) \in (V_{-\epsilon} \setminus \phi(S^{\lambda-1} \times \{0\})) \times \bar{B}^1$, e $k'(x,y) = \alpha(\epsilon \vec{x}, \epsilon \vec{y})$ se $(\vec{x}, \vec{y}) \in L_{\lambda}$. Também $g:\omega(V_{-\epsilon},\phi) \rightarrow [-1,1]$ é dada por $g(z,t) = t$ se $(z,t) \in (V_{-\epsilon} \setminus \phi(S^{\lambda-1} \times \{0\})) \times \bar{B}^1$ e $g(\vec{x}, \vec{y}) = -|\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2$ para $(\vec{x}, \vec{y}) \in L$.

Através do difeomorfismo crescente $\theta: [-1,1] \rightarrow [c - \epsilon^2, c + \epsilon^2]$ dado por $\theta(t) = \epsilon^2 t + c$, podemos definir $g:\omega(V_{-\epsilon},\phi) \rightarrow [c - \epsilon^2, c + \epsilon^2]$ dada por $g(z,t) = \epsilon^2 t + c$ se $(z,t) \in (V_{-\epsilon} \setminus \phi(S^{\lambda-1} \times \{0\})) \times \bar{B}^1$ e $g(\vec{x}, \vec{y}) = c + \epsilon^2(-|\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2)$ se $(\vec{x}, \vec{y}) \in L_{\lambda}$.

O diagrama

$$\begin{array}{ccc} \omega(V_{-\epsilon}, \phi) & \xrightarrow{k'} & W_{\epsilon} \\ & \searrow g & \downarrow f|_{W_{\epsilon}} \\ & & [c - \epsilon^2, c + \epsilon^2] \end{array}$$

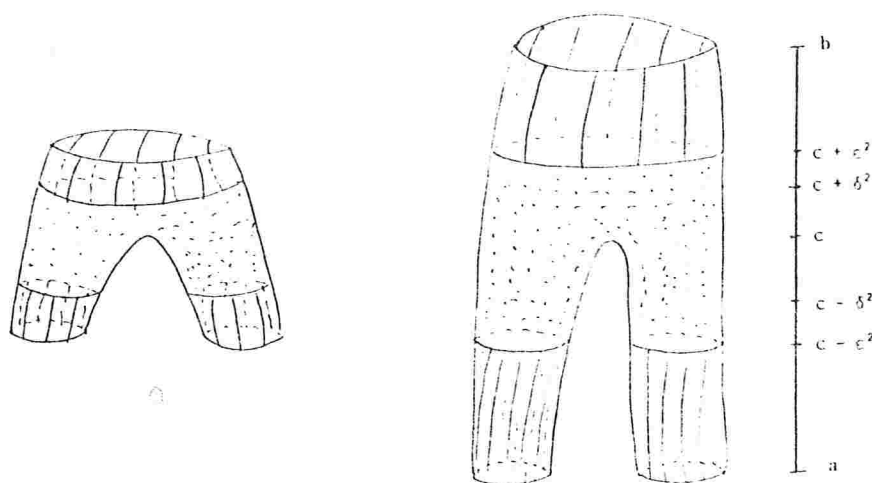
é comutativo e, por outro lado, se $f:W \rightarrow [a,b]$, consideremos um difeomorfismo $\bar{\theta}: [c - \epsilon^2, c + \epsilon^2] \rightarrow [a,b]$ crescente que deixe c fixo. Existe $k'':W_{\epsilon} \rightarrow W$ difeomorfismo tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} W_{\epsilon} & \xrightarrow{k''} & W \\ f|_{W_{\epsilon}} \downarrow & & \downarrow f \\ [c - \epsilon^2, c + \epsilon^2] & \xrightarrow{\bar{\theta}} & [a,b] \end{array} \text{ comuta.}$$

Com efeito, se $z \in W_{\epsilon}$, $k''(z)$ é o único ponto de W tal que $f(k''(z)) = \bar{\theta}(f|_{W_{\epsilon}}(z))$ e está sobre a curva integral de ξ em W que passa por z .

O difeomorfismo $k = k'' \circ k'$ é tal que $g = f \circ k$.

Q.E.D.



O Teorema seguinte é fundamental na demonstração do Teorema 1.3.3. que é parte do resultado principal deste trabalho.

Teorema 4.7. Sejam $(W; V_0, V_1)$ e $(W'; V'_0, V'_1)$ duas tríadas com funções de Morse $f, g: W, W' \rightarrow [c_0, c_1]$ e $\dim W, W' = 2$. Suponha que $c_0 < c < c_1$ é o único valor crítico de f e g e que este valor corresponde a um único ponto crítico $p \in f^{-1}(c)$ e $q \in g^{-1}(c)$ e tal que $\text{ind}_f p = \text{ind}_g q$. Se, além disso, $f^{-1}(c_i) \approx g^{-1}(c_i)$, $i = 0, 1$, então existe um difeomorfismo $h: W \rightarrow W'$ tal que $f = g \circ h$.

Demonstração Sem perda de generalidade podemos supor que W e W' são conexas; fora da componente conexa que contém um ponto crítico, W e W' são cobordismos produto e como $\text{ind}_f p = \text{ind}_g q$, pelo Lema 4.2. e do fato que $f^{-1}(c_i) \approx g^{-1}(c_i)$, $i = 0, 1$, vem que esses cobordismos-produto têm o mesmo número de componentes conexas. O corolário 2.19. se aplica e produz um difeomorfismo entre esses cobordismos-produto conjugando as funções f e g .

Isto posto, $(W; V_0, V_1)$ é uma tríada com função de Morse $f: W \rightarrow [c_0, c_1]$ e campo pseudo-gradiente ξ . Existe uma vizinhança de p e uma parametrização $\alpha: B_{2\varepsilon}^2 \rightarrow U$ tal

que $f(\alpha(\vec{x}, \vec{y})) = c - |\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2$. Sendo $V_{-\epsilon} = f^{-1}(c - \epsilon^2)$, $V_{\epsilon} = f^{-1}(c + \epsilon^2)$ e o mergulho característico $\phi: S^{\lambda-1} \times B^{2-\lambda} \rightarrow V_{-\epsilon}$, $\phi(u, \theta v) = \alpha(\epsilon u \cos h \theta, \epsilon v \operatorname{sen} h \theta)$ temos, $(W_{\epsilon}; V_{-\epsilon}, V_{\epsilon}) \approx (\omega(V_{-\epsilon}, \phi); V_{-\epsilon}, \chi(V_{-\epsilon}, \phi))$ pelo Teorema 4.5..

Analogamente para $(W'; V'_0, V'_1)$, tomando-se o mesmo ϵ para definir o raio da vizinhança coordenada, tem-se um mergulho $\phi'(u, \theta v) = \beta(\epsilon u \cos h \theta, \epsilon c \operatorname{sen} h \theta)$ e, pelo Teorema 4.5., um difeomorfismo $(W'_{\epsilon}; V'_{-\epsilon}, V'_{\epsilon}) \approx (\omega(V'_{-\epsilon}, \phi'); V'_{-\epsilon}, \chi(V'_{-\epsilon}, \phi'))$.

Seja k um difeomorfismo de $V_{-\epsilon}$ em $V'_{-\epsilon}$ que preserva a orientação de S^1 tal que $k \circ \phi = \phi'$. (Vide Teorema 3.4. para o caso em que $V_{-\epsilon} \approx V'_{-\epsilon} \approx S^1$ e aplique o Lema 2.21. para o caso $V_{-\epsilon} \approx V'_{-\epsilon} \approx S^1 + S^1$).

Pelo Teorema 4.5.

$$(W'_{\epsilon}; V'_{-\epsilon}, V'_{\epsilon}) \approx (\omega(k(V_{-\epsilon}), k\phi); k(V_{-\epsilon}), \chi(k(V_{-\epsilon}), h\phi))$$

que é difeomorfa a $(\omega(V_{-\epsilon}, \phi); V_{-\epsilon}, \chi(V_{-\epsilon}, \phi))$.

Com efeito, o difeomorfismo

$$\begin{array}{ccc} (V_{-\epsilon} \setminus \phi(S^{\lambda-1} \times \{0\})) \times \bar{B}^1 + L_{\lambda} & & \\ \downarrow k & & \downarrow 1_{\bar{B}^1} \\ (V'_{-\epsilon} \setminus \phi'(S^{\lambda-1} \times \{0\})) \times \bar{B}^1 + L_{\lambda} & & \downarrow 1_{L_{\lambda}} \end{array}$$

$H = (k \times 1_{\bar{B}^1}) + 1_{L_{\lambda}}$ é compatível com a relação de equivalência: $(\phi(u, \theta v), c) \sim (\vec{x}, \vec{y}) \Rightarrow -|\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 = c$ e (\vec{x}, \vec{y}) está na trajetória ortogonal que passa por $(u \cos h \theta, v \operatorname{sen} h \theta)$, donde $(k, 1_{\bar{B}^1})(\phi(u, \theta v), c) = (k(\phi(u, \theta v)), c) = (\phi'(u, \theta v), c)$ é equivalente a (\vec{x}, \vec{y}) . Daí, os quocientes $\omega(V_{-\epsilon}, \phi)$ e $\omega(V'_{-\epsilon}, \phi')$ são difeomorfos.

Tem-se o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \omega(V_{-\epsilon}, \phi) & \xrightarrow{\ell} & W_{\epsilon} \xrightarrow{f} [c_0, c_1] \\ \bar{H} \downarrow & & \downarrow h_1 \\ \omega(V'_{-\epsilon}, \phi') & \xrightarrow{\ell'} & W'_{\epsilon} \xrightarrow{g} \end{array} \quad \text{onde}$$

\bar{H} conjugua as funções $f \circ \ell$ e $g \circ \ell'$, pois H é a identidade sobre L_λ e preserva o nível em $(V \setminus \phi(S^{\lambda-1} \times \{0\})) \times \bar{B}^1$.

Assim, tem-se um difeomorfismo $h_1: W \rightarrow W'$ conjugando f e g .

Pelo Lema 4.6., h_1 se estende a $h: W \rightarrow W'$ de modo que $f = g \circ h$.

Q.E.D.

Nota 4.8. Caso não estável

Seja $(W; V; V')$ uma tríada e $f: W \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse com p_1, \dots, p_k pontos críticos, todos no mesmo nível, com índices $\lambda_1, \dots, \lambda_k$.

Através do campo pseudo-gradiente ξ para f se obtêm mergulhos característicos disjuntos $\phi_i: S^{\lambda_i-1} \times B^{n-\lambda_i} \rightarrow V$, $i = 1, 2, \dots, k$.

Construímos uma variedade $\omega(V; \phi_1, \dots, \phi_k)$ como segue:

Sobre a soma disjunta

$$(V \setminus \bigsqcup_{i=1}^k \phi_i(S^{\lambda_i-1} \times \{0\})) \times \bar{B}^1 + L_{\lambda_1} + \dots + L_{\lambda_k},$$

para cada $u \in S^{\lambda_i-1}$, $v \in S^{n-\lambda_i-1}$, $0 < \theta < 1$ e $C \in \bar{B}^1$, identificamos o ponto $(\phi_i(u, \theta v), C)$ no primeiro somando com o único ponto $(\vec{x}, \vec{y}) \in L_{\lambda_i}$ tal que:

- i) $-|\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 = c$, e
- ii) (\vec{x}, \vec{y}) está sobre a trajetória ortogonal que passa pelo ponto $(u \cos h \theta, v \sin h \theta)$.

O quociente de $(V \setminus \bigsqcup_{i=1}^k \phi_i(S^{\lambda_i-1} \times \{0\})) \times \bar{B}^1 + \sum_{i=1}^k L_{\lambda_i}$

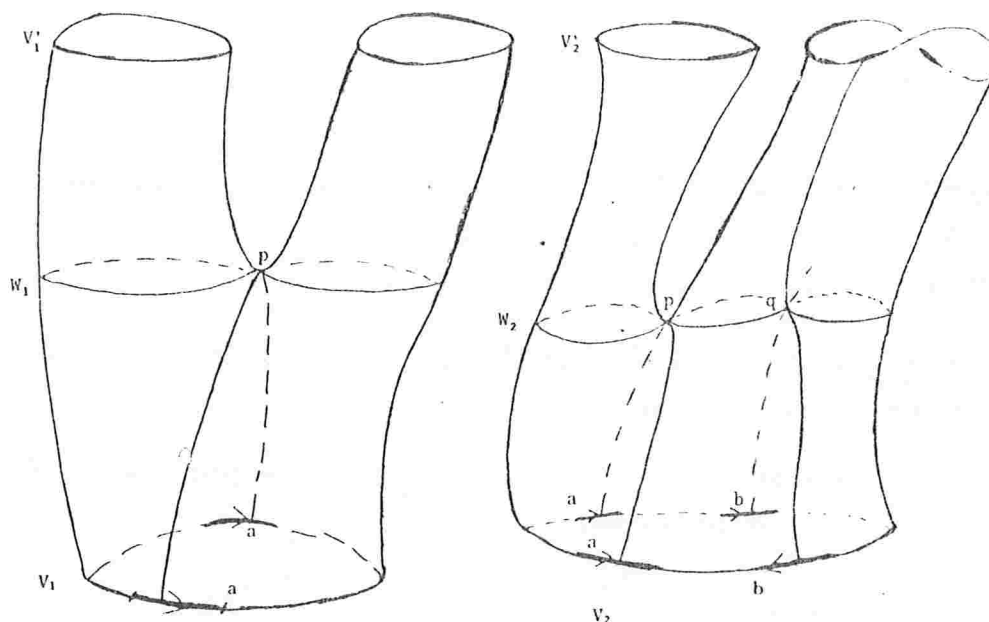
pela relação acima é uma variedade bem definida denotada por $\omega(V; \phi_1, \dots, \phi_k)$. Tem-se que $W = \omega(V; \phi_1, \dots, \phi_k)$. Por outro lado, se $\phi_i: S^{\lambda_i-1} \times B^{n-\lambda_i} \rightarrow V$, $i = 1, \dots, k$, são mergulhos disjuntos, tem-se uma variedade $\chi(V; \phi_1, \dots, \phi_k)$ obti

da soma disjunta $V \setminus \bigcup_{i=1}^k \phi_i(S^{\lambda_i-1} \times \{0\}) + \sum_{i=1}^k B^{\lambda_i} \times S^{n-\lambda_i-1}$ identificando-se para cada $u \in S^{\lambda_i-1}$, $v \in S^{n-\lambda_i}$ e $0 < \theta < 1$, o ponto $\phi_i(u, \theta v)$ do primeiro somando com o ponto $(\theta u, v)$ de $B^{\lambda_i} \times S^{n-\lambda_i-1}$.

Se $V' = \chi(V; \phi_1, \dots, \phi_k)$, então V e V' são cobordantes por um cobordismo que admite uma função de Morse com k pontos críticos, no mesmo nível, de índices $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$.

Este cobordismo não é único como no caso de cobordismos elementares, pois as variedades V e V' não determinam o número de pontos críticos de um cobordismo entre elas. A figura abaixo sugere um exemplo disto:

$$V = S^1 \quad \text{e} \quad V' = S^1 + S^1$$



Proposição 4.9. Seja $(W; V, V')$ uma tríada de n dimensão, $f: W \rightarrow [c_0, c_1]$ uma função de Morse com p_1, \dots, p_k pontos críticos, $k > 1$, todos no mesmo nível c e únicos para f em $[c_0, c_1]$. Se W é conexa então, $0 < \text{ind}_f p_i < n$, $\forall i, i = 1, 2, \dots, k$.

Demonstração Com efeito, pelas notas 4.8., temos

$$W \approx \omega(V = f^{-1}(c_0); \phi_1, \dots, \phi_k) = \frac{V \setminus \bigsqcup_{i=1}^k \phi_i(S^{\lambda_i-1} \times \{0\}) \times \bar{B}^1 + \sum_{i=1}^k L_{\lambda_i}}{\mathbb{R}}$$

Se $\text{ind}_f p_j = 0$ para algum j , vem que ϕ_j é o mergulho vazio e L_{λ_j} é um disco, donde

$$L_{\lambda_j} \cap \frac{V \setminus \bigsqcup_{i \neq j} \phi_i(S^{\lambda_i-1} \times \{0\}) \times \bar{B}^1 + \sum_{i \neq j} L_{\lambda_i}}{\mathbb{R}} = \emptyset$$

donde W seria desconexa.

Se $\text{ind}_f p_j = n$ então $\text{ind}_{-f} p_j = 0$ e a prova é a mesma.

Logo $\text{ind}_f p_j$ não pode ser 0 ou n , para todo j , se $k > 1$ e W é conexa.

Q.E.D.

Teorema 4.10. Seja $(W; V, V')$ uma tríada com função de Morse $f: W \rightarrow [c_0, c_1]$ tal que $c_0 < c < c_1$ é o único valor crítico de f . Então $f^{-1}(c)$ é conexa se W é conexa.

Demonstração A prova é feita por indução sobre o número de componentes conexas de V .

Tem-se que, se p_1, \dots, p_k são os pontos críticos de f , e $f^{-1}(c)$ é homeomorfa a

$$\frac{V \setminus \bigsqcup_{i=1}^k \phi_i(S^{\lambda_i-1} \times \{0\}) \times \{0\} + \sum_{i=1}^k K_{\lambda_i}}{\mathbb{R}}$$

onde $K_{\lambda_i} = \{(\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{R}^{\lambda_i} \times \mathbb{R}^{n-\lambda_i} \mid |\vec{x}| = |\vec{y}|\}$ e

$(\phi_i(u, \theta v), 0) \sim (\vec{x}, \vec{y}) \in K_{\lambda_i}$ se (\vec{x}, \vec{y}) está na trajetória orto

gonal que passa por $(u \cos h \theta, v \operatorname{sen} h \theta)$ em L_{λ_i} .

Observamos que $f^{-1}(c)$ não é uma subvariedade de W , mas estamos interessados apenas no fato de $f^{-1}(c)$ ser conexa ou não, basta considerarmos sua estrutura de subespaço topológico de W . Assim

$$f^{-1}(c) \cong \frac{V \setminus \bigsqcup_{i=1}^k \phi_i(S^{\lambda_i-1} \times \{0\}) + \sum_{i=1}^k K_{\lambda_i}}{\sim} e$$

K_{λ_i} é conexo, para todo λ_i e pela proposição 4.9., podemos supor que $\lambda_i \neq 0$, n , para todo i , $1 \leq i \leq k$.

Se V tem uma componente conexa é suficiente considerarmos o caso em que $\phi_j(S^{\lambda_j-1} \times \{0\})$ desconecta V , pois se isso não ocorre para todo j , $V \setminus \bigsqcup_{i=1}^k \phi_i(S^{\lambda_i-1} \times 0)$ é conexa e como K_{λ_i} é conexa e \sim identifica pelo menos um ponto de $V \setminus \phi_i(S^{\lambda_i-1} \times 0)$ com um ponto de K_{λ_i} , segue-se que $f^{-1}(c)$ é conexa.

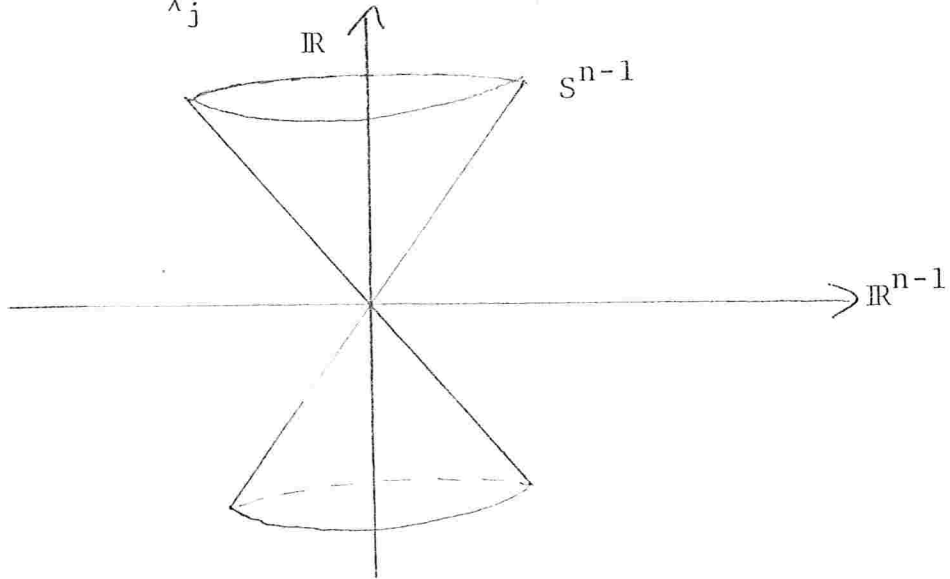
Suponhamos então que $\phi_j: S^{\lambda_j-1} \times B^{n-\lambda_j} \rightarrow V$ é tal que $V \setminus \phi_j(S^{\lambda_j-1} \times 0)$ é desconexa. Segue-se que $V \setminus \phi_j(S^{\lambda_j-1} \times 0)$ tem duas componentes conexas. Com efeito, se $\lambda_j = 1$, $\phi_j: S^0 \times B^{n-1} \rightarrow V$ tem para imagem dois discos disjuntos e abertos em V e $V \setminus \phi_j(S^0 \times 0)$ é V menos dois pontos que, claramente, é conexo se $n > 2$. Se $n = 2$, então $V = S^1$ e $\frac{S^1 \setminus \phi(S^0 \times 0) + K_1}{\sim}$ é conexo: é a figura de um 8.

Então podemos supor que $\lambda_j \neq 1$ e, em consequência $S^{\lambda_j-1} \times B^{n-\lambda_j}$ é conexo, donde $\phi_j(S^{\lambda_j-1} \times B^{n-\lambda_j})$ é uma vizinhança conexa de $\phi_j(S^{\lambda_j-1} \times 0)$ em V .

Claramente $V \setminus \phi_j(S^{\lambda_j-1} \times 0)$ é desconexo se, e somente se $\phi_j(S^{\lambda_j-1} \times B^{n-\lambda_j}) \setminus \phi_j(S^{\lambda_j-1} \times 0) =$

$$= \phi_j(S^{\lambda_j-1} \times B^{n-\lambda_j} \setminus S^{\lambda_j-1} \times 0) \text{ é desconexo e } \text{isso}$$

ocorre se, e somente se $S^{\lambda_j-1} \times B^{n-\lambda_j} \setminus S^{\lambda_j-1} \times 0 = S^{\lambda_j-1} \times (B^{n-\lambda_j} \setminus 0)$ é desconexo. Ora, se isso acontece, dado o fato $\lambda_j \neq 0, 1, n$ e $n > 2$, segue-se que $\lambda_j = n-1$, donde $B^{n-\lambda_j}$ é o intervalo da reta $(-1, 1)$ e também K_{λ_j} é o cone em \mathbb{R}^n cuja figura é



Daí $\frac{V \setminus \phi_j(S^{n-2} \times 0) + K_{n-1}}{\sim}$ é conexa pois K_{n-1} o é e \sim identifica pontos de uma componente conexa $V \setminus \phi_j(S^{n-2} \times 0)$ com pontos de K_{n-1} tais que $y < 0$ e pontos da outra componente tais que $y > 0$. Do fato de

$$\frac{V \setminus \bigsqcup_{i=1}^k \phi_i(S^{\lambda_i-1} \times 0) + \sum_{i=1}^k K_{\lambda_i}}{\sim} \equiv$$

$$\equiv \frac{V \setminus \phi_i(S^{\lambda_i-1} \times 0) + K_{\lambda_i} \setminus \bigsqcup_{i=2}^k \phi_i(S^{\lambda_i-1} \times 0) + \sum_{i=2}^k K_{\lambda_i}}{\sim}$$

por indução sobre o número de pontos críticos de índice $n-1$ segue o resultado.

Se V tem duas componentes conexas: V_1 e V_2 , um dos λ_i deve ser 1 e o mergulho $\phi_i: S^0 \times B^{n-1} \rightarrow V_1 + V_2$ de-

ve aplicar uma componente conexa de $S^0 \times B^{n-1}$ em V_1 e outra em V_2 . Com efeito, sendo $S^{\lambda_i - 1} \times B^{n-\lambda_i}$ conexa para $\lambda_i \neq 1$, segue-se que $\phi_i(S^{\lambda_i - 1} \times B^{n-\lambda_i})$ está em V_1 ou V_2 e dividindo-se os mergulhos em duas classes, a primeira dos que tem imagem em V_1 e a segunda dos que tem imagem em V_2 , vem:

$$\begin{aligned}
 W &\approx \frac{V \setminus \bigsqcup_{i=1}^k \phi_i(S^{\lambda_i - 1} \times 0) \times \bar{B}^1 + \sum_{i=1}^k L_{\lambda_i}}{\sim} \cong \\
 &\cong \frac{V_1 \setminus \bigsqcup_{i=1}^m \phi_{ij}(S^{\lambda_{ij} - 1} \times 0) \times \bar{B}^1 + \sum_{i=1}^m L_{\lambda_{ij}}}{\sim} + \\
 &+ \frac{V_2 \setminus \bigsqcup_{j=m+1}^k \phi_{ij}(S^{\lambda_{ij} - 1} \times 0) \times \bar{B}^1 + \sum_{j=m+1}^k L_{\lambda_{ij}}}{\sim} \cong
 \end{aligned}$$

$\cong (W_1; V_1, V'_1) + (W_2; V_2, V'_2)$ e W seria desconexa.

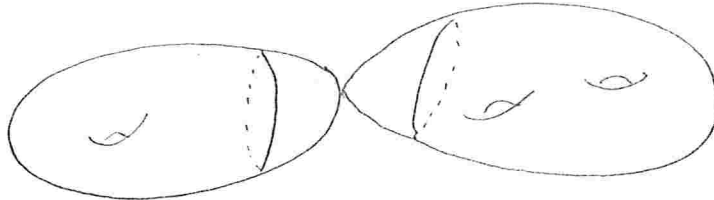
Assim deve-se ter, para algum j , $\lambda_j = 1$ e $\phi_j: S^0 \times B^{n-1} \rightarrow V_1 + V_2$ é tal que $\phi_j(-1 \times B^{n-1}) \subset V_1$ e $\phi_j(1 \times B^{n-1}) \subset V_2$.



Segue-se que $V_1 + V_2 \setminus \phi(S^0 \times 0)$ é $V_1 \setminus \text{ponto} + V_2 \setminus \text{ponto}$, sendo que esses pontos admitem vizinhanças que são discos. $\phi_j(\pm 1 \times B^{n-1} \setminus 0)$ são cilindros em V_1 e V_2 que, através de \sim são identificados cada um com uma componente conexa de $K_{n-1} \setminus \{(0,0)\}$ e o resultado fica conectado por $(0,0)$.

Na realidade, se $\lambda_j = n-1$, $\frac{V_1 + V_2 \setminus \phi(S^0 \times 0) + K_{n-1}}{\sim}$ é obtido assim: tira-se um ponto de V_1 e um ponto de V_2 e os

substituí por um único ponto: $(0,0)$. Essa operação corresponde a aproximar V_1 de V_2 , de modo que $V_1 \cap V_2$ seja 1 ponto.



$$\text{Se } A = \frac{V_j \setminus \bigsqcup_{i=1}^{m_j} \phi_i(S^{\lambda_i-1} \times 0) + \sum_{i=1}^{m_j} K_{\lambda_i}}{\sim} \quad \text{onde}$$

$$\phi_i: S^{\lambda_i-1} \times B^{n-\lambda_i} \rightarrow V_j, \quad j = 1, 2 \text{ e } B = \frac{A_1 + A_2 \setminus \phi_j(S^0 \times 0) + K_1}{\sim},$$

$$\text{vem que } f^{-1}(c) \cong \frac{B \setminus \bigsqcup_{i=m_1+m_2+1}^k \phi_i(S^{\lambda_i-1} \times 0) + \sum K_{\lambda_i}}{\sim} \quad \text{com}$$

$\lambda_i = 1, i = m_1 + m_2 + 1, \dots, k$ e com B conexa. Portanto $f^{-1}(c)$ é conexa.

Se V tem m componentes conexas deve-se ter pelo menos $m-1$ pontos críticos de índice 1 tais que $S^0 \times B^{n-1}$ é aplicado em componentes conexas distintas de V para cada ϕ , de modo que, dada uma componente conexa V_1 de V , existe V_2 tal que $-1 \times B^{n-1} \xrightarrow{\phi} V_1 \quad 1 \times B^{n-1} \xrightarrow{\phi} V_2$.

Se V_1 e V_2 são duas tais componentes, $\phi_i: S^{\lambda_i-1} \times B^{n-\lambda_i} \rightarrow V_1, 1 \leq i \leq p; \phi_i: S^{\lambda_i-1} \times B^{n-\lambda_i} \rightarrow V_2, p+1 \leq i \leq q$ e $\phi_{q+1}: S^0 \times B^{n-1} \rightarrow V_1 + V_2$ é o mergulho acima, então se

$$A \cong \frac{V_1 + V_2 \setminus \bigsqcup_{i=1}^q \phi_i(S^{\lambda_i-1} \times 0) + \sum_{i=1}^{q+1} K_{\lambda_i}}{\sim}$$

vem

$$f^{-1}(c) \cong \frac{V \setminus \bigsqcup_{i=1}^k \phi_i(S^{\lambda_i-1} \times 0) + \sum_{i=1}^k K_{\lambda_i}}{\sim} \cong$$

$$\cong \frac{A + [V \setminus (V_1 + V_2)] \setminus \bigsqcup_{i=q+1}^k \phi_i(S^{\lambda_i-1} \times 0) + \sum_{i=q+1}^k K_{\lambda_i}}{\sim}$$

e, por indução, vem que $f^{-1}(c)$ é conexa.

Q.E.D.

§.5. Grafos

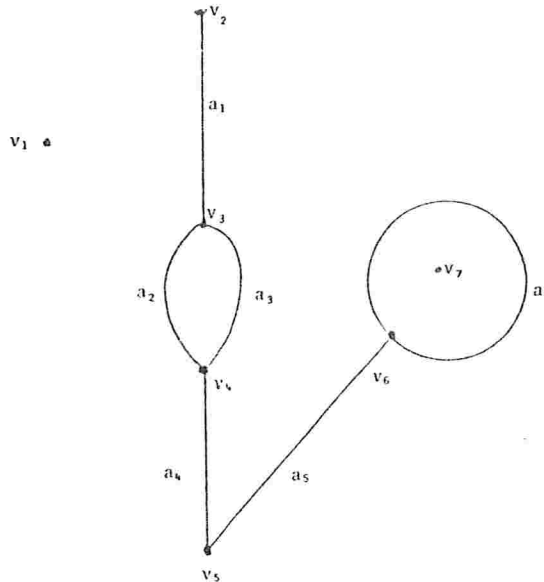
Definição 5.0. Um grafo Γ é um par (γ, V) , onde γ é um espaço topológico de Hausdorff e V é um subespaço de γ , verificando as seguintes condições:

- i) V é um subespaço fechado e discreto de γ . Os pontos de V chamam-se vértices de Γ .
- ii) $\gamma \setminus V$ é união disjunta de subconjuntos abertos e_i , cada um dos quais homeomorfo a um intervalo aberto da reta real. Os conjuntos e_i chamam-se arestas de Γ .
- iii) Para cada aresta e_i , seu bordo $\overline{e_i} \setminus e_i$ é um subconjunto de V formado por um ou dois pontos. Se $\overline{e_i} \setminus e_i$ consta de dois pontos, então o par $(\overline{e_i}, e_i)$ é homeomorfo ao par $([0,1], (0,1))$; se $\overline{e_i} \setminus e_i$ consta de um só ponto, então o par $(\overline{e_i}, e_i)$ é homeomorfo ao par $(S^1, S^1 \setminus \text{ponto})$ onde um par topológico (A, B) é constituído de um espaço topológico A e de um subespaço B de A e um homeomorfismo de pares $h: (A, B) \rightarrow (A', B')$ é um homeomorfismo $h: A \rightarrow A'$ tal que $h(B) = B'$.
- iv) A topologia de γ é tal que um subconjunto $A \subset \gamma$ é fechado se, e somente se, para cada aresta e_i , $A \cap \overline{e_i}$ é fechado em $\overline{e_i}$.

Notas e definições 5.1.

- i) A condição iv) da definição 5.0. é automaticamente satisfeita no caso em que o grafo é finito. Um grafo é finito se tem um número finito de arestas e de vértices. (vide [10], pág. 188).

- ii) Um grafo é um CW-complexo 1-dimensional. (Vide [10], pág. 187).
 - iii) Um grafo é compacto (conexo) se, e somente se, γ é compacto (conexo).
 - iv) Grafos podem ser representados através de diagramas: cada vértice é representado por um ponto e cada aresta é uma curva sem auto intersecções ligando seus vértices.
- Exemplo:



Um grafo é dito planar se admite um diagrama tal que, se duas de suas arestas (fechadas) se intersectam, o fazem segundo vértices.

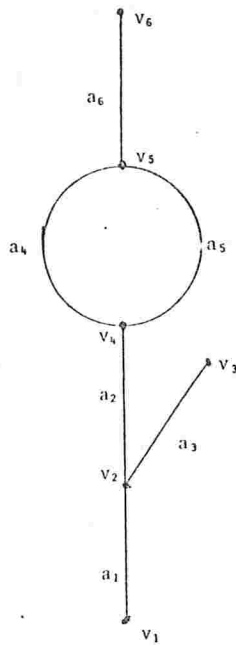
- v) Uma aresta e_i é um laço se $\overline{e_i} \setminus e_i$ é um ponto; uma ligação, caso contrário.
- vi) Um grafo é uma árvore se não contém laços ou duas arestas com o mesmo par de extremos.
- vii) O tamanho de um grafo finito é o número $v+a$, onde v é o número de vértices e a é

o número de arestas.

Exemplos 5.2.

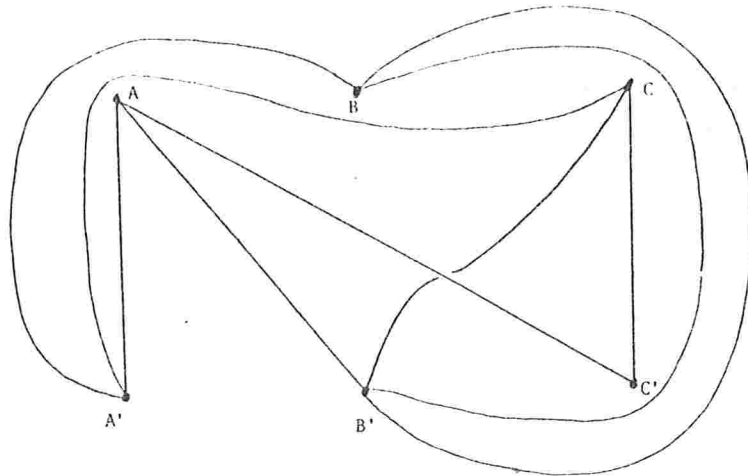
1) $\Gamma = (\mathbb{R}, \mathbb{Z})$ é um grafo infinito.

2)



é diagrama de um grafo finito.

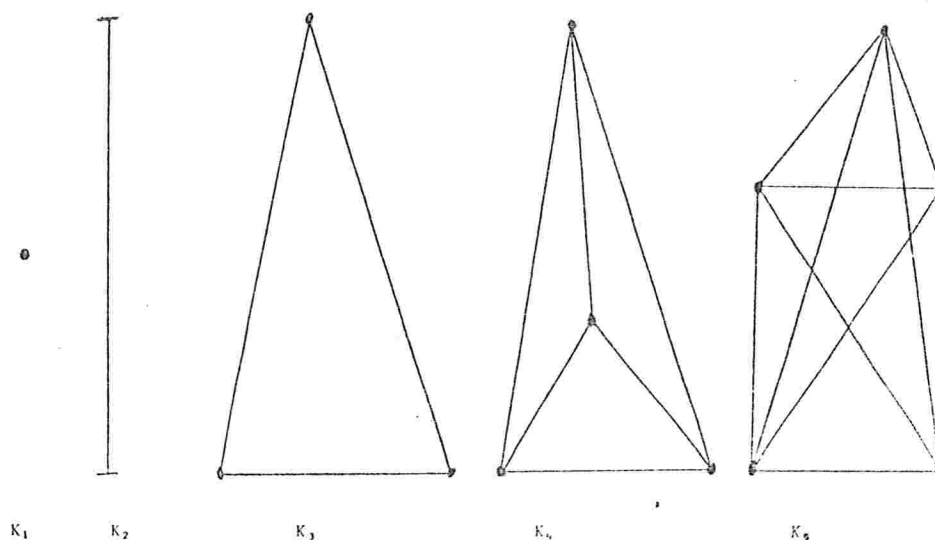
3)



é um diagrama do grafo que contém 6 vértices divididos em duas classes: A, B, C e A', B', C' sendo que de cada vértice da primei-

ra sai uma aresta para cada vértice da segunda.

- 4) Os grafos K_p que são constituídos de p vértices e dois vértices distintos são ligados por uma aresta, são denominados grafos completos de p vértices.



Observação 5.3. Os grafos do exemplo 3 e K_5 são chamados grafos de Kuratowsky que demonstrou que eles não são planares e que todo grafo não planar contém um subgrafo homeomorfo a um deles. (Vide [10], pág. 206 e referências lá contidas).

Definição 5.4. Dois grafos $\Gamma = (\gamma, V)$ e $\Gamma' = (\gamma', V')$ são isomorfos se existe um homeomorfismo $k: \gamma \rightarrow \gamma'$ que leva vértices em vértices e arestas em arestas.

Neste caso, diz-se que k é um isomorfismo entre Γ e Γ' .

Nota - Segue-se da definição 5.4. que dois grafos isomorfos são diagramas iguais.

Proposição 5.5. Sejam $\Gamma = (\gamma, V)$ e $\Gamma' = (\gamma', V')$ grafos e

$h: \gamma \rightarrow \gamma'$ um homeomorfismo. São equivalentes:

- i) h é um isomorfismo
- ii) $h(V) = V'$
- iii) h leva arestas em arestas.

Demonstração Que i) \Rightarrow ii) é trivial; ii) \Rightarrow iii) segue do fato que $h(\gamma \setminus V) = \gamma' \setminus V'$; e iii) \Rightarrow i) segue do fato que $h(V) = h(\gamma \setminus \bigsqcup_{i \in I} e_i) = \gamma' \setminus \bigsqcup_{i \in I} h(e_i) = V'$ pois se $\gamma' \setminus \bigsqcup_{i \in I} h(e_i) \neq V'$, então $\gamma' \setminus \bigsqcup_{i \in I} h(e_i)$ contém uma aresta: f . Daí $h^{-1}(f) \subset V$. Uma contradição, h^{-1} é um homeomorfismo aplicando um subconjunto homeomorfo a $(0,1)$ num espaço discreto.

Q.E.D.

C A P Í T U L O 1

0 T E O R E M A D E C L A S S I F I C A Ç Ã O

§.0. Introdução

Neste capítulo definimos equivalência de funções de Reeb de uma função de Morse sobre uma n -variedade diferencial compacta, conexa e sem bordos e demonstramos os teoremas:

Teorema A Se f e g são funções de Morse equivalentes sobre M , então seus grafos de Reeb são isomorfos.

Teorema B Se $f, g: M \rightarrow \mathbb{R}$ são funções de Morse estáveis, $\dim M = 2$, com grafos de Reeb isomorfos, então f é equivalente a g .

Também, através de um contra-exemplo se mostra que isomorfismo entre grafos de Reeb não é suficiente para a equivalência de funções de Morse não estáveis em dimensão 2.

§.1. Equivalência de Funções

Definição 1.0. Duas funções diferenciáveis $f, g: M \rightarrow \mathbb{R}$ são equivalentes se existem difeomorfismos $h: M \rightarrow M$ e $k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ h \downarrow & & \downarrow k \\ M & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \end{array} \quad \text{é comutativo.}$$

Usamos a notação $f \sim g$ para exprimir que f é equivalente a g .

Claramente \sim é uma relação de equivalência no conjunto das funções diferenciáveis sobre M .

Proposição 1.1. Sejam $f, g: M \rightarrow \mathbb{R}$ funções diferenciáveis. Se $h: M \rightarrow M$ e $k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são difeomorfismos, então $k \circ f \sim f$ e $g \circ h \sim g$.

Demonstração. Os dois diagramas abaixo são comutativos.

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ 1_M \downarrow & & \downarrow k \\ M & \xrightarrow{k \circ f} & \mathbb{R} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{g \circ f} & \mathbb{R} \\ h \downarrow & & \downarrow 1_{\mathbb{R}} \\ M & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \end{array}$$

Q.E.D.

Proposição 1.2. Se $f, g: M \rightarrow \mathbb{R}$ são funções de Morse equivalentes, então:

- i) p é ponto crítico de f se, e somente se, $h(p)$ é ponto crítico de g .
- ii) p é ponto crítico de f se, e somente se, p é ponto crítico de $k \circ f$.
- iii) $\text{ind}_{k \circ f} p = \text{ind}_g h(p)$.
- iv) Se $k' > 0$ então $\text{ind}_f p = \text{ind}_{k \circ p} p$ e, $k' < 0$,

então $\text{ind}_{k \circ f} p = n - \text{ind}_f p$, onde $n = \dim M$.

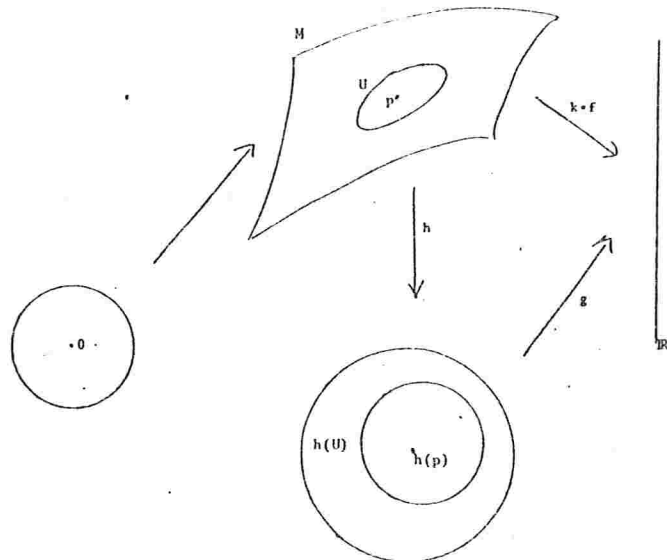
Demonstração

i) $k \circ f = g \circ h$ e, pela regra da cadeia, $dk_{f(p)} \circ df_p = dg_{h(p)} \circ dh_p$. Como dk e dh são isomorfismos, vem

$$df_p = 0 \Rightarrow dg_{h(p)} = 0.$$

ii) Como em i), $df_p = 0 \Leftrightarrow dk_{f(p)} \circ df_p = d(k \circ f)_p = 0$.

iii)



Seja (ϕ, U) uma carta de Morse para $k \circ f$ em p .

Temos

$$k \circ f \circ \phi(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n a_i x_i^2, \text{ onde } \vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$$

e $a_i = \pm 1$, $i = 1, \dots, n$. $(h \circ \phi, h(U))$ é uma carta em $h(p)$, relativamente a qual tem-se,

$$g \circ h \circ \phi(\vec{x}) = k \circ f \circ \phi(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n a_i x_i^2,$$

donde $\text{ind}_{k \circ f} p = \text{ind}_g h(p)$.

iv) Com efeito, pela regra da cadeia, se p é ponto crítico de f ,

$H(k \circ f)_p = k'(f(p)) \cdot H(f)_p$, donde é suficiente considerar os casos em que k é $1_{\mathbb{R}}$ ou $-1_{\mathbb{R}}$. Tem-se imediatamente o resultado.

Q.E.D.

§.2. Grafo de Reeb de Uma
Função de Morse

Dada uma função de Morse $f:M \rightarrow \mathbb{R}$ sobre uma n -variedade compacta, conexa e sem bordo, associaremos a f um grafo $\Gamma(f) = (\gamma(f), V_f)$. Para isso, definimos uma relação sobre M por:

$$R_f = \{(x,y) \in M \times M \mid x \text{ e } y \text{ estão na mesma componente conexa de } f^{-1}(t) \text{ para algum } t \in \text{Im}(f)\}.$$

Proposição 2.0. R_f é uma relação de equivalência sobre M .

Demonstração Claramente R_f é reflexiva e simétrica; e se $xR_f y$ e $yR_f z$, x , y e z estão na mesma componente conexa em $f^{-1}(f(y))$, donde $xR_f z$ e R_f é transitiva.

Q.E.D.

Seja $\gamma(f) = M/R_f$ o espaço quociente de M pela relação R_f .

Tem-se uma função

$$\bar{f}:\gamma(f) \rightarrow \mathbb{R}$$

$\bar{f}(\bar{x}) = f(x)$. f é bem definida é contínua, pois $f = \bar{f} \circ p$, onde $p:M \rightarrow \gamma(f)$ é a projeção canônica.

No que se segue, M^n denota sempre uma n -variedade compacta, conexa e sem bordo e $f:M^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse sobre M^n .

Proposição 2.2. i) O gráfico de R_f é fechado em $M \times M$.

ii) $p:M \rightarrow \gamma(f)$ é uma aplicação fechada.

iii) $\gamma(f)$ é um espaço de Hausdorff.

iv) $\gamma(f)$ é conexo por caminhos.

Demonstração i) Seja $(x,y) \in M \times M$, $(x,y) \notin \text{Graf}(R_f)$, $f(x) = a$ e $f(y) = b$.

Se $a \neq b$, sejam $\epsilon = \frac{|a - b|}{2}$, $A = f^{-1}(a - \epsilon, a + \epsilon)$

e $B = f^{-1}(b - \epsilon, b + \epsilon)$. Então $A \times B$ é uma vizinhança aberta de (x, y) com $A \times B \cap \text{Graf}(R_f) = \emptyset$.

Se $a = b$, $f^{-1}(a)$ contém pelo menos duas componentes conexas: \bar{x} e \bar{y} , as classes de x e y , respectivamente. Se a é valor regular de f , existe $\epsilon > 0$ tal que $[a - \epsilon, a + \epsilon]$ não contém valor crítico de f . Segue-se que $f^{-1}[a - \epsilon, a + \epsilon]$ é um cobordismo produto e, x e y estão em componentes conexas distintas deste cobordismo. Neste caso existem vizinhanças V_x e V_y de x e y em M tais que $V_x \times V_y \cap \text{graf}(R_f) = \emptyset$. Se a não é valor regular de f , da mesma forma, existe $\epsilon > 0$ tal que em $[a - \epsilon, a + \epsilon]$ a é o único valor crítico de f . Segue-se que x e y estão em componentes conexas distintas de $f^{-1}[a - \epsilon, a + \epsilon]$ pelo Teorema 0.4.10. Se V_x é a componente conexa que contém x e V_y é a componente conexa que contém y , tem-se que $V_x \times V_y \cap \text{graf}(R_f) = \emptyset$.

Em qualquer caso (x, y) admite uma vizinhança em $M \times M$ disjunta de $\text{graf}(R_f)$, donde $\text{graf}(R_f)$ é fechado em $M \times M$.

ii) Seja F um fechado de M e $\hat{F} = p^{-1}(p(F))$ (\hat{F} é o saturado de F). Tem-se $\hat{F} = p_2(F \times M \cap \text{graf}(R_f))$, onde $p_2: M \times M \rightarrow M$ é dada por $p_2(x, y) = y$. De fato, $x \in \hat{F} \Rightarrow \exists y \in F$ com $(y, x) \in R_f \Rightarrow x \in p_2(F \times M \cap \text{graf}(R_f)) \Rightarrow (y, x) \in F \times M \cap \text{graf}(R_f) \Rightarrow (y, x) \in F \times M$ e $y R_f x \Rightarrow x \in \hat{F}$.

Dado que $F \times M$ e $\text{graf}(R_f)$ são compactos $F \times M \cap \text{graf}(R_f)$ é compacto, donde $\hat{F} = p_2(F \times M \cap \text{graf}(R_f))$ é compacto (p_2 é contínua) num espaço de Hausdorff e em consequência, fechado.

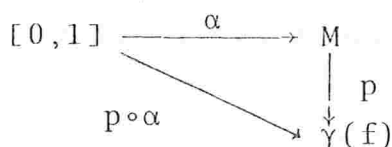
iii) Sejam x_1 e x_2 elementos distintos de $\gamma(f)$. As classes $p^{-1}(x_2)$ e $p^{-1}(x_1)$ são fechadas em M e, dado que M é compacto, tem-se dois abertos disjuntos U_1 e U_2 tais que $p^{-1}(x_i) \subset U_i$, $i = 1, 2$. O complemento $F_i = M \setminus U_i$, $i = 1, 2$,

é fechado em M e seu saturado \widehat{F}_i é um fechado que não encontra $p^{-1}(x_i)$.

$\widehat{U}_i = M \setminus \widehat{F}_i$ é então, uma vizinhança aberta saturada de $p^{-1}(x_i)$ contida em U_i . Com efeito, $p^{-1}(p(\widehat{U}_i)) = p^{-1}(p(M \setminus \widehat{F}_i)) = p^{-1}(\gamma(f) \setminus p(\widehat{F}_i)) = M \setminus \widehat{F}_i = \widehat{U}_i$. Em consequência $V_i = p(\widehat{U}_i)$, $i = 1, 2$ são vizinhanças abertas disjuntas de x_1 e x_2 , respectivamente.

iv) Sejam $x, y \in \gamma(f)$ com representantes a e b , respectivamente. Do fato que uma variedade conexa é conexa por caminhos, segue-se que, em M existe um caminho $\alpha: [0, 1] \rightarrow M$ tal que $\alpha(0) = a$ e $\alpha(1) = b$.

Segue-se que $p \circ \alpha$ é um caminho em $\gamma(f)$ ligando x a y .



Q.E.D.

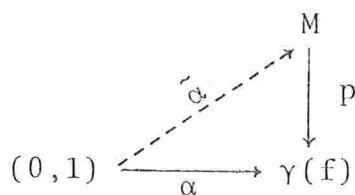
Dada $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse, suponhamos fixado sobre M um campo pseudo-gradiente ξ para f . $\phi: \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ denota o grupo a um parâmetro de difeomorfismos de M gerado por ξ .

Também consideramos o conjunto

$V_f = \{\bar{x} \in \gamma(f) \mid x \text{ é ponto crítico de } f\}$ e definimos:

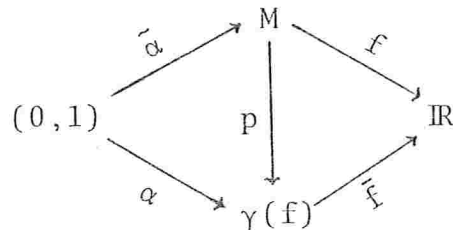
Definição 2.3. Um caminho $\alpha: [0, 1] \rightarrow \gamma(f)$ diz-se próprio se:

- i) $\alpha([0, 1]) \cap V_f = \{\alpha(0), \alpha(1)\}$; e
- ii) $\alpha|_{(0, 1)}$ admite um levantamento $\tilde{\alpha}: (0, 1) \rightarrow M$ que é uma parametrização de uma curva integral de ξ .



Notas i) $\tilde{\alpha}$ é injetivo.

De fato,



$\tilde{f} \circ \alpha(t) = \tilde{f}(p \circ \tilde{\alpha})(t) = f \tilde{\alpha}(t)$, donde $\tilde{f} \circ \alpha = f \circ \tilde{\alpha}$. Em consequência, $\alpha(t_1) = \alpha(t_2) \Rightarrow \tilde{f}(\alpha(t_1)) = \tilde{f}(\alpha(t_2)) \Rightarrow$
 $\Rightarrow f(\tilde{\alpha}(t_1)) = f(\tilde{\alpha}(t_2)) \Rightarrow t_1 = t_2$,

pois $\frac{d(f \circ \tilde{\alpha})}{dt} = \xi(f) > 0$ ao longo do complemento dos pontos

críticos de f e $f \circ \tilde{\alpha}$ é injetiva.

ii) Dizemos que dois caminhos próprios são equivalentes se têm o mesmo traço em $\gamma(f)$. Claramente a relação acima é de equivalência; e, por um caminho próprio $\alpha: [0,1] \rightarrow \gamma(f)$ designamos uma classe de caminhos próprios.

iii) Se $\alpha_i: [0,1] \rightarrow \gamma(f)$ é próprio, pomos $e_i = \alpha_i(0,1)$ e $\bar{e}_i = \alpha_i([0,1])$.

Os Lemas que seguem constituem a verificação por partes de que $(\gamma(f), V_f)$ tem a estrutura de grafo (cap. 0, §.5.).

Lema 2.4. Dado $x \in V_f$, existe $y \in V_f$ e um caminho próprio de x a y .

Demonstração Com efeito, seja $a \in p^{-1}(x)$ um ponto crítico e $f(a) = c$. Existe $\varepsilon > 0$ tal que c é o único valor crítico de f em $[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$ donde tem-se uma tríada $(W; V_0, V_1)$, onde W é a componente conexa de $f^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$ que contém a , $V_0 = f^{-1}(c - \varepsilon) \cap W$ e $V_1 = f^{-1}(c + \varepsilon) \cap W$.

Seja $\phi: \mathbb{R} \times M \rightarrow M$, $(t, x) \mapsto \phi_t(x)$ o fluxo de ξ .

1) Se $\text{ind}_f a = 0$, a é um mínimo e W é difeomorfa a um disco. Tomando-se $b \in W$, $b \neq a$, a curva integral $t \rightarrow \phi_t(b)$ tem a para α -limite. Se $f(\phi_t(b))$ é valor regular de f para todo valor regular de f para todo $t \in \mathbb{R}$, mudando-se de parâmetro, tem-se a curva $\bar{\phi}(b): (0,1) \rightarrow M$ que pode ser estendida continuamente a $[0,1]$ por:

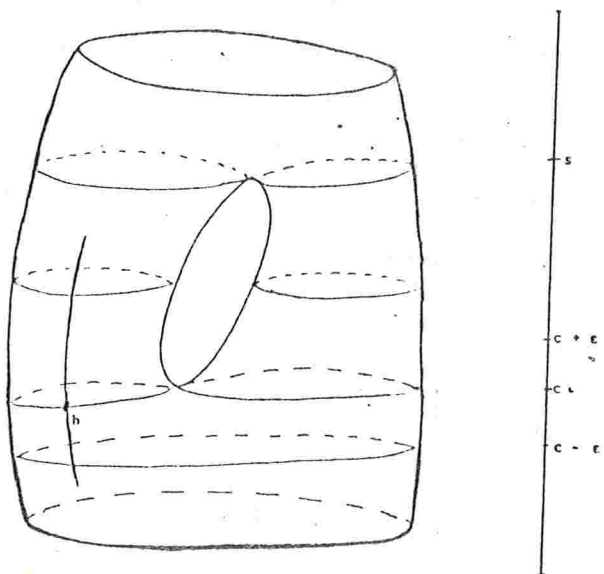
$$\bar{\phi}_0(b) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \phi_t(b) = a \quad e$$

$$\bar{\phi}_1(b) = \lim_{t \rightarrow 1^-} \phi_t(b). \text{ Claramente } \bar{\phi}_1(b) \text{ é}$$

ponto crítico de f e passando-se $\bar{\phi}(b)$ ao quociente obtém-se um caminho próprio de x a $y = p(\bar{\phi}_1(b)) \in V_f$.

2) No caso em que $\text{ind}_f a = n$, então $\text{ind}_{-f} a = 0$ e a prova é a mesma.

3) No caso que $\text{ind}_f a = \lambda$, com $\lambda \neq 0, n$, seja $b \in p^{-1}(x)$ e W um ponto regular de f e $\phi(b): \mathbb{R} \rightarrow M$ a curva integral de ξ que passa por b . Seja $A = \{t \in \mathbb{R} \mid \text{a componente conexa de } f^{-1}[c + \epsilon, t] \text{ que contém } V_1 \text{ é um cobordismo produto e } s = \sup A\}$. Tem-se que $s \in \text{Im}(f)$ é um valor crítico de f e $s \notin A$. Segue-se disso que o fecho da componente conexa de $f^{-1}([c - \epsilon, s])$ que contém W , contém um ponto crítico de $f: b'$.



Se a curva integral por $b, \phi_t(b) : \mathbb{R} \rightarrow M$, tem b' para w -limite, mudando-se de parâmetro e estendendo $\phi(b)$ à direita obtém-se o caminho próprio desejado. Se b' não é w -limite de $\phi(b)$, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $f\phi_\alpha(b) = f(b')$ e assim $\phi(b) : [0, \alpha] \rightarrow M$ mudando-se de parâmetro e passando-se ao quociente, produz o caminho próprio requerido.

Q.E.D.

Lema 2.5. Se $x \in \gamma(f) \setminus V_f$, então x pertence ao traço de algum caminho próprio.

Demonstração Com efeito, se $x \in \gamma(f) \setminus V_f$ e $a \in p^{-1}(x)$, então a é ponto regular. A curva integral $\phi(a) : \mathbb{R} \rightarrow M$ produz um caminho próprio em $\gamma(f)$ cujo traço contém x .

Q.E.D.

Lema 2.6. $e_i = \alpha_i(0,1)$ é aberto em $\gamma(f)$.

Demonstração Seja $x \in e_i$. $p^{-1}(x)$ é uma superfície regular de M , isto é, $p^{-1}(x)$ não contém ponto crítico de f e é aplicada por f em $f(x) = c$.

$p^{-1}(x)$ admite uma vizinhança em M difeomorfa a $p^{-1}(x) \times [a,b]$ com $c \in (a,b)$. De fato, se c é valor regular de f existe $\epsilon > 0$ tal que $[a,b]$, onde $a = c - \epsilon, b = c + \epsilon$, não contém valor crítico de f . Segue-se que $f^{-1}[a,b]$ é um cobordismo produto e, em particular, a componente conexa de $f^{-1}[a,b]$ que contém $p^{-1}(x)$ é difeomorfa a $p^{-1}(x) \times [a,b]$.

Se c é valor crítico de f , então existe $\epsilon > 0$ tal que c é o único valor crítico de f em $[a,b]$. A componente conexa de $f^{-1}[a,b]$ que contém $p^{-1}(x)$ é um cobordismo produto e como no caso anterior, $p^{-1}(x)$ tem uma vizinhança difeomorfa a $p^{-1}(x) \times [a,b]$.

Em qualquer caso, $p^{-1}(x)$ tem uma vizinhança aber-

ta U em M difeomorfa a $p^{-1}(x) \times (a,b)$ que é um aberto saturado. Logo $p(U)$ é um aberto em $\gamma(f)$ contido em e_i . Em consequência, e_i é aberto pois é uma vizinhança de cada um de seus pontos.

Q.E.D.

Lema 2.7. Se $x, y \in V_f$, $x \neq y$ são tais que $\bar{f}(x) = c = \bar{f}(y)$, então não existe caminho próprio ligando x a y .

Demonstração Se α é um caminho próprio ligando x a y , $\bar{f} \circ \alpha$ é injetiva e tem-se $\bar{f}(x) = \bar{f}(\alpha(0)) \neq \bar{f}(\alpha(1)) = \bar{f}(y)$. Uma contradição.

Q.E.D.

Lema 2.8. $\Gamma_f = (\gamma(f), V_f)$ é um grafo finito.

Demonstração Com efeito, em vista da definição 0.5.0., tem-se:

i) $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ sendo uma função de Morse sobre M compacto tem um número finito de pontos críticos, donde V_f é finito. Como $\gamma(f)$ é um espaço de Hausdorff, segue-se que V_f é fechado e discreto.

ii) $\gamma(f) \setminus V_f$ é reunião disjunta de subconjuntos abertos e_i , cada um dos quais homeomorfo a $(0,1)$.

Com efeito, seja $e_i = \alpha_i(0,1)$, onde $\alpha_i: [0,1] \rightarrow \gamma(f)$ é um caminho próprio em $\gamma(f)$. α é um homeomorfismo de $(0,1)$ em e_i , pois é restrição de uma aplicação contínua e injetiva de um espaço compacto num espaço de Hausdorff. Pelo Lema 2.5., segue-se que $\gamma(f) \setminus V_f = \bigsqcup_{i \in I} e_i$, onde e_i é aberto pelo Lema 2.6.. Resta a verificação de que a união é disjunta e isto se dá, pois $x \in e_i \cap e_j$ e $a, b \in p^{-1}(x)$, os caminhos $\phi(a)$ e $\phi(b)$ restritos a $p^{-1}(e_i \cap e_j)$ são tais que $p \circ \phi(a)$ e $p \circ \phi(b)$ têm o mesmo traço em $\gamma(f)$, donde $e_i = e_j$. Essencialmente isto decorre do fato que uma variedade não possui auto-intersecções.

iii) Para cada aresta e_i , seu bordo $\overline{e_i} \setminus e_i$ é um subconjunto de V_f formado por dois pontos.

De fato, $\overline{e_i} \setminus e_i = \alpha[0,1] \setminus \alpha(0,1) = \{\alpha(0), \alpha(1)\} \subset V_f$ com $\alpha(0) \neq \alpha(1)$.

iv) Mostraremos que Γ_f é finito.

Com efeito, V_f é finito e $\gamma(f)$ é compacto. Se, por absurdo, Γ_f é infinito, segue-se que Γ_f tem um número infinito de arestas, donde existem dois vértices $x, y \in V_f$ que são ligados por uma infinidade de arestas. Seja $a = \bar{f}(x)$ e $b = \bar{f}(y)$. Se c é tal que $a < c < b$, tem-se que $f^{-1}(c)$ é compacto (fechado num compacto) e discreto ($\gamma(f) \setminus V_f$ é união disjunta de abertos) o que é uma contradição. Assim Γ_f é finito pois tem um número finito de vértices e de arestas.

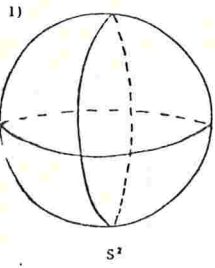
Q.E.D.

Nota Tendo em vista a definição 0.5.0., um grafo é um par $\Gamma = (\gamma, V)$, onde γ é um espaço topológico de Hausdorff e V é um subespaço fechado e discreto de γ verificando condições i)–iv).

Segue-se que $\Gamma = (\gamma, V)$ não depende dos particulares homeomorfismos das definições 0.5.0., donde $\Gamma_f = (\gamma_f, V_f)$ está vinculado à função $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ mas não depende do campo pseudo-gradiente fixado para a verificação efetiva de que Γ_f é um grafo.

Exemplos

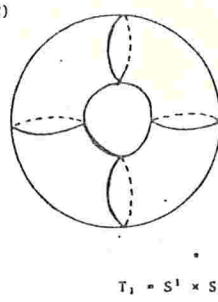
Função altura sobre M



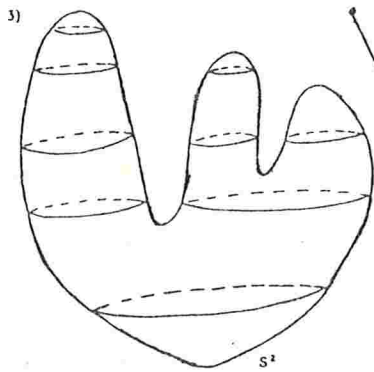
Grafo



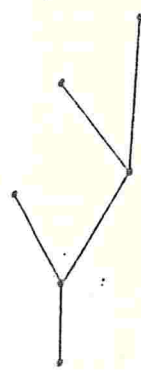
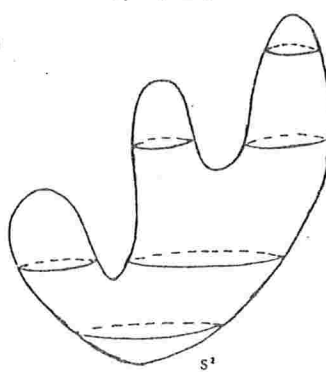
Função altura sobre M



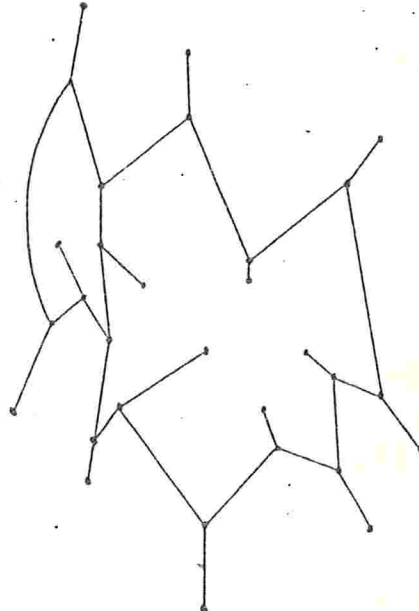
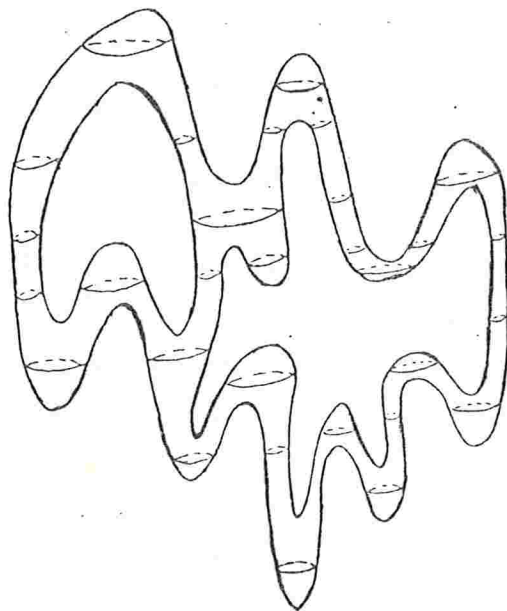
Grafo



4)



5)



6) Seja $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ dada por $f(x,y,z) = (x^2 - y^2, xy, xz, yz)$. f é uma aplicação diferenciável e segundo ([8], pág. 100) ou ([3], pág. 114), $f(S^2) = P^2$, isto é, a imagem de S^2 por f é o plano projetivo real 2-dimensional imerso em \mathbb{R}^4 e $f|_{S^2}$ é um difeomorfismo local de S^2 em P^2 .

Seja $g = \pi_1|_{P^2}$, onde $\pi_1: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ é a projeção na primeira coordenada. g é uma função de Morse sobre P^2 com exatamente três pontos críticos. Com efeito, considerando-se sobre S^2 um atlas com seis cartas (ϕ_i^{-1}, U_i) , $i = 1, 2, \dots, 6$, onde $\phi_i: B^2 \rightarrow U_i$ são dadas por: $\phi_{1,4}(x,y) = (\pm\sqrt{1-x^2-y^2}, x, y)$, $\phi_{2,5}(x,y) = (x, \pm\sqrt{1-x^2-y^2}, y)$ e $\phi_{3,6}(x,y) = (x, y, \pm\sqrt{1-x^2-y^2})$, sendo $h = g \circ f|_{S^2}$, vem que $h \circ \phi_{1,4}(x,y) = 1 - x^2 - 2y^2$, $h \circ \phi_{2,5}(x,y) = 2x^2 + y^2 - 1$ e $h \circ \phi_{3,6}(x,y) = x^2 - y^2$; segue-se que os pontos críticos de h em S^2 são $(\pm 1, 0, 0)$, $(0, \pm 1, 0)$ e $(0, 0, \pm 1)$. Como $f|_{S^2}$ é difeomorfismo local, $(\pm 1, 0, 0, 0)$ e $(0, 0, 0, 0)$ são os pontos críticos de g e são e são todos não degenerados. Também os valores críticos de g são $-1, 0$ e 1 , donde g é uma função de Morse estável sobre P^2 com

$$\text{ind}_g(-1, 0, 0, 0) = \text{ind}_h(0, 1, 0) = 0$$

$$\text{ind}_g(0, 0, 0, 0) = \text{ind}_h(0, 0, 1) = 1$$

$$\text{ind}_g(1, 0, 0, 0) = \text{ind}_h(1, 0, 0) = 2.$$

Pelo Teorema 0.4.10., $g^{-1}(0)$ é conexa, donde g é o grafo com três vértices e duas arestas.



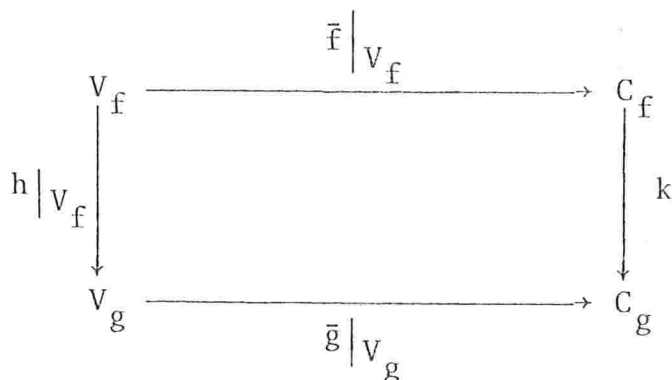
□

Definição 2.9. Seja $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse. A terna $\Gamma(f) = (\gamma(f), V_f, \bar{f})$ é o grafo de Reeb da função de Morse f .

Se $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}$ é de Morse, colocamos

$C_f = \{t \in \mathbb{R} \mid t \text{ é valor crítico de } f\}$ e consideramos sobre C_f a ordem induzida da reta.

Definição 2.10. Se $f, g: M^n \rightarrow \mathbb{R}$ são duas funções de Morse sobre M com grafos $\Gamma(f)$ e $\Gamma(g)$, respectivamente, dizemos que $\Gamma(f)$ é isomorfo a $\Gamma(g)$ e indicamos por $\Gamma(f) \cong \Gamma(g)$, se $\Gamma_f = (\gamma(f), V_f)$ e $\Gamma_g = (\gamma(g), V_g)$ são isomorfos no sentido de 0.5.7. por um isomorfismo h tal que



é comutativo, onde $k: C_f \rightarrow C_g$ é uma aplicação (bijetora) monotônica.

A relação de isomorfismo é uma relação de equivalência para grafos de Reeb.

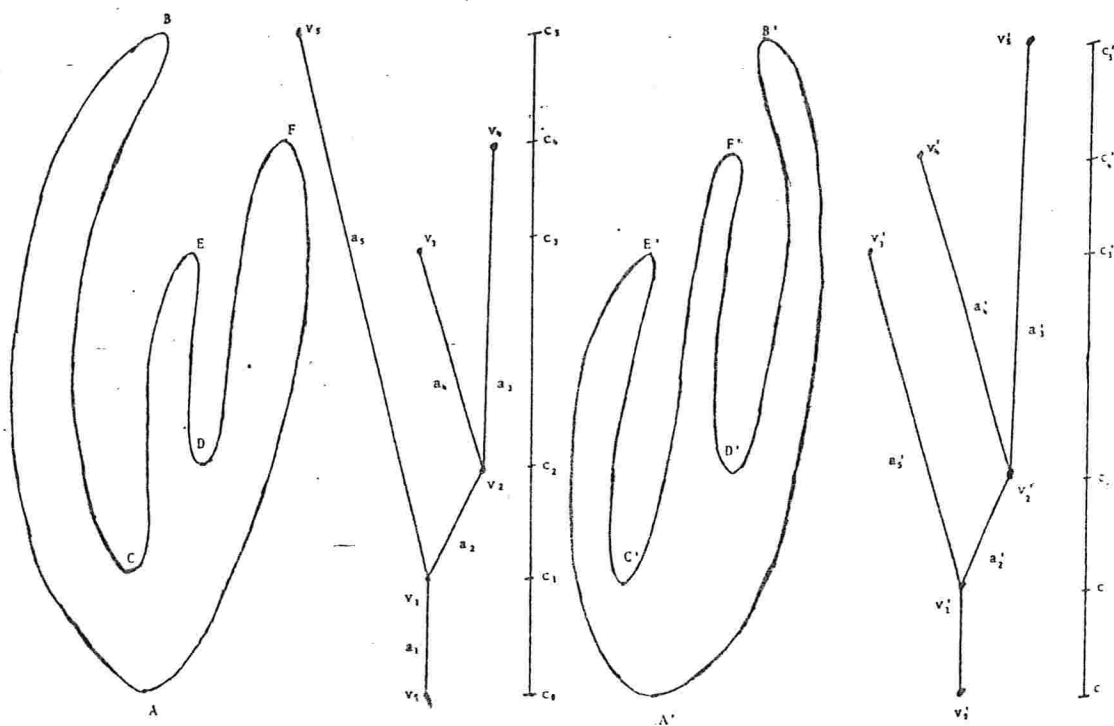
Essencialmente o grafo de Reeb de uma função de Morse $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}$ é o grafo $\Gamma_f = (\gamma(f), V_f)$. Um dos exemplos abaixo mostra que isomorfismo de grafos no sentido 0.5.7. não é suficiente para se concluir a equivalência das funções. Com esse fim, se introduz a função $\bar{f}: \gamma(f) \rightarrow \mathbb{R}$ que tem na definição 2.10. o papel de, de certa forma, fixar "tamanhos" para as arestas, produzindo uma restrição ao conceito de isomorfismo.

Conforme veremos no §.3., essa restrição resultará suficiente para o problema da equivalência.

Exemplos e Contra-exemplos

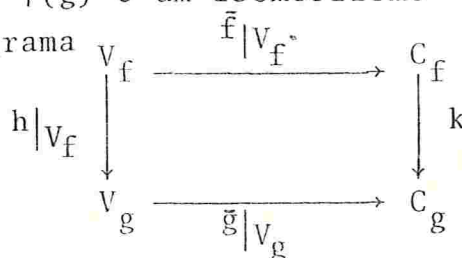
1) Todos os exemplos dados após o Teorema 2.8. representam uma função de Morse cujo grafo de Reeb é o grafo ali representado junto a função altura.

2) Sobre S^2 consideremos as duas funções descritas abaixo:



Os grafos $(\gamma(f), V_f)$ e $(\gamma(g), V_g)$ são isomorfos como grafos, mas não são isomorfos como grafos de Reeb.

Com efeito, se $h: \gamma(f) \rightarrow \gamma(g)$ é um isomorfismo e $k: C_f \rightarrow C_g$ é monotônica com o diagrama



comutativo, vem: $k(c_0) = c'_0$ ou $k(c_0) = c'_5$. Do fato de $k \circ \bar{f}|_{V_f} = \bar{g}|_{V_g} \circ \bar{h}|_{V_f}$, temos:

$$\begin{aligned} \text{a) } k(c_0) = c'_0 &\Rightarrow h(v_0) = v'_0 \Rightarrow h(a_1) = a'_1 \\ &\Rightarrow h(v_1) = v'_1 \Rightarrow h(a_2) = a'_2 \text{ ou } a'_5. \end{aligned}$$

$h(a_2) = a'_2 \Rightarrow h(a_5) = a'_5 \Rightarrow h(v_5) = v'_3$. Uma contradição, pois $\bar{g} h(v_5) = c'_3 \neq c'_5 = k(c_5) = k \bar{f}(v_5)$.

$h(a_2) = a'_5 \Rightarrow h(v_2) = v'_3$. Uma contradição, pois $\bar{g} h(v_2) = c'_3 \neq c'_2 = k(c_2) = k \bar{f}(v_2)$.

b) $k(c_0) = c'_5 \Rightarrow h(v_0) = v'_5 \Rightarrow h(a_1) = a'_3 \Rightarrow h(v_1) = v'_2$. Novamente uma contradição, pois $\bar{g} h(v_1) = \bar{g}(v'_2) = c'_2 \neq c'_4 = k(c_1) = k \bar{f}(v_1)$.

Logo os grafos de Reeb $\Gamma(f)$ e $\Gamma(g)$ não são isomorfos.

Também, as funções f e g não são equivalentes.

Com efeito, se $h: S^2 \rightarrow S^2$ e $k: [c_0, c_5] \rightarrow [c'_0, c'_5]$ são difeomorfismos tais que

$$\begin{array}{ccc} S^2 & \xrightarrow{f} & [c_0, c_1] \\ h \downarrow & & \downarrow k \\ S^2 & \xrightarrow{g} & [c'_0, c'_5] \end{array}$$

é comutativo, consideremos dois casos:

1º) $k' > 0$

Seja $\varepsilon > 0$ tal que $c'_1 < c'_2 - \varepsilon$ e, do fato de $k(c_5) = c'_5$, seja $\delta > 0$ tal que $k^{-1}[c'_2 - \varepsilon, c'_5] = [c_2 - \delta, c_5]$. Temos que $f^{-1}(k^{-1}[c'_2 - \varepsilon, c'_5]) = f^{-1}[c_2 - \delta, c_5] = h^{-1}(g^{-1}[c'_2 - \varepsilon, c'_5])$.

Com as notações introduzidas na figura anterior e pela comutatividade do diagrama acima, $h(B) = B'$ e $h(D) = D'$. Isto é um absurdo, pois $h: f^{-1}[c_2 - \delta, c_5] \rightarrow g^{-1}[c'_2 - \varepsilon, c'_5]$ é um difeomorfismo, B e D estão em componentes conexas distintas de

$f^{-1}[c_2 - \delta, c_5]$, B' e D' estão na mesma componente conexa em $g^{-1}[c'_2 - \varepsilon, c'_5]$ com $h(B) = B'$ e $h(D) = D'$.

2º) $k' < 0$

Neste caso $k(c_0) = c'_5$ e, em consequência $k(c_1) = c'_4$. Isto é impossível, pois em $f^{-1}(c_1)$, f tem um ponto crítico de índice 1, donde $f^{-1}(k^{-1}(c'_4))$, $k \circ f$ tem um ponto crítico de índice 1 e, por outro lado, em $g^{-1}(c'_4)$, g tem um ponto crítico de índice 2 e h preserva índices numa equivalência.

Assim f e g não são equivalentes.

Proposição 2.11. Se $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de Morse estável, então no grafo $\Gamma(f) = (\gamma(f), V_f, \bar{f})$ incidindo em um vértice tem-se, no máximo três arestas.

Demonstração Com efeito, se f é estável e p é um ponto crítico, sejam $c = f(p)$, $\varepsilon > 0$ tal que p é o único ponto crítico de f em $[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$, $W = f^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$, $V = f^{-1}(c - \varepsilon)$ e $V' = f^{-1}(c + \varepsilon)$.

Pelo Teorema 0.4.5. a componente conexa de W que contém p é difeomorfa a $\omega(V_1, \phi)$, onde $\phi: S^{\lambda-1} \times B^{n-\lambda} \rightarrow V_1$ é um mergulho, $\lambda = \text{ind}_f p$ e V_1 é soma disjunta das componentes conexas de V tal que $\text{Im}(\phi) \cap V_1 \neq \emptyset$. Nestas condições

$$V' \approx \chi(V_1, \phi) + (V \setminus V_1).$$

Seja $\alpha = n^\circ$ de componentes conexas de V e $\beta = n^\circ$ de componentes conexas de V' .

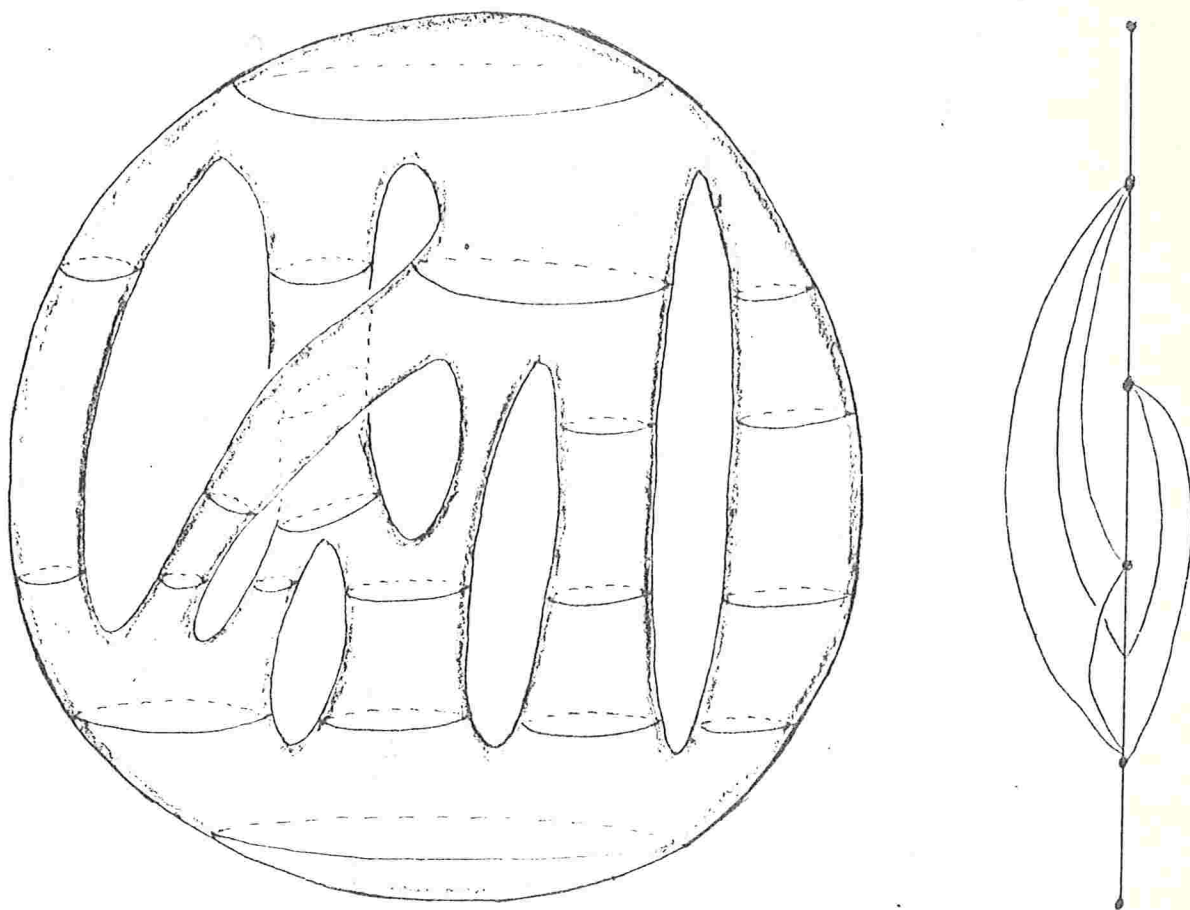
Um cálculo semelhante ao do Teorema 0.4.10. mostra que $|\alpha - \beta| = 0$ ou $|\alpha - \beta| = 1$, donde incidindo em um vértice tem-se, no máximo três arestas.

Q.E.D.

Damos abaixo dois contra-exemplos que demonstram que os grafos de Reeb não são, necessariamente planares.

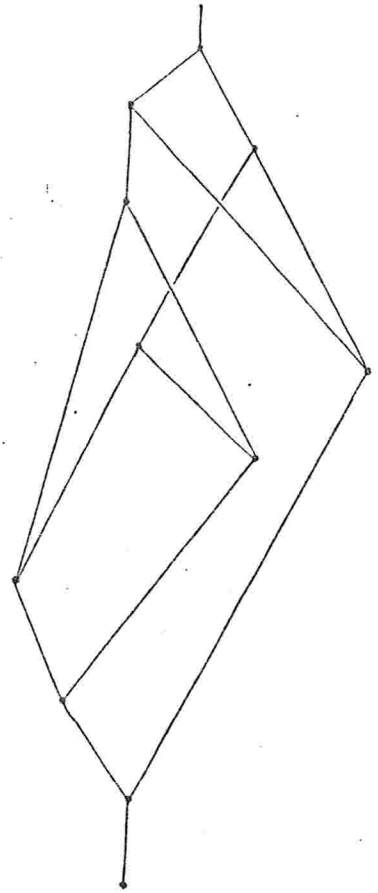
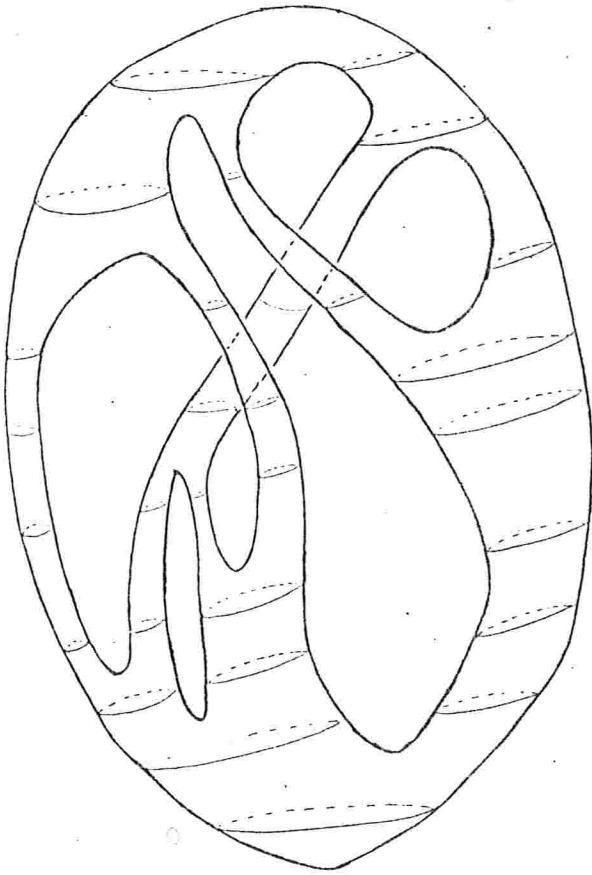
Contra-exemplos 2.12.

- i) O exemplo seguinte mostra uma função de Morse (função altura) sobre a superfície orientável de gênero 6 mergulhada em \mathbb{R}^3 cujo grafo contém um subgrafo isomorfo a K_5 ; sendo, portanto, não planar.



- ii) Este exemplo mostra uma função de Morse sobre a superfície de gênero 5 cujo grafo de Reeb contém um

subgrafo homeomorfo ao grafo do exemplo 3 de 0.
5.2.



§.3. O Teorema de Classificação

Finalmente estamos em condições de demonstrar os Teoremas A e B enunciados na introdução deste capítulo.

Lembramos que, boa parte da prova de B já foi feita no capítulo anterior em proposições que serão citadas na demonstração.

Os Lemas seguintes são importantes:

Lema 3.0. Se $f: M^n \rightarrow [a, b]$ é uma função de Morse e $k: [a, b] \rightarrow [c, d]$ é um difeomorfismo, então:

- i) $\gamma(f) = \gamma(k \circ f)$
- ii) $V_f = V_{k \circ f}$
- iii) $\overline{k \circ f} = k \circ \bar{f}$
- iv) $t \in C_f \iff k(t) \in C_{k \circ f}$.

Essencialmente as condições i)—iv) dizem que $\Gamma(f) \equiv \Gamma(k \circ f)$ canonicamente.

Demonstração Com efeito,

- $x R_f y \iff x, y$ pertencem à mesma componente conexa de $f^{-1}(t)$
- $\iff x, y$ pertencem à mesma componente conexa de $f^{-1}k^{-1}(s)$
- $\iff x, y$ pertencem à mesma componente conexa de $(k \circ f)^{-1}(s)$
- $\iff x R_{k \circ f} y$.

Assim $R_f = R_{k \circ f}$, donde $\gamma(f) = \gamma(k \circ f)$ e vale i).

Além disso, p é ponto crítico de f se, e somente se, p é ponto crítico de $k \circ f$ e tem-se ii) e iv).

Por outro lado, $k \circ \bar{f}(x) = k f(x) = \overline{k \circ f}(\bar{x})$, donde iii).

Q.E.D.

Lema 3.1. Se $f:M^n \rightarrow [a,b]$ e $g:M^n \rightarrow [c,d]$ são funções de Morse com grafos de Reeb isomorfos, então dado um difeomorfismo $k:[a,b] \rightarrow [c,d]$ tal que $k|_{C_f} = k'$, onde $k':C_f \rightarrow C_g$ é a aplicação monôtonica da equivalência dos grafos, existe um homeomorfismo $h:\gamma(k \circ f) \rightarrow \gamma(g)$ tal que $\bar{g} \circ h = k \circ \bar{f}$.

Demonstração Com efeito, do fato de f e g terem grafos de Reeb isomorfos, tem-se aplicações

$$\begin{array}{ccc}
 \gamma(f) & \xrightarrow{\bar{f}} & [a,b] \\
 \downarrow i & & \\
 \gamma(g) & \xrightarrow{\bar{g}} & [c,d]
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 V_f & \xrightarrow{\bar{f}|_{V_f}} & C_f \\
 \downarrow i|_{V_f} & & \downarrow k' \\
 V_g & \xrightarrow{\bar{g}|_{V_g}} & C_g
 \end{array}$$

Se $k:[a,b] \rightarrow [c,d]$ é um difeomorfismo com $k|_{C_f} = k'$, pelo Lema 3.0. tem-se

$$\begin{array}{ccc}
 \gamma(f) = \gamma(k \circ f) & \xrightarrow{k \circ \bar{f}} & [c,d] \\
 \nearrow \gamma(g) & & \downarrow \bar{g}
 \end{array}$$

Seja e uma aresta de $\gamma(k \circ f)$. Existe uma única aresta de $\gamma(g)$, que corresponde a e pelo isomorfismo $i:\gamma(f) \rightarrow \gamma(g)$ e, se \bar{p} e \bar{q} são os vértices de e , tem-se que

$\bar{e} \xrightarrow{k \circ \bar{f}} [k \circ \bar{f}(\bar{p}), k \circ \bar{f}(\bar{q})]$ é um homeomorfismo (estamos supondo $k \circ \bar{f}(\bar{p}) < k \circ \bar{f}(\bar{q})$).

Como k coincide com k' sobre C_f , vem que \bar{g} aplica \bar{d} homeomorficamente sobre $[\bar{g}(\bar{p}), \bar{g}(\bar{q})] = [k \circ \bar{f}(\bar{p}), k \circ \bar{f}(\bar{q})]$.

Assim temos homeomorfismos

$k \circ \bar{f}:\bar{e} \rightarrow [k \circ \bar{f}(\bar{p}), k \circ \bar{f}(\bar{q})]$ e $\bar{g}|_{\bar{d}}:\bar{d} \rightarrow [k \circ \bar{f}(\bar{p}), k \circ \bar{f}(\bar{q})]$, donde um homeomorfismo $k:\bar{e} \rightarrow \bar{d}$ dado por $h = \bar{g}|_{\bar{d}}^{-1} \circ (k \circ \bar{f}|_{\bar{e}})$.

Como $\gamma(k \circ f)$ tem a topologia de Whitehead, segue-

-se que existe um homeomorfismo $h: \gamma(k \circ f) \rightarrow \gamma(g)$ tal que $g \circ h = k \circ f$.

Q.E.D.

3.2. Teorema A

Se $f: M^n \rightarrow [a,b]$ e $g: M^n \rightarrow [c,d]$ são funções de Morse equivalentes, então seus grafos de Reeb são isomorfos.

Demonstração Com efeito, de $f \sim g$, existem difeomorfismos $h: M \rightarrow M$ e $k: [a,b] \rightarrow [c,d]$ tais que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & [a,b] \\ h \downarrow & & \downarrow k \\ M & \xrightarrow{g} & [c,d] \end{array} \text{ comuta.}$$

Seja o triângulo

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\quad} & [a,b] \\ & \searrow k \circ f & \downarrow k \\ & & [c,d] \end{array}$$

Pelo Lema 3.0. tem-se $\Gamma(f) \cong \Gamma(k \circ f)$.

Consideremos, agora, o triângulo

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{h} & M \\ & \searrow g \circ h & \downarrow g \\ & & [c,d] \end{array}$$

Temos:

$$\begin{aligned} x R_{g \circ h} y &\Leftrightarrow x \text{ e } y \text{ estão na mesma componente conexa de } (g \circ h)^{-1}(t) \\ &\Leftrightarrow x \text{ e } y \text{ estão na mesma componente conexa de } h^{-1}(g^{-1}(t)) \\ &\Leftrightarrow h(x) \text{ e } h(y) \text{ estão na mesma componente conexa de } g^{-1}(t) \\ &\Leftrightarrow h(x) R_g h(y), \end{aligned}$$

donde h é compatível com as relações de equivalência.

A partir do difeomorfismo $h: M \rightarrow M$ tem-se um homeomorfismo $\bar{h}: \gamma(g \circ h) \rightarrow \gamma(g)$ que torna comutativo o diagrama abaixo

$$\begin{array}{ccc} \gamma(g \circ h) & \xrightarrow{g \circ h} & [c, d] \\ \bar{h} \downarrow & & \nearrow \bar{g} \\ \gamma(g) & & \end{array}$$

$\bar{h}: \gamma(g \circ h) \rightarrow \gamma(g)$ induz um isomorfismo de grafos.

De fato, de h difeomorfismo, segue-se que p é ponto crítico de $g \circ h$ se, e somente se, $h(p)$ é ponto crítico de g . Portanto \bar{h} aplica $V_{g \circ h}$ sobre V_g e temos que

$$\begin{array}{ccc} V_{g \circ h} & \xrightarrow{\overline{g \circ h}} & C_g = C_{g \circ h} \\ \bar{h}|_{V_{g \circ h}} \downarrow & & \nearrow \bar{g} \\ V_g & & \end{array}$$

é comutativo. \bar{h} também leva arestas em arestas, pois de $\bar{h}(\gamma(g \circ h) \setminus V_{g \circ h}) = \gamma(g) \setminus V_g$, vem

$$\bar{h}\left(\bigsqcup_{i \in I} e_i\right) = \bigsqcup_{i \in I} \bar{h}(e_i), \text{ donde } e_i \text{ é aresta de } \Gamma(g \circ h)$$

se e somente se, $\bar{h}(e_i)$ é aresta de $\Gamma(g)$. Tem-se, então

$$\begin{aligned} \Gamma(g \circ h) &\equiv \Gamma(g), \\ \Gamma(g \circ h) &\equiv \Gamma(k \circ f) \text{ e} \\ \Gamma(k \circ f) &\equiv \Gamma(f). \end{aligned}$$

Pela transitividade de \equiv ,

$$\Gamma(f) \equiv \Gamma(g).$$

Q.E.D.

3.3. Teorema B

Se $f:M^2 \rightarrow [a,b]$ e $g:M^2 \rightarrow [c,d]$ são funções de Morse estáveis e $\Gamma(f) \equiv \Gamma(g)$, então $f \sim g$.

Demonstração Com efeito, de $\Gamma(f) \equiv \Gamma(g)$, pela definição 2.10. $\gamma(f)$ e $\gamma(g)$ são homeomorfismos por um homeomorfismo $i:\gamma(f) \rightarrow \gamma(g)$ tal que

$$\begin{array}{ccc}
 V_f & \xrightarrow{\bar{f}|_{V_f}} & C_f \\
 i|_{V_f} \downarrow & & \downarrow k' \\
 V_g & \xrightarrow{\bar{g}|_{V_g}} & C_g
 \end{array}$$

é comutativo, com $k':C_f \rightarrow C_g$ uma aplicação monotônica.

Seja $k:[a,b] \rightarrow [c,d]$ um difeomorfismo tal que $k|_{C_f} = k'$. Pelo Lema 3.1., existe $\bar{h}:\gamma(f) \rightarrow \gamma(g)$ homeomorfismo tal que $k \circ \bar{f} = \bar{g} \circ \bar{h}$.

Pelo Lema 3.0., $\Gamma(k \circ f) \equiv \Gamma(f)$ e como $k \circ f \sim f$ (proposição 1.1.) é suficiente demonstrarmos que $g \sim k \circ f$.

Isto posto, podemos identificar f com $k \circ f$ e supor que $f, g:M^2 \rightarrow [a,b]$ são tais que

$$\begin{array}{ccc}
 \gamma(f) & \xrightarrow{\bar{f}} & [a,b] \\
 \bar{h} \downarrow & & \nearrow \bar{g} \\
 \gamma(g) & &
 \end{array}$$

é comutativo.

Sejam $a = c_0, c_1, \dots, c_{n-1}, c_n = b$ os valores críticos de f e g e $\epsilon_0, \epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ os épsilons do Teorema 0.4.5.. Existem difeomorfismos $h_i:f^{-1}[a_i, b_i] \rightarrow g^{-1}[a_i, b_i]$ dados pelo Teorema 0.4.7., onde $a_i = c_i - 3\epsilon_i^2$ e $b_i = c_i + 3\epsilon_i^2$, tais que $f = g \circ h_i$ quando restritos a $f^{-1}[a_i, b_i]$.

As subvariedades

$$B_{i,i+1} = f^{-1}[c_i + \epsilon_i^2, c_{i+1} - \epsilon_{i+1}^2] \quad e$$

$$B'_{i,i+1} = g^{-1}[c_i + \epsilon_i^2, c_{i+1} - \epsilon_{i+1}^2]$$

são cobordismos produto e, pelo Teorema 0.2.18. Existem difeomorfismos

$$\phi: B_{i,i+1} \rightarrow f^{-1}(c_i + \epsilon_i^2) \times [c_i + \epsilon_i^2, c_{i+1} - \epsilon_{i+1}^2]$$

e

$$\psi: B'_{i,i+1} \rightarrow g^{-1}(c_i + \epsilon_i^2) \times [c_i + \epsilon_i^2, c_{i+1} - \epsilon_{i+1}^2]$$

com os diagramas seguintes comutativos:

$$\begin{array}{ccc} B_{i,i+1} & \xrightarrow{\phi} & f^{-1}(c_i + \epsilon_i^2) \times [c_i + \epsilon_i^2, c_{i+1} - \epsilon_{i+1}^2] \\ \downarrow f|_{B_{i,i+1}} & & \swarrow f_1 \\ [c_i + \epsilon_i^2, c_{i+1} - \epsilon_{i+1}^2] & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} B'_{i,i+1} & \xrightarrow{\psi} & g^{-1}(c_i + \epsilon_i^2) \times [c_i + \epsilon_i^2, c_{i+1} - \epsilon_{i+1}^2] \\ \searrow g|_{B'_{i,i+1}} & & \swarrow g_1 \\ [c_i + \epsilon_i^2, c_{i+1} - \epsilon_{i+1}^2] & & \end{array}$$

onde f_1 e g_1 são as projeções na segunda coordenada (função altura).

Dado que os grafos de f e g são isomorfos, segue-se que

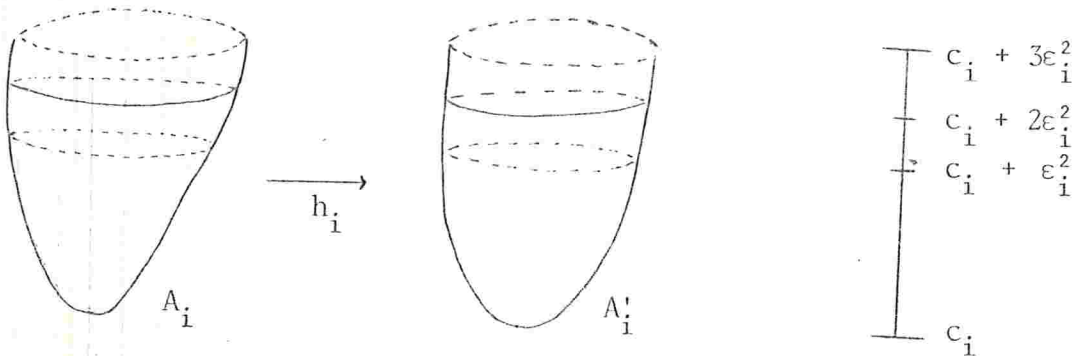
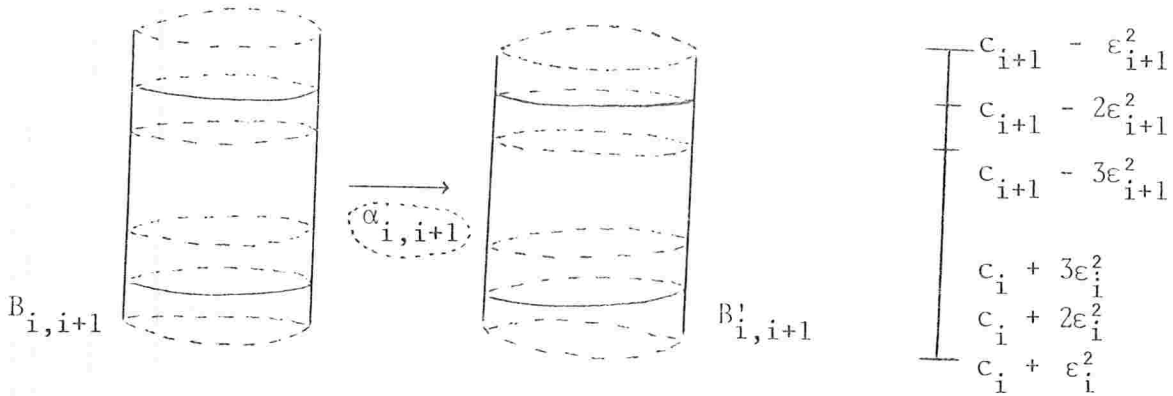
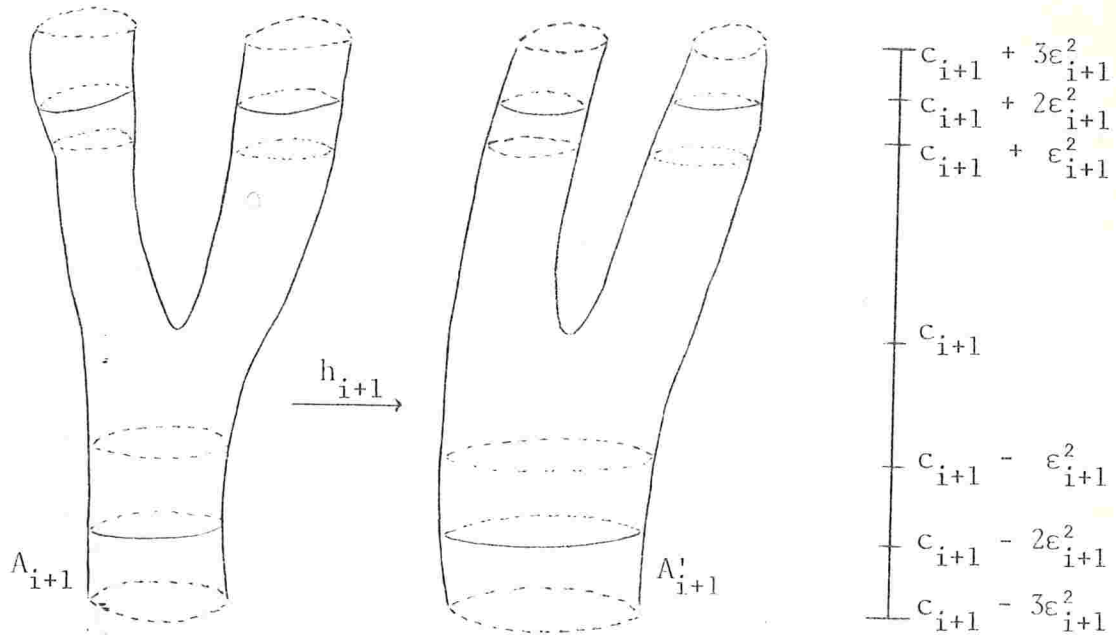
$$f^{-1}(c_i + \epsilon_i^2) \approx g^{-1}(c_i + \epsilon_i^2)$$

donde, pelo Corolário 0.2.19.,

$$B_{i,i+1} \approx B'_{i,i+1}$$

por um difeomorfismo que torna as funções equivalentes nesses cobordismos.

Consideremos, agora, os difeomorfismos h_i restritos a $A_i = f^{-1}[c_i - 2\epsilon_i^2, c_i + 2\epsilon_i^2]$ e dois níveis críticos consecutivos:



Os difeomorfismos h_j foram escolhidos no Teorema 0.4.7. preservando a orientação de S^1 , donde

$$h_i \Big|_{f^{-1}(c_i + 2\varepsilon_i^2)} \quad \text{e} \quad h_{i+1} \Big|_{f^{-1}(c_{i+1} - 2\varepsilon_{i+1}^2)}$$

são isotópicos, pois pelo Teorema 0.3.3. são isotópicos à identidade e isotopia é uma relação transitiva.

Seja

$$F: f^{-1}(c_i + 2\varepsilon_i^2) \times [c_i + 2\varepsilon_i^2, c_{i+1} - 2\varepsilon_{i+1}^2] \longrightarrow \\ \longrightarrow g^{-1}(c_i + 2\varepsilon_i^2) \times [c_i + 2\varepsilon_i^2, c_{i+1} - 2\varepsilon_{i+1}^2]$$

uma isotopia entre $h_i \Big|_{f^{-1}(c_i + 2\varepsilon_i^2)}$ e $h_{i+1} \Big|_{f^{-1}(c_{i+1} - 2\varepsilon_{i+1}^2)}$

tal que

$$F(x,t) = (h_i(x), t) \quad \text{se } t \leq c_i + 3\varepsilon_i^2 \\ \text{e} \\ F(x,t) = (h_{i+1}(x), t) \quad \text{se } t \geq c_{i+1} - 3\varepsilon_{i+1}^2.$$

Definimos o difeomorfismo

$$\alpha: f^{-1}(c_i + 2\varepsilon_i^2) \times [c_i + \varepsilon_i^2, c_{i+1} - \varepsilon_{i+1}^2] \longrightarrow \\ \longrightarrow g^{-1}(c_i + 2\varepsilon_i^2) \times [c_i + \varepsilon_i^2, c_{i+1} - \varepsilon_{i+1}^2] \quad \text{por}$$

$$(x,t) = \begin{cases} (h_i(x), t) & \text{se } c_i + \varepsilon_i^2 < t \leq c_i + 3\varepsilon_i^2 \\ (F(x,t), t) & \text{se } c_i + 3\varepsilon_i^2 \leq t \leq c_{i+1} - 3\varepsilon_{i+1}^2 \\ (h_{i+1}(x), t) & \text{se } c_{i+1} - 3\varepsilon_{i+1}^2 \leq t < c_{i+1} - \varepsilon_{i+1}^2 \end{cases}$$

e seja $\alpha_{i,i+1}: \text{Int } B_{i,i+1} \longrightarrow \text{Int } B'_{i,i+1}$ dada por

$$\alpha_{i,i+1} = \psi^{-1} \alpha \phi.$$

Temos que $\alpha_{i,i+1}$ é um difeomorfismo tal que

$$g \Big|_{\text{Int } B'_{i,i+1}} \circ \alpha_{i,i+1} = f \Big|_{\text{Int } B_{i,i+1}}$$

De fato, tem-se

$$\text{Int } B'_{i,i+1} \xrightarrow{\phi} f^{-1}(c_i + 2\epsilon_i^2) \times (c_i + \epsilon_i^2, c_{i+1} - \epsilon_{i+1}^2) \circ g^{-1}(c_i + 2\epsilon_i^2) \times (c_i + \epsilon_i^2, c_{i+1} - \epsilon_{i+1}^2) \xrightarrow{\psi^{-1}} \text{Int } B'_{i,i+1}$$

$$g \circ \alpha_{i,i+1} = g \psi^{-1} \alpha \phi = g_1 \alpha \phi = f_1 \phi = f.$$

Sobre as somas disjuntas

$$A = \text{Int } A_0 + \text{Int } B_{0,1} + \text{Int } A_1 + \dots + \text{Int } B_{n-1,n} + \text{Int } A_n$$

e

$$A' = \text{Int } A'_0 + \text{Int } B'_{0,1} + \text{Int } A'_1 + \dots + \text{Int } B'_{n-1,n} + \text{Int } A'_n$$

definimos as relações R e R' , respectivamente, por: R é a identidade sobre $\text{Int } A_i \cap \text{Int } B_{i,i+1}$ e $\text{Int } B_{i,i+1} \cap \text{Int } A_{i+1}$ e R' é a identidade sobre $\text{Int } A'_i \cap \text{Int } B'_{i,i+1}$ e $\text{Int } B'_{i,i+1} \cap \text{Int } A'_{i+1}$.

A aplicação

$$H = \sum_{i=1}^{n-1} (h_i + \alpha_{i,i+1} + h_{i+1}): A \rightarrow A'$$

é um difeomorfismo compatível com as relações de equivalência R e R' .

Como R e R' são regulares (definição 0.1.19. e Teorema 0.1.22.), pela Proposição 0.1.23., a aplicação

$$\bar{H}: A/R \rightarrow A'/R'$$

é um difeomorfismo.

As aplicações f e g dão origem às aplicações $F: A \rightarrow [a,b]$ e $F': A' \rightarrow [a,b]$ tais que F é f sobre cada somando de A e F' é g sobre cada somando de A' . Claramente F e F' são compatíveis com R e R' , respectivamente, no sentido que $xRy \Rightarrow F(x) = F(y)$ e $xR'y \Rightarrow F'(x) = F'(y)$ e ainda o diagrama

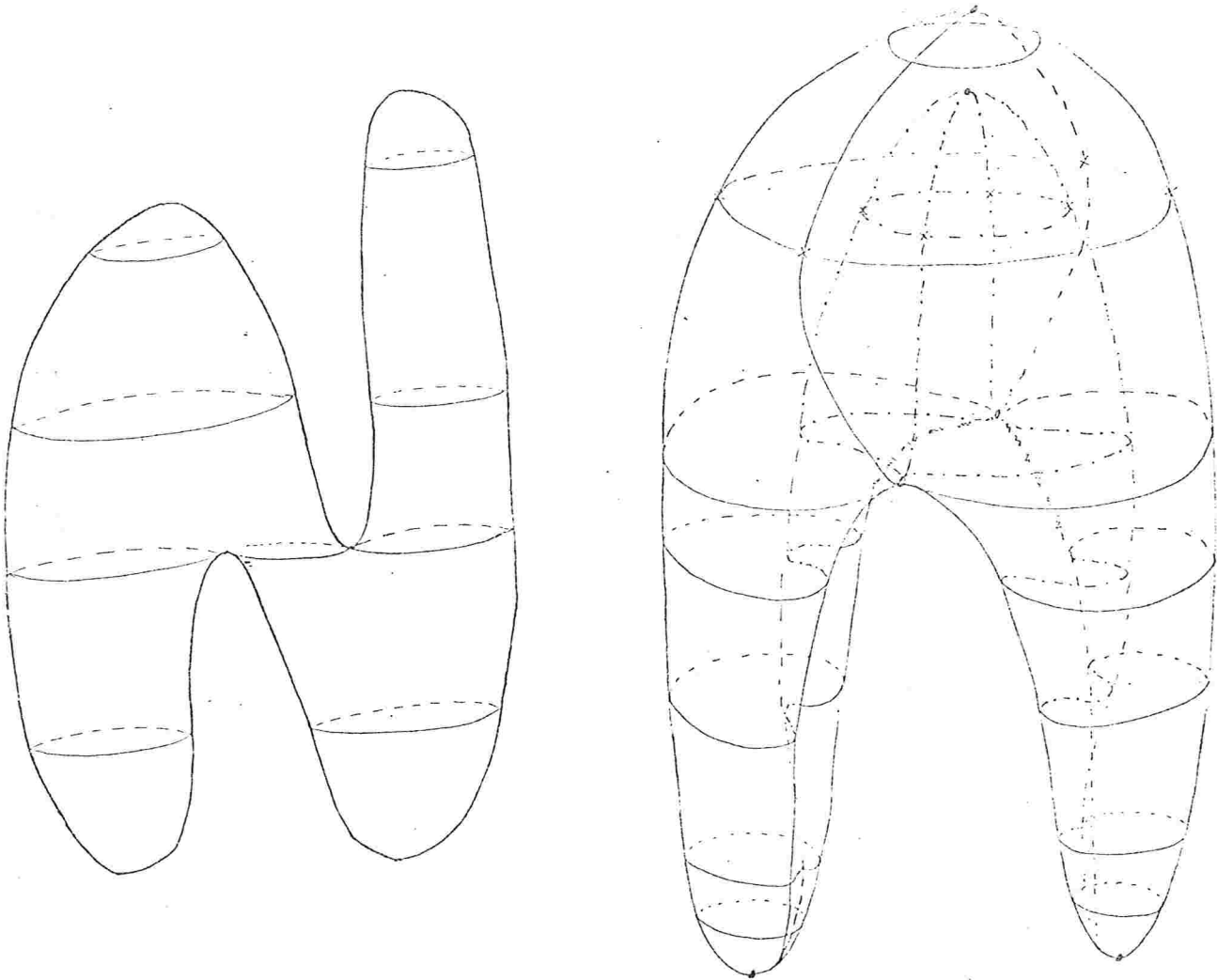
$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{F} & [a,b] \\ H \downarrow & \nearrow F' & \\ A' & & \end{array}$$

é comutativo,

pois

$$F'(H(x)) = \begin{cases} F'(h_i(x)) & \text{se } x \in A_i \\ F'(\alpha_{i,i+1}(x)) & \text{se } x \in B_{i,i+1} \end{cases}$$

Damos abaixo duas funções de Morse sobre S^2 com grafos de Reeb isomorfos e que não são equivalentes.

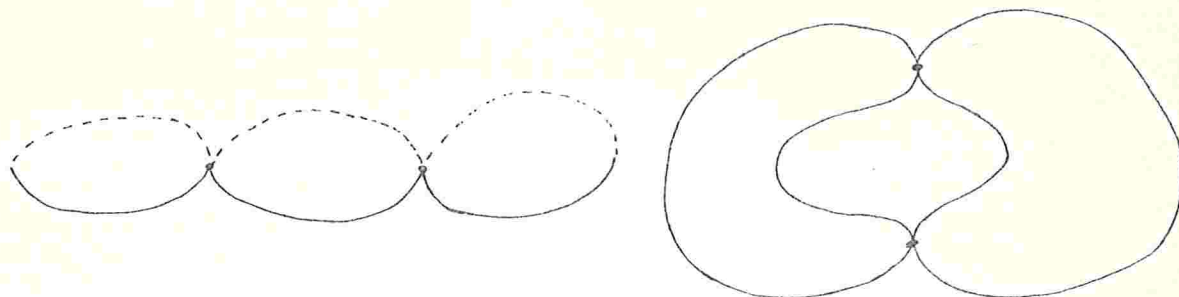


As funções acima tem grafos isomorfos a



e não são equivalentes, dado o fato que os níveis críticos

correspondentes ao índice 1 não são homeomorfos:



Uma outra maneira de ver que as funções não são equivalentes é através da seguinte proposição:

Se $g, f: M \rightarrow \mathbb{R}$ são funções de Morse e $h: M \rightarrow M$ é um difeomorfismo tal que $g \circ h = f$, e $\phi: S^{\lambda-1} \times B^{n-\lambda} \rightarrow V = f^{-1}(a)$ é o mergulho característico relativo a um ponto crítico p de f , então $h \circ \phi: S^{\lambda-1} \times B^{n-\lambda} \rightarrow g^{-1}(a)$ é o mergulho característico relativo ao ponto crítico $h(p)$ de g .

A demonstração disto é fácil e por construção as funções acima não poderiam ser equivalentes.

□

BIBLIOGRAFIA

- [1] Bourbaki, N. - Variétés Différentielles et Analytiques -El. de Mathématiques Resultats - Hermann - Paris - 1967.
- [2] Brückner, T. - Jänisch, K. - Introducción a La Topología Diferencial - Ed. A.C. Madrid - 1977. (Original em alemão).
- [3] Gramain, A. - Topologie des Surfaces - Presses Universitaires de France - Col. SUP -1971.
- [4] Guillemin, V. - Pollack, A. - Differential Topology - Prentice-Hall, New Jersey - 1974.
- [5] Hirsch, M. W. - Differential Topology, GTM, Springer-Verlag - New York - 1976.
- [6] Hu, S. T. - Elements of General Topology - San Francisco, Holden Day, 1965.
- [7] Lima, E. L. - Introdução à Teoria de Morse - Separata das Atas do 2º Col. Bras. Mat. - São Paulo, 1960.
- [8] Lima, E. L. - Variedades Diferenciáveis - IMPA - Rio de Janeiro, 1973.
- [9] Lima, E.L. - Introdução à Topologia Diferencial - IMPA (Notas de Matemática nº 23) - Rio de Janeiro - 1961.

- [10] Massey, W. S. - Introduccion a La Topologia Algé-
brica, editorial Reverté, S/A. -
1972.
- [11] Milnor, J. W. - Topology from The Differentiable-
Viewpoint - The University Press
of Virginia, 1965.
- [12] Milnor, J. W. - Lectures on The h-Cobordism Theorem-
Math. Notes, Princeton Univ. Press,
1965.
- [13] Milnor, J. W. - Morse Theory, (Annals Studies 51)
Princeton Univ. Press, 1963.
- [14] Poenaru, V. - On The Geometry of Manifolds -
(Hilton, P.J. ed. - Studies in
Modern Topology Englewood Cliffs,
M.A.A., 1968).
- [15] Shilov, G. - An Introduction to The Theory of
Linear Spaces - Englewood Cliffs,
Prentice-Hall, 1961.
- [16] Wallace, A. H. - Differential Topology - First
Steps - New York: Benjamin, 1968.
- [17] Wallace, A. H. - Modifications and Cobounding
Manifolds, Canadian J. Math.
12(1960), 503-528.