FUNÇÕES THETA

E

CORPOS DE FUNÇÕES ABELIANAS

Armando Treibich Kohn

Dissertação Apresentada
Ao
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM
MATEMÁTICA

Orientador:

Prof. Dr. Alexandre Augusto Martins Rodrigues

Durante a realização deste trabalho, o autor recebeu apoio financeiro da CAPES.

- SÃO PAULO, OUTUBRO DE 1978 -

INTRODUÇÃO

Na segunda parte dum artigo de Riemann, sobre funções abelianas, ele considera as séries em n variáveis

$\theta(x) = \sum_m e^{F(m)+2(m,x)}$ onde $m = (m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$

$x = (x_1 \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, $(m,x) = \sum m_i x_i$, $F(m) =$

$\sum \alpha_{j\ell} m_j m_\ell$ $\alpha_{j\ell} = \alpha_{\ell j}$

Essa série converge $\forall x \in \mathbb{C}^n$, se a parte real da forma quadrática F, é definida negativa.

A principal propriedade das funções θ é a igualdade funcional:

(1) $\theta(x+\pi i r) = \theta(x)$ $\theta(x+\alpha_\ell) = e^{L_j(x)}\theta(x)$, onde $r \in \mathbb{Z}^n$, α_j é uma coluna da matriz $(\alpha_{j\ell})$, e $L_j(x)$ é uma forma linear.

Riemann já sabia (e tinha comunicado-o a Hermite), que os períodos de qualquer função meromorfa, 2n vezes periódica, de n variáveis, satisfazem umas relações similares às necessárias para a convergência das séries theta (Frobenius demonstrou que essas relações são necessárias e suficientes para a existência de funções theta satisfazendo a equação funcional (1)).

Como toda função meromorfa, 2n vezes periódica, de n variáveis, pode ser representada como quociente de funções inteiras satisfazendo a equação funcional (1) (resultado enunciado por Weierstrass e demonstrado mais tarde por Poincaré), vemos que essas relações são necessárias e suficientes para a existência de funções meromorfas em $\mathbb{C}^n/_\Gamma$ (Γ, grupo de posto 2n) que não podem ser reduzidas, por nenhuma mudança linear das variáveis, a uma função de menos de n variáveis.

Neste trabalho são demonstradas as condições necessárias e suficientes que deve cumprir o grupo Γ para que existam funções theta relativas a esse grupo, e portanto, funções meromorfas em $\mathbb{C}^n/_\Gamma$.

É estudada no caso geral, a estrutura do corpo das funções meromorfas em $\mathbb{C}^n/_\Gamma$ (sendo Γ um grupo de posto 2n).

Nos primeiros três capítulos, são definidos três conceitos e demonstradas algumas propriedades deles:

I - o anél das séries de potencias em n variáveis complexas, convergentes numa vizinhança da origem (ou seja o anél dos germes das funções analíticas na origem de C):

II - a noção de feixe e pré-feixe;

III- as noções de divisor e de função meromorfa, segundo o tratamento feito por Koszul [10].

No capítulo IV é definido o conceito de função theta relativa a Γ, e demonstrado (com base no artigo de A.Weil [17]) que to divisor de $\mathbb{C}^n/_\Gamma$ é a projeção do divisor (em $\mathbb{C}^n$) duma função theta relativa a Γ; daí tiramos a conclusão que toda função meromorfa em $\mathbb{C}^n/_\Gamma$ é quociente de duas funções theta relativas a Γ.

No capítulo IV, então, reduzimos o estudo das funções meromorfas em $\mathbb{C}^n/_\Gamma$, ao estudo das funções theta correspondentes.

Por isso, no capítulo V fazemos um estudo detalhado das condições necessárias e suficientes, sobre o grupo Γ, para a existência de funções theta, não triviais, relativas a Γ.

O capítulo V está baseado nos artigos de H. Cartan [2] e [3].

Nos últimos dois capítulos, são definidos os toros não degenerados (sobre os quais existem funções meromorfas que dependem de todas as variáveis), e é estudada a estrutura do corpo das funções abelianas, tanto num toro não degenerado como num toro degenerado segundo o artigo de J.Cerf [4].

Agradeço ao Professor Alexandre Augusto Martins Rodrigues pela sugestão do assunto do presente trabalho, e pela dedicada orientação, desde o meu ingresso na Pós-Graduação do IME.

São Paulo, outubro de 1978

Armando Treibich Kohn.

NOTAÇÕES USADAS

-funç.	-função
-indef. dif.	-indefinidamente diferenciável
-dif.	-diferencial
-coef.	-coeficiente
-absolut.	-absolutamente
-coord.	-coordenadas
-pos. def.	-positiva definida
-resp.	-respectivamente
-coef. indef. dif.	- coeficientes indefinidamente diferenciáveis
-cond.	-condição
-proj.	-projeção
-merom.	-meromorfa
-hol.	-holomorfa
-dem.	-demonstração
-$\mathbb{C}$-lin.	-$\mathbb{C}$-linear
-pos.	-positiva
- $\in$	-pertence
-cte.	-constante
- $>$	-maior que
- $\geq$	-maior que ou igual que
-tq.	-tal que
- /	-tal que
- =	-igual
-converg.	-convergência
-conj.	-conjunto
-irredut.	-irredutível
-anal. indep.	-analiticamente independente
-alg. indep.	-algebricamente independente
-lin. dep.	-linearmente dependente
-holom.	-holomorfa
-Id.	-Identidade
-def.	-definição
- $\leq$	-menor ou igual a
-alter.	-alternada

CAPÍTULO 1

PROPRIEDADES DE DIVISIBILIDADE DAS SÉRIES DE POTÊNCIAS

Consideremos as séries de potências f em n variáveis complexas $z_1,\ldots,z_n$, convergentes em alguma vizinhança da origem da forma $0<|z_i|<\rho$ $\forall_i$, $1\le i\le n$

Essas séries de potência formam um domínio de integridade R_n, i.e. um anél comutativo sem divisores de 0 (o 0 sendo a função identicamente nula).

A série de potência f pode ser escrita na forma $f=\sum_{j\in N} f_j$ sendo f_j um polinomio homogeneo de grau j nas variáveis Z_i

Se $f\neq 0$ $\exists k\in N-\{0\}/f_o\equiv\ldots\equiv f_{k-1}\equiv 0$ e $f_k\neq 0$; dizemos então que f é de ordem k. Se $f = 0$, dizemos que f é de ordem ∞

É imediato que: a) a ordem de g_1g_2 é igual à soma das ordens de g_1 e de g_2 ; b) a ordem de g_1+g_2 é maior ou igual à menor das ordens de g_1 e de g_2 .

Definição: dizemos que a série de potência f divide a série de potências g (e escrevemos f/g) se existe $h \in R_n$ tq $fh=g$

Os divisores das séries de potência 1 são chamados de unidades de R_n (as unidades dividem todo elemento de R_n).

As unidades são exatamente os elementos de R_n que tem ordem zero e constituem, com a operação multiplicação, um grupo.

Observação: f/g e $g/f \longrightarrow f=h_1g$ e $g=h_2f$ logo $f=h_1h_2f \longrightarrow h_1h_2 = 1 \longrightarrow$ os h_i são inversíveis; nessa situação diremos que f e g são equivalentes, e escrevemos $f \sim g$.

Definição: os únicos divisores de uma unidade são as unidades Se $f \neq 0$ e não é uma unidade, então f tem como divisores as unidades. E os g t_q $g \sim f$; se fora esses, não tem outros divisores dizemos que f é uma função prima.

Em todo caso, qualquer $f \in R_n$ é divisível por uma função prima, porque se f não é primo ele pode se escrever $f=gh$ onde nem g nem h tem ordem estritamente menor que f.

Como é óbvio que toda função de ordem 1 é prima e como a ordem de f é finita, basta repetir o processo de fatoração um número finito de vezes até obter o resultado pedido.

Definição: sejam $g_1 g_2, \ldots \in R_n$, não todos $\equiv 0$, escrevemos $(g_1 g_2, \ldots)=1$ quando $g_1, g_2, \ldots$ não tem divisores comuns fora as unidades e dizemos que eles são primos entre si. Se $g_1, g_2, \ldots \ldots$

tem um divisor comum, a, que não seja uma unidade, e suponhamos $g_1 \neq 0$, passamos a considerar as funções ${}^{g_1}/_{a}, {}^{g_2}/_{a}, \ldots \in R_n$, onde a ordem de ${}^{g_1}/_{a}$ é menor que a de g_1. Continuando esse processo vemos que existe um divisor comum q t.q.$({}^{g_1}/_{q}, {}^{g_2}/_{q}, \ldots \ldots) = 1$ Certamente qu — onde u é uma unidade — tem a mesma propriedade.

Vamos provar o teorema análogo ao lema de Euclídes na Aritmética, que afirma que se f/gh e (f,g)=1 então f/h.

Este resultado vai nos dar uma fatoração úniea dos elementos de R_n, exceto na ordem dos fatores. Como este resultado é imediato se uma das três funções é zero, vamos supor o contrário.

<u>Definição</u>: se n funções $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$, sem têrmos constantes, são t.q. o determinante dos termos lineares não é zero na origem, a transformação de $\mathbb{C}^n: w_1 = \Phi_1(z_1 \ldots z_n) \ldots w_n = \Phi_n(z_1 \ldots z_n)$, tem uma inversa e vai ser chamada: *transformação analítica* : doravante só vamos utilizar *transformações lineares* (é óbvio que as noções de divisibilidade são invariantes por *trans - formações lineares analíticas*).

Se f tem ordem $k \geq 1$, dizemos que f é normal se f_k tem um têrmo da forma $cz_1^k, c \neq 0$. Se f não é normal, é possível leva-la numa forma normal com uma transformação linear adequada: dem: seja $f_k \neq 0$, existe um ponto $(a_1, \ldots, a_n)$ t.q. $f_k(a_1, \ldots, a_n) \neq 0$, então uma transformação linear não singular da forma $z_1 = a_1 z'', \ldots z_n = a_n z_1' + \ldots$ dá o resultado procurado, por que seja

$$f_k = \sum_{r_1+\cdots+r_n=k} b_r z_1^{r_1} \ldots z_n^{r_n} ,$$

fazendo a substituição obtemos

$$f_k(z_1',\ldots,z_n') = \sum b_r (a_1^{r_1} z_1'^{r_1}+\ldots)\ldots(a_n^{r_n} z_1'^{r_n}+\ldots)$$

(essa nova série vai convergir numa certa vizinhança da origem) — é facil ver que ao ordenar segundo a nova base $z_1',\ldots$ $\ldots,z_n'$ temos um elemento

$$\Big(\sum_{r_1+\cdots+r_n=k} b_r a_1^{r_1}\ldots a_n^{r_n}\Big) z_1'^{k}$$

sendo $\sum b_r a_1^{r_1}\ldots a_n^{r_n} = f_k(a_1,\ldots,a_n) \neq 0$

O mesmo argumento de cima demonstra que para um número finito de funções podemos achar uma transformação linear que leva cada uma das funções numa função normal.

O TEOREMA DE PREPARAÇÃO DE WEIERSTRASS

Teorema 1 se $f \in R_n$ tem ordem $k \geqslant 1$ e é normal, então existe uma unidade $u \in R$ t.q. $fu = z_1^k + A_1 z_1^{k-1} + \ldots + A_{k-1} Z_1 + A_k$ onde $A_1,\ldots,A_k$ são séries de potência nas outras variáveis.

Demonstração: se ρ_1 é suficientemente pequeno e $|z_j| \leq |z_1| < \rho_1$ então:

$$|f-f_k| = |f_{k+1}+f_{k+2}+\ldots| < \tfrac{1}{2}\,|z_1|^k \longrightarrow \frac{|f_{k+1}+\ldots|}{|z_1|^k} < \frac{1}{2}$$

Mas como f é normal temos que $f_k/z_1^k = 1+r$ onde r é um polinomio em:

$$t_2 = \frac{z_2}{z_1}, \ldots, t_n = \frac{z_n}{z_1} \quad ; \text{ mais ainda}$$

$$|r| < \tfrac{1}{2} \text{ se } |t_j| < \rho_2 < 1$$

portanto

$f/f_k = 1 + \frac{1}{1+r} \cdot \frac{(f_{k+1} + \cdots)}{z_1^k} = 1+q$ (onde $|q|<1$ para $|z_1|<\rho_1$ e $|t_j|<\rho_2$) $\Longrightarrow \log \frac{f}{f_k}$ pode ser desenvolvido em série de potencia em

$$z_1, t_2, \ldots t_n \text{ para } |z_1|<\rho_1, |t_j|<\rho_2$$

<u>Observação</u>: essa série de potências não contém termos independentes de z_1 porque nenhum têrmo de q é independente de z_1 e logo $\log \frac{f}{f_k} = \log(1+q) = q - \frac{1}{2}q^2 + \ldots (q = \frac{(f_{k+1} + \cdots)}{(1+r)z_1^k}$, $1+r$ é polinomio nas variáveis t_j $\Rightarrow$ o mesmo vale para $\frac{1}{1+r}$, então basta demonstrar que $\frac{(f_{k+1} + \cdots)}{z_1^k}$ não tem termos independentes de z_1; seja por exemplo

$$c z_1^{r_1} \ldots z_n^{r_n}, \ (c \neq 0), \text{ um elemento de } f_{k+1} + \ldots$$

então $\sum r_i > k$ e daí que

$$c\,\frac{z_1^{r_1} \ldots z_n^{r_n}}{z_1^k} = c\,\frac{z_1^{\sum r_i}}{z_1^k} \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^{r_2} \cdots \left(\frac{z_n}{z_1}\right)^{r_n} = c z_1^{(\sum r_1 - k)} \cdot t_2^{r_2} \ldots t_n^{r_n}$$

Agora substituimos t_j por $\frac{z_j}{z_1}$ e arranjamos a série , como série de Laurent em z_1, como segue:

$\log \frac{f}{f_k} = (a_0 + a_1 z_1 + \cdots) + (\frac{b_1}{z_1} + \frac{b_2}{z_1^2} + \ldots) = v+w$ onde $a_0, a_1, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ são séries de potencia em $z_2, \ldots, z_n$ e a_0 não tem termo constante (é possível fazer isso se

$$0<\delta<|z_1|<\rho_1 \quad , \quad |z_j|<\rho_2\delta)$$

Agora $e^{-v}=1-v+\ldots$ é uma unidade $\in R_n$ (porque como série, converge nessa região de cima) e fe^{-v} converge também aí ; mas como

$fe^{-v} = fe^{w-\log\frac{f}{f_k}} = f_k(1+w+\ldots)$, fe^{-v} não contém potencias de z_1 maiores que k. Ou seja e^{-v} é a unidade $\in R_n$ que estavamos procurando. Para a convergencia de e^{-v} a restrição $\delta<|z_1|$ não é necessária, daí que temos convergência para $|z_1|<\rho_1$ e $|z_j|<\rho_1\rho_2$ (fe^{-v} não tem potencias $>k$ de z_1 porque fixados os valores de $z_2, \ldots, z_n$; $f_k e^w$ é uma função holomorfa de z_1, f_k é um polinomio de grau k em z, e $e^w =$

$= e^{\sum b_j \frac{1}{z_1}^j}$ mas trocando $\frac{1}{z_1}$ por $\underline{x}$ teríamos:

$e^{\sum a_i x^i} = \frac{\sum a_j x^j}{\sum b_i x^i} \Longrightarrow \sum a_1 x^i = cte. \Longrightarrow e^w = cte. \Longrightarrow e^w$ não contém potencias de z_1 C.Q.D.

<u>Teorema 2</u>: (análogo do lema de Euclídes).

Sejam $f,g,h \in R_n$ tq f/gh e $(f,g) = 1$ então f/h.

Demonstração: como o teorema é trivial se uma das funções é zero ou uma unidade, vamos supor o contrário. Em particular, o teorema é certo para $n=1$ porque para $n=1$ $g =$

$$= \sum_{i=k}^{+\infty} a_i z^i \sim z^k \Longrightarrow \text{se } (f,g) = 1, \text{ uma das duas}$$

deve ser uma unidade. Por conseguinte podemos supor o teorema certo para $n-1$ variáveis e demonstrar para n variáveis.

Com uma adequada transformação linear levamos as funções f,g,h à forma normal. Pelo Teorema 1 uma função normal, de ordem $k \geq 1$ é equivalente a uma função da forma

$z_1^k + A_1 z_1^{k-1} + \ldots + A_k$ sendo $A_1, \ldots, A_k$ séries de potências em $z_2, \ldots z_n$.

Como as noções de divisibilidade são invariáveis para funções equivalentes podemos supor também que f,g,h são dessa forma já que f,g,h tem ordem maior que zero (senão seriam unidades).

Será necessário o análogo do lema de Gauss, para n variáveis. Vamos prova-lo para séries de potencia em z com coeficientes em $z_2 \ldots z_n$). Uma tal serie de potencias $\lambda_o + \lambda_1 z + \ldots$ é chamada de primitiva se $(\lambda_o, \lambda_1, \ldots) = 1$; se não é primitiva, é claro que existe uma série de potências. δ em $z_2, \ldots z_n$ tq $\lambda_o + \lambda_1 z + \ldots = \delta\ (\nu_o + \nu_1 z + \ldots)$ com $(\nu_o, \nu_1, \ldots) = 1$

O análogo do Lema de Gauss nos diz que: o produto de duas series primitivas é *primitiva*. Sejam $\lambda_\circ+\lambda_1 z+\ldots$ e $\mu_\circ+\mu_1 z+\ldots$ primitivas, e $(\lambda_\circ+\lambda_1 z+\ldots)(\mu_\circ+\mu_1 z+\ldots) = \nu_\circ+\nu_1 z+\ldots$ onde

$$\nu_r = \sum_{i=0}^{r} \lambda_i \mu_{r-i}$$

Se os ν_i tem um divisor comum, eles tem um divisor primo comum π Como $\lambda_\circ+\lambda_1 z+\ldots$ e $\mu_\circ+\mu_1 z+\ldots$ são primitivas, existem números naturais $\underline{a}$ e $\underline{b}$ tq $\pi/_{\lambda_\circ,\lambda_1\ldots,\lambda_{a-1}}$, $(\pi,\lambda_a) = 1$, $\pi/_{\mu_\circ,\ldots,\mu_{b-1}}$, $(\pi,\mu_b)=1$ Então em $\nu_{a+b}=\mu_{a+b}\nu_\circ+\ldots+\lambda_{a+b}\mu_\circ$ o primo π divide cada têrmo da direita, fora o têrmo $\lambda_a\mu_b$ e ele divide também a ν_{a+b}; mas como $\lambda_a\mu_b=\nu_{a+b}-\sum_{i\neq a}\lambda_i\mu_{a+b-i}$ ele é soma de múltiplos de $\pi \Rightarrow \pi/_{\lambda_a\mu_b}$ logo pela suposição para n-1 variáveis, $\pi/_{\lambda_a}$ ou $\pi/_{\mu_b}$ e chegamos a uma contradição.

Agora voltemos aos polinomios com coeficientes em R_{n-1} (domínio de integridade). Como os coeficientes vem de um domínio de integridade e não de um corpo, o algoritmo da divisão é o seguinte: sejam $p=\alpha z^r+\ldots$ e $q=\beta z^s+\ldots;\beta\neq 0$, $<\geq s$ então existem polinomios (a coeficientes em R_{n-1}) $\underline{u}$ e $\underline{v}$ e um elemento $\nu\in R_{n-1}-\{o\}/\nu p=uq+v$, o grau de v é menor que s sendo s, o grau de q

E com o resultante fica assim: se o resultante w de q e p é zero existem elementos $\mu,\lambda\in R_{n-1}-\{o\}$e um polinomio $r=\nu z^t+\ldots$, $\nu\neq o$, $t>o$, $r\in R_{n-1}[z]$ tq. $\lambda p=ar$ e $\mu q=br$ onde a ,b $\in R_{n-1}[z]$.

Por outro lado, se o resultante $w\neq 0$ $\exists$ $c,d\in R_{n-1}[z]/cp+dq=w$

Apliquemos isso a $\underline{f}$ e $\underline{g}$, lembrando que eles tem primeiro coeficiente = 1 e portanto são primitivas.

Suponhamos $w=0$, então vale: $f=ra$ e $g=rb$ onde

$$\lambda,\mu \in R_{n-1} \text{ e } r,a,b \in R_{n-1}[z],\ \deg r > o.$$

Tomando todo fator comum dos coeficientes de a,b,r e colocando-os na frente, obtemos

$$\begin{cases} \lambda f = \alpha r a \\ \mu q = \beta r b \end{cases}$$

onde agora a,r,b são polinomios primitivos. Como $\underline{g}$ e $\underline{f}$ têm primeiro coeficiente = 1, vamos que α/λ e β/μ mas $\frac{\lambda}{\alpha}$ e $\frac{\mu}{\beta}$ devem ser unidades porque senão ra e rb não seriam primitivos ($\frac{\lambda}{\alpha} f = ra$ e $\frac{\mu}{\beta} g = rb$), (como r,a,b são primitivos, ra e rb também são). Finalmente as nossas equações ficam da forma $f = ra$, $g = rb$; agora r é da forma $\nu z^t + \ldots + k, z^{t+\ell}, \nu \neq o, t > o$, logo $\underline{a}$ deve ter a forma $z^{k-t} + \ldots + k_2 z^{k-t+s}$ com $\alpha\nu = 1$ e $k = \operatorname{grav}(f)$, então α é uma unidade $\Rightarrow$ $\underline{a}$ tem ordem no máximo $k-t$, e $\underline{r}$, no mínimo, $t \Rightarrow r$ não é uma unidade; mas isso é uma contradição, já que f e g foram supostas sem divisores comuns, fora as unidades. Ou seja que o resultante de f e g não pode ser zero.

Seja então $w \neq 0$, existem polinomios $c,d \in R_{n-1}[z] / cf + dg = w$, então $cfh + dgh = wh$ e como f/gh, por hipótese, concluímos, que $f/_{wh}$ ou seja $wh = \delta v f$ onde $\delta \in R_{n-1}$ e $\underline{v}$ é uma série de potencias primitiva $\in R_{n-1}[z]$ Como $\underline{h}$ tem primeiro coeficiente = 1 vemos que $\delta/_w$ Por conseguinte $\frac{w}{\delta}h=vf$ e $\frac{w}{f}$ precisa ser uma unidade desde que vf é primitiva $\Rightarrow f/h$.

O CORPO DE FRAÇÕES DAS SÉRIES DE POTENCIAS

Como R_n é um domínio de integridade podemos considerar o seu corpo de frações, ou seja o conjunto formado pelos quocientes formais $\frac{p}{q}$ onde $p,q \in R_n$ e $q \neq 0$, com igualdade $\frac{p_1}{q_1}=\frac{p_2}{q_2}$ em K_n definida por $p_1q_2=q_1p_2$ em R_n. O Teorema 2 tem a importante consequência que se obrigamos a que $(p,q)=1$ então todo elemento de K_n tem uma única expressão módulo, multiplicação por unidades, porque se $\frac{p_1}{q_1}=\frac{p_2}{q_2}$ onde $(p_1,q_1)=(p_2q_2)=1$, como vale que $p_1q_2=p_2q_1$, vemos que q_1/q_2 e q_2/q_1 ou seja $q_2=vq_1$ $\Rightarrow p_2=p_1u$ (onde u é uma unidade).

Definição: os elementos $\frac{p}{q} \in K_n/q \neq 0$ é uma unidade, são chamados de elementos integrais de K_n; esses elementos são isomorfos aos elementos de R_n.

Se $r,s \in K_n$, diremos r/s se $s=rt$ onde t é integral. Escrevemos $r \sim s$, se r/s e s/r. É claro que as classes de equivalência são as coclasses do grupo multiplicativo K_n, relativo ao subgrupo das unidades.

Fora as séries de potencias em $z_1, \ldots z_n$ vamos considerar as séries de potencias com centro em $a=(a_1,\ldots a_n) \in \mathbb{C}^n$ (converg.) ou seja as séries de potencias em $(z_1-a_1),\ldots,(z_n-a_n)$, e convergentes para as quais valem todos os resultados acima demonstrados.

≠

CAPÍTULO 2

FEIXES

Definição: um feixe de grupos (módulos, anéis, etc.) sobre um espaço topológico X é um conjunto F junto com uma aplicação $\pi : F \longrightarrow X$ -chamada de projeção- e

1) $\forall x \in X$ o conjunto $F_x = \pi^{-1}(x)$ é um grupo abeliano

Definição: F_x é a fibra em x

2) F é um espaço topológico tal que π é um homeomorfismo local e as operações algébricas em F são contínuas (ou seja dado $F_\circ F = \{(s_1,s_2) \in F \times F / \pi(s_1) = \pi(s_2)\}$ a aplicação $(s_1,s_2) \rightarrow s_1 - s_2$ é contínua).

Exemplo: seja G um grupo abeliano qualquer com a topologia discreta, então $F=G\text{-}X$ é um feixe sobre X com a aplicação $(x,g) \longrightarrow x$ como projeção. Esse feixe é chamado de feixe constante.

Definição: Seja $U \subset X$, U aberto, uma seção s sobre U é uma aplicação contínua $s : U \longrightarrow F / \pi_\circ = id_u$. Sempre temos a seção zero sobre qualquer U. As seções sobre U serão denotadas

$\Gamma(U,F)$; $\Gamma(U,F)$ é um grupo abeliano.

Se $U \subset V$ existe um homomorfismo natural $\Gamma(V,F) \longrightarrow \Gamma(U,F)$

Em geral um feixe é definido pelos grupos Γ da seguinte forma: seja $\{U\}$ a coleção de abertos de X e para todo U, um grupo abeliano F_u tal que se $u \subset v$ temos um homomorfismo $\phi^v_u : F_v \longrightarrow F_u$ tal que para $u \subset v \subset w$ obtemos $\phi^w_u = \phi^w_u \circ \phi^v_u$

O sistema $\{F_u, \phi^v_u\}$ define um feixe: um feixe cujas fibras vão ser $F_x = \lim\limits_{x \in U} F_u$ e $F = \cup F_x$ sendo abertos os conjuntos $\{\phi^u_x(a) : x \in U\}$; ϕ^u_x é a aplicação: $\phi^u_x : F_u \longrightarrow F_x, x \in U$

<u>Definição de PREFEIXE</u>: seja X um espaço topológico e $\{U\}$ a coleção de conjuntos abertos de X. Um prefeixe de conjuntos sobre X consiste de:

1). uma coleção de conjuntos $\{A_u\}_{u \in \{v\}}$

2) para todo par U,V de conjuntos abertos tal que $U \subset V$ uma aplicação $\rho^v_u : A_v \longrightarrow A_u$ tal que:

i) para $u,v,w \in \{u\} / u \subset v \subset w$ $\rho^w_u = \rho^v_u \circ \rho^w_v$

ii) para $u \in \{u\}$ $\rho^u_v = id_u$

Se $\{A_u, \rho^u_v\}$ é um prefeixe sobre X tal que $\forall u, A_u$ é um grupo abeliano e para todo par $u \subset v$ a aplicação $\rho^v_u : A_v \longrightarrow A_u$ é um homomorfismo de grupos, então $\{A_u, \rho^u_v\}$ é chamado <u>*prefeixe de grupos abelianos sobre X*</u>.

Da mesma forma definimos prefeixes de anéis, módulos, etc. . Demos um exemplo de um feixe: seja V uma variedade analítica complexa, seja $F_u = N(U)$ o grupo das funções holomorfas em U. Este prefeixe define o chamado *feixe dos germes das funções holomorfas em V*.

Quando consideramos um feixe de anéis sobre o espaço X sempre vamos supor que cada fibra tem um elemento identidade e que a aplicação que leva cada x no elemento identidade de F_x é uma seção sobre X.

Se $F' \subset F$ é um feixe sobre X, ele será chamado de *subfeixe* de F, se a aplicação $i: F' \longrightarrow F$ (inclusão) é contínua e $\forall x \in X, F'_x$ é uma subestrutura de F_x no sentido algébrico (subgrupo, subanel, etc.).

Dados dos feixes F', F'' sobre X, um homomorfismo $h: F' \longrightarrow F''$ é uma aplicação contínua tal que $\pi'' \circ h =$ e $\forall x \in X$ a aplicação $h|_{F'_x} : F'_x \longrightarrow F''_x$ é um homomorfismo algébrico. Um homomorfismo de feixes é necessáriamente uma aplicação aberta por causa das restrições topológicas na topologia do feixe.

Se F' é um subfeixe de F, definimos o *feixe quociente*, como $\left(F/_{F'}\right)_x = {F_x}/_{F'_x}$ e damo-lhe a topologia quociente.

Temos então a sequência exata de feixes: $0 \to F' \to F \to F/_{F'} \to 0$ e $\forall U$ aberto, $U \subset V$ temos a sequência de aplicações:

$$0 \longrightarrow \Gamma(U, F') \longrightarrow \Gamma(U, F) \longrightarrow \Gamma(U, F/_{F'})$$

Essa sequência é exata apesar da última aplicação não ser sobrejetiva.

CAPÍTULO 3

DIVISORES

Funções Meromorfas em vez de restringirmo-nos a $\mathbb{C}'$ vamos definir diretamente o que é uma função meromorfa sobre uma variedade analítica complexa V: ela está definida localmente por um quociente de duas funções holomorfas.

Vamos definir função meromorfa utilizando a noção de feixes introduzida no capítulo anterior.

Seja V uma variedade complexa. Para todo aberto U seja N(U) o anél das funções holomorfas sobre U; os divisores de 0 são as funções holomorfas nulas sobre uma componente conexa de U. Seja L(U) o anel das frações $f/_g$ onde $f,g \in N(U)$ e g não é divisor de 0. Para cada par de abertos $U \subset W$ seja h(U,W) o homomorfismo de L(W) dentro de L(U) definido pela restrição a U das funções holomorfas sobre W. Os anéis e as aplicações (L(U),h(U,W)) formam um prefeixe sobre V, que será denotado A.

Definição: uma função meromorfa sobre um aberto U é uma seção sobre U do feixe A. Para todo aberto U, temos um homomor fismo injetivo de $L(U)$ dentro do anel $A(u)$ das funções meromorfas sobre U. Doravante identificaremos $L(U)$ com a sua imagem dentro de $A(u)$. Em geral $L(U) \neq A(u)$, por exemplo: se fizermos $U=V$, sendo V compacto, então $N(U)=N(V) \cong \mathbb{C}$, dai que $L(U) = L(V) \cong \mathbb{C} \neq A(V)$ - em geral)

Para toda função meromorfa f sobre V, e todo ponto $x \in V$ existe uma vizinhança aberta de x, W, tal que $f|_W \in L(W)$.

Definição: se existe uma vizinhança aberta, W, de x tal que $f|_W = g \in N(W)$ (é holomorfa em W), dizemos que f é regular em x e que $g(x)$ é o valor de f em x.

Observação: da definição de função meromorfa obtemos o seguinte: seja $(U_i)_{i \in I}$ o conjunto dos abertos de V e $\forall U_i$ sejam $f_i, g_i \in N(U_i)$ - g_i não é divisor de 0 -; se para todo par $i,j \in I$ temos $f_i g_j = f_j g_i$ em $U_i \cap U_j$, então existe uma função meromorfa F sobre V, e só uma tal que $\forall_{i \in I}$ $F|_{U_i} = \frac{f_i}{g_i}$.

Definição: para toda variedade complexa V, o feixe A é chamado de feixe dos germes das funções meromorfas sobre V. É um feixe de corpos. As funções meromorfas sobre V formam um anel cujos elementos não inversíveis são os divisores de 0, ou seja as funções nulas sobre uma componente conexa de V Se V é conexa, esse anel de funções é um corpo.

Escolha de Cousin e Divisores

Definição: seja V uma variedade complexa conexa, uma escolha multiplicativa de Cousin $(U_i,f_i)_{i\in I}$ é definida por um recobrimento aberto $(U_i)_{i\in I}$ de V e pela escolha em cada U_i de uma função meromorfa e inversível f_i satisfazendo a seguinte condição: $\forall_i,j\in I$, $^{f_i}/f_j$ é uma função holomorfa sem zeros em $U_i\cap U_j$. Diremos que duas escolhas de Cousin $(U_i,f_i)_{i\in I}$ e $(V_j,g_j)_{j\in J}$ sobre V, são equivalentes quando $\forall i\in I, \forall_j\in J, {}^{f_i}/_{g_j}$, seja uma função holomorfa sem zeros em $U_i\cap V_j$ Escreveremos então $(U_if_i)_{i\in I}\sim(V_j,g_j)_{j\in J}$ (é uma relação de equivalência) .

<u>Definição</u>: chamaremos de divisor sobre V, a uma classe de equivalência de escolhas de Cousin.

Seja D um divisor, $(U_i,f_i)_{i\in I}$ um representante de D, dizemos que $(U_i,f_i)_{i\in I}$ é uma escolha de Cousin para D e escrevemos $(U_i,f_i)_{i\in I}\in D$. Notação: $\mathcal{D}$={os divisores sobre V}

<u>*Grupo de Divisores*</u>

Sejam $(U_i,fi)_{i\in I}$ e $(V_j,g_j)_{j\in J}$, duas escolhas de Cousin sobre V, vamos associar a elas uma nova escolha de Cousin: consideremos o recobrimento $(U_i\cap V_j)_{(i,j)\in I-J}$ de V, e consideremos a função meromorfa f_ig_j, então a escolha $(U_i\cap V_j,f_ig_j)$ é uma nova escolha de Cousin (é fácil conferir que o divisor correspondente à nova escolha assim obtida, depende só das classes das duas primeiras escolhas; logo, passando ao quociente vemos que acabamos de definir uma lei de composição: $(D',D)\longrightarrow D+D'$.

É imediato que é uma lei de grupo abeliano sobre $\mathcal{D}$.

O elemento neutro vai ser a classe de $(V,1)$.

Definição: seja M o grupo multiplicativo $(V)-0$, das funções meromorfas inversíveis sobre V, $\forall f \in M$, (V,f) é uma escolha de Cousin; escrevemos (f), o divisor definido por (V,f) e dizemos que (f) é o divisor da função meromorfa f.

Observação: a aplicação $f \longrightarrow (f)$ é um homomorfismo de M em $\mathcal{D}$ porque $(f) = 0$ implica $(V,f) \sim (V,1)$ ou seja que $f/_1$ é holomorfa sem zeros.

Definição: dizemos que um divisor é linearmente equivalente a zero, se é o divisor de uma função meromorfa. O grupo desses divisores, $\mathcal{D}_\ell$, é a imagem da aplicação de $M \longrightarrow \mathcal{D}$

Definição: dizemos que um divisor D é positivo $(D \geq 0)$ se dada uma escolha de Cousin $(V_i, fi)_{i\in I} \in D, \forall i \in I$, f_i é holomorfa. É fácil conferir que a definição não depende do representante escolhido.

Definição: dado um divisor positivo D, e $(U_i, fi)_{i\in I} \in D, \forall_i \in I, f_i$ é holomorfa. É fácil conferir que a definição não depende do representante escolhido.

Definição: dado um divisor positivo D, e $(U_i, fi)_{i\in I}$ um repre sentante dele, chamaremos de conjunto dos zeros do divisor D ao conjunto $\bigcup_{i \in I} \{x \in U_i, f_i(x)=0\}$. Esse conjunto não depende do representante escolhido.

2º Problema de Cousin: dado um divisor D, existe uma função $f/D=(f)$?

Em outros têrmos, dado $(U_i, f_i)_{i \in I}$, existe uma função f/ $f/_{fi}$ seja inversível em $U_i, \forall_{i \in I}$?

Esse problema foi resolvido por Cousin para V, um polidisco de $\mathbb{C}^n$ (se n=1, é o teorema de Mittag-Leffler).

Observação: vamos supor que V seja compacto e que D seja um divisor positivo, então a função f procurada, deve ser holomorfa em V, logo constante, pelo principio do máximo. Isso mostra que o problema não tem solução em geral. ≠

FUNÇÃO THETA

Capítulo IV

Doravante E designa um espaço vetorial real de dimensão 2n . Uma estrutura vetorial complexa nele , está definida dando um $\mathbb{R}$-automorfismo J tq $J^2=Id$, e então $\forall$ complexo $a+ib$ definimos $(a+ib)x = ax+bJx$.

A dimensão complexa de E é n .

Seja em E, um subgrupo discreto Γ de posto 2n (ou seja que tem uma base formada por 2n elementos linearmente independentes sobre $\mathbb{R}$). O espaço quociente E/Γ é homeomorfo a um toro (compacto) e está munido de uma estrutura analítico- complexa .

Observação : vai ser uma variedade analitico-complexa, compacta, de dimensão complexa n e também Kähleriana já que sejam $z_1 —— z_n$ as coordenadas complexas de E , segundo uma $\mathbb{C}$-base fixada, basta dar-lhe a E/Γ a métrica induzida por $\sum_k dz^k d\bar{z}^k$ (a métrica canonica de $\mathbb{C}^n$)

Definição : uma função theta relativa ao grupo Γ é uma função $F(x)$ definida sobre E , meromorfa, não identicamente nula ou infinita e que é tq $\forall u\in\Gamma$ vale: $F(x+u)=F(x)\, e^{-2\pi i[L(x,u)+H_u]}$ onde $L(x,u)$ é uma função C-linear(homogénea) de x e $H(u)$ é um número .

Agora vamos resolver o 2º Problema de Cousin no caso em que D é um divisor positivo sobre $V = \mathbb{C}^n/\Gamma$

Antes disso vamos demonstrar alguns lemas necessarios.

Lema 1 Seja V uma variedade compacta indefinidamente diferenciável. Seja $\{U_i\}_{i\in I}$ um recobrimento aberto e finito de V. Suponhamos dada em $U_i\cap U_j$ (cada vez que $U_i\cap U_j\neq\phi$) uma forma diferencial ζ_{ij} de grau p, a coeficientes indefinidamente diferenciáveis e tq $\zeta_{ik}=\zeta_{ij}+\zeta_{jk}$ em $U_i\cap U_j\cap U_k$.

Então existem formas ζ_i de grau p, respectivamente definidas em U_i, a coeficientes indef. dif. tq $\zeta_{ij}=\zeta_i-\zeta_j$ em $U_i\cap U_j$ (cada vez que $U_i\cap U_j\neq\phi$).

Observação: a condição $\zeta_{ik}=\zeta_{ij}+\zeta_{jk}$ implica $\zeta_{ii}=0$ e $\zeta_{ij}=-\zeta_{ji}$

dem. do lema :

seja $\{F_i\}_{i\in I}$ uma partição diferenciável da unidade, subordinada ao recobrimento $\{U_i\}_{i\in I}$, coloquemos $\zeta_i=\sum_k F_k\zeta_{ik}$ $\Longrightarrow$ dados: $\zeta_i=\sum_k F_k\zeta_{ik}$ e $\zeta_j=\sum_k F_k\zeta_{jk}$ $\Longrightarrow$ $\zeta_i-\zeta_j=\sum_k F_k(\zeta_{ik}-\zeta_{jk})=(\sum_k F_k)\zeta_{ij}=\zeta_{ij}$ cqd

Seja $\mathbb{T}^{2n}=E/\Gamma$, ele pode ser considerado como uma variedade indef. dif. de dimensão 2n. Dado um sistema de coordenadas $x_1,\ldots,x_{2n}$ em E, os diferenciais dx_i definem em $\mathbb{T}^{2n}$ formas dif. de grau 1 e toda forma sobre o toro pode ser escrita por meio deles sob a forma :

$$\zeta=\sum_{(i)} f_{i_1\ldots i_p}(x)\,dx_{i_1\ldots i_p} \qquad (dx_{i_1\ldots i_p}\overset{\text{Df}}{=}dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_p})$$

Definição : $I(\zeta)$ será a forma obtida substituindo nessa expressão, cada coeficiente $f_{i_1\ldots i_p}$ pelo seu valor medio em $\mathbb{T}^{2n}$ ou seja por $\frac{1}{V(\mathbb{T}^{2n})}\int_{\pi(\mathbb{T})} f_{i_1\ldots i_p}(x)\,dx_{i_1\ldots i_p}$ ($V(\mathbb{T}^{2n})=$ o volume de $\mathbb{T}^{2n}$).

Seja D um operador diferencial (por ex.: $D=\frac{\partial}{\partial x^{i_0}}$) $D\zeta$ será a forma obtida substituindo na expressão de, ζ, cada $f_{(i)}$ por $Df_{(i)}$.

Observação: $I(\frac{\partial}{\partial x^i}\zeta)=0$; basta demonstrá-lo para uma função f : seja i=1 $df = \sum_{i=1}^{2n} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$; seja $\beta = dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^{2n}$

então vale : $df \wedge \beta = \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^{2n}$, mas $d(f\wedge\beta) = df \wedge \beta - f\, d\beta$

e $d\beta = 0 \Rightarrow d(f\wedge\beta) = df\wedge\beta \Rightarrow I\left(\frac{\partial f}{\partial x^1}\right) = \int_M \frac{\partial}{\partial x^1} f\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{2n} = \int_M df \wedge \beta = \int_M d(f\wedge\beta) = \int_{\phi = \partial M} f\wedge\beta = 0$ CQD

<u>Lema 2</u> Seja (a_{ij}) a matriz de uma forma quadrática definida positiva; seja $\Delta = \sum a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}$ e λ uma forma diferencial no toro, a coeficientes (reais ou complexos) indef. dif. . Para que exista uma forma diferencial μ tq $\Delta\mu = \lambda$ é necessário e suficiente que $I(\lambda) = 0$; se $\lambda \equiv 0$ a forma μ tem coeficientes constantes.

<u>dem.</u> - novamente, basta demonstrar para cada coef. separadamente ou seja para funções. Se tomarmos como base de E um sistema de 2n geradores do grupo Γ, toda função ind. dif. f, no toro possui uma serie de Fourier $\sum_{(m)} c_{m_1 \cdots m_{2n}} \exp(2\pi i \sum_j m_j x_j)$ absoluta e uniformemente convergênte para f..

Seja então $g = \sum_{(m)} b_{m_1 \cdots m_{2n}} \exp(2\pi i \sum_k m_k x_k) \Rightarrow \Delta g = \sum_{(m)} b_{m_1 \cdots m_{2n}} \Delta \exp(\quad)$

$\therefore \Delta g = \sum_{(m)} b_{(m)} (2\pi i \sum_{ij} a_{ij} m_i m_j) \exp(2\pi i \sum_k m_k x_k)$; para que $\Delta g = f = \sum_{(m)} c_{(m)} \exp(2\pi i \sum_k m_k x_k)$

é necessário e suficiente, que : $b_{m_1 \cdots m_{2n}} \cdot (\sum_{ij} a_{ij} m_i m_j) = c_{m_1 \cdots m_{2n}}$

<u>Obs</u>: $I(f) = \frac{1}{V(T^{2n})} \int f\, dx^1 \cdots dx^{2n} = \sum_{(m)} c_{(m)} \int_T \exp(2\pi i \sum m_k x_k)\, dx^1 \cdots dx^{2n} =$

$= \sum c_{(m)} \prod_{k=1}^{2n} \int \exp(2\pi i m_k x_k)\, dx_k = c_{(0 \cdots 0)}$

Se $c_{0\cdots 0} = 0$, ($\Leftrightarrow I(f) = 0$), tomamos a função g de cima / $b_{(m)} = \frac{c_{(m)}}{\sum a_{ij} m_i m_j}$

lembrando que como (a_{ij}) é def. pos., $\forall (m), (m) \neq (0 \cdots 0)$, $\sum a_{ij} m_i m_j \neq 0$

além disso, vale também (para algum $K>0$): $K(\sum m_i^2) \leq \sum a_{ij} m_i m_j$

daí que $\forall (m), (m) \neq (0, \dots 0)$ vale: $|b_{(m)}| = \dfrac{|c_{(m)}|}{\sum a_{ij} m_i m_j} \leq \dfrac{c_{(m)}}{K(\sum m_i^2)} \leq \dfrac{1}{K} |c_{(m)}|$

mas os $c_{(m)}$ são os coefic. de Fourier de f (indef. dif.); isso implica que a função $g = \sum_{(m)} b_{(m)} \exp(2\pi i \sum_k m_k x_k)$ converge uniformemente e absolut. a uma func. indef. dif. (em cada compacto de E). e $\Delta g = f \Leftrightarrow I(f) = 0$

Além disso, se $f \equiv 0$, $\forall (m) \neq 0$ temos $b_{(m)} = \dfrac{0}{\sum a_{ij} m_i m_j} = 0 \Rightarrow g = b_{0 \dots 0} = cte.$ CQD

Suponhamos agora $E = \mathbb{C}^n$ Os z_h designam as coord. complexas em $\mathbb{C}^n$; os $z_h, \bar{z}_h$ formam um sistema de coord. do espaço real subjacente de dimensão real 2n ;sobre o toro $\mathbb{T}^{2n}$, então, podemos expressar todas as formas diferenciais por intermedio dos $dz_h, d\bar{z}_h$. Apliquemos o Lema 2 para $\Delta = \sum_{h=1}^{n} \dfrac{\partial^2}{\partial z_h \partial \bar{z}_h}$

Observação : $1 \leq j \leq n$ $\quad dx_{n+j} = dy_j$, $\dfrac{\partial}{\partial z_h}$ e dz_h são duais $\Rightarrow$

$$\frac{\partial}{\partial z_h} = \frac{\partial}{\partial x_h} - i \frac{\partial}{\partial y_h} \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_h} = \frac{\partial}{\partial x_h} + i \frac{\partial}{\partial y_h} \quad (dz_h = dx_h + i\, dy_h) \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial z_h \partial \bar{z}_h} = \frac{\partial^2}{\partial x_h^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_h^2}$$

$$\therefore \Delta = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_h^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_{h+n}^2} = \sum_{j=1}^{2n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \quad \therefore \Delta = \sum_{1 \leq i,j \leq 2n} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \text{ sendo } (a_{ij}) = \mathrm{Id} \text{ (pos def.)}$$

Vamos demonstrar que todo divisor D no toro $\mathbb{T}^{2n}$ é o divisor duma função theta em $\mathbb{C}^n$ Mais precissamente :existe uma função theta F relativa a Γ (é holomorfa se $D \geqslant 0$) tq $(F) = \tilde{D}$, sendo $\tilde{D}$ o divisor de $\mathbb{C}^n$ deduzido de D ; ou seja $D = \pi(\tilde{D})$ - $\pi : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n/\Gamma$

Basta demonstrar isso para $D \geqslant 0$ e logo lembrar que todo divisor D escreve-se $D = D' - D''$ $D', D'' \geq 0$.

Seja então (U_i, f_i) uma escolha multiplicativa de Cousin no toro $\mathbb{T}^{2n}$. Vamos supor que os U_i são imagens homeomorfas de bolas abertas U_{i_0} de $\mathbb{C}^n$ (com a distancia $(\sum z_h \bar{z}_h)^{1/2}$).

Seja U_{id} o transladado de U_{i_0} pelo vetor $d \in \Gamma$; os U_{id} - ao fazer variar i e d - formam um recobrimento de $\mathbb{C}^n$

Vamos escrever $\zeta_{ij} = d \log(f_i/f_j)$ (não interessa qué ramo da função log pegamos) ; são formas dif. de grau 1 ,resp. definidas em $U_i \cap U_j$ e satisfazendo as condições do Lema 1:

$$\zeta_{ik} = d\log(f_i/f_k) = d\log(f_i/f_j) + d\log(f_j/f_k) = \zeta_{ij} + \zeta_{jk} \quad ; \text{sempre que } U_i \cap U_k \cap U_j \neq \phi$$

Logo ,sejam (pelo lema 1) ζ_i formas dif. definidas em U_i e tq $\zeta_{ij} = \zeta_i - \zeta_j$ em $U_i \cap U_j$ (quando $U_i \cap U_j \neq \phi$), como ζ_{ij} tem coefic. holomorfos vale $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_h} \zeta_{ij} = 0$ (porque $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_h} = \frac{\partial}{\partial x_h} + i \frac{\partial}{\partial y_h} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_h} \zeta_{ij} = -i \frac{\partial}{\partial y_h} \zeta_{ij} \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial \bar{z}_h} \zeta_{ij} = 0$) (cond. de Riemann-Cauchy) -então quaisquer que sejam i, j, h $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_h} \zeta_i = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_h} \zeta_j$ em $U_i \cap U_j$; podemos então definir uma forma ξ_h de grau 1 ,a coef. indef. dif. no toro, como sendo igual a $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_h} \zeta_i$ em $U_i \forall i$ porque em $U_i \cap U_j$ as diferentes definições coincidem.

Seja $\lambda = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_h} \xi_h$ então $\lambda = \Delta \xi_i$ em cada U_i $\forall i$.

Como $I(\lambda) = 0$ (porque ja vimos que $\forall \xi \, \forall i \; I(\frac{\partial}{\partial x_i} \xi) = 0$) utilizando o Lema 2 sabemos que existe μ tq $\Delta \mu = \lambda$.

Finalmente, sejam $\xi_i' = \xi_i - \mu$; são formas respectivamente definidas nos U_i a coef. indef. dif. satisfazendo as equações : $\Delta \xi_i' = 0$ e $\xi_i' - \xi_j' = \zeta_{ij}$ em $U_i \cap U_j$.

Vamos escrever ξ_i' sob a forma $\sum u_{ih} dz_h + \sum v_{ih} d\bar{z}_h$;por def.

$\Delta \xi_i' = 0$ significa que $\Delta u_{ih} = \Delta v_{ih} = 0$, logo, seja $\xi_i'' = \sum u_{ih} dz_h$ ainda vale $\Delta \xi_i'' = 0$; como os ζ_{ij} são holomorfas (ou seja combinações lineares dos dz_h), ainda temos $\zeta_{ij} = \xi_i'' - \xi_j''$ em $U_i \cap U_j$ $\forall i,j$.

Relembremos que $\zeta_{ij} = d \log \frac{\varphi_i}{\varphi_j} \Longrightarrow d\zeta_{ij} = 0$, então em $U_i \cap U_j$ vale $d\xi_i'' = d\xi_j''$; podemos definir uma forma (de grau 2) sobre o toro , como sendo igual a $d\xi_i$ em U_i $\forall i$ .Como os operadores d e Δ comutam, teremos que $\Delta\omega = 0$; logo , pela segunda parte do Lema 2 , ω , tem coef. constantes quando expressa como combinação linear dos $d\bar{z}_h dz_k$, $dz_j dz_k$, ou seja da forma: $\sum_{h<k} a_{hk} dz_h dz_k + \sum_{h,k} b_{hk} d\bar{z}_h dz_k$ com a_{hk} e b_{hk} constantes (lembremos que $\omega = d\xi_i''$ em cada U_i e ξ_i'' é sómente combinação linear dos dz_h , por isso em ω não aparecem combinações dos $d\bar{z}_h d\bar{z}_k$)

Tendo fixado isso, consideremos na bola $U_{i\alpha}$, em $\mathbb{C}^n$, a forma $\eta_{i\alpha} = \xi_i'' - \sum_{h<k} a_{hk} z_h dz_k - \sum_{h,k} b_{hk} \bar{z}_h dz_k$; vale $d\eta_{i\alpha} = 0$ (basta conferir com os olhos) ,Por conseguinte podemos escrever $\eta_{i\alpha} = df_{i\alpha}$ - em $U_{i\alpha}$ - (o lema de Poincaré vale porque estamos numa bola aberta de $\mathbb{C}^n$) , sendo $f_{i\alpha}$ uma função holomorfa em $U_{i\alpha}$. Cada vez que duas bolas $U_{i\alpha}$, $U_{j\alpha'}$ tem interseção não vazia , em $U_{i\alpha} \cap U_{j\alpha'}$ vale: $d\log(\varphi_i/\varphi_j) = d(f_{i\alpha} - f_{j\alpha'})$; o que implica que a função $\varphi_i e^{-f_{i\alpha}}$ -holomorfa em $U_{i\alpha}$ - admite em $U_{j\alpha'}$ um prolongamento analítico que difere da função $\varphi_j e^{-f_{j\alpha'}}$ por um fator constante . <u>Cada uma</u> dessas funções admite um prolongamento analítico $F(z)$, ao espaço todo ($\mathbb{C}^n$), que será uma função holomorfa :

por ex.: seja $U_{jd'}$ tq $U_{id}\cap U_{jd'}\neq\phi$, $F(z)$ e $f_j . e^{-f_{jd'}}$ diferem por um fator constante em $U_{id}\cap U_{jd'}$ e isso continua valendo no maior conexo que contem $U_{id}\cap U_{jd'}$, como $U_{jd'}$ é uma bola vale $F(z) - c_0 f_j e^{-f_{jd'}} \equiv 0$ em $U_{jd'}$).

Ou seja em cada uma das bolas U_{id}, $F(z)$ difere de f_i por um fator que é uma função holomorfa inversível e quaisquer que sejam $d, d' \in \Gamma$, a diferencial $d\log\left(\frac{F(z+d')}{F(z+d)}\right) = \eta_{id} - \eta_{id'}$, é da forma $\sum_{h=1}^{n} c_h dz_h$, com os c_h constantes, o que implica que $\log\left(\frac{F(z+d')}{F(z+d)}\right)$ é linear, porque: $F(z) = c_{id} f_i(\pi(z)) e^{-f_{id}}$ $\quad \pi: \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n/\Gamma$, proj. canônica

$$\left.\begin{aligned} \therefore \log F(z+d') &= \log c_{id'} + \log f_i(\pi(z)) - f_{id'} \\ \log F(z+d) &= \log c_{id} + \log f_i(\pi(z)) - f_{id} \end{aligned}\right\} \text{ porque } \forall d, d' \in \Gamma,\ \pi(z) = \pi(z+d) = \pi(z+d')$$

e finalmente: $d\log\left(\frac{F(z+d')}{F(z+d)}\right) = df_{id} - df_{id'} = \eta_{id} - \eta_{id'}$ c.q.d.

Observação:

i) da definição de η_{id}, resulta que fixado i, a diferença entre η_{id} e $\eta_{id'}$ é: $\sum_{h,k} a_{hk}(d-d')dz_k + \sum_{h,k} b_{hk}(d-d')d\bar{z}_k$

ii) a função $F(z)$ se anula somente onde cada f_i se anula e de tal forma que $\frac{F(z)}{f_i}$ é inversível em U_i.

Lembrando que chamamos de função theta relativa ao subgrupo Γ (de posto 2n) do espaço $\mathbb{C}^n$, toda função merom. $F(z)$ tq $\forall d \in \Gamma$, $\frac{F(z+d)}{F(z)}$ seja da forma $\exp\left(\sum c_h z_h + b\right)$, acabamos de demonstrar o seguinte teorema:

<u>Teorema</u> para todo divisor positivo D do toro $\mathbb{C}^n/\Gamma$, existe uma função theta holomorfa relativa a Γ, tq $(F)=\tilde{D}$, sendo $\tilde{D}$ a elevação do divisor D a $\mathbb{C}^n$.

Observação : fixado o grupo Γ, as funç. theta hol. relativas a Γ, formam um monoide multiplicativo, cujos elementos inversíveis são as funções theta sem zeros. Estas são da forma $\exp[P(z)]$ onde $P(z)$ é uma função inteira tq $P(z+d)-P(z)$ seja uma função inteira, linear dos z_h. $\forall d\in\Gamma . (P(z+d)-P(z)=\sum c_h z_h + b)$

$\Longrightarrow$ as derivadas segundas de $P(z)$ são funções inteiras e periódicas (pela igualdade de cima), logo acotadas, logo constantes ; daí que $P(z)$ é um polinomio de segundo grau; recíprocamente, seja $P(z)$ um polinomio de segundo grau, $\exp(P(z))$ é uma função theta para qualquer grupo Γ. Def.: uma tal função será dita trivial.

O que precede demonstra o seguinte teorema :

Teorema Toda função meromorfa em $\mathbb{C}^n$, admitindo por períodos todos os vetores de Γ, pode ser escrita como quociente de duas funções theta relativas a Γ, e primas entre si.

dem.: escrevamos $(f)=D-D'$, (f) é o divisor da funçao f, D e $D'\geq 0$.

Seja F uma função theta tq $(F)=D$ (existe pelo teorema anterior) ; se fizer-mos $G=\frac{F}{f} \Longrightarrow (G)=(F)-(f)=D-(D-D')=D'\geq 0$

$\Longrightarrow$ G é holomorfa e é imediato que é uma função theta relativa a Γ: $G(z+d)=\frac{F(z+d)}{f(z+d)}=\frac{F(z)e^{L_u(z)}}{f(z)}=G(z)e^{L_u(z)} \Longrightarrow$ F e G funç theta rel. a Γ.

Observação: dado um divisor qualquer $D=D'-D''$ (com $D',D''\geq 0$) em $\mathbb{T}^{2n}$; sejam F e G funções theta holomorfas em $\mathbb{C}^n$ relativas a Γ e tq : $(F)=D'$ e $(G)=D''$.

A função $Q=\frac{F}{G}$ é uma função theta meromorfa / $(Q)=D$.

Exemplo de função theta : Seja n=1 , V é então um toro elíptico (uma superficie de Riemann de genus 1). Tomemos como divisor D , a origem. A função σ de Weierstrass é, então, uma função theta que admite 2D por divisor ; o mesmo vale para a função θ de Jacobi . Alem disso vale que $\sigma(z) = k e^{hz^2} . \theta(z)$, ou seja diferem por um fator que é uma função theta trivial .

FUNÇÕES THETA SOBRE O TORO

Capítulo V

Foi demonstrado que para todo divisor D sobre $\mathbb{C}^n/\Gamma$ existe uma função theta cujo divisor é D (ou melhor dito $\bar{D}$, divisor definido sobre $\mathbb{C}^n$,recobrimento universal de $\mathbb{C}^n/\Gamma$,e deduzido de D, elevando-o de $\mathbb{C}^n/\Gamma$ a $\mathbb{C}^n$). Este resultado fundamental que fazia parte duma famosa Memoria de Poincaré, e um pouco ilusória já que não diz se existem divisores (fora o divisor nulo) sobre o nosso toro $\mathbb{C}^n/\Gamma$; este resultado só nos informa que o problema é equivalente ao da existência de funções theta , fora as funções triviais (sem zeros nem polos) .

Vamos ver então em que condições (condições naturalmente sobre o grupo Γ) existem funções theta não triviais relativas a Γ .

É obvio que a inversa duma função theta é uma função theta, e o produto de duas funções theta é uma função theta.

Observação: para que duas funções theta tenham o mesmo divisor é necessário e suficiente que seu quociente seja uma função theta trivial : $(f) = (g) \iff$

$(f/g) = (f) - (g) = 0 \iff f/g$ é uma função theta trivial.

Vemos então que o grupo aditivo dos divisores, sobre $\mathbb{C}^n/\Gamma$, é canonicamente isomorfo ao quociente do grupo multiplicativo de todas as funções theta, pelo subgrupo das funções theta triviais.

Foi demostrado anteriormente, que o logaritmo duma função dita trivial, tem derivadas parciais de ordem dois, invariantes por Γ ,portanto constantes (por ser acotadas) ,portanto $\log f(x) = -2\pi i\, G(x)$, é um polinomio de segundo grau, com respeito ás coordenadas complexas.

Essa condição é também suficiente para que $e^{-2\pi i G(x)}$ seja uma função theta .

Doravante escreveremos $G(x) = \frac{1}{2} G_2(x) + G_1(x) + G_0$, onde G_2 é homogénea de segundo grau, G_1 linear e G_0 um número.

Observação : lembrando que para uma função theta vale:

(1) $\forall u \in \Gamma$, $F(x+u) = F(x) \exp[-2\pi i(L(x,u) + H(u))]$, $L(x,u)$, $\mathbb{C}$-linear em x, temos que o multiplicador da fórmula (1), para uma função trivial, vem dado por : $L(x,u) = G_2(x,u)$, $H(u) = \frac{1}{2} G_2(u,u) + G_1(u)$

onde $G_2(x,y)$ representa a forma $\mathbb{C}$-bilinear, simétrica tq $G_2(x,x) = G_2(x)$.

dem.: seja $G_2(x,y)$ tq $G_2(x,x) = G_2(x)$ então:

$$G_2(x+u) = G_2(x+u, x+u) = G_2(x,x) + G_2(u,u) + 2G_2(x,u) = G_2(x) + G_2(u) + 2G_2(x,u)$$

Seja $F(x) = e^{-2\pi i [\frac{1}{2} G_2(x) + G_1(x) + G_0]}$ vale:

$$\forall u \in \Gamma, \quad F(x+u) = e^{-2\pi i [\frac{1}{2} G_2(x+u) + G_1(x+u) + G_0]} = e^{-2\pi i [\frac{1}{2} G_2(x) + G_1(x) + G_0 + G_2(x,u) + \frac{1}{2} G_2(u) + G_1(u)]}$$

$$\therefore F(x+u) = F(x)\, e^{-2\pi i [G_2(x,u) + \frac{1}{2} G_2(u) + G_1(u)]} \text{ ; mas (1) diz: } F(x+u) = F(x)\, e^{-2\pi i [L(x,u) + H(u)]}$$

e finalmente obtemos : $G_2(x,u) = L(x,u)$ & $\frac{1}{2} G_2(u,u) + G_1(u) = H(u)$

Estudemos agora ,no caso geral, a natureza das funções $L(x,u)$ e $H(u)$ .Igualando duas expressões de $F(x+u+v)$ tiradas de (1) sendo $u, v \in \Gamma$ quaisquer , $x \in E$.

$$F((x+u)+v) = F(x+u)e^{-2\pi i[L(x+u,v)+H(v)]} = F(x)e^{-2\pi i[L(x,u)+H(u)+L(x,v)+L(u,v)+H(v)]}$$

$$F(x+(u+v)) = F(x)\,e^{-2\pi i[L(x,u+v)+H(u+v)]}$$

$$\therefore [L(x,u+v)+H(u+v)] - [L(x,u)+L(x,v)+L(u,v)+H(u)+H(v)] = n_{u,v} \in \mathbb{Z}$$

$$(*) \quad \therefore L(x,u+v) - L(x,u) - L(x,v) = H(u)+H(v) - H(u+v) + L(u,v) + n_{u,v}$$

Ou seja, a função $L(x,u+v) - L(x,u) - L(x,v)$, para $u, v \in \Gamma$ fixados, é constante, mas para $x=0$, como $L(x,\gamma)$ é $\mathbb{C}$-linear em x, $L(0,\gamma)=0$ para todo $\gamma \in \Gamma$ $\therefore$ $(*')$ $L(x,u+v) - L(x,u) - L(x,v) = 0$

De forma que L tem um prolongamento único a uma função $L(x,y)$ definida $\forall x, y \in E$, $\mathbb{C}$-linear em x e $\mathbb{R}$-linear em y.

De $(*)$ e $(*')$ resulta que: $L(u,v) = H(u+v) - H(u) - H(v) - n_{u,v}$, o que prova que:

(2) $\varphi(x,y) = L(x,y) - L(y,x)$ é uma função ($\mathbb{R}$-bilinear, alternada) que toma valores inteiros para $x, y \in \Gamma$ e $\forall x,y \in E$, $\varphi(x,y) \in \mathbb{R}$.

Finalmente se escrevemos $K(u) = H(u) - \frac{1}{2}L(u,u)$ temos que:

$$K(u+v) = H(u+v) - \tfrac{1}{2}L(u+v,u+v) = L(u,v) + H(u) + H(v) - \tfrac{1}{2}L(u,u) - \tfrac{1}{2}L(v,v) - \tfrac{1}{2}[L(u,v)+L(v,u)] +$$

$$\therefore K(u+v) = H(u) - \tfrac{1}{2}L(u,u) + H(v) - \tfrac{1}{2}L(v,v) + \tfrac{1}{2}[L(u,v) - L(v,u)] = K(u) + K(v) + \tfrac{1}{2}\varphi(u,v),$$

podemos supor, então, que os $K(u)$ foram eleitos de maneira que K seja aditivo em Γ (só precisamos levar a indeterminação de $K(u)$, elegendo os $K(u)$ para os elementos duma base de Γ; dem: seja $v_1 \dots v_{2n}$ uma base de Γ (qualquer outro elemento de Γ, é combinação inteira dos v_i) Vamos supor que a função aditiva procurada é chamada $\mathbb{K}$ então $\mathbb{K}(u) - K(u) = \tau(u) \in \mathbb{Z}$ para todo $u \in \Gamma$; $\mathbb{K}(\sum a_i v_i) = K(\sum a_i v_i) + \tau(\sum a_i v_i)$, $\mathbb{K}(v_i) = K(v_i) + \tau(v_i)$

como $\mathbb{K}$ deve ser aditiva, vale: $0 = \mathbb{K}(\sum a_i v_i) - \sum a_i \mathbb{K}(v_i) = K(\sum a_i v_i) - \sum a_i K(v_i) +$
$+ \dagger(\sum a_i v_i) - \sum a_i \dagger(v_i)$

$\therefore \dagger(\sum a_i v_i) = \sum a_i \dagger(v_i) + [\sum a_i K(v_i) - K(\sum a_i v_i)]$.

Ou seja que basta eleger os valores de $\dagger$ na base $v_1 --- v_n$ para ter definida $\dagger$ em todo Γ, logo temos a função linear $\mathbb{K}$, procurada.

Vamos resumir os resultados obtidos até agora:

Teorema 3 uma função theta $F(x)$ define:

1º) uma função $L(x,y)$ $\mathbb{C}$-linear em x e $\mathbb{R}$-linear em y ;

2º) uma função $K(y)$ $\mathbb{R}$-linear em y, determinada a menos da soma duma função $\mathbb{R}$-linear a valores inteiros em Γ ;

temos então, para $u \in \Gamma$:

$$(3) \quad F(x+u) = F(x)\, e^{-2\pi i [L(x,u) + \frac{1}{2} L(u,u) + K(u)]}$$

Observação; para uma classe de funções theta, admitindo o mesmo divisor, a função $L(x,y)$ está determinada a menos da soma de uma $G_2(x,y)$, $\mathbb{C}$-bilinear simétrica arbitrária; a função $K(y)$ está determinada a menos da soma de um $G_1(x)$ $\mathbb{C}$-linear

Finalmente, a função $f(x,y) = L(x,y) - L(y,x)$, está bem determinada pelo divisor e toma valores inteiros $\forall$ x, y $\in \Gamma$.

O fato de f estar bem determinada pelo divisor resulta do fato que $L(x,y) - L(y,x)$, não varia se agregamos a $L(x,y)$, uma $G_2(x,y)$ simétrica em x e y .

Este resultado diz que toda função theta vem quase fixada pelo seu divisor, o que já sabiamos .

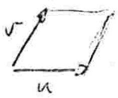
Observação: lembremos que duas funções F e G tem o mesmo divisor se é só se $\frac{F}{G}=f$ é uma função theta trivial :

Interpretação da função φ ligada a cada divisor

Todo $(u,v)\in\Gamma\times\Gamma$ define um 2-ciclo orientado do toro E/Γ

Por outra parte ,o divisor D define uma classe de homologia (inteira) de dimensão 2n-2 . Veremos que $\varphi(u,v)$ é o número de interseções da classe do 2-ciclo definido por (u,v) com a classe de homologia do divisor D : suponhamos estarmos num plano que contem os pontos $a, a+u, a+v$, sendo $a\in E$ tq $F(x)\neq 0$ e ∞ nos lados do paralelogramo construido sobre os vetores u e v partindo de a . Calculando a integral $\frac{1}{2\pi i}\int d\log F(x)$, ao longo desse paralelogramo obtemos o valor $L(u,v)-L(v,u)=\varphi(u,v)$

dem.: $\frac{1}{2\pi i}\log F(x+u)=\frac{1}{2\pi i}\log F(x)-[L(x,u)+\eta_u]\Rightarrow\frac{1}{2\pi i}d\log F(x+u)=\frac{1}{2\pi i}d\log F(x)-dL(x,u)$



$$\therefore\frac{1}{2\pi i}\int d\log F(x)=\frac{1}{2\pi i}\left[\int_0^1 d\log F(a+tv)\,dt-\int_0^1 d\log F(a+u+tv)\,dt-\int_0^1 d\log F(a+tu)+\int_0^1 d\log F(a+v+tu)\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\left[\int_0^1 d\log\frac{F(a+tv)}{F(a+tv+u)}\,dt+\int_0^1 d\log\frac{F(a+tu+v)}{F(a+tu)}\,dt\right]=\int_0^1 dL(a+tu,v)-\int_0^1 dL(a+tv,u)=$$

$$=L(a+u,v)-L(a,v)-L(a+v,u)+L(a,u)=L(u,v)-L(v,u).$$

Condições que deve satisfazer a lei de interseção $\varphi(x,y)$ duma função theta.

Uma primeira condição necessaria vem dada pela seguinte proposição :

Proposição 1 para uma função $\varphi(x,y)$, $\mathbb{R}$-bilinear, alternada, a valores inteiros em Γ , são equivalentes as seguintes condições :

a) existe $L(x,y)$, $\mathbb{C}$-linear em x e $\mathbb{R}$-linear em y tq

(2) $\varphi(x,y) = L(x,y) - L(y,x)$

b) $\varphi(x,Jy)$ é simétrica em x e y .

c) $\varphi(x,y) = \varphi(Jx,Jy)$

d) $-\varphi(x,y)$ é a parte imaginaria de uma forma hermitiana

Se essas condições são cumpridas, a forma hermitiana(da qual falamos em d)) é a seguinte:

$$(4)\quad \Phi(x,y) = \varphi(x,Jy) - i\,\varphi(x,y)$$

dem.: (a)$\longrightarrow$(b) porque (2) implica $\varphi(x,Jy) = L(x,Jy) - L(Jy,x) = i\,L(Jx,Jy) - i\,L(y,x)$

mas $\forall\, x_1,x_2 \in E$, $\varphi(x_1,x_2) \in \mathbb{R} \Rightarrow \varphi(x,Jy) = Im(L(Jx,Jy)) + Im(L(y,x)) \overset{(D)}{=} L'(Jx,Jy) + L'(y,x)$

(sendo L' a parte imaginaria de L) ;mas segundo (2), como φ é real, $L'(x,y)$ é simetrica em x e y, o que implica que $\varphi(x,Jy) = \varphi(y,Jx)$ CQD

(b) e (c) são equivalentes: é só trocar x com Jx .

(b) e (d) são equivalentes : para que uma forma $\mathbb{R}$-bilinear $\Phi(x,y)$ seja hermitiana, é necessário e suficiente que:

$$(5)\quad \Phi(x,Jy) = -i\,\Phi(x,y)$$

$$(5')\quad \Phi(y,x) = \overline{\Phi(x,y)}$$

Escrevamos $\Phi(x,y) = \psi(x,y) - i\,\varphi(x,y)$, sendo ψ e φ reais; a condição (5) se traduz em: $\psi(x,Jy) - i\varphi(x,Jy) = -\varphi(x,y) - i\psi(x,y) \Rightarrow \psi(x,y) = \varphi(x,Jy)$

(5') se traduz em: ψ simétrica em x, y $\Rightarrow$ $\psi(x,y) = \psi(y,x)$

Finalmente ,(5) e (5') $\Rightarrow$ $\varphi(x,Jy) = \varphi(y,Jx)$ CQD

(d) implica (a) porque se $-\varphi(x,y)$ é a parte imaginaria duma $\Phi(x,y)$ hermitiana ,basta fazer $L(x,y) = \frac{1}{2} i\,\Phi(x,y)$, para satisfazer a (2)

$L(x,y) - L(y,x) = \frac{i}{2}\left[\Phi(x,y) - \Phi(y,x)\right] = \frac{i}{2}\left[\Phi(x,y) - \overline{\Phi(x,y)}\right] = -Im(\Phi(x,y)) = \varphi(x,y)$ CQD

Doravante vamos denominar (I), qualquer uma das condições (a), (b), (c), (d).

Observação; a condição (I) $\varphi(Jx,Jy)=\varphi(x,y)$, exprime que a forma dif. de grau 2 associada à forma bilinear alternada $\varphi(x,y)$, é de tipo (1,1).

Mas, a condição (I) não é suficiente, em geral, para que uma forma bilinear alternada φ, a valores inteiros em Γ, correspon- da a um divisor.

Vamos estabelecer uma outra condição necessária para que $\varphi(x,y)$ corresponda a um divisor positivo.

<u>Proposição 2</u> se $\varphi(x,y)$ está ligada a um divisor positivo, a forma hermitiana $\Phi(x,y)$ definida por φ é positiva: o que é equivalente a (II) $\forall x\in E$, $\varphi(x,Jx)\geq 0$

dem.: consideremos uma função theta holomorfa F(x), que admite o divisor considerado (sabemos que existe). Podemos normalizar F(x), multiplicando por uma função theta trivial e fazendo de forma que: (6) $L(x,y)=\frac{i}{2}\Phi(x,y)$, $\forall y\in E$, $K(y)\in\mathbb{R}$, para essa função normalizada.

Com efeito, $G_2(x,y)=L(x,y)-\frac{i}{2}\Phi(x,y)$ é $\mathbb{C}$-lin. em x e simétrica em x e y

$$G_2(x,y)-G_2(y,x)=L(x,y)-L(y,x)-\frac{i}{2}\left[\Phi(x,y)-\overline{\Phi}(y,x)\right]=\varphi(x,y)-\frac{i}{2}2i(-\varphi(x,y))=0$$

Podemos então trocar $L(x,y)$ por $L(x,y)-G_2(x,y)$ (como já tinha sido observado anteriormente) e a nova função satisfará a condição (6). Para realizar a segunda condição de (6) basta tirar de $K(y)$ um $G_1(y)$ $\mathbb{C}$-linear em y, tendo a mesma parte imaginaria que $K(y)$.

Desta forma vemos que existe uma função theta holomorfa com o mesmo divisor considerado e satisfazendo a (6).

Vamos demonstrar que existe uma constante $c>0$ tq essa função $F(x)$ satisfaz :

$$(7) \quad |F(x)| \leq c\, e^{\frac{\pi}{2}\Phi(x,x)} \quad \forall x \in E$$

dem.: consideramos a função $e^{\pi i L(x,x)} \cdot F(x)$; se trocarmos x por $x+u$, $u \in \Gamma$, multiplica-se por $\exp[-2\pi i(f(x,u)+K(u))]$, fator de valor absoluto $= 1$:

$$e^{\pi i L(x+u,x+u)} F(x+u) = e^{\pi i L(x,x)} F(x)\, e^{-2\pi i\left[L(x,u)+H(u)-\frac{1}{2}L(u,u)-\frac{1}{2}L(x,u)-\frac{1}{2}L(u,x)\right]} =$$

$$= e^{\pi i L(x,x)} F(x)\, e^{-2\pi i\left[\frac{1}{2}f(x,u)+K(u)\right]} \quad ; \ \tfrac{1}{2}f(x,u)+K(u) \in \mathbb{R}.$$

Portanto o seu valor absoluto é invariante pelo grupo Γ o que implica que é limitada em $\mathbb{C}^n \Longrightarrow$ é constante $\Longrightarrow$ a condição (7) vale, c.q.d.

Agora podemos demonstrar a Proposição 2, provando por absurdo, que não pode existir um ponto x_0 tq $\Phi(x_0,x_0)<0$

Supondo que exista um ponto x_0 tq $\Phi(x_0,x_0)<0$, consideremos o sub-espaço $\mathbb{C}$-vetorial gerado por x_0 ; nesse sub-espaço $F(x)$ é holomorfa e tende para zero no infinito ($|F(\lambda x_0)| \leq c\, e^{\frac{\pi}{2}|\lambda|^2 \Phi(x_0,x_0)}$), logo F é idênticamente nula nesse subespaço ; daí que $F(x_0)=0$.

Mas como $\Phi(x_0,x_0)$ é contínua, o mesmo vale para todo x numa certa vizinhança de $x_0 \Rightarrow F(x) \equiv 0$,o que é uma contradição.

Observação: existindo um ponto x_0 tq $\Phi(x_0,x_0)=0$, $F(x)$ é constante no sub-espaço vetorial gerado por x_0 (se $x_0 \neq 0$), então podemos demonstrar que basta supor que a função F não é degenerada, (ou seja, a grosso modo, que depende de todas as coordenadas) para ver que F é estritamente positiva.

Estudo do sub-espaço V dos x tq $\varphi(x,Jx)$, quando as condições (I) e(II) são satisfeitas.

Para uma forma hermitiana $\Phi(x,y)$ positiva , os x tq $\Phi(x,x)=0$ formam um sub-espaço vetorial V :

dem. seja x tq $\Phi(x,x)=0$, então $\forall y\in E$, $\forall z\in\mathbb{C}$ vale :

$$0\leq \Phi(y+zx,\ y+zx) = \Phi(y,y)+\Phi(zx,y)+\overline{\Phi(zx,y)} = \Phi(y,y)+2\operatorname{Re} z\,\Phi(x,y),$$

como o lado direito precisa ser não negativo $\forall z\in\mathbb{C}$, decorre que $\forall y\in E$, $\Phi(x,y)=0$(caso contrário, bastaria fazer $z=n\overline{\Phi(x,y)}$, sendo n um número natural suficientemente grande) ;ou seja :

$$V=\{x:\Phi(x,y)=0\ \forall y\in E\}\quad (=\{x:\varphi(x,y)\ \forall y\in E\}).$$

Proposição 3 seja φ $\mathbb{R}$-bilinear, alternada a valores inteiros sobre Γ e satisfazendo (I) $(\varphi(x,y)=\varphi(Jx,Jy))$ .Seja V o espaço dos x tq $\forall y\in E$, $\varphi(x,y)=0$.O espaço V é um sub-espaço $\mathbb{C}$-vetorial e o sub-grupo $V+\Gamma$ do espaço E é fechado em E.

dem.: o primeiro é evidente: se $x\in V$, então $Jx\in V$, porque $\varphi(Jx,y)=-\varphi(x,Jy)$; para o segundo lembremos alguns resultados clássicos sobre sub-grupos fechados dum espaço $\mathbb{R}$-vetorial E, de dimensão finita.

1º) seja G um sub-grupo fechado de E.Para que um sub-grupo de E, que contém G, seja fechado, é necessário e suficiente que a sua imagen em E/G seja fechada. Assim, sendo Γ um sub-grupo e aplicando sucessivamente 1º) aos espaços quocientes E/V e E/Γ, resulta que :

Lema : são equivalentes as 3 condições:

1) o subgrupo $V+\Gamma$ é fechado

2) a imagem de Γ em $E/_V$ é fechada.

3) a imagem de V em $E/_\Gamma$ é fechada.

Observação : a condição 2) também escreve-se assim:

2') a imagem de Γ em $E/_V$ é um sub-grupo discreto (porque: V é o sub-espaço vetorial contido em $V+\Gamma$,daí que a imagem de Γ em $E/_V$ não contém outro sub-espaço vetorial além de $\{0\}$; nessas condições dizermos que a imagem é fechada equivale a dizermos que é discreta.)

<u>Definição</u> : dado um sub-grupo discreto Γ de E, diremos que um sub-espaço $\mathbb{R}$-vetorial V é Γ-proprio se satisfaz uma das 3 condições do lema acima citado.

Observação: se V é um sub-espaço Γ-proprio e se Γ gera E, então $V\cap\Gamma$ gera V.

dem.: $V\cap\Gamma$ possui em todo caso um suplementar Γ' em Γ (porque $\Gamma/_{V\cap\Gamma}$ é sem torção); se Γ gera E, a imagem de Γ em $E/_V$ gera $E/_V$; se V é Γ-proprio, essa imagem é discreta $\longrightarrow$ seu posto = dim $E/_V$ $\longrightarrow$ o posto de Γ = dim E , subtraindo vemos que o posto de $V\cap\Gamma$ = dim V $\longrightarrow$ $V\cap\Gamma$ gera V . c.q.d.

<u>demostremos agora a proposição 3</u> : necessitamos mostrar que a imagem G de Γ em $E/_V$ é fechada; se G não for fechado ,a aderência $\bar{G}$, conteria um sub-espaço vetorial $W \neq \{0\}$. Então a função $\varphi(x,y)$ passa ao quociente em $E/_V$;se $y\in G$ é fixado, a forma $\varphi(x,y)$, como função $\mathbb{R}$-linear em x ,tem valores inteiros para $x\in G$, daí que no limite(para $x\in\bar{G}$) tem também valores inteiros; logo a função é nula em W . Agora, se $x\in W$ temos

$f(x,y)=0, \forall y \in G$ $\longrightarrow$ portanto para todo y sem exceção , (porque f é $\mathbb{R}$-bilinear) , o que contradiz a definição de V.

<u>Proposição 4</u> seja f a função $\mathbb{R}$-bilinear, alternada, definida pelo divisor positivo D . O sub-espaço $\mathbb{C}$-vetorial V formado pelos x tq $f(x,ix)=0$, tem as seguintes propiedades:

(1) se F(x) é uma função theta (holomorfa porque $D \geqslant 0$) que admite o divisor D, e normalizada como na Proposição 2, ou seja (6) i) $L(x,y) = \frac{1}{2}\Phi(x,y)$ $\forall y \in E$, $K(y) \in \mathbb{R}$, então o valor F(x) depende só da classe de x módulo V.

(2) V é o maior dos sub-espaços $\mathbb{C}$-vetoriais W, tq toda translação de W transforma em si mesmo o conjunto dos zeros do divisor D .

dem.: (1) se $\Phi(x_0,x_0)=0$, veremos que vale $F(x)=F(y)$ cada vez que $y-x=x_0$ .Fixado x , $F(x+ax_0+bix_0)$ é uma função holomorfa da variável complexa $a+ib$;da desigualdade (7) $\left(|F(x)| \leq c\, e^{\frac{\pi}{2}\Phi(x,x)}\right)$ vemos que seu valor absoluto é $\leq c\, e^{\frac{\pi}{2}\Phi(x,x)}$, ou seja é acot. portanto constante $\longrightarrow$ seu valor para $a+ib=1$ é o mesmo que seu valor para $a+ib=0$, o que demonstra (1).

(2) chamemos agora V', o maior sub-espaço $\mathbb{R}$-vetorial contido no grupo G dos x tq as translações $x\ a{-}x$ levem em si o conjunto dos zeros do divisor D. O grupo G é fechado $\longrightarrow$ sua imagem em E/V' é discreta. Como $\Gamma \subset G$, a imagem de Γ em E/V' é discreta, daí que ,segundo o lema anterior, o sub-espaço $\mathbb{R}$-vetorial V' é gerado por $V' \cap \Gamma$ .Mas V' é um sub-espaço $\mathbb{C}$-vetorial porque se $x_0 \in V'$ a função $F(ax_0+bix_0)$ é holo-

morfa em $a+ib$ e nula cada vez que $b=0$, portanto identicamente nula.

Resta demonstrar que $V=V'$. De (1), é claro que $V\subset V'$

Para provar que $V'\subset V$, mostremos que $\forall x\in V'$ $\varphi(x,Jx)=0$; como $x\in V'$ implica $Jx\in V'$, basta mostrar que $\varphi(x,y)=0$ $\forall x,y\in V'$. Seja então F uma função theta (holomorfa) admitindo D como divisor; se a é tq $F(a)\neq 0$, F é diferente de zero em todo ponto da variedade linear complexa $a+V'$; a restrição de F a $a+V'$ é uma função theta relativa ao grupo $V'\cap\Gamma$ (já vimos que $V'\cap\Gamma$ gera V') é nao se anula em $a+V'$. A restrição de φ a V' é a função $\varphi(x,y)$ ligada a essa função theta trivial $\Longrightarrow$ φ é nula. cqd

Vamos enunciar o teorema fundamental cuja demonstração será nosso próximo objetivo:

<u>Teorema 2</u> para que uma função $\mathbb{R}$-bilinear, alternada $\varphi(x,y)$ a valores inteiros $\forall$ $x,y\in\Gamma$, seja a forma definida pela lei de interseção com um divisor positivo é necessário e suficiente que φ satisfaça (I) e (II).

<u>Indicações sobre a demonstração do Teorema 2</u>

Nas Proposições 1 e 2 demonstramos a necessidade das condições (I) e (II) para que $\varphi(x,y)$ seja ligada a um divisor positivo. Falta mostrar agora, que, valendo as condições (I) e (II) existe uma função theta holomorfa que define essa $\varphi(x,y)$.

Continuaremos chamando de V, o sub-espaço $\mathbb{C}$-vetorial dos x tq $\varphi(x, Jx)=0$. Pela Proposição 4 V, toda função theta cujo divisor define φ é equivalente (módulo uma função theta trivial) a uma função theta constante nas classes de E, módulo V.

Seja então Γ' a imagem de Γ em E/V (Γ' é discreto - Proposição 3 e o lema que segue) ; a função φ passa ao quociente sobre E/V basta agora procurar as funções theta holomorfas sobre E/V relativas ao grupo Γ' cujo divisor define φ. Mas $\forall x \in E/V - \{0\}$ $\varphi(x, Jx) > 0$.

Por conseguinte, vemos que o teorema 2 é reduzido à seguinte Proposição :

<u>Proposição 5</u> seja, no espaço E, uma função $\varphi(x,y)$ $\mathbb{R}$-bilinear, alternada, a valores inteiros em Γ e satisfazendo:

$$(I)\ \varphi(Jx, Jy) = \varphi(x,y) \quad \text{e} \quad (II')\ \forall x \in E-\{0\},\ \varphi(x, Jx) > 0,$$

então existe uma função theta holomorfa da qual resulta a função $\varphi(x,y)$.

Lembrando-nos da Proposição 1 que diz que: se (I) é verdadeira, então existe uma $L(x,y)$, $\mathbb{C}$-linear em x e $\mathbb{R}$-linear em y, e satisfazendo $\varphi(x,y) = L(x,y) - L(y,x)$; a proposição 5 é resultado do seguinte teorema :

<u>Teorema 3</u> sejam dados :

1º) uma função $L(x,y)$, $\mathbb{C}$-linear em x e $\mathbb{R}$-linear em y tq $\varphi(x,y) = L(x,y) - L(y,x)$ seja a valores inteiros em Γ e que $\forall x \in E-\{0\}$, $\varphi(x, Jx) > 0$;

2º) uma função $\mathbb{R}$-linear $K(y)$.

então o espaço $\mathbb{C}$-vetorial das funções theta holomorfas, $F(x)$ relativas as funções $L(x,\gamma)$ e $K(\gamma)$, tem dimensão complexa não nula, igual ao pfaffiano da forma $\varphi(x,\gamma)$ relativo a uma base de Γ.

Observação: lembremos a definição de pfaffiano: se tomamos a matriz de $\varphi(x,\gamma)$ segundo uma base do grupo Γ, seu determinante (matriz de coef. inteiros) é o quadrado dum inteiro; esse inteiro (que não depende da base escolhida) é o pfaffiano de $\varphi(x,\gamma)$.

1. Escolha duma base do grupo Γ

Lema clássico : dada uma forma $\mathbb{R}$-bilinear alternada φ a valores inteiros em Γ (grupo de posto 2n) , existe uma base de Γ $(e_1, \ldots e_n, t_1, \ldots, t_n)$ tq :

$$(2)\quad \begin{cases} \varphi(e_j, e_k) = \varphi(t_j, t_k) = 0 & \forall j,k \quad 1 \leq j,k \leq n \\ \varphi(e_j, t_k) = \delta_{jk}\, d_k \end{cases}$$

inteiros d_k sendo $\geqslant 0$ e $d_1 / d_2 / \cdots / d_n$

Agora é imediato , que o pfaffiano é igual ao produto $d_1 \cdots d_n$

Todos os d_i são $\neq 0$ se o determinante de φ for $\neq 0$, que é o caso, quando a forma hermitiana associada $\Phi(x,x)$ é estritamente positiva (porque se por ex. $d_1 = 0 \Rightarrow \varphi(e_1, v) = 0 \ \forall v \in E \Rightarrow \varphi(e_1, Je_1) = 0$, contradiz o fato de $\Phi(x,x) = \varphi(x, Jx) > 0 \ \forall x \neq 0$).

dem. do lema :

Se $\varphi \neq 0$, seja d_1 o menor dos valores >0 tomados por $\varphi(u,v)$ $\forall (u,v) \in \Gamma \times \Gamma$. Temos então $(e_1, t_1) \in \Gamma \times \Gamma$, com $\varphi(e_1, t_1) = d_1$; $\forall u \in \Gamma$ $\varphi(u, t_1)$ é multiplo de d_1 ; para tanto consideramos $\varphi(u - ke_1, t_1)$, K sendo um inteiro tq $|\varphi(u,t_1)-kd_1|<d_1 \Rightarrow \varphi(u,t_1)$ é múltiplo de d_1 e o mesmo vale para $\varphi(e_1,v)$, $\forall v\in\Gamma$.

Daí que todo $u\in\Gamma$ escreve-se sòmente duma maneira $u=n_1e_1+m_1t_1+v$ onde m_1 e n_1 são inteiros e v é conjugado de e_1 e t_1 respeito a φ, (ou seja $\varphi(e_1,v)=\varphi(t_1,v)=0$) Prosseguiremos na redução de φ ão sub-grupo Γ_1 (de posto 2n-2), conjugado de e_1 e t_1 ; $\forall(u,v)\in\Gamma_1\times\Gamma_1$, $\varphi(u,v)$ é multiplo de d_1, já que $\varphi(u+ke_1,v+t_1)=\varphi(u,v)+kd_1$, e basta tomarmos $k\in\mathbb{Z}$ tq $|\varphi(u,v)+kd_1|<d_1 \Rightarrow \varphi(u+ke_1,v+t_1)=0 \Rightarrow \varphi(u,v)=-kd_1 \Rightarrow d_1/\varphi(u,v)$

cqd

No sub-grupo Γ_1 voltamos ao problema inicial; se $\varphi|_{\Gamma_1}\equiv 0$, temos a solução trivial, caso contrario, o inteiro d_1 será substituido pelo inteiro d_2, múltiplo de d_1 ($d_2>0$).

Obteremos então o lema, repetindo esse processo um número finito de vezes.

2. Transformação das condições do problema

Seja então $\{e_1,\dots,e_n,t_1\dots t_n\}$ base de Γ tq vale (2) ; $\{e_1\dots e_n,t_1\dots t_n\}$ é também uma $\mathbb{R}$-base do espaço E. Seja A o $\mathbb{R}$-sub-espaço gerado pelos $e_1 \dots e_n$, e B o $\mathbb{R}$-sub-espaço gerado pelos $t_1\dots t_n$.

$E=A\oplus JA$ (JA é o $\mathbb{R}$-sub-espaço gerado pelos vetores $Je_1 \dots Je_n$) se $\forall x\in E-\{0\}.\ \varphi(x,Jx)>0$.

Observação: doravante φ é estritamente positiva ou seja $\forall x\in E-\{0\}.\ \varphi(x,Jx)>0$.

Basta mostrar que $A\cap JA=\{0\}$; seja $x\in E$ tq $x\in A$ e $Jx\in A \Rightarrow \varphi(x,Jx)=0$ (por (2): $\varphi(e_i,e_j)=0$), e resulta que $x=0$.

Seja então $e_1 --- e_n$ uma base de E para a estrutura complexa. Então os elementos $t_1 --- t_n$ da base de Γ tem coordenadas complexas τ_{jk} : (3) $t_j = \sum_k \tau_{jk} e_k$.

Lembremos que podemos transformar o problema multiplicando os F(x) procurados, por uma mesma função theta trivial.

Portanto podemos modificar a função $L(x,y)$ dada, tirando dela uma forma $\mathbb{C}$-bilinear simétrica $G_2(x,y)$. Uma tal forma G_2 é determinada dando os números complexos $G_2(e_j,e_k)$;seja então

$G_2(e_j,e_k) = L(e_j,e_k) \longrightarrow$ $G_2(e_j,e_k) - G_2(e_k,e_j) = L(e_j\, e_k) - L(e_k,e_j) = \varphi(e_j,e_k) = 0$

$\therefore$ G_2 é simétrica.

Restando G_2 de L chegamos ao caso (4) $L(e_j,e_k)=0$, o que significa que (4') $L(x,y)=0$, $\forall y \in A$ (ou seja $\forall$ y combinação $\mathbb{R}$-linear dos $e_1 -- e_n$) para x qualquer . Mais precisamente, a função $L(x,y)$ que é $\mathbb{C}$-linear em x, está determinada pelas condiçoes (4) ou (4') e por (5) $L(e_j,t_k) = \delta_{jk} d_k = (\varphi(e_j,t_k))$ (porque segundo (4') $L(t_k,e_j)=0$ já que e_j é combinação linear dos $e_1 - e_n$), lembrando que $\varphi(t_k,t_j)=0$, obtemos: (6) $L(t_j\, t_k) = L(t_k,t_j)$, o que significa que para <u>x</u> e <u>y</u> no $\mathbb{R}$-sub-espaço B, gerado pelos $t_1 -- t_n$, a forma $\mathbb{R}$-linear $L(x,y)$ (a valores complexos) é simétrica. Além disso, por (3) e (2), $L(t_j,t_k) = d_k \tau_{jk}$; daí que a matriz complexa $(d_k \tau_{jk})$, seja simétrica.

Observação: trocando o K(u) podemos supor que $K(e_i) \in \mathbb{Z}$, i=1,--,n.

Falta expressar a hipótese que diz que $\Phi(x,x) = \varphi(x, Jx) > 0$ $\forall x \neq 0$.

Lembremos que $\Phi(x,y) = \varphi(x, Jy) - i\, \varphi(x,y) \Rightarrow \Phi(x,x) = \varphi(x,Jx)$ (φ é altern.);

$\Phi(x,y)$ é determinada pelos $\Phi(e_i,e_j)$, que são reais porque $\varphi(e_i, e_j)=0$

por (2) .

Basta então escrever que $\Phi(x,x)>0$ $\forall x \in A-\{0\}$.

Vamos transformar essa condição : $\forall y \in B$, $\underline{y}$ decompõe-se só duma maneira: $y = y' + Jy''$ com $y', y'' \in A$ e a aplicação $y \longrightarrow y''$ é linear e biunívoca, de B sobre A (basta probar que ela é biunívoca , ou $y''=0 \longrightarrow y=y' \in A$, e como $A \cap B = \{0\} \longrightarrow y=0$).

Simplesmente, basta dizer que $\varphi(y'', Jy'')>0$, $\forall y \in B-\{0\}$.

Ou $\varphi(y'',Jy'') = \varphi(y'',y)$, porque $\varphi(y'',y')=0$ por (2), e $\varphi(y'',y) = L(y'',y)$ porque $L(y,y'')=0$ por (4'), já que $y'' \in A$. Como $L(y,y) = L(y',y) + iL(y'',y)$ obtemos finalmente: $\varphi(y'', Jy'') = \operatorname{Im} L(y,y)$.

Ficou demonstrado então o seguinte lema :

<u>Lema</u> : no sub-espaço B gerado por $\{t_1 \dots t_n\}$, a forma $\mathbb{R}$ bilinear, simétrica $L(x,y)$, de matriz $(d_k Z_{jk})$, tem por parte imaginaria uma forma definida positiva.

3. Teorema de existencia de funções theta

Logo após todas as transformações feitas nas condições, o Teorema 3 que queríamos demonstrar ficou da seguinte forma:

Teorema 3' Dada uma $\mathbb{C}$-base $\{e_1 \ldots e_n\}$ de E, um sistema de n vetores $t_1 \ldots t_n$ e um sistema de n inteiros $d_k > 0$ satisfazendo as seguintes condições: seja (3) $t_j = \sum_k \tau_{jk} e_k$, a matriz complexa $(d_k \tau_{jk})$ é simétrica e a sua parte imaginaria é def. pos. ; então as funções F(x), holomorfas em E, tq :

$$\begin{cases} (\alpha) & F(x+e_j) = F(x) \\ (\beta) & F(x+t_k) = F(x)\, e^{-2\pi i[d_k \xi_k + a_k]} \end{cases}$$

(onde as constantes complexas a_k são arbitrárias e $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{C}^n$, formam um sub-espaço $\mathbb{C}$-vetorial de dimensão complexa $d_1 \ldots d_n$

Observação: as fórmulas (α) e (β) foram deduzidas de (1) explicitando $L(x,y)$, em base a (4) e (5) . Multiplicamos por uma função theta trivial , fazendo com que as nossas funções $L(x,y)$ e $K(y)$, mudassem. Essa mesma função theta trivial dá-nos um isomorfismo (via multiplicação) das soluções do sistema original com as soluções do novo sistema .

Por meio de uma translação podemos supor que os a_k são nulos.

Vamos chamar também de $L(x,y)$ a forma $\mathbb{R}$-bilinear simétrica, definida sobre B pelas relações (7) $L(t_j, t_k) = d_k \tau_{jk}$.

Seja F(x) uma solução (se existe). Por (α) ,F tem um desenvolvimento em série de Fourier segundo as funções $e^{2\pi i\, r.x}$

(onde $r.x = \sum_{i=1}^{n} r_i z_i$, $x = (z_1 \dots z_n)$).

Em poucas palavras, vale : $F(x) = \sum_r c_r e^{2\pi i r.x}$

As relações (β) vão se traduzir por relações lineares entre os coeficientes c_r . Antes disso, associemos a cada ponto $r \in \mathbb{Z}^n$, o ponto $f(r)$ de B definido por $f(r) = \frac{r_1}{d_1} t_1 + \dots + \frac{r_n}{t_n} d_n$. O ponto $f(r)$ descreve um sub-grupo discreto, do sub-espaço B, que vai ser gerado pelos vetores $\frac{t_1}{d_1}, \dots, \frac{t_n}{d_n}$. Agora, o produto escaçar $r.x$ não é outro que $L(x, f(r))$. Escrevendo $\gamma_{f(r)}$ em vez de c_r temos:

$$\sum_{f(r)} e^{2\pi i L(x, t_k)} . \gamma_{f(r)} e^{2\pi i L(x+t_k, f(r))} = \sum_{f(r)} \gamma_{f(r)} e^{2\pi i L(x, f(r))}$$

o que equivale a : (8) : $\gamma_{f(r)+t_k} = \gamma_{f(r)} e^{2\pi i L(t_k, f(r))}$.

Essas relações permitem calcular, por recorrencia, todos os coeficientes a partir dos $\gamma_{f(r)}$ para os quais, $f(r)$ está no dominio fundamental: $0 \le r_1 < d_1, \dots, 0 \le r_n \le d_n$.

Vemos que temos $d_1 \dots d_n$ coeficientes arbitrários e que qualquer série solução, é combinação linear dessas $d_1 \dots d_n$ séries básicas que chamaremos de "séries theta".

Ainda falta demonstrar a convergência das séries theta: dado um ponto <u>a</u> do domínio fundamental, consideremos todos os $f(r)$ tq $f(r)$ seja congruente a <u>a</u> módulo o subgrupo gerado pelos $t_1 \dots t_n$.

Temos: $e^{-\pi i L(f(r)+t_k, f(r)+t_k)} \gamma_{f(r)+t_k} = e^{-\pi i L(f(r), f(r))} . \gamma_{f(r)} e^{-\pi i L(t_k, t_k)}$

(porque L, em B, é simétrica e $L(t_k, f(r)) = r.t_k$ soma t_k a x; depois é fazer os cálculos) de onde:

$$e^{-\pi i L(f(r), f(r))} . \gamma_{f(r)} = e^{-\pi i L(f(a), f(a))} . \gamma_a . e^{-\pi i \left(\sum_{j=1}^{n} (r_j - a_j) z_{jj} \right)}$$

Finalmente :

$$\gamma_{f(r)} = e^{\pi i \lambda(r)} \gamma_a$$

sendo :

$$\lambda(r) = L(f(r),f(r)) - L(f(a),f(a)) - \sum_{j=1}^{n} (r_j - a_j)\, \tau_{jj} \;.$$

Como a pa_rte imaginaria de $L(f(r),f(r))$ é estritamente positiva para $r \neq (0\cdots 0)$, vemos que a série $\Theta_a(x) = \sum_{f(r)=a} e^{\pi i \lambda(r)} e^{2\pi i r.x}$ é uniformemente convergente. A convergência dessa série resulta então, do fato de que a parte imaginaria da matriz $(d_k \tau_{jk})$ é uma forma quadrática, não degenerada, definida positiva : seja α o menor valor próprio dessa forma, podemos conferir que $\forall \delta /\ 0<\delta<\pi \frac{\alpha}{d_n^2}$, e para todo compacto $K \subset E$, existe uma constante $c_K > 0$, tq essa série é majorada termo a termo em K, pela série $\sum c_K e^{-\delta(x_1^2+\cdots+x_n^2)}$, cuja convergência passaremos a demonstrar. também.

dem.:

$$e^{\pi i \lambda(r)} e^{2\pi i r.x} = e^{i\pi(\lambda(r)+2r.x)} = e^{i\pi\left[L(f(r),f(r)) + \sum_{j=1}^{n} r_j(2\tau_j - \tau_{jj}) - \overbrace{L(f(a),f(a)) + \sum_{j=1}^{n} a_j \tau_{jj}}^{\alpha_a}\right]}$$

$$\therefore\ \left| e^{\pi i \lambda(r)} . e^{2\pi i r.x} \right| = e^{-\pi\, \mathrm{Im}(\lambda(r) + 2r.x)} = e^{-\pi\, \mathrm{Im}\left(L(f(r),f(r)) + \sum r_j(2\tau_j - \tau_{jj}) + \alpha_a\right)} =$$

$$= e^{-\pi\left[L''(f(r),f(r)) + \sum_j r_j\, \mathrm{Im}(2\tau_j - \tau_{jj})\right]} . e^{-\pi \alpha_a''} \;.$$

L'' é uma forma quadrática definida positiva, o que implica que existe uma matriz unitária P tq L'' vem dada pela matriz $P D {}^{t}P$, sendo D a forma diagonal $D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}$ com $\alpha_i > 0 \quad i=1,\ldots,n$

$$\therefore\ L''(f(r),f(r)) = \left(\tfrac{r_1}{d_1}, \ldots, \tfrac{r_n}{d_n}\right) P\, D\, {}^{t}P\; {}^{t}\!\left(\tfrac{r_1}{d_1}, \ldots, \tfrac{r_n}{d_n}\right).$$

Seja: $(c_1 \ldots c_n) = (r_1/d_1, \ldots, r_n/d_n)\, P \implies L''(f(r),f(r)) = (c_1 \ldots c_n) \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow L''(f(r),f(r)) > \alpha \sum c_i^2 \qquad 0<\alpha = \min_{1\le i\le n} \alpha_i \quad ; \text{ como } P \text{ é unitária}$$

vale . $\sum c_i^2 = \left\| \left(\tfrac{r_1}{d_1}, \ldots, \tfrac{r_n}{d_n}\right) P \right\|^2 = \left\| \left(\tfrac{r_1}{d_1}, \ldots, \tfrac{r_n}{d_n}\right) \right\|^2 = \sum \frac{r_i^2}{d_i^2} > \frac{1}{d_n^2} \sum r_i^2$

e finalmente obtemos que :

$$L''(f(r),f(r)) > \frac{\alpha}{d_n^2} \sum r_i^2 = \delta^2 \sum r_i^2 \;,\quad 0<\delta = \frac{\alpha}{d_n^2}\,.$$

$\therefore L''(f(r),f(r)) + \sum r_j \underbrace{\mathrm{Im}(2Z_j - Z_{jj})}_{=2b_j} > \sum \left(\delta r_j + \frac{b_j}{\delta}\right)^2 - \ell_1 >$ (fixado um compacto K, para $r/\ \|r\| > R_K$ vale $\left(\delta r_j + \frac{b_j}{\delta}\right)^2 > \left(\frac{\delta r_j}{2}\right)^2$) $> \sum_{\|r\|>R_K} \left(\frac{\delta r_j}{2}\right)^2 + K_1$).

Observação: a convergência da série $\sum c\, e^{-\delta(r_1^2+\cdots+r_n^2)}$, junto com o critério de Weierstrass, implicam a convergência uniforme, nesse compacto K, da série theta. Θ_a.

Vamos demonstrar em seguida a convergência da série $\sum e^{-\delta(r_1^2+\cdots+r_n^2)}$

Se substituirmos $r_1^2+\cdots+r_n^2$ por $\max_{1\leq i\leq n} |r_i|^2$, obteremos um número maior

Para um dado $m \geq 0$, vamos calcular quantos vetores $(r_1 \ldots r_n) \in \mathbb{Z}^n$ cumprem a condição: $\max |r_i| = m$. Assim sendo, vamos supor $r_1 = \pm m$, então para $1 \leq i \leq n$, $-m \leq r_i \leq m$, ou seja, cada um dos n-1 restantes, tem 2r-1 valores possíveis.

No total, temos, permutando a coordenada que atinge o valor $\pm m$, menos vetores do que $n!(2m+1)^{n-1}$,

daí que vale: $\sum_{r_1 \ldots r_n = -\infty}^{+\infty} c\, e^{-\delta(r_1^2+\cdots+r_n^2)} \leq \sum_{m=0}^{\infty} c\, n!(2m+1)^{n-1} e^{-\delta m^2}$

mas a série $\sum_{m=0}^{+\infty} a_m = \sum_{m=0}^{+\infty} (2m+1)^{n-1} e^{-\delta m^2}$, $\sqrt[m]{a_m} = \left(\sqrt[m]{(2m-1)}\right)^{n-1} e^{-\delta m} \xrightarrow[m\to+\infty]{} 0$, logo essa serie converge. (pelo criterio de Cauchy)

CQD

<u>Complemento</u> ao teorema 3

<u>Proposiçao 6</u> Nas hipóteses do Teorema 3, existe uma função theta, holomorfa, $F(x)$, relativa a $L(x,y)$ e $K(y)$, cujo conjunto de zeros não é invariante para nenhuma translação, fora as do grupo Γ.

dem.: da proposição 4-V sabemos que o divisor duma $F(x)$ relativa a L e K é $\neq 0$, não é invariante pelas translações de nenhum sub-espaço vetorial próprio de E.

Vamos associar, então, a cada solução $F(x) \not\equiv 0$, o grupo discreto Γ' de translações que deixam invariante o conjunto de zeros de $F(x)$.

$F(x)$ é uma função theta relativa a Γ' (e as funções L e K)

Dem.: seja $G(x)$ uma função theta relativa ao grupo Γ' que admite o mesmo divisor que $F(x)$; G/F é uma função theta trivial (lembremos que a noção de função theta trivial é independente do grupo Γ se Γ tem posto $2n$) ,então podemos normalizar G de maneira que $G/F \equiv 1$. Ou seja, F é uma função theta relativa ao grupo Γ' e é imediato que as funçoes L e K ligadas a Γ' são as mesmas que para o grupo Γ.

Designemos por $U(\Gamma, L, K)$ o espaço $\mathbb{C}$-vetorial das funções theta ligadas ao grupo Γ, e às funções L e K. Se Γ é um sub-grupo próprio de Γ', $U(\Gamma', L, K)$ é um subespaço vetorial de $U(\Gamma, L, K)$ cuja dimensão divide estritamente a dimensão de $U(\Gamma, L, K)$, porque o quociente dos dois pffaffianos é igual ao índice do subgrupo Γ de Γ'.

Dado o grupo Γ, todos os possíveis Γ' sao enumeráveis ; a cada um deles corresponde um sub-espaço vetorial próprio de $U(\Gamma, L, K)$,portanto um sub-espaço fechado sem pontos interiores. Pelo Teorema de Baire $U(\Gamma, L, K)$ não é reunião dos $U(\Gamma', L, K)$, logo existe $F(x) \in U(\Gamma, L, K)$, que não pertence a nenhum dos $U(\Gamma', L, K)$

CQD

Capitulo VI

EXISTÊNCIA DE FUNÇÕES ABELIANAS SOBRE UM TORO NÃO DEGENERADO

Definição : as funções meromorfas em $\mathbb{C}^n$ e invariantes por Γ (subgrupo ,de posto 2n, de $\mathbb{C}^n$) são identificadas com as funções meromorfas em $\mathbb{C}^n/\Gamma$ e denominadas funções abelianas .

Formam um corpo que será chamado A(E,Γ) . Já foi demonstrado que toda função abeliana é quociente de duas funções theta holomorfas.

Toro não degenerado associado a um toro degenerado

Lembremos a definição do sub-espaço $\mathbb{C}$-vetorial V, ligado a E e a Γ : seja $\Phi(E,\Gamma)$ o conjunto das formas $\varphi(x,y)$ R-bilineares, alternadas sobre E, a valores inteiros em $\Gamma\times\Gamma$ e satisfazendo as condições (I) e (II) ($\varphi(x,y) = \varphi(Jx, Jy)$ e $\varphi(x, Jx) \geq 0$, $\forall x \in E$).

O conjunto dos $x \in E$ tq $\varphi(x, Jx) = 0$, $\forall \varphi \in \Phi(E,\Gamma)$, é um sub-espaço $\mathbb{C}$-vetorial que chamaremos V(E,Γ) ou simplesmente V .

Segundo uma base de E formada por elementos de uma base de Γ , a matriz correspondente a uma $\varphi \in \Phi(E,\Gamma)$ qualquer, tem coordenadas inteiras e e antisimétrica. Daí que que existe um conjunto finito $\{\varphi_1 \ldots \varphi_m\}$ tq o resto das formas são as $\{\sum_{i=1}^{m} a_i\varphi_i, a_i \in \mathbb{N}\}$ o que implica que V(E,Γ), é o conjunto das soluções dum sistema finito de equações $\varphi_i(x, Jx) = 0$, $1 \leq i \leq m$.

Seja $\psi = \sum \varphi_i$; $\psi \in \Phi(E,\Gamma)$, e W o sub-espaço ligado a ψ , ou seja $W = \{x / \psi(x, Jx) = 0\}$;naturalmente que $V \subset W$. Mas se $x_0 \in W$. $\psi(x_0, Jx_0) = 0 \Rightarrow$ $\sum_{i=1}^{m} \varphi_i(x_0, Jx_0) = 0$, e como $\forall i$, $\varphi_i(x_0, Jx_0) \geq 0$, $\Rightarrow \forall i$, $\varphi_i(x_0, Jx_0) = 0$ $\Leftarrow x \in V \Rightarrow W \subset V$ CQD

Concluimos que V é tambem o sub-espaço ligado a um elemento de $\Phi(E,\Gamma)$. Segundo a Proposição 3-V e o lema seguinte, o subgrupo $V+\Gamma$ é fechado e a imagem de Γ em E/V é discreta.

Teorema 1 Para toda função abeliana $f \in A(E,\Gamma)$, o valor de $f(x)$ depende só da classe de x módulo $V(E,\Gamma)$. Ou seja, o corpo $A(E,\Gamma)$ identifica-se com o corpo $A(E/V, \Gamma')$, sendo Γ' a imagem (discreta) de Γ em E/V.

dem.: f é quociente de duas funções theta holomorfas que podemos supor normalizadas como para aplicar a Proposição 4-V; logo essas funções theta só dependem da classe de x módulo V. CQD

Definição : o toro E/Γ é dito não degenerado se o sub-espaço $V(E,\Gamma) = \{0\}$ No caso geral, o toro definido por E/V e o grupo Γ' (imagem de Γ) é não degenerado e denomina-se toro não degenerado associado ao toro dado. O Teorema 1 mostra que o corpo das funções abelianas num toro $\mathbb{C}^n/\Gamma$ é isomorfo ao corpo das funções abelianas sobre o toro nao degenerado associado a $\mathbb{C}^n/\Gamma$.

Observação: foi demonstrado no começo deste capítulo que em todo toro E/Γ ,existe uma $\varphi \in \Phi(E,\Gamma)$ tq $V(E,\Gamma) = \{x \in E / \varphi(x, Jx) = 0\}$; daí que se o nosso toro é degenerado, sabemos que vai existir uma $\varphi \in \Phi(E,\Gamma)$ que cumpra a condição (II'): $\forall x \in E - \{0\}, \varphi(x,Jx) > 0$.

Exemplos de toros degenerados

Seja E , com uma estrutura complexa dada por J, Γ (grupo de posto 2n) ; consideremos o conjunto de todas as $\varphi(x,y)$, $\mathbb{R}$-bilineares, alternadas a valores inteiros sobre $\Gamma \times \Gamma$ e que satisfazem as condições (I) e (II) ($\varphi(x,y) = \varphi(Jx, Jy)$ e $\varphi(x,Jx) \geq 0$ $\forall x \in E$).

V será o sub-espaço $\mathbb{C}$-vetorial dos $x \in E$ / $\varphi(x,y) = 0$ $\forall y \in E$ e $\forall \varphi \in \Phi(E,\Gamma)$.

V' será o sub-espaço $\mathbb{C}$-vetorial dos $x \in E$ / $\varphi(x,y) = 0$ $\forall y \in E$, $\forall \varphi$ satisfazendo só a condição (I) ($\varphi(x,y) = \varphi(Jx, Jy)$)

É evidente que $V' \subset V$. Vamos dar (no caso n=2) dois exemplos ; no primeiro $V' = E$, daí que a fortiori, $V' = V = E$ e no segundo caso , $V' = \{0\}$ e $V = E$. Nos dois casos toda função abeliana e constante e todo divisor no toro e nulo. (porque $V = E$).

Dada uma base complexa de E (formada por dois vetores) , Γ é gerado por 4 vetores cujas coordenadas são: $(1,0), (0,1), (ic, id), (ia, ib)$; $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Estamos procurando formas hermitianas $\Phi(x,y) = (x_1\ x_2)\begin{pmatrix} u & v \\ \bar{v} & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \end{pmatrix}$, cuja parte imaginaria tome valores inteiros em $\Gamma \times \Gamma$ (u e w são reais porque a matriz correspondente a uma forma hermitiana é hermitiana ou seja vale $a_{ij} = \bar{a}_{ji} \Rightarrow a_{ii} = \bar{a}_{ii} \Rightarrow a_{ii} \in \mathbb{R}$). ($v = v' + v''$).

Essas condiçoes sobre Φ , levam às seguintes equações (uma vez aplicada Φ nos geradores : ① : $v'' = m_1$ ② $v''(ad-bc) = m_2$; ③ $ua + v'b = n_1$; ④ $uc + v'd = n_2$; ⑤ $v'a + wb = n_3$; ⑥ $v'c + wd = n_4$ $\quad m_1, m_2, n_1, n_2, n_3, n_4 \in \mathbb{Z}$ (indet)

Seja $ad-bc$ irracional, então ① e ② implicam $v'' = 0$; daí que:

d·③ - b·④ : $(ad-bc)u = dn_1 - bn_2$; a·④ - c·③ : $(ad-bc)v' = -cn_1 + an_2 = dn_3 - bn_4$

e finalmente: a·⑥ - c·⑤ : $(ad-bc)w = -cn_3 + an_4$.

<u>Primeiro</u> caso : suponhamos a, b, c, d linearmente independentes sobre o corpo $\mathbb{Q}$ dos racionais ; a igualdade $-cn_1 + an_2 = dn_3 - bn_4$ implica $n_i = 0$, $1 \le i \le 4$, logo u, v e w são nulos $\Rightarrow \Phi \equiv 0$ e $V' = E$

<u>Segundo</u> caso : suponhamos b=c e a, b, d linearmente independentes sobre o corpo $\mathbb{Q}$ dos racionais. A igualdade $-cn_1 + an_2 = dn_3 - bn_4$, implica $n_2 = n_3 = 0$ e $n_1 = n_4$ (n_1 e n_4 arbitrários).

Portanto , todos os Φ são múltiplos de uma forma hermitiana Φ_0 cujo determinante $uw - |v|^2 = ad - bc \neq 0$. Logo se $\underline{x}$ é tq: $\Phi_0(x,y) = 0 \quad \forall y \in E$

$\Rightarrow (x_1\ x_2)\begin{pmatrix} u & v \\ \bar{v} & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (x_1\ x_2) = (0, 0)$ porque a matriz $\begin{pmatrix} u & v \\ \bar{v} & w \end{pmatrix}$ é inversivel já que $\det\begin{pmatrix} u & v \\ v & w \end{pmatrix} = ad-bc \neq 0$.

Ou seja $V' = 0$. Se além disso a,b,d são tq ad-bc 0 (e irracional) nenhum desses satisfaz a condição exceto a forma identicamente nula .Isso implica $V = E$.

<u>Teorema 2</u> se o toro $\mathbb{T} = E/\Gamma$ é não degenerado, existe uma função abeliana f (invariante por Γ) tq Γ seja exatamente o grupo de todas as translações que deixam f invariante.

Além disso vamos provar que existe uma f tq Γ seja o maior grupo que deixa fixo o conjunto dos polos de f.

Para demonstrar o Teorema 2 precisamos provar o seguinte lema :

<u>Lema</u> Seja F uma função holomorfa em $\mathbb{C}^n$ (periódica ou não)

Existe $h \in \mathbb{C}^n$ tq as funções F(x) e $F_h(x) = F(x-h)$, sejam primas entre si(i.e. : os conj, de seus zeros não têm componentes irredut. comúns).

Lembremos a definição de variedade irredutível de codimensão 1 ;

a variedade X e irredutivel se $\forall\, Y \subset X$ $Y = \{x :\ f(x) = 0\} \Rightarrow Y = X$.

O conjunto dos zeros de F se compõe duma família enumerável de variedades irredutíveis D_i .Tomemos um ponto em cada D_i $(x_i \in D_i)$

Seja b uma translação que leva D_i em D_j .Esse vetor translação <u>b</u> pertence a um dos conjuntos $D-x_i$ (transladado de D por $-x_i$):

visto que $D_i + b = D_j \Rightarrow x_i \in D_i = D_j - b \Rightarrow \exists\, y \in D_j / \ x_i = y - b \Leftrightarrow b = y - x_i \in D_j - x_i \subset D - x_i$.

Mas os conjuntos $D-x_i$ são subconjuntos fechados de $\mathbb{C}^n$, sem ponto interior, já que têm dimensão complexa n-1 (no máximo).

Pelo Teorema de Baire, $\mathbb{C}^n$, que é completo, não pode ser reunião dum número enumerável de conjuntos fechados sem interior $\Rightarrow$

$\Rightarrow \bigcup_{i \in I} (D - x_i) \subsetneq \mathbb{C}^n$; daí que existe $h \notin \bigcup_{i \in I} (D - x_i)$ C.Q.D.

Observação : como E/Γ é não degenerado ,vale $V(E,\Gamma) = \{0\} \Rightarrow$ existe $\varphi \in \mathfrak{F}(E,\Gamma)$ tq $\varphi(x,]x) > 0$ $\forall x \neq 0$; aplicando então, o Teorema 3-V e a proposição 6-V , sabemos que existe uma função theta F , holomorfa, relativa ao grupo Γ e tq o conjunto de seus zeros não admite outro período, fora os elementos de Γ .

Se h satisfaz às condiçoes do Lema anterior, as funções $F(x+h)F(x-h)$ e $(F(x))^2$ são primas entre si. Portanto o quociente $f = \dfrac{F(x+h)F(x-h)}{(F(x))^2}$ é invariante por Γ e tq Γ seja o maior grupo de translações deixando invariante o seu conjunto de polos.

dem.:

$$F(x+u) = e^{-2\pi i\left[L(x,u) + \frac{1}{2}L(u,u) + K(u)\right]} \cdot F(x)$$

$$F_{-h}(x+u) = F(x+h+u) = e^{-2\pi i\left[L(x+h,u) + \frac{1}{2}L(u,u) + K(u)\right]} \cdot F_{-h}(x)$$

$$F_h(x+u) = F(x-h+u) = e^{-2\pi i\left[L(x-h,u) + \frac{1}{2}L(u,u) + K(u)\right]} \cdot F_h(x)$$

$$\therefore \frac{F_h(x+u)\,F_{-h}(x+u)}{F(x+u)\,F(x+u)} = \frac{e^{-2\pi i L(-h,u)} \cdot e^{-2\pi i[\ \ ]} \cdot F_h(x) \cdot e^{-2\pi i L(h,u)}\, e^{-2\pi i[\ \ ]}\, F_{-h}(x)}{e^{-2\pi i[\ \ ]} \cdot F(x) \cdot e^{-2\pi i[\ \ ]} \cdot F(x)} = \frac{F_h(x) \cdot F_{-h}(x)}{(F(x))^2}$$

e QD

Capítulo VII

ESTRUTURA DO CORPO DAS FUNÇÕES ABELIANAS SOBRE UM TORO NÃO DEGENERADO:

Teorema 3 O corpo $A(E,\Gamma)$ das funções abelianas sobre um toro não degenerado, de dimensão real $2n$, tem grau de trascendência n sobre o corpo dos complexos.

Mais precisamente : $A(E,\Gamma)$ é uma extensão algébrica simples do corpo das frações racionais de n variáveis (a coef. complexos)

Devemos portanto demonstrar dois fatos:

1º) existência de n funções abelianas $f_1 \text{---} f_n$ algébricamente independentes ;

2º) toda função abeliana satisfaz uma equação algébrica a coeficientes racionais em $f_1, \text{---} f_n$ e de grau inferior a um número que depende só de $f_1, \text{---} f_n$.

Depois, basta aplicar um teorema clássico de extensões finitas: "sobre um corpo C de característica zero, toda extensão algébrica finita K, é gerada por um elemento primitivo ,ou seja $\exists f \in K$ tq $K = C(f)$.

A demonstração de 1º) e 2º) é resultado dos seguintes teoremas :

Teorema 4 sobre um toro não degenerado de dimensão real $2n$, existem n funções abelianas analíticamente independentes (ou seja:cujo jacobiano não é identicamente nulo).

Observação: n funções analít, indep- são a fortiori, algébricamente independentes.

Teorema 5 seja o mesmo toro do Teorema 4, dadas $f_1 \text{---} f_n$

funções abelianas algébricamente independentes ,toda outra função abeliana f_0 satisfaz uma equação $P(f_0, f_1, \ldots, f_n) = 0$, onde P é um polinomio $\neq 0$ cujo grau está acotado por um número que só depende de $f_1 \ldots f_n$ . .

Observação : os Teoremas 4 e 5 ,informa-nos que se $E/_\Gamma$ é não degenerado, no corpo $A(E,\Gamma)$,as noções de dependência analítica e algébrica são equivalentes ja que se $f_1 \ldots f_n$ são alg. indep., podemos achar n funções analíticas indep. entre as funções algébricas geradas pelas $f_1 \ldots f_n$ (Teor. 4 e 5) o que exige que $f_1 \ldots f_n$ sejam anal. indep..

dem. do Teorema 4 : basta provar a seguinte proposição:

Proposição seja f(x) meromorfa em $\mathbb{C}^n$, dependendo efetivamente das n variáveis complexas(ou seja f nao é constante em nenhum plano de E), então existem n vetores $h_1, \ldots, h_n$ tq f seja holomorfa em cada h_i e que o jacobiano das funções $\{f(x+h_i)\}$ seja $\neq 0$ na origem.

dem. da Proposição: a diferencial df associa a cada $h \in E$, onde f é holomorfa, uma forma linear sobre E que será escrita df(h). Estamos à procura de n vetores $h_1 \ldots h_n$ tq $df(h_1) \wedge \ldots \wedge df(h_n) \neq 0$ (porque $df(h_1) \wedge \ldots \wedge df(h_n) = J_{f, h_1 \ldots h_n} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$,sendo $J_{f, h_1 \ldots h_n}$ o jacobiano das n funçoes $\{f(x+h_i)\}$ na origem) . Dizer que esses vetores existem, equivale a dizer que o espaço $\mathbb{C}$-vetorial das formas lineares df(h) (quando h percorre os pontos de E onde f é holomorfa) é de dimensão complexa n. Supondo que a dimensão é estritamente menor que n , vamos ver que vale $\sum \lambda_i \frac{\partial f}{\partial z^i}(h) \equiv 0$, $(\lambda_1 \ldots \lambda_n) \neq (0, \ldots 0)$, o que significa que f é constante num plano de $\mathbb{C}^n$, contradição.

Demonstremos então a igualdade de cima no [illegible] que a dimensão dos $df(h)$ é menor que n:

Seja $A = \{\sum a_i dz_i\}$ e $B = \{\sum b_j \frac{\partial}{\partial z_j}\}$; A é dual de B, e o espaço $\mathbb{C}$-vetorial $\{df(h)' : f$ é holomorfa em $h\} \subset A$.

Como $\dim\{df(h)\} < n = \dim(A)$, existe um elemento de B, não nulo e que anula $\{df(h)\}$. Seja $\sum \lambda_i \frac{\partial}{\partial z^i}$ esse elemento, $(\lambda_1 \ldots \lambda_n) \neq (0, \ldots, 0)$, temos que vale: $\forall h$ onde f é holomorfa: $\langle \sum \frac{\partial}{\partial z^j} f(h)\, dz^j, \sum \lambda_i \frac{\partial}{\partial z^i} \rangle = 0 = \sum \lambda_i \frac{\partial}{\partial z^i} f(h)$.

Daí resulta que $\sum \lambda_i \frac{\partial}{\partial z^i} f(h) \equiv 0 \ \forall h \in E$ (lembremos que o conjunto dos $h \in E$ onde f é holomorfa é um conjunto denso em E) (f é holom. na esfera c.q.d.)

Observação: fazendo a mudança de variáveis: $z_1 = \frac{1}{\lambda_1} u_1$, $z_i = \lambda_i u_1 + u_i$, $i = 2, \ldots, n$ (estamos supondo $\lambda_1 \neq 0$),

vemos que al calcular $\frac{\partial}{\partial u_1} f = \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial u_1} + \cdots + \lambda_n \frac{\partial}{\partial u_n} f = 0 \Rightarrow f$ não depende de u_1

<u>Demonstração do Teorema 5</u> Sejam s e t dois inteiros pos.

Consideremos as $(s+1)(t+1)^n$ funções abelianas $(f_0)^{a_0} \cdot (f_1)^{a_1} \cdots (f_n)^{a_n}$ $(1 \leq a_0 \leq s,\ 1 \leq a_k \leq t,\ k = 1, 2, \ldots, n)$. Vamos mostrar que pode-se eleger um inteiro s que só depende dos $f_1 \ldots f_n$ (e não de f), de maneira que para t bastante grande essas $(s+1)(t+1)^n$ funções sejam lin. dep. (o que demonstrará o Teorema 5):

existe uma função theta holomorfa g, não degenerada, tq $g f_1 \ldots f_n$ seja holomorfa (lembremos que uma função theta g, é dita não degenerada, se a lei de interseção $\varphi(x,y)$, que g define é tq $\forall x \neq 0 \ \varphi(x, \bar{x}) > 0$

Seja também g_0 uma função theta holomorfa tq $g_0 f_0$ seja holomorfa. As $(s+1)(t+1)^n$ funções (1) $g_0^s g^t f_0^{a_0} f_1^{a_1} \ldots f_n^{a_n}$ são funções theta holomorfas cuja lei de interseção se obtém da seguinte forma: seja φ_0 a forma bilinear de g_0 e φ a de g, então $\varphi = s\varphi_0 + t\varphi$ (porque as $f_0 \ldots f_n$ são abelianas).

O pfaffiano de φ acota o número de funções (1) linearmente independentes (Teorema 3 capítulo V); este pfaffiano é um polinomio de grau n ,com respeito as variáveis s e t(lembrar a def. de pfaffiano -no capítulo V) porque numa base de E a igualdade de cima se traduz na seguinte igualdade matricial:

$A_\varphi = s A_{\psi_0} + t A_\psi$; $(sA_{\psi_0} = (s a_{ij})) \Rightarrow$ o coefic. de t^n é o pfaffiano γ de ψ $= |A_\psi|^{1/2})$ .Tomemos o inteiro s ,de maneira que $s+1>\gamma$,então $(s+1)(t+1)^n$ será , para t suficientemente grande, maior que o pfaffiano de φ ; logo as $(s+1)(t+1)^n$ funçoes $f_0^{a_0} f_1^{a_1} \text{---} f_n^{a_n}$ serão lin. dep.

C.Q.D.

BIBLIOGRAFIA

[1]- H. CARTAN "Fonctions thets sur le Tore"

[2]- H. CARTAN "Varietés Rismanniennes, Varietés Analytiques Comlexes, Varietés Kahleriennes"

[3]- H. CARTAN "Fonctions theta sur le Tore" - Seminaire H. Cartan 1951/52

[4]- J. CERF "Fonctions abeliennes" - Seminaire H.Cartan 1951/52

[5]- S. CHERN "Complex manifolds" - Instituto de Física e Matemática - Universidade de Recife - 1959

[6]- S. CHERN "Complex manifolds without Potential Theory" Van Nostrand Mathematical Studies.

[7]- P.DOLBESULT "Fonctions thets associés a un divisor donné" - Seminaire Cartan 1951/52

[8]- GUNNING-ROSSI "Analytical Functios of several complex variables"- Prentice-Hall Series

[9]- K.KODEIRA e J.MORROW "Complex manifolds" Athena Series.

[10]- KOSZUL "Varietés Kahleriennes" - São Paulo FFCL-USP

[11]- J.P.SERRE "Faisceaux algebriques coherants" - Annals of Math. Vol.61 nº 2 march 1955.

[12]- C.L.SIEGEL "Analytic functions of several variables" Princeton 1948

[13] - G. SORANI "An Introduction to real and complex manifolds"

[14] - SPRINGER "Introduction to Riemann Surfaces"

[15] - F. WARNER "Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups" Glenview,Scott,Foresman 1971

[16] - A. WEIL "Varietés Kahleriennes"Hermann-Paris 1958

[17] - A. WEIL "Theorèmes Fondamentaux de la theorie des fonctions theta"- Seminaire Bourbaki - 1949

[18] - R.O. WELLS "Differential analysis on complex manifolds - Prentice-Hall Series 1973

[19] - H. WEYL "The concept of a Riemann Surface"(3).

□··□