O TEOREMA DE ROITER PARA ÁLGEBRAS DE TIPO DE REPRESENTAÇÃO FINITO

Francisco Egger Moellwald

DISSERTAÇÃO APRESENTADA AO INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO, PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM MATEMÁTICA

ORIENTADOR: Prof. Dr. ALFREDO ROSÁLIO JONES RODRIGUEZ.

Durante a elaboração deste trabalho o autor recebeu apoio financeiro do C.N.Pq. e do FINEP.

São Paulo, novembro de 1977.

A meus pais

À Branca, Alexandre e Marina

ÍNDICE

ÍNDICE DE SÍMBOLOS

A^A	=	anel A considerado como módulo à esquerda sobre si mesmo.
$\mathrm{Hom}_K(M,N)$	=	anel dos R-homomorfismos de M em N.
$M_n(R)$	=	anel das matrizes $n \times n$ com coeficiente em R.
$GL(n,R)$	=	grupo das matrizes inversíveis de $M_n(R)$.
$\oplus$	=	soma direta.
$\otimes$	=	produto tensorial.
$A^{(n)}$	=	soma direta de n cópias de A.
$\dim_K M$	=	dimensão de M como espaço vetorial sobre K.
$[G:H]$	=	índice no grupo G do subgrupo H.
$J(M)$	=	radical de Jacobson de M.
$\ell(M)$	=	comprimento de M.
KG	=	álgebra de grupo de G com coeficientes em K.
$K[T]\alpha$	=	sub-espaço T-cíclico gerado por α.
1_A	=	identidade do anel $\mathrm{Hom}_R(A,A)$.

INTRODUÇÃO

Sejam Λ uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo K e M um K-módulo de dimensão finita n. Uma *representação de Λ de grau n sobre K, com espaço de representação M*, é um homomorfismo de álgebras $T:\Lambda \longrightarrow Hom_K(M,M)$.

Se $T:\Lambda \longrightarrow Hom\,(M,M)$ é uma representação de Λ de grau n sobre K, com espaço de representação M, fixando uma base B de M e compondo com o isomorfismo $f_B:Hom_K(M,M) \to M_n(K)$, que a cada função linear associa a sua matriz na base B, obtém-se um homomorfismo $\bar{T} = f_B \circ T:\Lambda \longrightarrow M_n(K)$. Um tal homomorfismo diz-se uma *representação matricial de Λ de grau n sobre K*.

Sempre que não houver perigo de confusão, omitiremos o grau e o espaço de representação e falaremos de uma representação de Λ sobre K.

Se $T:\Lambda \longrightarrow Hom_K(M,M)$ e $S:\Lambda \longrightarrow Hom_K(N,N)$ são representações de Λ de grau n sobre K, dizemos que T é *equivalente* a S quando existir um K-isomorfismo $\phi:M \to N$ tal que $\phi \circ T_a = S_a \circ \phi$, $\forall\, a \in \Lambda$. Analogamente se T e S são representações matriciais de Λ de grau n sobre K, T é *equivalente* a S quando existir $U \in GL(n,K)$ tal que $UT_a = S_aU$, $\forall\, a \in \Lambda$.

Se T é uma representação de Λ sobre K, com espaço de representação M, diz-se que um subespaço vetorial N de M é *estável sob* T quando $T_a(N) \subset N$, $\forall a \in \Lambda$.

Uma representação T de Λ sobre K, com espaço de representação M, diz-se *decomponível* se existirem N, P subespaços vetoriais de M, estáveis sob T, tal que $M = N \oplus P$. Analogamente, uma representação matricial T de grau n sobre K é *decomponível* se existe $U \in GL(n,K)$ tal que UT_aU^{-1} é da forma $\begin{pmatrix} B_a & 0 \\ 0 & C_a \end{pmatrix}$, $\forall a \in \Lambda$.

Sabemos que existe uma bijeção entre o conjunto das representações de Λ sobre K e o conjunto dos Λ-módulos, que são K-módulos de dimensão finita.

Ainda, se $T: \Lambda \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(M,M)$ e $S: \Lambda \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(N,N)$ são representações de Λ sobre K, temos as seguintes equivalências:

(a) T é equivalente com S se e só se $M \cong N$, como Λ-módulos.

(b) T é indecomponível se e só se M é um Λ-módulo indecomponível.

Seja agora M um Λ-módulo finitamente gerado. Então, M se decompõe numa soma direta finita de Λ-módulos indecomponíveis, de modo único, a menos da ordem dos fatores e de Λ-isomorfismos.

Portanto, a partir das definições e dos resultados vistos acima, surgem de imediato as seguintes questões, que são básicas na teoria de estrutura de álgebras:

(i) Determinar o número de classes de isomorfia dos Λ-módulos indecomponíveis.

(ii) Descrever as classes de isomorfia dos Λ-módulos indecomponíveis.

Nosso trabalho tratará da primeira questão. Estudaremos um teorema devido a A.V. Roiter [12], que se refere às álgebras de dimensão finita sobre um corpo K, que possuem um número finito de classes de isomorfia de Λ-módulos indecomponíveis.

Dedicamos o Capítulo 0 aos pré-requisitos necessários ao nosso trabalho. Para que o leitor faça uma apreciável economia de consultas, tornamos tal Capítulo o mais completo possível, no que se refere aos resultados que serão utilizados nos capítulos posteriores.

No Capítulo 1, damos um pequeno relato do desenvolvimento histórico do nosso problema, juntamente com alguns exemplos ilustrativos.

No Capítulo 2, apresentamos um resultado devido a D.G. Higman [5], que analisa o nosso problema no caso em que Λ é uma álgebra de grupo.

Finalmente, no Capítulo 3, após a introdução das ferramentas básicas para o seu desenvolvimento, apresentamos o principal resultado deste trabalho.

Além do material que foi utilizado no desenvolvimento do nosso trabalho, encontram-se nas referências bibliográficas vários artigos, ligados ao assunto, que pretendem ser uma parte complementar das referências estudadas. Esperamos que tais referências sejam de utilidade para o leitor interessado no assunto.

Agradecemos às várias pessoas que, de uma forma ou de outra, nos auxiliaram no decorrer do nosso curso.

Em particular,

ao professor Daciberg Lima Gonçalves e

aos colegas Luis Gonzaga, Panzarelli, Seiji e Luisinho pelo espontâneo e constante incentivo;

à Sra. Joana D'Arc Silva Dias, pelo atento trabalho datilográfico;

à equipe da Biblioteca que com gentil presteza nos auxiliou em nossas pesquisas;

aos professores Héctor A. Merklen e César Polcino Milies pela revisão crítica deste trabalho;

ao professor Alfredo Jones pela sugestão do assunto desta dissertação, bem como pela paciente, estimulante e bem humorada dedicação com que orientou este trabalho.

Francisco Egger Moellwald

CAPÍTULO 0

PRÉ-REQUISITOS

Neste Capítulo serão reunidos vários resultados sobre a teoria de anéis e módulos que utilizaremos posteriormente.

Exposições de tais resultados podem ser encontradas em Curtis-Reiner [2], Zariski-Samuel [16], Jacobson [7] e Rotman [13]. Citamos também Polcino Milies [10] onde se reúne uma grande parte desse material.

Neste Capítulo, R indicará um anel com unidade.

0.1. Condições de Finitude e Séries de Composição

DEFINIÇÃO 0.1.1. Um R-módulo M é dito *noetheriano* se M satisfaz a uma das seguintes condições equivalentes:

(i) Todo conjunto não vazio de submódulos de M possui pelo menos um elemento maximal;

(ii) Toda cadeia ascendente $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \ldots \subseteq M_i \subseteq \ldots$ de submódulos de M é estacionária, isto é, existe um índice m_0 tal que $M_i = M_{m_0}$, para $i \geq m_0$.

DEFINIÇÃO 0.1.2. Diz-se que um R-módulo M é *artiniano* se M satisfaz a uma das seguintes condições equivalentes:

(i) Todo conjunto não vazio de submódulos de M possui pelo menos um elemento minimal;

(ii) Toda cadeia descendente $M_1 \supseteq M_2 \supseteq \ldots \supseteq M_i \supseteq \ldots$ de submódulos de M é estacionária.

<u>LEMA 0.1.1.</u> Um R-módulo M é noetheriano se e somente se todo submódulo de M é finitamente gerado.

<u>LEMA 0.1.2.</u> Seja N um submódulo do R-módulo M. Então:

(i) M é noetheriano se e só se N e $\frac{M}{N}$ são noetherianos.

(ii) M é artiniano se e só se N e $\frac{M}{N}$ são artinianos.

<u>COROLÁRIO</u> - Seja $M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ um R-módulo. Então, M é noetheriano (artiniano) se e só se M_i é noetheriano (artiniano), $\forall\, i=1,\ldots, n$.

<u>DEFINIÇÃO 0.1.3.</u> Um R-módulo $M \neq (0)$ é dito *irredutível* se seus únicos submódulos são os triviais.

<u>DEFINIÇÃO 0.1.4.</u> Um R-módulo $M \neq (0)$ diz-se *indecomponível* quando não pode ser expresso como uma soma direta de dois submódulos não triviais.

<u>PROPOSIÇÃO 0.1.1.</u> Seja M um R-módulo noetheriano ou artiniano. Então, M se decompõe numa soma direta finita de R-módulos indecomponíveis.

TEOREMA 0.1.1. (Krull-Schmidt) Seja M um R-módulo noetheriano e artiniano. Sejam $\overset{k}{\underset{i=1}{\oplus}} M_i$ e $\overset{\ell}{\underset{j=1}{\oplus}} M'_j$ duas decomposições de M em soma direta de R-módulos indecomponíveis. Então, $k=\ell$ e existe $\sigma \in S_k$ tal que $M_i \cong M'_{\sigma(i)}$, $i=1,\ldots,k$.

DEFINIÇÃO 0.1.5. Dizemos que um anel R é *noetheriano (artiniano)* se o R-módulo ${}_R R$ é noetheriano (artiniano).

PROPOSIÇÃO 0.1.2. Seja R um anel noetheriano (artiniano). Se M é um R-módulo finitamente gerado, então M é noetheriano (artiniano).

Se R é uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo K, então R é noetheriana e artiniana. Em consequência, todo módulo finitamente gerado sobre R é noetheriano e artiniano.

LEMA 0.1.3. (Hopkins) Se R é um anel com unidade artiniano então R é noetheriano.

Se R é um anel artiniano, então o R-módulo ${}_R R$ verifica o teorema de Krull-Schmidt. Neste caso, podemos escrever ${}_R R = \overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} R_i$, onde R_i é indecomponível para $i=1,\ldots,n$ e a decomposição acima é única, a menos da ordem dos fatores e de R-isomorfismos.

DEFINIÇÃO 0.1.6. Os R-módulos R_i, $i=1,\ldots,n$, que aparecem na decomposição de ${}_R R$ acima são chamados os *módulos indecomponíveis principais de* R.

DEFINIÇÃO 0.1.7. Dois elementos idempotentes e e f do anel R são ditos *ortogonais* se $e \cdot f = f \cdot e = 0$.

DEFINIÇÃO 0.1.8. Um elemento idempotente e do anel R é dito *primitivo* quando não pode ser expresso como uma soma de dois elementos idempotentes ortogonais.

LEMA 0.1.4. Um ideal à esquerda L de R é um módulo indecomponível principal de R se e somente se $L = Re$, para algum idempotente primitivo e do anel R.

TEOREMA 0.1.2. Seja R um anel artiniano. Então:

(i) Se M é um R-módulo irredutível então $M \cong \frac{Re}{J(R)e}$, para algum módulo indecomponível principal Re, onde $J(R)$ é o radical de Jacobson do anel R.

(ii) Existe uma correspondência biunívoca entre as classes de isomorfia dos módulos indecomponíveis principais de R e as classes de isomorfia dos R-módulos irredutíveis, dada por $\{Re\} \leftrightarrow \{\frac{Re}{J(R)e}\}$.

Portanto, se R é um anel artiniano, o número de classes distintas de isomorfia de R-módulos irredutíveis é finito.

DEFINIÇÃO 0.1.9. Seja M um R-módulo. A cadeia descendente finita de submódulos de M, $M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq \dots \supseteq M_r = (0)$, é dita uma *série normal* de M e o inteiro r é dito o *comprimento da série normal* acima.

DEFINIÇÃO 0.1.10. Seja M um R-módulo. Se as inclusões na série normal $M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq \ldots \supseteq M_r = (0)$ forem próprias dizemos que tal série normal de M é *sem repetições*.

DEFINIÇÃO 0.1.11. Sejam M um R-módulo e $M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq \ldots \supseteq M_r = (0)$ uma série normal de M. Uma série normal de M, obtida por introdução de termos adicionais na série dada acima, é chamada um *refinamento* daquela. Em particular, se não há termos adicionais na série normal refinada, diremos que o refinamento é *impróprio*.

DEFINIÇÃO 0.1.12. Seja M um R-módulo. Seja $M = M_0 \supset M_1 \supset \ldots \supset M_r = (0)$ uma série normal de M sem repretições. Se qualquer refinamento dessa série é impróprio dizemos que tal série é uma *série de composição* de M.

PROPOSIÇÃO 0.1.3. Sejam M um R-módulo e $M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq \ldots \supseteq M_r = (0)$ uma série normal de M. Então tal série é uma série de composição de M se e somente se os fatores $\dfrac{M_{i-1}}{M_i}$ são irredutíveis, $i = 1, \ldots, r$.

PROPOSIÇÃO 0.1.4. Se um R-módulo M possui uma série de composição de comprimento r, então qualquer série de composição de M tem comprimento r, e qualquer série normal de M, sem repetições, pode ser refinada a uma série de composição de M.

Se M é um R-módulo que possui uma série de composição de comprimento r, segue da proposição anterior que r é o comprimento comum às séries de composição de M.

<u>DEFINIÇÃO 0.1.13.</u> O comprimento r acima é denominado *comprimento do módulo* M e escrevemos $r = \ell(M)$.

<u>TEOREMA 0.1.3.</u> Seja M um R-módulo. São equivalentes:

(i) M possui uma série de composição;

(ii) M é noetheriano e artiniano.

<u>PROPOSIÇÃO 0.1.5.</u> Sejam M um R-módulo que possui uma série de composição e N um submódulo de M. Então,

$$\ell(M) = \ell(N) + \ell\left(\frac{M}{N}\right).$$

0.2. <u>Anéis Semisimples</u>

<u>DEFINIÇÃO 0.2.1.</u> Um R-módulo M diz-se *semisimples* se e somente se M é soma direta de uma família de R-módulos irredutíveis.

<u>PROPOSIÇÃO 0.2.1.</u> Seja M um R-módulo. São equivalentes:

(i) M é semisimples;

(ii) Todo submódulo de M é um somando direto de M;

(iii) Se $f: M \to N$ é um epimorfismo de R-módulos então N é isomorfo a um somando direto de M.

<u>DEFINIÇÃO 0.2.2.</u> R é um anel *semisimples artiniano* se e somente se R é uma soma direta finita de ideais à esquerda minimais.

<u>PROPOSIÇÃO 0.2.2.</u> Seja R um anel. São equivalentes:

(i) R é semisimples artiniano;

(ii) Todo R-módulo é semisimples.

PROPOSIÇÃO 0.2.3. Seja R um anel semisimples artiniano. Então, todo ideal de R é um somando direto de R.

LEMA 0.2.1. Sejam R um anel semisimples artiniano, L um ideal à esquerda minimal de R e M um R-módulo irredutível. Então, $LM = M$ ou $LM = (0)$ e $LM = M \Longleftrightarrow L \cong M$.

COROLÁRIO - Sejam R um anel semisimples artiniano e M um R-módulo irredutível. Então, $M \cong L$, onde L é um ideal à esquerda minimal de R.

PROPOSIÇÃO 0.2.4. Seja $R = \bigoplus_{i=1}^{n} L_i$ a decomposição do anel semisimples artiniano R como soma direta de ideais à esquerda minimais. Seja M um R-módulo indecomponível. Então, existe $i = 1,\ldots,n$, tal que $M \cong L_i$.

0.3. Álgebras de grupos

Sejam K um corpo e G um grupo finito. Notaremos por KG o conjunto das funções definidas em G a valores em K. Se $\alpha \in KG$ é uma tal função, vamos representá-la pela soma formal $\sum_{g \in G} \alpha_g g$, onde $\alpha_g = \alpha(g) \in K$.

Definamos as seguintes operações sobre as somas formais acima:

(a) $\sum_{g\in G} \alpha_g g + \sum_{g\in G} \beta_g g = \sum_{g\in G} (\alpha_g + \beta_g) g$, $\alpha_g, \beta_g \in K$;

(b) $\lambda \sum_{g\in G} \alpha_g g = \sum_{g\in G} (\lambda\alpha_g) g$, $\lambda, \alpha_g \in K$;

(c) $\sum_{g\in G} \alpha_g g \cdot \sum_{h\in G} \beta_h h = \sum_{g,h\in G} (\alpha_g \cdot \beta_h)(gh)$, onde $\alpha_g \cdot \beta_h$ indica o produto de α_g e β_h em K, e gh o produto de g e h em G.

Com as operações sobre os elementos de KG definidas em (a) e (b), KG torna-se um espaço vetorial sobre K. Mais precisamente, KG é o espaço vetorial sobre K com base G.

Com as três operações definidas acima, KG torna-se uma álgebra, onde o produto de elementos de KG, definido em (c), chama-se o produto de convolução das funções α e β.

<u>DEFINIÇÃO 0.3.1.</u> Seja K um corpo e seja G um grupo finito. A álgebra KG construída acima diz-se a *álgebra de grupo de* G *sobre* K.

<u>PROPOSIÇÃO 0.3.1.</u> (Maschke) Sejam K um corpo e G um grupo finito. Então, KG é semisimples artiniano se e somente se car $K \nmid |G|$.

0.4. <u>Radical de Jacobson</u>

<u>DEFINIÇÃO 0.4.1.</u> Seja M um R-módulo. O submódulo interseção de todos os submódulos maximais de M é chamado o *radical de Jacobson do módulo* M, cuja notação é J(M).

DEFINIÇÃO 0.4.2. Seja R um anel. O radical de Jacobson do R-módulo $_RR$ é chamado o *radical de Jacobson do anel* R.

PROPOSIÇÃO 0.4.1. $J(R) = \{x \in R \mid 1 - ax$ é inversível, $\forall a \in R\}$.

DEFINIÇÃO 0.4.3. Um ideal I do anel R diz-se um *ideal nilpotente* de R se existe um inteiro k tal que $I^k = (0)$.

DEFINIÇÃO 0.4.4. Um elemento $r \in R$ diz-se *nilpotente* se existe um inteiro k tal que $r^k = 0$.

DEFINIÇÃO 0.4.5. Um ideal I de R, onde todo elemento é nilpotente, é chamado um *nilideal* de R.

PROPOSIÇÃO 0.4.2. Seja R um anel artiniano. Então, $J(R)$ é nilpotente.

PROPOSIÇÃO 0.4.3. Se R é um anel artiniano e $J(R) = (0)$ então R é um anel semisimples.

PROPOSIÇÃO 0.4.4. Seja I um ideal do anel R. Então, $J(\frac{R}{I}) = (0)$ se e somente se $J(R) \subseteq I$. Em particular, $J(\frac{R}{J(R)}) = (0)$.

LEMA 0.4.1. (Nakayama) Sejam M um R-módulo finitamente gerado e N um submódulo de M tal que $N + J(R)\cdot M = M$. Então, $N = M$.

PROPOSIÇÃO 0.4.5. Seja K um corpo de característica p, $p>0$ e seja G um grupo de ordem p^m. Então, uma base de $J(KG)$ sobre K é dada pelo conjunto $\{g - 1 \mid g \in G,\ g \neq 1\}$ e, portanto, $\dim_K J(KG) = p^m - 1 = \dim_K KG - 1$.

0.5. Anéis semiprimários e anéis S.B.I.

DEFINIÇÃO 0.5.1. Um anel R é dito *semiprimário* quando $\frac{R}{J(R)}$ é artiniano.

Da definição anterior segue que um anel artiniano é um anel semiprimário. Um exemplo de anel semiprimário não artiniano é dado pelo anel R das matrizes 2×2 da forma $\begin{pmatrix} p & r \\ 0 & q \end{pmatrix}$, onde $p,q \in \mathbb{Q}$ e $r \in \mathbb{R}$. De fato, R é uma álgebra sobre $\mathbb{Q}$ e portanto seus ideais são $\mathbb{Q}$-módulos. Ainda, $\begin{pmatrix} p & r \\ 0 & q \end{pmatrix} \in J(R)$ se e somente se $p=q=0$, donde $J(R) = \{\begin{pmatrix} 0 & r \\ 0 & 0 \end{pmatrix} | r \in \mathbb{R}\}$. Assim, $J(R) \cong \mathbb{R}$ é um espaço vetorial de dimensão infinita sobre $\mathbb{Q}$ e portanto o anel R não é artiniano. Além disso, como $\frac{R}{J(R)} \cong \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}$ segue que R é semiprimário.

Dado um elemento $r \in R$ indicamos por $Z_R(r)$ o conjunto $Z_R(r) = \{x \in R | xr = rx\}$.

DEFINIÇÃO 0.5.2. Um anel R é dito um *anel S.B.I.* (suitable for building idempotent elements) quando a equação $x^2 - x = z$, com $z \in J(R)$ tem uma solução $z_1 \in J(R)$ tal que $Z_R(z) = Z_R(z_1)$.

A terminologia "suitable for building idempotent elements" (adequado para a construção de elementos idempotentes) é devida a I. Kaplansky, e as proposições seguintes, devidas em essência a J.H.M.Wedderburn, dão uma justificativa para a definição de anéis S.B.I. .

PROPOSIÇÃO 0.5.1. Se $J(R)$ é um nilideal então R é um anel S.B.I. .

Demonstração - Resolvendo $x^2 - x - z = 0$ pela forma quadrática obtemos $z_1 = \frac{[1 - (1+4z)^{1/2}]}{2}$, que expandida em série nos dá $z_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \binom{2n-1}{n} (-z)^n$. Escrevendo $y = \frac{1}{2n-1} \binom{2n-1}{n}$ temos que $(2n-1)\cdot y \in \mathbb{Z}$, e, desenvolvendo $\binom{2n-1}{n}$, obtemos $y = \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1}$ ou seja $ny \in \mathbb{Z}$. Logo, $y \in \mathbb{Z}$ e mostramos assim que os coeficientes da última expressão de z_1 são inteiros. Sendo z nilpotente, por hipótese, a soma acima é finita, i.e, z_1 é um polinômio em z e portanto $z_1 \in J(R)$.

Se $r \in Z_R(z)$, como z_1 é um polinômio em z, então $r \in Z_R(z_1)$. Como $z = z_1^2 - z_1$ vale a recíproca, e portanto, R é um anel S.B.I. . □

<u>COROLÁRIO</u> - Seja R um anel artiniano. Então R é um anel S.B.I. .

<u>PROPOSIÇÃO 0.5.2.</u> Seja R um anel S.B.I. com radical $J(R)=J$ e seja $\bar{R} = \frac{R}{J}$. Se $\bar{r} = r + J$ é um elemento idempotente em $\bar{R}$ então existe um elemento idempotente $e \in R$ tal que $\bar{e} = \bar{r}$.

Demonstração - Como $\bar{r}^2 = \bar{r}$ existe $z \in J$ tal que $r^2 = r + z$. Por hipótese podemos resolver $x^2 - x = -z(1+4z)^{-1}$ com $x \in J$. Como r comuta com z, r comuta com $-z(1+4z)^{-1}$ e, portanto, r comuta com a solução z_1 da equação acima. Escrevendo $e = rf + g$, onde $r,f,g \in R$ comutam entre si, vemos que $e^2 = e$, desde que $f^2 + 2fg = f$ e $g^2 + f^2 z = g$. Alguns cálculos nos mostram que as equações acima são satisfeitas por $f = 1-2z_1$

e $g = z_1$, e, portanto, $e = r(1-2z_1)+z_1$ é um elemento idempotente de R tal que $e - r \in J$. □

A proposição 0.5.1. mostra que os anéis artinianos são anéis S.B.I. No exemplo que antecede a definição de anel S.B.I. vimos que o anel $R = \{\begin{pmatrix} p & r \\ 0 & q \end{pmatrix} \mid p,q \in \mathbb{Q}$ e $r \in \mathbb{R}\}$ é um anel não artiniano tal que $J(R)^2 = (0)$. Eis portanto um exemplo de anel S.B.I., não artiniano.

0.6. Extensões de Módulos

PROPOSIÇÃO 0.6.1. Seja R um anel e seja $\zeta: 0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$ uma sequência exata de R-módulos. Então, são equivalentes:

(i) A sequência ζ cinde;

(ii) Existe um R-homomorfismo $\alpha: X \longrightarrow N$ tal que $\alpha \circ f = 1_N$;

(iii) Existe um R-homomorfismo $\beta: M \longrightarrow X$ tal que $g \circ \beta = 1_M$:

Nestas condições $X \cong N \oplus M$.

Seja R um anel e sejam M e N R-módulos. Para uma definição do grupo abeliano $\mathrm{Ext}_R^1(M,N)$ através de resoluções projetivas de M indicamos a referência [13]. Descreveremos a seguir uma outra caracterização de $\mathrm{Ext}_R^1(M,N)$ que nos será mais conveniente no que segue.

DEFINIÇÃO 0.6.1. Seja R um anel e sejam M e N R-módulos. Uma *extensão de* N *por* M é uma sequência exata de R-módulos do tipo: $\zeta\colon\ 0 \longrightarrow N \longrightarrow X \longrightarrow M \longrightarrow 0.$

<u>DEFINIÇÃO 0.6.2.</u> Duas extensões ζ_1 e ζ_2 de N por M são ditas *equivalentes* se existe um R-homomorfismo $\phi\colon X_1 \longrightarrow X_2$ que torna comutativo o diagrama seguinte:

$$\begin{array}{cccccccccc}
\zeta_1\colon & 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & X_1 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\
 & & & \Big\downarrow{\scriptstyle 1_N} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \phi} & & \Big\downarrow{\scriptstyle 1_M} & & \\
\zeta_2\colon & 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & X_2 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

A definição 0.6.2 produz uma relação de equivalência no conjunto das extensões de N por M. Indicaremos a classe de equivalência da extensão ζ por $[\zeta]$. Podemos definir $\operatorname{Ext}^1_R(M,N)$ como o conjunto das classes de equivalência das extensões de N por M, e ainda definir uma soma de classes de equivalência de modo a tornar $\operatorname{Ext}^1_R(M,N)$ um grupo abeliano, no qual o elemento neutro é a classe de equivalência da extensão

$$\zeta\colon\ 0 \longrightarrow N \longrightarrow N\oplus M \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

Indicaremos a seguir como se somam os elementos de $\operatorname{Ext}^1_R(M,N)$. Sejam

$$\zeta_1\colon\ 0 \longrightarrow N \xrightarrow{\lambda_1} X_1 \xrightarrow{\mu_1} M \longrightarrow 0 \quad \text{e}$$

$$\zeta_2\colon\ 0 \longrightarrow N \xrightarrow{\lambda_2} X_2 \xrightarrow{\mu_2} M \longrightarrow 0$$

representantes, respectivamente, das classes $[\zeta_1]$ e $[\zeta_2]$. Consideremos o submódulo

$$D = \{(x_1,x_2) \in X_1\oplus X_2 \mid \mu_1(x_1) = \mu_2(x_2)\} \quad \text{de} \quad X_1\oplus X_2$$

e o submódulo $D_0 = \{(\lambda_1(n), -\lambda_2(n)) \mid n \in N\}$ de D. Definamos

$$X = \frac{D}{D_0}, \quad \begin{array}{rcl}\lambda\colon N & \longrightarrow & X \\ n & \longmapsto & (\lambda_1(n),0)+D_0\end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rcl}\mu\colon X & \longrightarrow & M \\ (x_1,x_2) & \longmapsto & \mu_1(x_1).\end{array}$$

O leitor poderá mostrar que λ e μ estão bem definidas e que ζ: $0 \longrightarrow N \longrightarrow X \longrightarrow M \longrightarrow 0$ é uma sequência exata. Além disso, $[\zeta]$ depende apenas das classes $[\zeta_1]$ e $[\zeta_2]$. Portanto, se $[\zeta_1]$ e $[\zeta_2]$ pertencem a $\mathrm{Ext}_R^1(M,N)$, uma soma que dá a $\mathrm{Ext}_R^1(M,N)$ uma estrutura de grupo abeliano é definida por $[\zeta_1] + [\zeta_2] = [\zeta]$, a classe $[\zeta]$ obtida na nossa indicação anterior.

Se R é um anel comutativo podemos definir o produto de um elemento de R por uma classe de equivalência de $\mathrm{Ext}_R^1(M,N)$ de modo a tornar $\mathrm{Ext}_R^1(M,N)$ um R-módulo. Para tanto consideremos o seguinte lema:

<u>LEMA 0.6.1.</u> Seja R um anel e seja $r \in R$. Seja ainda ζ: $0 \longrightarrow N \xrightarrow{\lambda} X \xrightarrow{\mu} M \longrightarrow 0$ um representante da classe $[\zeta]$ e consideremos o diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "r_N"'] & X \arrow[r, "\mu"] & M \arrow[r] \arrow[d, "1_M"'] & 0 \\
 & N & & M &
\end{tikzcd},$$

onde r_N indica a multiplicação por r no R-módulo N. Então,

(i) existe uma extensão $\bar{\zeta}$ de N por M que torna o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
\zeta: & 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "r_N"'] & X \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\phi"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "1_M"'] & 0 \\
\bar{\zeta}: & 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\bar{\lambda}"] & Y \arrow[r, "\bar{\mu}"] & M \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

(ii) Em qualquer diagrama completado do diagrama inicial o primeiro quadrado é um pushout.

(iii) Quaisquer duas extensões que completam o diagrama inicial são equivalentes.

A extensão $\bar{\zeta}$ construída a partir de ζ é definida como sendo o produto do elemento $r \in R$ pela extensão ζ. Assim, se $[\zeta] \in \mathrm{Ext}_R^1(M,N)$ e $r \in R$ definimos $r[\zeta]$ por $[r\zeta]$. Observamos que o dual do lema 0.6.1. também é verdadeiro e a partir desse dual definimos $[\zeta]r$ por $[\zeta r]$, onde $[\zeta] \in \mathrm{Ext}_R^1(M,N)$ e $r \in R$.

Portanto, se R é um anel comutativo, então, de acordo com as operações definidas acima, $\mathrm{Ext}_R^1(M,N)$ é um R-módulo.

PROPOSIÇÃO 0.6.2. Seja R uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo K. Sejam M e N R-módulos finitamente gerados. Então, $\mathrm{Ext}_R^1(M,N)$ é um espaço vetorial de dimensão finita sobre K.

PROPOSIÇÃO 0.6.3. Seja R uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo K. Sejam $M_1, M_2, \ldots, M_\ell$ e B R-módulos finitamente gerados. Então, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para qualquer sequência exata da forma

$$\zeta:\quad 0 \longrightarrow B \longrightarrow X \longrightarrow M_1^{(n_1)} \oplus M_2^{(n_2)} \oplus \ldots \oplus M_\ell^{(n_\ell)} \qquad (n_i \geq 0),$$

onde X é um R-módulo finitamente gerado, se $\ell(X) > N$ então $X = Y \oplus M_i$, para algum $i = 1, \ldots, \ell$.

CAPÍTULO 1

CONJECTURAS DE BRAUER E THRALL

Seja Λ uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo K. A proposição 0.2.4 nos mostra que se Λ é semisimples então Λ possui um número finito de módulos indecomponíveis não isomorfos. No entanto, no caso mais geral em que Λ é não semisimples, o mesmo pode não ocorrer. Como veremos, uma álgebra não semisimples pode possuir um número infinito de módulos indecomponíveis não isomorfos.

Conforme a terminologia de [8], dizemos que Λ é uma *álgebra de tipo de representação finito* se Λ possui apenas um número finito de módulos indecomponíveis não isomorfos. Λ diz-se uma *álgebra de tipo de representação limitado* se existe um inteiro m tal que para qualquer Λ-módulo indecomponível M tem-se que $\dim_K M \leq m$. Isto equivale a dizer que o conjunto dos graus das representações indecomponíveis de Λ sobre K é limitado.

Se Λ não é uma álgebra de tipo de representação finito, dizemos que Λ é de *tipo de representação infinito*. Diz-se que Λ é uma álgebra de *tipo de representação não limitado* caso não seja de tipo de representação limitado.

Finalmente, uma álgebra Λ é de *tipo de representa-*

ção fortemente não limitado se existe um número infinito de dimensões de Λ-módulos indecomponíveis sobre K, cada uma das quais admitindo um número infinito de Λ-módulos indecomponíveis não isomorfos. Em termos de representações, isto significa que existe um número infinito de graus de representações indecomponíveis de Λ sobre K, cada um dos quais admitindo um número infinito de representações indecomponíveis não equivalentes.

EXEMPLO 1 - Conforme vimos no inicio deste capítulo, uma álgebra semisimples é de tipo de representação finito.

EXEMPLO 2 - Seja K um corpo finito de característica $p>0$ e seja $G = \langle a\rangle \times \langle b\rangle$ um grupo, onde a e b têm ordem p. Veremos no lema 2.4 que, para cada $n \in \mathbb{N}$, a álgebra KG possui um módulo indecomponível de dimensão $2n+1$.

EXEMPLO 3 - Consideremos a álgebra Λ de dimensão 2 sobre K, gerada pelos elementos 1 e a, onde $a^2 = 0$. O ideal Ka é nilpotente, donde $Ka \subseteq J(\Lambda)$. Além disso, Ka é maximal pois $\dim_K\left(\frac{\Lambda}{Ka}\right) = 1$. Portanto, $Ka = J(\Lambda)$ e Λ é uma álgebra não semisimples.

Mostremos que Λ é uma álgebra de tipo de representação finito.

Seja $T:\Lambda \longrightarrow M_n(K)$ uma representação matricial de Λ de grau n sobre K. Para conhecermos T basta conhecer o seu valor em a. Como $T_a^2 = 0$, o polinômio característico de T_a é X^n, e seu polinômio minimal é X^2. Portanto, a forma canônica de T_a é escrita como uma soma direta de matrizes das formas $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e (0). Vemos assim, que Λ possui, a menos de equivalências, apenas duas representações indecomponíveis, T e S, definidas em a, respectivamente, por $T_a = 0$ e $S_a = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Logo, Λ é uma álgebra não semisimples de tipo de representação finito. □

EXEMPLO 4 - Sejam K um corpo infinito de característica $p>0$ e G um grupo finito tal que seus p-subgrupos de Sylow não são cíclicos. Então, o teorema 2.5 mostrará que a álgebra KG é uma álgebra de tipo de representação fortemente não limitado.

EXEMPLO 5 - Seja K um corpo infinito e seja Λ a álgebra de dimensão 3 sobre K, gerada por elementos 1, a e b tais que $a^2 = b^2 = ab = ba = 0$. Queremos mostrar que Λ é uma álgebra de tipo de representação fortemente não limitado. Consideraremos representações T de Λ sobre K determinadas pelo par de matrizes T_a e T_b da forma

$$T_a = \begin{pmatrix} 0 & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad T_b = \begin{pmatrix} 0 & Y \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

onde X e Y são matrizes quadradas e X é inversível. O leitor comprovará sem dificuldades que as matrizes T_a e T_b verificam $T_a^2 = T_b^2 = T_aT_b = T_bT_a = 0$. Assim, as representações T em questão estão de fato bem definidas sobre Λ.

Sejam T e S duas representações de Λ sobre K do tipo acima descrito. Então, as representações T e S estão determinadas, respectivamente, pelos pares de matrizes das formas:

$$T_a = \begin{pmatrix} 0 & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad T_b = \begin{pmatrix} 0 & Y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_a = \begin{pmatrix} 0 & X' \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad S_b = \begin{pmatrix} 0 & Y' \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

onde X, X', Y e Y' são matrizes quadradas e X e X' são inversíveis.

Suponhamos que S e T são representações equivalentes. Então, existe uma matriz inversível U tal que $T_aU = US_a$ e $T_bU = US_b$. Escrevendo $U = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ e fazendo os cálculos indicados obtemos: $XC = CX' = YC = CY' = 0$, $XD = AX'$ e $YD = AY'$. Como X é uma matriz inversível segue que $C = 0$. Assim, a matriz inversível U é triangular e portanto $\det A \cdot \det D = \det U \neq 0$. Tal resultado nos mostra que A e D são matrizes inversíveis. Vimos assim que se T e S são representações equivalentes então existem matrizes inversíveis V e W tais que $X = VX'W$ e $Y = VY'W$.

Reciprocamente, se vale a última condição acima então a matriz $U = \begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & W^{-1} \end{pmatrix}$ é inversível e as igualdades $T_aU = US_a$ e $T_bU = US_b$ se verificam.

Em vista da situação analisada acima vamos introduzir agora um conceito, que teve origem num problema clássico de álgebra linear.

Conforme J. Dieudonné [3], dados dois pares de matrizes (G,H) e (G',H'), $m \times n$, com elementos em um corpo K, o *problema de equivalência de pares de matrizes* consiste em determinar condições necessárias e suficientes para que existam matrizes inversíveis P e Q, de ordens $m \times m$ e $n \times n$, respectivamente, tais que $G' = PGQ$ e $H' = PHQ$. Em tal caso, o par (G',H') é dito *equivalente* com o par (G,H).

Observando o conceito acima e o resultado que lhe precede, o nosso problema sobre representações torna-se agora um problema de equivalência de pares de matrizes.

K. Weierstrass, em 1868, resolveu tal problema para o caso particular em que a matriz G é inversível. Com o apoio do trabalho de Weierstrass, foi possível a L. Kronecker resolver o problema de equivalência de pares de matrizes, considerando matrizes com elementos no corpo dos números complexos. Em 1927, L. E. Dickson, utilizando os métodos de Kronecker, estendeu aquele resultado para matrizes com elementos num corpo qualquer. Damos a seguir o resultado central do trabalho de Dieudonné.

<u>TEOREMA</u> - Sejam K um corpo e E e F espaços vetoriais de dimensões n e m sobre K, respectivamente. Sejam f e g aplicações lineares definidas em E a valores em F. Então, existem uma base B de E e outra B' de F tal que as matrizes de f e g em relação a essas bases têm, respectivamente, as formas

$$G_0 = \begin{pmatrix} P_1 & & & & 0 \\ & P_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & P_\rho & \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad H_0 = \begin{pmatrix} Q_1 & & & & 0 \\ & Q_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & Q_\rho & \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix},$$

onde cada par (P_μ, Q_μ) é de um dos seguintes tipos:

$$[I] \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$[II] \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$[III] \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$[IV] \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[V] \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad \begin{pmatrix} R & S & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & R & S & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & R & S \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & R \end{pmatrix},$$

onde

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{\ell-1} \end{pmatrix}$$

é a matriz companheira de um polinômio irredutível arbitrário $p(X) = X^{\ell} - a_{\ell-1}X^{\ell-1} - \dots - a_0$ em $K[X]$, e

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

O par de matrizes (G_0, H_0) fica completamente determinado pelas aplicações lineares f e g; para todo par de matrizes (G,H), $m \times n$, existe um único par (G_0, H_0), $m \times n$, que lhe é equivalente, e se diz que (G_0, H_0) foi obtido pela redução de (G,H) à forma canônica; dois pares de matrizes são equivalentes se e somente se suas formas canônicas coincidem.

Observando esse teorema, vemos que os pares de matrizes indecomponíveis se reduzem aos pares (P_μ, Q_μ) dos tipos

[I] - [V]. Como estamos trabalhando em um corpo infinito, temos infinitos polinômios irredutíveis de grau 1 em $K[X]$ e, portanto, para cada n, existem infinitos pares de matrizes do tipo [V] não equivalentes.

Voltando ao nosso problema sobre representações, concluimos que para cada grau existe um número infinito de representações indecomponíveis não equivalentes de Λ sobre K, i.e, Λ é uma álgebra de tipo de representação fortemente não limitado. □

Se K é um corpo infinito podemos supor "a priori" que existam K-álgebras dos seguintes tipos de representação:

(1) finito.

(2) infinito e limitado.

(3) infinito, possuindo para cada dimensão fixa apenas um número finito de módulos indecomponíveis.

(4) infinito, admitindo um número infinito de módulos indecomponíveis para apenas um número finito de dimensões.

(5) fortemente não limitado.

Observamos que se o corpo K é finito, apenas os casos (1) e (3) são possíveis, já que para cada inteiro m existe apenas um número finito de matrizes $m \times m$ com coeficientes em K.

Considerando os tipos de álgebras (1) - (5), R. Brauer e R. M. Thrall [8] formularam as seguintes conjecturas:

(I) Toda álgebra de tipo de representação limitado é de tipo de representação finito.

(II) Se K é um corpo infinito e se Λ é uma álgebra de tipo de representação não limitado, então Λ é uma álgebra de tipo de representação fortemente não limitado.

As conjecturas acima afirmam que, se K é um corpo infinito, então não existem álgebras dos tipos (2), (3) e (4).

É claro que uma álgebra de tipo de representação finito é de tipo de representação limitado. O nosso trabalho tem por objetivo estudar a primeira conjectura acima, que é o recíproco desse resultado.

Em 1954, D.G.Higman [5] demonstrou o seguinte resultado, ao qual dedicaremos o capítulo 2:

"Seja K um corpo de característica $p > 0$ e seja G um grupo finito. A álgebra de grupo KG é de tipo de representação finito se e somente se os p-subgrupos de Sylow de G são cíclicos."

Diz-se que um anel R com elemento unidade é um *anel unisserial generalizado* quando para todo elemento idempotente primitivo e, o ideal à esquerda Re e o ideal à direita eR possuem somente uma série de composição.

A álgebra Λ do EXEMPLO 3 é um exemplo de um anel unisserial generalizado. Seu único elemento idempotente é 1 e sua única série de composição é $\Lambda \supset Ka \supset (0)$.

A classe das álgebras unisseriais generalizadas foi introduzida por T.Nakayama [9], que mostrou que tais álgebras são de tipo de representação finito [22].

Em 1956, T.Yoshii [14] provou a conjectura (I) no caso em que o corpo K é algebricamente fechado e $J(\Lambda)^2 = (0)$.

Seja M um Λ-módulo à esquerda. Define-se o *"socle"* S(M) de M como a soma dos submódulos simples de M. Este é o submódulo semisimples maximal de M e é, consequentemente, uma soma direta de módulos simples. Um módulo semisimples M é dito *livre de quadrados* quando é uma soma direta de módulos simples, não isomorfos dois a dois.

Em 1963, C.W.Curtis e J.P.Jans [1] demonstraram o resultado que segue:

"Seja Λ uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo K tal que o "socle" de qualquer Λ-módulo indecomponível é livre de quadrados. Então, Λ é uma álgebra de tipo de representação limitado. Se ainda, K é algebricamente fechado, então Λ é uma álgebra de tipo de representação finito."

Finalmente, em 1968, A.V.Roiter [12] provou em sua generalidade a conjectura (I), demonstrando o seguinte resultado, ao qual será dedicado o capítulo 3:

"Se uma álgebra Λ de dimensão finita sobre um corpo K possui um número infinito de módulos indecomponíveis, então Λ possui módulos indecomponíveis de dimensão arbitrariamente grande sobre K."

Observamos ainda que em 1972 S.A.Krugljak [21] deu uma nova demonstração do resultado obtido por Yoshii [14], observando que havia uma falha no trabalho original.

Relacionamos a seguir um resultado de 1974, devido a M. Auslander [18], que generaliza o resultado de Roiter para um certo tipo de categoria abeliana, que definiremos agora. As seguintes definições, bem como um desenvolvimento do material que trata desse assunto são encontrados em [17].

No que segue, $\mathcal{C}$ representa uma categoria abeliana e $\mathcal{C}(A,B)$ o conjunto dos morfismos entre os objetos A e B da categoria $\mathcal{C}$.

Uma subcategoria $\mathcal{D}$ da categoria $\mathcal{C}$ é dita *densa* em $\mathcal{C}$ se, dado um objeto C de $\mathcal{C}$, existe um objeto D de $\mathcal{D}$ tal que os objetos C e D são isomorfos em $\mathcal{C}$. Se os objetos de uma categoria $\mathcal{C}$ formam um conjunto, tal categoria é dita *pequena*. Finalmente, uma categoria $\mathcal{C}$ é dita *S.S.* (skeletally small) se $\mathcal{C}$ possui uma subcategoria pequena $\mathcal{D}$ que é densa em $\mathcal{C}$.

<u>TEOREMA</u> - Seja $\mathcal{C}$ uma categoria abeliana S.S. com apenas um número finito de objetos simples não isomorfos, e tal que cada objeto em $\mathcal{C}$ tenha comprimento finito. Então, $\mathcal{C}$ tem um número finito de objetos indecomponíveis se e somente se as seguintes condições são satisfeitas por $\mathcal{C}$:

(i) Se $A_0 \subseteq A_1 \subseteq \ldots \subseteq A_j \subseteq \ldots$ é uma cadeia ascendente de objetos indecomponíveis de $\mathcal{C}$, então existe um inteiro n tal que $A_j = A_n$, para todo $j \geq n$.

(ii) Se $\ldots \to A_{j+1} \xrightarrow{f_{j+1}} A_j \to \ldots \xrightarrow{f_3} A_2 \xrightarrow{f_2} A_1 \xrightarrow{f_1} A_0$ é uma cadeia de epimorfismos, onde os A_j são objetos indecomponíveis de $\mathcal{C}$, então existe um inteiro m tal que f_j é um isomorfismo para todo $j \geq m$.

Consideremos agora a categoria $\mathcal{M}$ dos Λ-módulos finitamente gerados, onde Λ é uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo K. Roiter mostrou que $\mathcal{M}$ tem um número finito de classes de isomorfia de objetos indecomponíveis se o conjunto dos comprimentos dos objetos indecomponíveis de $\mathcal{M}$ é limitado.

Sabemos que $\mathcal{M}$ é uma categoria abeliana S.S. . Além disso, como Λ é um anel artiniano, o número de classes de isomorfia de objetos simples de $\mathcal{M}$ é finito. Sabemos também, que cada objeto de $\mathcal{M}$ tem comprimento finito. Vejamos então que as hipóteses do teorema de Roiter implicam (i) e (ii) do teorema de Auslander.

(i) vale pelo fato de que qualquer objeto de $\mathcal{M}$ é noetheriano.

Em (ii) temos, para cada inteiro j, que

$$\ell(A_{j+1}) \geq \ell(A_j), \quad \text{já que} \quad \frac{A_{j+1}}{\operatorname{Ker} f_{j+1}} \cong A_j .$$

Como o conjunto de tais comprimentos é limitado, por hipótese, segue que existe um inteiro m tal que $\operatorname{Ker} f_j = (0)$ para todo $j \geq m$.

Vimos assim que o teorema de Auslander generaliza de fato o teorema de Roiter.

Quanto à conjectura (II), embora bastante pesquisada atualmente, a par de alguns resultados parciais, não temos ain da notícias de que tenha sido completamente verificada. Lembramos que em tal conjectura os corpos considerados são infinitos. Seguem abaixo algumas referências sobre o desenvolvimento das pesquisas em relação a essa conjectura.

J.P.Jans [8] generalizou um resultado de Thrall, que surgiu de uma condição dada por T.Nakayama [14] para que uma álgebra Λ seja de tipo de representação fortemente não limitado. Tal generalização diz que se uma álgebra Λ possui um número infinito de ideais, então tal álgebra é de tipo de representação fortemente não limitado. No mesmo artigo, Jans mostrou que se Λ é uma álgebra comutativa com um número finito de ideais, então Λ é soma direta (como anéis) de álgebras de polinômios e é de tipo de representação finito. Assim, no caso comutativo, uma condição necessária e suficiente para que Λ seja de tipo de representação fortemente não limitado é que Λ possua um número infinito de ideais.

Ainda em [8], usando teoria de grafos e generalizando condições dadas por Brauer [19] e Thrall [28], Jans obteve uma condição suficiente para que Λ seja do tipo de representação fortemente não limitado.

Em 1956, Yoshii [15] também obteve alguns resultados nesse sentido, trabalhando com grafos.

Em 1970, Roiter e Nazarova [25], provaram a conjectura (II) no caso em que K é algebricamente fechado.

Ainda, através dos métodos usuais de extensões do corpo de base, os mesmos autores anunciaram, em 1974, não ser difícil a demonstração da conjectura (II), substituindo a hipóte se feita anteriormente sobre K pela hipótese mais fraca de ser $\frac{\Lambda}{J(\Lambda)}$ separável. Assim, em particular, tal conjectura vale para álgebras sobre um corpo perfeito e, portanto, sobre um corpo de característica zero.

Finalmente, gostaríamos de mencionar a coleção de artigos, ligada ao assunto, citada na referência [21]. Tal coleção está para ser revisada e traduzida do original russo sob o título "Investigations on the theory of representations".

CAPÍTULO 2

ÁLGEBRAS DE GRUPOS

Apresentaremos aqui um resultado devido a Higman [5] que resolve a conjectura (I) no caso em que Λ é uma álgebra de grupo não semisimples. Como sempre, trabalharemos aqui com Λ-módulos finitamente gerados.

Recordamos inicialmente alguns fatos simples de álgebra linear. Uma demonstração dos mesmos pode ser vista em [6].

<u>LEMA 2.1.</u> (Teorema da decomposição racional) Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo K e $T:V \longrightarrow V$ uma função linear. Então, existem r vetores não nulos $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in V$ tais que:

(a) $V = \bigoplus_{i=1}^{r} K[T]\cdot\alpha_i$.

(b) $p_{i+1} \backslash p_i$ para $1 \leq i \leq r-1$.

Ainda, p_1 é o polinômio minimal de T e o inteiro r e os anuladores $p_1, \ldots, p_r$ são determinados de modo único pelas condições (a) e (b).

<u>LEMA 2.2.</u> Seja α um vetor não nulo de V e seja p_α o T-anulador de α. Então,

(a) o grau de p_α é igual à dimensão do subespaço cíclico $K[T]\cdot\alpha$.

(b) se o grau de p_α é k então $\{\alpha, T\alpha, \ldots, T^{k-1}\alpha\}$ é uma base de $K[T]\alpha$.

(c) se U é o operador linear sobre $K[T]\cdot\alpha$, induzido por T, então p_α é o polinômio minimal de U.

COROLÁRIO - Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo K e $T:V \longrightarrow V$ uma função linear. Então, V é um $K[T]$-módulo indecomponível se e somente se V é um $K[T]$-módulo cíclico e $\dim_K V = k$, onde k é o grau do polinômio minimal de T, que é uma potência de um polinômio irredutível de $K[X]$.

LEMA 2.3. Seja K um corpo de característica $p > 0$ e seja $P = \langle b \rangle$ um grupo cíclico de ordem p^s, $s > 1$. Então, existem exatamente p^s KP-módulos indecomponíveis não isomorfos, cujas dimensões são $1, 2, \ldots, p^s$.

Demonstração - Seja M um KP-módulo indecomponível e seja T a representação de KP sobre K associada a M. T é determinada pela transformação K-linear $T_b : M \longrightarrow M$, definida por $T_b(m) = bm$, para todo $m \in M$. Observamos que, sendo K um corpo de característica $p > 0$, o polinômio $(X-1)^{p^s}$ anula T_b e, portanto, o polinômio minimal de T_b é da forma $(X-1)^k$, para algum $k \leq p^s$. Como M é um KP-módulo indecomponível, segue do corolário anterior que M é um $K[T_b]$-módulo cíclico e $\dim_K M = k$.

Sejam agora N um KP-módulo indecomponível, T' a representação de KP sobre K associada a N, e $(X-1)^\ell$ o polinômio minimal de T_b', para algum $\ell \le p^s$.

Do mesmo modo que para M, concluimos que N é um $K[T_b']$-módulo cíclico e $\dim_K N = \ell$.

Supondo $M \cong N$ como KP-módulos obtemos que $M \cong N$ como K-módulos e, portanto, $\dim_K M = \dim_K N$. Reciprocamente, suponhamos que $\dim_K M = \dim_K N$, ou seja $k = \ell$. Temos a seguinte situação: M é um $K[T_b]$-módulo cíclico, N é um $K[T_b']$-módulo cíclico e os polinômios minimais de T_b e T_b' coincidem com o polinômio $(X-1)^k$, para algum $k \le p^s$. Então, os polinômios característico e minimal de T_b e de T_b' são iguais e, portanto, os polinômios minimais de T_b e T_b' possuem a mesma matriz companheira. Isso significa que, se B e B' são bases, respectivamente, de M e N sobre K, as matrizes de T_b e T_b' nas bases respectivas B e B' são semelhantes. Logo, as representações T e T' são equivalentes e, consequentemente, $M \cong N$ como KP-módulos.

Finalmente, observando que para cada $k \le p^s$ existe uma transformação K-linear $f_k : M \longrightarrow M$, cujo polinômio minimal é $(X-1)^k$ e tal que $(f_k)^{p^s}(m) = m$, para todo $m \in M$, obtemos a tese. □

<u>LEMA 2.4.</u> Seja K um corpo de característica $p > 0$ e seja $G = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$ um grupo, onde a e b são elementos de ordem p. Então, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe um KG-módulo indecomponível de dimensão $2n+1$ sobre K.

Demonstração - Seja M um espaço vetorial de dimensão $2n+1$

sobre K e seja $B = \{x_0, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n\}$ uma base de M. Definindo

$$\begin{cases} ax_i = bx_i = x_i, & 0 \le i \le n \\ ay_i = y_i + x_i, & 1 \le i \le n \\ by_i = y_i + x_{i-1}, & 1 \le i \le n, \end{cases}$$

segue de verificação imediata que M é um KG-módulo.

Sejam X e Y os K-subespaços de M, gerados respectivamente por $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ e $\{y_1, \ldots, y_n\}$ e escrevamos $M = X \oplus Y$. Seja π a projeção de M sobre Y. De acordo com as relações acima, as multiplicações à esquerda por $(a-1)$ e $(b-1)$ aplicam Y isomorficamente em X e aplicam X em (0).

Suponhamos que fosse $M = M_1 \oplus M_2$, onde M_1 e M_2 são KG-submódulos não nulos de M. Seja $\dim_K \pi(M_1) = r$, para algum $1 \le r \le n$. Como M_1 é um KG-módulo, temos que $(a-1)M_1 \subseteq M_1$ e $(b-1)M_1 \subseteq M_1$.

Seja $m_1 \in M_1$. Então $m_1 \in M = X \oplus Y$ e existem $x \in X$ e $y \in Y$ tais que $m_1 = x + y$. Observando que $(a-1)m_1 = (a-1)y = (a-1)\pi(m_1)$, segue que $(a-1)M_1 = (a-1)\pi(M_1)$. Analogamente, $(b-1)M_1 = (b-1)\pi(M_1)$. Além disso, como $\dim_K \pi(M_1) = r$ e como $(a-1)$ e $(b-1)$ aplicam Y isomorficamente em X, obtemos que $\dim_K (a-1)M_1 = \dim_K (b-1)M_1 = r$.

Seja $\{y_{i_0}, y_{i_0+1}, \ldots, y_{i_0+(r-1)}\}$ uma base de $\pi(M_1)$ sobre K. Do que vimos acima segue que

$$(a-1)M_1 = \mathcal{G}(\{x_{i_0}, x_{i_0+1}, \ldots, x_{i_0+(r-1)}\}) \quad \text{e}$$

$$(b-1)M_1 = \mathcal{G}(\{x_{i_0-1}, x_{i_0}, \ldots, x_{i_0+(r-2)}\})$$

e, portanto, existe um elemento em $(b-1)M_1$ que não pertence a $(a-1)M_1$.

Considerando a aplicação linear $\pi|M_1 : M_1 \longrightarrow Y$, temos que $\dim_K M_1 = \dim_K \pi(M_1) + \dim_K(\mathrm{Ker}\,\pi \cap M_1) = r + \dim_K(X \cap M_1)$. Observando que, eventualmente, existe $x \in X \cap M_1$ tal que

$$x \notin (a-1)M_1 \cup (b-1)M_1$$

obtemos que $\dim_K M_1 \geq 2r+1$, $0 \leq r \leq n$, onde o caso $r=0$ se verifica trivialmente, pois $M_1 \neq (0)$ por hipótese.

Fazendo o mesmo com M_2, obtemos que, se $\dim_K \pi(M_2) = s$ então $\dim_K M_2 \geq 2s+1$, $0 \leq s \leq n$.

Logo, $r+s \geq n$ e $\dim_K M \geq (2r+1) + (2s+1) \geq 2n+2$, contrariando a hipótese de que $\dim_K M = 2n+1$. □

Observação - É interessante notar aqui que, se K é um corpo infinito, então existem infinitas dimensões, cada uma das quais admitindo infinitos KG-módulos indecomponíveis não isomorfos. Para vermos esse fato vamos introduzir agora um novo conceito.

Seja K um corpo arbitrário. Seguindo A. Heller e I. Reiner [4] diremos que Λ é uma *C-álgebra sobre* K se Λ é uma álgebra comutativa de dimensão finita sobre K tal que $\frac{\Lambda}{J(\Lambda)} \cong K$. A seguir explicitaremos a forma de uma C-álgebra Λ sobre K.

Sejam $u_1, \ldots, u_n \in J(\Lambda)$ tais que o conjunto

$$\{u_i + J(\Lambda)^2 \mid 1 \leq i \leq n\}$$

seja uma base de $\frac{J(\Lambda)}{J(\Lambda)^2}$ sobre K. Escrevendo

$$J(\Lambda) = Ku_1 + \ldots + Ku_n + J(\Lambda)^2,$$

e observando que

$$J(\Lambda)^2 = (Ku_1 + \ldots + Ku_n)^2 + J(\Lambda)^3,$$

$$J(\Lambda)^3 = (Ku_1 + \ldots + Ku_n)^3 + J(\Lambda)^4, \ldots,$$

$$J(\Lambda)^r = (Ku_1 + \ldots + Ku_n)^r + J(\Lambda)^{r+1}, \ldots,$$

segue da nilpotência de $J(\Lambda)$ que

$$J(\Lambda) = Ku_1 + \ldots + Ku_n + (Ku_1 + \ldots + Ku_n)^2 + \ldots + (Ku_1 + \ldots + Ku_n)^m,$$

para um certo m. Portanto, $K \oplus J(\Lambda) \subseteq K[u_1, \ldots, u_n]$ e como $u_1, \ldots, u_n \in J(\Lambda)$ também vale a inclusão recíproca. Sendo Λ uma C-álgebra sobre K temos que $\frac{\Lambda}{J(\Lambda)} \cong K$ e, portanto, obtemos que $\Lambda \cong K[u_1, \ldots, u_n]$. O número $n = \dim_K \frac{J(\Lambda)}{J(\Lambda)^2}$ é chamado o *"rank"* da C-álgebra Λ.

Enunciaremos a seguir o principal resultado do artigo de Heller e Reiner, acima mencionado, válido para C-álgebras de "rank" 2. Escrevendo $\Lambda \cong K[u_1,u_2]$, onde $u_1,u_2 \in J(\Lambda)$ e $\{u_i + J(\Lambda)^2 | i = 1,2\}$ é uma base de $\frac{J(\Lambda)}{J(\Lambda)^2}$ sobre K temos:

<u>PROPOSIÇÃO</u> - Seja K um corpo arbitrário e seja Λ uma C-álgebra sobre K de "rank" 2. Então,

(i) a menos de isomorfismos existe um único Λ-módulo indecomponível M tal que $J(\Lambda)\cdot M = (0)$; tal módulo é o espaço vetorial K, sobre o qual o corpo K age por multiplicação escalar e $u_i(K) = (0)$, $i = 1,2$.

(ii) existem infinitos Λ-módulos indecomponíveis não isomorfos M tais que $J(\Lambda)^2 \cdot M = (0)$; um conjunto completo de tais módulos é dado pelos K-módulos da forma $V \oplus W$, onde $V = \bigoplus_{i=1}^{r} Ka_i$ e $W = \bigoplus_{j=1}^{s} Kb_j$, onde a ação de K é a multiplicação escalar e a ação de u_1 e u_2 é dada da seguinte maneira:

$$\begin{cases} u_\ell(a_i) = \sum_{j=1}^{s} t_{ij}^{(\ell)} \cdot b_j, & 1 \le i \le r, \quad \ell = 1,2 \\ u_\ell(W) = (0), & \ell = 1,2, \end{cases}$$

onde $T^{(\ell)} = (t_{ij}^{(\ell)})$, $\ell = 1,2$ são matrizes $s \times r$ sobre K dadas pelas formas [I] - [V] do teorema de Dieudonné [3] citado no EXEMPLO 5.

Consideremos agora a álgebra de grupo KG, onde K é um corpo de característica $p > 0$, e $G = G_1 \times \ldots \times G_n$ é um p-grupo abeliano, tal que para cada $i = 1,\ldots,n$, G_i é um grupo cíclico de ordem p^{α_i}, gerado por um elemento dado g_i. KG é uma álgebra de dimensão finita sobre K e é comutativa, por ser G abeliano. Conforme a proposição 0.4.5, segue que $\dim_K J(KG) = \dim_K KG - 1$, e portanto, KG é uma C-álgebra sobre K. Além disso, tal proposição nos fornece uma base de $J(KG)$ sobre K, que é o conjunto $\{g - 1 \mid g \in G,\ g \neq 1\}$. A partir desse fato, pode-se mostrar que uma base de $\frac{J(KG)}{J(KG)^2}$ sobre K é dada pelo conjunto $\{g_i - 1 \mid i = 1,\ldots,n\}$, o que mostra que KG é uma C-álgebra sobre K de "rank" n.

Estamos, finalmente, em condições de enunciar o resultado que serve como justificativa desta observação.

COROLÁRIO - Seja K um corpo de característica $p > 0$ e seja $G = G_1 \times G_2$ um p-grupo abeliano, onde para cada $i = 1,2$, G_i é um grupo cíclico de ordem p^{α_i}, $\alpha_i > 0$, gerado por um elemento g_i. Então, existem infinitos KG-módulos indecomponíveis não isomorfos M tais que $J(KG)^2 \cdot M = (0)$; um conjunto completo de tais módulos é dado por módulos da forma $V \oplus W$ como na proposição anterior, onde a ação de K é a multiplicação escalar e a ação de G é dada da seguinte maneira:

$$\begin{cases} (g_\ell - 1)(a_i) = \sum\limits_{j=1}^{s} t_{ij}^{(\ell)} \cdot b_j, & 1 \leq i \leq r; \quad \ell = 1,2 \\ \\ (g_\ell - 1)(W) = (0), & \ell = 1,2 . \end{cases}$$

O corolário acima nos mostra que, se K é infinito, a álgebra KG do lema 2.4 é uma álgebra de tipo de representação fortemente não limitado.

É interessante notar que a demonstração do lema 2.4 nos forneceu os pares de matrizes $(n+1) \times n$ da forma

$$T^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad T^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

determinando, desse modo, apenas uma representação indecomponível para cada dimensão ímpar.

Veremos agora uma caracterização de certo tipo de mó dulos sobre álgebras de grupos, que serão usados no estudo de módulos indecomponíveis sobre tais álgebras. O material que segue encontra-se em [2]. Daqui para diante K indica um corpo arbitrário, G um grupo finito e H um subgrupo de G. Sabemos que KH é uma subálgebra de KG e qualquer KG-módulo M também é um KH-módulo, que será denotado por M_H.

DEFINIÇÃO 2.1. Seja M um KH-módulo. Como KG é um (KG,KH)-bimódulo, definimos o KG-*módulo induzido pelo* KH-*módulo* M por $M^G = KG \otimes_{KH} M$.

Seja t o número de classes laterais à esquerda, determinadas por H em G. Podemos escrever $G = \bigcup_{i=1}^{t} g_i H$, onde $\{g_1, \dots, g_t\}$ é um conjunto de representantes dessas classes. Então, como KH-módulo, podemos decompor KG na forma $KG = \bigoplus_{i=1}^{t} g_i KH$ e temos $M^G = (\bigoplus_{i=1}^{t} g_i KH) \otimes_{KH} M \cong \bigoplus_{i=1}^{t} (g_i KH \otimes_{KH} M)$. Desde que $g_i b \otimes m = g_i \otimes bm$, onde $b \in KH$ e $m \in M$, podemos escrever $M^G \cong \bigoplus_{i=1}^{t} (g_i \otimes_{KH} M)$. Observando que $g_i KH \cong KH$ como KH-módulos à direita, segue que $g_i KH \otimes_{KH} M \cong KH \otimes_{KH} M \cong M$. O último isomorfismo é um KH-isomorfismo e como K-módulos temos então $M^G \cong M^{(t)}$ e, portanto, $\dim_K M^G = [G:H] \cdot \dim_K M$. Como

$$M^G \cong \bigoplus_{i=1}^{t} (g_i \otimes M), \quad \text{dado } m \in M^G, \quad m = \sum_{i=1}^{t} g_i \otimes m_i ,$$

os m_i únicos em M. Assim, se $\{m_1, \dots, m_r\}$ é uma base de

M sobre K, o conjunto $\{g_i \otimes m_j \mid i=1,\dots,t;\ j=1,\dots,r\}$ é uma base de M^G sobre K.

Seja M um KG-módulo de dimensão n sobre K. Restringindo os escalares a KH obtemos o KH-módulo M_H cuja dimensão sobre K também é n. Consideremos agora o KG-módulo $(M_H)^G$. Vimos, anteriormente, que

$$\dim_K (M_H)^G = [G:H]\cdot \dim_K M \geq \dim_K M .$$

Assim, se H é um subgrupo próprio de G temos que

$$\dim_K (M_H)^G > \dim_K M ,$$

e portanto $(M_H)^G$ e M não podem ser isomorfos como KG-módulos. No entanto, faz sentido perguntar se M é isomorfo a uma KG-componente de $(M_H)^G$. No próximo teorema, veremos condições necessárias e suficientes para que essa questão seja respondida afirmativamente. Para tanto, necessitamos da seguinte definição:

DEFINIÇÃO 2.2. Um KG-módulo à esquerda M é dito (G,H)-*injetivo* se a sequência exata de KG-módulos $0 \to M \to R \to S \to 0$ cinde toda vez que a sequência exata de KH-módulos associada $0 \to M_H \to R_H \to S_H \to 0$ cinde.

Segue da definição acima, que M é um KG-módulo (G,H) - injetivo se, toda vez que M é um submódulo de um KG-módulo R tal que M_H é uma KH-componente de R_H, então M é uma KG-componente de R. O teorema 2.3. nos dará exemplos de módulos (G,H)-injetivos.

<u>TEOREMA 2.1.</u> Seja M um KG-módulo. São equivalentes:

(i) M é (G,H)-injetivo;

(ii) M é isomorfo a uma KG-componente de $(M_H)^G$;

(iii) Qualquer que seja o conjunto de representantes das classes laterais à esquerda determinadas por H em G, existe $\gamma \in \mathrm{Hom}_{KH}(M,M)$ tal que $\sum_{i=1}^{t} g_i\gamma(g_i^{-1}m) = m$, para todo $m \in M$.

Demonstração - (i) $\Longrightarrow$ (ii).

Sabemos que qualquer elemento de $(M_H)^G$ pode ser expresso de modo único como $\sum_{i=1}^{t} g_i \otimes m_i$, $m_i \in M$, $g_1 \in H$.

Seja $\phi : M \longrightarrow (M_H)^G$ definida por

$$\phi(m) = \sum_{i=1}^{t} g_i \otimes g_i^{-1}m\ , \quad \text{para todo} \quad m \in M.$$

Observamos que ϕ é um K-homomorfismo de M em $(M_H)^G$. Se

Se $\phi(m) = 0$ então, pela unicidade da expressão,

$$0 = \sum_{i=1}^{t} g_i \otimes g_i^{-1}m \quad \text{implica} \quad g_i \otimes g_i^{-1}m = 0,$$

para todo $i = 1,\dots,t$, e como $g_1 \in H$ segue que

$$0 = g_1 \otimes g_1^{-1}m = 1 \otimes m, \quad \text{donde} \quad m = 0\ .$$

Para a última implicação observamos que $1 \underset{KH}{\otimes} M \cong M$. Logo, ϕ é um K-monomorfismo. Mostremos que ϕ comuta com os escalares de KG. Seja $g \in G$. Para todo $i = 1,\dots,t$ existe um único $j = 1,\dots,t$ tal que $g^{-1}\cdot g_i = g_j \cdot h_{ij}$, $h_{ij} \in H$. Assim,

$$g_i^{-1}g = h_{ij}^{-1}\cdot g_j^{-1} \quad \text{e}$$

$$\sum_{i=1}^{t} g_i \otimes g_i^{-1} \cdot g_m = \sum_{i=1}^{t} g_i \otimes h_{ij}^{-1} \cdot g_j^{-1} m = \sum_{i=1}^{t} g_i h_{ij}^{-1} \otimes g_j^{-1} m =$$

$$= \sum_{j=1}^{t} g g_j \otimes g_j^{-1} m = g \sum_{j=1}^{t} g_j \otimes g_j^{-1} m .$$

Isso prova que ϕ é um KG-isomorfismo de M sobre $\phi(M)$, e $\phi(M)$ é um KG-submódulo de $(M_H)^G$.

Mostremos que $\phi(M)$ é uma KG-componente de $(M_H)^G$.

Seja $M_1 = \{ \sum_{i=1}^{t} g_i \otimes m_i \mid m_1 = 0 \}$. M_1 é um KH-submódulo de $(M_H)^G$, e temos:

$$\sum_{i=1}^{t} g_i \otimes m_i = \phi(g_1 m_1) + [\sum_{i=1}^{t} g_i \otimes m_i - \phi(g_1 m_1)] \quad \text{e}$$

$$[\sum_{i=1}^{t} g_i \otimes m_i - \phi(g_1 m_1)] \in M_1 .$$

Além disso, se $\phi(m) = \sum_{i=1}^{t} g_i \otimes g_i^{-1} m \in M_1$, então $g_1^{-1} m = 0$ e segue que $m = 0$. Assim, $\phi(M) \cap M_1 = (0)$, e $(M_H)^G = \phi(M) \oplus M_1$ como KH-módulos. Como M é (G,H)-injetivo, por hipótese, concluímos que M é isomorfo a uma KG-componente de $(M_H)^G$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii).

Seja $\{g_1, \ldots, g_t\}$ um conjunto de representantes das classes laterais à esquerda, determinadas por H em G e seja $\gamma^* : (M_H)^G \longrightarrow (M_H)^G$ definida por $\sum_{i=1}^{t} g_i \otimes m_i \longmapsto g_1 \otimes m_1$. γ^* é um KH-endomorfismo de $(M_H)^G$. Além disso,

$$\sum_{i=1}^{t} g_i\gamma^* g_i^{-1}(g_j \otimes m_j) = \sum_{i=1}^{t} g_i\gamma^*(g_i^{-1}g_j \otimes m_j) =$$

$$g_j g_1^{-1}\gamma^*(g_1 \otimes m_j) = g_j g_1^{-1}\cdot g_1 \otimes m_j = g_j \otimes m_j ,$$

para todo $j = 1,\ldots, t$.

De acordo com a hipótese (ii), existe um KG-endomorfismo ε de $(M_H)^G$ tal que $\varepsilon^2 = \varepsilon$ e $\varepsilon[(M_H)^G]$ é KG-isomorfo com M.

Assim, $\varepsilon\cdot\gamma^*\cdot\varepsilon$ é um KH-endomorfismo de $\varepsilon[(M_H)^G]$ e dado $m \in \varepsilon[(M_H)^G]$ temos que

$$\sum_{i=1}^{t} g_i\varepsilon\,\gamma^*\cdot\varepsilon g_i^{-1}m = \varepsilon\cdot\Big(\sum_{i=1}^{t} g_i\gamma^* g_i^{-1}\Big)\cdot\varepsilon m = \varepsilon\cdot 1_{(M_H)^G}\cdot\varepsilon m = \varepsilon m = m.$$

Seja $\phi: M \longrightarrow \varepsilon[(M_H)^G]$ o KG-isomorfismo citado anteriormente, proveniente da hipótese (ii). Seja $\gamma: M \longrightarrow M$ definida por $\gamma = \phi^{-1}\cdot\varepsilon\cdot\gamma^*\cdot\varepsilon\cdot\phi$. Então, de acordo com o desenvolvimento anterior, γ é um KH-endomorfismo de M tal que $\sum_{i=1}^{t} g_i\gamma g_i^{-1}(m) = m$, para todo $m \in M$, e (iii) está verificada.

(iii) $\Longrightarrow$ (i).

Provemos que se M é um submódulo de um KG-módulo R tal que M_H é uma componente de R_H, então M é uma componente de R.

Seja ε um KH-endomorfismo de R tal que $\varepsilon(R) = M$ e $\varepsilon^2 = \varepsilon$. Seja $\varepsilon' = \sum_{i=1}^{t} g_i\gamma\cdot\varepsilon g_i^{-1}: R \longrightarrow R$ a função definida por $r \longmapsto \sum_{i=1}^{t} g_i\gamma\cdot\varepsilon(g_i^{-1}r)$, onde γ é o KH-endomorfismo de M

da parte (iii). Temos que

$$\sum_{i=1}^{t} g_i\gamma\cdot\varepsilon g_i^{-1}(gr) = \sum_{i=1}^{t} g_i\gamma\cdot\varepsilon g_i^{-1}gr = \sum_{i=1}^{t} g_i\gamma\cdot\varepsilon h_{ij}^{-1}\cdot g_j^{-1}r =$$

$$= \sum_{i=1}^{t} g_i h_{ij}^{-1}\gamma\cdot\varepsilon g_j^{-1}r = \sum_{j=1}^{t} gg_j\gamma\cdot\varepsilon g_j^{-1}\, r = g\sum_{j=1}^{t} g_j\gamma\cdot\varepsilon g_j^{-1}\, r\,,$$

e, portanto, ε' é um KG-endomorfismo de R.

Seja $m \in M$. Então,

$$\varepsilon'(m) = \sum_{i=1}^{t} g_i\gamma\cdot\varepsilon(g_i^{-1}m) = \sum_{i=1}^{t} g_i\gamma g_i^{-1}m = m\,,$$

devido à hipótese sobre γ. Como $\varepsilon'(R)\subseteq M$ temos que $\varepsilon'(R)=M$. Assim, $R = M \oplus (1-\varepsilon')R$ como KG-módulos, e o teorema está demonstrado. □

A aplicação desse resultado no estudo de KG-módulos indecomponíveis está baseada nos dois seguintes teoremas:

<u>TEOREMA 2.2.</u> Seja K um corpo arbitrário. Seja H um subgrupo de um grupo finito G. Seja L um KH-módulo. Então, L é isomorfo a uma KH-componente de $(L^G)_H$.

Demonstração - Seja $\{g_1,\ldots, g_t\}$ um conjunto de representantes das classes laterais à esquerda determinadas por H em G. Consideremos o KG-módulo $L^G \cong \bigoplus_{i=1}^{t} (g_i \otimes_{KH} L)$. Restringindo os escalares a KH, tomemos agora o KH-submódulo $(1 \otimes_{KH} L)_H$ de $(L^G)_H$. Seja $\phi: L \longrightarrow (1 \otimes_{KH} L)_H$, definida por $\phi(\ell) = 1 \otimes \ell$, para todo $\ell \in L$. ϕ é um KH-isomorfismo.

Consideremos $L^* = [\bigoplus_{i=2}^{t} (g_i \underset{KH}{\otimes} L)]_H$. L^* é um KH-submódulo de $(L^G)_H$ e é complementar de $(1 \underset{KH}{\otimes} L)_H$, donde segue a tese. □

TEOREMA 2.3. Seja K um corpo de característica $p > 0$. Sejam P um p-subgrupo de Sylow de um grupo finito G, e M um KG-módulo. Então, M é (G,P)-injetivo.

Demonstração - Seja $\{g_1, \ldots, g_t\}$ um conjunto de representantes das classes laterais à esquerda determinadas por P em G. O índice $t = [G:P]$ é primo com p e, portanto, $t \cdot 1 \neq 0$ em K.

Seja $\gamma: M \longrightarrow M$ definida por $\gamma(m) = t^{-1}m$, para todo $m \in M$. Então, $\gamma \in \mathrm{Hom}_{KP}(M,M)$ e, dado $m \in M$,

$$\sum_{i=1}^{t} g_i \gamma(g_i^{-1}m) = \sum_{i=1}^{t} g_i t^{-1} g_i^{-1} m = t(t^{-1}m) = m .$$

Assim, a condição (iii) do teorema 2.1 está verificada e, portanto, M é (G,P)-injetivo. □

COROLÁRIO - Sejam K, G e P como no teorema 2.3 e seja M um KG-módulo. Então, existe um KP-módulo L tal que M é isomorfo a uma KG-componente de L^G.

Demonstração - Segue imediatamente dos teoremas 2.3 e 2.1 que M é isomorfo a uma KG-componente de $(M_P)^G$. Fazendo $L = M_P$ segue o corolário. □

Estamos, finalmente, em condições de provar o resultado principal deste capítulo.

TEOREMA 2.4. (Higman [5]) Sejam K um corpo de característica $p > 0$ e G um grupo finito tal que $p \backslash |G|$. Tem-se que:

(i) Se os p-subgrupos de Sylow de G são cíclicos, então existem no máximo $|G|$ KG-módulos indecomponíveis não isomorfos.

(ii) Se G possui um p-subgrupo de Sylow não cíclico, então existem KG-módulos indecomponíveis de dimensão arbitrariamente grande.

Demonstração - (i) Seja M um KG-módulo indecomponível. Dos teoremas 2.3 e 2.1 segue que M é isomorfo a uma KG-componente de $(M_P)^G$. Como M é finitamente gerado sobre KG e $\dim_K KG < \infty$, temos que M_P é finitamente gerado sobre KP. Então, de acordo com a proposição 0.1.1, $M_P = \overset{r}{\underset{i=1}{\oplus}} L_i$ onde para cada $i = 1,\dots,r$, L_i é um KP-módulo indecomponível. Considerando o KG-módulo induzido $(M_P)^G = KG \underset{KP}{\otimes} M_P$ temos que $(M_P)^G$ é finitamente gerado sobre KG e

$$(M_P)^G = KG \underset{KP}{\otimes} \left(\overset{r}{\underset{i=1}{\oplus}} L_i \right) \cong \overset{r}{\underset{i=1}{\oplus}} (KG \underset{KP}{\otimes} L_i) = \overset{r}{\underset{i=1}{\oplus}} (L_i)^G .$$

Portanto, do teorema de Krull-Schmidt existe $i = 1,\dots,r$ tal que M é isomorfo a uma KG-componente de $(L_i)^G$. Em particular, $\dim_K L_i \leq \dim_K M_P = \dim_K M \leq \dim_K (L_i)^G$.

Seja $\{N_k \mid 1 \leq k \leq p^s = |P|\}$ um conjunto completo de KP-módulos indecomponíveis não isomorfos tal que $\dim_K N_k = k$, como foi obtido no lema 2.3. Então, do argumento precedente, M é isomorfo a uma KG-componente de $(N_j)^G$, para um certo

$j = 1,\ldots,p^s$ e $\dim_K N_j = j \le \dim_K M \le \dim_K (N_j)^G = [G:P]\cdot j$. Como $\dim_K (N_j)^G = [G:P]\cdot j$, existem no máximo $[G:P]$ KG-componentes não isomorfos de $(N_j)^G$ de dimensão maior ou igual a j. Portanto, o número total de KG-módulos indecomponíveis não isomorfos não excede a $[G:P]\cdot p^s = |G|$.

(ii) Suponhamos que G possui um p-subgrupo de Sylow P não cíclico. Seja L um KP-módulo indecomponível. Segue do teorema 2.2 que L é isomorfo a uma KP-componente de $(L^G)_P$. Como L é finitamente gerado sobre KP, L^G é finitamente gerado sobre KG. Seja $L^G = \bigoplus_{i=1}^{t} L_i$ a decomposição de L^G em soma direta de KG-módulos indecomponíveis. Restringindo os escalares a KP temos que $(L^G)_P \cong \bigoplus_{i=1}^{t} (L_i)_P$, onde os KP-módulos $(L_i)_P$ podem ser, eventualmente, decomponíveis. Do teorema de Krull-Schmidt existe $i = 1,\ldots,t$ tal que L é isomorfo a uma KP-componente de $(L_i)_P$ e, portanto,

$$\dim_K L \le \dim_K (L_i)_P = \dim_K L_i \quad \text{para algum } i = 1,\ldots,t\,.$$

Vimos até aqui que existe um KG-módulo indecomponível, cuja dimensão sobre K é maior ou igual à dimensão sobre K do KP-módulo indecomponível L. Portanto, se conseguirmos encontrar KP-módulos indecomponíveis de dimensão sobre K arbitrariamente grande, a álgebra KG também será de tipo de representação não limitado e o teorema estará provado.

Suponhamos então que G é um p-grupo não cíclico. Sabemos que existe um subgrupo H de G tal que $\frac{G}{H} \cong A \times A$, onde A é um grupo cíclico de ordem p. Como todo $K(\frac{G}{H})$-módulo indecomponível é também um KG-módulo indecomponível, o nosso problema fica reduzido ao caso em que $G = \langle a\rangle \times \langle b\rangle$, onde a e b têm ordem p, e o resultado procurado segue do lema 2.4. □

Vimos neste capítulo que o problema do nosso trabalho foi completamente resolvido para álgebras de grupos. Reunimos no teorema seguinte os resultados que relacionam a classe das álgebras de grupos com a classe das álgebras de tipo de representação finito.

TEOREMA 2.5. Sejam K um corpo arbitrário e G um grupo finito. Então,

1. KG é uma álgebra de tipo de representação finito se uma das seguintes condições está verificada:

(i) car $K \nmid |G|$

(ii) car $K = p \backslash |G|$ e os p-subgrupos de Sylow de G são cíclicos.

2. Se KG não é uma álgebra de tipo de representação finito, então KG é uma álgebra de tipo de representação não limitado. Além disso, se o corpo K é infinito, então KG é uma álgebra de tipo de representação fortemente não limitado.

CAPÍTULO 3

O TEOREMA DE ROITER

3.1. Divisibilidade de Módulos

Nesta seção, Λ indicará um anel com unidade.

DEFINIÇÃO 3.1.1. Sejam A e B Λ-módulos. Dizemos que A *divide* B quando $\mathrm{Hom}_\Lambda(A,B)\cdot A = B$, onde $\mathrm{Hom}_\Lambda(A,B)\cdot A$ é o subgrupo aditivo de B gerado por $\{\phi(a) \mid \phi \in \mathrm{Hom}_\Lambda(A,B) \text{ e } a \in A\}$. Observamos que $\mathrm{Hom}_\Lambda(A,B)\cdot A = \sum_{\phi \in \mathrm{Hom}_\Lambda(A,B)} \mathrm{Im}\,\phi$.

Para indicar que A divide B usaremos a notação $A\backslash B$.

A relação de divisibilidade entre Λ-módulos é reflexiva e transitiva. No entanto, tal relação não é antisimétrica, como bem atesta o exemplo em que $A = B \oplus B$, B Λ-módulo. A proposição 3.1.1 mostra que de fato $B\backslash A$.

No restante desta seção, os Λ-módulos considerados são pressupostos noetherianos.

PROPOSIÇÃO 3.1.1. Sejam A e B Λ-módulos. $A\backslash B$ se e somente se existe um inteiro n tal que a sequência $A^{(n)} \longrightarrow B \longrightarrow 0$ é exata.

Demonstração - Se para algum inteiro n a sequência $A^{(n)} \longrightarrow B \longrightarrow 0$ é exata, então $A^{(n)}\backslash B$.

Seja para cada $i = 1,\dots, n$ o Λ-homomorfismo $\phi_i : A \longrightarrow A^{(n)}$, definido por $\phi_i(a) = (0,\dots, a,\dots, 0)$, para qualquer $a \in A$, onde o elemento a ocupa a i-ésima posição na n-upla $\phi_i(a)$. Tomando $(a_1,\dots, a_n) \in A^{(n)}$ obtemos que $(a_1,\dots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} \phi_i(a_i)$ e, portanto, $A\backslash A^{(n)}$. Assim, da propriedade transitiva da relação de divisibilidade, segue que $A\backslash B$.

Suponhamos agora, que $A\backslash B$, isto é, $\sum_{\psi\in \mathrm{Hom}_\Lambda(A,B)} \mathrm{Im}\,\psi = B$. Sendo B noetheriano, podemos escrever $B = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Im}\,\psi_i$, onde $\psi_i \in \mathrm{Hom}_\Lambda(A,B)$, $i = 1,\dots, n$. Seja $\bar{\psi}: A^{(n)} \longrightarrow B$ o morfismo que a cada n-upla $(a_1,\dots, a_n) \in A^{(n)}$ associa $\sum_{i=1}^{n} \psi_i(a_i) \in B$. Segue imediatamente que $A^{(n)} \longrightarrow B \longrightarrow 0$ é uma sequência exata.

□

PROPOSIÇÃO 3.1.2. Sejam A e B Λ-módulos. Se $A\backslash B$ e o anel $U = \mathrm{Hom}_\Lambda(A,A)$ é comutativo, então, toda sequência exata $B \xrightarrow{\psi} A \longrightarrow 0$ cinde.

Demonstração - Seja $T = \psi\cdot \mathrm{Hom}_\Lambda(A,B)$. T é um ideal à direita de U. Sejam $a_1,\dots, a_m$ geradores de A sobre Λ. Como $B = \mathrm{Hom}_\Lambda(A,B)\cdot A$ e $A = \psi B$ temos que $TA = \psi\, \mathrm{Hom}_\Lambda(A,B)A = \psi B = A$, i.e, existem $t_{ij} \in T$ tal que $\sum_{j=1}^{m} t_{ij}(a_j) = a_i$, $i = 1,\dots, m$.

Escrevamos $\psi_{ii} = t_{ii} - 1_A$, $i = 1,\dots,m$ e $\psi_{ij} = t_{ij}$,

$i,j = 1,\ldots,m$, $i \neq j$, e consideremos a matriz $M = (\psi_{ij})$. O morfismo $\sum_{\sigma \in S_m} \operatorname{sgn} \sigma \cdot \psi_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot \psi_{m\sigma(m)} = \det M \in \operatorname{Hom}_\Lambda(A,A)$ anula os a_i, para $i = 1,\ldots,m$. Portanto, $\det M = 0$, já que os ai geram A, $i = 1,\ldots,m$. Por outro lado, desenvolvendo $\det M$, obtemos que $1_A \in T$ e isto significa que existe um Λ-morfismo $\phi: A \longrightarrow B$ tal que $\psi \circ \phi = 1_A$.

Logo, a sequência $B \xrightarrow{\psi} A \longrightarrow 0$ cinde. □

<u>LEMA 3.1.1.</u> Sejam $B \xrightarrow{\phi} A \longrightarrow 0$ (1) uma sequência exata de Λ-módulos e X um Λ-módulo arbitrário. Consideremos a sequência exata $B \oplus X \xrightarrow{\overline{\phi}} A \oplus X \longrightarrow 0$ (2), onde $\overline{\phi}(b,x) = (\phi(b),x)$. Então, (1) cinde se e somente se (2) cinde.

Demonstração - Suponhamos que cinde a sequência (1), i.e, existe $\psi \in \operatorname{Hom}_\Lambda(A,B)$ tal que $\phi \circ \psi = 1_A$. Então, $\overline{\phi} \circ \overline{\psi} = 1_{A \oplus X}$, onde $\overline{\psi}(a,x) = (\psi(a),x)$ e a sequência (2) cinde.

Agora, se a sequência (2) cinde, existe

$$\overline{\psi} \in \operatorname{Hom}_\Lambda(A \oplus X,\ B \oplus X) \quad \text{tal que} \quad \overline{\phi} \circ \overline{\psi} = 1_{A \oplus X}.$$

Seja $(a,x) \in A \oplus X$. Então,

$$\overline{\psi}(a,x) = (b,y) \in B \oplus X \quad \text{e} \quad (a,x) = \overline{\phi}(b,y) = (\phi(b),y).$$

Portanto, $y = x$ e $\phi(b) = a$. Seja $\psi: A \longrightarrow B$ definida por

$$\psi(a) = b \quad \text{tal que} \quad \overline{\psi}(a,x) = (b,x),$$

para todo $a \in A$. Então $\psi \in \operatorname{Hom}_\Lambda(A,B)$ e $\phi \cdot \psi(a) = 1_A$, donde a sequência (1) cinde. □

Observamos que na proposição 3.1.2. a hipótese da comutatividade do anel $\mathrm{Hom}_\Lambda(A,A)$ não é supérflua. De fato, seja $B \longrightarrow A \longrightarrow 0$ uma sequência exata de Λ-módulos. Consideremos a sequência exata $B \oplus S \longrightarrow A \oplus S \longrightarrow 0$, onde S é um Λ-módulo livre. Escrevamos $B = \Lambda b_1 + \ldots + \Lambda b_r$ e $S = \Lambda^{(n)}$, já que estamos trabalhando com Λ - módulos noetherianos. Seja $\phi : S^{(r+1)} \longrightarrow B \oplus S$ definida por

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^1, \ldots, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^r, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) \longmapsto \left(\lambda_1^1 b_1 + \ldots + \lambda_1^r b_r, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right).$$

Por ser S livre, ϕ é um morfismo de $S^{(r+1)}$ sobre $B \oplus S$, e portanto, $S \backslash B \oplus S$. Como $A \oplus S \backslash S$, concluímos que $A \oplus S \backslash B \oplus S$.

Se a proposição 3.1.2. fosse verdadeira sem a hipótese de comutatividade para o anel $\mathrm{Hom}_\Lambda(A,A)$, a sequência $B \oplus S \longrightarrow A \oplus S \longrightarrow 0$ necessariamente deveria cindir, e de acordo com o lema 3.1.1. a sequência $B \longrightarrow A \longrightarrow 0$ também deveria cindir para A e B arbitrários, o que nem sempre ocorre.

Embora não possamos prescindir da hipótese de comutatividade para o anel $\mathrm{Hom}_\Lambda(A,A)$ da proposição 3.1.2., tal hipótese é muito restritiva.

Mostraremos a seguir que se $\mathrm{Hom}_\Lambda(A,A)$ é um anel semiprimário e S.B.I. a hipótese de comutatividade para $\mathrm{Hom}_\Lambda(A,A)$ pode ser enfraquecida.

<u>DEFINIÇÃO 3.1.2.</u> Seja A um Λ-módulo. Dizemos que uma *decomposição* de A numa soma direta $A_1 \oplus \ldots \oplus A_k$ é *normal* se $A_i \backslash A_j$ para $i < j$, $j = 2, \ldots, k$. Um módulo que não pode ser decomposto, não trivialmente, numa soma direta normal é dito *nor*

mal indecomponível.

Observamos que se A é decomponível, então, $\mathrm{Hom}_\Lambda(A,A)$ não é comutativo, pois considerando $A = A_1 \oplus A_2$ e definindo $\pi_1 : A_1 \oplus A_2 \longrightarrow A_1 \oplus A_2$ por $\pi_1(a_1,a_2) = (a_1,0)$ e

$$\phi : A_1 \oplus A_2 \longrightarrow A_1 \oplus A_2 \quad \text{por} \quad \phi(a_1,a_2) = (-a_2,a_1)$$

obtemos: $\phi \circ \pi_1(a_1,0) = (0,a_1)$ enquanto $\pi_1 \circ \phi(a_1,0) = (0,0)$, para todo $a_1 \in A_1$.

Assim, se $\mathrm{Hom}_\Lambda(A,A)$ é comutativo, A deve ser um Λ-módulo indecomponível e, conforme a definição acima, um Λ-módulo normal indecomponível.

<u>LEMA 3.1.2.</u> Seja A um Λ-módulo noetheriano. Então, $A = \bar{A}_1 \oplus \bar{A}_2$, onde $\bar{A}_1$ é normal indecomponível e $\bar{A}_1 \backslash A$.

Demonstração - Se A é normal indecomponível, tomamos $\bar{A}_1 = A$ e $\bar{A}_2 = (0)$.

Suponhamos agora que $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$ é uma decomposição normal de A. Então, para cada $i = 1,\ldots,n$ $A_1 \backslash A_i$, ou seja, existe um inteiro ℓ_i tal que $A_1^{(\ell_i)} \longrightarrow A_i \longrightarrow 0$ é uma sequência exata, de acordo com a proposição 3.1.1. Observando que $A_1^{(\ell_1+\ldots+\ell_n)} \longrightarrow A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_n \longrightarrow 0$ é uma sequência exata, obtemos da mesma proposição que $A_1 \backslash A$. Caso A_1 seja normal indecomponível, fazendo $B_1 = \bigoplus_{i=2}^{n} A_i$ temos que $A = A_1 \oplus B_1$ e o lema segue.

Suponhamos que A_1 tenha uma decomposição em soma direta normal $A_1 = A_{11} \oplus \ldots \oplus A_{1k_1}$. Então, como acima, $A_{11} \backslash A_1$, donde $A_{11}\backslash A$. Se A_{11} é normal indecomponível, escrevemos $A = A_{11} \oplus B_{11}$, e a tese está verificada.

Agora, se $A_{11} = A_{21} \oplus \ldots \oplus A_{2k_2}$ é uma decomposição em soma direta normal de A_{11} temos que $A_{21}\backslash A$. Caso A_{21} seja normal indecomponível, $A = A_{21} \oplus B_{21}$ e o resultado está provado. Caso contrário, o processo acima descrito pode continuar.

Observando as sucessivas decomposições de A obtidas, estamos diante de uma cadeia ascendente de submódulos de A, $B_1 \subseteq B_{11} \subseteq B_{21} \subseteq \ldots \subseteq B_{r1} \subseteq \ldots$, que é estacionária, pois A é noetheriano. Portanto, existe s tal que $A = A_{s1} \oplus B_{s1}$, com A_{s1} normal indecomponível e $A_{s1}\backslash A$. □

<u>PROPOSIÇÃO 3.1.3.</u> Seja Λ um anel. Para que a sequência exata de Λ-módulos $B \xrightarrow{\phi} A \longrightarrow 0$ cinda, é suficiente que se verifiquem as três seguintes condições:

(i) $A\backslash B$,

(ii) A é normal indecomponível,

(iii) $\mathrm{Hom}_\Lambda(A,A)$ é um anel semiprimário e S.B.I. .

Demonstração - Seja $T = \phi \cdot \mathrm{Hom}_\Lambda(A,B)$. T é um ideal à direita de $U = \mathrm{Hom}_\Lambda(A,A)$, e $T \cdot A = A$ por hipótese. Sejam $\bar{U} = \dfrac{U}{J}$ e $\bar{T} = \dfrac{T+J}{J}$, onde $J = J(U)$. $\bar{T}$ é um ideal à direita de $\bar{U}$. Como U é um anel semiprimário e $J(\bar{U}) = (0)$, segue da proposição 0.4.3. que $\bar{U}$ é um anel semisimples.

Seja $\bar{a} \in \bar{T}$, $\bar{a}$ idempotente, tal que $\bar{T} = \bar{a}\bar{U}$. Sendo U um anel S.B.I., conforme a proposição 0.5.2., existe $e \in T$, é idempotente, tal que $\bar{e} = \bar{a}$.

Temos: $T \subseteq eU + J$ e $A = TA = eUA + JA$. Como A é finitamente gerado sobre U, segue do lema de Nakayama que $A = eUA$. Mas, como $A = \text{Im } e \oplus \text{Ker } e$, obtemos que $\text{Im } e \backslash A$. Sendo A normal indecomponível, segue que $A = \text{Im } e$.

Se $a \in A$ temos que $a = ea'$ para algum $a' \in A$ e $ea = e(ea') = ea' = a$. Assim, $e = 1_U$ e como $e \in T$, segue que $1_U = \phi \circ \psi$, para algum $\psi \in \text{Hom}_\Lambda(A,B)$. Logo, a sequência $B \xrightarrow{\phi} A \longrightarrow 0$ cinde. □

Observamos que, se Λ é uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo K, então a hipótese (iii) da proposição anterior já está verificada e temos o seguinte corolário:

<u>COROLÁRIO</u> - Seja Λ uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo K. Sejam A e B Λ-módulos. Então, se $A\backslash B$ e se A é normal indecomponível, segue que A é isomorfo a um somando direto de B.

3.2. <u>Uma função importante</u>

Nesta e na próxima seção, trabalharemos com módulos finitamente gerados sobre uma álgebra Λ de dimensão finita sobre um corpo K e, de acordo com o teorema 0.1.3, notaremos por $\ell(A)$ o comprimento do Λ-módulo A.

Seja $M = \{A | A$ é um Λ-módulo indecomponível$\}$. No que segue, consideraremos o caso em que $\{\ell(A) | A \in M\}$ *é limitado*.

Faremos agora a construção de uma família de subconjuntos de M, como segue:

Seja $M_1 = \{A \in M \mid \ell(A) = 1\}$ e suponhamos $M_1, M_2, \ldots, M_k$ construídos.

Seja $M'_k = \{A \in M \mid A \notin \bigcup_{i=1}^{k} M_i$ e $\bar{Q}(A) \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} M_i\}$, onde $\bar{Q}(A) = \{B \in M \mid B = \frac{A}{L}$, L submódulo próprio de A, distinto de $(0)\}$.

Seja agora $M_{k+1} = \{A \in M'_k \mid \ell(A) = \max_{B \in M'_k} \ell(B)\}$.

Observando que $M'_k \cap [\bigcup_{i=1}^{k} M_i] = \emptyset$ e $M_{k+1} \subseteq M'_k$, $\forall k$ temos: $M_i \cap M_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$.

<u>LEMA 3.2.1.</u> Seja $A \in M'_k$. Então,

(i) $\ell(A) = \max_{B \in M'_k} \ell(B) \Longrightarrow A \notin M'_s$, $\forall s > k$.

(ii) $\ell(A) \neq \max_{B \in M'_k} \ell(B) \Longrightarrow A \in M'_{k+1}$.

Demonstração - (i) $A \in M_{k+1}$ por hipótese. De acordo com a construção de M'_s segue diretamente a tese.

(ii) $A \notin M_{k+1}$ por hipótese. Como $A \in M'_k$ temos que

$$A \notin [\bigcup_{i=1}^{k} M_i] \cup M_{k+1} \quad \text{e} \quad \bar{Q}(A) \subseteq [\bigcup_{i=1}^{k} M_i] \cup M_{k+1},$$

donde $A \in M'_{k+1}$. □

<u>LEMA 3.2.2.</u> $M_i \neq \emptyset$ apenas para um número finito de índices i.

Demonstração - Como estamos supondo que $\{\ell(A)\,|\,A \in M\}$ é limitado, basta mostrar que os módulos de um determinado comprimento k pertencem a um número finito de $M_i^{\prime}$s.

Faremos indução sobre k.

Os módulos de comprimento $k=1$ pertencem a M_1.

Suponhamos o lema válido para os módulos de M de comprimento $j \le k$.

Seja t o menor inteiro tal que, para todo

$$A \in \bigcup_{i=t}^{\infty} M_i, \qquad \ell(A) > k.$$

Escrevamos $R_t = \bigcup_{i=t}^{\infty} M_i$ e $R_t^{k+1} = \{A \in R_t \,|\, \ell(A) = k+1\}$. Sejam $A \in R_t^{k+1}$ e $B \in \bar{Q}(A)$.

$B \in R_1$ e $\ell(B) < \ell(A) = k+1$, conforme a proposição 0.1.5, donde $B \in \bigcup_{i=1}^{t-1} M_i$, devido à hipótese de indução. Como $A \notin \bigcup_{i=1}^{t-1} M_i$ segue que $A \in M_{t-1}^{\prime}$ e, portanto, $R_t^{k+1} \subseteq M_{t-1}^{\prime}$.

Se $\max\limits_{D \in M_{t-1}^{\prime}} \ell(D) = k+1$, então $R_t^{k+1} \subseteq M_t$ e o lema está provado. Caso $\max\limits_{D \in M_{t-1}^{\prime}} \ell(D) \neq k+1$, segue do lema 3.2.1 (ii) que $R_t^{k+1} \subseteq M_t^{\prime}$.

Se $\max\limits_{D \in M_t^{\prime}} \ell(D) = k+1$, então $R_t^{k+1} \subseteq M_{t+1}$ e terminamos. Caso contrário, $R_t^{k+1} \subseteq M_{t+1}^{\prime}$ e assim sucessivamente. Como $A \in R_t$, deve existir um índice j tal que $A \in M_j^{\prime}$, para todo $A \in R_t^{k+1}$, e o lema está demonstrado. $\square$

<u>LEMA 3.2.3.</u> Seja $A \in M$ tal que $A \notin \bigcup_{i=1}^{k} M_i$. Então existe um

módulo quociente indecomponível de A que pertence a M'_k.

Demonstração - Seja $Q'(A) = \{B \in M \mid B$ é um quociente de $A\}$. Se $Q'(A) \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} M_i$ então $A \in M'_k$.

Suponhamos que existe $A_1 \in Q'(A)$ tal que $A_1 \notin \bigcup_{i=1}^{k} M_i$. Se $Q'(A_1) \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} M_i$ então $A_1 \in M'_k$. Caso contrário, existe $A_2 \in Q'(A_1)$ tal que $A_2 \notin \bigcup_{i=1}^{k} M_i$, e assim sucessivamente.

Observamos que $A_1 = \dfrac{A}{L_1}$,

$$A_2 = \frac{A_1}{B_1} \cong \frac{A/L_1}{L_2/L_1} \cong \frac{A}{L_2}, \ldots, \quad A_r = \frac{A_{r-1}}{B_{r-1}} \cong \frac{A/L_{r-1}}{L_r/L_{r-1}} \cong \frac{A}{L_r}, \ldots,$$

de acordo com o teorema da correspondência e

$$L_1 \subseteq L_2 \subseteq \ldots \subseteq L_r \subseteq \ldots$$

é uma cadeia ascendente de submódulos de A. Como estamos trabalhando com Λ-módulos noetherianos, a cadeia acima é estacionária e, portanto, tal condição nos conduz a um módulo quociente indecomponível A_n de A tal que $A_n \in M'_k$. □

<u>LEMA 3.2.4.</u> Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $M = \bigcup_{i=1}^{n} M_i$.

Demonstração - Do lema 3.2.2 existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $M_j = \emptyset$ para $n < j$. Suponhamos que $M \neq \bigcup_{i=1}^{n} M_i$ e seja $A \in M$ tal que $A \notin \bigcup_{i=1}^{n} M_i$. Conforme o lema 3.2.3 existe um módulo quociente indecomponível de A que pertence a M'_n e, portanto, $M'_n \neq \emptyset$, donde $M_{n+1} \neq \emptyset$, uma contradição. □

PROPOSIÇÃO 3.2.1. Se $\{\ell(A) \mid A \in M\}$ é limitado então existe uma função $f: M \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que:

(a) A existência de uma sequência exata

$$\bigoplus_{i=1}^{s} B_i \longrightarrow A \longrightarrow 0,$$

que não cinde, onde $B_1, \ldots, B_s$, $A \in M$, implica

$$f(A) < \max_{1 \le i \le s} f(B_i),$$

(b) Se $f(C) = f(D)$ então $\ell(C) = \ell(D)$,

(c) $\{f(A) \mid A \in M\}$ é limitado.

Demonstração - Do lema 3.2.4. e das observações que precedem o lema 3.2.1. segue que para cada $A \in M$ existe um único índice i, $1 \le i \le n$, tal que $A \in M_i$. Definimos então $f: M \longrightarrow \mathbb{N}$ por $f(A) = i$, onde $A \in M_i$ e $f((0)) = 0$.

Ainda do lema 3.2.4 existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f(A) \le n$ para todo $A \in M$. Logo, a condição (c) está verificada.

Se $f(C) = f(D) = i$, então $C, D \in M_i$ e, de acordo com a definição de M_i, $\ell(C) = \ell(D)$, logo (b) também está verificada.

Resta-nos verificar a condição (a).

Seja

$$(1) \qquad B = \bigoplus_{i=1}^{s} B_i \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

uma sequência exata que não cinde, onde $B_1, \ldots, B_s$, $A \in M$. Seja ainda $k = \max_{1 \le i \le s} f(B_i)$. Vamos mostrar que $f(A) < k$, fazendo indução sobre k.

Para $k=1$ temos que B_i é irredutível para todo $i=1,\dots,s$, e assim B é semisimples. Portanto, se $A \neq (0)$, a sequência (1) cinde contra a hipótese. Assim $A=(0)$ e $f(A)<1$.

Suponhamos que $f(A)<j$, para $j = \max\limits_{1\le i\le s} f(B_i) < k$.

De acordo com o lema 3.1.2, escrevamos $B = B' \oplus B''$, onde B' é normal indecomponível e $B'\backslash B$. Pelo teorema de Krull-Schmidt, reenumerando os índices se for o caso, temos que $B' = \bigoplus\limits_{i=1}^{r} B_i$, $r \le s$.

Como $B'\backslash B$ e $B\backslash A$ temos que $B'\backslash A$ e, portanto, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$(2) \qquad B'^{(m)} \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata. Se a sequência (2) cinde, então A é isomorfo a um somando direto de $B'^{(m)}$. Como A é indecomponível, segue do teorema de Krull-Schmidt que $A \cong B_i$ para algum i, $1 \le i \le r$.

Seja $X = B_1 \oplus \dots \oplus \hat{B}_i \oplus \dots \oplus B_r$, onde o chapéu indica a supressão do i-ésimo somando de B'. Consideremos a sequência exata

$$(3) \qquad B \oplus X \longrightarrow A \oplus X \longrightarrow 0.$$

Do corolário da proposição 3.1.3. segue que a sequência (3) cinde e, de acordo com o lema 3.1.1, a sequência (1) cinde, contra a hipotése.

Consequentemente, sabemos que a sequência $B'^{(m)} \longrightarrow A \longrightarrow 0$ não cinde.

Se $f(B_i) < k$, $i = 1, \ldots, r$, então, da hipótese de indução, $f(A) < k$ e a proposição está demonstrada.

Suponhamos agora que $f(B_i) = k$, $i = 1, \ldots, q$ e $f(B_i) < k$, $i = q+1, \ldots, r$, reordenando os índices se for o caso. Suponhamos também que $f(A) \geq k$.

Então, $A \notin \bigcup_{i=1}^{k-1} M_i$ e, conforme o lema 3.2.3, existe um módulo quociente indecomponível de A, C, tal que

$$C \in M'_{k-1}.$$

Como $B' \backslash A$ e $A \backslash C$ temos que $B' \backslash C$ e, portanto,

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(B', C) \cdot B' = C, \quad \text{ou seja} \quad C = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Hom}_\Lambda(B_i, C) \cdot B_i.$$

Assim, existe uma família de Λ-homomorfismos

$$\psi_{ij} : B_i \longrightarrow C, \quad i = 1, \ldots, r \quad \text{tal que} \quad C = \sum_{i,j} \mathrm{Im}\, \psi_{ij}.$$

Analisemos $\psi_{ij} : B_i \longrightarrow C$, para $i = 1, \ldots, q$.

Ou (I) $\forall\, i, j$, $\psi_{ij}(B_i) \cong \dfrac{B_i}{\mathrm{Ker}\, \psi_{ij}}$, $\mathrm{Ker}\, \psi_{ij} \neq (0)$, i.e., $\psi_{ij}(B_i)$ é um módulo quociente próprio de B_i; ou (II) existem i, j tais que $\psi_{ij}(B_i) \cong B_i$.

Como para $i = 1, \ldots, q$ temos que $B_i \in M_k$ e, como $C \in M'_{k-1}$ segue que $\ell(C) \leq \ell(B_i)$. Portanto, na alternativa (II) existem i, j tais que $B_i \cong \psi_{ij}(B_i) = C$, já que

$$\ell(\psi_{ij}(B_i)) = \ell(B_i) \geq \ell(C) \quad \text{e} \quad \psi_{ij}(B_i) \subseteq C.$$

Estudemos a alternativa (I).

Seja L um somando direto indecomponível de $\psi_{ij}(B_i)$, para algum $i = 1, \ldots, q$ fixado. Como existe um Λ-homomorfismo de B_i sobre L, L é um módulo quociente indecomponível próprio de B_i e, portanto, $L \in \bigcup_{i=1}^{k-1} M_i$. Assim, para todo $i = 1,\dots, q$, e para todo j, os valores de f sobre os somandos diretos dos módulos $\psi_{ij}(B_i)$ são menores ou iguais a $k-1$.

É claro que para $i = q+1,\dots, r$ tem-se que

$$f(B_i) \leq k-1.$$

Consideremos agora o módulo

$$D = [\bigoplus_{i=1;j}^{q} \psi_{ij}(B_i)] \oplus [\bigoplus_{i=q+1}^{r} B_i].$$

Temos que $D \backslash C$ e os valores de f sobre os somandos diretos indecomponíveis de D não excedem a $k-1$.

Consideremos a sequência exata:

$$(4) \qquad D^{(n)} \longrightarrow C \longrightarrow 0.$$

Se (4) cinde, então C é isomorfo a um somando direto de $D^{(n)}$ para algum n e, como C é indecomponível, segue do teorema de Krull-Schmidt que $f(C) \leq k-1$.

Se (4) não cinde, segue da hipótese de indução que $f(C) < k-1$.

Em ambos os casos, entramos em contradição com o fato de que $C \in M'_{k-1}$.

Analisemos agora a alternativa (II).

A sequência

$$(5) \qquad A \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

é exata pois C é um módulo quociente de A. Seja

$$X = B_1 \oplus \dots \oplus \hat{B}_i \oplus \dots \oplus B_r$$

e consideremos a sequência

$$(6) \qquad A \oplus X \longrightarrow C \oplus X \longrightarrow 0 .$$

Do corolário da proposição 3.1.3, segue que a sequência (6) cinde e, portanto, a sequência (5) também cinde. Então, existe $i = 1,\dots,r$ tal que $A \cong C \cong B_i$, já que A é indecomponível.

Consideremos, finalmente, a sequência exata

$$(7) \qquad B \oplus X \longrightarrow A \oplus X \longrightarrow 0 ,$$

com X dado acima. Observando para a sequência (7) o mesmo desenvolvimento dado à sequência (3), concluimos que a sequência $B \longrightarrow A \longrightarrow 0$ cinde, contra a hipótese. Logo, não podemos ter $f(A) \geq k$ e a proposição está demonstrada. $\square$

3.3. Demonstração do Teorema Principal

TEOREMA 3.3.1. Seja Λ uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo K. Se Λ possui um número infinito de representações indecomponíveis, então Λ possui representações indecomponíveis de graus arbitrariamente grandes.

Demonstração - Suponhamos que o conjunto dos graus das representações indecomponíveis de Λ sobre K é limitado, ou, equivalentemente, que o conjunto das dimensões sobre K dos Λ-módulos indecomponíveis é limitado.

Construamos uma função f sobre o conjunto M dos Λ-módulos indecomponíveis que satisfaça as condições da propo sição 3.2.1 . Consideremos para cada índice i o conjunto

$$M_i = \{A \in M \mid f(A) = i\}.$$

De acordo com o teorema 0.1.2, M_1 é finito e, conforme o lema 3.2.4, $M = \bigcup_{i=1}^{n} M_i$ para algum inteiro n. Como por hipótese M é infinito, existe k tal que M_i é finito para $i < k$ e M_k é infinito.

Seja $\bar{M}$ a família dos Λ-módulos, cujos somandos diretos indecomponíveis pertencem a $\bigcup_{i=1}^{k-1} M_i$. Mostremos que se A e B são submódulos de um módulo C e se $A,B \in \bar{M}$ então $D = A + B \in \bar{M}$.

Inicialmente, temos que $A \oplus B \backslash D$ e, portanto, existe $\bar{m}$ tal que

$$A \oplus B^{(\bar{m})} \longrightarrow D \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata de Λ-módulos. Expandindo A,B e D em somas diretas, obtemos sequência exatas do tipo $X \longrightarrow D_i \longrightarrow 0$, onde os somandos diretos indecomponíveis de X pertencem a $\bigcup_{i=1}^{k-1} M_i$ e os D_i são os somandos diretos indecomponíveis de D.

Para os índices i tais que $X \longrightarrow D_i \longrightarrow 0$ cinde, segue do teorema de Krull-Schmidt que $f(D_i) \leq k - 1$. Para aqueles índices tais que $X \longrightarrow D_i \longrightarrow 0$ não cinde, temos, de acordo com a proposição 3.2.1, que $f(D_i) < k - 1$.

Portanto, $D \in \bar{M}$.

Seja agora A um Λ-módulo e seja $\mathcal{A}$ a família dos submódulos de A que pertencem a $\bar{M}$. Então, $U(A) = \sum_{A \in \mathcal{Q}} A$ é um submódulo de A que pertence a $\bar{M}$ e que contém todos os submódulos de A com essa propriedade.

Consideremos a seguinte relação de equivalência em M_k:

A e B são equivalentes se e somente se $U(A) \cong U(B)$.

Observemos o seguinte:

(a) Os módulos de M_k têm o mesmo comprimento, donde $\{\ell(U(A)) \mid A \in M_k\}$ é limitado;

(b) $\bar{M}$ contém um número finito de Λ-módulos indecomponíveis, já que $\bigcup_{i=1}^{k-1} M_i$ é finito.

Então, existe apenas um número finito de classes de equivalência de Λ-módulos em M_k e, por conseguinte, existe uma classe C que contém infinitos Λ-módulos não isomorfos de M_k.

Sejam $A_1, \ldots, A_m$ Λ-módulos não isomorfos de C. Seja $A = \bigoplus_{i=1}^{m} A_i$ e consideremos o submódulo

$$U = \{(u_1, \ldots, u_m) \in \bigoplus_{i=1}^{m} U(A_i) \mid u_i = u_j\}.$$

Seja ainda $V = \frac{A}{U}$.

Observemos que $U \cong U(A_i)$, $i = 1, \ldots, m$.

Queremos mostrar que existe um inteiro m_0 tal que V é indecomponível para $m > m_0$. Com isso, teremos construído um Λ-módulo indecomponível de dimensão arbitrariamente grande, contrariando a nossa suposição inicial.

Suponhamos que V é decomponível e escrevamos $V = \bigoplus_{j=1}^{s} V_j$, onde os V_j são indecomponíveis.

Como $A \backslash V$ e $V \backslash V_j$, $1 \leq j \leq s$, temos que as sequências

$$A^{(\ell_j)} \longrightarrow V_j \longrightarrow 0$$

são exatas para $j = 1, \dots, s$.

Analisemos as situações possiveis:

(I) Se $A^{(\ell_j)} \longrightarrow V_j \longrightarrow 0$ não cinde, qualquer que seja $j = 1, \dots, s$, segue da proposição 3.2.1 que

$$f(V_j) < k \quad \text{para} \quad j = 1, \dots, s.$$

(II) Se existe algum $j = 1, \dots, s$ tal que uma das sequências $A^{(\ell_j)} \longrightarrow V_j \longrightarrow 0$ cinde, segue do teorema de Krull-Schmidt que para esse j existe algum i, $1 \leq i \leq m$, tal que $V_j \cong A_i$.

Consideremos a situação (I) e tomemos a sequência exata

$$0 \longrightarrow U \longrightarrow A \longrightarrow V \longrightarrow 0.$$

Conforme a proposição 0.6.3, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que se

$$\ell(A) > m_0, \quad \text{então} \quad A = \bar{Y} \oplus V_{j_0}, \quad \text{para algum} \quad j_0 = 1, \dots, s.$$

Do teorema de Krull-Schmidt, obtemos que $V_{j_0} \cong A_i$, para algum $i = 1, \dots, m$, contrário ao fato de que

$$f(V_{j_0}) < k = f(A_i), \quad i = 1, \dots, m.$$

Logo, existe m_0 tal que, para todo $m > m_0$, $V_j \cong A_i$, para algum $i = 1, \dots, m$, de acordo com a situação (II) acima.

Escrevamos $V = A_1 \oplus Y$ e consideremos $\phi : A \longrightarrow V$, o epimorfismo canônico; $\psi : V \longrightarrow A_1$, a projeção sobre A_1; $\alpha = \psi \circ \phi : A \longrightarrow A_1$ e α_i a restrição de α a A_1, $i = 1, \ldots, m$.

Mostraremos que α_1 é um isomorfismo.

Para cada $i = 2, \ldots, m$ temos que $\operatorname{Im} \alpha = \dfrac{A_i}{\operatorname{Ker} \alpha_i}$.

Assim,

$$\ell(A_1) = \ell\left(\frac{A_1}{\operatorname{Im} \alpha_i}\right) + \ell(\operatorname{Im} \alpha_i) = \ell\left(\frac{A_1}{\operatorname{Im} \alpha_i}\right) + \ell\left(\frac{A_i}{\operatorname{Ker} \alpha_i}\right).$$

Se $\operatorname{Ker} \alpha_i = (0)$ para algum $i \neq 1$, temos que $\ell\left(\dfrac{A_1}{\operatorname{Im} \alpha_i}\right) = 0$, pois $\ell(A_1) = \ell(A_i)$ e assim $A_1 = \operatorname{Im} \alpha_i \cong A_i$, contrário a escolha dos A_i. Assim $\operatorname{Im} \alpha_i$ é um módulo quociente próprio de A_i, $i \neq 1$.

Suponhamos que α_1 não é um isomorfismo. Então, para todo $i = 1, \ldots, m$, $\operatorname{Im} \alpha_i$ é um módulo quociente próprio de A_i. Logo, os somandos diretos indecomponíveis de $\operatorname{Im} \alpha_i$ pertencem a $\bigcup_{t=1}^{k=1} M_t$, já que $A_i \in M_k$, $i = 1, \ldots, m$.

Como $A_1 = \operatorname{Im} \alpha = \sum_{i=1}^{m} \operatorname{Im} \alpha_i$, temos que $L = \bigoplus_{i=1}^{m} \operatorname{Im} \alpha_i$ divide A_1 e, portanto, existe um inteiro n tal que

$$L^{(n)} \longrightarrow A_1 \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata.

Se a sequência acima não cinde, segue da proposição 3.2.1 que $k = f(A_1) < \text{máx } f(S) \leq k - 1$, onde os S são os somandos diretos indecomponíveis de $\operatorname{Im} \alpha_i$, $i = 1, \ldots, m$. Já que isto não pode ocorrer, a sequência dada cinde, e pelo teorema de Krull-Schmidt, existe um somando direto indecomponível de $\operatorname{Im}\alpha_i$, isomorfo a A_1, para algum i, $1 \leq i \leq m$. Como isso não pode ocorrer, pois $f(S) < f(A_1)$ para qualquer somando direto indecomponível S de $\operatorname{Im}\alpha_i$, $i = 1, \ldots, m$ e, como os A_i foram tomados não isomorfos entre si, concluimos que $A_1 = \operatorname{Im}\alpha_1$ e, portanto, α_1 é um isomorfismo.

Sejam, agora, $T = \bigoplus_{i=2}^{m} A_i$ e $\beta : T \longrightarrow A_1$, dada por $\beta = \alpha_2 + \ldots + \alpha_m$. Consideremos o submódulo

$$T' = \{t - \alpha_1^{-1} \circ \beta(t) \mid t \in T\} \quad \text{de} \quad A.$$

Observemos inicialmente que se $x \in T'$, então

$$x = (-\alpha_1^{-1} \circ \beta(t_2, \ldots, t_m);\ t_2; \ldots;\ t_m),$$

onde $(t_2, \ldots, t_m) \in T$.

Mostremos que $U \subseteq T'$.

Seja $u = (u_1, u_2, \ldots, u_m) \in U$. Então,

$$\beta(u_2, \ldots, u_m) = \alpha(0, u_2, \ldots, u_m) =$$

$$= \alpha(u_1, u_2, \ldots, u_m) - \alpha(u_1, 0, \ldots, 0) = -\alpha_1(u_1)$$

e, consequentemente, $-\alpha_1^{-1} \circ \beta(u_2, \ldots, u_m) = u_1$. Logo,

$$u = (-\alpha_1^{-1} \circ \beta(u_2, \ldots, u_m);\ u_2; \ldots;\ u_m) \in T'.$$

Sabemos que $\operatorname{Im}(-\alpha_1^{-1} \circ \beta) = \sum_{i=2}^{m} \operatorname{Im}(-\alpha_1^{-1} \circ \alpha_i)$ e que, para $i = 2, \ldots, m$, o módulo $\operatorname{Im}(-\alpha_1^{-1} \circ \alpha_i)$ é um quociente próprio de A_i. Assim, os somandos diretos indecomponíveis de

$$\mathrm{Im}\ (-\alpha_1^{-1} \circ \alpha_i), \quad i = 2, \ldots, m$$

são módulos quocientes indecomponíveis próprios de A_i e, portanto, pertencem a $\bigcup_{t=1}^{k-1} M_t$. Logo, $\mathrm{Im}\ (-\alpha_1^{-1} \circ \beta) \in \bar{M}$.

Pela construção de $U(A_1)$ e como $\mathrm{Im}\ (-\alpha_1^{-1} \circ \beta) \subseteq A_1$ temos que $\mathrm{Im}\ (-\alpha_1^{-1} \circ \beta) \subseteq U(A_1)$.

Seja $U' = \{(u_2, \ldots, u_m) | u_i \in U(A_1),\ u_i = u_j\}$.

Se $u_1 \in U(A_1)$, tomando $(u_2, \ldots, u_m) \in U' \subseteq T$, com $u_i = u_1$, $i = 2, \ldots, m$, temos que $-\alpha_1^{-1}\beta(u_2, \ldots, u_m) = u_1$. Portanto, $\mathrm{Im}(-\alpha_1^{-1}\beta) = U(A_1)$ e, conforme o que vimos acima,

$$U(A_1) = -\alpha_1^{-1}\beta(U').$$

Seja ρ o isomorfismo natural entre $U(A_1)$ e U e definamos $\delta: T \longrightarrow U$ da forma

$$\delta(t_2, \ldots, t_m) = \rho \circ -\alpha_1^{-1} \circ \beta(t_2, \ldots, t_m),$$

para todo $(t_2, \ldots, t_m) \in T$.

Então, $\delta(T) = U$ e, além disso, $\delta(U') = U$.

Consideremos agora $\gamma: U \longrightarrow T$, definida por

$$\gamma(u_1, \ldots, u_m) = (u_2, \ldots, u_m).$$

Então, γ é um isomorfismo de U sobre U'.

Consideremos, finalmente, a sequência exata

$$T \underset{\gamma}{\overset{\delta}{\rightleftarrows}} U \longrightarrow 0.$$

É claro que $\delta \circ \gamma = 1_U$ e assim a sequência acima cinde, i.e, $T \cong U \oplus Z$. Pelo teorema de Krull-Schmidt, algum somando direto de U é isomorfo a algum A_i, $i = 2,\ldots,m$, o que contradiz o fato de U pertencer a $\bar{M}$, já que

$$A_i \in M_k, \quad \text{para} \quad i = 2,\ldots,m.$$

Mostramos, portanto, que existe um inteiro m_0 tal que V é indecomponível para $m > m_0$ e o teorema está demonstrado. $\square$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bibliografia Consultada:

[1] CURTIS, C.W., JANS, J.P. - *On algebras with a finite number of indecomposable modules*. Trans. Amer. Math. Soc., 114, 1 (1965), 122 - 132.

[2] CURTIS, C.W., REINER, I. - *Representation theory of finite groups and associative algebras*. Interscience, New York, 1962.

[3] DIEUDONNÉ, J. - *Sur la réduction canonique des couples de matrices*. Bull. Soc. Math. France, 74 (1946), 130 - 146.

[4] HELLER, A., REINER, I. - *Indecomposable representations*. Ill. J. Math. 5, 2 (1961), 314 - 323.

[5] HIGMAN, D.G. - *Indecomposable representations at characteristic p*. Duke Math. J. 21 (1954), 377 - 381.

[6] HOFFMANN, K., KUNZE, R. - *Álgebra Linear*. Polígono, São Paulo, 1971.

[7] JACOBSON, N. - *Structure of rings*. A.M.S., Providence, 1956.

[8] JANS, J.P. - *On the indecomposable representations of algebras*. Ann. of Math. 66, 3 (1957), 418 - 429.

[9] NAKAYAMA, T. - *On Frobeniusean algebras II*. Ann. of Math. 42 (1941), 1 - 21.

[10] POLCINO MILIES, F. C. - *Anéis e Módulos*. IME-USP, São Paulo, 1972.

[11] ROITER, A. V. - *Divisibilidade na categoria de representações sobre um anel de Dedekind completo local*. [em russo], Ukr. Matem. Z. 17, 4 (1965), 124 - 129.

[12] ROITER, A. V. - *Unbounded dimensionality of indecomposable representations of an algebra with an infinite number of indecomposable representations*. Math. USSR Izv. 2, 6 (1968), 1223 - 1230.

[13] ROTMAN, J. J. - *Notes on homological algebra*. Van Nostrand, New York, 1970.

[14] YOSHII, T. - *Note on algebras of bounded representation type*. Proc. Japan Acad. 32, 7 (1956), 441 - 445.

[15] YOSHII, T. - *Note on algebras of strongly unbounded representation type*. Proc. Japan Acad. 32, 6 (1956), 383 - 387.

[16] ZARISKI, O., SAMUEL, P. - *Commutative algebra*. Van Nostrand, Princeton, 1958.

Bibliografia Complementar:

[17] AUSLANDER, M. - *Representation theory of Artin algebras I*. Comm. Algebra, 1, 3 (1974), 177 - 268.

[18] AUSLANDER, M. - *Representation theory of Artin algebras II.* Comm. Algebra, 1, 4 (1974), 269 - 310.

[19] BRAUER, R. - *On the indecomposable representations of algebras.* [abstract], Bull. Amer. Math. Soc. 47, 7 (1941), 684.

[20] KASCH, F., KNESER, M., KUPISCH, H. - *Unzerlegbare modulare Darstellungen endlicher Gruppen mit Zyklischer p-Sylow Gruppe.* Arch. Math. 8 (1957), 320 - 321.

[21] KRUGLJAK, S.A. - *Representations of algebras for which the square of the radical equals zero.* In: Investigations on the theory of representations. Faddeev, D.K. ed. Izdat Nauka, Leningrad, 1972. Math Rev. 48 # 5763.

[22] NAKAYAMA, T. - *Note on uni-serial and generalized uni-serial rings.* Proc. Imp. Acad. Jap. 16 (1940), 285 - 289.

[23] NAZAROVA, L.A. - *Representation of a tetrad.* Math. USSR Izv. 1, 6 (1967), 1305 - 1321.

[24] NAZAROVA, L.A., ROITER, A.V. - *Finitely generated modules over a dyad of two local Dedekind rings, and finite groups with an abelian normal divisor of index p.* Math. USSR Izv. 3 (1969), 65 - 86.

[25] NAZAROVA, L.A., ROITER, A.V. - *Matrix questions and the Brauer-Thrall conjectures on algebras with an infinite number of indecomposable representations.* In: Representation theory of finite groups and related topics. Reiner, I., ed. A.M.S., Providence, 1971.

[26] SIMSON, D. - *On pure semi-simple Grothendieck categories.* [a aparecer].

[27] SIMSON, D. - *Pure semi-simple categories and rings of finite representation type.* [a aparecer].

[28] THRALL, R.M. - *On Ahdir algebras.* [abstract], Bull. Amer. Math. Soc. 53 (1947), 49.