Σ_1 EM VARIEDADES COM BORDO

MARCO ANTONIO TEIXEIRA

TESE APRESENTADA AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM
MATEMÁTICA

ORIENTADOR: Prof. Dr. ANGELO BARONE NETTO

Durante a elaboração deste trabalho, o autor recebeu apoio financeiro da FINEP.

NOVEMBRO DE 1974
SÃO PAULO

Aos meus pais

ABSTRACT

Σ_1 IN MANIFOLDS WITH BOUNDARY

Let M be a C^∞ two dimensional orientable compact manifold, with boundary $\partial M \neq \phi$. χ^r will denote the space of the C^r vector fields on M, with the C^r topology.

We are concerned with studying, in some generic context in $\chi_1^r = \chi^r - \Sigma_o$, certain types of vector fieds which are not structurally stable in χ^r. Σ_o is the set of structurally stable vector fields of χ^r.

Our main purpose, is to prove the existence of a submanifold of χ^r, similar to the one encountered by J. Soto-mayor (|22|).

The main result is the following:

" For r>3, there exists a C^{r-1} submanifold Σ_1, having codimension one wich is immersed in χ^r, and satisfies:

a) Σ_1 is dense in χ_1^r (both with the induced topology);

b) For any X in Σ_1, there exists a neighborhood B_1 in the intrinsic topology of Σ_1, such that any Y in B_1 is topologically equivalent to X."

Surprisingly, Σ_1 is not the largest set in χ_1^r that satisfies a) and b).

The part $\tilde{\Sigma}_1$ of Σ_1, imbedded in χ^r, coincides with the elements of χ^r wich are first order structurally stable. Furthermore, it is proved that $\tilde{\Sigma}_1$ is an open subset of χ_1^r.

Let Φ^r be the space of the C^1 functions $\xi: |a,b| \to \Phi^r$, with the C^1 topology.

Definition- We say ξ_1 and ξ_2 of Φ^r are conjugate if there is a homeomorphism $h: [a,b| \to [a,b]$ and a continous map $H: [a,b] \to$ Homeo.(M), such that H(i) is a conjugation between $\xi_1(i)$ and $\xi_2(h(i))$. (Homeo.(M) denotes the group of homeomorphisms of M). With this concept of conjugacy, the structural stability in Φ^r, is defined in an obvious way.

Let us denote by $\tilde{\Gamma}^r$, the collection of the elements $\xi \in \Phi^r$, such that:

1) $\xi(I) \subset \Sigma_o \cup \tilde{\Sigma}_1$;

2) ξ is transversal to $\tilde{\Sigma}_1$;

3) $\xi(a)$ and $\xi(b)$ are in Σ_o.

We have obtained the following result:

" Any $\xi \varepsilon \tilde{\Gamma}^r$ is structurally stable."

We also give some illustrations of bifurcation when this happens by the contact of the field with ∂M.

We end this work presenting some open problems.

AGRADECIMENTOS

Devo externar meus agradecimentos a muitos colegas e professores que me têm incentivado. Cito em especial, os professores

Dr. Ângelo Barone Netto - seu apoio, paciência e dedicação, teve influência decisiva na realização deste trabalho;

Dr. Jorge Sotomayor - com quem muito conversei e aprendi, durante todo o trabalho. Sua participação na feitura deste trabalho foi muito grande;

Dr. Waldyr Muniz Oliva - que me iniciou no estudo de Sistemas Dinâmicos; além disso, colocou o IME à minha disposição, para desenvolver as minhas pesquisas;

Dr. Gilberto Francisco Loibel - a quem devo o início de minha carreira;

Dr. Ubyratan D'Ambrosio - que deu condições para que eu mantivesse permanente contacto com o IME-USP e IMPA.

A estes, uma palavra de gratidão.

Marco Antonio Teixeira

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

Seja M uma variedade C^∞, compacta, bidimensional, orientável e com bordo $\partial M \neq \emptyset$. Denotaremos por χ^r, o espaço dos campos vetoriais em M de classe C^r $(0<r<\infty)$, com a topologia C^r.

A estabilidade estrutural em χ^r, foi estudada por M.C. Peixoto e M.M. Peixoto (|16| e |17|). Para $r>1$, o sub-conjunto Σ_o de χ^r, constituido dos elementos estruturalmente estáveis, é aberto e denso em χ^r.

Nós estamos interessados em estudar certos tipos de campos vetoriais não estruturalmente estáveis em χ^r, sem re-jeitar um contexto "genérico" em $\chi_1^r = \chi^r - \Sigma_o$. Nosso objetivo principal é determinar uma subvariedade de χ^r, similar aque-la encontrada por J. Sotomayor em |22|.

Enunciaremos o nosso resultado central:

" Seja $r>3$. Existe uma subvariedade Σ_1 de classe C^{r-1} e codimensão um, imersa em χ^r, satisfazendo as seguin-tes propriedades:

a) Σ_1 está contido densamente em χ_1^r, mu-nido da topologia induzida;

b) Para todo $X \varepsilon \Sigma_1$, existe uma vizinhança B_1 na topologia intrínseca de Σ_1, tal que, todo $Y \varepsilon B_1$ é topo-logicamente equivalente a X."

Salientemos que Σ_1 não é o maior subconjunto de χ_1^r, que satisfaz a) e b); isto é um resultado inesperado.

Na tese foram

Nesta dissertação, também são estudados os elementos de χ^r, estruturalmente estáveis de primeira ordem. No final foi ~~dela, é~~ dada uma aplicação à Teoria da Bifurcação.

Passemos a uma descrição sumária dos vários capítulos.

No Capítulo 0, são dados os principais conceitos e notações usados no decorrer do texto.

O Capítulo 1 é desenvolvido principalmente, para a construção de Σ_1. Ele divide-se em tres partes. A primeira consiste em uma adaptação dos elementos críticos quase-genéricos definidos por J. Sotomayor (|22|) à variedades com bordo. Na segunda, são estudados os campos não genéricos, cuja não generecidade é devida ao contacto do campo com o bordo de M; especial atenção deve ser dada ao §8. Finalmente, na última parte, é construida efetivamente Σ_1 e provada a parte b) do resultado já enunciado. Convem ressaltar aqui que, no final de certos parágrafos deste capítulo, é feita uma preparação para o estudo dos campos estruturalmente estáveis de primeira ordem.

No Capítulo 2, dá-se uma demonstração natural do Teorema da Densidade (parte a) do resultado citado atrás), aproximando campos de χ_1^r por elementos de Σ_1.

No Capítulo 3, desenvolvemos a Teoria dos Campos Estruturalmente Estáveis de Primeira Ordem; também é dada uma condição suficiente para família a um parâmetro de campos ve--toriais ser estruturalmente estável e ainda são apresentadas algumas ilustrações de bifurcação, quando esta se dever ao contacto do campo com ∂M.

Finalmente, no Capítulo 4, são apresentados alguns problemas em aberto.

Cada elemento de χ^r foi obtido aqui, como germe de um campo em N de quem M é subvariedade própria ~~(vide capítulo 0)~~; observemos entretanto que, isto é equivalente para os nossos propósitos, a considerar restrições a M de campos de $\tilde{\chi}^r = \chi^r(N)$.

A ~~Para~~ a leitura do ~~deste~~ trabalho, supõe~~-se~~ uma certa familiaridade com Sistemas Dinâmicos, em especial com os con--ceitos apresentados em |16| e |22|. Foram usados ~~Usamos~~ livremente os re--sultados de M.C. Peixoto, M.M. Peixoto e J. Sotomayor.

As referências bibliográficas são dadas em barras verticais.

CAPÍTULO 0

Preliminares

Nesta secção, introduziremos algumas definições e notações usadas no texto.

Consideraremos aqui Sistemas Dinâmicos gerados por campos vetoriais, definidos em variedades com bordo.

Seja M uma subvariedade C^∞, bidimensional, compacta, orientável, com bordo $\partial M \neq \phi$, mergulhada em uma variedade N, bi-dimensional, C^∞ e sem bordo.

0.1- Definições Preliminares

Dois campos vetoriais $\tilde{X}_1$ e $\tilde{X}_2$ sôbre N, são chamados ser germe-equivalentes sôbre M, se eles coincidem sôbre uma vi-zinhança de M em N. Um campo vetorial tangente sôbre M, é por definição uma classe de germe-equivalência (sôbre M) de campos vetoriais definidos sôbre N. Ele é dito ser de classe C^r, $0 \leq r < \infty$, se existir um representante $\tilde{X}$ de classe C^r sôbre N.

Seja $\tilde{\phi}$ o fluxo de um representante $\tilde{X}$ de X; $\tilde{\phi}$ é de-finido sôbre um conjunto $D(\tilde{X}) = \{(x,t) \in N \times R,\ t \in \tilde{I}(x)$, onde $\tilde{I}(x)$ é um intervalo aberto com extremos $\tilde{\alpha}(x)$, $\tilde{\omega}(x)$ (eventualmente infinitos). O fluxo de X, ϕ, é definido por $\phi(x,t)$ para $x \in M$ e $t \in I(x)$, onde $I(x)$ é o intervalo maximal contendo 0 ($\phi(x,0)=x$), para o qual $\tilde{\phi}(x,t) \in M$ quando $t \in I(x)$. Denotaremos por $\alpha(x)$ (resp. $\omega(x)$) o extremo inferior (superior) deste intervalo (eventual-

-mente $\alpha(x)=\omega(x)$); pode ser que um, ambos ou nenhum dos extre-mos de $I(x)$ são, infinito, finito ou zero. Evidentemente ϕ e seu domínio $D(X)$ não dependem do particular representante $\tilde{X}$. Mais ainda, quaisquer dois representantes de X, definem fluxos sôbre N, que coincidem em uma vizinhança de $D(X)$. Se denotar-mos por $\tilde{\phi}$ o germe sôbre $D(X)$, então $\phi=\tilde{\phi}_{|D(X)}$.

A <u>órbita</u> $\gamma(x)$ de X, passando por $x\varepsilon M$, é por defini-ção a imagem de $I(x)$ pela curva integral $\phi_X(x,\ ):t\to\phi_X(x,t)$. As órbitas são orientadas pela orientação induzida por esta aplicação, através da orientação positiva de $I(x)$; uma órbita de X, com nenhuma parametrização distinguida, é uma <u>trajetória</u> de X. Definições equivalentes podem ser dadas para órbitas-ger-me $\tilde{\gamma}(x)$, trajetórias-germe usando curvas integrais-germe $\tilde{\phi}_X(x):(R,I(x))\to(N,\gamma(x))$.

0.2- <u>Definição</u>- Dois campos X e Y sôbre M são <u>con-jugados</u> (ou <u>topologicamente equivalentes</u>), se existir um ho-meomorfismo $h:M\to M$, que leva trajetórias de X nas de Y.

Denotaremos por $\chi^r=\chi^r(M)$, o espaço dos campos de classe C^r definidos sôbre M, munido da topologia C^r |22|. De-notaremos por $\tilde{\chi}^r=\chi^r(N)$, o espaço equivalente para os campos sôbre N. χ^r é uma variedade de Banach de classe C^∞ |24|.

0.3- <u>Definição</u>- Um campo $X\varepsilon\chi^r$ é estruturalmente es-tável em χ^r, se existir uma vizinhança B de X em χ^r, tal que qualquer $Y\varepsilon B$, conjuga com X.

O conjunto dos campos estruturalmente estáveis em χ^r será denotado por Σ_o. Em |16|, |17|, mostrou-se que Σ_o $(r>1)$ é aberto e denso em χ^r, e coincide com a coleção dos campos $X\varepsilon\chi^r$ que satisfazem as seguientes condições:

Ω_1- Todos os pontos singulares de X são hiperbólicos;

Ω_2- Todas as trajetórias periódicas de X são hiperbólicas.

Ω_3- Não existe conexão de selas;

Ω_4- X não possue trajetórias recurrentes não triviais.

B_1- Todos os pontos singulares de X, estão no interior de M;

B_2- Todas as trajetórias periódicas de X, estão no interior de M;

B_3- Uma trajetória de X tangencia ∂M, no máximo uma vez;

B_4- Nenhuma separatriz de sela de X tangencia ∂M;

B_5- Se uma trajetória de X tangencia ∂M em um ponto, então neste ponto o contacto entre as duas curvas é genérico;

B_6- Existe somente um número finito de pontos de tangência de X com ∂M.

As definições de ponto singular hiperbólico, trajetória periódica hiperbólica, conexão de selas e contacto genérico entre curvas serão dadas posteriormente.

Em |23|, está provado que as condições B_1, B_2, B_3, B_4 e B_5, implicam em B_6.

O complementar de Σ_o em χ^r será denotado por χ_1^r.

0.4- Trajetórias Periódicas

Desde que a aplicação valorização $(\tilde{X},p) \to \tilde{X}(p)$ é de classe C^r sôbre $\tilde{\chi}^r \times N$ |25|, escolhendo $\tilde{X}$ como parâmetro, segue que $\tilde{\phi}: \tilde{\chi}^r \times N \times R \to N$ definida por $(\tilde{X},p,t) \to \tilde{\phi}_{\tilde{X}}(p,t)$ é de classe C^r.

Transformação de Poincaré- Sejam $X \varepsilon \chi^r$, $\gamma_X(p)$ uma trajetória periódica de X passando por $p \varepsilon M$ e $\tilde{X} \varepsilon \tilde{\chi}^r$, um representante de X. Se $\tilde{\pi}$ é a Transformação de Poincaré associada a um arco U, transversal a $\tilde{X}$ em p $(p \varepsilon M)$ e a $\gamma_X(p)$, então $\gamma_X(p)$ é chamada de genérica se $\tilde{\pi}'_{\tilde{X}}(p) \neq 1$; se $\tilde{\pi}'_{\tilde{X}}(p) = 1$ e $\tilde{\pi}''_{\tilde{X}}(p) \neq 0$ então $\gamma_X(p)$ é uma trajetória periódica quase-genérica. É evidente que as definições acima, não dependem nem de U, nem de $p \varepsilon \gamma_X$ e nem do particular representante $\tilde{X}$ de X (maiores detalhes poderão ser vistos em |22,p.8|).

0.5- Pontos Singulares

Sejam X e $\tilde{X}$ respectivamente, um campo em χ^r e seu representante em $\tilde{\chi}^r$. Se $p \varepsilon M$ e $X(p)=0$, então p é chamado de um ponto crítico ou ponto singular de X; p é simples, genérico ou hiperbólico de X se p é um ponto crítico simples, genérico ou hiperbólico de $\tilde{X}$, respectivamente. Definições análogas são feitas para sela, nó, foco, sela-nó, foco composto e além disso, elas não dependem do particular $\tilde{X}$ escolhido. Maiores detalhes poderão ser encontrados em |22,p.15 e 24|.

Denotaremos por $\Delta(X,p)$ e $\sigma(X,p)$ o determinante e o traço de DX_p, respectivamente.

0.6- Conexão de Selas

Uma conexão de selas de X, é uma trajetória γ_X, cujos α- e ω-limites são selas, ou selas-nó e ela não está contida no interior da variedade bidimensional invariante da sela-nó. Uma conexão de selas é quase-genérica se ela conecta duas selas distintas ou se autoconecta uma sela p e $\sigma(X,p)\neq 0$. Maiores detalhes poderão ser vistos em |22,p.18 e 26|.

Em geral, no texto quando citarmos |16|, estamos nos referindo salvo em menção contrária, aos lemas contidos nas páginas 142 a 149.

0.7.1- Definição- Um subconjunto S de uma variedade de Banach, T, de classe C^∞ (|15|), é uma subvariedade mergulhada de Banach de classe C^s e codimensão k de T, se qualquer $p \in S$ tem uma vizinhança B, onde uma função de classe C^s, $f:B\to R^k$ é definida e satisfaz as condições: a) $Df_p:T_p\to R^k$ (a derivada de f em p) é sôbre e b) $f^{-1}(0)=B\cap S$.

0.7.2- Definição- Se existir uma sequência S_i, i=1, 2,..,n,... de subvariedades mergulhadas de Banach de classe C^s e codimensão k de T, satisfazendo $S_i\subset S_{i+1}$ e $S=\bigcup_i S_i$, então S é uma subvariedade imersa de Banach de classe C^s e codimensão k de T.

0.8- Observações e Notações

a- Vamos impor sôbre N uma métrica Riemanniana de classe suficientemente grande.

b- Se C é uma curva em N e $p,q\varepsilon C$, então $(\widehat{pq})_C$ denotará o arco de C ligando p a q.

c- Para facilitar futuros cálculos, é conveniente obser--var que os seguintes fatos independem de qualquer sistema de coordenadas locais sôbre M ou N: ponto crítico hiperbólico, ponto crítico quase-genérico, trajetória periódica genérica (ou hiperbólica), trajetória periódica quase-genérica e or--dem de contacto entre duas curva na variedade.

d- O conjunto limite positivo de uma órbita $\gamma_X(p)$ de X é o conjunto dos pontos de M, que são pontos limites de sequên--cia da forma $\phi(p,t_n)$ com t_n tendendo a $\omega(p)$; denotaremos es--te conjunto por $L^+(p)$ e definição análoga pode ser dada para o conjunto negativo $L^-(p)$. Estas definições não dependem do ponto $q\varepsilon\gamma_X(p)$. Se $\omega(p)<+\infty$ $(\alpha(p)>-\infty)$, então $L^+(p)$ $(L^-(p))$ é um único ponto $\phi(p,\omega(p))$ $(\phi(p,\alpha(p)))$ e está em ∂M.

e- As seguintes notações serão utilizadas no decorrer do texto: $M-F$ é o conjunto dos pontos $q\varepsilon M$, tais que $q\not\varepsilon F$; ii) $int(M)$ é o interior de M; iii) (F,p,X) é um fluxo tubular em torno do ponto p, em relação a X; iv) $Ad(A)$ é o fecho de A; v) $u \wedge v$ significará o produto exterior de u por v; vi) $|\ |^r$ é a métrica que torna χ^r, um espaço de Banach.

CAPÍTULO 1

Parte 1- Aqui serão estudados os elementos quase-genéricos de um campo, pertencentes ao interior de M; basicamente as demonstrações de 1.1, 2.1 e 3.1, são devidas a J. Sotomayor e se encontram em |22|. Salvo menção contrária, cada elemento de qualquer subvariedade de χ^r, construida neste capítulo, não possue trajetória recurrente não trivial.

§1

1.1- Proposição- Denotemos por Q_2, o conjunto dos campos $X\varepsilon\chi^r$, $r>2$, tais que: 1) X tem uma trajetória periódica quase-genérica, como única trajetória periódica não genérica; 2) X satisfaz as condições Ω_2, Ω_3, B_1, B_2, B_3; B_4, B_5 e B_6. Então: a) Q_2 é uma subvariedade de Banach, de classe C^{r-1} e codimensão um, imersa em χ^r; b) Qualquer $X\varepsilon Q_2$ tem uma vizinhança B em Q_2, tal que qualquer $Y\varepsilon B$ conjuga com X.

A prova de 1.1 encontra-se em |22|, bastando considerar a vizinhança F de γ_X dada no 2.4 (contida na p.9 da mesma referência) inteiramente contida no interior de M.

É conveniente enunciar o seguinte resultado, cuja demonstração encontra-se em |22, p.11|.

1.2- Lema- Chamemos de $Q_2(n)$ o conjunto dos $X\varepsilon Q_2$, tais que sua trajetória periódica quase-genérica γ_X, tem período $\tau(X)<n$. Então $Q_2(n)$ é uma subvariedade de Banach de classe C^{r-1} e codimensão um de χ^r e satisfaz a condição b) de 1.1, substituindo Q_2 por $Q_2(n)$.

1.3- <u>Observação</u>- Chamemos de $\tilde{Q}_2$ o subconjunto de Q_2 de campos X, que satisfazem: a) Não existe $q\varepsilon M-\gamma_X$, tal que $L^+(q)=L^-(q)=\gamma_X$; b) Não existem selas s_i de X em M, i=1,2, tais que $L^+(W^u(s_1))=L^-(W^s(s_2))=\gamma_X$, onde W^s (resp. W^u) é a subvariedade estável (instável) associada ao ponto crítico; c) Associado a X não existe par (s,q), onde s é uma sela de X, $q\varepsilon\partial M$ e X(q) é um vetor tangente a ∂M neste ponto, tais que: $L^+(q)=L^-(W^s(s))=\gamma_X$; d) Não existem $p_i\varepsilon\partial M$, i=1,2, tais que $X(p_i)$ é um vetor tangente a ∂M em p_i, com $L^+(p_1)=L^-(p_2)=\gamma_X$ (não está excluido o caso $p_1=p_2$).

1.4- <u>Proposição</u>- A proposição 1.1 permanece válida para $\tilde{Q}_2$, substituindo imersa por mergulhada. Mais ainda, $\tilde{Q}_2$ é aberto em χ_1^r.

A demonstração de 1.4 é similar aquela feita em |22| e iremos fazer alguns comentários acerca de $\tilde{Q}_2$:

i) Se γ_X é α- e ω-limite de separatrizes de sela, pode ser mostrado que existe Y, arbitrariamente próximo de X, que tem uma conexão de selas, de comprimento arbitrariamente grande,

i) Se existir uma trajetória η de X, que tem γ_X como α- e ω-limite, pode ser mostrado que existe Y arbitrariamente próximo de X, que tem uma trajetória periódica não genérica encontrando F e de comprimento arbitrariamente grande,

iii) Se existir uma trajetória η_1 de X que tem γ_X

como α-limite e uma separatriz de sela η_2 de X que tem γ_X como ω-limite, pode ser mostrado que existe Y arbitrariamente próximo de X, que tem uma separatriz de sela encontrando F e tangencia ∂M; além disso seu comprimento é arbitrariamente grande,

iiii) Se existirem duas trajetórias distintas se X, que tangenciam ∂M e os seus α e ω-limite coincidirem ambas com a trajetória quase-genérica γ_X então existe Y arbitrariamente próximo de X, que tem uma trajetória que tangencia ∂M em dois pontos (distintos) e de comprimento arbitrariamente grande.

§2

2.1- Proposição- Denotemos por Q_1 a coleção de campos $X\varepsilon\chi^r$, $r\geqslant 2$, tais que: 1) X possue um único ponto crítico quase-genérico como único ponto crítico não genérico; 2) X satisfaz Ω_2, Ω_3, B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 e B_6.Então: a) Q_1 é uma subvariedade mergulhada de Banach de classe C^{r-1} e codimensão um de χ^r; b) Qualquer $X\varepsilon Q_1$ tem uma vizinhança B em Q_1, tal que qualquer $Y\varepsilon B$ conjuga com X; c) Q_1 é aberto em χ_1^r.

A demonstração de 2.1 está em |22,p.15 a 26|.

§3

3.1- Proposição- Seja Q_3 o conjunto dos campos $X\varepsilon\chi^r$, $r\geqslant 2$, tais que: 1) X tem uma conexão de selas que é quase-genérica; 2) X satisfaz Ω_1, Ω_2, B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 e B_6.

Então: a) Q_3 é uma subvariedade de Banach de classe C^{r-1} e codimensão um, imersa em χ^r; b) Qualquer $X\varepsilon Q_3$ tem uma vizinhança B em Q_3, tal que qualquer $Y\varepsilon B$ conjuga com X.

A demonstração de 3.1 está em |22,p.26 a 34|.

3.2- <u>Observação</u>- Notemos que em 1.1, 2.1,e 3.1, a trajetória periódica quase-genérica, o ponto crítico quase-genérico e a conexão de selas quase-genérica, respectivamente, estão "longe" de ∂M e as condições B_i, i=1,3,4,5,6, permanecem válidas para pequenas perturbações de X em χ^r (vide |16|).

3.3- <u>Observação</u>- Se a conexão de selas de $X\varepsilon Q_3$ for uma autoconexão em uma sela p, então em |22| foi encontrada uma curva fechada C, arbitrariamente próxima de $\gamma_X \cup \{p\}$, tal que qualquer Y suficientemente próximo de X é transversal a ela. Denotemos por $\tilde{Q}_3$ o subconjunto de Q_3 de campos X tais que nenhuma trajetória de X que tangencia ∂M e nenhuma separatriz de sela de X, encontra C. Então a proposição 3.1 permanece válida para $\tilde{Q}_3$, mudando imersa por mergulhada; além disso $\tilde{Q}_3$ é aberto em χ_1^r. A prova deste fato está em |22,p.34|.

3.4- <u>Observação</u>- Se denotarmos por $Q_3(n)$ o conjunto dos $X\varepsilon Q_3$ de 3.1 cuja conexão de selas γ_X tem comprimento menor do que n, então 3.1 permanece válido substituindo imersa por mergulhada. Daí $Q_1 \cup Q_2(n) \cup Q_3(n)$ é uma subvariedade mergulhada de χ^r.

Parte 2- Nesta secção serão estudadas famílias de campos não estáveis, cuja instabilidade provém do contacto das trajetórias com o bordo de M. Frequentemente, durante as demonstrações, estaremos usando resultados e técnicas de M.C. Peixoto, M.M. Peixoto (|16| e |17|) e J. Sotomayor |22|. Salvo em menção contrária, suporemos $r>2$.

§4

4.1- Definição- Um ponto $p\varepsilon\partial M$ é um elemento crítico genérico de $X\varepsilon\chi^r$, se as seguintes condições estiverem satisfeitas:

b_1) Não existe nenhuma trajetória periódica de X, tangenciando ∂M em p,

b_2) O ponto p satisfaz $X(p)\neq 0$,

b_3) Se existir uma trajetória de X, tangenciando ∂M em p, então em nenhum outro ponto $q\varepsilon\partial M$ $(q\neq p)$ as duas curvas se tangenciam,

b_4) Nenhuma separatriz de sela de X tangencia ∂M em p,

b_5) Se uma trajetória de X tangencia ∂M em p, então o contacto entre as duas curvas no ponto p é de segunda ordem (diremos neste caso que o contacto entre X e ∂M em p é genérico; vide construção 4.2).

4.2- Uma construção- Sejam $p\varepsilon\partial M$, $\gamma_X(p)$ uma trajetória de $X\varepsilon\chi^r$ passando por p e $\tilde{X}\varepsilon\tilde{\chi}^r$, um representante de X. Consideremos $u:(R,0)\to(N,p)$ um germe C^∞ de um mergulho transversa ∂M em p. Consideremos também $s:(R,0)\to(\partial M,p)$ um germe C^∞ de um mergulho. Pelo Teorema das Funções Inversas $\sigma=(s,u)$ é o germe de um difeomorfismo de classe C^∞ ($\sigma:(R^2,0)\to(N,p)$). Denotemos por π a segunda componente da função inversa $\sigma^{-1}:(N,p)\to(R^2,0)$. Finalmente consideremos o germe $\pi_{\tilde{X}}:(R,0)\to(R,0)$ definido por $\pi_{\tilde{X}}(t)=\pi(\phi_{\tilde{X}}(p,t))$. Por continuidade, $\pi(\phi_{\tilde{Y}}(q,t))$ está definido em uma vizinhança $\tilde{B}\times\tilde{F}_1$ de $(\tilde{X},p)$ em $\tilde{\chi}^r\times N$. Para cada $\tilde{Y}\in\tilde{B}$, consideremos o germe de classe C^r, $\pi_{\tilde{Y}}:(R,0)\to(R,0)$ definido por $\pi_{\tilde{Y}}(t)=\pi(\phi_{\tilde{Y}}(q,t))$ para todo $q\in\tilde{F}_1$. Evidentemente γ_X tangencia ∂M em p se e só se $\pi'_{\tilde{X}}(0)=0$, qualquer que seja o representante $\tilde{X}$ de X. Observemos também que, $\pi_{\tilde{X}}:(R,0)\to(R,0)$ pode ser definido sem dificuldades se $t_o\neq 0$.

4.2.1- Definição- Dizemos que $p\in\partial M$ satisfaz a condição G em relação a X ou que o contacto entre X e ∂M em p é genérico, se $\pi'_{\tilde{X}}(0)=0$ e $\pi''_{\tilde{X}}(0)\neq 0$.

4.2.2- Definição- Dizemos que $p\in\partial M$ satisfaz a condição Q.G. em relação a X ou que o contacto entre X e ∂M em p é quase-genérico se $\pi'_{\tilde{X}}(0)=\pi''_{\tilde{X}}(0)=0$ e $\pi'''_{\tilde{X}}(0)\neq 0$.

Estas definições não dependem do germe transversal u (vide |23,p.11|) e nem do particular representante $\tilde{X}$ de X (pois qualquer que seja $\tilde{X}$, ele localmente em torno de p, é "paralelo").

4.3- Observações- a) A condição b_5 dada em 4.1 pode ser substituida pela condição G; b) Para futuras referências, consideremos o sistema de coordenadas $x=(x_1,x_2)$ em torno de p (por exemplo em uma vizinhança $\tilde{F}_1$ de p em N) dado por $x_1(p)=$

$x_2(p)=0$, $x_1 o s=id$, $x_2 o u=id$, $x_1 o u=0$ e $x_2 o s=0$. É conveniente no-tar que neste sistema de coordenadas, temos $\pi_X(t)=x_2(\phi_X(p,t))$;

c) Iremos denotar por U e S, vizinhanças fechadas, arbitrariamente pequenas de p em u(R) e s(R), respectivamente. Convencionaremos que a orientação positiva de U é aquela dada pelo sentido que sai de M.

4.4- <u>Lema</u>- Consideremos as notações de 4.2 e $X\varepsilon\chi^r$. Se o contacto entre X e ∂M em um ponto $p\varepsilon\partial M$ $(X(p)\neq 0)$ é genérico então existe vizinhança B_o de X em χ^r e uma função de classe C^r, $\alpha:B_o\to R$ tal que $Y(s(\alpha(Y)))$ é tangente a ∂M em $s(\alpha(Y))$ e além disso o contacto entre Y e ∂M em $s(\alpha(Y))$ é genérico.

<u>Prova</u>- Consideremos o germe $G:(\chi^r\times R,(X,0))\to(R,0)$ de classe C^r, definido por $G(Y,\alpha)=Y(s(\alpha))\wedge s'(\alpha)$.

Seja $x=(x_1,x_2)$ o sistema de coordenadas em tôrno de p, com $\frac{\partial}{\partial x_1}=X(p)$ e $s=(s_1,s_2)$ as componentes de s neste sistema, com $s(0)=p$.

Através de um cálculo direto obtemos $\frac{\partial G}{\partial\alpha}(X,0)=s''(0)\neq 0$, pois o contacto entre X e ∂M em p é genérico. Pelo teorema das funções implícitas, existe vizinhança B_o de X em χ^r e uma única aplicação $\alpha:B_o\to R$ que satisfaz $\alpha(X)=0$ e $G(Y,\alpha)=0$ se e só se $\alpha=\alpha(Y)$. Além disso , por continuidade, B_o pode ser obtido tal que o contacto entre Y e ∂M no ponto é genérico |16|. E isto conclui a demonstração em jôgo.

4.5- <u>Definição</u>- Um ponto $p\varepsilon\partial M$ é um <u>elemento crítico</u>

quase-genérico de $X\epsilon\chi^r$ do tipo:

-$\underline{\beta_1}$- se $X(p)=0$ e: a) p é simples, b) os auto-espa-ços de DX_p são transversais a ∂M em p e c) os autovalores de DX_p não são reais e iguais;

-$\underline{\beta_2}$- se existir uma trajetória periódica de X, ge-nérica, tangenciando ∂M somente no ponto p, onde a condição G é satisfeita;

-$\underline{\beta_3}$- se a trajetória de X passando por p, não for periódica, nem separatriz de sela e tangenciar ∂M somente em um outro ponto q, além de tangenciar ∂M em p; além disso $p\neq q$ e ambos devem satisfazer a condição G em relação ao campo;

-$\underline{\beta_4}$- se existir uma separatriz de sela de X que tangencia ∂M, somente em p, satisfazendo a condição G em re-lação ao campo;

-$\underline{\beta_5}$- se existir uma trajetória de X, tangenciando ∂M somente em p, satisfazendo a condição Q.G..

4.6- Observação- Se p é um ponto crítico simples de X e se os autovalores de DX_p são complexos conjugados en-tão estamos admitindo que êle satisfaz a condição b) da de-finição de elemento crítico quase-genérico do tipo β_1;isto porque um vetor tangente a ∂M em p (não nulo) não é vetor pró-prio de DX_p.

§5

5.1- Proposição- Denotemos por H_2 o conjunto dos campos $X\epsilon\chi^r$, $r\geqslant 3$, tais que: 1) Existe um ponto $p\epsilon\partial M$ que é elemento crítico quase-genérico de X do tipo β_2, como único elemento crítico não genérico de X; 2) X satisfaz Ω_1, Ω_3 e todas as trajetórias periódicas de X, exceto aquela que passa por p são genéricas e estão no interior de M. Então: a) H_2 é uma subvariedade mergulhada de Banach, de classe C^{r-1} e codimensão um de χ^r; b) Qualquer $X \varepsilon H_2$ tem uma vizinhança B em H_2, tal que qualquer $Y \varepsilon B$ conjuga com X.

A prova desta proposição dependerá de alguns lemas. O lema que se segue é conhecido e a demonstração dele pode ser encontrada por exemplo em |13, parte VIII|.

5.2-<u>Lema</u>- Seja $\tilde{X} \varepsilon \tilde{\chi}^r$, possuindo uma trajetória periódica $\gamma_{\tilde{X}}$ de período τ_o. Dados ε e T_o, números positivos, existem vizinhanças $\tilde{B}$ de $\tilde{X}$ em $\tilde{\chi}^r$ e $\tilde{V}$ de $\gamma_{\tilde{X}}$ em N, tais que: a) a cada campo $\tilde{Y} \varepsilon \tilde{B}$ corresponde uma única trajetória periódica genérica $\gamma_{\tilde{Y}}$ contida em $\tilde{V}$ e seu período dista menos do que ε de τ_o; b) qualquer trajetória de $\tilde{X}$ encontrando $\partial\tilde{V}$, o faz transversalmente e dispende em $\tilde{V}$ um tempo maior que T_o. Além disso $\partial\tilde{V}$ é a reunião de duas curvas fechadas (diferenciáveis).

5.3- <u>Lema</u>- Se $X \varepsilon H_2$ então existe vizinhança B de X em χ^r, tal que: a) qualquer $Y \varepsilon B$ satisfaz as condições Ω_1, Ω_2, Ω_3, B_1, B_5, B_6 e b) se $Y \varepsilon B \cap H_2$ então Y satisfaz B_3 e B_4.

A demonstração de 5.3 decorre imediatamente de |16| e da variação diferenciável (de classe C^r) das trajetórias de $Y \varepsilon B$.

5.4- <u>Lema</u>- Seja $X \varepsilon \chi^r$, $r \geqslant 3$, tendo um ponto $p \varepsilon \partial M$, co-

-mo um elemento crítico quase-genérico. Então existem vi-
-zinhanças B_2 de X em χ^r, F de p em M e uma função $f:B_2 \to R$ de classe C^{r-1} satisfazendo: a) $f(Y)=0$ se e só se Y tem uma trajetória periódica genérica tangenciando ∂M em um único ponto $p_Y \varepsilon F$, satisfazendo a condição G; se $f(Y)\neq 0$ então nenhu-
-ma trajetória periódica encontrando F tangencia ∂M e b) $df_X \neq 0$.

Prova- Denotemos por γ_X, τ_o, $\phi_X(p,t)$ respectivamen-
-te a trajetória periódica de X que tangencia ∂M em p, seu período e o correspondente fluxo. Seja também $\tilde{X}$ um represen-
-tante de X ($\tilde{X}\varepsilon\tilde{\chi}^r$); obviamente $\gamma_X = \gamma_{\tilde{X}}(p)$, pois $p\varepsilon\partial M$ e $\gamma_X \subset M$.

Tomemos vizinhanças $\tilde{F}_o$ de p em N, contida em $\tilde{V}$ e $\tilde{B}_o$ de $\tilde{X}$ em $\tilde{\chi}^r$ ($\tilde{V}$ e $\tilde{B}_o$ dadas em 5.2); vamos admitir que $\tilde{F}_o$ e $\tilde{B}_o$ estão contidos respectivamente em $\tilde{F}_1$ e $\tilde{B}_1$ dadas em 4.2. Iremos impor ainda , que se $\tilde{Y}\varepsilon\tilde{B}_o$ então sua trajetória perió-
-dica genérica contida em $\tilde{V}$ encontre U transversalmente e somente num ponto $u_{\tilde{Y}}$. Obviamente a correspondência $\tilde{Y} \to u_{\tilde{Y}}$ é de classe C^r.(figura 1).

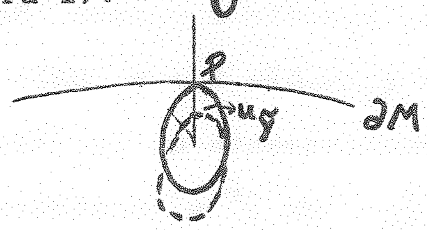


figura 1

Denotemos por J_o um intervalo da reta, em tôrno da origem, arbitrariamente pequeno.

Seja $\tilde{G}:(\tilde{B}_o \times J_o, (\tilde{X},0)) \to (R,0)$ um germe definido por

$\tilde{G}(\tilde{Y},\tau)=\pi_{\tilde{Y}}(\tau)$, que obviamente é de classe C^r e satisfaz:

$\tilde{G}(\tilde{X},0)=\frac{\partial\tilde{G}}{\partial\tau}(\tilde{X},0)=0$ e $\frac{\partial^2\tilde{G}}{\partial\tau^2}(\tilde{X},0)\neq 0$, pois o contacto entre X e ∂M em p é genérico (apesar de não ser necessário, os cálculos acima podem feitos com o auxílio das coordenadas dadas em 4.3). Pelo teorema das funções implícitas, existem vizinhanças $\tilde{B}_2\subset\tilde{B}_o$ de $\tilde{X}$, J de $\tau=0$ e uma única função $\tau:(\tilde{B}_2,\tilde{X})\to(J,0)$ de classe C^{r-1}, com $\tau(\tilde{Y})=0$ e $\frac{\partial\tilde{G}}{\partial\tau}(\tilde{Y},\tau)=0$ se e só se $\tau=\tau(\tilde{Y})$; vamos admitir por continuidade que, para $\tilde{Y}\in\tilde{B}_2$, $\frac{\partial^2\tilde{G}}{\partial\tau^2}(\tilde{Y},\tau(\tilde{Y}))\neq 0$. Salientemos que $\tau(\tilde{Y})$ é ponto de máximo (ponto crítico não degenerado) da aplicação $\tilde{g}(\tau)=\tilde{G}(\tilde{Y},\tau)$, para cada $\tilde{Y}\in\tilde{B}_2$.

A aplicação $\tilde{f}:(\tilde{B}_2,\tilde{X})\to(R,0)$ definida por $\tilde{f}(\tilde{Y})=\tilde{G}(\tilde{Y},\tau(\tilde{Y}))$ é de classe C^{r-1} e $\tilde{Y}\in\tilde{f}^{-1}(0)$ se e só se $\gamma_{\tilde{Y}}$ tangencia ∂M em $p_{\tilde{Y}}=\phi_{\tilde{Y}}(u_{\tilde{Y}},\tau(\tilde{Y}))$. Provemos que $d\tilde{f}_{\tilde{X}}\neq 0$.

Facilmente obtemos a igualdade $d\tilde{f}_{\tilde{X}}(\tilde{Y})=\frac{\partial\tilde{G}}{\partial\tilde{Y}}(\tilde{X},0)$.

Nosso próximo passo, é construir uma curva em $\tilde{\chi}^r$, que nos ajudará a provar que $d\tilde{f}_{\tilde{X}}\neq 0$. Para tanto, seja $y=(y_1,y_2)$ um sistema de coordenadas sôbre uma vizinhança $\tilde{F}\subsetneq\tilde{F}_o$ de p, com $y_1(p)=y_2(p)=0$, $\frac{\partial}{\partial y_1}=\tilde{X}$, $y_2ou=id$ e $y_1ou=0$. Se δ é um número real pequeno, consideremos $\psi_1:\gamma_{\tilde{X}}\cap\tilde{F}\to R$ e $\psi_2:U\cap\tilde{F}\to R$, funções bacia C^∞, com suportes respectivamente em $|y_1|<\delta$ e $|y_2|<\delta$. Seja o seguinte campo $\tilde{Y}=\psi_1\psi_2\frac{\partial}{\partial y_2}$ em $\tilde{\chi}^r$ e consideremos a curva $h:(-\eta,\eta)\to\tilde{\chi}^r$, de classe C^r, definida por $h(\lambda)=\tilde{Y}_\lambda=\tilde{X}+\lambda\tilde{Y}$. Evidentemente $\tilde{Y}_o=\tilde{X}$ e $\tau(\tilde{Y}_\tau)=0$. Daí $\frac{\partial\tilde{G}}{\partial\lambda}(\tilde{X},0)=\frac{d\tilde{G}}{d\lambda}(\tilde{X}+\lambda\tilde{Y})_{\lambda=0}\neq 0$; isto decorre de uma conhecida fórmula para derivadas de soluções de equações diferenciais, dependendo de um parâmetro (|10,p.94|). E portanto $d\tilde{f}_X \neq 0$.

Sejam agora, a seguinte vizinhança de X em χ^r, $B_2=\{Y \epsilon \chi^r$, tais que existe $\tilde{Y} \epsilon \tilde{B}_2$ com $\tilde{Y}_{|M}=Y\}$ e a função $f:B_2 \to R$, definida por $f(Y)=\tilde{f}(\tilde{Y})$, onde $\tilde{Y} \epsilon \tilde{B}_2$ e é uma extensão contínua (em X) de $Y \epsilon B_2$ (|28,p.67|); estes objetos nos permitem concluir imediatamente o lema 5.4.

<u>Prova de 5.1</u>- A parte a) decorre imediatamente dos lemas 5.2, 5.3 e 5.4. Demonstremos agora a parte b).

Dado $X \epsilon H_2$, seja $\tilde{V}$ a vizinhança de γ_X em N, dada em 5.2; $\tilde{V}$ é limitada por duas curvas fechadas C_1 e $\tilde{C}_2$, onde $C_1 \cap \partial M = \emptyset$ e $\tilde{C}_2 \cap \partial M \neq \emptyset$. Sejam os conjuntos $V=\tilde{V} \cap M$ e $C_2=\tilde{C}_2 \cap M$. Vamos admitir que o arco S de ∂M, dado em 4.3 é imagem de $I=[-1,1]$, $s(0)=p$ e que $V \cap \partial M = S_1 \subset S$; consideremos os conjuntos $S^-=s[-1,0)$, $S^+=s(0,1]$, $S_1^-=S_1 \cap S^-$ e $S_1^+=S_1 \cap S^+$ (figura 2).

Admitiremos que o único ponto de tangência de X com ∂M em S seja p; isto implica que, exceto em p, X é transversal a C_1, C_2 e a S.(4.4). Além disso, V deve ser escolhido tal que nenhuma das seguintes trajetórias de X a encontre: separatrizes de sela, trajetórias periódicas além de γ_X e trajetórias que tangenciam ∂M, além de γ_X.

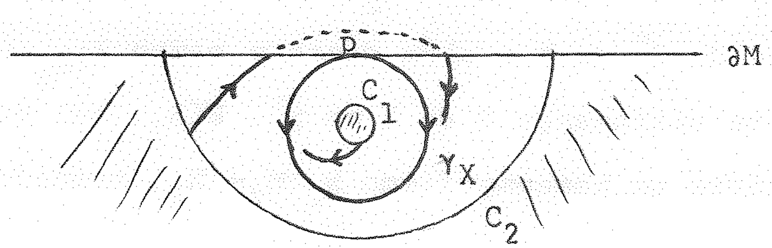


figura 2

Primeiramente, consideremos a vizinhança B_2 de X em χ^r, satisfazendo o seguinte: se $Y \varepsilon B_2 \cap H_2$, então a trajetória periódica genérica de Y, $\gamma_Y(\bar{p})$, que tangencia ∂M em $\bar{p} \varepsilon S_1$, está contida em $\tilde{V}$ e qualquer trajetória de Y encontrando $\tilde{V}$, é transversal a C_1, C_2 e a S exceto em $\bar{p}$; isto pode ser visto com simples argumentos de transversalidade.

Podemos supor, sem perda de generalidade que: a) γ_X é um atrator; b) se $\alpha_1 = S^- \cap C_2$, então $\phi_X(\alpha_1, t) \varepsilon V$ somente para $t=0$; c) se $q \varepsilon \mathrm{int}(C_2 \cup S_1^+)$, então existe $t_o > 0$, tal que $\phi_X(q, t_o) \varepsilon S_1^-$ e para $t \varepsilon (0, t_o)$, $\phi_X(q,t) \varepsilon \mathrm{int}(V)$. Situação semelhante ocorre para $Y \varepsilon B_2 \cap H_2$ (figura 3).

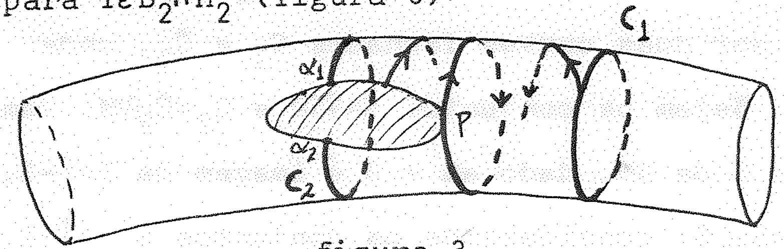


figura 3

Chamemos de $M_2' = M - \mathrm{int}(V)$, V_1 o anel fechado limitado por C_1 e $\gamma_X(p)$ e $V_2 = V - \mathrm{int}(V_1)$; indicaremos por $\bar{V}_1$ e $\bar{V}_2$ as correspondentes regiões determinadas por $\gamma_Y(\bar{p})$ para $Y \varepsilon B_2 \cap H_2$.

Nosso procedimento obedecerá as seguintes etapas:

1) Aproximaremos C_2 para uma curva C, determinando um subconjunto M_2 de M, próximo de M_2', de tal forma que êle seja uma subvariedade C^∞ de M e além disso o campo $X_{|M_2}$ é genérico; daí existe vizinhança B de X em χ^r, $B \subset B_2$, tal que se $Y \varepsilon B \cap H_2$, então existe um homeomorfismo $h_2 : M_2 \to M_2$, transformando traje-

-tórias de $X_{|M_2}$ em trajetórias de $Y_{|M_2}$; 2) De modo natural extendemos h_2 para um homeomorfismo $h:M\to M$ transformando tra- -jetórias de X em trajetórias de $Y\varepsilon B\cap H_2$.

<u>Construção de M_2</u>- Sejam $\alpha_2=C_2\cap S^+$, F_i,$i=1,2$, vi- -zinhanças pequenas de α_i, $i=1,2$, tal que $F_i\cap M\subset S$ e elas não contém nenhuma singularidade; sejam S_i e E_i arcos de ∂M e C_2, contidos em F_i e passando por α_i. Consideremos ainda $s_i:I\to F_i$ e $e_i:I\to F_i$ parametrizações C^∞ de S_i e E_i respectivamente com $s_i(0)=e_i(0)=\alpha_i$ (notemos que $s_i'(0)$ e $e_i'(0)$ são linearmente independentes). Estas parametrizações induzem sôbre cada F_i um sistema de coordenadas $x^i=(x_1^i,x_2^i)$ com $x^i(\alpha_i)=0$; como X é transversal a S_i e a E_i, $i=1,2$, podemos supor sem perda de generalidade que: em F_1 (respectivamente em F_2) $x_1^1(X(\alpha_1))>0$ e $x_2^1(X(\alpha_1))>0$ ($x_1^2(X(\alpha_2))<0$,$x_2^2(X(\alpha_2))<0$). Por continuidade podemos supor que se $q_1\varepsilon F_1$ (resp. $q_2\varepsilon F_2$) então $x_1^1(X(q_1))>0$ e $x_2^1(X(q_1))>0$ ($x_1^2(X(q_2))<0$ e $x_2^2(X(q_2))<0$). Dado $\eta>0$ arbitra- -riamente pequeno, consideremos $v_i\varepsilon S_i$ e $w_i\varepsilon E_i$, $i=1,2$ tais que $|x^i(v_i)|<\eta$ e $|x^i(w_i)|<\eta$; exigimos que $x_1^1(v_1)<0$, $x_2^1(w_1)<0$, $x_1^2(v_2)>0$ e $x_2^2(w_2)<0$. Consideremos agora a curva $C=\psi(\zeta)$,$\zeta\varepsilon[-2,2]$ de classe C^∞, tal que: a)$\psi(-2)=v_1$,$\psi(-1)=w_1$, $\psi(1)=v_2$, $\psi(2)=w_2$; b)C está ε-próximo de C_2 e $C=C_2$ fora de $F_1\cup F_2$; para $\zeta\varepsilon(-2,-1)$, $x_1^1(\psi(\zeta))<0$ e $x_2^1(\psi(\zeta))<0$; para $\zeta\varepsilon(1,2)$, $x_1^2(\psi(\zeta))>0$, $x_2^2(\psi(\zeta))<0$; c) $x_2^1(\psi'(-2))=x_1^1(\psi'(-1))=x_1^2(\psi'(1)0=x_2^2(\psi'(2)=0$; d)se $\zeta\varepsilon[-2,-1]$ então $\psi_2'(\zeta)$ e $X(\psi(\zeta))$ são linearmente indepen- -dentes; e) existe um único $\zeta_o\varepsilon(1,2)$ onde $\psi'(\zeta_o)$ e $X(\psi(\zeta_o))$

são linearmente dependentes; f) o contacto entre C e X no ponto $\psi(\zeta_0)=c_0$ é genérico.

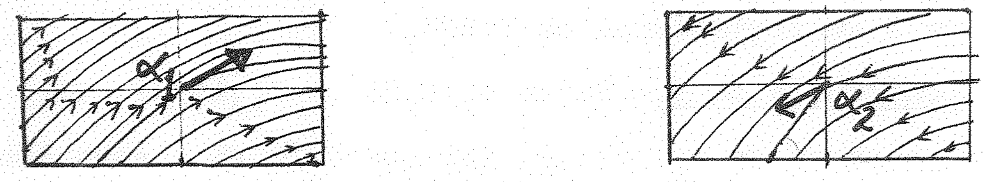


figura 4

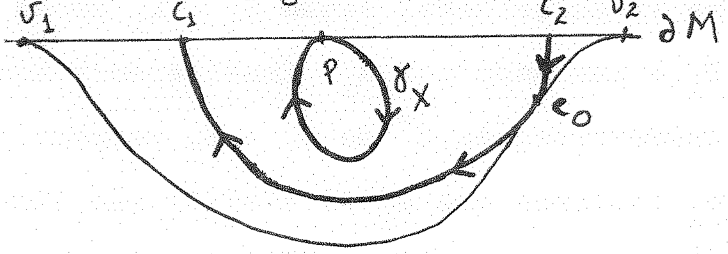


figura 5

Como $X_{|M_2}$ é genérico, existe um vizinhança B de X em χ^r, $B\subset B_2$, tal que se $Y\varepsilon B \cap H_2$ então existe um homeomorfismo $h_2:M_2\to M_2$ (próximo da identidade) transformando trajetórias de $X_{|M_2}$ em trajetórias de $Y_{|M_2}$.

Para cada $Y\varepsilon B$, está associado um ponto $\bar{c}_0\varepsilon C$, correspondente a c_0 e obrigatóriamente $h_2(c_0)=\bar{c}_0$. Exigiremos que $h_2(v_i)=v_i$, $i=1,2$; isto é possível, pois cada v_i está contido em uma região canônica (vide definição em |16|).

<u>Construção de h</u>- Iremos extender h_2, primeiramente para os pontos de V_1. Com efeito: seja Q um arco em V_1, ligando p a um ponto $q\varepsilon C_1$, transversal a X; como h_2 está próximo da identidade, determinamos um arco $\bar{U}$ (perto de U), ligando $\bar{p}$ a $h_2(q)=\bar{q}$, transversal a Y; obrigatoriamente $h(p)=\bar{p}$ e de modo similar a |22,p.12| definimos h para os pontos de

V_1 (a imagem por h de V_1 será $\bar V_1$).

Construiremos h para os pontos de V_2. Primeiramen--te vamos determinar três regiões (canônicas em V_2) que de cer--ta forma nos facilitará a construção de h. Por continuidade de X, a trajetória (de X) que passa por c_o encontra S^+ em um ponto c_2 e S^- em um ponto c_1; denotaremos por γ_o esta traje--tória. Para $Y\varepsilon B_1\cap H_2$, existem os correspondentes $\bar c_1$, $\bar c_2$ e $\bar\gamma_o$. Exigiremos que $h(c_i)=\bar c_i$, $i=1,2$; γ_o(respec.$\bar\gamma_o$) determina em V ($\bar V$) as três seguintes subregiões (figura 6):

1) T_1 (respec. $\bar T_1$)-limitada por $(\overset{\curvearrowright}{v_1c_1})_{\partial M}$, $(\overset{\curvearrowright}{v_1c_o})\ M_2$, e $(\overset{\curvearrowright}{c_oc_1})_{\gamma_o}$ ($(\overset{\curvearrowright}{v_1\bar c_1})_{\partial M}$, $(\overset{\curvearrowright}{v_1\bar c_o})_{\partial M_2}$ e $(\overset{\curvearrowright}{\bar c_o\bar c_1})_{\bar\gamma_o}$)).

2) T_2 (respec. $\bar T_2$)-limitada por $(\overset{\curvearrowright}{c_2v_2})_{\partial M}$, $(\overset{\curvearrowright}{c_ov_2})_{\partial M_2}$ e $(\overset{\curvearrowright}{c_2c_o})_{\gamma_o}$ ($(\overset{\curvearrowright}{\bar c_2v_2})_{\partial M}$, $(\overset{\curvearrowright}{\bar c_ov_2})_{\partial M_2}$ e $(\overset{\curvearrowright}{\bar c_2\bar c_o})_{\bar\gamma_o}$)

3) T_3 (respec. $\bar T_3$)-limitada por $(\overset{\curvearrowright}{c_1c_2})_{\partial M}$, $\gamma_X(p)$ e $(\overset{\curvearrowright}{c_2c_1})_{\gamma_o}$ ($(\overset{\curvearrowright}{\bar c_1\bar c_2})_{\partial M}$, $\gamma_Y(\bar p)$ e $(\overset{\curvearrowright}{\bar c_2\bar c_1})_{\bar\gamma_o}$).

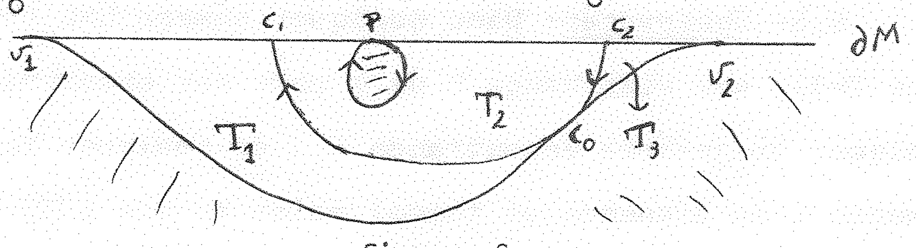


figura 6

Pela razão de comprimento de arco, fazemos $h(\overset{\curvearrowright}{c_oc_1})_{\gamma_o}$ $=(\overset{\curvearrowright}{\bar c_o\bar c_1})_{\bar\gamma_o}$, $h(\overset{\curvearrowright}{c_2c_o})_{-_o}=(\overset{\curvearrowright}{\bar c_2\bar c_o})_{\bar\gamma_o}$, $h(\overset{\curvearrowright}{v_1c_1})_{\partial M}=(\overset{\curvearrowright}{v_1\bar c_1})_{\partial M}$ e $h(\overset{\curvearrowright}{c_2v_2})_{\partial M}$ $=(\overset{\curvearrowright}{\bar c_2v_2})_{\partial M}$.

Cada T_i será levado por h no seu correspondente $\bar T_i$.

Sôbre T_3- Tracemos um arco Q em T_3, ligando um pon-
-to $q\varepsilon\gamma_X(p)$ a c_o, transversal a X; por conseguinte, existe um arco $\bar{Q}$, próximo de Q em $\bar{T}_3$, transversal a Y, ligando $h_2(q)=\bar{q}$ a $\bar{c}_o$. Através da razão de comprimento de arco, impomos que $h(\widehat{c_1,p})_{\partial M}=(\widehat{\bar{c}_1,\bar{p}})_{\partial M}$. Se $q_2\varepsilon(\widehat{pc_2})_{\partial M}$, $\gamma_X(q_2)$ encontra $(\widehat{c_1p})_{\partial M}$ em um ponto q_1; então fazemos $h(q_2)=\bar{q}_2$, onde $\bar{q}_2$ é o ponto onde a trajetória de Y passando por $\bar{q}_1=h(q_1)$ encontra $(\widehat{pc_2})_{\partial M}$. Sôbre os pontos de Q , h age da seguinte maneira: se $u\varepsilon Q$, a trajetória de X, passando por êle, encontra $u_1\varepsilon(c_1p)_{\partial M}$ e $u_2\varepsilon(\widehat{pc_2})_{\partial M}$; assumamos que $h(u)=\bar{u}$ onde $\bar{u}$ é a intersecção de $\gamma_Y(h(u_1))$ com $\bar{Q}$. Agora, através de um simples cálculo, definimos h para todos os pontos de T_3.

Com as mesmas técnicas utilizadas atrás, h pode ser construído facilmente sôbre T_1 e T_2; e isto nos permite concluir a demonstração de 5.1.b.

5.5- <u>Observação</u>- Dado qualquer número $L>0$ (respectivamente $T>0$), uma vizinhança B de X pode ser encontrada, tal que qualquer trajetória encontrando C_1, de qualquer $Y\varepsilon B$, tem comprimento (ou dispende um tempo) maior do que L (T) em V_1; esta afirmação decorre imediatamente de 5.2. Além disso qualquer trajetória de $Y\varepsilon B$ encontrando C_2, encontra ∂M transversalmente em V.

5.6- <u>Observação</u>- Denotemos por $H_2(n)$ o conjunto dos $X\varepsilon H_2$, cuja trajetória periódica que tangencia ∂M, tem compri-

-mento menor do que n; com argumentos de continuidade verifica-se que a proposição 5.1 permanece válida para $H_2(n)$.

5.7- <u>Proposição</u>- Denotemos por $\tilde{H}_2$ o subconjunto de H_2 de campos X que satisfazem o seguinte axioma adicional: 3) Nenhuma separatriz de sela de X e nenhuma trajetória de X que tangencia ∂M, tem $\gamma_X(p)$ como o seu α- ou ω-limite (isto é, encontra C_1). Então: a) $\tilde{H}_2$ é aberto em χ_1^r; b) $\tilde{H}_2^1 = H_2 - \tilde{H}_2$ é aberto em H_2; c) Se $X \varepsilon \tilde{H}_2^1$ então existe vizinhança B de X em χ^r, tal que, se $Y \varepsilon B - H_2$ então ou i) $Y \varepsilon \Sigma_o$ ou ii) Y tem uma única separatriz de sela tangenciando ∂M ou iii) Y tem uma única trajetória que não é periódica e nem separatriz de sela, tangenciando ∂M em dois e somente em dois pontos; além disso em ii) e iii) o contacto entre Y e ∂M é genérico.

<u>Prova</u>- Existe $\varepsilon > 0$, suficientemente pequeno, tal que se $Y \varepsilon f^{-1}[-\varepsilon, 0)$ então $Y \varepsilon \Sigma_o$; isto sai como consequência da demonstração de 5.1.a. Entretanto o mesmo não se pode dizer acerca de um campo em $f^{-1}(0, \varepsilon]$ para qualquer ε.

<u>prova da parte a</u>- se $X \varepsilon \tilde{H}_2$, obviamente existe vizinhança dêle em χ^r, tal que qualquer Y nesta vizinhança satisfaz B_3 e B_4; por 5.3, 5.4 e a observação acima, existe $\varepsilon > 0$ tal que se $Y \varepsilon f^{-1}(0, \varepsilon]$ então $Y \varepsilon \Sigma_o$. E isto prova a abertura de $\tilde{H}_2$ em χ_1^r.

A demonstração da <u>parte b)</u> é imediata.

<u>Prova da parte c</u>- vamos supor que exista uma única

separatriz de sela ν_X de X encontrando C_1 (os outros casos saem como decorrência dêste). Sejam $\tilde{X}$ um representante de X e $\tilde{F}$ uma vizinhança arbitrariamente pequena de p em N, onde está definido um sistema de coordenadas $x=(x_1,x_2)$, satisfazen-do $x(p)=0$, $\frac{\partial}{\partial x_1}=X$ e $x_2 ou=id$. ν_X determina uma sequência de pontos (u_n), infinita, sôbre o arco U, transversal a ∂M em p (isto porque γ_X é orbitalmente estável) e além disso $(u_n)\to p$. Existem duas possibilidades para um campo $Y\varepsilon f^{-1}(0,\varepsilon)$: ou i) a trajetória de Y que tangencia ∂M em $\tilde{F}$ passa por u_n, para algum n ou ii) esta trajetória não encontra u_n para todo n. Se i) acontece, Y tem uma única separatriz de sela tangen-ciando ∂M em um um único ponto; se ii) acontece, $Y\varepsilon\Sigma_o$.

Como X tem somente um número finito de separatri-zes de sela e de trajetórias que tangenciam ∂M, a parte c) é demonstrada de modo trivial.

§6

6.1- <u>Proposição</u>- Denotemos por H_3 o conjunto dos campos $X\varepsilon\chi^r$, tais que: 1) Existe um ponto $p\varepsilon\partial M$ que é um ele-mento crítico quase-genérico do tipo β_3 de X, como único elemento crítico não genérico de X; 2) X satisfaz Ω_1, Ω_2, Ω_3. Então: a) H_3 é uma subvariedade de Banach, mergulhada de classe C^{r-1} e codimensão um de χ^r; b) Qualquer $X\varepsilon H_3$ tem uma vizinhança B em H_3, tal que qualquer $Y\varepsilon B$ conjuga com X e c) H_3 é aberto em χ_1^r.

A demonstração de 6.1 depende de alguns lemas, que daremos a seguir.

6.2- <u>Lema</u>- Se $X\varepsilon H_3$, então existe vizinhança B de X em χ^r tal que qualquer $Y\varepsilon B$ satisfaz as condições Ω_1, Ω_2, Ω_3, B_1, B_2, B_4, B_5, B_6 .

Demonstração deste lema decorre imediatamente de |16| e de 4.4.

6.3- <u>Lema</u>- Seja $X\varepsilon\chi^r$, tal que existe uma trajetória γ_X que tangencia ∂M em apenas dois pontos distintos p_1 e p_2; além disso o contacto entre X e ∂M naqueles pontos é genérico. Existem vizinhanças B_3 de X em χ^r, F_i de p_i em M, i=1,2 e uma função de classe C^{r-1}, $f:B_3\to R$, tais que: a) f(Y)=0 se e só se existe trajetória de Y que tangencia ∂M em dois pontos $q_1\varepsilon F_1$ e $q_2\varepsilon F_2$, cujo contacto entre as curvas é genérico; se $f(Y)\neq 0$ então existe uma única trajetória que tangencia ∂M em F_1 (respectivamente F_2) em um único ponto e não tangencia ∂M em nenhum outro ponto; e b) $df_X\neq 0$.

<u>Prova</u>- Seja τ_1 um número positivo, tal que $\phi_X(p_1,\tau_1)=p_2$. Consideremos $\tilde{X}\varepsilon\tilde{X}^r$ um representante qualquer de X. É evidente que $\phi_X(p_1,\tau)$ e $\phi_{\tilde{X}}(p_1,\tau)$ coincidem para $-\varepsilon<\tau<\tau_1+\varepsilon$ para algum suficientemente pequeno; isto é verdade porque o contacto entre X e ∂M em p_1 é genérico e $\phi_X(p_1,\tau_1)=p_2$. Chamemos de $\tilde{F}_i$ vizinhanças pequenas de p_i em N (correspondentes a $\tilde{F}_1$ dada em 4.3), impondo que o único ponto de tangência de X com ∂M em $\tilde{F}_1$(respec. $\tilde{F}_2$) é p_1 (p_2) (vide 4.4). Denotemos também por S_i e U_i (i=1,2) os arcos em ∂M e em N, respectiva-

-mente, contidos em $\tilde{F}_i$ e análogos aos arcos S e U dados em 4.3 (e da mesma forma os mergulhos s_i e u_i).

"6.4- <u>Sublema</u>- Com as hipóteses de 6.3, existem vi-zinhanças $\tilde{B}_o$ de X em $\tilde{\chi}^r$ e um número $\delta>0$, tais que a cada $\tilde{Y}\varepsilon\tilde{B}_o$ corresponde com um único ponto $\alpha_{\tilde{Y}}\varepsilon J_o$, onde $\tilde{Y}(s_1(\alpha_{\tilde{Y}}))$ e $s_1'(\alpha_{\tilde{Y}})$ são linearmente dependentes; além disso a correspon-dência $\tilde{Y}\to\alpha_{\tilde{Y}}$ é de classe C^r.

A prova deste sublema decorre de 4.4."

Consideremos o germe de classe C^r, $\tilde{G}:(\tilde{B}_o\times J_o,(\tilde{X},\tau_1))\to(R,0)$ definido por $\tilde{G}(\tilde{Y},\tau)=\pi(\phi_{\tilde{Y}}(s_1(\alpha_{\tilde{Y}}),\tau))$ que obviamente satisfaz $\tilde{G}(\tilde{X},\tau_1)=\frac{\partial\tilde{G}}{\partial\tau}(\tilde{X},\tau_1)=0$ e $\frac{\partial^2\tilde{G}}{\partial\tau^2}(\tilde{X},\tau_1)\neq0$ ($\alpha_{\tilde{Y}}$ é o ponto determinado em 6.4). Pelo teorema das funções im-plícitas, existem uma vizinhança $\tilde{B}_3\varepsilon\tilde{B}_o$ de $\tilde{X}$ em $\tilde{\chi}^r$ e uma fun-ção $\tau:\tilde{B}_3\to R$, de classe C^{r-1}, tal que $\tau(\tilde{X})=\tau_1$ e $\frac{\partial\tilde{G}}{\partial\tau}(\tilde{Y},\tau)=0$ se e só se $\tau=\tau(\tilde{Y})$; além disso $\tilde{B}_3$ pode ser escolhido tal que, se $\tilde{Y}\varepsilon\tilde{B}_3$ então $\frac{\partial^2\tilde{G}}{\partial\tau^2}(\tilde{Y},\tau(\tilde{Y}))\neq0$.

Observemos que, como a orientação positiva de U_2 é a emergente de M, então $\tau(\tilde{Y})$ é ponto de máximo da aplica-ção $g_{\tilde{Y}}(\tau)=\tilde{G}(\tilde{Y},\tau)$, para cada $\tilde{Y}\varepsilon\tilde{B}_3$.

Definamos a aplicação $\tilde{f}:\tilde{B}_3\to R$ de classe C^{r-1}, por $\tilde{f}(\tilde{Y})=\tilde{G}(\tilde{Y},\tau(\tilde{Y}))$, que satisfaz $\tilde{f}(\tilde{X})=0$ e $\tilde{Y}\varepsilon\tilde{f}^{-1}(0)$ se e só se $\pi_{\tilde{Y}}(\tau(\tilde{Y}))=0$ (vide 4.2).

A demonstração de $d\tilde{f}_{\tilde{X}}\neq0$ é similar à feita em 5.1.a.

Se $\tilde{f}(\tilde{Y})\neq0$, existe uma trajetória de $\tilde{Y}$, diferente daquela que passa por $\alpha_{\tilde{Y}}$ que tangencia ∂M em um único ponto pertencente a $\tilde{F}_2$; este fato pode ser constatado, através de argumentos simples de continuidade.

Consideremos agora, as vizinhanças, B_3 de X em χ^r, dada por $B_3=\{Y\varepsilon\chi^r$, tais que existe $\tilde{Y}\varepsilon\tilde{B}_3$ com $\tilde{Y}_{|M}=Y\}$, F_i de p em M $(i=1,2)$ dadas por $F_i=\tilde{F}_i\cap M$ e a aplicação de classe C^{r-1}, $f:B_3\to R$, definida por $f(Y)=\tilde{f}(\tilde{Y})$ onde $\tilde{Y}$ é uma extensão contí-nua de Y em $\tilde{\chi}^r$. |28 p.67|. Estes objetos nos permitem con-cluir a demonstração em jôgo.

<u>Prova de 6.1</u>- As partes a) e c) decorrem dos lemas 6.2 e 6.3. Demonstremos agora a parte b).

Sejam $X\varepsilon H_3$, γ_X a trajetória de X que tangencia ∂M em dois pontos p_1 e p_2 e $\tilde{X}$ um representante de X em $\tilde{\chi}^r$. Con-sideremos também $(\tilde{F},x)$ um fluxo tubular longo em N relacio-nado com $\tilde{X}$, em tôrno do arco $(\widehat{p_1p_2})_{\partial X}$. Vamos admitir que $\tilde{F}$ é suficientemente pequeno de modo que nenhuma outra trajetó-ria de $\tilde{X}$ tangencie ∂M em $\tilde{F}$ (figura 7).

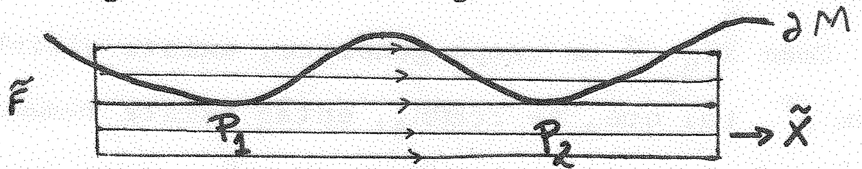


figura 7

Por simplicidade, vamos supor que $|x_1(p_1)|=|x_1(p_2)|=\delta_o$, $x_1(p_1)<0$ e $x_2(p_2)>0$.

Seja $F=\tilde{F}\cap M$ e C um arco C^∞ contido em F, satisfazen-do: a) C e M limitam uma vizinhança fechada V_o de $(\widehat{p_1p_2})_{\gamma_X}$,

b) C tangencia ∂M em dois pontos c_1 e c_2; c) existe um único ponto $c_o \varepsilon \text{int}(C)$, onde X e C não não transversais; entretanto o contacto entre $\gamma_X(c_o)$ e C é genérico neste ponto e d) $M_2 = M - V_o$ é uma subvariedade C^∞ de M. A construção de M_2 obedece as mesmas tecnicas usadas na demonstração de 5.1.b. Podemos impor também, que C intercepta γ_X em apenas dois pontos p_3 e p_4. (figura 8).

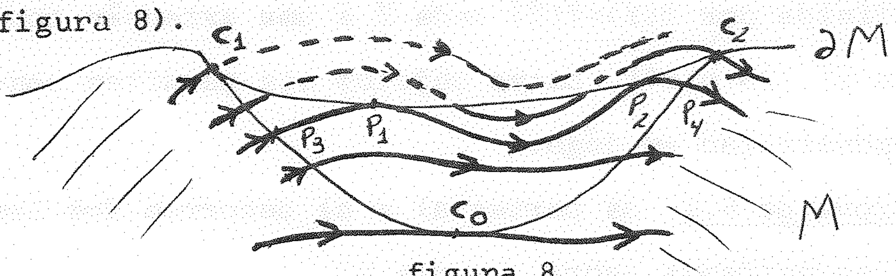


figura 8

Por continuidade de X sôbre ∂M, existe pelo menos um ponto $q \varepsilon (\overset{\frown}{p_1 p_2})_{\partial M}$, tal que $\gamma_X(q)$ é tangente a ∂M em q.

Podemos supor sem perda de generelidade que nenhu--ma separatriz de sela, nenhuma trajetória exceto γ_X, que tangencie ∂M em algum ponto e nenhuma trajetória periódica de X encontre V_o.

Como $X_{|M_2}$ é um campo genérico, existe vizinhança B de X em $\mathfrak{X}^r$, tal que, se $Y \varepsilon B \cap H_3$, então existe homeomor--fismo (C^r próximo da identidade) $h_2 : M_2 \to M_2$, transformando trajetórias de $X_{|M_2}$ em trajetórias de $Y_{|M_2}$.

Para cada $Y \varepsilon B\ H_3$ existem os correspondentes $\bar{p}_1$, $\bar{p}_2$, $\bar{p}_3$ e $\bar{p}_4$ de p_1, p_2, p_3 e p_4 respectivamente. Precisamos exigir que $h_2(c_i) = c_i$, $i=1,2$ e $h_2(p_j) = \bar{p}_j$ para $j=3,4$.

A extensão de h_2 para um homeomorfismo $h: M \to M$, transformando trajetórias de X em trajetórias de $Y \varepsilon B \cap H_3$, é feita de maneira natural, utilizando-se razão de comprimento de arco.

6.5- <u>Observação</u>- $Ad(H_3) \cap Q_2 \neq \emptyset$ e $Ad(H_3) \cap H_2 \neq \emptyset$; estes fatos decorrem respectivamente de 5.7 e 1.3.

6.6- <u>Observação</u>- Denotemos por $H_3(n)$ o subconjun- -to de H_3 dos campos X, tais que γ_X tem comprimento menor do que n. Por argumentos de continuidade verifica-se que a pro- -posição 6.1 continua válida para $H_3(n)$.

§7

7.1- <u>Proposição</u>- Denotemos por H_4 o conjunto dos $X \varepsilon \chi^r$, $r>2$, tais que: 1) Existe um ponto $p \varepsilon \partial M$, que é um ele- -mento crítico quase-genérico do tipo β_4 de X, como o único elemento crítico não genérico de X; 2) X satisfaz Ω_1,Ω_2 e Ω_3. Então: a) H_4 é uma subvariedade de Banach, mergulhada de clas- -se C^{r-1} e codimensão um de χ^r; b) Qualquer $X \varepsilon H_4$ tem uma vi- -zinhança B em H_4, tal que qualquer $Y \varepsilon B$, conjuga com X e c) H_4 é aberto em χ_1^r.

A prova de 7.1 depende de alguns lemas, que dare- -mos a seguir.

7.2- <u>Lema</u>- Se $X \varepsilon H_4$, então existe vizinhança B de X em χ^r, tal que qualquer $Y \varepsilon B$ satisfaz as condições Ω_1, Ω_2, Ω_3, B_1, B_2, B_3, B_5 e B_6.

A demonstração de 7.2 segue de 4.4 e de |16|.

7.3- <u>Lema</u>- Seja $X \varepsilon H_4$, tal que γ_X é a separatriz de sela de X que tangencia ∂M em um único ponto p. Então existem vizinhanças B_4 de X em X^r, F de p em M e uma função de classe C^{r-1}, $f:B_4 \to R$, tais que: a) f(Y)=0 se e só se existe separa-triz de sela de Y, que tangencia ∂M em apenas um ponto $p_Y \varepsilon F$ e satisfazendo a condição G em relação ao campo; se $f(Y) \neq 0$ então nenhuma separatriz de sela de Y, tangencia ∂M em F e b) $df_X \neq 0$.

<u>Prova</u>- Dado um representante $\tilde{X}$ de X, existem vi-zinhanças $\tilde{B}_o$ de $\tilde{X}$ em $\tilde{X}^r$ e $\tilde{F}$ de p em N, tais que qualquer $\tilde{Y} \varepsilon \tilde{B}_o$ possui uma única separatriz de sela $\gamma_{\tilde{Y}}$, encontrando $\tilde{F} \cap M$ ($\gamma_{\tilde{Y}}$ está ε-C^r próxima de γ_X em N). Seja $U \subset \tilde{F}$ o arco C^∞ transver-sal a ∂M em p, dado em 4.3. A vizinhança $\tilde{B}_o$ pode ser obtida, tal que $\gamma_{\tilde{Y}}$ encontra U, somente em um ponto $u_{\tilde{Y}}$, transversal-mente ; além disso a correspondência $\tilde{Y} \to u_{\tilde{Y}}$ é de classe C^r.

Consideremos o germe de classe C^r,

$\tilde{G}:(\tilde{B}_o \times J_o,(\tilde{X},0)) \to (R,0)$ definido por $\tilde{G}(\tilde{Y},\tau)=\pi(\phi_{\tilde{Y}}(u_{\tilde{Y}},\tau))$ onde J_o é uma vizinhança pequena de $\tau=0$ em R. Evidentemente temos $\tilde{G}(\tilde{X},0)=\frac{\partial \tilde{G}}{\partial \tau}(\tilde{X},0)=0$ e $\frac{\partial^2 \tilde{G}}{\partial \tau^2}(\tilde{X},0) \neq 0$ (notemos que $u_{\tilde{X}}=p$).

Agora a demonstração de 7.3, é análoga à de 5.4 e 6.3.

<u>Prova de 7.1</u>- As partes a) e c) decorrem dos lemas 7.2 e 7.3, enquanto que 7.1.b tem demonstração similar àque-la feita em 5.1.b e 6.1.b.

7.5- <u>Observação</u>- $Ad(H_4)\cap Q_2\neq\emptyset$ e $Ad(H_4)\cap H_2\neq\emptyset$; isto decorre imediatamente de 1.3 e 5.7 respectivamente.

7.6- <u>Observação</u>- Denotemos por $H_4(n)$ o subconjunto de H_4, dos campos X, tais que o comprimento de γ_X é menor que n; do mesmo modo que 5.6 e 6.6 a proposição 7.1 permanece vá--lida para $H_4(n)$.

§8

8.1- <u>Lema</u>- Seja $p\varepsilon\partial M$ um ponto crítico simples de $X\varepsilon\chi^r$. Então existem vizinhanças B_o de X em χ^r, F de p em M e uma aplicação de classe C^r, $f:B_o\to R$, tais que: a) $f(Y)=0$ se e só se Y tem um ponto crítico $p_Y\varepsilon\partial M\cap F$; além disso p_Y é sim--ples; b) se $f(Y)>0$, Y não tem ponto crítico em F; c) se $f(y)<0$, Y tem um único ponto crítico em F e que é simples; e d) $df_X\neq 0$.

<u>Prova</u>- Escolhemos $\tilde{X}$ um representante de X em $\tilde{\chi}^r$, $\tilde{F}_1$ uma vizinhança arbitrariamente pequena de p em N dada em 4.2 e $\tilde{B}_o$ uma vizinhança de $\tilde{X}$ em $\tilde{\chi}^r$ satisfazendo o seguinte: cada $\tilde{Y}\varepsilon\tilde{B}_o$ possui um único ponto crítico $p_{\tilde{Y}}$ em $\tilde{F}_1$, que é sim--ples e a correspondência $\tilde{Y}\to p_{\tilde{Y}}$ é de classe C^r.

Definamos uma aplicação $\tilde{f}:\tilde{B}_o\to R$ por $\tilde{f}(\tilde{Y})=\pi(p_{\tilde{Y}})$; esta aplicação evidentemente satisfaz $\tilde{f}(\tilde{X})=0$ e é de classe C^r.

Provemos que $d\tilde{f}_{\tilde{X}}\neq 0$.

Para tanto, seja $x=(x_1,x_2)$ o sistema de coordenadas em tôrno de p, dado em 4.3 e $\psi:N\to R$ uma funçaõ bacia C^∞ com suporte em $F_\delta=\{q\varepsilon N$ com $|x(q)|<\delta\}$ e $\psi(q)=1$ se $|x(q)|<\delta_1$

com δ_1 positivo e estritamente menor do que δ. Consideremos o intervalo $I=|-\eta,\eta|$ com $\eta>0$ e menor do que δ_1. Definamos uma curva $h:I\to\tilde{\chi}^r$ de classe C^r, por $h(\lambda)(q)=\tilde{X}_\lambda(q)=\psi(q)\tilde{X}(q+\lambda\frac{\partial}{\partial x_2})+(1-\psi(q))\tilde{X}(q)$; obviamente $\tilde{X}_o=\tilde{X}$ e $\tilde{X}(-\lambda\frac{\partial}{\partial x_2})=0$, isto é, $p_{\tilde{X}}=(-\lambda\frac{\partial}{\partial x_2})$. Consequentemente $\tilde{f}(\tilde{X}_\lambda)=-\lambda$ e $d\tilde{f}_{\tilde{X}}(\tilde{Y})=\frac{d(f\circ h)}{d\lambda}(0)\neq 0$.

Consideremos finalmente, a vizinhança B_o de X em χ^r, dada por $B_o=\{Y\varepsilon\chi^r$ tais que existe $\tilde{Y}\varepsilon\tilde{B}_o$ com $\tilde{Y}_{|M}=Y\}$ e a aplicação $f:B_o\to R$ de classe C^r, definida por $f(Y)=\tilde{f}(\tilde{Y})$, onde $\tilde{Y}$ é uma extensão contínua de Y em $\tilde{\chi}^r$; donde a conclusão da proposição em jôgo torna-se imediata.

8.2- <u>Observação</u>- Denotemos por H_1^1, o conjunto dos campos $Y\varepsilon\chi^r$, tais que: 1) Y tem apenas um ponto crítico $p_Y\varepsilon\partial M$, simples, e é o único elemento crítico não genérico de Y; 2) Y satisfaz Ω_2,Ω_3 e todos os pontos críticos de Y exce-to p_Y são hiperbólicos. Chamemos de D_2 o subconjunto de H_1^1, dos campos Y satisfazendo o seguinte axioma adicional: os au-tovalores de DY_{p_Y} são reais e iguais.

"O conjunto $H_1^1-D_2$ é aberto e denso em H_1^1"; êste fato é constatado imediatamente, através da aplicação $g:B_o\cap H_1^1\to R$, definida por $g(Y)=\sigma^2(Y,p_Y)-4\Delta(Y,p_Y)$ |22,p.15|; pode-se ve-rificar também que um $\varepsilon>0$ pode ser encontrado tal que se $Y\varepsilon g^{-1}(0,\varepsilon)$ então p_Y é um nó não degenerado |8| , se $Y\varepsilon g^{-1}(-\varepsilon,0)$ então p_Y é um foco genérico (|8|) e $g(Y)=0$ se e só se os au-tovalores de DY_{p_Y} são reais e iguais.

8.3- <u>Proposição</u>- Denotemos por H_1 o conjunto dos campos $X\varepsilon\chi^r$, tais que: 1) Existe um ponto $p\varepsilon\partial M$, que é um elemento crítico quase-genérico do tipo β_1, como único elemento crítico não genérico de X; 2) X satisfaz Ω_2,Ω_3 e todos os pontos críticos de X distintos de p são hiperbólicos. Então: a) H_1 é uma subvariedade mergulhada de Banach de classe C^{r-1} e codimensão um de χ^r; b) Existe vizinhança B de X em H_1 tal que qualquer $Y\varepsilon B$ conjuga com X.

Antes de demonstrarmos efetivamente 8.3, iremos fazer algumas observações e enunciar alguns lemas.

8.4- <u>Observação</u>- Se $X\varepsilon H_1$, a condição b dada na definição da elemento crítico quase-genérico do tipo β_1 nos permite afirmar que existe vizinhança F de p em M, tal que qualquer trajetória de X em F, encontra ∂M transversalmente, não encontra ∂M ou se ela tem p como o seu α- ou ω-limite, então "ela tende a p transversalmente a ∂M".

8.5- <u>Observação</u>- Seja $X\varepsilon H_1$, tal que $[\sigma^2(X,p)-4\Delta(X,p)] <0$. Através da construção feita em |22,p.24 e 25| o arco $S=s(I)$ e o mergulho $s:I\to\partial M$, dados em 4.3, podem ser obtidos, tais que, o fluxo X induz um difeomorfismo de classe C^{r-1}, θ_X definido em $S^-=s[-1,0]$ com valores em $S^+=s[0,1]$ satisfazendo $\theta_X(s(-1))=s(1)$, $\theta_X(p)=p$, $s(\alpha)$ e $\theta_X(s(\alpha))$ pertencem à mesma trajetória de X; a mesma referência nos leva a conclusão de que qualquer trajetória de X, exceto p, encon-

-tra $(S-\{p\})$ transversalmente.

O lema seguinte, decorre imediatamente de |16|.

8.6- Lema- Se $X \varepsilon H_1$, então existe vizinhança de X em X^r, B, tal que qualquer $Y \varepsilon B$ satisfaz Ω_3 e todos os pontos críticos de Y, exceto eventualmente p_Y, são genéricos e estão no interior de M.

8.7- Lema- Qualquer $X \varepsilon H_1$, possui uma vizinhança B_o em H_1, tal que: a) Existe vizinhança F de p em M, tal que qualquer trajetória de $Y \varepsilon B_o$, em F, encontra M transversal-mente, não encontra ∂M ou "tende a p_Y transversalmente a ∂M"; b) se X tem n pontos críticos (hiperbólicos) no interior de M, então $Y \varepsilon B_o$ tem n e somente n pontos críticos (hiperbóli-cos) no interior de M e c) qualquer $Y \varepsilon B_o$ satisfaz Ω_2, Ω_3, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6 e todos os pontos críticos de Y, exceto p_Y, são hiperbólicos.

A parte a) do lema 8.7 decorre imediatamente da teoria de transversalidade e as partes b) e c) de |16| e de 8.11.

O lema seguinte tem demonstração imediata.

8.8- Lema- H_1 é aberto e denso em H_1^2.

Prova de 8.3- A parte a) é consequência imediata de 8.1, 8.2, 8.6, 8.7 e 8.8. Demonstremos agora a parte b).

Se $X \varepsilon H_1$ então p:

O_1- é uma sela (hiperbólica),

O_2- é um nó não degenerado (hiperbólico),

O_3- p satisfaz $[\sigma^2(X,p)-4\Delta(X,p)]<0$.

Iremos demonstrar a parte b) de 8.3, separadamente para cada um dos casos citados acima.

O_1- Seja $\tilde{X}$ um representante de X em $\tilde{\chi}^r$. Denotemos por $\tilde{F}$ uma vizinhança de p em N, tal que $\tilde{X}_{|\tilde{F}}$ seja genérico; consequentemente as separatrizes S_i, i=1,2,3,4 de p em relação a $\tilde{X}$, encontram $\partial\tilde{F}$ transversalmente, que por sua vez determinam quatro subregiões $\tilde{T}_i$ de $\tilde{F}$ (i=1,..,4); sejam os conjuntos $T_i=\tilde{T}_i\cap M$, $F=\tilde{F}\cap M$, $L_1=\partial\tilde{F}\cap M$ e $L_2=\tilde{F}\cap\partial M$ (vide figura 9). Vamos admitir também, que nenhuma separatriz de qualquer sela contida no interior de M, nenhuma trajetória que tangencia ∂M e nenhuma trajetória periódica, de X encontre F.

Sabe-se que $\tilde{F}$ pode ser determinado, tal que $\tilde{X}$ tangencia $\partial\tilde{F}$ em apenas quatro pontos; podemos impor, sem perda de generalidade que entre os quatro pontos, somente o que pertence a T_1 está em M. Admitiremos também que $L_2 \subsetneq S$, onde S é o arco dado em 8.5, juntamente com S^+ e S^-; mais ainda, X é transversal a S-{p} (vide 8.11)

Dados os pontos $a_1=S^-\cap\tilde{F}$ e $a_2=S^+\cap\tilde{F}$, vamos supor por simplicidade, que ao percorrermos o arco $(\overset{\frown}{a_1a_2})_{L_1}$, encontramos primeiro uma separatriz estável $S_1\subset T_1$ e depois uma separatriz instável $S_2\subset T_1$ (o outro caso pode ser analisado analogamente).

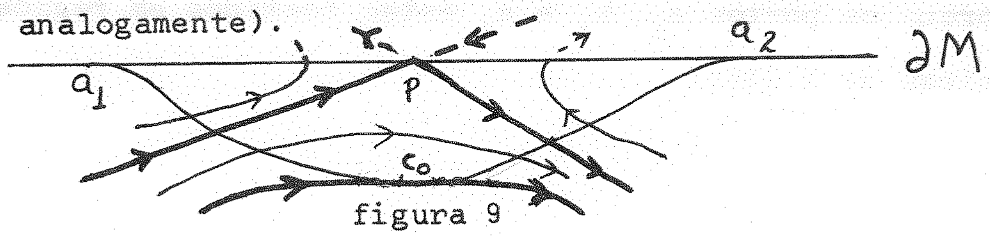


figura 9

Sejam ainda, os pontos $k_i = S_i \cap L_1$, $i=1,2$.

De modo análogo ao já feito (por exemplo em §6), aproximamos L_1 por outra curva (que ainda denotaremos por L_1) satisfazendo o seguinte: i) existe vizinhança B de X em $\mathfrak{X}^r$, tal que, se $Y \varepsilon B_o \cap H_1$ então $p_Y \varepsilon F$; ii) as separatrizes de p_Y, $\bar{S}_1$ e $\bar{S}_2$, correspondentes respectivamente com S_1 e S_2, encon- -tram L_1 transversalmente em pontos $\bar{k}_1$ e $\bar{k}_2$ (respectivamente); iii) L_1 tangencia ∂M em a_1 e a_2; iv) X é transversal a L_1, exceto num ponto $c_o \varepsilon int(\widehat{k_1 k_2})_{L_1}$, onde o contacto entre X e L_1 é genérico; v) a região $M_2 = (M - int(F))$ é uma subvariedade de M, C^∞; vi) exceto em p, X é transversal a L_2.

Como $X_{|M_2}$ é genérico (por construção de M_2), exis- -te vizinhança de $\mathfrak{X}^r$, $B \subset B_o$, tal que, se $Y \varepsilon B\ H_1$ então existe homeomorfismo $h_2 : M_2 \to M_2$, conjugando $X_{|M_2}$ com $Y_{|M_2}$; se B é su- -ficientemente pequeno, para cada $Y \varepsilon B \cap H_1$, existe um ponto $\bar{c}_o \varepsilon int(\widehat{\bar{k}_1 \bar{k}_2})_{L_1}$ correspondente com c_o e evidentemente temos $h_2(c_o) = \bar{c}_o$. Consequentemente, se $m_1 \varepsilon int(\widehat{k_1 c_o})_{L_1}$ então a traje- -tória $\gamma_X(m_1)$ encontra $int(\widehat{c_o k_2})_{L_1}$ em um único ponto m_2; além disso o arco $(\widehat{m_1 m_2})_{\gamma_X(m_1)}$ está contido em F. Para $Y \notin B \cap H_1$ te- -remos os correspondentes $\bar{m}_1$, $\bar{m}_2$ e $\gamma_Y(\bar{m}_1)$ |22,p.27|. Devemos fazer as seguintes exigências: a) $h_2(a_i) = a_i$, $i=1,2$; b) $h_2(k_i) = \bar{k}_i$, $i=1,2$ e c) se $h_2(m_1) = \bar{m}_1$ então $h_2(m_2) = \bar{m}_2$; isto é possível porque os pontos a_i, k_i e m_i estão contidos em regiões canô- -nicas de X |16|.

As curvas S_i (respec. $\bar{S}_i$) determinam três subre-giões em F, T_i ($\bar{T}_i$), i=1,2,3; a extensão de $h_2:M_2 \to M_2$ para um homeomorfismo $h:M \to M$, conjugando X com Y é feita através da razão de comprimento de arco e de maneira análoga ao já feito anteriormente em outros parágrafos.

O_2- Manteremos aqui, as mesmas notações de O_1, com respeito a $\tilde{X}$, $\tilde{F}$, F, L_1, L_2, S, S^+, S^-, a_1 e a_2; consideremos ainda, os conjuntos $L_2^+=S^+\cap L_2$ e $L_2^-=S^-\cap L_2$.

Como p é do tipo O_2, X é transversal a L_1 e a S exceto em p (ver 8.11.a). Por simplicidade, vamos considerar p um poço (se p for uma fonte o caso é análogo) e sem perda de generelidade vamos supor que : a) se $q\varepsilon L_2^- -\{p\}$ então $\phi_X(q,t)\varepsilon int(F)$, para $t>0$ e $\lim_{t\to\infty}\phi_X(q,t)=p$; b) se $q\varepsilon int(L_2^+)$, existe um número $t_o<0$ tal que $:\phi_X(q,t)\varepsilon int(F)$ para $t\varepsilon(t_o,0)$, $\phi_X(q,t_o)\varepsilon L_1$; $\phi_X(q,t)\notin F$ para $t<t_o$ e $\gamma_X(a_2)=a_2$.

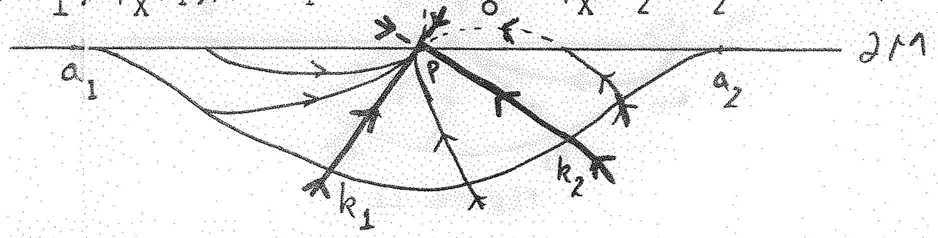


figura 10

Por simplicidade, vamos chamar de E_1, o autoespaço cujas trajetórias, exceto uma que denotaremos por γ_2 que tangencia E_2 em p, tangenciam E_1 em p; e se percorrermos o arco $(\widehat{a_1 a_2})_{L_1}$ encontramos primeiro as trajetórias que tangenciam E_1. Desta maneira γ_2 intercepta L_1 em um único ponto k_2 (notemos que se p é do tipo O_2 então p é hiperbólico, em relação a X). Além disso, todas as trajetórias de X encontrando $(\overset{\curvearrowright}{k_2a_2})_{L_1}$, exceto γ_2, encontram L_2^+ transversalmente |8,p.90|.

De maneira idêntica ao feito anteriormente, vamos aproximar L_1 por uma outra curva (que também denotaremos por L_1) satisfazendo o seguinte: i) L_1 é transversal a X em todos os pontos exceto em um, que o chamaremos de c_o; este ponto está em $\mathrm{int}(L_1)$, próximo de a_1 e o contacto entre X e L_1 neste ponto é genérico; ii) a trajetória $\gamma_X(c_o)$ encontra L_2^-, transversalmente em um ponto c_1 e tem p como seu ω-limite; iii) L_1 é tangente a S em a_1 e a_2; iv) $M_2=(M-\mathrm{int}(F))$ é uma subvariedade C^∞ de M. Deveremos admitir também que nenhuma separatriz de sela e nenhuma trajetória de X que tangencia ∂M encontre $M\cap F$; além disso, nenhuma trajetória periódica de X deverá encontrar F.

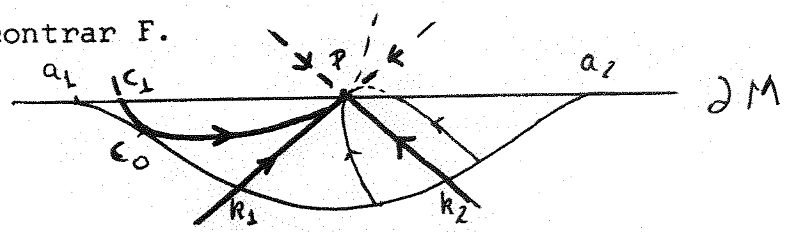


figura 11

Consideremos em F as quatro seguintes regiões determinadas por X:

a) T_1- limitada por $(\overset{\curvearrowright}{a_1c_1})_{L_2}$, $(\overset{\curvearrowright}{a_1c_o})_{L_1}$ e $(\overset{\curvearrowright}{c_1c_o})_{\gamma_X(c_o)}$.

b) T_2- limitada por $(\overset{\curvearrowright}{c_1p})_{\gamma_X(c_o)}$ e $(\overset{\curvearrowright}{c_1p})_{L_2}$.

c) T_3- limitada por $(\overset{\curvearrowright}{c_op})_{\gamma_X(c_o)}$, $(\overset{\curvearrowright}{c_ok_2})_{L_1}$ e $(\overset{\curvearrowright}{k_2p})_{\gamma_2}$.

d) T_4- limitada por $\overset{\frown}{(p,a_2)}_{L_2^+}$, $(k_2p)_{L_2}$ e $\overset{\frown}{(k_2a_2)}_{L_1}$.

Como por construção, $X_{|M_2}$ é genérico seja B uma vi-zihança de X em χ^r, tal que, se $Y\varepsilon B\cap H_1=B_1$, então : 1) p_Y é do tipo 0_2, $p_Y\varepsilon F$ e as condições de transversalidade sôbre F permanecem válidas, existe homeomorfismo $h_2:M_2\to M_2$, levan-do trajetórias de $X_{|M_2}$ em trajetórias de $Y|_{M_2}$. Naturalmente para cada $Y\varepsilon B_1$, existirão os correspondentes objetos $\bar{\gamma}_2$, $\bar{k}_2$, $\bar{c}_o$, $\bar{c}_1$, $\bar{T}_1$, $\bar{T}_2$, $\bar{T}_3$, $\bar{T}_4$ e obrigatoriamente teremos $h_2(c_o)=\bar{c}_o$. Se impusermos $h_2(k_2)=\bar{k}_2$ e $h_2(a_i)=a_i$, i=1,2, podemos extender facilmente h_2 para um homeomorfismo $h:M\to M$, conjugando X com $Y\varepsilon B_1$; convém observar que, cada $\bar{T}_i$ será imagem por h do seu correspondente T_i.

0_3- Por 8.5 o conjunto de todas as trajetórias de X passando pelos pontos de S, nos fornece uma vizinhança V de p em M, cujo bordo é constituido por S e $\gamma_X(s(-1))$.

Seja F uma vizinhança de p em M, contida em V, com $\partial F=L_1\cup L_2$, $L_2\subset S$, $L_1\cap S^+=a_2=s(\nu)$ e $L_1\cap S^-=a_1=s(-\nu)$; além disso: i) X é transversal a L_2 exceto em p |22|; ii) X é transversal a L_1, exceto num ponto $c_o\varepsilon int(L_1)$, onde o contacto entre X e a curva em questão é genérico; a trajetória $\gamma_X(c_o)\subset F$ e encon-tra S^- (respec. S^+) somente em um ponto c_1 (c_2); iii) L_1 tangencia S^- (respec. S^+) em um único ponto a_1 (a_2); iv) $M_2=M-int(F)$ é subvariedade C^∞ de M. Vamos admitir também que nenhuma separatriz de sela , nenhuma trajetória que tangencia ∂M e nenhuma trajetória periódica , de X encontre F.

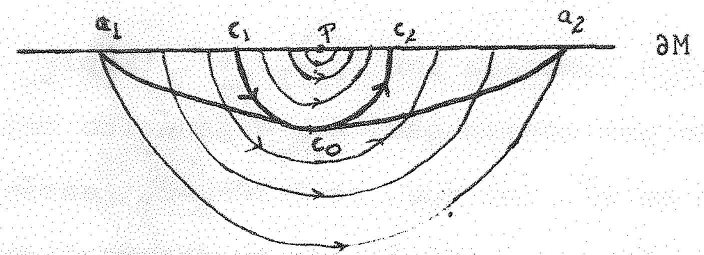


figura 12

De modo análogo a O_1 e O_2, determinamos uma vizi-nhança B de X em H_1 tal que qualquer $Y \varepsilon B$ conjuga com X.

8.8- Observação- Dado $X \varepsilon H_1$, se $p \varepsilon \partial M$ é um ponto crí-tico simples e não hiperbólico de X, existe uma sequência de campos $Y_n \varepsilon \chi^r \cap Q_1$ |22|, convergindo para X (no sentido C^r), tal que p_{Y_n} é um foco composto e está no interior de M; isto implica que $Ad(Q_1) \cap H_1 \neq \emptyset$.

8.9- Observação- Denotemos por $\bar{H}_1$ o subconjunto de H_1 de campos Y, tais que p_Y é hiperbólico. É evidente que $\bar{H}_1$ é aberto e denso em H_1 e além disso a Proposição 8.3 conti-nua válida para $\bar{H}_1$.

8.10- Proposição- $\bar{H}_1$ é aberto em χ_1^r.

A demonstração desta proposição dependerá dos lemas que se encontram em 8.11.

8.11- Observações- Os lemas abaixo falam sôbre o comportamento das trajetórias de um campo Y nas proximidades de um ponto crítico hiperbólico, em relação a uma dada curva dada.

Seja V uma vizinhança de um ponto p no R^2 e X um campo vetorial sôbre R^2 de classe C^r, r 2, tal que p é a úni-

-ca singularidade do campo em V; além disso p é um ponto crí-
-tico hiperbólico de X. Denotemos por λ_1, λ_2 os autovalores de DX_p e T_1, T_2 seus respectivos autoespaços. Consideremos $s: I=[-1,1] \to R^2$, um mergulho de classe C^∞, com $s(0)=p$ e $S=s(I)$.

8.11.a- Lema- Supomos que $\lambda_1, \lambda_2 \varepsilon R$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ e que o mergulho s dado acima seja transversal a T_i, $i=1,2$. Então existem vizinhanças V_1 de p em R^2, $V_1 \subset V$ e B_1 de X em $\chi^r(R^2)$, tais que: i) cada $Y \varepsilon B_1$, tem uma única singularidade p_Y em V_1, que é hiperbólica e é do mesmo tipo que p (em relação a X); ii) existe uma função $\alpha: B_1 \to R$ de classe C^r, tal que, se $p_Y \notin S \cap V_1$, então $Y(s(\alpha(Y)))$ é tangente a S em $s(\alpha(Y))$ para $Y \varepsilon B_1$; iii) o contacto entre Y e S em $s(\alpha(Y))$ é genérico.

Prova- Sejam B_o e V_o vizinhanças de X e p em $\chi^r(R^2)$ e R^2 respectivamente, tais que cada $Y \varepsilon B_o$, possue uma única singularidade p_Y em V_o, que é hiperbólica (e do "mesmo tipo que p") (a prova disto pode ser vista, por exemplo, em |13, parte VIII|).

Consideremos os conjuntos $S_o = S \cap V_o$ e $I_o = s^{-1}(S_o)$.

Definamos uma aplicação de classe C^r, $G: B_o \times I_o \to R$, por $G(Y,\alpha) = Y(s(\alpha)) \wedge s'(\alpha)$ (onde $\wedge$ significa produto exterior). Obviamente tem-se $G(X,0)=0$.

Seja $x=(x_1,x_2)$, um sistema de coordenadas em tôr-
-no de p (por exemplo em V_o) com $\frac{\partial}{\partial x_i} \varepsilon T_i$, $i=1,2$. Nestas coor-
-denadas, as componentes de X, X_1 e X_2, satisfazem:

$$\frac{\partial X^1}{\partial x_2}(0,0)=\frac{\partial X^2}{\partial x_1}(0,0)=0 \quad , \quad \frac{\partial X^1}{\partial x_1}(0,0)=\lambda_1 \text{ e } \frac{\partial X^2}{\partial x_2}(0,0)=\lambda_2$$

Se $s(\alpha)=(s_1(\alpha),s_2(\alpha))$, por hipótese temos que $s_1'(0)\neq 0$ e $s_2'(0)\neq 0$. Daí $G(Y,\alpha)=Y^1(s(\alpha)).s_2'(\alpha) - Y^2(s(\alpha)).s_1'(\alpha)$ e verifica-se trivialmente que:

$\frac{\partial G}{\partial \alpha}(X,0)=s_1'(0)s_2'(0)(\lambda_1-\lambda_2)$; esta expressão é dife-rente de 0, pois por hipótese $\lambda_1\neq\lambda_2$. Por conseguinte, pelo teorema das funções implícitas, existem vizinhanças B_1 de X em $\chi^r(R^2)$ $(B_1\subset B_o)$, I_1 de $\alpha=0$ em R $(I_1\subset I_o)$ e uma aplicação de classe C^r, $\alpha:B_1\to I_1$, tal que $\alpha(X)=0$ e $G(Y,\alpha)=0$ somente se $\alpha=\alpha(Y)=\alpha_Y$.

Se $Y(s(\alpha(Y)))\neq 0$, então este vetor e $s'(\alpha(Y))$ são linearmente independentes; isto prova i) e ii).

Se o contacto entre Y e S em $s(\alpha(Y))$ for não gené-rico, não é difícil de encontrar uma sequência de campos $Z_n\in\chi^r(R^2)$ convergindo para Y (no sentido C^r), tal que cada Z_n possue pontos de tangência (mais de um) com S_o, próximos de $s(\alpha(Y))$ (vide técnica usada em 11.1); isto contradiz ii) e demonstra iii); este fato, também pode ser constatado dire-tamente através de $\frac{\partial^2 G}{\partial \alpha^2}(Y,\alpha_Y)\neq 0$, utilizando-se um fluxo tu-bular para Y em tôrno de $s(\alpha(Y))$. E com isto, concluímos o lema em jogo.

8.11.b- Lema- Supomos que λ_1 e λ_2 sejam complexos (e portanto conjugados). Então existem vizinhanças V_1 de p em

V e B_1 de X em $\chi^r(R^2)$, tais que: i) cada $Y\varepsilon B_1$ tem uma única singularidade p_Y em V_1, que é hiperbólica e é do "mesmo tipo" que p; ii) existe uma função $\alpha:B_1\to R$ de classe C^r, tal que se $p_Y\notin S\cap V_1$ então $Y(s(\alpha(Y)))$ é tangente a S em $s(\alpha(Y))$ para $Y\varepsilon B_1$; iii) o contacto entre Y e S em $s(\alpha(Y))$ é genérico.

Prova- Sejam S_o, I_o, V_o e G, os objetos dados na demonstração do lema anterior.

Consideremos $x=(x_1,x_2)$ um sistema de coordenadas em tôrno de p (por exemplo em V_o), com $\frac{\partial}{\partial x_1}=s'(0)$. Nestas coor-denadas, as componentes de X, X_1 e X_2, satisfazem $\frac{\partial X^1}{\partial x_1}=\frac{\partial X^2}{\partial x_2}=\alpha$ e $\frac{\partial X^1}{\partial x_2}=-\frac{\partial X^2}{\partial x_1}=\beta$ ($\alpha\neq 0$ e $\beta\neq 0$). A mesma técnica utilizada em 8.11.a, nos permite demonstrar sem maiores dificuldades o lema 8.11.b.

8.11.c- Lema- Supomos agora que p seja um ponto crítico hiperbólico de $X\varepsilon\chi^r(R^2)$, onde seus autovalores são reais e satisfazem $\lambda_1<\lambda_2<0$ (ou $0<\lambda_1<\lambda_2$). Seja $s:I\to R^2$, o mergulho dado em 8.11.a, possuindo a seguinte propriedade adi-cional: existe uma única separatriz de uma sela (hiperbólica) γ_X, de comprimento $L<\infty$; que tem p como ω-limite e tal que $\gamma_X\cap S=\emptyset$. Então existem vizinhanças, V_1 de p em R^2 e B_1 de X em $\chi^r(R^2)$, tais que: i) qualquer $Y\varepsilon B_1$ é transversal a ∂V_1 (∂V_1 é uma curva C^∞); ii) cada $Y\varepsilon B_1$ possue uma separatriz de sela γ_Y que encontra ∂V_1 num único ponto w_Y e além disso a corres-pondência $Y\to w_Y$ é de classe C^r; iii) $s(\alpha(Y))\notin\gamma_Y$, onde $s(\alpha(Y))$ é o ponto de S obtido em 8.11.a.

Prova- As partes i) e ii) decorrem de |16| , sendo que a sua verificação pode ser feita também, de modo similar ao lema 4.3 de |22| . Verifiquemos agora a parte iii).

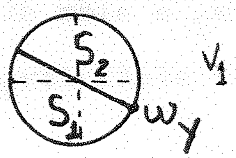
Consideremos V_1 e B_1, dados em i) e ii) e satisfa--zendo o lema 8.11.a; podemos admitir ainda que S é transver--sal a ∂V_1 e que $V_1 - S$ tem duas componentes conexas S_1 e S_2 (vide figura 13).

Se γ_X é uma trajetória tangente a T_1, a prova é evi--dente. Supomos pois, que isto não aconteça.

Como o ponto $w_X = \gamma_X \cap \partial V_1$ não está em S, podemos supor que $w_Y \notin S \cap \partial V_1$, para todo $Y \in B_1$ (isto é facilmente constatado pe--la variação diferenciável das trajetórias).

Fixemos o sistema de coordenadas em V_1, $x = (x_1, x_2)$ com $x(p) = 0$, dado em 8.11.a; por | 8,p.90| dado $\varepsilon > 0$, V_1 pode ser escolhido tal que $\left|\frac{X^2(q)}{X^1(q)}\right| < \varepsilon$ para $q \in V_1$ e q não pertencendo às trajetórias de X, que tangenciam T_1; por continuidade, po--demos supor que aquela desigualdade, permanece válida para $Y \in B_1$ e q não pertencendo às trajetórias de Y próximas a T_1 | 8,p.87 a 98| . Convém observar ainda, que $0 < K_1 < \left|\frac{s_2'(\alpha)}{s_1'(\alpha)}\right| < K_2 < \infty$ para $\alpha \in I$. (*)

Vamos admitir que os autoespaços T_1 e T_2, dão orí--gem em V_1, a quatro quadrantes Q_i, i=1,2,3,4 (vide figura 13)



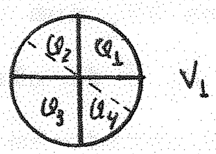


figura 13

Vamos supor por simplicidade que $S\cap(Q_1 \cup Q_3)=p$ e $w_Y \in Q_4 \cap S_1$ (os outros casos são similares). Separemos os ca--sos em que p_Y esteja nas diferentes regiões determinadas por S, S_i, Q_j, $i=1,2$ e $j=1,2,3,4$:

1) se $p_Y \in S$ a conclusão da demonstração é óbvia,

2) se $p_Y \in S_2 \cap Q_1$, como êste ponto é ω-limite de γ_Y, então $\gamma_Y \cap S = A_Y$ possue: a) um único ponto ou b) mais de um pon--to. Se a) acontece então $s(\alpha(Y)) \notin A_Y$, pois o contacto entre Y e S , nêste ponto é genérico e b) não pode ocorrer, pois em caso contrário, a continuidade de Y em S obriga o surgimen--to em S de pelo menos dois pontos de tangência de Y com a curva, o que é um absurdo (vide 8.11.a),

3) se $p_Y \in Q_3 \cap S_1$ a observação (*) feita no início da demonstração, implica que γ_Y não pode encontrar S (ainda que necessitemos diminuir V_1) e portanto $s(\alpha(Y)) \notin \gamma_Y$.

Os outros casos são analisados similarmente.

8.11.d- Lema- O lema 8.11.c permanece válido, se no lugar da separatriz de sela, existir uma trajetória (única) que tangencia uma outra curva (diferente de S) mergulhada, num único ponto q e cujo contacto neste ponto é genérico.

A prova de 8.11.d é análoga à de 8.11.c.

8.11.e- Observação- A título de curiosidade, uma análise mais profunda sôbre p_Y, nos permite afirmar que se V_1 é a vizinhança em R^2 , dada ou em 8.11.a ou em 8.11.b, então a curvatura da trajetória que passa por $s(\alpha(Y))$, é maior ou menor que a curvatura de S no mesmo ponto, conforme o ponto p_Y, esteja em S_1 ou S_2 (vide figura 14).

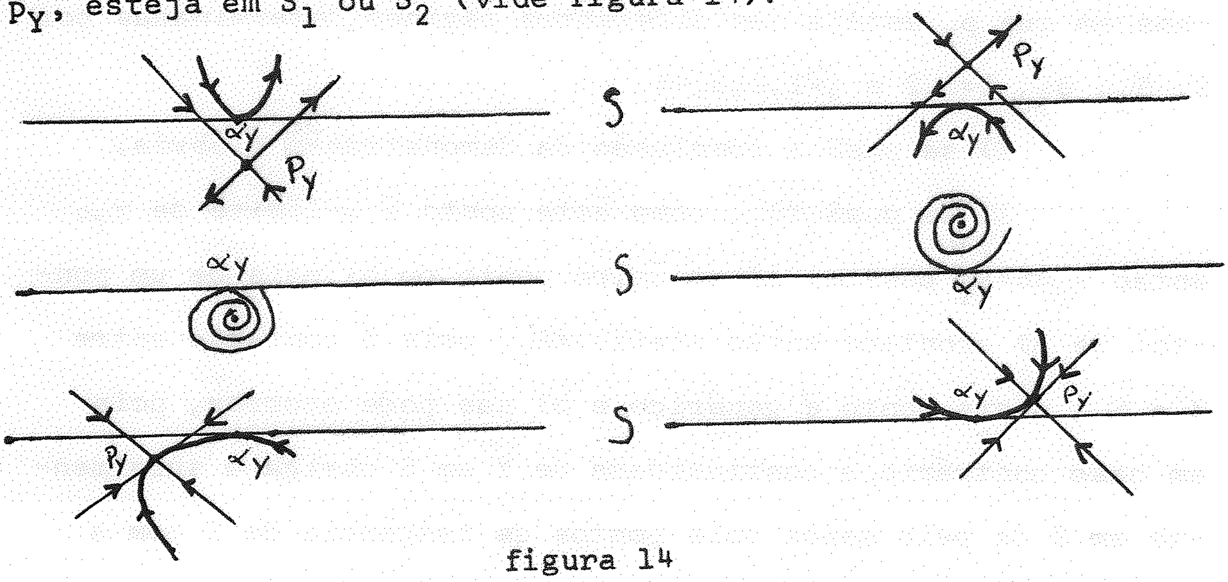


figura 14

<u>Prova de 8.10</u>- Sejam $X \in \mathcal{H}_1$, $p \in \partial M$ com $X(p)=0$ e $\tilde{X}$ um representante de X em $\tilde{\chi}^r$. Analisemos os seguintes casos:

1) p é do tipo 0_1- consideremos as vizinhanças B de X em χ^r e F de p em M, dadas em 8.6 e satisfazendo as seguin-tes condições adicionais: i) qualquer separatriz de sela de $Y \in B$, exceto àquelas de p, não encontra F e ii) nenhuma traje-tória de $Y \in B$, que tangencia ∂M encontra F; isto é possível, desde que os pontos de tangência de X com ∂M e os pontos crí-ticos de X são em número finito.

Consideremos também $\tilde{B}$, $\tilde{F}$, vizinhanças de $\tilde{X}$ em $\tilde{\chi}^r$ e p em N, respectivamente, correspondentes com B, F e a função de classe C^{r-1}, $\tilde{f}:\tilde{B}\to R$ dadas em 8.1.

O lema 8.11.a nos permite obter $\tilde{B}$ e $\tilde{F}$, tais que se $\tilde{Y}\varepsilon\tilde{B}$ e $\tilde{f}(\tilde{Y})\neq 0$, então existe uma única trajetória $\gamma_{\tilde{Y}}$ de $\tilde{Y}$ que tangencia ∂M em um único ponto $q_{\tilde{Y}}\varepsilon\tilde{F}$. Além disso, o contacto entre as duas curvas no ponto em questão é genérico; isto é, se $\tilde{Y}\varepsilon\tilde{B}$ e $\tilde{f}(\tilde{Y})\neq 0$, então $Y=\tilde{Y}_{|M}$ satisfaz a condição B_5.

Devido a hiperbolicidade de p (e também de $p_{\tilde{Y}}$, pa--ra $\tilde{Y}\varepsilon\tilde{B}$) qualquer $Y\varepsilon B$, satisfaz as condições Ω_2 e B_2 ; para o mesmo campo, 8.11.a implica verdadeira a condição B_6. As condições Ω_1, B_1, B_3 e B_4 são obviamente satisfeitas para $Y\varepsilon B$ e $f(Y)\neq 0$. Estes fatos, juntamente com o lema 8.6 nos permi--te concluir que: se $Y\varepsilon B$ e $f(Y)\neq 0$ então $Y\varepsilon\Sigma_0$;

2) p é do tipo 0_2- consideremos as vizinhanças B de X em χ^r, F de p em M, dadas em 8.6 e satisfazendo as se--guintes condições adicionais: i) nenhuma separatriz de sela de X, encontra $\partial M\cap F$ e ii) nenhuma trajetória de $Y\varepsilon B$ que tan--gencia ∂M encontra $\partial M\cap F$; isto é possível, por 8.11.a, 8.11.b, 8.11.d e porque os pontos de tangência de X com ∂M e os pon--tos críticos de X são em número finito.

Como todas as trajetórias de X (exceto p) que en--contram F, "tendem a p transversalmente" à $\partial M\cap F$, um número positivo ε pode ser encontrado, tal que, se $Y\varepsilon f^{-1}(-\varepsilon,\varepsilon)$ e $f(Y)\neq 0$, então qualquer separatriz de sela de Y encontrando F, ou qualquer trajetória de Y que encontra F e tangencia ∂M em algum outro ponto fora de F, sejam transversais a $\partial M\cap F$.

De modo similar a 1) podemos obter uma vizinhança B de X em χ^r, tal que, se $Y \varepsilon B$ e $f(Y) \neq 0$ então $Y \varepsilon \Sigma_o$;

3) p é do tipo 0_3- da mesma forma que 1) e utilizando o lema 8.11.b, verifica-se que existe vizinhança B de X em χ^r, tal que se $Y \varepsilon B$ e $f(Y) \neq 0$ então $Y \varepsilon \Sigma_o$.

Imediatamente após 1), 2), e 3) temos que, dado $X \varepsilon \mathcal{A}_1$, existe vizinhança B de X em χ^r, tal que qualquer $Y \varepsilon B$. ou está em $\mathcal{A}_1$ ou está em Σ_o; isto é, $\mathcal{A}_1$ é aberto em χ_1^r.

§9

9.1- <u>Proposição</u>- Denotemos por H_5, o conjunto dos campos $X \varepsilon \chi^r$, tais que: 1) Existe um ponto $p \varepsilon \partial M$, que é um elemento crítico quase-genérico de X do tipo β_5 e é o único elemento crítico não genérico de X; 2) X satisfaz Ω_1, Ω_2 e Ω_3. Então: a) H_5 é uma subvariedade mergulhada de Banach, de classe C^{r-1} e codimensão um de χ^r; b) Qualquer $X \varepsilon H_5$, possui uma vizinhança B em H_5, tal que qualquer $Y \varepsilon B$ conjuga com X; c) H_5 é aberto em χ_1^r.

A demonstração de 9.1 dependerá de dois lemas, dentre os quais o que se segue decorre imediatamente de |16|

9.2- <u>Lema</u>- Qualquer $X \varepsilon H_5$, tem uma vizinhança B em χ^r, tal que qualquer $Y \varepsilon B$ satisfaz Ω_1, Ω_2, Ω_3, B_1, B_2, B_3 e B_4.

9.3- <u>Observação</u>- O Lema 9.4 (a seguir), prova em particular, que B pode ser escolhido tal que qualquer $Y \varepsilon B$ satisfaz também B_6.

9.4- <u>Lema</u>- Seja $X\epsilon\chi^r$, $r>3$, possuindo uma trajetória γ_X que tangencia ∂M, em um único ponto p; além disso, o ponto p satisfaz a condição Q.G em relação a X. Então existem vi--zinhanças B_5 de X em χ^r, F de p em M e uma função de classe C^{r-1}, $f:B_5\to R$, tais que: a) $f(Y)=0$ se e só se Y possui uma trajetória γ_Y tangenciando ∂M em um único ponto $p_Y\epsilon F$, satis--fazendo a condição Q.G. em relação a Y; se $f(Y)>0$, então qualquer trajetória de Y, encontrando F é transversal a ∂M em F; se $f(Y)<0$, então existem duas e só duas trajetórias de Y, distintas, encontrando F, tangenciando ∂M em dois pontos q_1 e q_2 (em F) respectivamente e satisfazendo em ambos os pon--tos a condição G em relação a Y; b) $df_X\neq 0$.

<u>Prova</u>- De saída, consideremos vizinhanças B_o de X em χ^r e F de p em M, tais que qualquer $Y\epsilon B_o$, não possui nenhum ponto crítico em F.

Definamos a aplicação germe $G:(B_o\times R,(X,0))\to(R,0)$ de classe C^r, por $G(Y;\alpha)=Y(s(\alpha))\wedge s'(\alpha)$, onde s é o mergulho dado em 4.2.

Temos que $\frac{\partial G}{\partial\alpha}(Y,\alpha)=\frac{dY}{d\alpha}(s(\alpha))\wedge s'(\alpha) - Y(s(\alpha))\wedge s''(\alpha)$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial\alpha^2}(Y,\alpha)=\frac{d^2Y}{d\alpha^2}(s(\alpha))\wedge s'(\alpha) - 2\frac{dY}{d\alpha}(s(\alpha))\wedge s''(\alpha) + Y(s(\alpha))\wedge s'''(\alpha$$

Através de um cálculo direto, verifica-se que :

$$\frac{\partial G}{\partial\alpha}(X,0)=0 \text{ e } \frac{\partial^2 G}{\partial\alpha^2}(X,0)\neq 0 .$$

Para tanto basta tomar um fluxo tubular (F,X,p) e utilizar a hipótese de que o contacto entre X e ∂M em p é quase-genérico. Daí pelo teorema das funções implícitas, existem vizinhanças B_5 de X em χ^r, $B_5 \subset B_o$, J de $\alpha=0$ em R e uma aplicação de classe C^{r-1}, $\alpha: B_5 \to J$, satisfazendo $\alpha(X)=0$ e $\frac{\partial G}{\partial \alpha}(Y,\alpha)=0$ se e só se $\alpha=\alpha(Y)=\alpha_Y$. Admitiremos daqui para a frente que, $\frac{\partial^2 G}{\partial \alpha^2}(X,0)>0$; o caso $\frac{\partial^2 G}{\partial \alpha^2}(X,0)<0$ é similar. Por continuidade, podemos escolher B_5 e J, tais que, $\frac{\partial^2 G}{\partial \alpha^2}(Y,\alpha)>0$, para $(Y,\alpha)\in B_5 \times J$.

Consequentemente α_Y é ponto de mínimo da aplicação $g_Y(\alpha)=G(Y,\alpha)$, para cada $Y \in B_5$ e:

i) se $g_Y(\alpha_Y)>0$, então para todo $\alpha \in J$, $g_Y(\alpha)>0$. Isto significa que Y é transversal a ∂M, em uma vizinhança de p em M,

ii) se $g_Y(\alpha_Y)=0$, então $g_Y(\alpha)=0$ $(\alpha \in J)$, somente se $\alpha=\alpha_Y$,

iii) se $g_Y(\alpha_Y)<0$, então pelo teorema do valor intermediário, existem dois pontos $\alpha_1,\alpha_2 \in R$, $\alpha_1<\alpha_Y<\alpha_2$, tais que $g_Y(\alpha_1)=g_Y(\alpha_2)=0$. Observemos no entanto que $\frac{\partial G}{\partial \alpha}(Y,\alpha_i)\neq 0$, $i=1,2$.

Se $g_Y(\alpha_Y)=0$, então $\frac{\partial G}{\partial \alpha}(Y,\alpha_Y)=0$ implica que o contacto entre Y e ∂M em $s(\alpha_Y)$ é não genérico e $\frac{\partial^2 G}{\partial \alpha^2}(Y,\alpha_Y)\neq 0$ implica que aquele contacto, é quase-genérico.

Se $g_Y(\bar{\alpha})=0$ $(\bar{\alpha} \in J)$, então $\frac{\partial G}{\partial \alpha}(Y,\bar{\alpha})\neq 0$ implica que o contacto entre Y e ∂M em $s(\bar{\alpha})$ é genérico.

As duas afirmações acima podem ser imediatamente verificadas, tomando um fluxo tubular em relação a Y, em tôrno de $s(\alpha_Y)$ e de $s(\bar{\alpha})$, respectivamente.

A aplicação $f(Y)=G(Y,\alpha_Y)$, para $Y\in B_5$, demonstra a parte a) de 9.4. Provemos agora, que $df_X\neq 0$.

Obviamente $f(X)=0$ e:

$$df_X(Y)=dG_{(X,0)}(Y,0)+\frac{\partial G}{\partial \alpha}(X,0).d\alpha_X(Y).$$

Como $\frac{\partial G}{\partial \alpha}(X,0)=0$, precisamos mostrar apenas que $dG_{(X,0)}(Y,0)\neq 0$.

Consideremos o sistema de coordenadas locais em M, $y=(y_1,y_2)$ com $y(p)=0$, $\frac{\partial}{\partial y_1}=X$ e $\psi:M\to R$, uma função bacia (C^∞), com suporte em $|y(q)|\leq\delta$ para $\delta>0$, arbitrariamente pequeno, e satisfazendo $\psi(q)=1$ para $|y(q)|<\delta_1$, com $0<\delta_1<\delta$.

Para $Y=\psi\frac{\partial}{\partial y_2}$, consideremos a curva $h:[-\eta,\eta]\to \mathfrak{X}^r$, $h(\lambda)=Y_\lambda$ definida por $Y_\lambda=X+\lambda Y$. Em coordenadas, temos $Y_\lambda=(1,\lambda)$ e obviamente $G(Y_\lambda,0)=(1,\lambda)\wedge(1,0)=\lambda$. Daí tiramos que $df_X\neq 0$ e o lema 9.4 está provado.

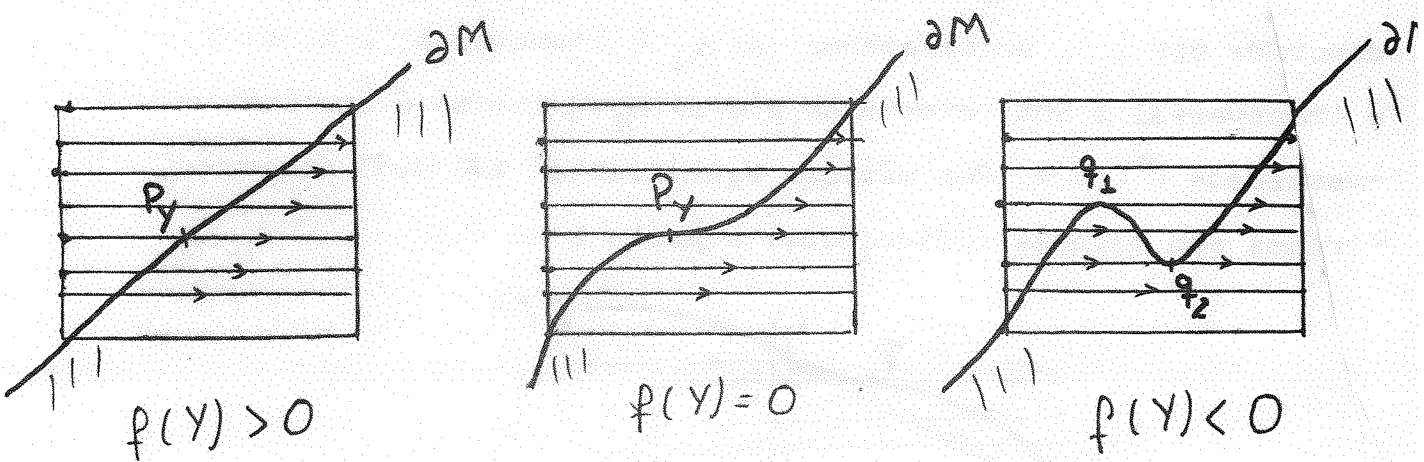


figura 15

Prova de 9.1- As partes a) e c) da proposição decorrem imediatamente de 9.2, 9.3 e 9.4; precisamos portanto, demonstrar somente a parte b.

Dado $X \varepsilon H_5$, sejam $p \varepsilon \partial M$, o seu elemento crítico quase-genérico e (F,p,y) um fluxo tubular em tôrno de p, em relação a X (y satisfaz $y(p)=0$ e $\frac{\partial}{\partial y_1}=X$).

Vamos admitir que nenhuma separatriz de sela, nenhuma trjetória que tangencia ∂M (exceto γ_X) e nenhuma trajetória periódica , de X encontre F.

Através de uma rotação de X em F, arbitrariamente pequena, obtemos um arco C^∞, L_1 contido em M, interceptando S em apenas dois pontos c_1 e c_2 e satisfazendo o seguinte: i) L_1 é transversal a ∂M em c_1 e tangente a ∂M em c_2; ii) $p \varepsilon K$, onde K é a região limitada por S e L_1; vamos supor por simplicidade que $c_1 \varepsilon S^- - \{p\}$, $c_2 \varepsilon S^+ - \{p\}$ e $y_2(c_1) < y_2(p) < y_2(c_2)$ (vide notações de outras secções). Através das mesmas tecnicas utilizadas atrás, aproximamos L_1 por uma outra curva (também denotada por L_1), satisfazendo: a) L_1 é transversal a X; b) X é transversal a $S \cap K$, exceto em p e c) $M_2 = M - int(K)$ é uma subvariedade C^∞ de M. Com métodos equivalentes a §6 ou §7 demonstramos sem maiores dificuldades a parte b de 9.1.

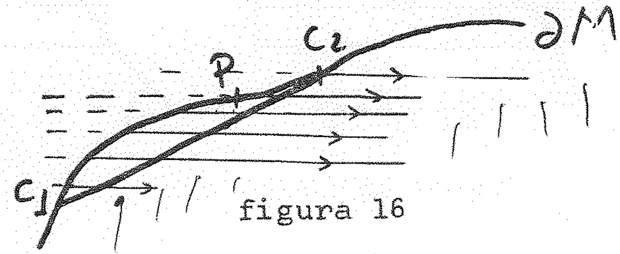


figura 16

Parte 3 - A subvariedade Σ_1

§10

Teorema 0- Denotemos por Σ_1^*, o subconjunto de X_1^r, definido por $\Sigma_1^* = \bigcup_{j=1}^{3} Q_j \bigcup_{k=1}^{5} H_k$. Então qualquer $X \in \Sigma_1^*$, tem uma Σ_1^*-vizinhança B_1, isto é, uma vizinhança na topologia intrínseca de Σ_1^*, tal que qualquer $Y \in B_1$ conjuga com X.

Prova do Teorema 0- Esta prova decorre das proposições 1.1, 2.1, 3.1, 5.1, 6.1, 7.1, 8.3 e 9.1.

10.1- Observação- Cada subvariedade Q_j ou H_k, j=1, 2,3 e k=1,2,3,4,5, poderão, eventualmente ser chamada de componente de Σ_1^*.

Consideremos agora, o conjunto $S_i = Q_1 \cup Q_2(i) \cup Q_3(i) \cup H_1 \cup H_2(i) \cup H_3(i) \cup H_4(i) \cup H_5$. Por 1.2, 2.1, 3.4, 5.6, 6.6, 7.6, 8.3, 8.10 e 9.1, temos que S_i é uma subvariedade de Banach, mergulhada, de classe C^{r-1} e codimensão um de X^r; mais ainda, $S_i \subsetneq S_{i+1}$, para i=1,2,3,.... Daí, o conjunto $\Sigma_1 = \bigcup_{j=1}^{3} Q_j \cup H_1 \bigcup_{k=2}^{5} H_k$, é uma subvariedade imersa de Banach de classe C^{r-1} e codimensão um de X^r, pois $\Sigma_1 = \bigcup_i S_i$.

Teorema 1- a) Σ_1 é uma subvariedade imersa de Banach, de classe C^{r-1} e codimensão um de X^r; r>3;

b) Qualquer $X \in \Sigma_1$, tem uma Σ_1-vizinhança B_1, tal que, qualquer $Y \in B_1$ conjuga com X.

Prova do Teorema 1- A parte a) segue da definição de Σ_1 e a parte b) segue da mesma forma que o Teorema 0, utilizando-se de 8.9.

10.2- <u>Observação</u>- Notemos que Σ_1 não é aberto em χ_1^r. Isto decorre imediatamente de 1.4.ii).

10.3- <u>Observação</u>- Σ_1 é aberto e denso em Σ_1^*. Isto é uma consequência imediata de 8.9.

10.4- <u>Observação</u>- Pretendemos aqui, dar uma defini--ção conceitual aos elementos de Σ_1. Este fato pode ter im--portância na tentativa de generalizar a presente disserta--ção, supondo dim.M>2.

"10.4.a- <u>Definição</u>- Um elemento $X \varepsilon \chi_1^r$, está em Σ_1, se dada qualquer curva diferenciável $\Gamma:[0,1] \rightarrow \chi_1^r$ com $\Gamma(0)=X$, exis--te um $\eta>0$, tal que $\Gamma(\eta_1)$ e (η_2) são conjugados para quais--quer $\eta_1, \eta_2 \varepsilon [0,\eta]$."

A equivalência entre as definições pode ser feita, utilizando-se o fato de que se $X \varepsilon (Q_2-\bar{Q}_2) \cup (Q_3-\bar{Q}_3) \cup (H_2-\bar{H}_2)$, en--tão êle possui um sistema fundamental de vizinhanças em Σ_1, <u>não conexas por arcos</u> (vide |22,p.14 e 35| e 5.7).

CAPÍTULO 2

O TEOREMA DA DENSIDADE

§11

Teorema 2- Σ_1 é denso em χ_1^r.

A prova deste teorema depende de uma sequência de aproximações, que serão dadas pelos lemas que se seguem.

11.1- Lema- Seja $X\varepsilon\chi_1^r$, possuindo uma trajetória γ_X,. que tangencia ∂M em um ponto p e neste ponto o contacto en-tre X e ∂M é não genérico. Então existem , uma vizinhança F de p em M e uma sequência de campos (Y_n) em χ_1^r, satisfazendo: a) $Y_n \to X$ (no sentido C^r) e b) cada Y_n, possue exatamente uma trajetória γ_n, ε-C^r próxima de γ_X (em M), tangenciando ∂M em um ponto $p_n \varepsilon F$ e satisfazendo neste ponto, a condição Q.G. em relação a Y_n.

Prova- Sejam $\tilde{X}$ um representante de X em $\tilde{\chi}^r$, $x=(x_1,x_2)$ um sistema de coordenadas sôbre uma vizinhança $\tilde{F}$ de p em N, com $x_1(p)=x_2(p)=0$, $\frac{\partial}{\partial x_1}=\tilde{X}$ e $uox_2=id$ (u dado em §4).

Consideremos as seguintes vizinhanças de p em N, $\tilde{F}_i=\{q\varepsilon N;\ |x_1(q)|<\delta_i,\ |x_2(q)|<\delta_i\}$, $i=0,1$, com $0<\delta_o<\delta_1$ e δ_1 ar-bitrariamente pequeno.

A vizinhança $\tilde{F}_1$ pode ser esclhida, tal que $\partial M \cap \tilde{F}_1$ é o gráfico de uma aplicação $\rho:\gamma_X \cap \tilde{F}_1 \to R$, de classe C^r (ver cons-trução em |23,p.11|). Vamos admitir que o contacto entre X e ∂M em p, é não genérico e não quase-genérico; isto é, $\rho(0)=\rho'(0)=\rho''(0)=\rho'''(0)=0$.

Sejam (ε_n) e (δ_n), sequências decrescentes de nú--meros positivos convergindo para 0, $0<\delta_n<\varepsilon_n$ para cada n e os conjuntos $\tilde{F}_n^1=\{q\varepsilon \tilde{F}_o$, tais que $|x_1(q)|<\delta_n$ e $x_2(q)=0\}$. Fixe--mos uma função $\beta:\gamma_X\cap\tilde{F}_1\to R$, de classe C^r, que satisfaz $\beta(0)=\beta'(0)=\beta''(0)=0$ e $\beta'''(0)\neq 0$ e definamos uma sequência de funções reais (ρ_n), de classe C^r, definidas em $\gamma_X\cap\tilde{F}_1$, por:

$$\rho_n(q)=\begin{cases}\rho(q)+\varepsilon_n\beta(q) & \text{se } q\varepsilon\tilde{F}_n^1\,,\\ \rho(q) & \text{se } q\notin\tilde{F}_o\end{cases}$$

Evidentemente $\rho_n\to\rho$ (no sentido C^r), $\rho_n(0)=\rho_n'(0)=\rho_n''(0)=0$ e $\rho_n'''(0)\neq 0$, para todo n.

Para cada n consideremos uma vizinhança $U_n\subset\tilde{F}_1$ de p e um difeomorfismo $\kappa_n:U_n\to\kappa_n(U_n)\subset\tilde{F}_1$, satisfazendo:

$[\kappa_n o(id,\rho)]=(id,\rho_n)$ e C^r próximo da identidade.

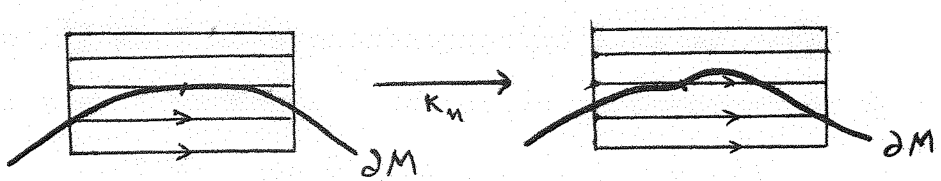


figura 1

Se ψ_n é uma função bacia, com suporte em $\tilde{F}_1$, $\psi_n(q)=1$ se $q\varepsilon U_n$ e $0\leqslant\psi_n\leqslant 1$, definamos finalmente a sequência de campos (Y_n) em χ_1^r por:

$$Y_n(q)=\psi_n(q)\left[d\kappa_n^{-1}(X)(q)\right]+(1-\psi_n(q))X(q),$$

que nos permite provar o lema em jôgo.

11.2- <u>Lema</u>- Seja $X\varepsilon\chi_1^r$, possuindo uma trajetória pe--riódica não genérica γ_X tangenciando ∂M em um ponto p. Então existem, uma sequência de campos em χ_1^r e uma vizinhança V de

γ_X em M, satisfazendo: a) $Y_n \to X$ e b) cada Y_n possue uma única trajetória periódica quase-genérica contida em $V \cap int(M)$.

Prova- Sejam $\tilde{X}$ um representante de X em $\tilde{\chi}^r$ e d a métrica fixada em 0.8.

Consideremos a aplicação $f: N \to R$ de classe C^r, definida por $f(q) = (d(q, \partial M))^k$, para k suficientemente grande. Para um conveniente $\varepsilon > 0$, $M_\varepsilon = f^{-1}(0, \varepsilon)$ é uma vizinhança tubular de ∂M em N, tal que $\partial M_\varepsilon = \partial M_\varepsilon^+ \cup \partial M_\varepsilon^-$, com $\partial M_\varepsilon^+ \subset N - M$ e $\partial M^- \subset M$. Mais ainda ∂M^+ é bordo de uma subvariedade M_ε, compacta e mergulhada em N, com $M \subset M_\varepsilon$. Daí existe um difeomorfismo de classe C^r, $\psi_\varepsilon : M \to M_\varepsilon$, ε-C^r próximo da identidade |26, p.56|.

Através da construção acima, podemos considerar uma sequência de subvariedades mergulhadas em N e compactas (M_n), $M \subsetneq M_{n+1} \subsetneq M_n \subsetneq N$, para todo n=1,2,3,... e tal que para cada n, existe difeomorfismo $\psi_n : M \to M_n$ de classe C^r com $|\psi_n|^r < \frac{1}{n}$.

Definamos a sequência (Y_n) por

$$Y_n(q) = \tilde{X}(\psi_n(q)) \text{ para } q \in M.$$

Obviamente $Y_n \to X$ e através da variação contínua das trajetórias, existe vizinhança V_1 de γ_X em M, tal que cada Y_n possue uma trajetória periódica não genérica $\gamma_n \subset V_1 \cap int(M)$; finalmente por |22, p.42| obtemos a sequência desejada.

11.3- Lema- Seja $X \in \chi_1^r$, possuindo uma trajetória periódica hiperbólica γ_X tangenciando ∂M em um ponto p. Então existem, uma sequência de campos $(Y_n) \in \chi_1^r$ e uma vizinhança V de γ_X em M, tal que: a) cada Y_n possue uma única trajetória periódica γ_n (hiperbólica) contida em V; b) $Y_n \to X$ e c) γ_n tangencia ∂M sòmente em p, genericamente.

<u>Prova</u>- Seja $\tilde{X}$ um representante de X em $\tilde{\chi}^r$. Podemos admitir que o contacto entre X e ∂M em p é genérico |16|.

Seja $\tilde{F}$ uma vizinhança pequena de p em N, onde $\tilde{X}$ é transversal a $\partial M \cap \tilde{F}$, exceto em p; isto é possível, pois o contacto entre X e ∂M em p é genérico.

Sejam q_1 e q_2, dois pontos em $\gamma_X \cap \tilde{F}$, tais que $\phi_X(q_1,t_1)=p$ e $\phi_X(q_1,t_2)=q_2$ para $0<t_1<t_2$. Consideremos também um fluxo tubular longo $\tilde{V}_1$ em N, em tôrno do arco $\Gamma=(\widehat{q_1 q_2})\gamma_X$, tal que $p \notin V_1$ (figura 2).

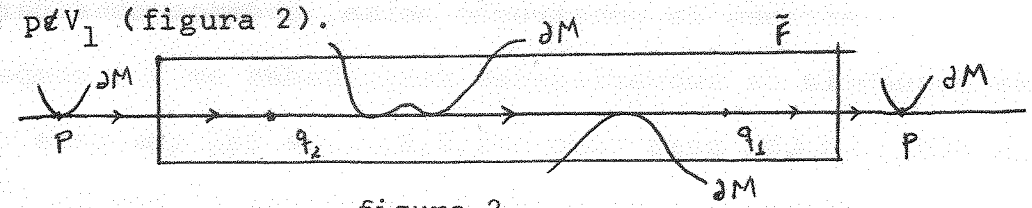


figura 2

Por métodos equivalentes utilizados em 11.2 e usando simultaneamente funções bacia, com suporte em $V_1=\tilde{V}_1 \cap M$ determinamos a sequência procurada.

11.3.a- <u>Observação</u>- O lema 11.3 permanece válido, se substituirmos trajetória periódica hiperbólica, por separatriz de sela genérica (isto significa que a sela em questão, é hiperbólica, está no interior de M e γ_X não é uma conexão de selas).

11.4- Lema- Seja $X\varepsilon\chi_1^r$, possuindo um ponto crítico hiperbólico $p\varepsilon\partial M$. Então existem, uma sequência de campos (Y_n) em χ_1^r e uma vizinhança F de p em M, tal que: a) $Y_n \to X$ e b) cada Y_n possue um único ponto crítico hiperbólico $p_n \varepsilon \partial M \cap F$, que é um elemento crítico quase-genérico do tipo β_1 de Y_n.

Prova- A demonstração de 11.4 é uma consequência imediata de 8.2 e 8.8.

11.5- Lema- Seja $X\varepsilon\chi_1^r$, possuindo um ponto crítico não hiperbólico $p\varepsilon\partial M$. Então existem, uma sequência de campos (Y_n) em χ_1^r e uma vizinhança F de p em M, tais que, cada Y_n possue um ponto crítico quase-genérico em $F\cap \mathrm{int}(M)$.

Prova- Este lema é provado diretamente, por trans- -lações locais do campo, em tôrno do ponto p. Consideremos pois, $\tilde{X}$ um representante de X em $\tilde{\chi}^r$, $x=(x_1,x_2)$ o sistema de coordenadas sôbre uma vizinhança $\tilde{F}$ de p em N, dado em 4.3 e $\psi: N \to R$ uma função bacia com suporte em $\tilde{F}$ e tal que $\psi(q)=1$ se $|x(q)|<\delta$, com δ positivo e arbitrariamente pequeno. A sequên- -cia de campos (X_n) em χ_1^r, definida por :

$$X_n(q)=\psi(q)(\tilde{X}(q+\frac{1}{n}\frac{\partial}{\partial x_2}) + (1-\psi(q))\tilde{X}(q) ,$$

possue um único ponto crítico $p_n=-\frac{1}{n}\frac{\partial}{\partial x_2}$ contido em $\tilde{F}\cap \mathrm{int}(M)$ e além disso p_n é do mesmo tipo que p.

Através de |22,p.39| obtemos sem maiores dificul- -dades, a sequência (Y_n) desejada.

11.6- <u>Lema</u>- Seja $X\varepsilon\chi_1^r$, possuindo uma trajetória γ_X, que não é separatriz de sela e nem periódica, e tangencia ∂M em mais de um ponto. Então existem, uma sequência de campos (Y_n) em χ_1^r, satisfazendo: a) $Y_n \to X$ e b) cada Y_n possui uma trajetória γ_n, "ε_n-C^r próxima" de γ_X, tangenciando ∂M em apenas dois pontos.

A prova deste lema, é feita, utilizando-se as mesmas técnicas da prova de 11.2 e 11.3 com o auxílio da aplicação $g_n: R \to R$, definida por:

$$g_n(\xi)=\begin{cases} -\varepsilon_n e^{h(\xi)} & \text{se } |\xi|\leqslant\delta, \\ 0 & \text{se } |\xi|\geqslant\delta, \end{cases}$$

onde $h(\xi)=-\dfrac{1}{(\xi+\delta_1)(\xi-\delta_2)(\xi^2-\delta^2)}$, com $0<\delta_1<\delta$ e $0<\delta_2<\delta$.

<u>Lema A</u>- Denotemos por Q_1^o, o conjunto dos campos $X\varepsilon\chi_1^r$, possuindo pontos críticos não genéricos e todos eles no interior de M. Então Q_1 é denso em Q_1^o.

Prova- vide |22,p.39| .

<u>Lema B</u>- Denotemos por Q_2^o, o conjunto dos campos $X\varepsilon\chi_1^r$, possuindo trajetórias periódicas não genéricas e todas elas contidas no interior de M. Então Q_2 é denso em Q_2^o.

<u>Prova</u>- vide |22,p.42|.

<u>Lema C</u>- Denotemos por Q_3^o, o conjunto dos campos $X\varepsilon\chi_1^r$, que possuem conexões de selas (contidas em int(M)) ou trajetórias recurrentes não triviais e todos seus pontos críticos e trajetórias periódicas estão no interior de M. Então $Q_1\cup Q_2\cup Q_3$ é denso em Q_3^o.

<u>Prova</u>- Vide |22,p.44|.

11.7- <u>Lema</u>- Seja $X\varepsilon\chi_1^r$, possuindo uma trajetória periódica genérica γ_X, tangenciando ∂M em apenas um ponto. Então dado $\varepsilon<0$, existe $Y\varepsilon H_2$, tal que $|Y-X|^r<\varepsilon$.

Prova- Por |16|, podemos admitir que o contacto entre X e ∂M em p é genérico.

Sejam F_1 e F_2 vizinhanças (tubulares) de γ_X em M, com F_1 arbitrariamente pequeno e: a) $F_1 \subsetneq F_2$; b) X é transver-sal a $S\cap F_2$ (S dado em 4.3) exceto em p; c) X é transversal a $(\partial F_i \cap int(M))$, $i=1,2$ e d) nenhuma trajetória periódica ou pon-to crítico de X encontra F_2. Consideremos também $\psi:M\to R$, uma funçaõ bacia com suporte em F_2, satisfazendo $\psi(q)=1$ para $q\varepsilon F_1$, e $0\leq\psi(q)\leq 1$ se $q\varepsilon F_2-F_1$.

Seja (Z_n) uma sequência em Σ_o, convergindo para X.

A seguinte sequência (Y_n) em χ_1^r, definida por

$Y_n=\psi X+(1-\psi)Z_n$ nos permite concluir o lema.

11.8- <u>Lema</u>- Seja $X\varepsilon\chi_1^r$, possuindo uma trajetória pe-riódica não genérica, tangenciando ∂M em apenas um ponto. Então dado $\varepsilon>0$, existe $Y\varepsilon Q_2$ tal que $|Y-X|^r<\varepsilon$.

A prova deste lema, decorre de 11.3 e do Lema A.

<u>Lema D</u>- Denotemos por H_1^o, o conjunto dos $X\varepsilon\chi_1^r$, que possuem trajetórias periódicas tangenciando ∂M . Então $H_1^o \subset Ad(H_1 \cup Q_2)$.

Este lema é consequência de 11.1, 11.2 e 11.8.

A demonstração do lema 11.9 , é similar à de 11.7.

11.9- Lema- Seja $X\varepsilon\chi_1^r$, possuindo um ponto crítico hiperbólico $p\varepsilon\partial M$, que é um elemento crítico quase-genérico do tipo β_1 de X. Então dado $\varepsilon>0$, existe $Y\varepsilon H_1$, com $|Y-X|^r<\varepsilon$.

11.10- Lema- Seja $X\varepsilon\chi_1^r$, possuindo um ponto crítico não hiperbólico $p\varepsilon\partial M$, que é um elemento crítico quase-genéri-co do tipo β_1 de X. Então dado $\varepsilon>0$, existe $Y\varepsilon\ Q_1$, tal que $|Y-X|^r<\varepsilon$.

Os lemas B e 11.5, implicam no Lema 11.10.

Lema E- Denotemos por H_2^o, o conjunto dos campos $X\varepsilon\chi_1^r$, que possuem ponto crítico em ∂M. Então $H_2^o \subset Ad(H_1 \cup Q_1)$.

Este lema decorre de 11.4, 11.5, 11.9, e 11.10.

11.11- Lema- Seja $X\varepsilon\chi_1^r$, possuindo uma trajetória γ_X, que não é separatriz de sela e nem periódica, tangenciando ∂M em apenas dois pontos p_1 e p_2 (distintos). Então dado $\varepsilon>0$, existe $Y\varepsilon H_3$, tal que $|Y-X|^r<\varepsilon$.

Prova- Por |16|, podemos supor que o contacto entre X e ∂M em p_1 e p_2, é genérico,

Sejam F_1 e F_2, vizinhanças pequenas do arco $(\overset{\frown}{p_1p_2})_{\gamma_X}$, tais que: a) $F_1 \subsetneqq F_2$; b) nenhuma trajetória de X, exceto γ_X, tangencia ∂M em F_2 e c) sôbre F_2, é possível definir um fluxo tubular longo em relação a X.

Consideremos $\psi: M \to R$, uma função bacia, com suporte em F_2, tal que $\psi(q)=1$ se $q\varepsilon F_1$ e $0 \leqslant \psi(q) \leqslant 1$.

Se (Z_n) é uma sequência de campos em Σ_o, convergin-do para X, consideremos a seguinte sequência (Y_n) de campos em χ_1^r, definida por $Y_n=\psi X+(1-\psi)Z_n$. Esta sequência está em H_3 (ainda que precisemos diminuir F_2) e converge para X; e isto demonstra o lema em questão.

Lema F- Denotemos por H_3^o, o conjunto dos campos $X\varepsilon\chi_1^r$, possuindo trajetórias que tangenciam ∂M em mais de um ponto, nenhuma das quais sendo periódica ou separatriz de sela. Então $H_3 \subset Ad(H_3)$.

A prova deste lema decorre de 11.6 e 11.11.

Lema G- Denotemos por H_4^o, o conjunto dos $X\varepsilon\chi_1^r$, que possuem separatrizes de sela tangenciando ∂M. Então $H_4 \subset Ad(H_1 \cup H_4 \cup Q_1 \cup Q_3)$.

Prova- Sejam $X\varepsilon H_4$, γ_X uma separatriz de sela tan-genciando ∂M, p a sela em questão e ε um número real positi-vo qualquer.

As duas seguintes situações são exclusivas: $p\varepsilon\partial M$ ou $p\not\varepsilon\partial M$. Se $p\varepsilon\partial M$, por 11.9, sabemos que existe $Y\varepsilon H_1$, tal que $|Y-X|^r<\varepsilon$. Em caso contrário, poderá ocorrer: i) γ_X conecta duas selas, ambas no interior de M (não estamos excluindo uma autoconexão) ou ii) γ_X não conecta selas.

Se i) ocorrer, não existem dificuldades em provar que, existe $Y\varepsilon Q_3$, tal que $|Y-X|^r<\varepsilon$. Caso contrário, iremos provar que existe $Y\varepsilon H_1 \cup H_4 \cup Q_1$, com $|Y-X|^r<\varepsilon$. Admitamos pois, que ii) ocorre.

Por simplicidade, vamos supor que γ_X é instável em relação a p. Se o ω-limite de γ_X for um ponto crítico $q\varepsilon\partial M$, então existe $Y\varepsilon H_1 \quad Q_1$, com $|Y-X|^r<\varepsilon$ (Lema E). Se isto não ocor--rer, por 11.3.a e de maneira equivalente ao que foi feito em 11.7, determinamos $Y\varepsilon H_4$, tal que $|Y-X|^r<\varepsilon$. E deste modo concluímos a demonstração do Lema G.

<u>Lema H</u>- Denotemos por H_5^o, o conjunto dos campos $X\varepsilon \mathcal{X}_1^r$, que possuem pelo menos um ponto $p\varepsilon\partial M$, que não satisfaz a condição G em relação ao campo. Então $H_5^o \subset Ad(Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3 \cup H_1 \ldots \ldots \cup H_5)$.

<u>Prova</u>- a demonstração deste lema decorre do lema 11.1 e dos lemas A,B,C,D,E,F e G; a idéia da demonstração é examinar o comportamento da trajetória de X que passa por p, similarmente ao que foi feito na prova do Lema G.

<u>Prova do Teorema 2</u>-

Como $\mathcal{X}_1^r = Q_1^o \cup Q_2^o \cup Q_3^o \cup H_1^o \cup H_2^o \cup H_3^o \cup H_4^o \cup H_5^o$ os lemas A, B,C,D,E,F,G e H implicam imediatamente que Σ_1^* é denso em $\mathcal{X}_1^r$. Por 10.3, a conclusão do teorema em jôgo é imediata.

CAPÍTULO 3

Neste capítulo, serão estudados os campos estruturalmente estáveis de primeira ordem; ainda é dada uma aplicação à Teoria da Bifurcação. Convém ressaltar, que algumas demonstrações aqui, serão parcialmente omitidas, pois elas podem ser feitas diretamente, através de técnicas já bastante conhecidas.

§12- Estabilidade Estrutural de Primeira Órdem

12.1- Definição- Um campo $X\varepsilon\chi_1^r$, é estruturalmente estável de primeira órdem, se existir uma vizinhança B_1 de X em χ_1^r (com a C^r-topologia induzida de χ^r), tal que qualquer $Y\varepsilon B_1$ conjuga com X.

Este conceito é devido a A. Andronov e E. Leontovich |27|. Denotaremos por $\tilde{\Sigma}_1$, o conjunto dos elementos $X\varepsilon\chi^r$, estruturalmente estáveis de primeira órdem.

Consideremos o conjunto $\tilde{Q}=Q_1\cup\tilde{Q}_2\cup\tilde{Q}_3\cup\tilde{H}_1\cup\tilde{H}_2\cup H_3\cup H_4\cup H_5$ (*). Pretendemos mostrar que $\tilde{Q}=\tilde{\Sigma}_1$.

Devido a 1.4, 2.1, 3.3, 5.7, 6.1, 7.1, 8.9, 8.10 e 9.1, $\tilde{Q}\subset\tilde{\Sigma}_1$ e é aberto em χ_1^r.

As seguintes afirmações, têm verificação fácil e direta:

1) Seja $X\varepsilon\chi_1^r$, possuindo uma trajetória periódica hiperbólica γ, tangenciando ∂M em mais de um ponto. Então existe uma sequência (X_n) de campos em χ_1^r, convergindo para X (no

sentido C^r), cada um deles possuindo uma trajetória periódica hiperbólica γ_n ("$\gamma_n \to \gamma$) tangenciando ∂M, em somente um ponto;

2) Se $X \varepsilon \chi_1^r$ possue um ponto crítico não hiperbólico $p \varepsilon \partial M$, então existe uma sequência (X_n) de campos em χ_1^r convergindo para X, cada um deles possuindo um ponto crítico quase-genérico (foco composto ou sela-nó) $p_n \varepsilon int(M)$ (com $p_n \to p$);

3) Se X possue um ponto crítico hiperbólico $p \varepsilon \partial M$ e não satisfazendo a condição b) ou c) da definição de elemento crítico quase-genérico do tipo β_1, então existe uma sequência (X_n) de campos em χ_1^r, convergindo para X, cada um deles possuindo um ponto crítico hiperbólico $p_n \varepsilon \partial M$ (com $p_n \to p$) e que é um elemento crítico quase-genérico do tipo β_2 de Y_n;

4) Se $X \varepsilon \chi_1^r$ possue uma trajetória γ, tangenciando ∂M em mais de dois pontos, então existe uma sequência (X_n) de campos em χ_1^r, cada um deles possuindo uma trajetória γ_n ("$\gamma_n \to \gamma$) que tangencia ∂M em apenas dois pontos; além disso, $X_n \to X$;

5) Se $X \varepsilon \chi_1^r$ possue uma separatriz de sela γ tangenciando ∂M em mais de um ponto, então existe sequência (X_n) em χ_1^r, similar aquela da afirmação 1);

6) Se $X \varepsilon \chi_1^r$ possue uma trajetória γ tangenciando ∂M em um ponto p, com ordem de contacto no ponto maior do que três, então existe sequência (X_n) de campos em χ_1^r, convergindo para X; além disso, correspondendo a cada X_n, existem dois pontos p_n e q_n pertencentes a ∂M e na mesma trajetória de X_n, onde

o campo em questão, tem contacto genérico com ∂M (e "$p_n \to p$, $q_n \to q$").

Em todos os casos 1),2)....6) atrás, cada elemento da sequência (X_n) não conjuga com o seu correspondente X; além disso, se $X \varepsilon \Sigma_1 - \tilde{Q}$, por 1.4, 3.3, 5.7 e o caso 2) atrás, existe em X_1^r, arbitrariamente próximo de X, um campo Y, que não conju-ga com X. Isto mostra que, se $X \notin \tilde{Q}$, então $X \notin \tilde{\Sigma}_1$; isto é, $\tilde{Q} = \tilde{\Sigma}_1$.

Como cada componente de $\tilde{\Sigma}_1$ (em *) é uma subvarieda-de mergulhada de Banach, de classe C^{r-1} e codimensão um de χ^r, $r>3$, temos:

12.2- <u>Teorema</u>- a) $\tilde{\Sigma}_1$ é uma subvariedade mergulha-da de Banach de classe C^{r-1} e codimensão um de χ^r, $r>3$.

b) A <u>parte b) do Teorema 1</u>, perma-nece válida se substituirmos Σ_1 por $\tilde{\Sigma}_1$;

c) $\tilde{\Sigma}_1$ é aberto em χ_1^r.

12.3- <u>Observação</u>- Cada subvariedade que compõe $\tilde{\Sigma}_1$, não encontra o fêcho de nenhuma outra (exceto o seu próprio).

§13- Estabilidade de famílias a um parâmetro

Seja $I=[a,b]$ um intervalo compacto da reta.

Φ^r denotará o espaço das funções $\xi: I \to \chi^r$ de classe C^1, munido da topologia C^1; este espaço é uma Variedade de Banach e seus elementos serão chamados famílias a um parâmetro de campos vetoriais em M.

13.1- Definição- Dizemos que dois elementos ξ_1 e ξ_2 de Φ^r são conjugados, se existir um homeomorfismo $h: I \to I$ e uma aplicação contínua $H: I \to \text{Homeo.}(M)$, tal que, $H(i)$ é uma conjugação entre $\xi_1(i)$ e $\xi_2(i)$ (Homeo.(M) denota o grupo de homeomorfismos de M). A estabilidade estrutural em Φ^r, segundo esta definição, é estabelecida naturalmente.

13.2- Proposição- Seja $\tilde{\Gamma}^r$ a coleção dos $\xi \in \Phi^r$, tais que: 1) $\xi(I) \subset \Sigma_o \cup \tilde{\Sigma}_1$.

2) ξ é transversal a $\tilde{\Sigma}_1$;

3) $\xi(a)$ e $\xi(b)$ estão em Σ_o.

Então qualquer $\xi \in \tilde{\Gamma}^r$ é estruturalmente estável.

Prova- "Seja $\xi_o \in \tilde{\Gamma}^r$. A condição 2) e o fato de $\tilde{\Sigma}_1$ ser uma subvariedade mergulhada de codimensão um, implicam que ξ_o assume valores em $\tilde{\Sigma}_1$ somente em pontos isolados. Portanto existe apenas um número finito de $i \in I$, para o qual $\xi_o(i) \in \tilde{\Sigma}_1$.

Consequentemente, para provar a presente proposição, podemos supor que $\xi_o(i)\varepsilon\tilde{\Sigma}_1$, somente quando $i=i_o$ e precisamos apenas verificar que em uma vizinhança de i_o, a família a um parâ-metro é estruturalmente estável (|20,p.112 a 122|)."

Uma vizinhança V de ξ_o em $\tilde{\Gamma}^r$ pode ser obtida, tal que, se $\xi\varepsilon V$ então $\xi(i_1)\varepsilon\tilde{\Sigma}_1$ e $\xi(i)\varepsilon\Sigma_o$ para $i\neq i_1$. Além disso $\xi_o(i_o)$ e $\xi(i_1)$ são conjugados (vide Teorema 12.2). Se V é su-ficientemente pequena, ξ é transversal a $\tilde{\Sigma}_1$ e podemos iden-tificar I consigo mesmo; donde h (da definição 13.1) é a iden-tidade. Por conseguinte, $\xi_o(i)$ e $\xi(i)$ conjugam, para todo i perto de i_o. Resta apenas mostrar, que as conjugações entre $\xi_o(i)$ e $\xi(i)$ podem ser definidas, tais que sua variação em relação ao parâmetro é contínua; isto é, H é contínua.

Para tanto, deveremos examinar individualmente os casos em que $\xi_o(i_o)$ esteja contido em cada componente de $\tilde{\Sigma}_1$.

É conveniente salientar, que os homeomorfismos ob-tidos para a conjugação, tanto para os elementos de Σ_o (|16|), como para os de $\tilde{\Sigma}_1$, obedeceram as mesmas normas; isto é, atra-vés da razão de comprimento de arco e de tal maneira que re-giões críticas (respec. canônicas) (vide definições em |16|) são levadas em correspondentes regiões críticas (canônicas).

Caso 1) $\xi_o(i_o)\varepsilon Q_1 \cup \tilde{Q}_2 \cup \tilde{Q}_3$; este caso está feito em |20,p.112 a 122|.

Caso 2) $\xi_o \varepsilon \tilde{H}_2$

Denotemos por γ_o (respec. γ) a trajetória periódi- -ca hiperbólica de $\xi_o(i_o)$ $(\xi(i_o))$, que tangencia ∂M em p_o (p).

Para $X_o = \xi_o(i_o)$, consideremos os seguintes objetos a êle associado, apresentados na demonstração de 5.1.b: a) a subvariedade M_2 de M; b) o homeomorfismo $h_2 : M_2 \to M_2$, que con- -juga dois elementos de H_2; c) a curva C; d) o ponto $c_o \varepsilon C$, on- -de o campo é tangente à curva; e) os pontos v_i e c_i perten- -centes à ∂M, i=1,2 e f) a vizinhança B de X_o em χ^r.

Se $\xi_o(I)$ e $\xi(I)$ estão contidos em B, por 4.4 exis- -tem respectivamente associados a eles para cada i, os pon- -tos $c_o(i)$ e $c(i)$ em C correspondentes com c_o (isto é, $\xi_o(i)$ é tangente a C em $c_o(i)$ e similarmente para $\xi(i)$ e $c(i)$).

Se $f : B \to R$, é a função dada em §5, obviamente $f(\xi_o(i_o)) = f(\xi(i_o)) = 0$ e convencionaremos que $f(\xi_o(i)) > 0$ (resp. $f(\xi_o(i)) < 0$) se e só se $i > i_o$ $(i < i_o)$.

A seguir iremos definir para cada i, um homemorfis- -mo $h_i : M \to M$, que conjuga $\xi_o(i)$ com $\xi(i)$, de tal modo que $h_i \to h_o$, onde h_o é aquele homeomorfismo obtido em 5.1.b (h_o conjuga $\xi_o(i_o)$ com $\xi(i_o)$). Separemos os seguintes casos: a) $i > i_o$ e b) $i < i_o$.

Se a) acontece, $\xi_o(i)$ e $\xi(i)$ não possuem trajetó- -rias periódicas em $F = M - int(M_2)$.

Denotemos por $\tilde{\xi}_o(i)$ um representante de $\xi_o(i)$ em $\tilde{\chi}^r$

(analogamente $\tilde{\xi}(i)$). Para cada $i>i_o$, $\tilde{\xi}_o(i)$ e $\tilde{\xi}(i)$ possuem uma trajetória periódica, $\tilde{\gamma}_o(i)$ e $\tilde{\gamma}(i)$ respectivamente, próximas de γ_o e γ em N (no sentido C^r); $\tilde{\gamma}_o(i)$ (resp. $\tilde{\gamma}(i)$) intercepta ∂M, transversalmente em dois pontos, $p_o(i)$ e $q_o(i)$ ($p(i)$ e $q(i)$). Estes pontos estão contidos em regiões canônicas do campo em jôgo.

Seja $h_2(i):M_2 \to M_2$, o homeomorfismo que conjuga $\xi_o(i)|_{M_2}$ com $\xi(i)|_{M_2}$, similar àquele dado em 5.1.b; obviamente $h_2(i)(c_o(i)=c_i$ e exigiremos que $h_2(i)(v_j)=v_j$, $j=1,2$. O homeomorfismo $h_i:M \to M$ procurado, será uma extensão de $h_2(i)$ e deverá satisfazer $h_i(p_o(i))=p(i)$ e $h_i(q_o(i))=q(i)$. A construção dêle, será semelhante à de h_o; isto é, por razão de comprimente de arco. Ressaltemos ainda que, quando $i \to i_o$, temos $c_o(i) \to c_o$, $p_o(i) \to p_o$ e $q_o(i) \to q_o$.

Se b) acontece, a continuidade de H aparece naturalmente, pois surge no interior de F uma trajetória periódica hiperbólica.

Através das mesmas técnicas utilizadas acima, os casos 3)$\xi_o(i_o)\varepsilon\bar{H}_1$, 4)$\xi_o(i_o)\varepsilon H_3$ e 5)$\xi_o(i_o)\varepsilon H_4$ são analizados sem dificuldades. A verificação da continuidade de H, para $\xi_o(i_o)\varepsilon H_5$, apesar de não ser similar ao caso 2), ela é trivial.

§14

14.1- <u>Definição</u>- Um <u>valor ordinário</u> de um elemento $\xi\varepsilon\Phi^r$ é um ponto $i_o\varepsilon I$, que tem uma vizinhança V (em I), tal que, $\xi(i_o)$ é topologicamente equivalente a todo $\xi(i)$, $i\varepsilon V$. Se i_o não é valor ordinário de ξ, então êle é chamado de <u>va-lor de bifurcação</u> de ξ.

Seja Γ_1, o conjunto das famílias $\xi\varepsilon\Phi^r$, tais que:

1) $\xi(I)\subset\Sigma_o\cup\Sigma_1$;

2) ξ é transversal a Σ_1.

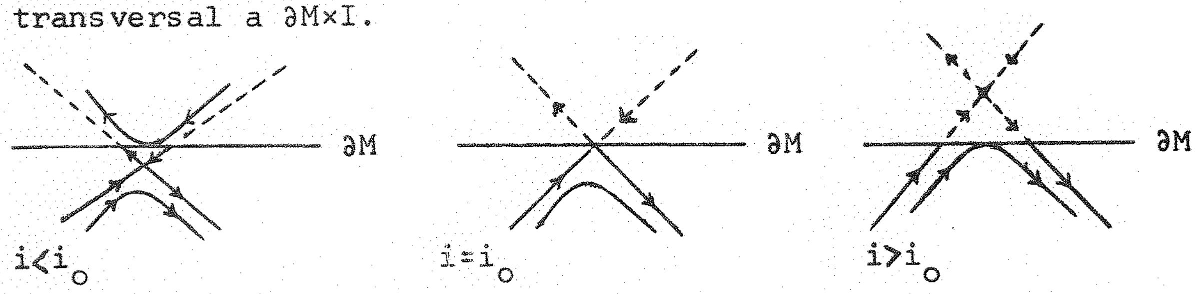
Nosso objetivo agora, é ilustrar com figuras, os pontos de bifurcação de cada $\xi\varepsilon\Gamma_1$; isto é, os pontos $i_o\varepsilon I$, onde ξ corta Σ_1 transversalmente. Para $\xi(i_o)\varepsilon Q_1\cup Q_2\cup Q_3$, tais ilustrações podem ser vistas, por exemplo em |13, parte XV|.

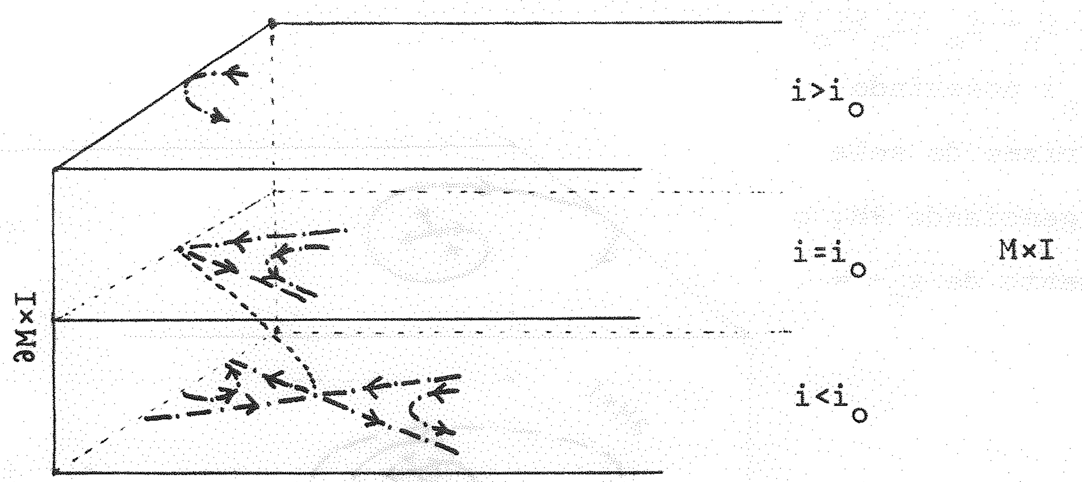
Em M×I, representamos o espaço de fase de $\xi(i)$ pe-las órbitas do campo $\hat{\xi}=(\xi,0)$, na sua variedade invariante M×i.

Analisemos separadamente os seguintes casos:

1) $\xi(i_o)\varepsilon\mathcal{A}_1$;

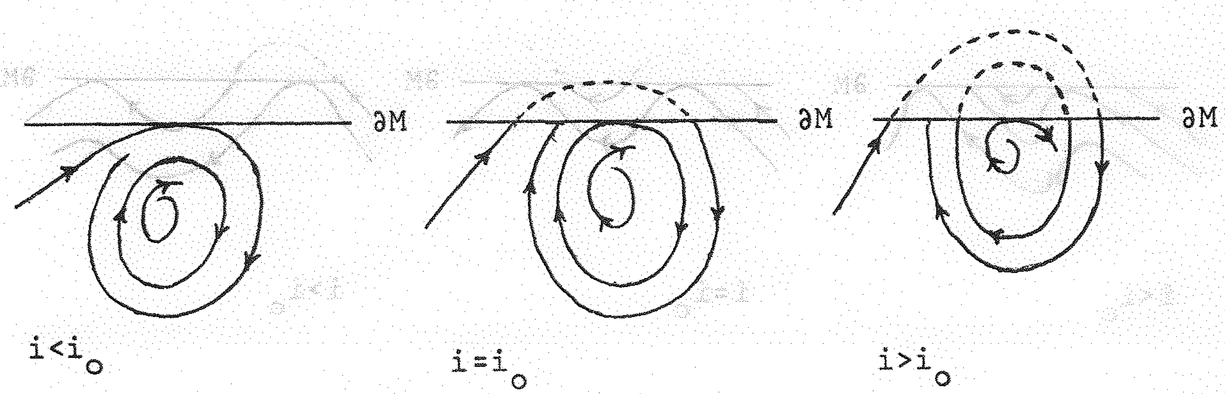
Seja p_o o elemento crítico quase-genérico de $\xi(i_o)$; para cada $i<i_o$, existe p_i, ponto crítico de $\xi(i)$ no interior de M. O conjunto $C=\bigcup_{i\leq i_o} p_i$ é uma curva diferenciável em M×I, transversal a ∂M×I.



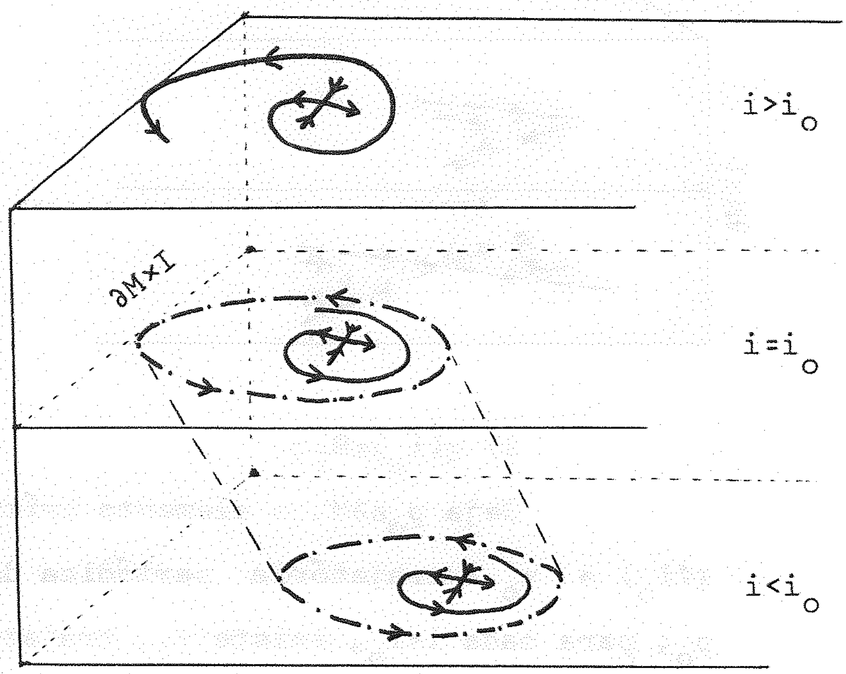


2) $\xi(i_o)\varepsilon H_2$;

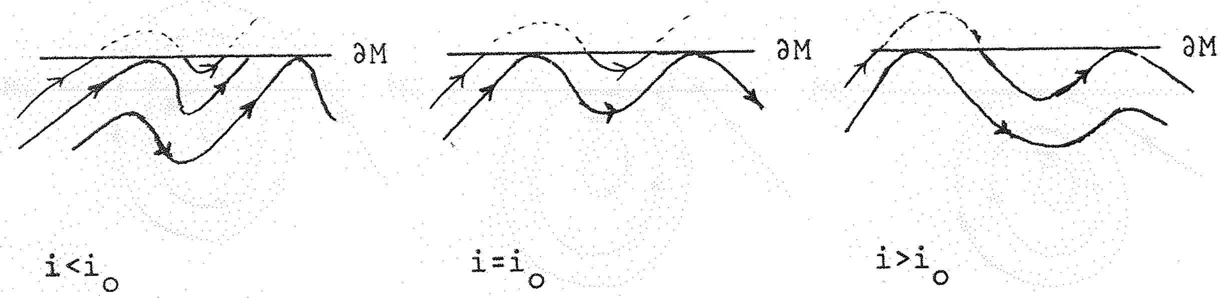
Seja $p_o\varepsilon\partial M$, o elemento crítico quase-genérico de $\xi(i_o)$ e γ_o a trajetória periódica do campo, passando por p_o; para cada $i<i_o$, existe γ_i, trajetória periódica (hiper--bólica) de $\xi(i)$, contida no interior de M. O conjunto $C=\bigcup_{i\leq i_o}\gamma_i$ é uma subvariedade de M×I, de dimensão 2, transversal a ∂M×I em p_o.



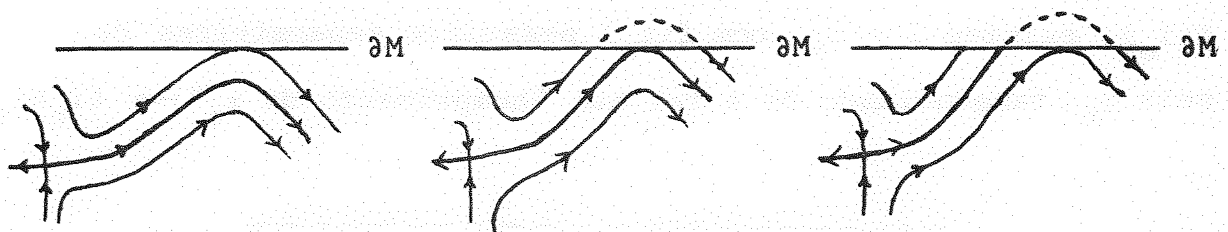
Existem $i_n \to i_o$ $(i_n > i_o)$ com $\xi(i_n)$ possuindo separatrizes de sela γ_n, tangenciando ∂M; o "comprimento de γ_n" $\to \infty$.



3) $\xi(i_o) \varepsilon H_3$;



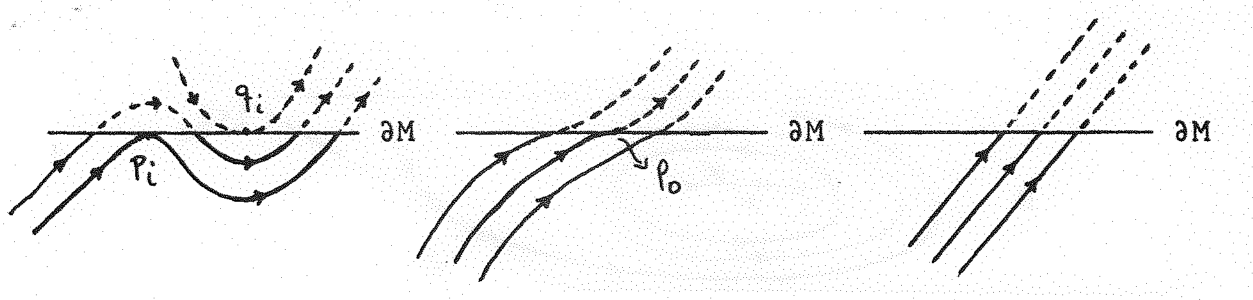
4) $\xi(i_o) \varepsilon H_4$;



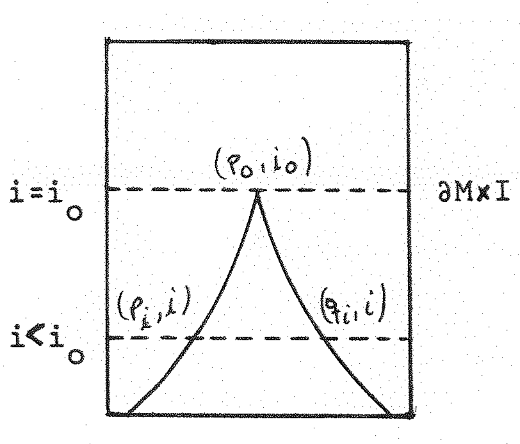
$i<i_o$ $\qquad$ $i=i_o$ $\qquad$ $i>i_o$

5) $\xi(i_o) \varepsilon H_5$;

Seja $p_o \varepsilon \partial M$, o elemento crítico quase-genérico de $\xi(i_o)$ Para $i<i_o$, existem dois pontos p_i e q_i, pertencentes ao bordo de M, tais que nestes pontos, o campo é tangente a ∂M. O con- -junto $C=\{p_o\} \bigcup_{i<i_o} p_i \bigcup_{i<i_o} q_i$, é uma curva em $\partial M \times I$, tal que p_o é um ponto cuspidal dela.

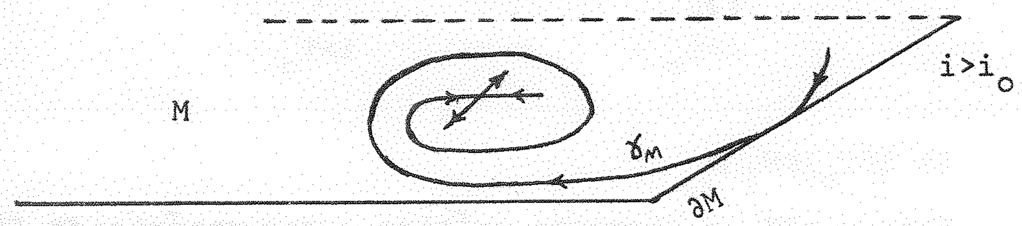


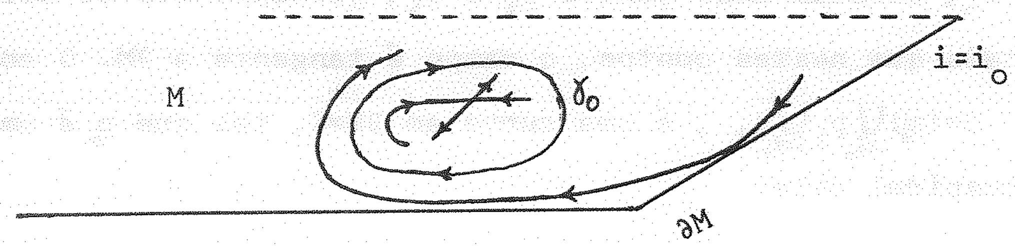
$i<i_o$ $\qquad$ $i=i_o$ $\qquad$ $i>i_o$

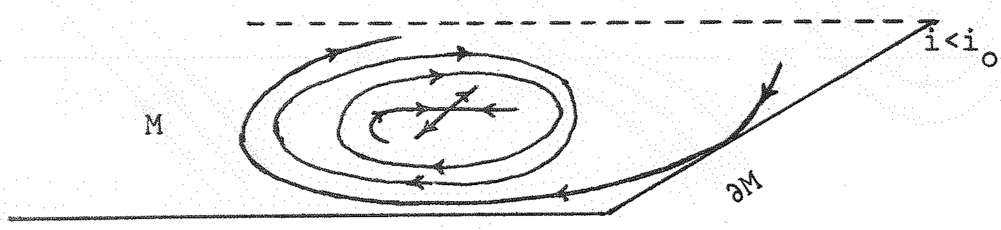


6) $\xi(i_o) \varepsilon Q_2$;

Seja γ_o a trajetória periódica quase-genérica de $\xi(i_o)$; existem $i_n \to i_o$, com $\xi(i_n)$ possuindo separatrizes de sela γ_n, tangenciando ∂M e tal que "comprimento de γ_n" $\to \infty$ $(i_n > i_o)$.







CAPÍTULO 4

Problemas em aberto

I) Conjetura- "Seja Γ o conjunto das famílias $\xi \varepsilon \Phi^r$, tais que: a) $\xi(I) \subset \Sigma_o \cup \Sigma_1$;

b) ξ é transversal a Σ_1;

c) O conjunto dos valores ordinários de ξ coincide com $\xi^{-1}(\Sigma_o)$.

Então Γ contém um subconjunto de Baire de Φ^r.

II) Denotemos por $\Sigma_o(I)$, o conjunto dos elementos estruturalmente estáveis de Φ^r, $\Sigma_1(I)=\{\xi \varepsilon \Gamma;\ \xi(I) \subset \Sigma_o \cup \Sigma_1\}$, $\tilde{\Sigma}_1(I)=\{\xi \varepsilon \Gamma;\ \xi(I) \subset \Sigma_o \cup \tilde{\Sigma}_1\}$. As questões abaixo, são de certa forma, uma generalização daquelas apresentadas em |22,p.45|:

a) Provar que $\Sigma_1(I) \cap \Sigma_o(I)$ é aberto em Φ^r e denso em $\Sigma_1(I)$;

b) Caracterizar $\Sigma_o(I)$. Êle é denso em Φ^r?

III) Caracterizar e analisar, o conjunto dos elementos estruturalmente estáveis de codimensão k de χ^r (vide definição em |20,p.114|).

IV) A partir da definição de estabilidade estrutural de ordem superior (|20,p.550 a 560|), determinar os correspondentes conjuntos Σ_k e $\tilde{\Sigma}_k$, dados na mesma bibliografia.

V) Determinar o conjunto Σ_1', contido em χ_1^r, que satisfaz: a) $\tilde{\Sigma}_1 \subset \Sigma_1' \subset \Sigma_1$;

b) Σ_1' é aberto em X_1^r;

c) Se existir um outro subconjunto A de X_1^r, satis-fazendo a) e b), então $A \subset \Sigma_1'$.

Um estudo posterior é determinar para Σ_1', as cor-respondentes famílias Γ e $\Sigma_1'(I)$.

BIBLIOGRAFIA

|1|- Andronov A., Pontrjagin L.- Systèmes Grossiers- Comptes Rendus (Doklody)- Acc. Sc. URSS, V.14 (1937).

|2|- Anosov D.- Geodesic flows on closed Riemannian manifolds with negative curvature- Proc. Sket. Inst. Math., 90 (1967).

|3|- Arnol'd V.I.- Singularities of smooth mappings- Russian Math., V.23,nº1 (1968).

|4|- Boardman J.- Singularities of Diff. Maps- Pub. Math. IHES, 33 (1974).

|5|- Duff G.F.- Limit cycles and vector fields- Ann. Math., V.57 (1953).

|6|- Hale J.- Ordinary Differential Equations- Wiley Int. (1969).

|7|- Hartman P.- Ordinary Differential Equations- Wiley, N. York (1964).

|8|- Hurewics W.- Lectures on Ordinary Differential Equations- M.I.T. Press (1963).

|9|- Kupka I.- Contribution a la thèorie des champs ge- -nerics- Cont. to Diff. Eq., V.2 (1963).

|10|- Lang S.- Introduction to differentiable manifolds- Interscience, N. York (1962).

|11|- Levine H., Thom R.- Singularities of Diff. Maps- Liverpool Singularities Symposium- Springer (1971).

|12|- Lima E.L.- Introdução à Topologia Diferencial- Notas de Matemática,nº23,R. de Janeiro, (1961).

|13|- Palis J.- Seminário de Sistemas Dinâmicos- IMPA- R. de Janeiro (1971).

|14|- Palis J.- On Morse-Smale Dynamical Systems- Topology (1964).

|15|- Palis J., Smale S.- Structural Stability Theorems Global Analysis- Proc. Symp. Pure Math.- V.14- A.M.S. (1970).

|16|- Peixoto M.C., Peixoto M.M.- Structural Stability in the plane with enlarged conditions- An. Ac. Bras. Cienc.- V.1 (1959).

|17|- Peixoto M.M.- On Structural Stability- Ann. of Math., V.69,nº1 (1959).

|18|- Peixoto M.M.- Structural Stability in two-dimen--sional manifolds- Topology, V.1 (1962).

|19|- Peixoto M.M.- An approximation theorem of Kupka-Smale- J. of Diff. Eq., V.13 (1967).

|20|- Peixoto M.M.- Dynamical Systems- Bahia Dynamical Systems Symposium, Acad. Press (1973).

|21|- Sotomayor J.- Estabilidade Estrutural de Primeira Ordem em Variedades de Banach- Tese, IMPA, R. de Janeiro (1964).

|22|- Sotomayor J.- Generic One-Parameter famlies of Vector Fields on Two-Dimensional Manifolds- Publ. Math. IEHS., nº43 (1974).

|23|- Sotomayor J.- Structural Stability in Manifolds with Boundary- IMPA, R. de Janeiro (1972).

|24|- Koiller J.- Dissertação de Mestrado- PUC, R. de Ja--neiro- 1971.

|25|- Abrahm R.- Transversal Mappings and Flows- Benjamin, N. York (1967).

|26|- Munkres J.R.- Elementary Differential Topology- Princeton Univ. Press (1963).

|27|- Andronov A., Leontovich E.- Sur la theorie da la variation de la estruture qualitative de la division du planen trajectores- Dokl. Ak. Nauk, V.21 (1938).

|28|- Poenaru V.- Analyse Differentielle- Lectures Notes in Math.- Springer-Verlag (1974).