UMA TEORIA DE INTERPOLAÇÃO
PARA
FAMILIAS DE ESPAÇOS DE BANACH

Dicesar Lass Fernandez

Tese apresentada ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo para a obtenção do título de doutor em Matemática.

ORIENTADOR: Prof. Chaim Samuel Hönig

1974

S U M Á R I O

ABSTRACT

J.Peetre's real method of interpolation for Banach couples is first extended to 4-uples and then to Banach space families.

When such a family contains 2^N spaces, both the equivalence between the K-method and the J-method, and the reiteration theorem are obtained.

Lorentz spaces, with mixed or iterated norms are also studied. These spaces furnish a concrete example of an intermediate space generated by the generalized K-method.

An application of the real interpolation method for 4-uples gives us an interpolation theorem, of the Marcinkiewicz' theorem type.

INTRODUÇÃO

Desde que F. Riesz introduziu os espaços L^p, diversas generalizações foram obtidas: os espaços de Orlicz, os espaços de Lorentz, os espaços de Riesz, etc.

Em 1961, A.Benedeck e R.Panzone (2) desenvolveram uma dessas generalizações: os espaços $L^p(L^q)$, isto é, os espaços L^p com normas mixtas ou iteradas.

Um resultado obtido por Benedeck-Panzone, relativo aos espaços $L^p(L^q)$, foi um teorema do tipo do teorema de interpolação de Riesz-Thorin.

O teorema de Riesz-Thorin e o de Riesz-Thorin-Benedeck-Panzone são obtidos, também, como conseqüência da teoria complexa de interpolação introduzida por A.P.Calderón (7).

Em 1963, Ballester de Pereyra (1), procurou estender o teorema de interpolação de Marcinkiewicz para os espaços $L^p(L^q)$. A primeira dificuldade foi estender a noção de "*weak-type*" para normas mixtas: existem três extensões e conseqüentemente três teoremas do tipo do teorema de Marcinkiewicz.

O teorema de Marcinkiewicz encontra seu lugar natural na teoria dos espaços de Lorentz. É o teorema que obtemos, quando na teoria real de interpolação de Lions-Peetre, os espaços de interpolação considerados são os espaços de Lorentz.

Em 1965, P.Krée (13) mostrou que não existe um teorema de interpolação do tipo do teorema de Marcinkiewicz, para normas mixtas, no contexto da teoria de Lions-Peetre.

Apresentam-se, portanto, dois problemas:

(I) estudar uma classe de espaços funcionais com normas mixtas onde se tenha um contexto natural para as noções de "*weak-type*" generalizadas por Ballester de Pereyra e aos correspondentes teoremas de interpolação;

(II) desenvolver uma teoria geral de interpolação para espaços normados que contenha aqueles espaços funcionais com normas mixtas e que forneça como caso particular um teorema do tipo do teorema de Marcinkiewicz, e de preferência, que generalize aqueles obtidos em (1).

Como a noção de *weak-type* usual pode ser caracterizada através dos espaços L^{pq}, os espaços de Lorentz, é natural procurar caracterizar as noções de *weak-type* generalizadas, usando normas de Lorentz generalizadas. Desta forma, fomos levados a desenvolver a teoria dos espaços $L^{pq}(L^{rs})$: os espaços de Lorentz, com normas mixtas ou iteradas. Esses espaços são os espaços funcionais do problema (I).

A teoria de J.Peetre (17), considera a função norma

$$K(s;f)=K(s;f;E,F)=\inf\{||f_1||_E+||f_2||_F;\ f=f_1+f_2,\ f_1\varepsilon\ E \text{ e } f_2\varepsilon\ F\}$$

e associado o K-método para gerar espaços de interpolação entre os espaços de Banach E e F.

Independentemente e com outra notação E.T.Oklander (21) caracterizou, através de K(s;f), a transformada de Hardy de uma função $f \in L^1 + L^\infty$:

$$f^{**}(s) = ||f||_{s^{-1}L^1 + L^\infty}$$
$$= s^{-1}||f||_{L^1 + sL^\infty} = s^{-1}K(s;f;L^1,L^\infty).$$

Para funções definidas em espaços produto, somos levados a considerar normas iteradas do tipo

$$||\ ||f||_{L^1+sL^\infty}||_{L^1+tL^\infty} = ||f||_{(L^1+tL^\infty)(L^1+sL^\infty)}$$

Agora, efetuando uma multiplicação formal, somos levados a considerar, também, o seguinte:

$$f^{****}(s,t) = \frac{1}{st}\,||f||_{L^1+sL^1(L^\infty)+tL^\infty(L^1)+stL^\infty}$$

e introduzir

$$K(s,t;f) = ||f||_{L^1+sL^1(L^\infty)+tL^\infty(L^1)+stL^\infty}$$

Essas idéias nos permitem introduzir certos espaços de médias a 2^2 parâmetros que generalizam os espaços de médias a 2 parâmetros de J.Peetre (17). O K-método associado a $K(s,t;f)$ gera uma teoria de interpolação que resolve o problema (II).

A dissertação está dividida em três partes: teoria de interpolação para quádruplas de espaços de Banach, teoria dos espaços de Lorentz, com normas mixtas, e a teoria de interpolação para famílias de espaços de Banach.

Passemos a uma descrição sumária dos vários capítulos.

No capítulo 0, introduzimos as noções de quádruplas de interpolação, dos espaços Σ e $\cap$ e de espaços intermediários em relação a quádruplas de interpolação. Essa linguagem será ampliada no capítulo 8.

O K-método generalizado é introduzido no capítulo 1. Esse método está associado à função norma $K(s,t;f)$ e estende o K-método de J. Peetre.

A seguir, e *dualmente*, no capítulo 2, introduzimos o J-método para quádruplas de interpolação.

No capítulo 3, estudamos a equivalência entre o K-método e o J-método. A demonstração segue o mesmo esquema de Peetre (17). A generalização de um dos lemas desse capítulo é não-trivial.

Um dos teorema importantes desta dissertação é o teorema de reiteração, apresentado no capítulo 4: sob certas condições, espaços intermediários de espaços intermediários são espaços intermediários.

Os teoremas de interpolação são estudados no capítulo 5. Obtivemos um teorema de interpolação que fornece, posteriormente no capítulo 8, como caso particular, um teorema do tipo do teorema de Marcinkiewicz para normas mixtas.

No capítulo 6, desenvolvemos a teoria dos espaços de Lorentz, com normas mixtas. Esses espaços conservam as boas propriedades dos espaços de Lorentz usuais. São, também, um exemplo concreto de um espaço de interpolação gerado pelo K-método generalizado.

A relação entre as noções de "*weak-type*" generalizadas e os espaços de Lorentz, com normas mixtas, é feita no capítulo 7. Nesse capítulo introduzimos um conceito mais geral que o de "*weak-type*" para normas mixtas: o conceito de "*restricted weak-type*" generalizado. Obtemos, então, um teorema do tipo do de Marcinkiewicz (-Stein-Weiss). É interessante notar que, apesar de nosso teorema ser mais geral e de ser obtido por métodos completamente diferentes, os parâmetros, que aparecem, são os mesmos do teorema de Ballester de Pereyra.

No capítulo 8, apresentamos a teoria de interpolação para famílias de espaços de Banach que generaliza a teoria para pares e quádruplas de espaços de Banach. Nesse capítulo consideramos uma extensão do conceito de norma funcional.

Finalmente, no capítulo 9, apresentamos uma série de problemas em aberto que as idéias contidas nesta dissertação levaram a considerar.

Para a leitura desse trabalho supõe-se uma certa familiaridade com os espaços de Lorentz e a teoria de interpolação de J.Peetre (ver (8), (12), (17), (21) ou os parágrafos 3.2. e 3.3. de (6). Usamos livremente os resultados de Benedeck e Panzone (2).

A letra C denotará sempre uma constante. Como não procuraremos determinar as melhores constantes, ela poderá assumir mais de um valor numa mesma sequência de desigualdades.

A realização desta dissertação foi uma experiência humana extremamente profunda. Muita gente, direta e indiretamente, influiu mais ou menos intensamente. Seria impossível nominar a todos. Entretanto, tenho que destacar alguns nomes.

Agradeço vivamente ao prof. Chaim Samuel Hönig, que nos iniciou no estudo da Análise Funcional e influiu decisivamente em toda nossa, apesar de modesta, formação matemática. Sem o seu apôio agora,como em tantos momentos difíceis, não teríamos concluído esta fase importante de nossa carreira. Foi uma honra para nós tê-lo como orientador.

Queremos exprimir aqui nosso reconhecimento ao prof. E.T. Oklander, que nos iniciou no estudo da teoria de interpolação e deu as idéias iniciais deste trabalho.

Reconhecemos a importância que a profa. Iracema M. Bund e o prof. Dar-Biau Liu tiveram para esta dissertação. Diversas e pacientes vêzes ouviram-nos expor massas incompreensiveis de idéias.

Agradecemos ao prof. Ubiratan D'Ambrósio, diretor do Instituo de Matemática da Unicamp, pelo apôio e pelas condições materiais que proporcionou. Não podemos esquecer, também, o prof. Jaurès Mazzoni pela compreenção e apôio.

Aos meus pais pela compreensão, apôio e sacrificios durante toda minha vida, meu muito obrigado.

Finalmente, a Maria Inês e o Rodrigo pela compreensão de tantas ausências e presenças ausêntes e pelos momentos difíceis que passaram tornaram-se co-autores desta dissertação.

CAPÍTULO 0

DEFINIÇÕES GERAIS

Vamos fixar aqui o vocabulário e alguns resultados de rotina que estendem os habituais da teoria de interpolação (ver (7), (8), (15) e (19)).

0.1 QUADRUPLAS DE INTERPOLAÇÃO

0.1.1. DEFINIÇÃO. Uma quadrupla de interpolação $\bar{E}=(E_0, E_1, E_2, E_3)$ é constituida por quatro espaços de Banach E_κ, $\kappa= 0, 1, 2, 3$, contidos e continuamente imersos num mesmo espaço vetorial topológico separado V.

0.1.2. DEFINIÇÃO. O espaço $\Sigma\bar{E}$ é o subespaço vetorial dos elementos $x \in V$, para os quais existem elementos $x \in E_\kappa$, $\kappa=0, 1, 2, 3$, tais que

$$x = x_0+x_1+x_2+x_3.$$

0.1.3. DEFINIÇÃO. Seja $E=(E_0, E_1, E_2, E_3)$ uma quádrupla de interpolação, tal que

$$E_0\cap E_1\cap E_2\cap E_3\neq \{0\}.$$

Então, denotamos por $\cap\bar{E}$ o subespaços dos elementos de V, tais que $x \in E_0\cap E_1\cap E_2\cap E_3$.

0.1.4.PROPOSIÇÃO. O espaço $\Sigma\bar{E}$ é um espaço de Banach quando munido da norma

$$||x||_{\Sigma\bar{E}} = \inf_{\substack{x=\sum_0^3 x_K \\ x_K \in E_K}} \{||x_0||_{E_0}+||x_1||_{E_1}+||x_2||_{E_2}+||x_3||_{E_3}\}$$

O espaço $\cap\bar{E}$ é um espaço de Banach quando munido da norma

$$||x||_{\cap\bar{E}} = \max \{||x_0||_{E_0}, ||x_1||_{E_1}, ||x_2||_{E_2}, ||x_3||_{E_3}\}$$

Demonstração. Sobre o espaço produto $E_0 \times E_1 \times E_2 \times E_3$ consideremos a norma produto usual. Então a aplicação

$$\sigma : (x_0, x_1, x_2, x_3) \in E_0 \times E_1 \times E_2 \times E_3 \longrightarrow x_0+x_1+x_2+x_3 \in V$$

é contínua. Logo, o espaço $\Sigma\bar{E}$ é isomorfo e isométrico ao espaço $(E_0 \times E_1 \times E_2 \times E_3)/\ker(\sigma)$.

Por outro lado, o espaço $\cap\bar{E}$ é isomorfo à diagonal do produto $E_0 \times E_1 \times E_2 \times E_3$ e a norma de $\cap\bar{E}$ é equivalente à norma produto restrita à diagonal. Como a diagonal é fechada na norma produto segue que $\cap\bar{E}$ é completo.

0.1.5.PROPOSIÇÃO. Os espaços $\Sigma\bar{E}$ e $\cap\bar{E}$ estão contidos e continuamente imersos em V.

0.1.6. DEFINIÇÃO. Um espaço normado E, tal que

$$\bar{E} \subset E \subset \Sigma\bar{E}$$

e as imersões são contínuas, denomina-se um espaço intermediário em relação à quádrupla $\bar{E}$.

CAPÍTULO 1

ESTUDO DO K-MÉTODO

1.1. PRELIMINARES.

1.1.1. DEFINIÇÃO. Seja $\bar{E}=(E_0,E_1,E_2,E_3)$ uma quádrupla de interpolação. Se $t=(t_1,t_2) > 0$ e $f \in \Sigma\bar{E}$, definimos

$$K(t_1,t_2;f)=K_{\bar{E}}(t;f)$$

$$= \inf_{\substack{x=\sum_0^3 x_\kappa \\ x_\kappa \in E_\kappa}} \{||x_0||_{E_0}+t_1||x_1||_{E_1}+t_2||x_2||_{E_2}+t_1t_2||x_3||_{E_3}\}$$

Vamos ter as seguintes propriedades, de fácil demonstração.

1.1.2. PROPOSIÇÃO. Se $\lambda \in R$ e $f,g \in \Sigma\bar{E}$, então

1.1.2(1) $\quad K(t;\lambda f) = |\lambda|\, K(t;f)$;

1.1.2(2) $\quad K(t;f+g) \leq K(t;f) + K(t;g)$.

1.1.3. PROPOSIÇÃO. Seja $f \in \Sigma\bar{E}$, $s=(s_1,s_2) > 0$ e $t=(t_1,t_2) > 0$, então

1.1.3(1) $\quad K(t;f) \leq \max\{1,s_1t_1^{-1},s_2t_2^{-1},s_1s_2t_1^{-1}t_2^{-1}\}\, K(s;f)$

1.1.3(2) $\quad \min\{1,s_1t_1^{-1},s_2t_2^{-1},s_1s_2t_1^{-1}t_2^{-1}\}\, K(t;f) \leq K(s;f)$

1.1.3(3) $\quad \min\{1,t_1,t_2,t_1t_2\}||f||_{\Sigma\bar{E}} \leq K(t;f)$

$\quad \leq \max\{1,t_1,t_2,t_1t_2\}||f||_{\Sigma\bar{E}}$

1.1.3(4) $\quad \min\{1,t_1^{-1},t_2^{-1},t_1^{-1}t_2^{-1}\}K(t;f) \leq ||f||_{\Sigma\bar{E}}$

$\quad \leq \max\{1,t_1^{-1},t_2^{-1},t_1^{-1}t_2^{-1}\}K(t;f)$.

Seja E um espaço de Banach e $Q=(q_1,q_2)$, onde $1\leq q_1\leq q_2\leq\infty$. Denotaremos por $L_*^Q(E)=L_*^Q(R_+,E)$ o espaço das funções $g:\mathbb{R}_+^2 \longrightarrow E$, que são fortemente mensuráveis em relação a medida $\frac{dt}{t}=\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}$ e tais que

$$||g||_{L_*^Q} = || \; ||g||_{L_*^{q_1}} ||_{L_*^{q_2}} \leq \infty$$

onde

$$||g||_{L_*^Q} = \begin{cases} \left(\int_0^\infty \left(\int_0^\infty \left(||g(t_1,t_2)||_E\right)^{q_1} \frac{dt_1}{t_1}\right)^{q_2/q_1} \frac{dt_2}{t_2}\right)^{1/q_1}, & 1 \leq q_1,q_2 < \infty; \\ \sup\limits_{0<t_2<\infty} \left(\int_0^\infty \left(||g(t_1,t_2)||_E\right)^{q_1} \frac{dt_1}{t_1}\right)^{1/q_1}, & 1\leq q_1<\infty,\ q_2=\infty; \\ \left(\int_0^\infty \left(\sup\limits_{0<t_1<\infty} ||g(t_1,t_2)||_E\right)^{q_2} \frac{dt_2}{t_2}\right)^{1/q_2}, & q_1=\infty,\ 1\leq q_2<\infty \\ \sup\limits_{\substack{0<t_1<\infty \\ 0<t_2<\infty}} ||g(t_1,t_2)||_E, & q_1=q_2=\infty \end{cases}$$

Quando $E=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ escreveremos simplesmente L_*^Q.

<u>1.1.4.PROPOSIÇÃO.</u> Suponhamos que valha uma das seguintes hipóteses

1.1.4(1) $\quad 0 < \theta_1 < 1,\ 0 < \theta_2 < 1,\ 1 \leq q_1,q_2 \leq \infty;$

1.1.4(2) $\quad 0 \leq \theta_1 \leq 1,\ 0 < \theta_2 < 1,\ q_1=\infty,\ 1 \leq q_2=\infty;$

1.1.4(3) $\quad 0 < \theta_1 < 1,\ 0 \leq \theta_2 \leq 1,\ 1 \leq q_1 < \infty,\ q_2=\infty;$

1.1.4(4) $\quad 0 \leq \theta_1 \leq 1,\ 0 \leq \theta_2 \leq 1,\ q_1 = q_2 = \infty.$

Então

$$||t_1^{-\theta_1}t_2^{-\theta_2} \min(1,t_1,t_2,t_1t_2)||_{L_*^Q} < \infty.$$

Demonstração. Segue após um cálculo direto da norma.

1.2. O ESPAÇO DE MÉDIAS A 2^2 PARAMETROS.

1.2.1. DEFINIÇÃO. Sejam $0 \leq \Theta=(\theta_1,\theta_2) \leq 1$ e $Q=(q_1,q_2) \geq 1$.

Definimos

$$\bar{E}_{\Theta,Q,K} = (E_0,E_1,E_2,E_3)_{\Theta,Q,K}$$

como o espaço dos elementos $f \in \Sigma\bar{E}$, tais que

$$\bar{t}_1^{\theta_1}\bar{t}_2^{\theta_2}K(t_1,t_2;f) \in L_*^Q = L_*^{q_2}(L_*^{q_1})$$

ou seja

$$||f||_{\Theta,Q,K} = ||\bar{t}_1^{\theta_1}\bar{t}_2^{\theta_2}K(t_1,t_2;f)||_{L_*^Q}$$

$$= || \; ||\bar{t}_1^{\theta_1}\bar{t}_2^{\theta_2}K(t_1,t_2;f)||_{L_*^{q_1}} ||_{L_*^{q_2}} < \infty$$

1.2.2. PROPOSIÇÃO. Os espaços $\bar{E}_{\Theta,Q,K}$ são não-triviais nos seguintes casos: 1.1.4(1), (2), (3) e (4). Nos demais casos eles se reduzem a $\{0\}$.

1.2.3. PROPOSIÇÃO. Os espaços $\bar{E}_{\Theta,Q,K}$ são espaços de Banach quando munidos da norma $||\cdot||_{\Theta,Q,K}$.

Demonstração. Os espaços $\bar{E}_{\Theta,Q,K}$ são obviamente espaços normados.

Provaremos que são completos. Seja (f_n) uma sequência absolutamente somável em $\bar{E}_{\Theta,Q,K}$. Como

$$||f_n||_{\Sigma\bar{E}} \leq \{||\bar{t}_1^{\theta_1}\bar{t}_2^{\theta_2} \min(1,t_1,t_2,t_1t_2)||_{L_*^Q}\}^{-1}||\bar{t}_1^{\theta_1}\bar{t}_2^{\theta_2}K(t_1,t_2;f_n)||_{L_*^Q}$$

segue que (f_n) é absolutamente somável em $\Sigma\bar{E}$.

Por outo lado, como $\Sigma\bar{E}$ é completo segue que existe um único $f \in \Sigma\bar{E}$, tal que

$$\sum_{K=1}^{n} f_K \xrightarrow[n\to\infty]{\Sigma\bar{E}} f$$

e

$$K(t_1,t_2;f) \leq \sum_{n=1}^{\infty} K(t_1,t_2;f_n)$$

Conseqüentemente $f \in \bar{E}_{\Theta,Q,K}$ e

$$||f - \sum_{K=1}^{n} f_K||_{\Theta,Q,K} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

1.2.4.PROPOSIÇÃO. Os espaços $\bar{E}_{\Theta,Q,K}$ são espaços intermediários em relação a (E_0,E_1,E_2,E_3), isto é, vamos ter

$$\bar{E} \subset \bar{E}_{\Theta,Q,K} \subset \Sigma\bar{E},$$

e as imersões são contínuas.

Demonstração. Seja $f \in \cap\bar{E}$. Então

$$||f||_{\Sigma\bar{E}} \leq ||f||_{\cap\bar{E}}.$$

e

$$K(t_1,t_2;f) \leq \min(1,t_1,t_2,t_1t_2)\ ||f||_{\Sigma\bar{E}}$$

$$\leq \min(1,t_1,t_2,t_1t_2)\ ||f||_{\cap\bar{E}}.$$

Portanto

$$||f||_{\Theta,Q,K} \leq ||t_1^{-\theta_1}t_2^{-\theta_2}\min(1,t_1,t_2,t_1t_2)||_{L_*^Q}||f||_{\cap\bar{E}}.$$

A continuidade da segunda imersão segue da seguinte desigualdade

$$||f||_{\Sigma\bar{E}} \leq \{||\bar{t}_1^{\theta_1}\bar{t}_2^{\theta_2}\min(1,t_1,t_2,t_1t_2)||_{L_*^Q}\}^{-1}||\bar{t}_1^{\theta_1}\bar{t}_2^{\theta_2}K(t_1,t_2;f)||_{L_*^Q}.$$

<u>1.2.5.PROPOSIÇÃO.</u> Seja $f \in \bar{E}_{\Theta,Q,K}$. Então

$$K(s_1,s_2;f) \leq \bar{s}_1^{\theta_1}\bar{s}_2^{\theta_2}\{||\bar{t}_1^{\theta_1}\bar{t}_2^{\theta_2}\min(1,t_1,t_2,t_1t_2)||\}^{-1}||f||_{\Theta,Q,K}.$$

Demonstração. Como

$$\min(1,\frac{t_1}{s_1},\frac{t_2}{s_2},\frac{t_1t_2}{s_1s_2})\ K(s_1,s_2;f) \leq K(t_1,t_2;f)$$

então

$$||\bar{t}_1^{\theta_1}\bar{t}_2^{\theta_2}\min(1,\frac{t_1}{s_1},\frac{t_2}{s_2},\frac{t_1t_2}{s_1s_2})||_{L_*^Q}\ K(s_1,s_2;f) \leq ||f||_{\Theta,Q,K};$$

agora, uma mudança de variáveis nos leva ao resultado.

CAPÍTULO 2

ESTUDO DO J-MÉTODO

2.1. PRELIMINARES.

2.1.1. DEFINIÇÃO. Seja $E=(E_0, E_1, E_2, E_3)$ uma quadrupla de interpolação, tal que

$$E_0 \cap E_1 \cap E_2 \cap E_3 \neq \{0\}.$$

Se $t=(t_1, t_2) \leq 0$ e $f \in \cap\bar{E}$, definimos

$$J_{\bar{E}}(t;f) = J(t_1, t_2; f) = \max(\|f\|_{E_0}, t_1\|f\|_{E_1}, t_2\|f\|_{E_2}, t_1t_2\|f\|_{E_3}).$$

As seguintes proposições são de fácil demonstração.

2.1.2. PROPOSIÇÃO. Se $\lambda \in R$ e $f,g \in \cap\bar{E}$, então

2.1.2(1) $J(t;\lambda f) = |\lambda| J(t;f)$

2.1.2(2) $J(t;f+g) \leq J(t;f) + J(t;g)$

2.1.3. PROPOSIÇÃO. Sejam $f \in \cap\bar{E}$, $s=(s_1, s_2)$ e $t=(t_1, t_2)$. Então

2.1.3(1) $\min(1, \frac{t_1}{s_1}, \frac{t_2}{s_2}, \frac{t_1t_2}{s_1s_2}) J(s_1, s_2; f) \leq J(t_1, t_2; f)$

$\leq \min(1, \frac{t_1}{s_1}, \frac{t_2}{s_2}, \frac{t_1t_2}{s_1s_2}) J(s_1, s_2; f);$

2.1.3(2) $K(t_1, t_2; f) \leq \min(1, \frac{t_1}{s_1}, \frac{t_2}{s_2}, \frac{t_1t_2}{s_1s_2}) J(s_1, s_2; f)$

2.1.3(3) $\max(1, \frac{s_1}{t_1}, \frac{s_2}{t_2}, \frac{s_1s_2}{t_1t_2}) K(t_1, t_2; f) \leq J(s_1, s_2; f).$

2.2. OS ESPAÇOS $\bar{E}_{\theta,Q,J}$.

2.2.1. DEFINIÇÃO. Para $0 \leq \Theta=(\theta_1\theta_2) \leq 1$ e $Q=(q_1,q_2) \leq 1$. Definimos

$$\bar{E}_{\Theta,Q,J} = (E_0,E_1,E_2,E_3)_{\theta,Q,J}$$

como o espaço dos elementos $f \in \Sigma\bar{E}$ tais que existe uma função fortemente mensurável

2.2.1(1) $u:(s_1,s_2) \in R_+^2 \longrightarrow u(s_1,s_2) \in \cap\bar{E}$

que verifica

$$f = \int_0^\infty\int_0^\infty u(s_1,s_2)\frac{ds_1}{s_1}\frac{ds_2}{s_2}$$

e

$$||s_1^{-\theta_1}s_2^{-\theta_2}J(s_1,s_2;u(s_1,s_2))||_{L_*^Q} < \infty$$

Suponhamos que Θ e Q verifiquem 1.1.4.(1), (2), (3) ou (4). Vamos ter então.

2.2.2. PROPOSIÇÃO. Os espaços $\bar{E}_{\Theta,Q,J}$ são espaços de Banach quando munidos da norma

$$||f||_{\Theta,Q,J} = \inf_{f = \int_0^\infty\int_0^\infty u(s_1,s_2)\frac{ds_1}{s_1}\frac{ds_2}{s_2}} ||s_1^{-\theta_1}s_2^{-\theta_2}J(s_1,s_2;u(s_1,s_2))||_{L_*^Q}.$$

2.2.3. PROPOSIÇÃO. Os espaços $\bar{E}_{\theta,Q,J}$ são espaços intermediários em relação a $(E_0;E_1,E_2,E_3)$, isto é, vamos ter

$$\cap\bar{E} \subset \bar{E}_{\Theta,Q,J} \subset \Sigma\bar{E}$$

e as imersões são contínuas.

Demonstração. Seja $f \in \bar{\bar{E}}_{\Theta\, Q,J}$ e $s=(s_1,s_2)$ e $t=(t_1,t_2)$. Então

$$||f||_{\Sigma\bar{E}} \leq ||\ ||u(s_1,s_2)||_{\Sigma\bar{E}}||_{L^1_*}$$

$$\leq ||\{\min(1,\frac{1}{s_1},\frac{1}{s_2},\frac{1}{s_1}\frac{1}{s_2})\}\ J(s_1,s_2;f)||_{L^1_*}$$

$$\leq ||s_1^{\theta_1}s_2^{\theta_2}\min(1,\frac{1}{s_1},\frac{1}{s_2},\frac{1}{s_1}\frac{1}{s_2})||_{L^{Q'}_*}\ ||s^{-\Theta}\ J(s;u(s)||_{L^Q_*}$$

onde Q e Q' são índices conjugados. Agora,

$$||s_1^{\theta_1}s_2^{\theta_2}\min(1,\frac{1}{s_1},\frac{1}{s_2},\frac{1}{s_1}\frac{1}{s_2})||_{L^{Q'}_*} = ||s_1^{-\theta_1}s_2^{-\theta_2}\min(1,s_1,s_2,s_1s_2)||_{L^{Q'}_*} \leq \infty.$$

então

$$||f||_{\Sigma\bar{E}} \leq C||f||_{\bar{E}_{\Theta,Q,J}}$$

Para demonstrar a segunda imersão consiremos uma função $\Psi(t_1,t_2) \geq 0$, tal que $||t_1^{-\theta_1}t_2^{-\theta_2}\Psi(t_1,t_2)||_{L^Q_*} = 1$. Fazendo

$$u(t_1,t_2) = \frac{\Psi(t_1,t_2)\min(1,\frac{1}{t_1},\frac{1}{t_2},\frac{1}{t_1}\frac{1}{t_2})}{||\Psi(s_1,s_2)\min(1,\frac{1}{s_1},\frac{1}{s_2},\frac{1}{s_1}\frac{1}{s_2})||_{L^1_*}}\ f$$

vamos ter

$$||\Psi(s_1,s_2)\min(1,\frac{1}{s_1},\frac{1}{s_2},\frac{1}{s_1}\frac{1}{s_2})||_{L^1_*}||f||_{\Theta,Q,J} \leq$$

$$\leq ||\Psi(s_1,s_2)\min(1,\frac{1}{s_1},\frac{1}{s_2},\frac{1}{s_1}\frac{1}{s_2})||_{L^1_*}||t^{-\Theta}J(t;u(t)||_{L^Q_*}$$

$$\leq ||t_1^{\theta_1}t_2^{\theta_2}\Psi(t_1,t_2)\min(1,\frac{1}{t_1},\frac{1}{t_2},\frac{1}{t_1}\frac{1}{t_2})J(t_1,t_2;f)||_{L^Q_*}$$

$$\leq ||t_1^{\theta_1}t_2^{\theta_2}\ \Psi(t_1,t_2)||_{L^Q_*}\ ||f||_{\cap\bar{E}} \leq ||f||_{\cap\bar{E}}\ .$$

Finalmente, tomando o supremo em relação as Ψ, obtemos

$$||f||_{\Theta,Q,J} \leqq \{||\bar{t}_1^{\theta_1}\bar{t}_2^{\theta_2}\min(1,t_1,t_2,t_1t_2)||_{L_*^{Q'}}\}^{-1}||f||_{\cap\bar{E}}.$$

Esta desigualdade mostra a continuidade da imersão de $\cap\bar{E}$ em $\bar{E}_{\Theta,Q,J}$ e completa a demonstração da proposição.

CAPÍTULO 3

EQUIVALÊNCIA DO J- E DO K-MÉTODO

3.1. K-ESPAÇO CONTÉM J-ESPAÇO.

3.1.1. PROPOSIÇÃO. Seja $\bar{E}=(E_0;E_1,E_2\ E_3)$ uma quádrupla de interpolação. Se $0 < \Theta=(\theta_1,\theta_2)< 1$ e para $P=(p_1,p_2)$ e $Q=(q_1,q_2)$ com $1 \leq P \leq Q \leq\infty$, vamos ter

$$\bar{E}_{\Theta,P,J} \subset \bar{E}_{\Theta,Q,K}$$

e a imersão é contínua.

Demonstração. Seja $f \in \bar{E}_{\Theta,P,J}$. Vamos ter

$$K(t_1,t_2,f) \leq \int_0^\infty\int_0^\infty K(t_1,t_2;u(s_1,s_2))\frac{ds_1}{s_1}\frac{ds_2}{s_2}$$

$$\leq \int_0^\infty\int_0^\infty \min(1,\frac{t_1}{s_1},\frac{t_2}{s_2},\frac{t_1t_2}{s_1s_2})\ J(s_1,s_2;u(s_1,s_2)\frac{ds}{s}\ \frac{ds}{s}$$

donde

$$t_1^{-\theta_1}t_2^{-\theta_2}K(t_1,t_2;f) \leq t_1^{-\theta_1}t_2^{-\theta_2}\int_0^\infty\int_0^\infty \min(1,\frac{t_1}{s_1},\frac{t_2}{s_2},\frac{t_1t_2}{s_1s_2})J(s_1,s_2;u(s_1,s_2))\frac{ds_1}{s_1}\frac{ds_2}{s_2}$$

e

$$||t^{-\Theta}K(t,f)||_{L_*^Q} \leq ||\ ||s^{\Theta}t^{-\Theta}\min(1,\frac{t_1}{s_1},\frac{t_2}{s_2},\frac{t_1t_2}{s_1s_2})\ s^{-\Theta}\ J(s;u(s))||_{L_*^1}||_{L_*^Q}$$

$$\leq ||t_1^{-\theta_1}t_2^{-\theta_2}\ \min(1,\frac{1}{t_1},\frac{1}{t_2},\frac{1}{t_1t_2})||_{L_*^R}\ ||t^{-\Theta}J(t;u(t))||_{L_*^P}$$

onde $1/R=1-(1/P-1/Q)$. Portanto, tomando o ínfimo em relação as funções u, vamos ter

$$||f||_{\Theta,Q,K} \leqq C||f||_{\Theta,Q,J}.$$

o que demonstra a proposição.

3.2. J-ESPAÇO CONTÉM K-ESPAÇO.

Vamos começar estendendo o seguinte lema, devido a J.Peetre (17).

3.2.1. LEMA. Sejam X_1 e X_2 dois espaços de Banach imersos num mesmo espaço vetorial topológico separado. Seja $f \in X_1+X_2$, tal que

3.2.1.(1) $$K(t;f) = \inf\{\|f_1\|_{X_1}+t\|f_2\|_{X_2};\ f=f_1+f_2\} \leqq Ct^{\alpha},$$

onde C depende de f mas não de t e $\alpha > 0$. Então existe uma função fortemente mensurável

$$u: t \in R_+ \longrightarrow u(t) \in X_1 \cap X_2$$

tal que

3.2.1(2) $$f = \int_0^{\infty} u(t)\,\frac{dt}{t} \qquad (\text{em } X_1+X_2)$$

e

3.2.1(3) $$J(t;u(t)) \leqq 4eK(t;f).$$

3.2.2. LEMA. Seja $f \in \Sigma\bar{E}$, tal que existam constantes $0 < \alpha,\beta < 1$ e $C=C(f)$ tal que para todo s e t > 0, vale

3.2.2(1) $$K(s,t;f) \leqq C(f)s^{\alpha}t^{\beta}.$$

Então, existe uma função fortemente mensurável

$$u:(s,t) \in R_+\times R_+ \longrightarrow u(s,t) \in E_0\cap E_1\cap E_2\cap E_3$$

tal que

3.2.2(2) $$f = \int_0^{\infty}\!\!\int_0^{\infty} u(s,t)\,\frac{ds}{s}\frac{dt}{t} \qquad (\text{em } \Sigma\bar{E})$$

e

3.2.2(3) $$J(s,t;u(s,t)) \leqq (4e)^2K(s,t;f).$$

Demonstração. Façamos $E_{01}=E_0+E_1$ e $E_{23}=E_2+E_3$ com normas

$$||\cdot||_{01}=||\cdot||_{E_0+E_1} \quad \text{e} \quad ||\cdot||_{23}=||\cdot||_{E_2+E_3}$$

respectivamente. Então

$$K_{01}(s;f_{01}) + tK_{23}(s;f_{23}) \leq K(s,t;f)$$

onde $f = f_{01}+f_{23}$, com $f_{01} \in E_{01}$ e $f_{23} \in E_{23}$. Agora, tomando t=1.

$$K_{01}(s;f_{01}) \leq C s^{\alpha} \qquad \text{e} \qquad K_{23}(s;f_{23}) \leq C s^{\alpha}$$

que satisfazem a hipótese do lema 3.2.1. Logo, existem funções fortemente mensuráveis $u=u(s) \in E_0 \cap E_1$ e $v=v(s) \in E_2 \cap E_3$, tal que

$$f_{01}= \int_0^\infty u(s)\frac{ds}{s} \quad (\text{em } E_0+E_1) \quad \text{e} \quad f_{23}= \int_0^\infty v(s)\frac{ds}{s} \quad (\text{em } E_2+E_3)$$

e ainda

$$J_{01}(s;u(s)) \leq 4eK_{01}(s;f_{01}) \quad \text{e} \quad J_{23}(s;v(s)) \leq 4eK_{23}(s;f_{23}).$$

Tomando, agora, $w=u+v$, vemos que existe uma função fortemente mensurável $w=w(s) \in E_0 \cap E_1 + E_2 \cap E_3$, tal que

$$f = \int_0^\infty w(s)\frac{ds}{s} \qquad (\text{em } \Sigma\bar{E}). \tag{3.2.2(4)}$$

Por outro lado, fazendo $E^{01}=E_0 \cap E_1$ e $E^{23}=E_2 \cap E_3$ com normas $||\cdot||^{01}=||\cdot||_{E_0 \cap sE_1}$ e $||\cdot||^{23}=||\cdot||_{E_2 \cap sE_3}$, vamos ter

$$\begin{aligned} K'(t;w(s)) &\leq J_{01}(s;u(s)) + tJ_{23}(s;v(s)) \\ &\leq 4e\{K_{01}(s;f_{01}) + tK_{23}(s;f_{23})\} \\ &\leq 4e\, K(s,t;f). \end{aligned} \tag{3.2.2(5)}$$

Portanto

$$K'(t;w(s)) \leq C'(f)\, t^{\beta}$$

Estamos novamente em condições de aplicar o lema 2.2.1. Existe, portanto, uma função fortemente mensurável $u=u(s,t) \in E^{01} \cap E^{23}$, tal que

3.2.2(6) $$w(s) = \int_0^\infty u(s,t)\frac{dt}{t}$$

e

3.2.2(7) $$J'(t;u(s,t)) \leq 4e\, K'(t;w(s))$$

(J' e K' são definidos usando-se as normas de E^{01} e E^{23}).

Por outro lado, vamos ter, usando 3.2.2(5) e (7)

$$\begin{aligned} J(s,t;u(s,t)) &= J'(t;u(s,t)) \\ &\leq 4e\, K'(t,w(s)) \\ &\leq (4e)^2 K(s,t;f). \end{aligned}$$

Portanto, em vista de 3.2.2(4) e (6), existe uma função fortemente mensurável $u=u(s,t) \in E_0 \cap E_1 \cap E_2 \cap E_3$, tal que

$$f = \int_0^\infty\int_0^\infty u(s,t)\frac{ds}{s}\frac{dt}{t}$$

e

$$J(s,t;u(s,t)) \leq (4e)^2\, K(s,t;f),$$

o que completa a demostração do lema.

<u>3.2.3.PROPOSIÇÃO.</u> Se $0 < \Theta=(\theta_1,\theta_2) < 1$ e $1 \leq Q=(q_1,q_2) \leq \infty$, então

$$\bar{E}_{\Theta,Q,K} \subset \bar{E}_{\Theta,Q,J}$$

e a imersão é contínua.

Demonstração. Seja $f \in \bar{E}_{\Theta,Q,K}$ e $t=(t_1,t_2) \leq s=(s_1,s_2)$. Então

$$K(t_1,t_2;f) \leq K(s_1,s_2;f).$$

Portanto

$$K(t_1,t_2;f)||\bar{s}_1^{\theta_1}\bar{s}_2^{\theta_2}\chi_{\Pi_K(t_K,\infty)}(s_1,s_2)||_{L_*^Q} \leq$$

$$\leq ||\bar{s}_1^{\theta_1}\bar{s}_2^{\theta_2}K(s_1,s_2;f)\chi_{\Pi_K(t_K,\infty)}(s_1,s_2)||_{L_*^Q}$$

donde

$$K(t_1,t_2;f) \leq C\, t_1^{\theta_1}t_2^{\theta_2}||f||_{\Theta,Q,K}.$$

que é uma relação do tipo de 3.2.2(1). Logo, existe, pelo lema anterior uma função fortemente mensurável

$$u=u(t_1,t_2) \in E_0 \cap E_1 \cap E_2 \cap E_3$$

talque

$$f = \int_0^\infty\int_0^\infty u(t_1,t_2)\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}$$

e

$$J(t_1,t_2;u(t_1,t_2)) \leq (4e)^2K(t_1,t_2;f).$$

Logo

$$||\bar{t}_1^{\theta_1}\bar{t}_2^{\theta_2}J(t_1,t_2;u(t_1,t_2))||_{L_*^Q} \leq (4e)^2||\bar{t}_1^{\theta_1}\bar{t}_2^{\theta_2}K(t_1,t_2;f)||_{L_*^Q}.$$

Finalmente, fazendo $1=1/Q + 1/Q'$, vamos ter

$$||u||_{L_*^1(\Sigma\bar{E})} \leq ||\bar{t}_1^{\theta_1}\bar{t}_2^{\theta_2}\min(1,t_1,t_2,t_1t_2)||_{L_*^{Q'}}\, ||\bar{t}^{\Theta}\, J(t;u(t))||_{L_*^Q} < \infty$$

e então

$$||f||_{\Theta,Q,J} \leq (4e)^2||f||_{\Theta,Q,K}.$$

A proposição está demonstrada.

3.3. EQUIVALÊNCIA.

3.3.1. TEOREMA. Se $0 < \Theta < 1$ e $1 \leq Q \leq \infty$ então

$$\bar{\bar{E}}_{\Theta,Q,J} = \bar{\bar{E}}_{\Theta,Q,K}$$

e as normas são equivalentes.

Demonstração. Fazendo P=Q na proposição 3.1.1 obtemos

$$\bar{\bar{E}}_{\Theta,Q,J} \subset \bar{\bar{E}}_{\Theta,Q,K}$$

A proposição 4.2.3 fornece a recíproca:

$$\bar{\bar{E}}_{\Theta,Q,K} \subset \bar{\bar{E}}_{\Theta,Q,J}.$$

3.3.2. COROLÁRIO. Para $0 < \Theta < 1$ e $1 \leq P \leq Q$, vamos ter

$$\bar{\bar{E}}_{\Theta,P,K} \subset \bar{\bar{E}}_{\Theta,Q,K}.$$

Em particular

$$\bar{\bar{E}}_{\Theta,1,K} \subset \bar{\bar{E}}_{\Theta,Q,K} \subset \bar{\bar{E}}_{\Theta,\infty,K}.$$

CAPÍTULO 4

REITERAÇÃO

4.1. ESPAÇOS DE CLASSE $K(\Theta;\bar{E})$

4.1.1. DEFINIÇÃO. Um espaço de Banach E, intermediário em relação à quádrupla $\bar{E}=(E_0,E_1,E_2,E_3)$, pertence à classe $K(\Theta;\bar{E})$, $0 \leq \Theta \leq 1$, se para todo $f \in E$ vale

$$K(t_1,t_2;f) \leq C t_1^{\theta_1} t_2^{\theta_2} ||f||_E$$

onde C é uma constante que não depende de f e t.

4.1.2. PROPOSIÇÃO. Seja E um espaço intermediário em relação a $\bar{E}$. Então, $E \in K(\Theta;\bar{E})$ se e sòmente se $E \subset \bar{E}_{\Theta,\infty,K}$.

Demonstração. Segue da definição de $\bar{E}_{\Theta,\infty,K}$.

4.1.3. PROPOSIÇÃO. Sejam $0 \leq \Theta \leq 1$ e $1 \leq Q \leq \infty$. Então $\bar{E}_{\Theta,Q,K}$ pertente a classe $K(\Theta;\bar{E})$.

Demonstração. Temos que $\bar{E}_{\Theta,Q,K} \subset \bar{E}_{\Theta,\infty,K}$.

OBSERVAÇÃO. Sejam F_0,F_1,F_2 e F_3 espaços intermediários em relação a quádrupla $\bar{E}=(E_0,E_1,E_2,E_3)$. Então, $\bar{F}=(F_0,F_1,F_2,F_3)$ é uma quádrupla de interpolação. Denotaremos por J' e K' as funções normas J e K quando tomadas em relação a quádrupla $\bar{F}$.

<u>4.1.4.PROPOSIÇÃO.</u> Consideremos $\Theta_0=(\theta_0^1,\theta_0^2)$, $\Theta_1=(\theta_1^1,\theta_0^2)$, $\Theta_2=(\theta_0^1,\theta_2^2)$, e $\Theta_3=(\theta_1^1,\theta_2^2)$ vértices de um quadrado contido em $[0,1]\times[0,1]$, tais que $0 \leq \theta_0^1 < \theta_1^1 \leq 1$ e $0 \leq \theta_0^2 < \theta_2^2 \leq 1$.

Seja F_κ um espaço intermediário em relação à $\bar{E}$, pertencente à classe $K(\Theta_\kappa,\bar{E})$, para $=0,1,2$ e 3. Então, se $\bar{F} = (F_0,F_1,F_2,F_3)$, vamos ter

$$\bar{F}_{\lambda,Q,K'} \subset \bar{E}_{\Theta,Q,K}$$

onde $0 < \lambda=(\lambda^1,\lambda^2) < 1$ e $\Theta=(\theta^1,\theta^2)$ verificam

$$\theta^1=(1-\lambda^1)\theta_0^1+\lambda^1\theta_1^1 \quad \text{e} \quad \theta^2=(1-\lambda^2)\theta_0^2+\lambda^2\theta_2^2.$$

Demonstração. Seja $f = f_0+f_1+f_2+f_3 \quad \bar{F}_{\lambda,Q,K'}$. Se $t=(t_1,t_2)$ então

$$K(t;f_0) \leq C_0 t^{\Theta_0}||f_0||_{F_0} = C_0 t_1^{\theta_0^1} t_2^{\theta_0^2}||f_0||_{F_0} \quad (\dagger)$$

$$K(t;f_1) \leq C_1 t^{\Theta_1}||f_1||_{F_1} = C_1 t_1^{\theta_1^1} t_2^{\theta_0^2}||f_1||_{F_1}$$

$$K(t;f_2) \leq C_2 t^{\Theta_2}||f_2||_{F_2} = C_2 t_1^{\theta_0^1} t_2^{\theta_2^2}||f_2||_{F_2}$$

$$K(t;f_3) \leq C_3 t^{\Theta_3}||f_3||_{F_3} = C_3 t_1^{\theta_1^1} t_2^{\theta_2^2} \quad f_3 \quad {}_{F_3}$$

e como $t^{\Theta_1-\Theta_0}=t_1^{\theta_1^1-\theta_0^1}$, $t^{\Theta_2-\Theta_0}=t_2^{\theta_2^2-\theta_0^2}$ e $t^{\Theta_3-\Theta_0}=t_1^{\theta_1^1-\theta_0^1}t_2^{\theta_2^2-\theta_0^2}$, temos

$K(t;f) \leq$

$\leq K(t;f\ ) + K(t;f\ ) + K(t;f\ ) + K(t;f\ )$

$\leq C_0 t^{\Theta_0}||f_0||_{F_0}+ C_1 t^{\Theta_1}||f_1||_{F_1}+ C_2 t^{\Theta_2}||f_2||_{F_2}+ C_3 t^{\Theta_3}||f_3||_{F_3}$

$\leq C\ t_1^{\theta_0^1}t_2^{\theta_0^2}\{||f_0||_{F_0}+t_1^{\theta_1^1-\theta_0^1}||f_1||_{F_1}+t_2^{\theta_2^2-\theta_0^2}||f_2||_{F_2}+t_1^{\theta_1^1-\theta_0^1}t_2^{\theta_2^2-\theta_0^2}||f_3||_{F_3}$

(†) Se $t = (t_1,t_2)$ e $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2)$ escrevemos $t^\alpha = t^{\alpha_1}t^{\alpha_2}$.

onde $C = \max(C_0, C_1, C_2, C_3)$. Portanto

$$K(t_1,t_2;f) \leq C\, t_1^{\theta_0^1} t_2^{\theta_0^2}\, K'(t_1^{\theta_1^1-\theta_0^1}, t_2^{\theta_2^2-\theta_0^2}; f)$$

e

$$t_1^{-\theta^1} t_2^{-\theta^2} K(t_1,t_2;f) \leq C\, t_1^{\theta_0^1-\theta^1} t_2^{\theta_0^2-\theta^2}\, K'(t_1^{\theta_1^1-\theta_0^1}, t_2^{\theta_2^2-\theta_0^2}; f).$$

Agora, fazendo

$$s_1 = t_1^{\theta_1^1-\theta_0^1} \quad \text{e} \quad s_2 = t_2^{\theta_2^2-\theta_0^2},$$

vamos ter

$$||f||_{\Theta,Q,K} \leq C(\theta_1^1-\theta_0^1)^{-1/q_1}(\theta_2^2-\theta_0^2)^{-1/q_2}\, ||s_1^{\frac{\theta_0^1-\theta^1}{\theta_1^1-\theta_0^1}} s_2^{\frac{\theta_0^2-\theta^2}{\theta_2^2-\theta_0^2}} K'(s_1,s_2;f)||_{L_*^Q}$$

Finalmente, definindo

$$\theta^1 = (1-\lambda^1)\theta_0^1 + \lambda^1\theta_1^1 \quad \text{e} \quad \theta^2 = (1-\lambda^2)\theta_0^2 + \lambda^2\theta_2^2,$$

vamos ter

$$||f||_{\Theta,Q,K} \leq C'\, ||s_1^{-\lambda^1} s_2^{-\lambda^2}\, K'(s_1,s_2;f)||_{L_*^Q}$$

$$= C'\, ||f||_{\lambda,Q,K'}\,.$$

4.2. ESPAÇOS DE CLASSE $J(\Theta,\bar{E})$.

4.2.1. DEFINIÇÃO. Um espaço de Banach E, intermediário em relação à quadrupla $\bar{E}$, pertence a classe $J(\Theta,\bar{E})$, onde $0 \leq \Theta=(\theta_1,\theta_2) \leq 1$, se para todo $f \in \bigcap\bar{E}$ existe uma constante $C \geq 0$, que não depende de f, tal que

$$||f||_E \leq C\, t_1^{-\theta_1} t_2^{-\theta_2}\, J(t_1,t_2;f).$$

4.2.2. PROPOSIÇÃO. Seja E um espaço intermediario em relação à $\bar{E}$. Então E pertence a classe $J(\Theta,\bar{E})$ se e somente se $\bar{E}_{\Theta,1,J} \subset E$.

Demonstração. Seja $E \in J(\Theta,\bar{E})$. Então $\bar{E}_{\Theta,1,J} \subset E$. Com efeito, se $f \in \bar{E}_{\Theta,1,J}$ existe uma função fortemente mensurável

$$u: R_+ \longrightarrow \bar{E}$$

tal que

$$f = \int_0^\infty\int_0^\infty u(t_1,t_2)\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}$$

e

$$t_1^{-\theta_1} t_2^{-\theta_2}\, J(t_1,t_2;u(t_1,t_2)) \in L_*^1.$$

Logo

$$||f||_E \leq \int_0^\infty\int_0^\infty ||u(t_1,t_2)||_E \frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}$$

$$\leq C \int_0^\infty\int_0^\infty t_1^{-\theta_1} t_2^{-\theta_2}\, J(t_1,t_2;u(t_1,t_2))\, \frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}.$$

Tomando o ínfimo em relação as funções u, vamos ter

$$||f||_E \leq C\, ||f||_{\Theta,1,J}.$$

Seja, agora, $\bar{E}_{\Theta,1,J} \subset E$. Para todo inteiro positivo n e $t=(t_1,t_2) > 0$, fixado, façamos

$$\Psi_n(s\ ,s\ ) = \begin{cases} n^2 & \text{se} \quad t_i e^{-1/n} \leq s_i < t_i,\ i=1,2; \\ 0 & \text{senão} \end{cases}$$

Para cada $f \in \cap \bar{E}$, seja $u_n = u_n(s_1,s_2) = \Psi_n(s_1,s_2)f$. Então

$$||f||_{\Theta,1,J} = \inf_{f=\int_{R_+^2} u(s)\frac{ds}{s}} \int_0^\infty\int_0^\infty s_1^{-\theta_1} s_2^{-\theta_2} J(s_1,s_2;u(s_1,s_2))\frac{ds_1}{s_1}\frac{ds_2}{s_2}$$

$$\leq \int_0^\infty\int_0^\infty s_1^{-\theta_1} s_2^{-\theta_2} J(s_1,s_2;u_n(s_1,s_2))\frac{ds_1}{s_1}\frac{ds_2}{s_2}$$

$$\leq n^2 \int_{t_2 e^{-1/n}}^{t_2} \int_{t_1 e^{-1/n}}^{t_1} s_1^{-\theta_1} s_2^{-\theta_2} J(s_1,s_2;f)\frac{ds}{s}\,\frac{ds}{s}$$

$$\leq t_1^{-\theta_1} t_2^{-\theta_2} J(t_1,t_2;f).$$

Logo

$$||f||_E \leq ||f||_{\Theta,1,J} \leq C\, t_1^{-\theta_1} t_2^{-\theta_2} J(t_1,t_2;f).$$

<u>4.2.3.PROPOSIÇÃO.</u> Consideremos $\Theta_0=(\theta_0^1,\theta_0^2)$, $\Theta_1=(\theta_1^1,\theta_0^2)$, $\theta_2=(\theta_0^1,\theta_2^2)$ e $\Theta_3=(\theta_1^1,\theta_2^2)$ vértices de um quadrado contido em $[0,1]\times[0,1]$, tais que $0 \leq \theta_0^1 < \theta_1^1 \leq 1$ e $0 \leq \theta_0^2 < \theta_2^2 \leq 1$.

Seja F_κ um espaço intermediário em relação a $\bar{E}$, pertencente à classe $J(\Theta_\kappa,\bar{E})$, para $\kappa=0,1,2$ e 3. Então, se $\bar{F} = (F_0,F_1,F_2,F_3)$, vamos ter

$$\bar{E}_{\Theta,Q,J} \subset \bar{F}_{\lambda,Q,J'};$$

onde $0 < \lambda=(\lambda^1,\lambda^2) < 1$ e $\Theta = (\theta^1,\theta^2)$ verificam

$$\theta^1=(1-\lambda^1)\theta_0^1+\lambda^1\theta_1^1 \quad e \quad \theta^2=(1-\lambda^2)\theta_0^2+\lambda^2\theta_2^2.$$

Demonstração. Seja $f \in \bar{E}_{\theta,Q,J}$. Então, existe $u=u(s_1,s_2) \in \cap \bar{E}$ tal que

$$f = \int_0^\infty\int_0^\infty u(s_1,s_2)\frac{ds_1}{s_1}\frac{ds_2}{s_2}$$

e

$$\bar{s}_1^{\theta_1}\bar{s}_2^{\theta_2}\; J(s_1,s_2;u(s_1,s_2)) \in L_*^Q.$$

Como $F_K \in J(\Theta_K,\bar{E})$, podemos escrever

$$||u(s)||_{F_0} \leq C_0\bar{t}^{\Theta_0}J(t,u(s)) = C_0\bar{t}_1^{\theta_0^1}\bar{t}_2^{\theta_0^2}\; J(t_1,t_2;u(s_1,s_2)),$$

$$||u(s)||_{F_1} \leq C_1\bar{t}^{\Theta_1}J(t,u(s)) = C_1\bar{t}_1^{\theta_1^1}\bar{t}_2^{\theta_0^2}\; J(t_1,t_2;u(s_1,s_2))$$

$$||u(s)||_{F_2} \leq C_2\bar{t}^{\Theta_2}J(t,u(s)) = C_2\bar{t}_1^{\theta_0^1}\bar{t}_2^{\theta_2^2}\; J(t_1,t_2;u(s_1,s_2))$$

$$||u(s)||_{F_3} < C_3\bar{t}^{\Theta_3}J(t,u(s)) = C_3\bar{t}^{\theta_1^1}\bar{t}^{\theta_2^2}\; J(t_1,t_2;u(s_1,s_2))$$

e como $t^{\Theta_0-\Theta_1}=t_1^{\theta_0^1-\theta_1^1}$, $t^{\Theta_0-\Theta_2}=t_2^{\theta_0^2-\theta_1^2}$ e $t^{\Theta_0-\Theta_3}=t_1^{\theta_0^1-\theta_1^1}t_2^{\theta_0^2-\theta_2^2}$

vamos ter

$$J'(s,u(s))=\max\{||u(s)||_{F_0},s_1||u(s)||_{F_1},s_2||u(s)||_{F_2},s_1s_2||u(s)||_{F_3}\}$$

$$\leq \max\{C_0\bar{t}^{\Theta_0},s_1C_1\bar{t}^{\Theta_1},s_2C_2\bar{t}^{\Theta_2},s_1s_2C_3\bar{t}^{\Theta_3}\}\; J(t;u(s))$$

$$\leq C\; \bar{t}^{\Theta_0}\max\{1,s_1t^{\Theta_0\;\Theta_1},s_2t^{\Theta_0\;\Theta_2},s_1s_2t^{\Theta_0\;\Theta_3}\}\; J(t,u(s))$$

$$\leq C\; \bar{t}^{\Theta}\; \max\{1,s_1t_1^{\theta_0^1-\theta_1^1},s_2t_2^{\theta_0^2-\theta_2^2},s_1s_2t_1^{\theta_0^1-\theta_1^1}t_2^{\theta_0^2-\theta_2^2}\}J(t,u(s)),$$

onde $C=\max(C_0,C_1,C_2,C_3)$.

Façamos, agora,

$$s_1 = t_1^{\theta_1^1-\theta_0^2} \quad e \quad s_2 = t_2^{\theta_2^2-\theta_0^2},$$

então

$$J'(s;u(s)) \leq C\, s_1^{\frac{-\theta_0^1}{\theta_1^1-\theta_0^1}}\, s_2^{\frac{-\theta_0^2}{\theta_2^2-\theta_0^2}}\, J(s_1^{\frac{1}{(\theta_1^1-\theta_0^1)}}, s^{\frac{1}{(\theta_2^2-\theta_0^2)}}; u(s_1,s_2))$$

Definindo

$$\Theta=(\theta^1,\theta^2)=((1-\lambda^1)\theta_0^1+\lambda^1\theta_1^1,(1-\lambda^2)\theta_0^2+\lambda^2\theta_2^2))=(1-\lambda)\Theta_0+\lambda\Theta_3$$

temos

$$\bar{s}^{\lambda} J'(S;u(s)) \leq C\, s_1^{\frac{-\theta^1}{\theta_1^1-\theta^1}}\, s_2^{\frac{-\theta^2}{\theta_2^2-\theta^2}}\, J(s_1^{\frac{-1}{\theta_1^1-\theta_0^1}}, s_2^{\frac{-1}{\theta_2^2-\theta_0^2}}; u(s_1,s_2)),$$

e

$$||\bar{s}^{\lambda}\, J'(s,u(s))||_{L_*^Q} \leq C||\bar{s}_1^{\theta^1}\bar{s}_2^{\theta^2} J(s_1,s_2;u(s_1^{\theta_1^1-\theta_0^1}, s_2^{\theta_2^2-\theta_0^2}))||_{L_*^Q}.$$

Mas

$$\frac{f}{(\theta_1^1-\theta_0^1)\ (\theta_2^2-\theta_0^2)} = \frac{1}{(\theta_1^1-\theta_0^1)\ (\theta_2^2-\theta_0^2)} \int_0^{\infty}\!\!\int_0^{\infty} u(s_1,s_2)\frac{ds_1}{s_1}\frac{ds_2}{s_2}$$

$$= \int_0^{\infty}\!\!\int_0^{\infty} u(s_1^{\theta_1^1-\theta_0^1}, s_2^{\theta_2^2-\theta_0^2})\frac{ds_1}{s_1}\frac{ds_2}{s_2}$$

Finalmente

$$||f||_{\lambda,Q,J'} \leq C||f||_{\Theta,Q,J'},$$

e a proposição esta demonstrada.

4.3. ESPAÇOS DE CLASSE $H(\Theta,\bar{E})$.

4.3.1. DEFINIÇÃO. Um espaço de Banach E, intermediário em relação a quádrupla $\bar{E}$, pertence a classe $H(\Theta,\bar{E})$, $0\leq\Theta\leq 1$, se E pertence a classe $K(\Theta,\bar{E})$ e a classe $J(\Theta,\bar{E})$ simultaneamente.

4.3.2. PROPOSIÇÃO. Seja E um espaço intermediário em relação à $\bar{E}$. Então, E pertence a classe $H(\Theta,\bar{E})$ se e somente se

$$\bar{E}_{\Theta,1,J} \subset E \subset \bar{E}_{\Theta,\infty,K}.$$

Demonstração. Segue das proposições 4.1.2 e 4.2.2.

4.3.3. COROLÁRIO. Para $0 < \Theta < 1$ e $1 \leq Q \leq \infty$, vamos ter

$$\bar{E}_{\Theta,Q,K} \in H(\Theta,\bar{E}).$$

4.3.4. TEOREMA. Consideremos $\Theta_0=(\theta_0^1,\theta_0^2)$, $\Theta_1=(\theta_0^1,\theta_2^2)$, $\Theta_2=(\theta_1^1,\theta_0^2)$ e $\Theta_3=(\theta_1^1,\theta_2^2)$ vértices de um quadrado contido em $[0,1]\times[0,1]$, tais que $0\leq\theta_0^1<\theta_1^1\leq 1$ e $0\leq\theta_0^2<\theta_2^2\leq 1$. Seja F_κ um espaço intermediário em relação a $\bar{E}$, pertencente à classe $H(\Theta_\kappa,\bar{E})$, para $\kappa=0,1,2$ e 3. Então, para todo $0 < \lambda=(\lambda^1,\lambda^2) < 1$ e $\Theta=(\theta^1,\theta^2)$ tal que $\theta^1=(1-\lambda^1)\theta_0^1+\lambda^1\theta_1^1$ e $\theta^2=(1-\lambda^2)\theta_0^2+\lambda^2\theta_2^2$,

$$\bar{F}_{\lambda,Q,K'} = \bar{E}_{\Theta,Q,K},$$

com equivalência de normas.

CAPÍTULO 5

INTERPOLAÇÃO

5.1. TEOREMAS PARA K-ESPAÇOS.

Sejam $\bar{E}=(E_0,E_1,E_2,E_3)$ e $\bar{F}=(F_0,F_1,F_2,F_3)$ duas quádruplas de interpolação.

5.1.1.PROPOSIÇÃO. Seja T uma aplicação linear de $\Sigma\bar{E}$ em $\Sigma\bar{F}$ tal que a restrição de T a cada E_κ é uma aplicação linear e contínua de E_κ em F_κ, $\kappa=0,1,2,3$. Nestas condições T é, também, uma aplicação linear e contínua de $\bar{E}_{\Theta,Q,K}$ em $\bar{F}_{\Theta,Q,K}$ (†).

Demonstração. Seja $C_\kappa > 0$, $\kappa=0,1,2,3$, tal que

$$||Tg||_{F_\kappa} \leq C_\kappa ||g||_{E_\kappa} \qquad (g \in E_\kappa)$$

Se $f = f_0+f_1+f_2+f_3 \in \bar{E}_{\Theta,Q,K}$, onde $f_\kappa \in \bar{E}_\kappa$, vamos ter

$$||Tf_\kappa||_{F_\kappa} \leq C_\kappa ||f_\kappa||_{E_\kappa} \qquad (\kappa=0,1,2,3).$$

Então, fazendo $C = \max(C_0,C_1,C_2,C_3)$ e tomando $f \in \bar{E}_{\Theta,Q,K}$, temos

---

(†) Por abuso de notação e de linguagem vamos denotar e confundir a aplicação linear T com a restrição dessa aplicação a qualquer subespaço de seu domínio.

$$K_F(t;Tf) \leq ||Tf_0||_{F_0}+t_1||Tf_1||_{F_1}+t\ ||Tf_2||_{F_2}+t_1t_2||Tf_3||_{F_3}$$

$$\leq C_0||f_0||_{E_0}+t_1C_1||f_1||_{E_1}+t_2C_2||f_2||_{E_2}+t_1t_2C_3||f_3||_{E_3}$$

$$\leq C\ \{||f_0||_{E_0}+t_1||f_1||_{E_1}+t_2||f_2||_{E_2}+t_1t_2||f_3||_{E_3}$$

donde

$$K_F(t;Tf) \leq C\ K_E(t;f)$$

e

$$||Tf||_{\bar{F}_{\Theta,Q,K}} \leq C\ ||f||_{\bar{E}_{\Theta,Q,K}}\ .$$

A proposição esta demonstrada.

<u>5.1.2.PROPOSIÇÃO.</u> Sejam $\bar{X}=(\bar{E}_{\Theta_\kappa},Q,K)_{\kappa=0,1,2,3}$ e $\bar{Y}=(\bar{F}_{\Theta_\kappa},Q,K)_{\kappa=0,1,2,3}$ onde $\Theta_0=(\theta_0^1,\theta_0^2)$, $\Theta_1=(\theta_1^1,\theta_0^2)$, $\Theta_2=(\theta_0^1,\theta_2^2)$, $\Theta_3=(\theta_1^1,\theta_2^2)$. Seja T uma aplicação linear de $\Sigma\bar{X}$ em $\Sigma\bar{Y}$, tal que existam constantes $C_\kappa > 0$ para as quais

$$||Tf||_{\bar{F}_{\Theta_\kappa,Q,K}} \leq C_\kappa||f||_{\bar{E}_{\Theta_\kappa,Q,K}}$$

onde $f \in \bar{E}_{\Theta_\kappa,Q,K}$ e $\kappa=0,1,2,3$. Então, existe uma constante $C \geq 0$ tal que para $f \in \bar{E}_{\lambda,Q,K}$, vale

$$||Tf||_{\bar{Y}_{\lambda,Q,K}} \leq C\ ||f||_{\bar{E}_{\Theta,Q,K}}\ .$$

onde $0 < \lambda=(\lambda^1,\lambda^2) < 1$ e $\Theta=(\theta^1,\theta^2)$ é definido por $\theta^1=(1-\lambda^1)\theta_0^1+\lambda^1\theta_1^1$ e $\theta^2=(1-\lambda^2)\theta_0^2+\lambda^2\theta_2^2$.

Demonstração. Segue de 4.1.4. e 5.1.1.

5.2. TEOREMAS PARA J-ESPAÇOS.

Sejam $\bar{E}=(E_0, E_1, E_2, E_3)$ e $\bar{F}=(F_0, F_1, F_2, F_3)$ duas quádruplas de interpolação.

5.2.1. PROPOSIÇÃO. Seja T uma aplicação linear de $\Sigma\bar{E}$ em $\Sigma\bar{F}$ tal que a restrição de T a cada E_κ é uma aplicação linear e contínua de E_κ em F_κ, $\kappa=0,1,2,3$. Nestas condições T é, também, uma aplicação linear e contínua de $\bar{E}_{\Theta,Q,J}$ em $\bar{F}_{\Theta,Q,J}$.

Demonstração. Para toda $u \in \cap\bar{E}$, existe $C > 0$, tal que

$$J(s;Tu) \leq C\, J(s;u). \qquad (s \in R^2_+)$$

Sejam $f \in \bar{E}_{\Theta,Q,J}$ e $u=u(s)$ nas condições de 2.2.1. Então

$$f = \int_{R^2_+} u(s)\, \frac{ds}{s}.$$

Fazendo $v = Tu$, vamos ter

$$Tf = \int_{R^2_+} Tu(s)\, \frac{ds}{s} = \int_{R_+} v(s)\, \frac{ds}{s}.$$

Logo

$$||Tf||_{\bar{F}_{\Theta,Q,J}} \leq ||s^{-\Theta} J(s;v(s))||_{L^Q_*}$$

$$\leq C\, ||s^{-\Theta}\, J(s,u(s))||_{L^Q_*}$$

e portanto

$$||Tf||_{\bar{F}_{\Theta,Q,J}} \leq C\, ||f||_{\bar{E}_{\Theta,Q,J}}.$$

5.2.2.PROPOSIÇÃO. Sejam $\overline{X}=(\overline{E}_{\Theta_\kappa},Q,J)_{\kappa=0,1,2,3}$ e $\overline{Y}=(\overline{F}_{\Theta_\kappa},Q,J)_{\kappa=0,1,2,3}$.

onde $\Theta_0=(\theta_0^1,\theta_0^2),\Theta_1=(\theta_1^1,\theta_0^2),\Theta_2=(\theta_0^1,\theta_2^2),\Theta_3=(\theta_1^1,\theta_2^2)$.

Seja T uma aplicação linear de $\Sigma\overline{X}$ em $\Sigma\overline{Y}$, tal que existam constantes $C_\kappa > 0$ para as quais

$$||Tf||_{\overline{F}_{\Theta_\kappa},Q,J} \leqq C_\kappa ||f||_{\overline{E}_{\Theta_\kappa},Q,J}$$

onde $f \in \overline{E}_{\Theta_\kappa},Q,J$ e $\kappa=0,1,2,3$. Então, existe uma constante $C > 0$ tal que para $f \in \overline{X}_{\Theta,Q,J}$ vale

$$||Tf||_{\overline{\overline{F}}_{\Theta,Q,J}} \leqq C\ ||f||_{\overline{X}_{\lambda,Q,J}}$$

onde $0 < \lambda=(\lambda^1,\lambda^2) < 1$ e $\Theta=(\theta^1,\theta^2)$ é definido por $\theta^1=(1-\lambda^1)\theta_0^1+\lambda^1\theta_1^1$ e $\theta^2=(1-\lambda^2)\theta_0^2+\lambda^2\theta_2^2$.

Demonstração. Segue de 4.2.3 e 5.2.1.

5.3. O TEOREMA DE INTERPOLAÇÃO.

5.3.1. TEOREMA . Sejam $\bar{X}=(E_{\Theta_\kappa,Q,K})_{\kappa=0,1,2,3}$ e $\bar{Y}=(F_{\Theta_\kappa,Q,K})_{\kappa=0,1,2,3}$ e T uma aplicação linear de $\Sigma\bar{X}$ em $\Sigma\bar{Y}$, tal que para $\kappa=0,1,2$ e 3, existam constantes $C_\kappa>0$ para as quais vale

$$||Tf||_{\bar{F}_{\Theta_\kappa,Q,K}} \leq C_\kappa ||f||_{\bar{E}_{\Theta_\kappa,Q,K}}$$

onde $f \in \bar{E}_{\Theta_\kappa,Q,K}$. Suponhamos, também que

$\Theta_0=(\theta_0^1,\theta_0^2)$, $\Theta_1=(\theta_1^1,\theta_0^2)$, $\Theta_2=(\theta_0^1,\theta_2^2)$ e $\Theta_3=(\theta_1^1,\theta_2^2)$

Então, se $\Theta=(\theta^1,\theta^2)$ é definido por

$$\theta^1=(1-\lambda^1)\theta_0^1+\lambda^1\theta_1^1 \quad \text{e} \quad \theta^2=(1-\lambda^2)\theta_0^2+\lambda^2\theta_2^2,$$

onde $0<\lambda=(\lambda^1,\lambda^2)<1$, existe uma constante $C\geq 0$ tal que

$$||Tf||_{\bar{F}_{\Theta,Q,K}} \leq C||f||_{\bar{E}_{\Theta,Q,K}}.$$

Mais ainda, se $1\leq P\leq Q$ vamos ter

$$||Tf||_{\bar{F}_{\Theta,Q,K}} \leq C||f||_{\bar{E}_{\Theta,P,K}}.$$

Demonstração. Segue combinando os teoremas de interpolação 5.1.2 e 5.2.2 e os teoremas de reiteração 4.1.4 e 4.2.3.

CAPÍTULO 6

ESPAÇOS DE LORENTZ, COM NORMAS MIXTAS

6.1. PRELIMINARES.

Seja (X,μ) um espaço de medida σ-finito e $f:X \longrightarrow C$, uma função μ-mensurável. A função de distribuição m_f é definida por

6.1.0(1) $$m_f(\lambda) = \mu(\{x \in X \mid |f(x)| > \lambda > 0\}).$$

Segue dessa definição que m_f é não crescente e contínua à direita.

O rearranjo não crescente ou reordenada não crescente da função f é a função definida por

6.1.0(2) $$f^*(t) = m_{m_f}(t) = |\{\lambda > 0 \mid m_f(\lambda) > t > 0\}|$$
$$= \sup \{\lambda > 0 \mid m_f(\lambda) > t > 0\}$$
$$= \inf \{\lambda > 0 \mid m_f(\lambda) \leqq t\},$$

A função f^* é, também, não crescente e contínua à direita.

Definimos, finalmente, a função média da função f

6.1.0(3) $$f^{**}(s) = \frac{1}{s}\int_0^s f^*(t)dt.$$

Uma relação fundamental, devida a J.Peetre (17) e independentemente a E.T.Oklander (21), é a seguinte

$$f^{**}(s) = \frac{1}{s}||f||_{L^1+sL^\infty}.$$

Estamos, aqui, interessados em estender a noção de função média para funções definidas em espaços produto.

Consideremos, então, um espaço de medida produto $(X\times Y, \mu\times\nu)$ e funções reais ou complexas $\mu\times\nu$-mensuráveis. Definimos

6.1.0(5) $$f^{**}(s,t) = \frac{1}{st}\, \| \, \|f(x,y)\|_{L^1+sL^\infty}\|_{L^1+tL^\infty}$$

$$= \frac{1}{st}\, \|f\|_{(L^1+tL^\infty)(L^1+sL^\infty)}$$

A multiplicação formal de L^1+tL^∞ por L^1+sL^∞ nos leva a considerar

6.1.0(6) $$f^{****}(s,t) = \frac{1}{st}\, \|f\|_{L^1+sL^1(L^\infty)+tL^\infty(L^1)+stL^\infty}$$

Vamos provar que f^{**} e f^{****} são equivalentes. Para isso vamos precisar de alguns lemas auxiliares.

Seja Z um espaço de medida σ-finito qualquer com medida representada por dz. Se G é um espaço de Banach, denotamos por $L^p(G)$ o espaço das funções $g:Z \longrightarrow G$, que são fortemente mensuráveis e tais que $\|g(z)\|_G$ é p-integrável. Quando $G= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ escreveremos simplesmente L^p.

Sejam E e F dois espaços de Banach.

<u>6.1.1. LEMA.</u> (i) $L^1(E+F) = L^1(E) + L^1(F)$

(ii) $\|\cdot\|_{L^1(E+F)} = \|\cdot\|_{L^1(E)+L^1(F)}$

Demonstração. Se $f \in L^1(E)+L^1(F)$ então $f \in L^1(E+F)$ e temos

$$\|f\|_{L^1(E+F)} = \int \|f\|_{E+F}\,dz = \int \inf_{f(z)=u(z)+v(z)} (\|u(z)\|_E + \|v(z)\|_F)\,dz$$

Reciprocamente, seja $c \in E+F$ e $G \subset Z$ um conjunto de medida finita. Então

$$||c\chi_G||_{L^1(E+F)} \geq ||c\chi_G||_{L^1(E)+L^1(F)}.$$

Se $\zeta = \Sigma c_k \chi_{G_k}$ é uma função simples à valores em E+F, vamos ter

$$\begin{aligned} ||\ \zeta\ ||_{L^1(E+F)} &= \Sigma ||c_k\chi_{G_k}||_{L^1(E)+L^1(F)} \\ &\geq \Sigma ||c_k\chi_{G_k}||_{L^1(E)+L^1(F)} \\ &\geq ||\ \zeta\ ||_{L^1(E)+L^1(F)} \end{aligned}$$

Seja, agora, $f \in L^1(E+F)$ e (ζ_n) uma sequência de funções simples que converge para f em $L^1(E+F)$. A sequência (ζ_n) será, então uma sequência de Cauchy em $L^1(E)+L^1(F)$. Seja g o $L^1(E)+L^1(F)$-limite de (ζ_n). Mas $L^1(E)+L^1(F) \subset L^1(E+F)$ e portanto $f = g$. Logo

$$L^1(E+F) \subset L^1(E)+L^1(F),$$

e a imersão é contínua.

<u>6.1.2.COROLÁRIO.</u> $tL^1(E+F) = tL^1(E) + tL^1(F)$.

6.1.3. LEMA. (i) $L^\infty(E+F) = L^\infty(E) + L^\infty(F)$;

(ii) $||\cdot||_{L^\infty(E+F)} = ||\cdot||_{L^\infty(E) + L^\infty(F)}$.

Demonstração. Temos, por definição, se $f \in L^\infty(E+F)$

$$||f||_{L^\infty(E+F)} = \text{sup.ess.}\left(\inf_{f=u+v} (||u(z)||_E + ||v(z)||_F)\right)$$

e

$$||f||_{L^\infty(E)+L^\infty(F)} = \inf_{f=u+v} \{\text{sup.ess.}||u(z)||_E + \text{sup.ess.}||v(z)||_F\}$$

Portanto, se $\delta^1 > 0$, existe z tal que para todo u e v com f=u+v vamos ter

$$||f||_{L^\infty(E+F)} - \delta^1 \leq \inf_{f=u+v} (||u(z^1)||_E + ||v(z^1)||_F)$$

$$\leq ||u(z^1)||_E + ||v(z^1)||_F$$

$$\leq \text{sup.ess.}||u(z)||_E + \text{sup.ess.}||v(z)||_F.$$

Portanto

6.1.3(1) $$||f||_{L^\infty(E)+L^\infty(F)} - \delta^1 \leq \inf_{f=u+v} (||u||_{L^\infty(E)} + ||v||_{L^\infty(F)})$$

Por outro lado, para todo u e v com f=u+v, temos

$$||f||_{L^\infty(E)+L^\infty(F)} \leq ||u||_{L^\infty(E)} + ||v||_{L^\infty(F)}.$$

Logo, dado $\delta^2 > 0$ existe z^2 tal que

$$||f||_{L^\infty(E)+L^\infty(F)} \leq ||u(z^2)||_E + ||v(z^2)||_F$$

e então

$$||f||_{L^\infty(E)+L^\infty(F)} - \delta^2 \leq ||u(z^2)||_E + ||v(z^2)||_F$$

Finalmente

6.1.3(2) $$||f||_{L^\infty(E) + L^\infty(F)} \leq ||f||_{L^\infty(E+F)}.$$

As relações 6.1.3(1) e (2) demonstram o lema.

<u>6.1.4.COROLÁRIO.</u> $sL^\infty(E+F) = sL^\infty(E) + sL^\infty(F).$

<u>6.1.4. LEMA.</u> (i) $(L^1+L^\infty)(F) = L^1(F) + L^\infty(F)$

(ii) $\|\cdot\|_{(L^1+L^\infty)(F)} \leq \|\cdot\|_{L^1(F)} + L^\infty(F)$

$$\leq 2\|\cdot\|_{(L\ +L\ )(F)}$$

Demonstração. Seja $f \in (L^1+L^\infty)(F)$. Existem $u \in L^1(F)$ e $v \in L^\infty(F)$, tal que $f = u + v$, q.t.p., e ainda

$$\|u(z)\|_F \leq \|f(z)\|_F \quad \text{e} \quad \|v(z)\|_F \leq \|f(z)\|_F$$

Vamos ter

$$\|u\|_{L^1(F)} = \|\ \|u\|_F\|_{L^1} = \|\ \|u\|_F\|_{L^1+L^\infty}$$

$$\leq \|\ \|f\|_F\|_{L^1+L^\infty} = \|f\|_{(L^1+L^\infty)(F)}.$$

Analogamente

$$\|v\|_{L^\infty(F)} \leq \|f\|_{(L^1+L^\infty)(F)}.$$

Donde

6.1.4(1) $$\|f\|_{L^1(F)+L^\infty(F)} \leq \|u\|_{L^1(F)} + \|v\|_{L^\infty(F)}$$

$$\leq \|f\|_{(L^1+L^\infty)(F)} + \|f\|_{(L^1+L^\infty)(F)}$$

$$\leq 2\ \|f\|_{(L^1+L^\infty)(F)}$$

Por outro lado, temos

$$\|f\|_{(L^1+L^\infty)(F)} = \|\ \|f\|\ \|_{L^1+L^\infty}$$

$$\leq \inf_{f=u+v} (\|\ \|u\|_F\|_{L^1} + \|\ \|v\|_F\|_{L^\infty})$$

O lema esta demonstrado.

7.2. OS ESPAÇOS DE LORENTZ L^{PQ}.

Vamos introduzir, aqui, os espaços de Lorentz com normas mixtas ou iteradas.

Lembremos que uma função mensurável f pertente ao espaço de Lorentz L^{pq} se

$$||f||_{L^{pq}} = ||s^{1/p} f^{**}(s)||_{L^q_*} < \infty$$

A definição dos espaços com normas mixtas será feita iterando-se essa norma.

Sejam, então, X e Y dois espaços de medida σ-finita μ e ν, respec. Denotemos por $M=M(X\times Y)$ o espaço das funções (reais ou complexas) $\mu\times\nu$-mensuráveis sobre $X\times Y$.

Se $f \in M$ e $1 \leqq P=(p_1,p_2), Q=(q_1,q_2) \leqq \infty$, consideremos as aplicações

$$y \in Y \longrightarrow ||s^{1/p_1} f_y^{**}(s)||_{L^{q_1}_*}$$

e

$$t \in R_+ \longrightarrow (||s^{1/p_1} f_y^{**}(s)||_{L^{q_1}_*})^{**}(t)$$

Consideremos, então

$$||f||_{L^{PQ}} = ||t^{1/p_2} ||s^{1/p_1} f^{**}(s)||^{**}_{L^{q_1}_*}(t)||_{L^{q_2}_*}$$

$$= || \, ||f||_{L^{p_1 q_1}} \, ||_{L^{p_2 q_2}}$$

Estamos, agora, em condições de dar a seguinte definição.

7.2.1. DEFINIÇÃO. Seja $1 < P < \infty$ e $1 \leq Q \leq \infty$ ou $1 \leq P < \infty$ e e $Q = \infty$. Definimos então, os espaços de Lorentz com normas mixtas ou iteradas por

$$L^{PQ} = L^{PQ}(X\times Y) = \{ f \in M(X\times Y) \mid \|f\|_{L^{PQ}} < \infty \}.$$

7.2.2. PROPOSIÇÃO. Os espaços L^{PQ} são completos quando munidos de qualquer topologia equivalente a topologia gerada pela norma $\|\cdot\|_{L^{PQ}}$.

Demonstração. Seja (f_n) uma sequência de Cauchy em L^{PQ}. Podemos supor que

$$\|f_{n+1}-f_n\|_{L^{PQ}} < \bar{2}^n$$

(tomando uma subsequencia se necessário). Então

$$\|\sum_{k=1}^{m}(f_{k+1}-f_k)\|_{L^{PQ}} \leq \sum_{k=1}^{m}\|f_{k+1}-f_k\|_{L^{PQ}} \leq 1.$$

Portanto

$$\sum_{n=1}^{\infty}(f_{k+1}-f_k)^{**}(s) < \infty$$

e, por ser não crescente é finita para todo $s > 0$.

Por outro lado

$$f_y^{**}(s) = \|f_y\|_{\bar{s}^1 L^1 + L^\infty}$$

e portanto a série

$$f_1 + \sum_{k=1}^{\infty}(f_{k+1}-f_k)_y$$

converge em $L^1 + sL^\infty$ à uma função f_y.

converge em L^1+sL^∞ à uma função f .

Para cada $\bar{x}$ εX, fixo, consideremos a correspondencia

$$y \longrightarrow f(\bar{x}) = f(\bar{x},y)$$

Fica, portanto, bem definida a função

$$f : (x,y) \longrightarrow f(x,y).$$

Agora,

$$(f(x,\cdot)-f_k(x,\cdot))^{**}(s) = (\sum_{n=k}^{\infty}(f_{k+1}-f)_y)^{**}(s)$$
$$\leq \sum_{n=k}^{\infty}(f_{k+1}-f)_y^{**}(s)$$

Logo

$$||f - f_k||_{L^{PQ}} \leq \sum_{n=k}^{\infty}||f_{k+1} - f_k||_{L^{PQ}} \leq 1/2^{k-1}$$

Portanto, f ε L^{PQ} e f converge para f em L^{PQ}.

<u>6.2.3.PROPOSIÇÃO.</u> As funções simples são densas em L^{PQ}. $1 \leq Q < \infty$.

Demonstração. Seja f ε L^{PQ}, a qual podemos supor não negativa.

Vamos mostrar que dados $\varepsilon > 0$ e $\delta > 0$ existe uma sequência de funções simples (ζ_n) tal que se $s > \delta$, então

$$0 \leq \zeta_n \leq f$$

e

$$(f-\zeta_n)^{**}(s) \leq \varepsilon$$

Observemos que se

$$f_y^*(s) \xrightarrow[s\to\infty]{} 0$$

e

$$f_x^*(t) \xrightarrow[t \to \infty]{} 0$$

Segue então que

$$\mu\times\nu(\{(x,y);\ |f(x,y)| > \varepsilon\}) < \infty$$

Logo, podemos achar uma função simples $\zeta_n \geq 0$, tal que

$$\zeta_n(x,y) = 0$$

se

$$(x,y) \notin \{(x,y);\ |f(x,y)| > \varepsilon\}$$

e

$$0 \leq f(x,y) - \zeta_n(x,y) < \varepsilon,$$

para todo

$$(x,y) \in \{(x,y);\ |f(x,y)| > \varepsilon\}$$

exceto num subconjunto de medida menor que δ. Então

$$\mu\times\nu(\{(x,y) \in X\times Y;\ |f(x,y)-\zeta_n(x,y)| > \varepsilon\}) < \delta.$$

logo, se $s \geq \delta$,

$$(f-\zeta_n)_y^*(s) < \varepsilon.$$

Observando que $n=n(\varepsilon)$ e que

$$(f-\zeta\ )_y^*(s) \leq f_y^*(s/2) + f_y^*(s/2) = 2\ f_y^*(s/2),$$

e utilizando o teorema da convergência dominada segue, finalmente,

$$||f - \zeta_n||_{L^{PQ}} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

6.3. OS ESPAÇOS $\mathfrak{L}^{PQ}$.

Consideremos, agora, o funcional

$$f^{**}(s,t) = \frac{1}{st}\,||f||_{(L^1+tL^\infty)(L^1+sL^\infty)}$$

$$= ||f||_{(s^{-1}L^1+L^\infty)(t^{-1}L^1+L^\infty)}\,.$$

Definimos, então

$$|||f|||_{\mathfrak{L}^{PQ}} = ||t^{1/p_2}||s^{1/p_1}f^{**}(s,t)||_{L^{p_1q_1}}||_{L^{p_2q_2}}$$

Com as mesmas restrições sobre P e Q de 6.2.1., definimos

6.3.1. DEFINIÇÃO. $\mathfrak{L}^{PQ} = \{\, f \in M;\ |||f|||_{\mathfrak{L}^{PQ}} < \infty \,\}$

6.3.2. PROPOSIÇÃO. Os espaços $\mathfrak{L}^{PQ}$ são completos quando munidos de qualquer topologia equivalente a topologia gerada pela norma $|||\cdot|||$.

Demonstração. Seja (f_n) uma sequência de Cauchy em $\mathfrak{L}^{PQ}$, tal que

$$|||f_{k+1}-f_k|||_{L^{PQ}} < 1/2^k.$$

Então, usando o lema de Fatou,

$$|||\sum_{k=1}^{\infty}(f_{k+1}-f_k)|||_{\mathfrak{L}^{PQ}} \leq 1$$

portanto

$$\sum_{k=1}^{\infty}(f_{k+1}-f_k)^{**}(s,t) < \infty \qquad \text{(q.t.p.)}$$

e, por ser não crescente é finita para todo $s > 0$ e $t > 0$.

A demonstração segue, agora, analogamente a de 6.2.2.

<u>6.3.3.PROPOSIÇÃO.</u> As funções simples são densas em $\mathcal{L}^{PQ}$, $1 \leq P,Q < \infty$.

Demonstração. Temos em vista da proposição 6.2.3,

$$\int_0^s (f-\zeta_n)_y^* \, ds \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

Portanto

$$(f-\zeta_n)_y^{**}(s) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

Pela continuidade de $||\cdot||_{\bar{t}^1 L^1 + L^\infty}$ segue que

$$(f-\zeta_n)^{**}(s,t) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

e, finalmente

$$|||f - \zeta_n|||_{\mathcal{L}^{PQ}} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

<u>6.3.4.PROPOSIÇÃO.</u> $(L^1;L^1(L^\infty),L^\infty(L^1),L^\infty)_{\theta,Q,K} = \mathcal{L}^{PQ}$

onde $\theta^1 = 1 - \frac{1}{p_1}$ e $\theta^2 = 1 - \frac{1}{p_2}$,

$1 \leq P < \infty$ e $1 \leq Q < \infty$ ou $1 \leq P \leq \infty$ e $Q = \infty$.

Demonstração. Fazendo $E_0 = L^1$, $E_1 = L^1(L^\infty)$, $E_2 = L^\infty(L^1)$ e $E_3 = L^\infty$, temos

$$K(s,t;f) = st\, f^{**}(s,t).$$

O resultado segue, então das definições de K-espaços e dos espaços $\mathcal{L}^{PQ}$.

6.4. EQUIVALENCIA DOS ESPAÇOS L^{PQ} E $\mathcal{L}^{PQ}$.

6.4.1. LEMA. Seja ζ uma função simples definida num espaço de medida σ-finito (X,μ); isto é

$$\zeta(x) = \sum_{k=1}^{N} c_k \chi_{E_k}(x)$$

onde $E_i \cap E_j = \emptyset$, se $i \neq j$, e $\mu(E_k) < \infty$, $k=1,2,\cdots,N$.

Então

$$\zeta^{**}(t) = \sum_{k=1}^{N} c_k^{**} \chi_{E_k^*}(t)$$

onde $c_k^{**} = c_k^*$ e $(c_1^*,\cdots,c_N^*)$ é a N-upla reordenada não crescente de $(|c_1|,\cdots,|c_N|)$ e $E_k^* = (\sum_{j=1}^{k-1} \mu(E_j); \sum_{j=1}^{k} \mu(E_j))$.

Demonstração. Vamos ter

$$\zeta^*(s) = \sum_{k=1}^{N} c_k^* \chi_{E_k^*}(s)$$

e então

$$\zeta^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \zeta^*(s)\, ds$$

$$= \frac{1}{t} \int_0^t \Big(\sum_{k=1}^{N} c_k^* \; E_k^*(s)\Big) ds$$

$$= \sum_{k=1}^{N} c^* \frac{1}{t} \int_0^t \chi_{E_k^*}(s)\, ds$$

$$= \sum_{k=1}^{N} c_k^* \, \chi_{E_k^*}(t)$$

Logo $\zeta^* = \zeta^{**}$ e pondo $c_k^* = c_k^{**}$, obtemos o resultado.

Consideremos, agora, funções definidas num espaço de medida produto $(X\times Y, \mu\times\nu)$, σ-finito.

6.4.2. LEMA. Seja

$$\zeta(x,y) = \sum_{k=1}^{N} c_k \chi_{E_k}(x,y)$$

uma função simples. Então, se $E_k = E_k(x)\times E_k(y)$, temos

$$\zeta^{**}(s,t) = \sum_{k=1}^{N} c_k^{**} \chi_{E_k^*}(s,t),$$

onde $E_k^* = E_k^*(x)\ E_k^*(y)$.

Demonstração. Por definição, temos

$$\zeta^{**}(s,t) = ||\zeta||_{(\bar{t}^1 L^1 + L^\infty)(\bar{s}^1 L^1 + L^\infty)}$$

e como

$$\zeta(x,y) = \sum_{k=1}^{N} c_k \chi_{E_k}(x,y) = \sum_{k=1}^{N} c_k \chi_{E_k(x)}(x)\ \chi_{E_k(y)}(y)$$

vamos ter

$$\zeta^{**}(s) = \sum_{k=1}^{N} c_k^{**} \chi_{E_k^*}$$

e portanto

$$\begin{aligned}\zeta^{**}(s,t) &= \sum_{k=1}^{N} c_k^{**} \chi_{E_k^*(x)}(s)\ \chi_{E_k^*(y)}(t)\\ &= \sum_{k=1}^{N} c_k^{**} \chi_{E_k^*(x)E_k^*(y)}\\ &= \sum_{k=1}^{N} c_k^{**} \chi_{E_k^*}(s,t).\end{aligned}$$

Se $t_0 = 0$ e $t_k = \sum_{j=1}^{k} \mu(E_j)$, façamos $\Delta_k = t_k - t_{k-1}$, $k=1,2,\cdots,N$.

6.4.3.LEMA. $|||\zeta|||_{\mathfrak{L}PQ} = ||t^{1/p_2} \sum_{k=1}^{N} |c_k^{**}|^{q_1} \chi_{E_k^*(y)}(t)\Delta_k t^{q_1/p_1}||_{L^{q_2 q_2}}$.

Demonstração. Temos

$$|||\zeta|||_{\mathfrak{L}PQ} = ||t^{1/p_2}\left(\int_0^\infty |\zeta^{**}(s,t)|^{q_1} s^{q_1/p_1-1}ds||_{L_*^{q_2 q_2}}\right.$$

$$= ||t^{1/q_2}\left(\int_0^\infty\left(\sum_{k=1}^{N} c_k^{**}\chi_{E_k^*(x,y)}(s,t)\right]^{q_1} s^{q_1/p_1-1}ds\right]^{1/q_1}||_{L_*^{q}}$$

$$= ||t^{1/p_2}\left(\int_0^\infty\left(\sum_{k=1}^{N} |c_k^{**}|^{q_1}\chi_{E_k^*(x,y)}(s,t)\right] s^{q_1/p_1-1}ds\right]^{1/q_1}||_{L_*^{q_2}}$$

$$= ||t^{1/p_2}\left(\sum_{k=1}^{N} |c_k^{**}|^{q_1}\int_0^\infty \chi_{E_k^*(x)}(s)\chi_{E^*(y)}(t)s^{\frac{q_1}{p_1}-1}ds\right]^{1/q_1}||_{L_*^{q_2}}$$

$$= ||t^{1/p_2}\left(\sum_{k=1}^{N} |c_k^{**}|^{q_1}\chi_{E_k^*(y)}(t)\int_{t_{k-1}}^{t_k} s^{q_1/p_1-1}ds\right]^{1/q_1}||_{L_*^{q_2}}$$

$$= ||t^{1/p_2}\left(\sum_{k=1}^{N} |c_k^{**}|^{q_1}\chi_{E_k^*(y)}(t)\Delta_k t^{q_1/p_1}\right]^{1/q_1}||_{L^{q_2}}$$

6.4.4.LEMA. $$|||\zeta|||_{\mathfrak{L}PQ} \approx ||\zeta||_{L^{PQ}}$$

Demonstração. Dando a $||\cdot||^*_{L^{PQ}}$, o seu significado óbvio, temos

$$||\cdot||^*_{L^{PQ}} \approx ||\cdot||_{L^{PQ}}.$$

Vamos ter Agora, calculando-se

$$||\cdot||^*_{L^{PQ}} \approx |||\cdot|||_{\mathfrak{L}PQ}$$

bastando calcuar $||\cdot||^*_{L^{PQ}}$ como foi feito em 6.4.3.

6.4.5. TEOREMA. Sejam $1 \leq P,Q < \infty$, então $L^{PQ} = \mathcal{L}^{PQ}$ e sua normas são equivalentes.

Demonstração. Sejam L_S^{PQ} e $\mathcal{L}_S^{PQ}$ os subespaços densos das funções simples de L^{PQ} e $\mathcal{L}^{PQ}$, respec. A equivalencia das normas, mostra que as imersões

$$L_S^{PQ} \hookrightarrow \mathcal{L}^{PQ} \quad \text{e} \quad \mathcal{L}_S^{PQ} \hookrightarrow L^{PQ}$$

são contínuas. As extenções contínuas dessas imersões levam a tese.

Vamos considerar, a seguir, os casos extremos.

6.4.6. TEOREMA. $L^{P\infty} = \mathcal{L}^{P\infty}$ e suas normas são equivalentes.

Demonstração. Suponhamos que $f \in L^{P\infty}$, aqui $\infty = (\infty,\infty)$: Então

$$||f||_{L^{P\infty}} = \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p_2}} || \sup_{t>o} s^{\frac{1}{p_1}} ||f||_{s^{-1}L^1+L^\infty} ||_{t^{-1}L^1+L^\infty}$$

$$\geq s^{\frac{1}{p_1}} t^{\frac{1}{p_2}} || \; ||f||_{s^{-1}L^1+L^\infty} ||_{t^{-1}L^1+L^\infty}$$

$$= s^{\frac{1}{p_1}} t^{\frac{1}{p_2}} f^{**}(s,t)$$

Logo

$$||f||_{L^{P\infty}} \geq \sup_{\substack{s>0 \\ t>0}} s^{\frac{1}{p_1}} t^{\frac{1}{p_2}} f^{**}(s,t)$$

$$= |||f|||_{\mathcal{L}^{P\infty}}$$

Reciprocamente, seja $f \in \mathcal{L}^{P\infty}$, então

$$|||f|||_{\mathfrak{L}^{P\infty}} = \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p_2}} \{ \sup_{s>0} f^{**}(s,t)\, s^{\frac{1}{p_1}}$$

$$= \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p_2}} \{ \sup_{s>0} s^{\frac{1}{p_1}} ||\ ||f||_{s^{-1}L^1+L^\infty}||_{t^{-1}L^1+L^\infty} \}$$

$$\geq \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p_2}} \{ ||\ \sup_{s>0} s^{\frac{1}{p_1}} ||f||_{s^{-1}L^1+L^\infty}||_{t^{-1}L^1+L^\infty} \}$$

$$= ||f||_{L^{P\infty}}.$$

Portanto

$$|||f|||_{\mathfrak{L}^{P\infty}} = ||f||_{L^{P\infty}}$$

<u>6.4.7. TEOREMA.</u> Seja $1 < P=(p_1,p_2) < \infty$ e $Q=(\infty,q_2)$. Então $L^{PQ}=\mathfrak{L}^{PQ}$, e suas normas coincidem.

Demonstração. Se $f \in L^{PQ}$, vamos ter

$$||\ ||f||_{L^{p_1\infty}}||_{L^{p_2q_2}} = ||\ \sup_{s>0} s^{\frac{1}{p_1}} f_y^{**}(s)||_{L^{p_2q_2}}$$

$$= ||\ \sup s^{\frac{1}{p_1}}\ ||f(x,y)||_{s^{-1}L^1+L^\infty}||_{L^{p_2q_2}}$$

$$||\ s^{\frac{1}{p_1}}\ ||f(x,y)||_{s^{-1}L^1+L^\infty}||_{L^{p_2q_2}}$$

$$= \left(\int_0^\infty \left(s^{\frac{1}{p_1}} t^{\frac{1}{p_2}} f^{**}(s,t)\right)^{q_2} \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q_2}}$$

Seja, agora

$$F_s(t) = s^{\frac{1}{p_1}} f^{**}(s,t).$$

Vamos ter

$$\lim_{s\to\infty} F_s(t) \in L^{q_2}(R, t^{\frac{q_2}{p_2}-1} dt).$$

Portanto

$$||f||_{L^{(p_1,p_2)(\infty,q_2)}} \geq |||f|||_{\mathfrak{L}^{(p_1,p_2)(\infty,q_2)}}$$

Reciprocamente

$$|||f|||_{\mathfrak{L}^{(p_1,p_2)(\infty,q_2)}} = ||\ ||f||_{L^{p_1\infty}}||_{L^{p_2q_2}}$$

$$\geq ||\ s^{\frac{1}{p_1}}\ f^{**}(s,t)||_{L^{p_2q_2}}$$

$$= ||\ s^{\frac{1}{p_1}}||f||\ ||_{s^{-1}L^1+L^\infty}||_{t^{-1}L^1+L^\infty}||_{L^{p_2q_2}}$$

$$|||f|||_{\mathfrak{L}^{(p_1,p_2)(\infty,q_2)}} \geq ||f||_{(p_1,p_2)(\infty,q_2)}$$

6.4.8. TEOREMA. $L^{P(q_1,\infty)} = \mathfrak{L}^{P(q_1,\infty)}$ e suas normas coincidem.

Demonstração. Seja $f \in L^{P(q_1,\infty)}$, então

$$||\ ||f||_{L^{p_1q_1}}||_{L^{p_2\infty}} = \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p_2}}\left(\left(\int_0^\infty \left(f_y^{**}(s)\right)^{q_1} s^{\frac{q_1}{p_1}-1} ds\right)^{\frac{1}{q_1}}\right)^{**}(t)$$

$$\geq \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p_2}}\left[\left(\int_0^\infty \left(f_y^{**}(s)\right)^{q_1} s^{\frac{q_1}{p_1}-1} ds\right)^{\frac{1}{q_1}}\right]^{*}(t)$$

$$= C \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p_2}}\left(\left(\int_0^\infty \left(f_y^{**}(s)\right)^{q_1} s^{\frac{q_1}{p_1}-1} ds\right)^{*}(t)\right)^{\frac{1}{q_1}}$$

$$\geq C \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p_2}}\left(\left(\int_0^\infty \left(f_y^{**}(s)\right)^{q_1} s^{\frac{q_1}{p_1}-1} ds\right)^{**}(t)\right)^{\frac{1}{q_1}}$$

$$\geq C \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p_2}}\left(\left(\int_0^\infty \left(f^{**}(s)\right)^{q_1} s^{\frac{q_1}{p_1}-1} ds\right)\right)^{\frac{1}{q_1}}$$

Temos, portanto

$$\| \, \|f\|_{L^{p_1 q_1}} \|_{L^{p_2 \infty}} \geq C \, |||f|||_{\mathfrak{L}(p_1,p_2)(q_1,\infty)}$$

Um cálculo análogo mostra que

$$|||f|||_{\mathfrak{L}(p_1,p_2)(q_1,\infty)} \geq \| \, \|f\|_{L^{p_1 q_1}} \|_{L^{p_2 \, \infty}} .$$

Essas duas desigualdades demonstram a tese.

6.5. PROPRIEDADES DE IMERSÃO DOS ESPAÇOS L^{PQ}.

Sejam $Q^1=(q_1^1,q_2^1)$ e $Q=(q_1^1,q_2^1)$. Diremos, como antes, que $Q^1 \leq Q^2$ se e somente se $q_i^1 \leq q_i^2$, $i=1,2$.

6.5.1. PROPOSIÇÃO. Se $Q^1 \leq Q^2$ então

$$L^{PQ^1} \subset L^{PQ^2}$$

e a imersão é contínua.

Demonstração. Seja $f \in L^{PQ^1}$, então, para todo $y \in Y$, fixo, temos

$$||f_y||_{L^{p_1q_1^2}} \leq C\ ||f_y||_{L^{p_1q_1^2}}$$

portanto

$$C_1||\ ||f_y||_{L^{p_1q_1^2}}||_{L^{p_2q_2^2}} \leq\ ||\ ||f_y||_{L^{p_1q_1^1}}||_{L^{p_2q_2^2}}$$

$$\leq C_2||\ ||f_y||_{L^{p_1q_1^1}}||_{L^{p_2q_2^1}}$$

ou seja

$$||f||_{L^{PQ^2}} \leq C\ ||f||_{L^{PQ^1}},$$

o que demonstra a proposição.

Fixemos um espaço de medida σ-finito.

Seja B um espaço de Banach de funções mensuráveis continuamente imersas no espaço de todas funções mensuráveis V, tal que

$$(g,f) \in V\times B \quad \text{e} \quad |f| \geq |g| \quad \text{implica} \quad g \in B \quad \text{e} \quad ||f||_B \geq ||g||_B.$$

Para esta classe de espaços, temos o seguinte resultado.

6.5.2.PROPOSIÇÃO. Seja T um operador sublinear definido em L , tal que $T(L^{P1}) \subset V$. Se E é um conjunto mensurável de medida finita de função característica χ_E , vamos supor que $T\chi_E \in B$ e que vale

$$||T\chi_E||_B \leq C\,||\chi_E||_{L^{P1}}$$

para algum $C > 0$. Então, T pode ser estendida para todo L^{P1}. Mais ainda, se $f \in L^{P1}$, temos

$$||Tf||_B \leq 2C\,||f||_{L^{P1}}\,.$$

Demonstração. É inteiramente análoga ao caso dos espaços L^{P1} usuais. Ver (6) ou (21).

6.6. DUALIDADE.

Começaremos pela desigualdade de Hölder.

6.6.1.PROPOSIÇÃO. Sejam $1 \leq P, Q \leq \infty$ e P' e Q' dados por

$$\frac{1}{P} + \frac{1}{P'} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{1}{Q} + \frac{1}{Q'} = 1.$$

Então, se $f \in L^{PQ}$ e $g \in L^{P'Q'}$, temos $fg \in L^1$ e

$$\left| \int_Y \int_X f\, g\, d\mu(x) d\nu(y) \right| \leq C\, \|f\|_{L^{PQ}} \|g\|_{L^{P'Q'}}$$

Demonstração.

$$\left| \int_Y \int_X f(x,y) g(x,y) d\mu d\nu \right| \leq \int_Y \int_X |f(x,y)|\, |g(x,y)| d\mu d\nu$$

$$\leq \int_Y \{ \int_0^\infty f_y^*(s)\, g_y^*(s)\, ds \} d\nu$$

$$\leq \int_Y \{ \|f_y\|_{L^{p_1q_1}} \|g_y\|_{L^{p_1'q_1'}} \} d\nu$$

$$\leq \int_0^\infty (\|f_y\|_{L^{p_1q_1}})^*(t) (\|g_y\|_{L^{p_2'q_2'}})^*(t) dt$$

$$\leq \| \, \|f\|_{L^{p_1q_1}} \|_{L^{p_2q_2}} \| \, \|g\|_{L^{p_1'q_1'}} \|_{L^{p_2'q_2'}}$$

6.6.2.PROPOSIÇÃO. Seja $g \in L^{P'Q'}$. Então

6.6.2(1) $$F(f) = \int_Y \int_X f\, g\, d\mu\, d\nu$$

define um funcional linear contínuo sobre L^{PQ}.

Demonstração. Segue da desigualdade de Hölder.

Se E é um espaço normado, E' representa o dual topológico de E; i.é o espaço dos funcionais lineares contínuos sobre E.

6.6.3. TEOREMA. Sejam $1 < P;P' < \infty$, onde $\frac{1}{P} + \frac{1}{P'} = 1$. Então

$$(L^{P1})' = L^{P'\infty}.$$

Demonstração. Precisamos caracterizar os funcionais lineares contínuos sobre L^{P1}. Seja $F \in (L^{P1})'$. Se E é conjunto de medida finita, definimos

$$\sigma(E) = F(\chi_E).$$

Vamos ter

$$\sigma(E) = F(\chi_E) \leq C||\chi_E||_{L^{PQ}} = C\, \mu(E_x)^{\frac{1}{P_1}} \nu(E_y)^{\frac{1}{P_2}}$$

onde E e E são os cortes de E em relação a X e a Y, respec. Logo, $\sigma << \mu\times\nu$ e pelo teorema de Radon-Nikodym, existe uma função g localmente integrável, tal que

$$F(\chi_E) = \int_Y \int_X \chi_E\, g\, d\mu d\nu.$$

Agora, a linearidade da F, a densidade da das funções simples e a continuidade de F implicam que para toda $f \in L^{P1}$ temos

$$F(f) = \int_Y \int_X f\, g\, d\mu d\nu$$

e

$$|F(f)| \leq C\, ||f||_{L^{P1}}.$$

Para completar a demonstração, vamos mostrar que $g \in L^{P'\infty}$.

Para isso, tomamos

$$f(x,y) = \exp(-i\arg g(x,y))\ \chi_E(x,y)$$

e obtemos

$$\int_Y \int_X |g(x,y)|\, d\mu d\nu \leq C\ \mu(E_x)^{\frac{1}{p}}\ \nu(E_y)^{\frac{1}{p}}$$

ou ainda, fazendo $s = \mu(E_x)$ e $t = \nu(E_y)$

$$\frac{1}{\mu(E_x)\ \nu(E_y)} \int_{E_y} \int_{E_x} |g(x,y)|\, d\mu d\nu \leq C\ s^{\frac{1}{P'_1}}\ t^{\frac{1}{P'_2}}$$

Donde

$$||g||_{L^{P'\infty}} \leq C.$$

<u>6.6.4. TEOREMA.</u> Sejam $1 < P,Q < \infty$ e P' e Q' os números conjugados.

Então

$$(L^{PQ})' = L^{P'Q'}.$$

Demonstração. Seja F um funcional linear e contínuo sobre L^{PQ}.

Então, $F \in (L^{P1})'$. Logo, existe uma função g localmente integrável, tal que para toda $f \in L^{P1}$, temos

6.6.4(1) $$F(f) = \int_Y \int_X f\ g\ d\mu d\nu.$$

em particular 6.6.4(1) vale para funções simples e conseqüentemente vale para toda $f \in L^{PQ}$.

CAPÍTULO 7

OPERADORES DE TIPO FRACO MIXTO

7.1. NORMAS DE MARCINKIEWICZ MIXTAS.

Seja h uma função complexa mensurável definida num espaço de medida (Z,υ). A r-norma de Marcinkiewicz é o número

$$||h||_{M^r} = \sup_{\lambda>0} \lambda\{m_h(\lambda)\}^{\frac{1}{r}}$$

Apresentaremos, aqui, algumas noções de normas de Marcinkiewicz mixtas (ver (1)). Posteriormente mostraremos que são equivalentes a L^{PQ}-normas.

Lembremos, inicialmente, que a norma de Marcinkiewicz é motivada na seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned}
||f||_{L} &= \{\int_Z |h(z)| \, dz\}^{\frac{1}{r}} \\
&\geq \{\int_{\{z;\ |h(z)|>0\}} |h(z)|^r dz\}^{\frac{1}{r}} \\
&\geq \{\int_{\{z;\ |h(z)|>0\}} \lambda^r dz\}^{\frac{1}{r}} \\
&= \lambda\ \upsilon(\{z;\ |h(z)|>0\})^{\frac{1}{r}} = \lambda\{m_h(\lambda)\}^{\frac{1}{r}}
\end{aligned}$$

Tomando o supremo em λ vemos que a r-norma de Marcinkiewicz é mais fraca ou menor que a L^r-norma.

Analogamente, para uma função f definida num espaço produto $(X\times Y,\mu\times\nu)$, vamos ter

$$\|f\|_{L^{(p,q)}} = \left(\int_Y\left(\int_X |f(x,y)|^p d\mu\right)^{\frac{q}{p}} d\nu\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\geq \left(\int_Y\left(\lambda\left(\mu(\{x;\ |f(x,y)|>\lambda\})\right)^{\frac{1}{p}}\right)^q d\nu\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \left(\int_Y\left(\lambda\{m_f(\lambda,y)\}^{\frac{1}{p}}\right)^q d\nu\right)^{\frac{1}{q}}$$

Introduzimos, então, as seguintes definições para funções mensuráveis definidas no espaço $(X\times Y,\mu\times\nu)$.

<u>7.1.1. DEFINIÇÃO.</u> $NDM(f;p,q) = \sup\limits_{\lambda>0} \left(\int_Y\left(\lambda m_f(\lambda,y)^{\frac{1}{p}}\right)^q d\nu\right)^{\frac{1}{q}}$

<u>7.1.2. DEFINIÇÃO.</u> $NSDM(f;p,q) = \left(\int_Y\left(\sup\limits_{\lambda>0} \lambda m_f(\lambda,y)^{\frac{1}{p}}\right)^q d\nu\right)^{\frac{1}{q}}$

<u>7.1.3. PROPOSIÇÃO.</u> $NDM(f;p,q) \leq NSDM(f;p,q) \leq 2NDM(f;p,q)$.

<u>7.1.4. PROPOSIÇÃO.</u> Suponhamos $P=(p,\infty)$ e $Q=(q,q)$ tal que $1 < p < \infty$ e $1 \leq q \leq \infty$. Então

$$NSDM(f;p,q) \sim \|f\|_{L^{PQ}}\,.$$

Demonstração.

$$NSDM(f;p,q) = \|\,\|f\|_{M^p}\|_{L^q}$$

$$\sim \|\,\|f\|_{L^{p\infty}}\|_{L^{qq}} \sim \|f\|_{L^{PQ}}$$

Uma terceira noção de norma de Marcinkiewicz mixta é a seguinte.

7.1.5. DEFINIÇÃO. $NDV(f;p,q) = \sup \lambda\{\nu(\{y;\ ||f(\ ,y)||_{L^p} > \lambda\}^{\frac{1}{q}}$

7.1.6. PROPOSIÇÃO. Suponhamos que $P=(p,p)$ e $Q=(q,\ )$ satisfazem $1 < p < \infty$ e $1 \leq q \leq \infty$. Então

$$NDV(f;p,q) \sim ||f||_{L^{PQ}}\ .$$

Demonstração. Vamos ter

$$NDV(f;p,q) = ||\ ||f||_{L^p}||_{M^q}$$

$$\sim ||\ ||f||_{L^{pp}}||_{L^{q\infty}} \sim ||\ ||_{L^{PQ}}\ .$$

Finalmente, uma quarta noção de norma de Marcinkiewicz mixta. Para $\lambda > 0$ e $\rho > 0$, façamos

$$m_f(\lambda,\rho) = \nu(\{y;\ m_f(\lambda,y) > \rho\})$$

Fixando $\lambda > 0$, temos, para todo $\rho > 0$

$$\left(\int_Y \left[\lambda^{p_1} m_f(\lambda,y)\right]^{\frac{p_2}{p_1}} d\nu\right)^{\frac{1}{p_2}} \geq \left(\int_{\{y;m_f(\lambda,y)>\rho\}} \left[\lambda^{p_1} m_f(\lambda,y)\right]^{\frac{p_2}{p_1}} d\nu\right)^{\frac{1}{p_2}}$$

$$\geq \left(\int_{\{y;m_f(\lambda,y)>\rho\}} \left(\lambda^{p_1}\rho\right)^{\frac{p_2}{p_1}} d\nu\right)^{\frac{1}{p_2}}$$

$$= \lambda\ \rho^{\frac{1}{p_1}}\ m_f(\lambda,\rho)^{\frac{1}{p_2}}$$

7.1.7. DEFINIÇÃO. $NM(f;p_1,p_2) = \sup\limits_{\substack{\lambda>0\\ \rho>0}} \lambda\rho^{\frac{1}{p_1}} m_f(\lambda,\rho)^{\frac{1}{p_2}}$

<u>7.1.8.PROPOSIÇÃO.</u> Suponhamos que $1 \leq P=(p_1,p_2) < \infty$. Então

$$N^M(f;p_1,p_2) \simeq \|f\|_{L^{P\infty}}.$$

Demonstração. Temos

$$\sup_{\substack{s>0\\t>0}} s^{\frac{1}{p_1}} t^{\frac{1}{p_2}} f^{**}(s,t) \simeq \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p_2}} \| \sup_{s>0} s^{\frac{1}{p_1}} \|f\|_{\bar{s}^1 L^1 + L^\infty} \|_{\bar{t}^1 L^1 + L^\infty}$$

$$\simeq \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p_2}} \| \sup_{\lambda>0} \lambda m_f(\lambda,y)^{\frac{1}{p_1}} \|_{\bar{t}^1 L^1 + L^\infty}$$

$$\simeq \lambda \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p_2}} \| m_f(\lambda,y)^{\frac{1}{p_1}} \|_{\bar{t}^1 L^1 + L^\infty} \geq \lambda \rho^{\frac{1}{p_1}} m_f(\lambda,\rho)^{\frac{1}{p_2}}$$

Reciprocamente, fixado y, existe λ' tal que

$$\sup \lambda m_f(\lambda,y) \leq 2\lambda' m_f(\lambda',y);$$

portanto

$$\sup_{\substack{s>0\\t>0}} s^{\frac{1}{p_1}} t^{\frac{1}{p_2}} f^{**}(s,t) \simeq \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p_2}} \sup_{s>0} \| s^{\frac{1}{p_1}} \|f\|_{\bar{s}^1 L^1 + L^\infty} \|_{\bar{t}^1 L^1 + L^\infty}$$

$$\simeq \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p_2}} \| \sup_{s>0} s^{\frac{1}{p_1}} \|f\|_{\bar{s}^1 L^1 + L^\infty} \|_{\bar{t}^1 L^1 + L^\infty}$$

$$\simeq \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p_2}} \| \sup_{\lambda>0} \lambda m_f(\lambda,y)^{\frac{1}{p_1}} \|_{\bar{t}^1 L^1 + L^\infty}$$

$$\simeq 2 \sup_{t>0} \lambda' t^{\frac{1}{p_2}} \| m_f(\lambda,y)^{\frac{1}{p_1}} \|_{\bar{t}^1 L^1 + L^\infty}$$

$$\leq 2 \sup_{\lambda>0} \lambda \{ \sup_{t>0} t^{\frac{1}{q_2}} \| m_f(\lambda,y)^{\frac{1}{q_1}} \|_{\bar{s}^1 L^1 + L^\infty}$$

$$\simeq 2 \sup_{\substack{\lambda>0\\ \rho>0}} \lambda\, \rho^{\frac{1}{p_1}} m_f(\lambda,\rho)^{\frac{1}{p_2}}.$$

7.2 OPERADORES DO TIPO FRACO.

Em (1), encontramos a seguinte noção de tipo fraco para normas mixtas: um operador sublinear T definido sobre funções mensuráveis $f: X\times Y \longrightarrow C$, com valores em funções mensuráveis $h=Tf: Z\times W \longrightarrow C$, é do ***tipo magro*** (P,R), onde $P=(p_1,p_2)$ e $R=(r_1,r_2)$, se

$$\lambda\, \rho^{\frac{1}{r_2}} m_{Tf}(\lambda,\rho)^{\frac{1}{r_1}} \leq C\, \|f\|_{L^P}.$$

7.2.1. PROPOSIÇÃO. O operador sublinear T é do tipo magro (P,R), $1 < P,R < \infty$, se e somente se para toda $f \in L^P$ tivermos

$$\|Tf\|_{L^{R\infty}} \leq C\, \|f\|_{L^P}$$

Demonstração. Segue de 7.1.8.

Vamos introduzir aqui uma noção mais fraca do que a de tipo magro: a de *tipo magro restrito*.

7.2.2. DEFINIÇÃO. Um operador sublinear T é do tipo magro **restrito** (P,R) se para funções características, χ, dos conjunto E $X\times Y$ de medida finita, tivermos

$$\lambda\, \rho^{\frac{1}{r_2}} m_{T\chi_E}(\lambda,\rho)^{\frac{1}{r_1}} \leq C\, \|\chi_E\|_{L^P}.$$

7.2.3. TEOREMA. Um operador sublinear T é do tipo magro restrito (P,R), $1 < P,R \leq \infty$, se e somente se para toda $f \in L^{P1}$, tivermos

$$||Tf||_{L^{R\infty}} \leq C\, ||f||_{L^{P1}}.$$

Demonstração. Segue da proposição 6.5.2.

7.3. INTERPOLAÇÃO.

Estamos, agora, em condições de estabelecer um teorema do tipo do teorema de Marcinkiewicz-Stein-Weiss-Calderón, para normas mixtas. Esse teorema é mais geral que o de (1).

Seja T um operador sublinear definido sobre funções simples definidas num espaço de medida $X \times Y$ e com valores em funções mensuráveis definidas em outro espaço de medida $Z \times W$.

7.3.1. TEOREMA. Sejam $1 < P_k < \infty$ e $1 < Q_k < \infty$, $k=0,1,2,3$ tais que

$P_0=(p^1_0, p^2_0)$, $P_1=(p^1_1, p^2_0)$, $P_2=(p^1_0, p^2_2)$, $P_3=(p^1_1, p^2_2)$,

e

$Q_0=(q^1_0, q^2_0)$, $Q_1=(q^1_1, q^2_0)$, $Q_2=(q^1_0, q^2_2)$, $Q =(q^1_1, q^2_2)$,

e também, $p^1_0 < p^1_1$, $p^2_0 < p^2_2$ e $q^1_0 < q^1_1$, $q^2_0 < q^2_2$.

Suponhamos que existam constantes $C_k > 0$, $k=0,1,2,3$ tais que para $f \in L^{P_k 1}$ valha

$$||Tf||_{L^{Q_k \infty}} \leq C\, ||f||_{L^{P_k 1}}$$

Então, existe $C > 0$, tal que para toda $f \in L^{PR}$ temos

$$||Tf||_{L^{QS}} \leq C\, ||f||_{L^{PR}}$$

onde $1 \leq R \leq S$ e para $0 < \Theta=(\theta^1, \theta^2) < 1$

$$\frac{1}{P} = \frac{1-\Theta}{P_0} + \frac{\Theta}{P_3} \qquad \frac{1}{Q} = \frac{1-\Theta}{Q_0} + \frac{\Theta}{Q_3}.$$

CAPÍTULO 8

FAMÍLIAS DE INTERPOLAÇÃO

8.1. NOÇÕES GERAIS

8.1.1. DEFINIÇÃO. Uma *família de interpolação*, de dimensão M, é uma família de espaços de Banach $\bar{E}=(E_1,\cdots,E_M)$, onde todos os espaços E_k estão contidos e continuamente imersos num mesmo espaço vetorial topológico separado V.

8.1.2. DEFINIÇÃO. O espaço $\Sigma\bar{E}$ é o subespaço vetorial dos elementos $x \in V$, para os quais existem $x_k \in E_k$, $k=1,\cdots,M$, tais que

$$x = \sum_{k=1}^{M} x_k .$$

8.1.3. TEOREMA. O espaço $\Sigma\bar{E}$ é um espaço de Banach quando munido da norma

$$x \in \Sigma\bar{E} \longrightarrow \|x\|_{\Sigma\bar{E}} = \inf_{\substack{x=\sum x_k \\ x_k \in E_k}} \sum_{k=1}^{M} \|x_k\|_{E_k} \in R.$$

Demonstração. Sobre o espaço produto $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_M$ consideremos a norma

$$\|(x_1,\cdots,x_M)\|_{\Pi\bar{E}} = \|x_1\|_{E_1} + \cdots + \|x_M\|_{E_M} .$$

Então, a aplicação

$$\sigma : (x_1, \cdots, x_M) \in X_1 \times \cdots \times X_M \longrightarrow x_1 + \cdots + x_M \in V$$

é contínua. Portanto, o espaço $\Sigma\bar{E}$ é isomorfo e isométrico ao espaço quociente

$$(X_1 \times \cdots \times X_M)/\ker(\sigma).$$

8.1.4. DEFINIÇÃO. Seja $E = (E_1, \cdots, E_M)$ uma família de interpolação tal que

$$E_1 \cap \cdots \cap E_M \neq \{0\}$$

Então, denotaremos por $\cap\bar{E}$ o subespaço vetorial de V, dos elementos

$$x \in E_1 \cap \cdots \cap E_M.$$

8.1.5. TEOREMA. O espaço $\cap\bar{E}$ é um espaço de Banach quando munido da norma

$$x \in \cap\bar{E} \longrightarrow ||x||_{\Sigma\bar{E}} = \max_{1 \leq k \leq M} ||x||_{E_k}$$

Demonstração. O espaço vetorial $\cap\bar{E}$ é isomorfo à diagonal do produto $E_1 \times \cdots \times E_M$ e a norma de $\cap\bar{E}$ é equivalente à norma do produto restrita à diagonal. Como a diagonal é fechada na norma do produto segue que $\cap\bar{E}$ é completo.

8.1.6. TEOREMA. Os espaços $\cap\bar{E}$ e $\Sigma\bar{E}$ estão continuamente imersos em V.

8.2. ESPAÇOS INTERMEDIÁRIOS.

8.2.1. DEFINIÇÃO. Um *espaço intermediário* em relação à família de interpolação $\bar{E}$, é um espaço de Banach E tal que as seguintes inclusões

$$\cap\bar{E} \subset E \subset \Sigma\bar{E}$$

são contínuas.

8.2.2. DEFINIÇÃO. Sejam $\bar{E}$ e $\bar{F}$ duas famílias de interpolação de mesma dimensão, M. Uma *aplicação admissível* é uma aplicação linear T de $\Sigma\bar{E}$ em $\Sigma\bar{F}$ tal que

$$T|E_k : E_k \longrightarrow F_k,$$

para $k=1,\cdots,M$. I.é, a restrição $T|E_k$ é linear e contínua de E_k em F_k. Denotaremos por $\mathcal{L}(\bar{E};\bar{F})$ o espaço das aplicações admissíveis de $\bar{E}$ em $\bar{F}$.

8.2.3. DEFINIÇÃO. Sejam E e F dois espaços intermediários em relação às famílias de interpolação, de mesma dimensão $\bar{E}$ e $\bar{F}$, respec. O par (E,F) tem a *propriedade de interpolação* se para cada $T \in \mathcal{L}(\bar{E};\bar{F})$ tivermos $T|E \in L(E,F)^{(\dagger)}$. Se o par (E,E) tem a propriedade de interpolação diremos que E é um *espaço de interpolação* em relação à família $\bar{E}$.

$^{(\dagger)}$ $L(E,F)$ é o espaço das aplicações lineares e contínuas de E em F.

8.3. FUNÇÕES NORMAS.

8.3.1. DEFINIÇÃO. Seja $\bar{E}=(E_1,\cdots,E_M)$ uma família de interpolação e $\phi=(\phi_1,\cdots,\phi_M)$ uma família de funções contínuas positivas definidas no R_+^N e tal que

$$\phi_k(s)\phi_k(t) = \phi_k(st).$$

Definimos

$$(t,f) \in R_+\times\Sigma\bar{E} \longrightarrow K(t;f)=K_{\bar{E},\bar{\phi}}(t;f)=\inf_{\substack{f=\Sigma f_k \\ f_k\in E_k}} \sum_{k=1}^{M} \phi_k(t)||f_k||_{E_k}$$

e

$$(t,f) \in R_+\times\cap\bar{E} \longrightarrow J(t,f)=J_{\bar{E},\bar{\phi}}(t,f)=\max_{1\leq k\leq M} (\phi_k(t)||f||_{E_k}).$$

8.3.2. PROPOSIÇÃO. Se $s,t \in R_+$, $f \in \Sigma\bar{E}$ e $g \in \cap\bar{E}$, então

8.3.2(1) $K(t;f) \leq (\max_k \phi_k(s/t))K(s;f)$;

8.3.2(2) $(\min_k \phi_k(s/t))K(t;f) \leq K(s;f)$;

8.3.2(3) $(\min_k \phi_k(1/t))||f||_{\Sigma\bar{E}} \leq K(t;f) \leq (\max_k \phi_k(t))||f||_{\Sigma\bar{E}}$;

8.3.2(4) $(\min_k \phi_k(1/t))K(t;f) \leq ||f||_{\Sigma\bar{E}} \leq (\max_k \phi_k(1/t))K(t;f)$;

8.3.2(5) $(\min_k \phi_k(s/t))J(s;g) \leq J(t;g) \leq (\max_k \phi_k(t/s))J(s;g)$;

8.3.2(6) $K(t;g) \leq (\min_k \phi_k(t/s))J(s;g)$;

8.3.2(7) $(\max_k \phi_k(s/t))K(t;g) \leq J(s;g)$.

8.3.3. EXEMPLOS. (i) Seja $N=1$ e $M=2$. Façamos $\phi_1(t)=1$ e $\phi_2(t)=t$.

Então

$$K(t;f) = \inf_{f=u+v} (||u||_E + t||v||_F)$$

e

$$J(t;g) = \max (||g||_E, t||g||_F)$$

é o caso considerado por Peetre (17).

(ii) Seja $N=2$ e $M=4$. Façamos $\phi_1(t_1,t_2)= 1$, $\phi_2(t_1,t_2)= t_1$, $\phi_3(t_1,t_2)= t_2$ e $\phi_4(t_1,t_2)= t_1t_2$.

Então

$$K(t_1,t_2,f) = \inf_{\substack{f=\Sigma f_k\\ f_k\varepsilon E_k}} (||f_1||_{E_1}+t_1||f_2||_{E_2}+t_2||f_3||_{E_3}+t_1t_2||f_4||_{E_4})$$

$$J(t_1,t_2,g) = \max (||g||_{E_1}, t_1||g||_{E_2}, t_2||g||_{E_3}, t_1t_2||g||_{E_4})$$

(iii) Seja $M=2^N$. Tendo definido para $N=2$, como em (ii) suponhamos que K e J estejam definidos para 2^{N-1}. Seja $\Sigma E = \Sigma E' + \Sigma E''$, onde

$$E'=(E_1,\cdots,E_{2^{N-1}}) \text{ e } E''=(E_{2^{N-1}+1},\cdots,E_{2^N}).$$

Se $f \varepsilon \Sigma\bar{E}$, $g \varepsilon \cap \bar{E}$ e $t=(t_1,\cdots,t_{N-1},t_N) \varepsilon R_+^N$ fazemos

$$K(t_1,\cdots,t_N;f)= \inf_{\substack{f=f'+f''\\ f' \varepsilon E'\\ f'' \varepsilon E''}} (K(t_1,\cdots,t_{N-1};f')+t_NK(t_1,\cdots,t_{N-1};f'')),$$

e

$$J(t_1,\cdots,t_N;g) = \max (J(t_1,\cdots,t_{N-1};g), t_NJ(t_1,\cdots,t_{N-1};g)).$$

8.4. NORMAS FUNCIONAIS.

Vamos introduzir uma extensão do conceito de norma funcional. Entretanto, não procuraremos generalidade máxima, mas apenas o suficiente aos nossos propósitos.

Seja, como antes, R_+^N o produto de N cópias de $R_+=]0,\infty[$. Denotaremos por $M=M(R_+^N;\bar{R})$ o espaço das funções Lebesgue mensuráveis, finitas a menos de um conjunto de medida zero. O cone das funções não negativas de M será denotado por M_+.

8.4.1. DEFINIÇÃO. Uma *norma funcional* Φ é uma aplicação definida em M_+ a valores em $\bar{R}_+$, tal que

NF1) $\Phi(af) = a\,\Phi(f)$, se $a \geq 0$;

NF2) $\Phi(f+g) \leq \Phi(f) + \Phi(g)$;

NF3) $\Phi(f) = 0$ implica $f = 0$ q.t.p.;

NF4) $\Phi(f) \leq \Phi(g)$ se $f \leq g$ q.t.p.;

NF5) $\Phi(f) \leq \sum_1^\infty \Phi(f_n)$ se $f \leq \sum_1^\infty f_n$ q.t.p.;

NF6) $\Phi(f_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ então $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, em medida.

8.4.2. DEFINIÇÃO. Se Φ é uma norma funcional, o espaço

$$\mathcal{L}_\Phi = \{f \in M;\ \Phi(|f|) < \infty\}$$

é o espaço funcional correspondente a norma funcional Φ.

8.4.2.PROPOSIÇÃO. O espaço $\mathcal{L}_\Phi$ é um espaço de Banach munido da norma

$$||\cdot||_{\mathcal{L}_\Phi} = \Phi(|\cdot|).$$

8.5. O K-ESPAÇO.

Seja Φ uma norma funcional e $\bar{E} = (E_1, \cdots, E_M)$ uma família de interpolação.

8.5.1. DEFINIÇÃO. Definimos $\bar{E}_{\Phi,K}$ como o espaço dos elementos $f \in \Sigma\bar{E}$, para os quais

$$\Phi(K(t;f)) < \infty.$$

8.5.2. PROPOSIÇÃO. O espaço $\bar{E}_{\Phi,K}$ é um espaço normado quando munido da norma

$$||f||_{\Phi,K} = \Phi(K(t;f)).$$

8.5.3. DEFINIÇÃO. Uma norma funcional Φ é de *gênero* $\leq G$, onde G é uma função positiva definida no R_+^N, se para todo $\lambda \in R_+^N$ e $\phi \in M_+$, tivermos

$$\Phi(\phi(\lambda t)) \leq G(\lambda)\ \Phi(\phi(t))$$

No que segue, a menos de menção explícita em contrário, vamos considerar sempre normas funcionais de gênero $\leq G$.

8.5.3. PROPOSIÇÃO. Para todo $f \in \bar{E}_{\Phi,K}$ vamos ter

8.5.3(1) $$K(t;f) \leq C\,G(t)\ ||f||_{\Phi,K}$$

e, se $f \in \cap\bar{E}$ então

$$||f||_{\Phi,K} \leq \bar{C}^1\ G(\bar{t}^1) J(t;f)$$

onde $$\bar{C}^1 = \Phi(\min_{1 \leq k \leq M} \phi_k(s)).$$

Demonstração. Sejam $s,t \in R_+^N$. Então, usando 8.3.2(2), temos

$$||f||_{\Phi,K} \geq \Phi(\min_k \phi_k(s/t))K(t;f)$$
$$\geq (G(t))^{-1}\Phi(\min_k \phi_k(s))K(t;f).$$

Por outro lado, usando 8.3.2(6), vamos ter

$$||f||_{\Phi,K} \leq \Phi(\min_k \phi_k(s/t))J(t;f)$$
$$\leq G(1/t)\ \Phi\ (\min_k \phi_k(s))J(t;f).$$

8.5.4.PROPOSIÇÃO. Os espaços $\bar{E}_{\Phi,K}$ são completos.

Demonstração. Seja Σf_n uma série absolutamente convergente em $\bar{E}_{\Phi,K}$.

Segue de 8.5.3(1) e 8.3.2(4) que Σf_n é convergente em $\Sigma\bar{E}$. Seja f a soma (em $\Sigma\bar{E}$) desta série. Temos, então

$$K(t;f) \leq \sum_{n=1}^{\infty} K(t;f_n).$$

Considerando NF5)

$$||f||_{\bar{E}_{\Phi,K}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} ||f_n||_{\bar{E}_{\Phi,K}}.$$

Logo

$$||f - \sum_{n=1}^{k} f_n||_{\bar{E}_{\Phi,K}} \leq \sum_{k+1}^{\infty} ||f_n||_{\bar{E}_{\Phi,K}}.$$

8.5.5.PROPOSIÇÃO. Os espaços $\bar{E}_{\Phi,K}$ são espaços intermediários em relação à família $\bar{E}$. Isto é

$$\cap\bar{E} \subset \bar{E}_{\Phi,K} \subset \Sigma\bar{E}$$

e essa inclusões são contínuas.

8.5.6. PROPOSIÇÃO. Os espaços $\bar{E}_{\Phi,K}$ tem a propriedade de interpolação. I. é, se $\bar{E}$ e $\bar{F}$ são duas famílias de interpolação de mesma dimensão e $T \in \mathcal{L}(\bar{E};\bar{F})$ então $T \in L(\bar{E}_{\Phi,K},\bar{F}_{\Phi,K})$.

Demonstração. Seja M a dimensão das famílias $\bar{E}$ e $\bar{F}$. Sejam $C_k > 0$, $k=1,2,\cdots,M$, tais que para toda $f \in \bar{E}_k$ vamos ter

$$||Tf||_{F_k} \leq C_k||f||_{E_k}$$

Seja $f = \sum_{k=1}^{M} f_k$, onde $f_k \in E_k$. Então

$$||Tf_k||_{F_k} \leq C_k||f_k||_{E_k}$$

Desta forma

$$\begin{aligned} K_{\bar{F}}(t;Tf) &\leq \sum_{k=1}^{M} \phi_k(t)||Tf_k||_{F_k} \\ &\leq \sum_{k=1}^{M} \phi_k(t)C_k||f_k||_{E_k} \\ &\leq C\sum_{k=1}^{M} \phi_k(t)||f_k||_{E_k} \end{aligned}$$

onde $C = \max\limits_{1\leq k\leq M} C_k$. Portanto

$$K_{\bar{F}}(t;Tf) \leq C\, K_{\bar{E}}(t;f)$$

e

$$\Phi(K_{\bar{F}}(t;Tf)) \leq C\Phi(K_{\bar{E}}(t;f)).$$

8.6. O J-ESPAÇO.

Seja Φ uma norma funcional e $\bar{E} = (E_1, \cdots, E_M)$ uma família de interpolação.

8.6.1. DEFINIÇÃO. Definimos $\bar{E}_{\Phi,J}$ como o espaço dos elementos $f \in \Sigma\bar{E}$ para os quais existe uma função fortemente mensurável (em $\cap\bar{E}$)

$$u\colon R_+^N \longrightarrow \cap\bar{E}$$

tal que

8.6.1(1) $$f = \int_{R_+^N} u(t)\,\frac{dt}{t} \qquad (\text{em } \Sigma\bar{E})$$

e

$$\Phi(J(t;u(t))) < \infty.$$

8,6.2.PROPOSIÇÃO. O espaço $\bar{E}_{\Phi,J}$ é um espaço normado quando munido da norma

$$||f||_{\Phi,J} = \inf_{f=\int_{R_+^N} u(t)\frac{dt}{t}} \Phi(J(t;u(t))).$$

Seja Φ uma norma funcional de gênero $\leq G$.

8.6.3.PROPOSIÇÃO. Se $f \in \bar{E}_{\Phi,J}$ e $g \in \ddot{E}$ vamos ter

8.6.3(1) $$K(t;f) \leq C\, G(t)\,||f||_{\bar{E}_{\Phi,J}}$$

e

$$||g||_{\bar{E}_{\Phi,J}} \leq \bar{C}^{1} G(1/t)\; J(t;g),$$

onde

$$C = \sup_{\Phi(\phi)=1} \int_{R_+^N} \phi(t)\ \min_k\ \phi_k(1/t)\ \frac{dt}{t}$$

Demonstração. Seja u como em 8.6.1(1); então

$$K(t;f) \leq \int_{R_+^N}^{\infty} \min_k\ \phi_k(t/s)\ J(s;u(s))\frac{ds}{s}$$

$$= \int_{R_+^N} \min_k\ \phi_k(1/s)\ J(ts;u(ts))\frac{ds}{s}$$

$$\leq C\ \Phi(J(ts;u(ts)))$$

$$\leq C\ G(t)\ \Phi(J(s;u(s))).$$

Tomando o ínfimo em relação as u, segue 8.6.3(1).

Por outro lado, seja ϕ tal que $\Phi(\phi) = 1$. Façamos

$$u(s) = \frac{\phi(s/t)\ \min_k\ \phi_k(t/s)}{\int_{R_+^N} \phi(s)\ \min_k\ \phi_k(1/s)\frac{ds}{s}}\ g$$

Então

$$g = \int_{R_+^N} u(s)\ \frac{ds}{s}$$

e portanto

$$\int_{R_+^N} \phi(s)\ \min_k\ \phi_k(1/t)\frac{ds}{s}\ ||g||_{\bar{E}_{\Phi,J}} \leq \int_{R_+^N} \phi(s)\ \min_k \phi_k(1/s)\frac{ds}{s}\ \Phi(J(s;u(s)))$$

$$\leq \Phi(\phi(s/t)\ \min_k\ \phi_k(1/t)\ J(s;g))$$

$$\leq G(1/t)\ \Phi(\phi(s))\ J(t;g)$$

$$\leq G(1/t)\ J(t;g).$$

<u>8.6.3.PROPOSIÇÃO.</u> Os espaços $\bar{E}_{\Phi,J}$ são completos.

Demonstração. Seja Σf_n uma série absolutamente convergente em $\bar{E}_{\Phi,J}$.

Para todo n, escolhemos u_n satisfazendo 8.6.1(1) de maneira tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Phi(J(t;u_n(t))) < \infty$$

Segue de NF6) que

$$\sum_{n=1}^{\infty} J(t;u_n(t))) < \infty, \text{ q.t.p.}$$

Logo, Σu_n é convergente em $\cap\bar{E}$, q.t.p. Seja, então, $u(t) = \Sigma u_n(t)$.

Então

$$\Phi(J(t;u(t))) \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(J(t;u_n(t))).$$

Fazendo, agora,

$$f = \int_{R_+^N} u(t) \frac{dt}{t}$$

então, $f \in \bar{E}_{\Phi,J}$ e

$$||f||_{\bar{E}_{\Phi,J}} \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(J(t;u_n(t)))$$

Daqui

$$||f||_{\bar{E}_{\Phi,J}} \leqq \sum_{n=1}^{\infty} ||f_n||_{\bar{E}_{\Phi,J}}.$$

Finalmente

$$||f - \sum_{n=1}^{k} f_n||_{\bar{E}_{\Phi,J}} \leqq \sum_{k+1}^{\infty} ||f_n||_{\bar{E}_{\Phi,J}};$$

isso mostra que Σf_n é convergente em $\bar{E}_{\Phi,J}$ e que $\bar{E}_{\Phi,J}$ é completo.

8.6.4. PROPOSIÇÃO. Os espaços $\bar{E}_{\Phi,J}$ são intermediários em relação à família $\bar{E}$. Isto é, temos

$$\cap \bar{E} \subset \bar{E}_{\Phi,J} \subset \Sigma \bar{E}$$

8.6.5. PROPOSIÇÃO. Os espaços $\bar{E}_{\Phi,J}$ tem a propriedade de interpolação. Isto é, se $\bar{E}$ e $\bar{F}$ são duas famílias de interpolação de mesma dimensão e $T \in \mathcal{L}(\bar{E};\bar{F})$ implica que $T \in L(\bar{E}_{\Phi,J}, \bar{F}_{\Phi,J})$.

Demonstração. Seja $C_k > 0$, e para todo $f \in E_k$ valha

$$||Tf||_{\bar{F}_k} \leq C_k ||f||_{E_k} \qquad (k=1,\cdots,M)$$

Seja $C = \max\limits_k C_k$. Se $u \in \cap\bar{E}$, vamos ter

$$J(t;Tu) \leq \max_k \{C_k \phi_k(t) \; ||u||_{E_k}\} \leq C \; J(t;u).$$

Seja, agora, u satisfazendo 8.6.1. Se fizermos

$$v(t) = Tu(t);$$

vamos ter

$$Tf = T \int_{R^N_+} u(t) \frac{dt}{t} = \int_{R^N_+} v(t) \frac{dt}{t},$$

e

$$||Tf||_{\bar{F}_{\Phi,J}} \leq \Phi(J(t;v(t)))$$

$$\leq C \; \Phi(J(t;u(t))).$$

Tomando o ínfimo em relação as funções u, vem que

$$||Tf||_{\bar{F}_{\Phi,J}} \leq C \; ||f||_{\bar{E}_{\Phi,J}}.$$

8.7. IMERSÃO DE $\bar{E}_{\Phi,J}$ EM $\bar{E}_{\Phi,K}$.

8.7.1. PROPOSIÇÃO. Suponhamos que

$$\phi(t) \leq \int_{R_+^N} \min_k \phi_k(t/s)\psi(s)\frac{ds}{s}$$

implica

$$\Phi(\phi) \leq C\,\Phi(\psi)$$

Então, se $f \in \bar{E}_{\Phi,J}$,

$$||f||_{\bar{E}_{\Phi,K}} \leq C\,||f||_{\bar{E}_{\Phi,J}}$$

e

$$\bar{E}_{\Phi,J} \subset \bar{E}_{\Phi,K}.$$

Demonstração. Se u satifaz 8.6.1., temos

$$K(t;f) \leq \int_{R_+^N} K(t;u(s))\frac{ds}{s}$$

$$\leq \int_{R_+^N} \min_k \phi_k(t/s)J(s;u(s))\frac{ds}{s}.$$

Portanto

$$||f||_{\bar{E}_{\Phi,K}} = \Phi(K(t;f)) \leq C\,\Phi(J(s;u(s))),$$

donde

$$||f||_{\bar{E}_{\Phi,K}} \leq C\,||f||_{\bar{E}_{\Phi,J}}.$$

Portanto $\bar{E}_{\Phi,J} \subset \bar{E}_{\Phi,K}$ e a imersão é contínua.

8.7.2.PROPOSIÇÃO. Se Φ é uma norma funcional, de gênero $\leq$ G, e se

$$C = \int_{R_+^N} G(\lambda) \min_k \phi_k(1/\lambda) \frac{d\lambda}{\lambda} < \infty.$$

Então

$$\phi(t) \leq \int_{R_+^N} \min_k \phi_k(t/s)\psi(s) \frac{ds}{s}$$

implica que

$$\Phi(\phi) \leq C\, \Phi(\psi).$$

Demonstração. Depois de uma mudança de variáveis, vamos ter

$$\phi(t) \leq \int_{R_+^N} \min_k \phi_k(t/s)\psi(s) \frac{ds}{s}$$

$$= \int_{R_+^N} \min_k \phi_k(1/\lambda)\psi(\lambda t) \frac{d\lambda}{\lambda}$$

Então

$$\Phi(\phi) \leq \int_{R_+^N} \min_k \phi_k(1/\lambda)\Phi(\psi(\lambda t)) \frac{d\lambda}{\lambda}$$

$$\leq \int_{R_+^N} \min_k \phi_k(1/\lambda)\Phi(\phi)G(\lambda) \frac{d\lambda}{\lambda}$$

$$\leq \int_{R_+^N} \min_k \phi_k(1/\lambda)\, G(\lambda) \frac{d\lambda}{\lambda}\, \Phi(\psi).$$

8.7.3.PROPOSIÇÃO. Suponhamos que Φ seja do gênero $\leq$ G e que

$$C = \int_{R_+^N} \min_k \phi_k(1/\lambda)\, G(\lambda) \frac{d\lambda}{\lambda} < \infty.$$

Então

$$||f||_{\bar{E}_{\Phi,K}} \leq C\, ||f||_{\bar{E}_{\Phi,J}}$$

e

$$\bar{E}_{\Phi,J} \subset \bar{E}_{\Phi,K}.$$

8.8. IMERSÃO DE $\bar{E}_{\Phi,K}$ EM $\bar{E}_{\Phi,J}$.

Nesta secção vamos considerar as funções normas K e J como foram definidas em 8.3.3(1), (2) e (3), respec.

Se $t \in R_+$, façamos

$$m_1(1,t) = \min(1,t)$$

e tendo definido, para $t=(t_1,\cdots,t_{N-1}) \in R_+^{N-1}$, a função $m_{N-1}(1,t)$ seja $t = (t_1,\cdots,t_N) \in R_+^N$ e façamos

$$m_N(1,t) = \min(m_{N-1}(1,t_1,\cdots,t_{N-1}), t_N m_{N-1}(1,t_1,\cdots,t_{N-1})).$$

8.8.1. LEMA. Seja $\bar{E} = (E_1,\cdots,E_{2^N})$ uma família de interpolação e e $f \in \bar{E}$ tal que

$$K(t;f)\, m_N(1,1/t) \xrightarrow[|t|,1/|t|\to 0]{} 0.$$

Então, existe uma função fortemente mensurável (em $\cap\bar{E}$)

$$u: R_+^N \longrightarrow \cap\bar{E}$$

tal que

8.8.1(1) $$f = \int_{R_+^N} u(t)\,\frac{dt}{t}$$

e

8.8.1(2) $$J(t;u(t)) \leq 2^N K(t;f).$$

Demonstração. O caso N=1 é devido à J.Peetre (20, pag.26). O caso geral segue por indução usando-se a idéia da demonstração usada em 3.2.1.

<u>8.8.2.PROPOSIÇÃO.</u> Seja Φ uma norma funcional de gênero $\leq G$.

Suponhamos que

$$G(\lambda)\ m_N(1,1/\lambda) \xrightarrow[\lambda;1/\lambda \to 0]{} 0$$

Então, para todo $f \in \bar{E}_{\Phi,K}$ temos

$$||f||_{\bar{E}_{\Phi,J}} \leq 2^N ||f||_{\bar{E}_{\Phi,K}}$$

e

$$\bar{E}_{\Phi,K} \subset \bar{E}_{\Phi,J}\ .$$

Demonstração. Temos que

$$K(t;f) \leq G(t)\ \{\Phi(m_N(1,t)\}^{-1} ||f||_{\bar{E}_{\Phi,K}}\ .$$

Donde

$$K(t;f)\ m_N(1,1/t) \leq G(t)\ m_N(1,1/t)\ \{\Phi(m_N(1,t))\}^{-1} ||f||_{\bar{E}_{\Phi,K}}\ .$$

Como, o segundo membro tende para zero quando t e $1/t$ tendem para zero, segue do lema 8.8.1. que existe u nas condições de 8.6.1. e tal que

$$J(t;u(t)) \leq 2^N K(t;f).$$

Portanto

$$||f||_{\bar{E}_{\Phi,J}} \leq \Phi(J(t;u(t)))$$

$$\leq 2^N\ ||f||_{\bar{E}_{\Phi,K}}\ .$$

8.9. EQUIVALENCIA DE $\bar{E}_{\Phi,K}$ E $\bar{E}_{\Phi,J}$.

Consideremos $M = 2^N$ e K e J definidos em 8.3.3.(2) e (3), respec. As proposições 8.7.3. e 8.8.2. fornecem o seguinte teorema de equivalência.

8.9.1. TEOREMA. Seja Φ uma norma funcional de gênero $\leq G$ e suponhamos que

8.9.1(1) $$G(\lambda)\ m_N(1,1/\lambda) \xrightarrow[\lambda,1/\lambda \to o]{} 0$$

e

8.9.1(2) $$\int_{R_+^N} G(\lambda)\ m_N(1,1/\lambda)\ \frac{d\lambda}{\lambda}$$

Então

$$2^N\ ||f||_{\bar{E}_{\Phi,J}} \leq ||f||_{\bar{E}_{\Phi,K}} \leq C\ ||f||_{\bar{E}_{\Phi,J}},$$

e

$$\bar{E}_{\Phi,K} = \bar{E}_{\Phi,J}.$$

8.10. REITERAÇÃO.

Seja $\bar{E}$ uma família de interpolação e $G(t_1,\cdots,t_N)$ uma função numérica positiva.

8.10.1.DEFINIÇÃO. Diremos que um espaço intermediário E pertence

8.10.1(1) à classe $K(G;\bar{E})$ se $K(t;f) \leq C\, G(t)||f||_E$ $(f \in E)$;

8.10.1(2) à classe $J(G;\bar{E})$ se $||f||_E \leq C\, G(1/t)J(t;f)$ $(f \in \cap E)$;

8.10.1(3) à classe $H(G;\bar{E})$ se $E \in K(G;\bar{E}) \cap J(G;\bar{E})$.

8.10.2. EXEMPLOS. Seja Φ uma norma funcional de gênero $\leq G$. Suponhamos que $0 < C < \infty$ (ver 8.5.3. e 8.6.3), então

8.10.2(1) $\bar{E}_{\Phi,K}$ é de classe $K(G;\bar{E})$;

8.10.2(2) $\bar{E}_{\Phi,J}$ é de classe $J(G;\bar{E})$.

8.10.3.PROPOSIÇÃO. Seja E um espaço intermediário e

$$\Phi(K(t;f)) = \sup_{k>0} \frac{K(t;f)}{G(t)}.$$

Então, E pertence à classe $K(G;\bar{E})$ se e somente se $E \subset \bar{E}_{(G),K} = \bar{E}_{\Phi,K}$.

Demonstração. Se $f \in E$, então

$$||f||_{\bar{E}_{(G),K}} = \sup_{t>0} \frac{K(t;f)}{G(t)} \leq \sup_{t>0} \frac{C\, G(t)||f||}{G(t)} = C\, ||f||_E.$$

Reciprocamente. Se $X \subset Y$ e Y pertence à classe $K(G;\bar{E})$, então X pertence à classe $K(G;\bar{E})$. Ora, $E \subset \bar{E}_{(G),K}$ e $\bar{E}_{(G),K}$ pertence à classe $K(G;\bar{E})$.

Se a norma funcional Φ é dada por

$$\Phi(\phi) = \int_{R_+^N} G(1/t) \quad (t) \frac{dt}{t}$$

escrevemos

$$\bar{E}_{\Phi,J} = \bar{E}_{(G),J}.$$

<u>8.10.4.PROPOSIÇÃO.</u> Seja E um espaço intermediário. Então E pertence à classe $J(G;\bar{E})$ se e somente se $\bar{E}_{(G),J} \subset E$.

Demonstração. Seja $f \in \bar{E}_{(G),J}$ e u nas condições de 8.6.1. Então para $f \in E$, temos

$$||f||_E \leq \int_{R_+^N} ||u(t)||_E \frac{dt}{t} \leq \int_{R_+^N} G(1/t) \; J(t;u(t)) \frac{dt}{t}.$$

Reciprocamente. Se $Y \subset X$ e Y pertence à classe $J(G;\bar{E})$ então X é de classe $J(G;\bar{E})$. Logo, é suficiente mostrar que $\bar{E}_{(G),J}$ é de classe $J(G;\bar{E})$; o que é óbvio.

<u>8.10.5.PROPOSIÇÃO.</u> Um espaço intermediário E, em relação à família $\bar{E}$, pertence à classe $H(G;\bar{E})$ se e somente se

$$\bar{E}_{(G),J} \subset E \subset \bar{E}_{(G),K}.$$

8.10.6. A CONDIÇÃO (X).

Fixemos $\Theta_1=(\theta_1^1,\cdots,\theta_1^j,\cdots,\theta_1^N)$ e $\Theta_{2^N}=(\theta_{2^N}^1,\cdots,\theta_{2^N}^j,\cdots,\theta_{2^N}^N)$, onde $0 \leqq \theta_1^j < \theta_{2^N}^j \leqq 1$, para $j=1,2,\cdots,N$.

Vamos definir uma sequência de 2^N N-uplas por recursão sobre N.

Definimos, inicialmente, $\Theta_k=(\theta_k^1,\theta_k^2)$, para $k=1,2,3$ e 4 da seguinte maneira

$$\Theta_1=(\theta_1^1,\theta_1^2),\quad \Theta_2=(\theta_{2^N}^1,\theta_1^2),\quad \Theta_3=(\theta_1^1,\theta_{2^N}^2),\quad \Theta_4=(\theta_{2^N}^1,\theta_{2^N}^2).$$

Para o caso geral, suponhamos que já se tenha definido a sequência para dimensão $N=j > 2$ e vamos defini-la para $N=j+1$. Para isso, seja

$$\Theta_{k,j} = (\theta_k^1,\cdots,\theta_k^j),\qquad 1 < j < N \text{ e } 1 \leqq k \leqq 2^j$$

(observemos que $\Theta_{1,j}=(\theta_1^1,\cdots,\theta_1^j)$ e $\Theta_{2^j,j}=(\theta_{2^N}^1,\cdots,\theta_{2^N}^j)$)

Façamos, agora, para $1 \leqq k \leqq 2^j$

$$\Theta_{k,j+1} = (\Theta_{k,j},\theta_1^{j+1})$$

e

$$\Theta_{k+2^j,j+1} = (\Theta_{k,j},\theta_{2^{j+1}}^{j+1}).$$

A sequência $(\Theta_1,\cdots,\Theta_{2^N})$ está, então, definida para $N=j+1$.

A uma sequência (Θ_k) construída pelo processo acima diremos que satisfaz a condição (X).

Sejam $\Theta_0=(\theta_0^1,\cdots,\theta_0^N)$ e $\Theta_1=(\theta_1^1,\cdots,\theta_1^N)$ duas N-uplas tais que $0 \leq \theta_0^j < \theta_1^j \leq 1$, para $j=1,2,\cdots,N$.

Se Φ é uma norma funcional, façamos

$$\Psi(g(t)) = \Phi(t^{\Theta_0} g(t^{\Theta_1-\Theta_0}))$$

Observemos que Ψ é uma norma funcional e que se Φ é de gênero $\leq G$ então Ψ é de gênero $\leq R$, onde

$$R(\lambda) = \lambda_1^{-\frac{\theta_0^1}{\theta_1^1-\theta_0^1}} \cdots \lambda_N^{-\frac{\theta_0}{\theta_1^N-\theta_0^N}} G(\lambda_1^{\frac{1}{\theta_1^1-\theta_0^1}},\cdots,\lambda^{\frac{1}{\theta_1^N-\theta_0^N}})$$

Seja $\bar{E}$ uma família de interpolação de dimensão 2^N.

<u>8.10.7.PROPOSIÇÃO.</u> Seja $F_k \in K(\Theta_k,\bar{E})$, $k=1,2,\cdots,2^N$, onde a sequência (Θ_k) satisfaz a condição (X). Então existe uma constante $C > 0$ tal que para todo $f \in \bar{F}_{\Psi,K}$, vamos ter

$$||f||_{\bar{E}_{\Phi,K}} \leq C\, ||f||_{\bar{F}_{\Psi,K}}$$

e

$$\bar{F}_{\Psi,K} \subset \bar{E}_{\Phi,K}.$$

<u>8.10.8.PROPOSIÇÃO.</u> Seja $F_k \in J(\Theta_k,\bar{E})$, $k=1,2,\cdots,2$, onde a sequência (Θ_k) satisfaz a condição (X). Então existe uma constante $C > 0$ tal que para todo $f \in \bar{E}_{\Phi,J}$, vamos ter

$$||f||_{\bar{F}_{\Psi,J}} \leq C\, ||f||_{\bar{E}_{\Phi,J}}$$

e

$$\bar{E}_{\Phi,J} \subset \bar{F}_{\Psi,J}.$$

8.10.9. TEOREMA. Suponhamos que G satisfaz a

8.10.9(1) $$G(\lambda)\, m_N(1,1/\lambda) \xrightarrow[\lambda,1/\lambda \to 0]{} 0$$

e

8.10.9(2) $$\int_{R_+^N} G(\lambda)\, m_N(1,1/\lambda) \frac{d\lambda}{\lambda} < \infty .$$

Se $F_k \in H(\Theta_k,\bar{E})$, $k=1,2,\cdots,2^N$, e (Θ_k) satisfaz a condição (X), então:

$$\bar{E}_{\Phi,J} = \bar{F}_{\Psi,J} = \bar{E}_{\Psi,K} = \bar{F}_{\Phi,K},$$

com equivalência de normas.

Demonstração. Das proposições 8.10.7 e 8.10.8 segue que

$$\bar{F}_{\Psi,K} \subset \bar{E}_{\Phi,K} \qquad \text{e} \qquad \bar{E}_{\Phi,J} \subset \bar{F}_{\Psi,J}.$$

Por outro lado, pelo teorema 8.9.1 temos

$$\bar{E}_{\Phi,K} = \bar{E}_{\Phi,J} \qquad \text{e} \qquad \bar{F}_{\Psi,J} = \bar{F}_{\Psi,K}$$

donde a tese.

DEMONSTRAÇÃO DA PROPOSIÇÃO 8.10.7.

Seja $f = \sum_{k=1}^{2^N} f_k$ e $f_k \in E_k$, para $k=1,\cdots,2^N$. Então

$$K(t_1,\cdots,t_N;f_k) \leqq C_k\, t_1^{\theta_k^1}\cdots t_N^{\theta_k^N}\, \|f_k\|_{F_k}$$

Donde

$$K_{\bar{E}}(t_1,\cdots,t_N;f) \leq C\, t_1^{\theta_1^1}\cdots t_N^{\theta_1^N} \sum_{k=1}^{2^N} t_1^{\theta_k^1-\theta_1^1}\cdots t_N^{\theta_k^N-\theta_1^N}||f_k||_{F_k}.$$

Por outro lado, vamos ter

$$K_{\bar{F}}(t^{\theta_{2^N}^1-\theta_1^1},\cdots,t^{\theta_{2^N}^N-\theta_1^N};f) = \inf_{\substack{f=\Sigma f_k\\ f_k\varepsilon F_k}} \sum_{k=1}^{2^N} t_1^{\theta_k^1-\theta_1^1}\cdots t_N^{\theta_k^N-\theta_1^N}||f_k||_{F_k}$$

Com efeito: se N=2, a demonstração está contida na demonstração de 3.2.2. Suponhamos que valha para N-1. Como a sequência (Θ_k) satisfaz a condição (X), vamos ter

$$\sum_{k=1}^{2^N} t_1^{\theta_k^1-\theta_1^1}\cdots t_N^{\theta_k^N-\theta_1^N}||f_k||_{F_k} = \sum_{k=1}^{2^N} t_1^{\theta_k^1-\theta_1^1}\cdots t_{N-1}^{\theta_k^{N-1}-\theta_1^{N-1}}||f_k||_{F_k} +$$

$$+\ t_N^{\theta_2^N-\theta_1^N}\sum_{k=1}^{2^N} t_1^{\theta_k^1-\theta_1^1}\cdots t_{N-1}^{\theta_k^{N-1}-\theta_1^{N-1}}||f_k||_{F_k}$$

Seja, agora, $E'=(E_1,\cdots,E_{2^{N-1}})$ e $E''=(E_{2^{N-1}+1},\cdots,E_{2^N})$.

Se $f = f'+f'' \varepsilon E'+E''$, usando a hipótese de indução, temos para f'

$$K_{\bar{F}}(t_1^{\theta_{2^{N-1}}^1-\theta_1^1},\cdots,t_{N-1}^{\theta_{2^{N-1}}^{N-1}-\theta_1^{N-1}};f') = \inf_{\substack{f'=f_k\\ f_k\varepsilon E_k}} \sum_{k=1}^{2^{N-1}} t_1^{\theta_k^1-\theta_1^1}\cdots t_{N-1}^{\theta_k^{N-1}-\theta_1^{N-1}}||f_k||_{F_k}$$

e analogamente para f".

Finalmente, usando o resultado para N=2, segue que

$$K_F(t^{\theta_{2^N}-\theta_1};f) = \inf_{\substack{f=f'+f''\\ f'\in E'\\ f''\in E''}} \{K(t_1^{\theta^1_{2^N}-\theta^1_1},\dots,t_{N-1}^{\theta^{N-1}_{2^N}-\theta^{N-1}_1};f') + t^{\theta^N_{2^N}} K(t_1^{\theta^1_{2^N}-\theta^1_1},\dots,t_{N-1}^{\theta^{N-1}_{2^N}-\theta^{N-1}_{2^N}};f'')\}$$

$$= \inf_{\substack{f=\Sigma f_k\\ f_k\in E_k}} \sum_{k=1}^{2^N} t_1^{\theta^1_k-\theta^1_1}\cdots t_N^{\theta^N_k-\theta^N_1} \|f_k\|_{F_k}.$$

Finalmente

$$\|f\|_{\bar{E}_{\Phi,K}} = \Phi(K_{\bar{E}}(t;f)) \leq C\,\Phi(t^{\theta_1}K_{\bar{F}}(t^{\theta_{2^N}-\theta_1};f))$$

$$\leq \Psi(K_{\bar{F}}(t;f)) = \|f\|_{\bar{F}_{\Psi,K}}.$$

DEMONSTRAÇÃO DA PROPOSIÇÃO 8.10.8.

Segue de maneira análoga à 4.2.3, com as modificações do tipo das que aparecem na demonstração da proposição anterior.

8.11. INTERPOLAÇÃO.

Usando-se a propriedade de interpolação dos espaços $\bar{E}_{\Phi,K}$ e o teorema de reiteração, 8.10.9, podemos obter, sem dificuldade, teoremas de interpolação análogos aos teoremas 5.1.2, 5.2.2 e 5.3.1.

CAPÍTULO 9

PROBLEMAS EM ABERTO

Apresentaremos, aqui, alguns problemas que se apresentaram naturalmente enquanto desenvolvíamos esta dissertação. Alguns desses problemas serão considerados por nós num futuro próximo.

PROBLEMA 1. Procurar uma estimada para $K(s,t;f)$ semelhante a obtida por Holmsted (11). Isto permitiria (i) eliminar o J-método, elementarizando a teoria; (ii) trabalhar com espaços quase-normados, ampliando as possibilidades de aplicações.

PROBLEMA 2. Nossa teoria estende o método de médias à 2-parâmetros de J.Peetre. O método de médias a 4-parâmetros de Lions Peetre (15). Seria interessante procurar mostrar, como Peetre (17), a equivalência dos dois métodos estendidos. Aqui, deverá aparecer uma diferença entre as duas teorias: a equivalência deverá ocorrer somente para famílias de 2^n espaços.

PROBLEMA 3. Favini (9), estendeu a teoria complexa de interpolação para triplas de espaços. Uma questão natural é sobre a comutação dos "funtores" de interpolação real e complexo (ver (10)).

PROBLEMA 4. Seria extremamente elegante uma apresentação "funtorial" do capítulo 8.

PROBLEMA 5. Os espaços de Soboleff com normas mixtas têm sido considerados por diversos matemáticos russos (ver (4). As idéias iniciais parecem ser os trabalhos de Benedeck-Panzone (2) e Benedeck (3). Aplicações da teoria de interpolação para espaços com normas mixtas, aos espaços de Soboleff, poderiam ser pensadas a partir de (3), (4) e (18).

PROBLEMA 6. O último capítulo da tese de Ballester de Pereyra (1) pode ser agora, reestruturado e completado. Nos parece que os espaços de Lorentz, com normas mixtas, fornecem a linguagem adequada para isso.

PROBLEMA 7. Não pensamos num teorema de interpolação multilinear. O prof. A.P.Calderón, nos sugeriu procurar uma relação do teorema de Strichartz (20) com a nossa teoria de interpolação.

PROBLEMA 8. O produto tensorial de espaços de Lorentz estudado por O'Neil (16) deve ter alguma relação com os espaços de Lorentz, com normas mixtas.

PROBLEMA 9. Aplicações do teorema 7.3.1. deverão ser encontradas na linha de (5), por exemplo.

B I B L I O G R A F I A

(1) BALLESTER DE PEREYRA, C. - *Sobre la continuidad débil y magra en $L^p(L^q)$ y su aplicacion a operadores potenciales*. Tese de doutorado. 1963. Universidad de Buenos Aires.

(2) BENEDECK, A. e PANZONE, R. - *The spaces L^p, with mixed norm*. Duke Math. J. 28(1961), 301-324.

(3) BENEDECK, A. - *Spaces of differentiable functions and distributions, with mixed norms*. Rev. Union Mat. Arg. 22(1964), 3-21.

(4) BURENKOV, V.I. - *Imbedding and continuation for classes of differentiable functions of several variables defined in the whole space*. Progress in Math. 2 (1968), 73-145.

(5) BURKHOLDER, D.L. e GUNDY, R.F. - *Boundary behavior of harmonic functions in a half space and brownian motion*. Ann.Inst. Fourier Grenoble 23(1973), 195-212.

(6) BUTZER, P.L. e BERENS, H. - *Semi-groups of operators and approximation*. Berlin. Springer Verlag. 1967.

(7) CALDERÓN, A.P. - *Intermediate spaces and interpolation, the complex method*. Studia Math. 24(1964), 113-190.

(8) ______________ - *Spaces betwenn L^1 and L^∞ and the theorem of Marcinkiewicz*. Studia Math. 26(1966), 273-299.

(9) FAVINI, A. - *Su una estensione del metodo d'interpolazione complesso*. Rend. Sem.Mat.Univ.Padova 47(1972), 244-298.

(10) GRISVARD, P. - *Commutativité de foncteurs d'interpolation et applications*. J. Math. Pures Appl. 45(1966), 143-290.

(11) HOLMESTEDT, T. - *Interpolation of quasi-normed spaces*. Math. Scand. 26(1970), 177-199.

(12) HUNT, R. - *On L(p,q) spaces*. L'Enseignement Mathematique, 7(1966), 249-276.

(13) KRÉE, P. - *Propriétés de continuité dans L^p de certains noyaux*. Boll. Unione Mat. Ital. 22(1967), 331-344.

(14) LASS FERNANDEZ, D. - *Familias de interpolação e os espaços de Lorentz, para normas mixtas*. Atas da 3a. Quinzena de Anal. Func. e Eq. Dif. Parciais (1970), 229-237.

(15) LIONS, J.-L. e PEETRE, J. - *Sur une classe d'espaces d'interpolation*. Publ. Math. de l'IHES, 19(1964), 5-68.

(16) O'NEIL, R. - *Integral transforms and tensor products on Orlicz spaces and L(p,q) spaces*. J. D'Analyse Math. 21(1968), 5-276.

(17) PEETRE, J. - *Sur le nombre de paramètres das la définition de certain espaces d'interpolation*. Ricerche di Mat. 12(1963), 248-261.

(18) ________ - *Espaces d'interpolation et théorème de Soboleff*. Ann. Inst. Fourier Grenoble 16(1966), 279-317.

(19) ________ - *A theory of interpolation of normed spaces*. Notas de Matemática Nº 39 (1968), IMPA, Rio de Janeiro.

(20) STRICHARTZ, R. - *A multilinear version of the Marcinkiewicz interpolation theorem*. Proc.Am.Math.Soc. 21(1969),441-4.

(21) OKLANDER, E.T. - *Interpolación, espacios de Lorentz y teorema de Marcinkiewicz*. Cursos y Seminários de Matemática. Fas. 20. Universidad de Buenos Aires. 1965.

(22) YOSHIKAWA, A. - *Sur la théorie d'espaces d'interpolation, les espaces de moyenne de plusieurs espaces de Banach*. J. Fac. Sc. Unv. Tokyo, (3)XVI(1970), 407-468.

(23) YOSHINAGA, K. - *Lorentz spaces and the Calderón-Zygmund theorem*. Bull. Kyushu Inst. Tech. 16(1969), 1-38.