

$\Sigma$ -GRADIENTES

ALCILÉA AUGUSTO HOMEM DE MELLO

TESE APRESENTADA AO  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA  
DA  
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM  
MATEMÁTICA

ORIENTADOR: *Prof. Dr.* WALDYR MUNIZ OLIVA

Durante a elaboração deste trabalho, a autora recebeu apoio financeiro do BNDE, contratos FUNTEC nº 100 e nº 154 e FINEP convênio 184/C.T.

JUNHO DE 1974

SÃO PAULO

O valor deste trabalho e o tempo gasto na sua elaboração não correspondem, nem de longe, ao inestimável auxílio que recebi, quer em sugestões quer em informações.

Devo uma palavra de gratidão a muitos colegas e professores que me têm incentivado.

Cito, em especial, os professores

Dr. Cesar Camacho Manco - que durante sua última estada no IME auxiliou-me com demoradas discussões sobre o assunto sendo dele, entre outras, a sugestão de considerar os espaços fibrados com grupos estrutural discreto;

Dr. Ângelo Barone Netto - com quem muito conversei na fase final do trabalho; sua participação despreendida muito me ajudou, especialmente na solução dos problemas do capítulo IV;

a colega Elvia Mureb Sallum - com quem tenho discutido diversos tópicos

e meu Orientador, Prof. Dr. Waldyr Muniz Oliva que, além de haver proposto as questões atacadas e de ter orientado e acompanhado efetivamente o desenvolvimento do trabalho, tem sido um dos principais responsáveis pelo intercâmbio de idéias com elementos de outros centros ligados ao estudo de Sistemas Dinâmicos, trazendo-os ao IME.

A estes, meus agradecimentos.

*Alcilêa Augusto Homem de Mello*

São Paulo, 14 de junho de 1970

## $\Sigma$ -GRADIENT FIELDS

Our goal in this thesis is the study, under the generic view point, of some special vector-fields on a compact riemannian manifold, which we call  $\Sigma$ -gradient fields. They are gotten as orthogonal projection of gradient vector fields on a given distribution of contact elements.

First of all we define a class of functions  $f$  such that the set of singularities of the  $\Sigma$ -gradient field of  $f$  is a compact submanifold. We show that such a class is open and dense in the space of functions with the  $C^r$  topology,  $r \geq 2$ . Thom has considered the question in [1] and developed a Morse Theory for completely integrable distributions, say, for foliations,

In the sequel we have proved the  $\Omega$ -stability and the structural stability for small classes of functions, the foliation with compact leaves. The technic is the same one used by Palis and Smale for dynamical systems [5].

In the last section we got a characterization for the structurally stable  $\Sigma$ -gradient fields on  $M^2$  (torus and Klein bottle) when the foliation is the suspension of a diffeomorphism on  $S^1$ .

The subject was proposed by my adviser, W.M.Oliva, as a preliminar step for the study of a generic theory of the mechanical systems not necessarily holonomous [2], say, the Appell vector-fields. The singularities of the Appell vector-fields are, in the conservative case, essentially the same of the  $\Sigma$ -gradient of the potential energy, the metric given by the kynetic energy and the distribution given by velocity constraints.

In order to state the main results we give, first of all, some definitions.

Definitions - Let  $M^{m+p}$  be a  $C^\infty$  compact connected riemannian manifold with a smooth distribution  $\Sigma$  of codimension  $p$ ; let  $f \in C^r(M^{m+p}, \mathbb{R})$ ,  $r \geq 2$ , be a real function on  $M$ . The  $\Sigma$ -gradient field of  $f$  is the vector field  $X_f$  given, at each point  $x \in M$ , by the orthogonal projection of  $\text{grad } f(x)$  on the subspace  $\Sigma_x$ . Call  $\Sigma(M)$  the vector bundle of  $M$  induced by  $\Sigma$  and  $0: M \rightarrow \Sigma(M)$  its zero section. The singularities (critical points) of  $X_f$  are said to be  $\Sigma$ -simple if  $X_f(M)$  and  $0(M)$  are in general position (transversal) in  $\Sigma(M)$ .

Theorem 1 - The set of  $f \in C^r(M, \mathbb{R})$ ,  $r \geq 2$ , such that the singularities of  $X_f$  are  $\Sigma$ -simple is open and dense. The set of singularities of  $X_f$  are, in this case, a compact submanifold  $V^p(f)$  of  $M$ , with dimension  $p$  and class  $C^{r-1}$ .  $V^p(g)$  depends continuously on  $g$ , for  $g$  near  $f$ . In the sequel we assume that  $\Sigma$  defines a foliation  $F$  on the manifold  $M$ .

Definitions - If  $f \in C^r(M, \mathbb{R})$ ,  $r \geq 2$ , and  $x$  is a critical point of  $X_f$ ,  $x$  is  $\Sigma$ -hyperbolic if, and only if,  $x$  is hyperbolic critical point of the restriction of  $X_f$  to the leave  $F_x$  through  $x$ . If the critical points of  $X_f$  are  $\Sigma$ -hyperbolic, it is possible to consider stable and unstable manifolds for each connected component  $\alpha$  of  $V^p(f)$ . We say that three submanifolds  $S_1, S_2$  and  $S_3$  are in general position if, and only if,

- a.  $S_i$  is transversal with  $S_j$ ,  $i \neq j$ ,  $1 \leq i, j \leq 3$ ;
- b.  $S_i \cap S_j$  and  $S_k$  are transversal,  $1 \leq i, j, k \leq 3$ ,  $i \neq j$ ,  $i \neq k$ ,  $j \neq k$ .

Using the technic of tubular families of Palis-Smale one proves the following results:



Theorem 2 - Assume  $\Sigma$  defining a foliation with compact leaves,  $X_f$  with  $\Sigma$ -hyperbolic singularities, and the stable and unstable manifolds of the connected components of  $V^p(f)$  and the leaves are in general position. Then  $X_f$  is structurally stable for  $C^r$ -perturbations of  $f$ .

The last results hold for  $M^2$  and a foliation  $F$  given by orbits of a suspension of a diffeomorphism  $\Psi$  of  $S^1$ ,  $r \geq 3$ .

Definitions - A leaf of  $F$  is trivial if it has a tubular neighborhood on  $M^2$  where  $F$  is a product. If  $f \in C^r(M^2, R)$ ,  $r \geq 3$ , is such that  $X_f$  has only  $\Sigma$ -simple critical points, a critical point of  $X_f$  is said to be  $\Sigma$ -quasi-hyperbolic if  $d(f|_{F_x})_x = d^2(f|_{F_x})_x = 0$  and  $d^3(f|_{F_x})_x \neq 0$ ,  $F_x$  being the leaf by  $x$ .

Define  $S^r \subset C^r(M^2, R)$  as the set of all  $f$  such that:

- a. the critical points of  $X_f$  are  $\Sigma$ -hyperbolic except, eventually, a finite number of  $\Sigma$ -quasi-hyperbolic points;
- b. the  $\Sigma$ -quasi-hyperbolic critical points belong to trivial leaves and, at most, one in each leaf.

If  $\Psi$  is a ergodic diffeomorphism (every orbit is dense in  $S^1$ ), the structurally stable  $\Sigma$ -gradient vector fields with  $\Sigma$ -simple singularities are precisely the one which the singularities are  $\Sigma$ -hyperbolic. That is not a dense class. In the other cases holds the following results:

Theorem 3 - Assume the diffeomorphism  $\Psi \in \text{Diff}^\infty(S^1)$  has a periodic point and  $M^2(T^2 \text{ or } K^2)$  is foliated by the suspension of  $\Psi$ . If  $X_f$  has only  $\Sigma$ -simple critical points,  $f \in C^r(M^2, R)$ , then  $X_f$  is structurally stable if and only if  $f \in S^r$ . Moreover,  $S^r$  is open and dense in  $C^r(M^2, R)$ .

## CAPÍTULOS 0 INTRODUÇÃO & EXEMPLOS

### 0.1 Introdução

O objetivo deste trabalho é estudar, sob o ponto de vista "genérico", numa variedade riemanniana compacta  $M$  os campos de vetores que chamamos de  $\Sigma$ - gradientes. Estes são obtidos como projeção ortogonal de campos de vetores gradientes numa distribuição de elementos de contato.

No capítulo I definimos uma classe de funções  $f$  tais que o conjunto das singularidades do  $\Sigma$ - gradiente de  $f$  é subvariedade compacta.

Tal classe é aberta e densa no espaço das funções com a topologia  $C^r$ ,  $r \geq 2$ . R. Thom considera a questão em [1] para distribuições completamente integráveis (folheações) desenvolvendo a Teoria de Morse numa variedade folheada.

Nos capítulos II e III provamos a  $\Omega$ - estabilidade e a estabilidade estrutural para classes menores de funções no caso da distribuição definir uma folheação de folhas compactas. Nestes dois capítulos a técnica usada é a mesma de Palis-Smale para os sistemas dinâmicos [6].

No capítulo IV damos uma caracterização para os  $\Sigma$ - gradientes estruturalmente estáveis no toro e na garrafa de Klein, quando a folheação é dada como suspensão de um difeomorfismo do círculo.

Este trabalho foi proposto pelo orientador como uma etapa preliminar visando o estudo da teoria genérica dos sistemas mecânicos não necessariamente holônomos [2] também conhecidos como campos de Appell [11]. As singularidades dos campos de Appell, no caso conservativo, são essencialmente as do  $\{$  - gradiente da energia potencial, a métrica sendo dada pela energia cinética e a distribuição pelos vínculos de velocidade.

## 0.2 EXEMPLOS

0.2.1 - Em  $\mathbb{R}^2$  consideremos a folheação trivial dada pela segunda projeção, a métrica usual e a relação de equivalência seguinte:

$$(x_1, t_1) \sim (x_2, t_2) \iff \exists (m, n) \in \mathbb{Z}^2 \mid x_2 = x_1 + 2m\pi \text{ e } t_2 = t_1 + 2n\pi \quad (0.1)$$

Em  $T^2 = \mathbb{R}^2 / \sim$  consideramos a métrica e a folheação obtidas pela passagem ao quociente. Seja  $\Sigma$  a distribuição tangente a esta folheação.

Fixado  $\alpha \in \mathbb{R}$ , definimos  $f_\alpha: T^2 \rightarrow \mathbb{R}$  pela passagem ao quociente de  $\tilde{f}_\alpha: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por:

$$\tilde{f}_\alpha(x, t) = (2 + \sin x) \sin t + \alpha \cos x \quad (0.2)$$

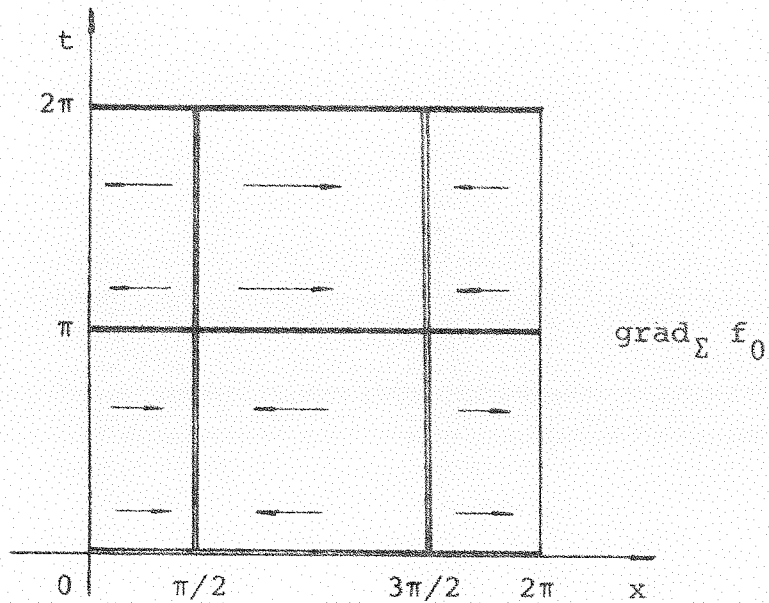
A função  $f_0$  é a altura no toro. O  $\Sigma$ -gradiente de  $f_\alpha$  é dado como a projeção em  $T^2$  do seguinte campo em  $\mathbb{R}^2$ :

$$(\cos x \sin t - \alpha \sin x) \frac{\partial}{\partial x}, \quad (0.3)$$

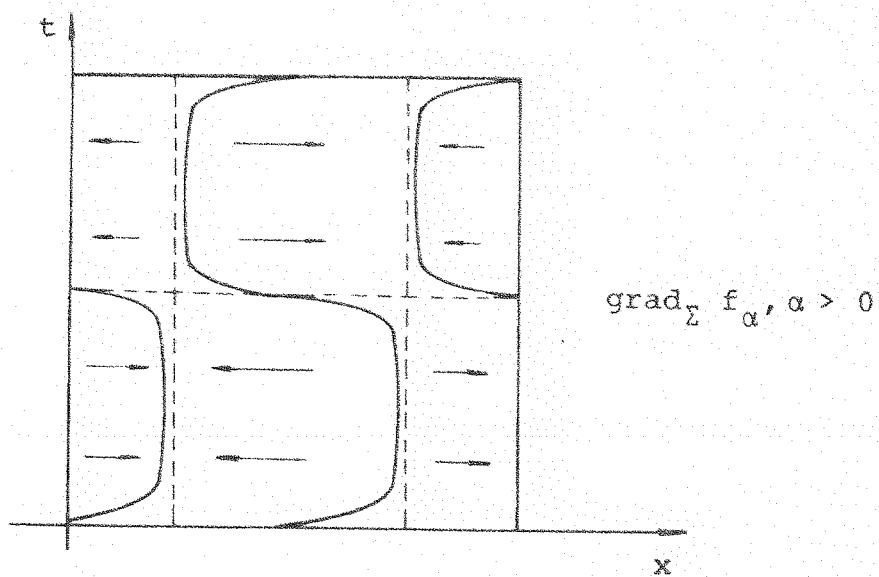
cujos pontos singulares são os pontos  $(x, t) \in \mathbb{R}^2$  tais que

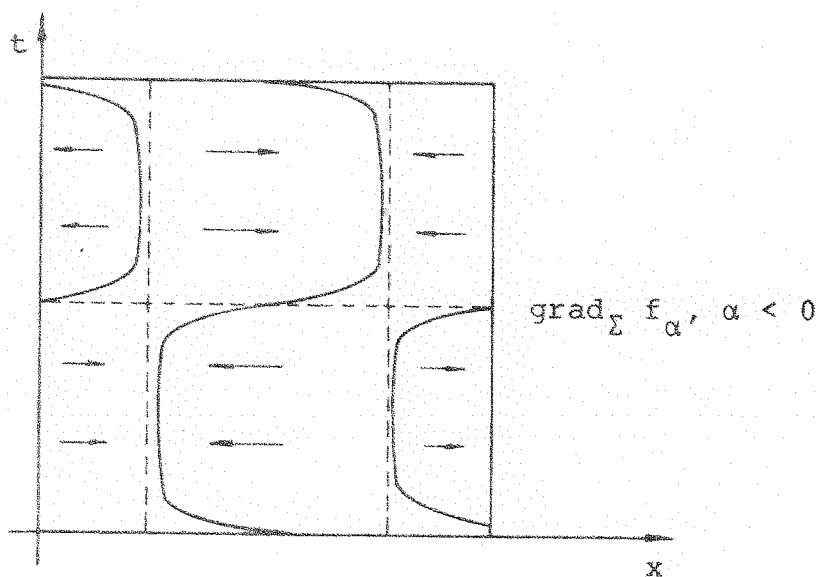
$$\cos x \sin t - \alpha \sin x = 0 \quad (0.4)$$

Para a função altura  $f_0$  estes pontos formam, no toro, quatro círculos com o seguinte aspecto:



Para  $\alpha \neq 0$ , entretanto, os pontos singulares de  $\text{grad}_{\Sigma} f_{\alpha}$  se apresentam em 2 círculos disjuntos, como esquematizados nos gráficos abaixo:





Observamos que os pontos singulares de  $\text{grad}_{\Sigma} f_{\alpha}$ , quando  $\alpha \neq 0$ , constituem uma subvariedade de dimensão 1 do toro, transversal às folhas. Isto não acontece com  $f_0$  embora se tenha  $f_{\alpha} \rightarrow f_0$ , quando  $\alpha \rightarrow 0$ , na topologia  $C^k$  no espaço das funções diferenciáveis do toro na reta.

#### 0.2.2 - Espaço fibrado com grupo estrutural discreto

Vamos definir uma folheação nos espaços fibrados com grupo estrutural discreto. No capítulo III estudamos a estabilidade estrutural de uma classe de  $\int$ - gradientes em variedades cuja folheação só tenha folhas compactas - isto se obtém, por exemplo, nos espaços fibrados com grupo estrutural finito. No capítulo IV estudamos uma caracterização dos  $\int$ - gradientes

estruturalmente estáveis em espaços fibrados com grupo estrutural discreto em dimensão 2.

A definição mais conveniente, no caso, é a que se encontra em [9] e que expomos a seguir.

Seja  $B^m$  e  $Q^p$  variedades diferenciáveis ( $C^\infty$ , conexas, compactas), consideremos o grupo fundamental  $\pi_1(B)$  de  $B^m$  e um homomorfismo  $\phi: \pi_1(B) \rightarrow \text{Dif}^\infty(Q)$  no grupo dos difeomorfismos (de classe  $C^\infty$ ) de  $Q$ . Sendo  $\tilde{B}$  o recobrimento universal de  $B$ , consideramos no produto  $\tilde{B} \times Q$  a seguinte relação de equivalência:

$$(\tilde{b}_1, q_1) \sim (\tilde{b}_2, q_2) \iff \exists g \in \pi_1(B) \mid \tilde{b}_2 = g(\tilde{b}_1) \text{ e } q_2 = \phi(g)q_1 \quad (0.5)$$

Verifica-se que  $M^{m+p} = (\tilde{B} \times Q) / \sim$  é um fibrado de base  $B^m$ , fibra  $Q^p$  e de grupo estrutural  $\phi[\pi_1(B)] \subset \text{Dif}^\infty(Q)$ . A folheação que se considera em  $M^{m+p}$  é a obtida por passagem ao quociente da folheação de  $\tilde{B} \times Q$  dada trivialmente pela 2a. projeção  $p_2: \tilde{B} \times Q \rightarrow Q$ . As folhas desta folheação são recobrimentos da base  $B$ . Se o grupo estrutural  $\phi[\pi_1(B)]$  for finito, todas as folhas serão, então, compactas satisfazendo as hipóteses dos capítulos II e III.

Se  $B^m$  e  $Q^p$  estão munidas de métricas riemannianas e  $\phi[\pi_1(B)]$  estiver contido no grupo das isometrias (diferenciáveis) de  $Q$ , então podemos definir uma métrica riemanniana em  $M$ , de modo a obter  $\lambda$ -gradientes com boas propriedades a partir de funções  $F: B \rightarrow \mathbb{R}$  cujos gradientes sejam, por exemplo, de Morse-Smale. Construiremos, desta forma e a título de exemplo, um  $\lambda$ -gradiente na garrafa de Klein  $K^2$ .

Façamos  $B^1 = S^1$ ,  $Q^1 = S^1$  e, se  $\pi_1(S^1)$  é o grupo gerado por :

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = x + 2\pi, \quad (0.6)$$

definimos

$$\phi : \pi_1(S^1) \rightarrow \text{Dif}^\infty(S^1)$$

pondo  $\phi(g) = h$ , onde  $h: S^1 \rightarrow S^1$  é a isometria dada por

$$h(z) = \bar{z}, \quad z \in S^1 \subset \mathbb{C}. \quad (0.7)$$

Considerando o produto  $\mathbb{R} \times S^1$  e passando ao quociente obtemos a garrafa de Klein folheada. As folhas são círculos, sendo que 2 deles cobrem uma vez a base enquanto cada um dos demais cobre 2 vezes.

A função  $F: \mathbb{R} \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$F(x, z) = \cos x + \text{Re } z \quad (0.8)$$

dá, por passagem ao quociente, uma função  $f: K^2 \rightarrow \mathbb{R}$  cujo  $\lfloor$ - gradiente é, em cada folha, um gradiente de Morse-Smale.

0.2.3 - Consideremos  $S^3$  com a folheadão de Reeb.

Demonstra-se, no capítulo I, que é sempre possível aproximar uma função de  $S^3$  em  $\mathbb{R}$  por uma  $f$  tal que as singularidades de seu  $\lfloor$ - gradiente formem uma subvariedade compacta de dimensão 1 (uma reunião finita de círculos). Como não existe recorrência não trivial para os  $\lfloor$ - gradientes e como não exis-



te círculo transversal a todas as folhas passando pela folha compacta (toro) de  $S^3$ , conclui-se a impossibilidade de encontrar, neste caso, um  $\Sigma$ -gradiente cujos pontos singulares sejam todos hiperbólicos nas respectivas folhas.

CAPÍTULO I :  $\Sigma$  - GRADIENTESI.1 Notações

Seja  $M^{m+p}$  variedade diferenciável (isto é, de classe  $C^\infty$ ), de dimensão  $m+p$ , conexa, compacta, munida de uma métrica riemanniana diferenciável,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e de uma distribuição diferenciável  $\Sigma$  de codimensão  $p$ , ou seja, a cada  $x \in M^{m+p}$ ,  $\Sigma_x$  faz corresponder o sub-espaço  $\Sigma_x$  de dimensão  $m$  do espaço  $T_x M$  tangente a  $M$  em  $x$ . Indicaremos com  $C^r(M, R)$  o espaço de Banach das funções  $f: M^{m+p} \rightarrow R$ , de classe  $C^r$ , com uma norma  $C^r$ ,  $\|f\|_r$ . Neste texto, salvo menção explícita, estamos considerando  $r \geq 2$ .

Por meio da métrica de  $M$  e da distribuição  $\Sigma$ , associamos a cada função  $f \in C^r(M, R)$  um campo de vetores de  $M$ ,  $X_f$  ou  $\text{grad}_\Sigma f$ , pondo para cada  $x \in M$ :

$$X_f(x) = (\text{grad}_\Sigma f)_x = \text{projecção ortogonal do grad } f \text{ calculado em } x \text{ no subespaço } \Sigma_x.$$

Em coordenadas locais, ficará claro que este campo é de classe  $C^{r-1}$ .

Definição I.1.1 - O campo  $X_f = \text{grad}_\Sigma f$  é o  $\Sigma$ - gradiente de  $f$ .

Neste capítulo estabelecemos uma condição sobre as singularidades de  $X_f$  e verificaremos que esta é, num certo sentido, "genérica" por perturbações de  $f$ , em classe  $C^r$ .

## I. 2 Pontos singulares de $\text{grad}_\Sigma f$

Um ponto singular de  $X_f = \text{grad}_\Sigma f$  é um ponto em que o campo se anula. Podemos provar, de maneira análoga à que se faz para os gradientes, a propriedade enunciada a seguir:

Proposição I.2.1 - O conjunto  $\Omega_\Sigma(f)$  dos pontos não errantes de  $\text{grad}_\Sigma f$  coincide com o conjunto de seus pontos singulares.

Demonstração - decorre do fato de que se  $\gamma$  é uma trajetória não singular de  $\text{grad}_\Sigma f$ , então  $f$  é estritamente crescente ao longo de  $\gamma = \gamma(t)$ . Tendo isto em vista, a demonstração é a mesma que para os gradientes.

Deste fato, decorre o seguinte corolário:

Corolário I.2.2 - Um campo  $\Sigma$ -gradiente não apresenta trajetórias periódicas não singulares nem fenômenos de recorrência não triviais.

Uma outra maneira de encarar os pontos singulares de  $X_f$  é a de considerá-los como interseção de  $X_f(M)$  com a seção nula do fibrado tangente  $TM$ . Mais precisamente, consideramos estas duas seções num subfibrado de  $TM$  que passamos a definir.

Definição I.2.3 -  $\Sigma(M)$  é o subfibrado vetorial do fibrado tangente  $TM$  de  $M$  definido como segue: para cada  $x \in M$ ,  $v_x \in T_x M$  está em  $\Sigma(M)$  se, e só se,  $v_x \in \Sigma_x$ .

Verifica-se que  $\Sigma(M)$  é uma subvariedade de dimensão  $2m+p$  de  $TM$ , [2].

Propriedade I.2.4 - O campo  $X_f$  é uma seção de  $\Sigma(M)$ . Se  $O$  é o campo nulo de  $M$ , um ponto  $x \in M$  será ponto singular de  $X_f$  se, e só se,  $(x, O_x) \in X_f(M) \cap O(M) \subset \Sigma(M)$ , onde  $O_x$  é o vetor nulo de  $T_x M$ .

De verificação imediata.

Isto posto, podemos verificar, pelo cálculo das dimensões, que o campo  $X_f$  não apresenta singularidades simples no sentido-usual. Para estudá-los, então, modificamos este conceito introduzindo a seguinte definição.

Definição I.2.5 - Um ponto singular  $x$  de  $X_f = \text{grad}_\Sigma f$  se diz  $\Sigma$ -simples se, e só se, as seções  $X_f(M)$  e  $O(M)$  se encontram transversalmente  $\Sigma(M)$  no ponto  $(x, O_x)$ .

Propriedade I.2.6 - Se  $f$  é tal que o campo  $X_f = \text{grad}_\Sigma f$  só admita singularidades  $\Sigma$ -simples, então, o conjunto destas singularidades é uma subvariedade  $V^p$  de  $M^{m+p}$ , de dimensão  $p$ , classe  $C^{r-1}$  e compacta.

Conseqüência da transversalidade. [3].

### I.3 Cálculo em coordenadas locais

Tanto quanto possível, usaremos notações já introduzidas em [2]. Tomemos uma carta local  $(V; x_1, \dots, x_{m+p})$  de  $M$  e sejam dados em  $V$ :

i) a métrica pela matriz dos

$$g_{ij}(x) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_x, \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_x \right\rangle, \quad x \in V;$$

$$i, j = 1, \dots, m+p.$$

A matriz  $(g_{ij}(x))$  é inversível e se  $(B_{rs}(x))$  é sua inversa, serão ambas definidas positivas em cada ponto  $x \in V$ . Segue das hipóteses de diferenciabilidade da métrica que as funções  $g_{ij}$  e  $B_{rs}$  são diferenciáveis;

ii) a distribuição  $\{ \}$  descrita pelas  $p$  1-formas diferenciais diferenciáveis, linearmente independentes em cada ponto de  $V$ :  $\omega_1 = 0, \dots, \omega_p = 0$

Cada 1-forma  $\omega_v$  se escrevendo como:

$$\omega_v = \sum_{j=1}^{m+p} A_{vj} dx_j, \quad v = 1, \dots, p,$$

com as  $A_{vj}$  funções diferenciáveis em  $V$  e a matriz  $(A_{vj})$ ,  $v = 1, \dots, p$  e  $j = 1, \dots, m+p$ , de posto máximo.

Podemos, então, considerar os  $p$  campos locais de vetores:

$$\theta_v = \sum_{j=1}^{m+p} B_{kj} A_{vk} \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad v = 1, \dots, p$$

que correspondem às 1-formas  $\omega_v$ , respectivamente, pela métrica, isto é, que satisfazem, em cada ponto  $x \in V$ :

$$\omega^v(v_x) = \langle \theta_v(x), v_x \rangle, \quad \forall v_x \in T_x M.$$

Estes campos  $\theta_1, \dots, \theta_p$  definem, em cada ponto  $x \in V$ , uma base do subespaço  $\sum_x^1$  ortogonal a  $\sum_x$  em  $T_x M$  e são campos diferenciáveis em  $V$ .

Tomemos  $f \in C^r(M, R)$  e usemos, ainda, a letra  $f$  ao escrevê-la nas coordenadas  $(x_1, \dots, x_{m+p})$  de  $V$ . Indicamos por  $f_k$  a derivada de  $f = f(x_1, \dots, x_{m+p})$  em relação à  $k$ -ésima coordenada. Tem-se, então,  $\text{grad } f = \sum_{j,k=1}^{m+p} B_{kj} f_k \frac{\partial}{\partial x_j}$ .

Vamos definir  $p$  funções  $\alpha_1, \dots, \alpha_p: C^r(M, R) \times V \rightarrow R$ , pondo, para cada função  $f$  e cada  $x \in V$ :

$$\alpha_v(f, x) = \text{coordenada do vetor } \text{grad } f_x - \text{grad}_{\sum} f_x \text{ de } \sum_x^1 \text{ na direção } \theta_v(x).$$

Propriedade 1.3.1 - As funções  $\alpha_v: C^r(M, R) \times V \rightarrow R$ ,  $1 \leq v \leq p$ , acima definidas são lineares em  $f$  e de classe  $C^{r-1}$  em  $x$ .

Demonstração - verifica-se da definição que as funções  $\alpha_v$  são aquelas que satisfazem às seguintes equações, onde deixamos de indicar o ponto  $x \in V$ :

$$\omega_\mu \left[ \sum_{v=1}^p \alpha_v \theta_v \right] = \omega_\mu (\text{grad } f) , \mu = 1, \dots, p$$

ou, em coordenadas:

$$\sum_{j,k=1}^{m+p} \sum_{v=1}^p A_{\mu k} B_{jk} A_{vj} \alpha_v = \sum_{j,k=1}^{m+p} A_{\mu j} B_{kj} f_k , \mu = 1, \dots, p.$$

Estas funções foram introduzidas e estudadas noutra contexto em [2] onde se ressalta que a matriz  $p \times p$   $(A_{\mu k}) (B_{jk}) (A_{vj})$  é inversível por serem:  $(A_{\mu k})$  de posto máximo e  $(B_{jk})$  definida positiva. Visto isto, a propriedade I.3.1 está verificada, c.q.d.

À vista destas notações, o campo  $X_f = \text{grad}_\Sigma f$  é descrito, em  $V$ , nestas coordenadas por:

$$\text{grad}_\Sigma f = \sum_{j,k=1}^{m+p} \sum_{v=1}^p B_{kj} (f_k - \alpha_v A_{vk}) \frac{\partial}{\partial x_j} \quad (\text{I.1})$$

Sendo, para  $x \in V$ :

$$\beta_j(x) = \sum_{k=1}^{m+p} \sum_{v=1}^p B_{kj} (f_k - \alpha_v A_{vk}), \quad (\text{I.2})$$

é claro que

$$\sum_{j=1}^{m+p} A_{vj} \beta_j = 0 , \text{ em } V, \quad (\text{I.3})$$

e que os pontos singulares de  $\text{grad}_\Sigma f$ , em  $V$ , são aqueles que satisfazem às equações

$$\beta_j(x) = 0, \quad j = 1, \dots, m+p \quad (\text{I.4})$$

ou, como  $(B_{kj})$  é inversível,

$$\bar{\beta}_k(x) \equiv f_k - \sum_{v=1}^p \alpha_v A_{vk} = 0, \quad k = 1, \dots, m+p. \quad (\text{I.5})$$

Propriedade I.3.2 - Um ponto singular de  $\text{grad}_\Sigma f$ ,  $x_0 \in V$ , será um ponto singular  $\Sigma$ -simples se, e só se, em  $x_0$  estiver satisfeita a seguinte condição:

$$\text{posto da matriz} \begin{pmatrix} \frac{\partial \beta_j}{\partial x_k} (x_0) \end{pmatrix}_{\substack{1 \leq j \leq m+p \\ 1 \leq k \leq m+p}} = m.$$

Demonstração: No fibrado tangente  $TM$ , consideramos a carta local admissível  $(TV; x_1, \dots, x_{m+p}, y_1, \dots, y_{m+p})$ .

Nestas coordenadas, o subfibrado  $\Sigma(M)$  é definido, em  $TV$ , pelas equações:

$$\sum_{j=1}^{m+p} A_{vj} y_j = 0, \quad v=1, \dots, p, \quad (\text{I.6})$$

a seção  $O(M)$  por

$$y_j = 0, \quad j = 1, \dots, m+p \quad (\text{I.7})$$

e a seção  $x_f(M) \subset \Sigma(M)$ , em  $TV$ , por:

$$y_j = \beta_j(x_1, \dots, x_{m+p}), \quad j=1, \dots, m+p. \quad (\text{I.8})$$



A condição de transversalidade em  $\Sigma(M)$  num ponto  $x_0 \in V$  de coordenadas  $(x_1^0, \dots, x_{m+p}^0)$  para as quais se tenha, então

$$\beta_j(x_1^0, \dots, x_{m+p}^0) = 0$$

da seção  $X_f$  com a seção nula  $O(M)$ , equivale à condição do espaço tangente a  $\Sigma(M)$  em  $(x, 0_x)$  ser soma do espaço tangente a  $O(M)$  em  $(x, 0_x)$  com  $DX_f(T_x M)$ . Esta equivale à condição de que a interseção de  $DX_f(T_x M)$  com o espaço tangente a  $O(M)$  em  $(x, 0_x)$  tenha dimensão  $p$ . Esta interseção é descrita pelos vetores do espaço tangente a  $\Sigma(M)$  em  $(x, 0_x)$  da forma

$$\sum_{i=1}^{m+p} \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \text{ onde } \sum_{i=1}^{m+p} \frac{\partial \beta_j}{\partial x_i} \xi_i = 0, j=1, \dots, m+p. \quad (I.9)$$

Logo, esta interseção terá dimensão  $p$  se, e só se

$$\text{posto} \left( \frac{\partial \beta_j}{\partial x_i}(x_0) \right) = m, \text{ c.q.d.}$$

#### I.4 A condição de singularidades $\Sigma$ -simples é "genérica"

Neste parágrafo, usaremos dois resultados da Teoria da Transversalidade para demonstrar o resultado central deste capítulo, que enunciaremos a seguir:

**Teorema I.4.1** - Sendo  $M^{m+p}$  compacta, de classe  $C^r$ ,  $r \geq 2$ , o subconjunto de  $C^r(M, \mathbb{R})$  das funções  $f$  para as quais  $\text{grad}_{\Sigma} f$  só admita singularidades  $\Sigma$ -simples é aberto e denso em  $C^r(M, \mathbb{R})$ , na topologia  $C^r$ .

A demonstração é feita como aplicação dos teoremas cujos enunciados transcrevemos a seguir e cujas demonstrações encontram-se em ([3]: 18.2 e 19.1, páginas 47 e 48). No § 18, encontra-se o seguinte Teorema: "Sejam  $A$ ,  $X$  e  $Y$  variedades de classe  $C^1$ ,  $X$  de dimensão finita,  $W \subset Y$  subvariedade de classe  $C^1$ , fechada,  $K \subset X$  subconjunto compacto de  $X$  e

$$\rho : A \rightarrow C^1(X, Y)$$

uma pseudo-representação  $C^1$ . Então, o subconjunto  $A_{KW} \subset A$  definido por:

$$A_{KW} = \{a \in A \mid \rho_a \not\equiv_x W \text{ para } x \in K\}$$

é aberto".

E no § 19 encontra-se o Teorema da Densidade [3]:

"Sejam  $A, X, Y$  variedades de classe  $C^s$ ,  $\rho : A \rightarrow C^s(X, Y)$  uma representação  $C^s$ ,  $W \subset Y$  uma subvariedade (não necessariamente fechada) e  $ev_\rho : A \times X \rightarrow Y$  a aplicação valorização de  $\rho$ . Definimos  $A_W \subset A$  por:

$$A_W = \{a \in A \mid \rho_a \not\equiv W\}.$$

Supondo ainda que:

- (1)  $\dim X = n$  e  $\text{codim } W$  em  $Y$  seja finita igual a  $q$ ;
- (2)  $A$  e  $X$  sejam espaços de Baire
- (3)  $s > \max \{0, n-q\}$ ;
- (4)  $ev_\rho \not\equiv W$

mostra-se que, então  $A_w$  é residual (denso, portanto) em  $A$ ."

Vejamos que estes Teoremas se aplicam ao caso que estamos estudando desde que sejam tomados:  $A$  como o espaço de Banach

$C^r(M, R)$ ,  $K = X = M^{m+p}$  variedade compacta de dimensão finita  $m+p$ ,

$Y = \Sigma(M)$ , subfibrado do fibrado tangente  $TM$ , determinado pela -

distribuição  $\Sigma$  e  $W = O(M) \subset \Sigma(M)$ , subvariedade diferenciável -

compacta (fechada, portanto) de  $\Sigma(M)$  obtida como imagem do cam-

po nulo considerado como seção  $O: M \rightarrow \Sigma(M)$  e, finalmente,

$\rho : C^r(M, R) \rightarrow C^{r-1}(M, \Sigma(M)) \subset C^1(M, \Sigma(M))$  porque  $r \geq 2$ , definida co-

mo  $\rho(f) = \text{grad}_{\Sigma} f$ .

Para verificação das demais hipóteses, lembramos, aqui, algumas definições:

Definição I.4.2 - Sendo  $A$  espaço topológico e  $G: A \rightarrow C^s(M, N)$

uma aplicação de  $A$  no espaço das aplicações de classe  $C^s$ ,  $s \geq 1$ , da variedade  $M$  na variedade  $N$ , define-se a aplicação valorização de  $G$ , que se denota com  $\text{ev } G$ , por:

$$\text{ev } G : A \times M \rightarrow M$$

$$(f, x) \mapsto G(f)x.$$

Definição I.4.3 - Sendo  $A$  uma variedade de classe  $C^s$ , a aplicação  $G : A \rightarrow C^s(M, N)$  se diz uma representação  $C^s$  se, e só se, a aplicação  $\text{ev } G: A \times M \rightarrow N$  for de classe  $C^s$ .

Definição I.4.4 - Sendo  $A$  espaço topológico, a aplicação  $G: A \rightarrow C^S(M, N)$  se diz uma pseudo-representação  $C^1$  se, e só se, a aplicação  $G^1: A \rightarrow C^{S-1}(TM, TN)$  definida como  $G^1(f) = D(G(f))$  tem valorização  $\text{ev } G^1: A \times TM \rightarrow TN$  contínua.

Os lemas que seguem mostram que as hipóteses destes teoremas de transversalidade estão satisfeitas no nosso caso.

Lema I.4.5 - A aplicação  $\rho: C^r(M, R) \rightarrow C^1(M, \Sigma(M))$  definida como  $\rho(f) = \text{grad}_\Sigma f$  é uma pseudo-representação  $C^1$ .

Demonstração: por I.4.4, devemos mostrar a continuidade da aplicação:

$$\text{ev } \rho^1: C^r(M, R) \times TM \rightarrow T\Sigma(M)$$

$$(f, v_x) \mapsto [D_x(\text{grad}_\Sigma f)]v_x.$$

Ora, tomada uma carta local  $(U; x_1, \dots, x_{m+p})$  em  $M$  e as respectivas cartas admissíveis  $(TU; x_1, \dots, x_{m+p}, y_1, \dots, y_{m+p})$  em  $TM \supset \Sigma(M)$  e

$(TTU; x_1, \dots, x_{m+p}, y_1, \dots, y_{m+p}, \xi_1, \dots, \xi_{m+p}, \eta_1, \dots, \eta_{m+p})$  em  $TTM \supset T\Sigma(M)$ , pelo que foi visto em I.1, temos que

$$\text{ev } \rho^1(f; x_1, \dots, x_{m+p}, y_1, \dots, y_{m+p}) =$$

$$(x_1, \dots, x_{m+p}, y_1, \dots, y_{m+p}, \xi_1, \dots, \xi_{m+p}, \eta_1, \dots, \eta_{m+p})$$

onde

$$\xi_j = y_j$$

$$\eta_j = \sum_{\ell=1}^{m+p} \frac{\partial \beta_j}{\partial x_\ell} y_\ell, \quad j = 1, \dots, m+p \quad (\text{I.10})$$

Para cada  $j$ ,  $1 \leq j \leq m+p$ ,  $\beta_j = \beta_j(x, f)$  é linear em  $f$  (decorrência de I.3.1 e da fórmula (I.2)) e de classe  $C^{r-1}$  em  $x_i$  e  $y_i$ ,  $i = 1, \dots, m+p$ . Como, desde o início, tomamos  $r \geq 2$ , é evidente a continuidade de  $\text{ev } \rho^1$ , c.q.d.

Lema I.4.6 - A aplicação  $\rho: C^r(M, R) \rightarrow C^{r-1}(M, \Sigma(M))$  definida por  $\rho(f) = \text{grad}_\Sigma f$  é uma representação  $C^{r-1}$  e tem valorização  $\text{ev } \rho: C^r(M, R) \times M \rightarrow \Sigma(M)$  transversal à seção nula  $0(M) \subset \Sigma(M)$ .

Demonstração: Com efeito, tomadas coordenadas locais em  $M$  e  $TM$  como no lema precedente, temos:

$$\text{ev } \rho(f; x_1, \dots, x_{m+p}) = (x_1, \dots, x_{m+p}, y_1, \dots, y_{m+p}) \quad (\text{I.11})$$

$$\text{com } y_j = \sum_{k=1}^{m+p} B_{kj}(x) \beta_k(f, x), \quad j=1, \dots, m+p$$

Como as  $\beta_k$  são lineares em  $f$  (propriedade I.3.1 e fórmulas (I.2)), as fórmulas (I.11) mostram que  $\rho$  é uma representação  $C^{r-1}$ . Sejam, agora,  $f$  e  $x_0$  tais que  $\text{grad}_\Sigma f|_{x_0} = 0$ , então:

$\text{evp}(f, x_0) \in \mathcal{O}(M)$ , isto é

$$\beta_k(f, x_0) = 0, \quad k = 1, \dots, m+p.$$

Para  $v_{x_0} = \sum_{j=1}^{m+p} Y_j \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_{x_0}$ , teremos, então:

$$\begin{aligned} \left[ D(f, x_0) \text{ evp} \right] (g, v_{x_0}) &= \sum_{j=1}^{m+p} Y_j \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_{(x_0, 0)} + \\ &+ \sum_{j,k=1}^{m+p} B_{kj}(x_0) \left[ \beta_k(g, x_0) + \sum_{i=1}^{m+p} \frac{\partial \beta_k}{\partial x_i} (f, x_0) Y_i \right] \frac{\partial}{\partial Y_j} \Big|_{(x_0, 0)} \end{aligned} \quad (\text{I.12})$$

Vê-se agora que  $\text{evp} \in \mathcal{O}(M)$  (transversalidade em  $\Sigma(M)$ ):

dado um vetor  $W$  tangente a  $\Sigma(M)$  em  $(x_0, 0)$ , teremos

$$W = \sum_{i=1}^{m+p} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{m+p} b_j \frac{\partial}{\partial Y_j}, \quad \text{com}$$

$$\sum_{j=1}^{m+p} A_{vj} b_j = 0, \quad v=1, \dots, p \quad (\text{I.13})$$

que pode ser escrito como

$$W = \bar{W} + \left[ D(f, x_0) \text{ evp} \right] (g, 0), \quad \bar{W} \in T_{(x_0, 0)} \mathcal{O}(M). \quad (\text{I.14})$$

Basta tomar como  $g$  uma função de  $C^r(M, \mathbb{R})$  que satisfaça a seguinte condição no ponto  $x_0$ :

$$(\text{grad } g)_{x_0} = \sum_{j=1}^{m+p} b_j \frac{\partial}{\partial x_j} \quad (\text{I.15})$$

ou seja, para cada  $j$ ,  $1 \leq j \leq m+p$ :

$$\frac{\partial g}{\partial x_j}(x_0) = \sum_{i=1}^{m+p} g_{ij}(x_0) b_i,$$

onde  $(g_{ij})$  é a matriz da métrica (§I.3) e

$$\bar{w} = \sum_{i=1}^{m+p} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (\text{I.16})$$

De (I.13), (I.12), (I.15) e (I.16) conclui-se (I.14), c.q.d.

Demonstração do Teorema I.4.1 - Nos teoremas de transversalidade citados de [3], fazemos

$A = C^r(M, R)$  espaço de Banach - logo variedade diferenciável e espaço de Baire -  $X = M$ ,  $Y = \sum(M)$ ,  $W = 0(M) \subset \sum(M)$  e  $s=r-1$ .

Do lema I.4.5 segue, então, que o conjunto das  $f$  tais que seu  $\sum$ -gradiente só tenha singularidades  $\sum$ -simples é aberto. Do lema I.4.6 segue que este conjunto é residual - logo denso - em  $C^r(M, R)$  quando  $r-1 > \max\{0, m+p-m\} = p$ . No caso de  $r \leq p-1$ , lembramos que  $C^{p+r}(M, R)$  é denso em  $C^r(M, R)$  e, como as funções  $f$  de  $C^{p+r}(M, R) \subset C^r(M, R)$  cujos  $\sum$ -gradientes só tenham singularidades  $\sum$ -simples formam um conjunto denso em  $C^{p+r}(M, R)$ , o teorema I.4.1 também estará satisfeito para qualquer  $r \geq 2$ , c.q.d.

Observação I.4.7 - O Teorema I.4.1. ainda é válido quando se está no universo dos campos  $\mathcal{C}^r(M)$  e a cada campo  $X$  se associa o campo  $X_\Sigma$  por projeção ortogonal de  $X_x$  sobre  $\Sigma_x$ , em cada ponto  $x \in M$ . Com processos análogos demonstra-se que o conjunto dos campos  $X$  para os quais  $X_\Sigma$  só admita singularidades  $\Sigma$ -simples é aberto e denso em  $\mathcal{C}^r(M)$ .

### I.5 Variação contínua dos pontos singulares $\Sigma$ -simples

Dada uma função  $f$  cujo  $\Sigma$ -gradiente só admita singularidades  $\Sigma$ -simples vimos que existe  $\epsilon > 0$  tal que na bola  $B_\epsilon(f) \subset C^r(M, R)$ , de centro  $f$  e raio  $\epsilon$ , todas as funções ainda têm esta propriedade (parte do Teorema I.4.1) e que para cada  $g \in C^r(M, R)$  com esta propriedade as singularidades formam uma subvariedade  $V^p(g)$  compacta (propriedade I.2.5). Veremos agora que se  $f$  tem esta propriedade existe uma vizinhança de  $f$  na qual a subvariedade dos pontos singulares  $V^p(g)$  varia continuamente, em classe  $C^1$ , com  $g$ .

Proposição I.5.1 - Se  $f \in C^r(M, R)$  é tal que  $\text{grad}_\Sigma f$  só admite singularidades  $\Sigma$ -simples, existe  $\epsilon > 0$  tal que: se  $B_\epsilon(f) \subset C^r(M, R)$  é a bola de centro  $f$  e raio  $\epsilon$ , então:

- i)  $\|g-f\|^{C^1} < \epsilon \Rightarrow \text{grad}_\Sigma g$  só admite singularidades  $\Sigma$ -simples,



ii) a variedade  $V^P(g)$  dos pontos singulares de  $\text{grad}_\Sigma g$  varia continuamente, em classe  $C^{r-1}$ , com  $g \in B_\epsilon(f)$ .

Resolvemos, primeiramente, o caso local, como aplicação do Teorema das funções implícitas.

Lema I.5.2 - Nas condições até aqui utilizadas se  $f \in C^r(M, R)$  é tal que  $\text{grad}_\Sigma f$  só admite singularidades  $\Sigma$ -simples e se  $x_0 \in V^P(f)$  é um ponto singular de  $\text{grad}_\Sigma f$ , então existem um número  $\epsilon = \epsilon(x_0) > 0$  e uma vizinhança  $U = U(x_0) \subset M$  tais que: se  $g \in C^r(M, R)$  é tal que  $\|g-f\|^r < \epsilon$ , a variedade  $V^P(g) \cap U$  dos pontos singulares de  $\text{grad}_\Sigma g$  em  $U$  é o gráfico de uma função  $h$  de classe  $C^{r-1}$  e ainda  $h$  e suas derivadas variam continuamente com  $g$ .

Demonstração - Tomemos um sistema de coordenadas  $(U; x_1, \dots, x_{m+p})$  em torno de  $x_0$  e as respectivas coordenadas admissíveis  $(TU; x_1, \dots, x_{m+p}, y_1, \dots, y_{m+p})$  em  $TM$ . Sendo, neste sistema de coordenadas, a distribuição  $\Sigma$  descrita pelas  $p$  1-formas  $\omega_\nu, \nu = 1, \dots, p$  dadas como no § I.3:

$$\omega_\nu = \sum_{j=1}^{m+p} A_{\nu j} dx_j, \quad \nu = 1, \dots, p$$

e sendo a matriz  $(A_{\nu j})_{\substack{1 \leq \nu \leq p \\ 1 \leq j \leq m+p}}$  de posto  $p$ , suponhamos que as

coordenadas  $x_i$  estejam numa ordem tal que a matriz

$$(A_{\nu j})_{\substack{1 \leq \nu \leq p \\ m+1 \leq j \leq m+p}}$$

seja não-singular em todo o aberto  $U$  (eventualmen-

te menor que o aberto tomado no princípio mas ainda vizinhança

de  $x_0$ ). Assim sendo, para cada  $g \in C^r(M, R)$ , e como

$\text{grad}_{\Sigma} g_x \in \sum_x$ , teremos que  $\omega_{\nu}(\text{grad}_{\Sigma} g_x) = 0, \nu = 1, \dots, p, \forall x \in U$ .

Por outro lado, conforme as notações de (I.1) e (I.2) temos para  $x \in U$ :

$$\text{grad}_{\Sigma} g_x = \sum_{j=1}^{m+p} \beta_j(g; x) \frac{\partial}{\partial x_j} \quad (\text{I.17})$$

donde

$$\sum_{j=1}^{m+p} A_{\nu j}(x) \beta_j(g; x) = 0, \nu = 1, \dots, p, \forall g \in C^r(M, R), \forall x \in U. \quad (\text{I.18})$$

Sendo não singular a matriz  $(A_{\nu j}(x))_{\substack{1 \leq \nu \leq p \\ m+1 \leq j \leq m+p}}$  de (I.18) pode -

mos calcular

$$\beta_k(g; x) = \sum_{j=1}^m c_{jk}(x) \beta_j(g; x), k = m+1, \dots, m+p, \forall g \in C^r(M, R), \forall x \in U \quad (\text{I.19})$$

Donde, um ponto  $x \in U$  será ponto singular de  $\text{grad}_{\Sigma} g$  se, e só

se,  $\beta_j(g; x) = 0, j = 1, \dots, m$ .

Ora, das hipóteses do Lema I.5.2 temos que  $\text{grad}_{\Sigma} f_{x_0} = 0$ , donde

$\beta_j(f; x_0) = 0, j = 1, \dots, m+p$ . Então, fazendo  $g = f$  em (I.18), de-

derivando em relação a cada  $x_i, 1 \leq i \leq m+p$ , e calculando em  $x_0$

teremos:

$$\sum_{j=1}^{m+p} A_{vj}(x_0) \frac{\partial \beta_j}{\partial x_i}(f; x_0) = 0, \quad v=1, \dots, p \text{ e } i=1, \dots, m+p \quad (\text{I.20})$$

Isto significa que em  $(f; x_0)$  também algumas das  $\frac{\partial \beta_j}{\partial x_i}$  se calculam como combinações lineares de outras, isto é:

$$\frac{\partial \beta_k}{\partial x_i}(f; x_0) = \sum_{j=1}^m c_{jk}(x_0) \frac{\partial \beta_j}{\partial x_i}(f; x_0), \quad k=m+1, \dots, m+p, i=1, \dots, m+p$$

Por hipótese  $x_0$  é um ponto  $\Sigma$ -simples o que equivale, pela propriedade I.3.2, à condição do posto da matriz

$$\left( \frac{\partial \beta_k}{\partial x_i}(f; x_0) \right)_{\substack{1 \leq i, k \leq m+p}} \text{ ser } m. \text{ Tendo em vista as relações (I.21)}$$

$$\text{a matriz } \left( \frac{\partial \beta_k}{\partial x_i}(f; x_0) \right)_{\substack{1 \leq k \leq m \\ 1 \leq i \leq m+p}} \text{ tem posto } m.$$

Sejam  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq m+p$  tais que a matriz  $\left( \frac{\partial \beta_k}{\partial x_{i_j}}(f; x_0) \right)_{\substack{1 \leq j, k \leq m}}$  seja não singular. Se consideramos a aplicação de classe  $C^{r-1}$ :

$$\phi : C^r(M; R) \times U \rightarrow R^m$$

$$(g; x_1, \dots, x_{m+p}) \mapsto (\beta_1(g, x), \dots, \beta_m(g, x))$$

ela é tal que

$$\phi(f; x_0) = 0 \text{ e } \det \left( \frac{\partial \beta_k}{\partial x_{i_j}}(f; x_0) \right)_{\substack{1 \leq j, k \leq m}} \neq 0 \quad (\text{I.22})$$

logo, pelo Teorema das funções implícitas, conclui-se que existem  $U_1 \subset \mathbb{R}^p$  vizinhança de  $(x_{r_1}^0, \dots, x_{r_p}^0)$ ,  $U_2 \subset \mathbb{R}^m$  vizinhança de  $(x_{i_1}^0, \dots, x_{i_m}^0)$ , um número  $\varepsilon = \varepsilon(x_0) > 0$  e uma aplicação

$$h : B_\varepsilon(f) \times U_1 \rightarrow U_2, \text{ de classe } C^{r-1}$$

tais que:

i)  $(x_{r_1}^0, \dots, x_{r_p}^0, x_{i_1}^0, \dots, x_{i_m}^0)$  são as coordenadas de

$x_0 \in U$ , numa ordem conveniente a fim de satisfazer

$$(I.22);$$

ii)  $B_\varepsilon(f) \subset C^r(M, \mathbb{R})$  é a bola de centro  $f$  e raio  $\varepsilon$ ;

iii)  $\bar{U}_1 + \bar{U}_2 = \bar{U}^* \subset \bar{U}$ , onde  $\bar{U}_1, \bar{U}_2 \subset \mathbb{R}^{m+p}$  são conjuntos

de  $\mathbb{R}^{m+p}$  obtidos de  $U_1$  e  $U_2$  quando se acrescentam -

as coordenadas que faltavam, na ordem conveniente

e todas nulas;  $\bar{U} \subset \mathbb{R}^{m+p}$  é a imagem de  $U \subset M$  pelo sis

tema de coordenadas  $(x_1, \dots, x_{m+p})$  e  $U^* \subset M$  é tal

que sua imagem em coordenadas seja  $\bar{U}_1 + \bar{U}_2$ .

$$\text{iv) } \phi^{-1}(0) \cap B_\varepsilon^r(f) \times U^* =$$

$$= \{(g; x_{r_1}, \dots, x_{r_p}, h(g; x_{r_1}, \dots, x_{r_p})) \mid (x_{r_1}, \dots, x_{r_p}) \in V_1\}.$$

Isto é, se  $\|g-f\|_r < \epsilon$ , na vizinhança  $U^*$  de  $x_0$  os pontos singulares de  $\text{grad}_\Sigma g$  pertencem ao gráfico de uma função  $C^{r-1}$ , variando, portanto, continuamente com  $g$  em classe  $C^{r-1}$ , c.q.d.

Demonstração da Proposição I.4.7 - imediata, tendo em vista o lema precedente e a compacidade de  $V^p(f)$ .

Observação I.5.3 - Se  $r \geq 3$ , pode-se afirmar que a variedade  $V^p(g)$  varia isotopicamente com  $g$  numa vizinhança de  $f$ . Isto decorre do teorema da isotopia (|3|-teorema 20.2).

CAPÍTULO II :  $\Omega$ -ESTABILIDADEII.1 Introdução

Com o objetivo de estudar uma classe de campos  $\Sigma$ -gradientes estruturalmente estáveis por perturbações em  $C^F(M, R)$  no caso particular em que  $\Sigma$  seja uma distribuição integrável com variedades integrais maximais compactas, começamos por uma classe de  $\Sigma$ -gradientes  $\Omega$ -estáveis.

Seja, portanto,  $\Sigma$  uma distribuição integrável tal que se  $x \in M$  e  $F_x$  é a variedade integral maximal de  $\Sigma$  por  $x$ , então  $F_x$  é compacta. As subvariedades  $F_x$  são de dimensão  $m$  e constituem uma folheação de  $M$  que indicamos por  $F$ . Diremos que  $\Sigma$  é a "distribuição tangente à folheação  $F$ ".

Exemplos de folheações com folhas compactas são os fibrados com grupo estrutural finito (§0.22) com base e fibra compactas.

É de verificação imediata a seguinte propriedade:

Propriedade II.1.1 - Sendo  $\Sigma$  integrável, em cada ponto  $x \in M$ , tem-se  $\text{grad}_{\Sigma} f_x = \text{grad}(f|_{F_x})_x$ .

II.2 Ponto singular  $\Sigma$ -hiperbólico

Seja  $f \in C^F(M, R)$  de modo que os pontos singulares de  $X_f = \text{grad}_{\Sigma} f$  sejam todos  $\Sigma$ -simples. Consideremos a subvariedade  $V^p$  destes pontos singulares e seja  $x \in V^p$ . A parte principal de  $D_x X_f$  pode ser considerada como um operador de  $T_x M$ , que chamaremos de

$$A'_x : T_x M \rightarrow T_x M$$

Numa carta local  $(U; x_1, \dots, x_{m+p})$  em torno de  $x$ , este operador é descrito pela matriz  $\left( \frac{\partial \beta_j}{\partial x_i} \right)_{1 \leq i, j \leq m+p}$

De (I.20), da caracterização dos vetores tangentes a  $V^p$  em (I.9) e da proposição II.1.1, pode-se enunciar a seguinte proposição:

Proposição II.2.1 - O núcleo do operador  $A'_x$  é  $T_x V^p =$  espaço tangente à subvariedade dos pontos singulares em  $x$ . A imagem de  $A'_x$  está contida em  $\sum_x$ . Os auto-valores de  $A'_x$  são reais.

Neste contexto, não podemos encontrar pontos hiperbólicos. A idéia que estende o conceito de hiperbólico aparece na proposição seguinte:

Proposição II.2.2 - Nas condições impostas neste capítulo e se  $x \in V^p$ , são equivalentes as seguintes condições:

- i) o operador  $A_x : \sum_x \rightarrow \sum_x$  obtido como restrição de  $A'_x$  a  $\sum_x$  é um automorfismo hiperbólico;
- ii) a subvariedade  $V^p$  é transversal à folha  $F_x$  em  $x$ ;
- iii) o operador  $A'_x$  tem  $m$  auto-valores não nulos, se contados com suas multiplicidades;
- iv)  $x$  é o ponto singular hiperbólico do campo  $\text{grad}(f|F_x)$  em  $F_x$ .

Demonstração:

i  $\iff$  ii : pela proposição II.2.1, tem-se que

$$A_x \text{ injetor} \iff \sum_x \cap T_x V^P = \{0\}.$$

Por força de suas dimensões, e como  $A_x$  só tem auto-valores reais:

1º)  $A_x$  é um automorfismo hiperbólico  $\iff A_x$  é injetor

2º)  $T_x M = \sum_x + T_x V^P \iff \sum_x \cap T_x V^P = \{0\}.$

i.  $\implies$  iii. imediato.

iii.  $\implies$  i com efeito, os  $m$  auto-valores não nulos de  $A'_x$  são os auto-valores de  $A_x$  pois da proposição II.2.1 vê-se que não se pode ter  $A'_x v = \lambda v$ , com  $\lambda \neq 0$  e  $v \in \sum_x$ .

i.  $\iff$  iv : de fato, pois as expressões em coordenadas mostram  $A_x$  é a parte principal de  $D_x(X_f|F_x)$ , c.q.d.

Definição II.2.3 - Um ponto  $x \in V^P$  se diz  $\sum$ -hiperbólico se, e só se, estiver satisfeita uma (logo as quatro) das condições da Proposição II.2.2.

Proposição II.2.4 - (Caracterização do ponto singular  $\sum$ -hiperbólico em coordenadas). Um ponto  $x_0 \in V^P$  é um ponto singular  $\sum$ -hiperbólico de  $\text{grad}_{\sum} f$  se, e só se,  $(U; x_1, \dots, \dots, x_{m+p})$  um sistema local de coordenadas em torno de  $x_0$ , seja



máximo o posto da seguinte matriz

$$\begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1,m+p} \\ \hline A_{p1} & \dots & A_{p,m+p} \\ \hline \frac{\partial \beta_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \beta_1}{\partial x_{m+p}} \\ \hline \frac{\partial \beta_{m+p}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \beta_{m+p}}{\partial x_{m+p}} \end{pmatrix} x = x_0$$

de  $m+2p$  linhas e

$m + p$  colunas.

Demonstração : esta é a descrição, em coordenadas, da condição ii. da proposição II.2.2, c.q.d.

Seja  $f \in C^r(M, R)$  tal que todos os pontos singulares de seu  $\Sigma$ -gradiente sejam  $\Sigma$ -hiperbólicos e se  $V^p$  é a subvariedade constituída destes pontos, podemos enunciar as seguintes propriedades:

Propriedade II.2.5 -  $V^p$  é transversal às folhas.

Propriedade II.2.6 -  $V^p$  é conjunto normalmente hiperbólico relativamente ao fluxo de  $\text{grad}_{\Sigma} f$ . [4].

Propriedade II.2.7 - O número de auto-valores positivos e o número de auto-valores negativos, quando contados com suas multiplicidades, são constantes em cada compo

nente conexa de  $V^p$ .

Definição II.2.8 - Cada componente conexa de  $V^p$  se diz um elemento  $\Sigma$ -crítico de  $\text{grad}_\Sigma f$ . Um elemento  $\Sigma$ -crítico cujos pontos sejam todos  $\Sigma$ -hiperbólicos se diz um elemento  $\Sigma$ -hiperbólico.

Definição II.2.9 - Um elemento  $\Sigma$ -hiperbólico  $\alpha$  se diz do tipo  $(u,s)$  se, e só se para cada ponto de  $\alpha$  o número dos auto-valores positivos (contados com suas multiplicidades) é  $u$  e o número dos auto-valores negativos (contados com suas multiplicidades) é  $s$ : tem-se, então,  $u+s = m$ . Se  $\alpha$  é do tipo  $(0,m)$   $\alpha$  se diz um  $\Sigma$ -poço, se é do tipo  $(m,0)$  uma  $\Sigma$ -fonte e do tipo  $(u,s)$ , com  $1 \leq u \leq m-1$ , uma  $\Sigma$ -sela. É consequência imediata do que foi visto a seguinte proposição.

Proposição II.10 - Se  $\alpha$  é um elemento  $\Sigma$ -hiperbólico de  $\text{grad}_\Sigma f$ , então  $\alpha$  é uma subvariedade de  $M^{m+p}$ , compacta, conexa de dimensão  $p$  e  $\alpha$  é do tipo  $(u,s)$ , com  $u+s = m$ , se, e só se, para todo  $x \in \alpha$ ,  $x$  for ponto singular hiperbólico de  $\text{grad}(f|_{F_x})$  do tipo  $(u,s)$  em  $F_x$ .

### II. 3 - Subvariedades invariantes

Nas demonstrações do capítulo III, relativas à estabilidade estrutural, usaremos o fato de que um conjunto normalmente hiperbólico [4] admite variedades estável e instável.

Mais precisamente, sendo  $\alpha$  um elemento  $\Sigma$ -hiperbóli-

co de  $\text{grad}_\Sigma f$  do tipo  $(u,s)$ , chamamos de  $W^u(\alpha)$  (resp.  $W^s(\alpha)$ ), o conjunto dos pontos de  $M$  cujo  $\alpha$ -limite (resp.  $\omega$ -limite) esteja contido em  $\alpha$ . Este conjunto é uma variedade de dimensão  $u + p$  (resp.  $s+p$ ), diz-se variedade instável (resp. estável) de  $\alpha$  e coincide com a reunião das variedades instáveis  $W^u(x)$  (resp. estáveis  $W^s(x)$ ) em  $F_x$  dos pontos  $x \in \alpha$ .

As variedades instáveis  $W^u(x)$  (resp. estáveis  $W^s(x)$ ) dos pontos  $x \in \alpha$  constituem uma folheação de codimensão  $p$  de  $W^u(\alpha)$  (resp.  $W^s(\alpha)$ ). As variedades invariantes  $W^u(\alpha)$  e  $W^s(\alpha)$  são mergulhadas enquanto em partes compactas e variam continuamente em classe  $C^1$  com  $f$ , continuidade esta que é uniforme nas partes compactas.

No que segue, será de grande utilidade o conceito de "vizinhança tubular folheada" de J.W. Wood que transcrevemos agora de [8].

Definição II.3.1 - Sejam  $M$  variedade diferenciável folheada por uma folheação  $F$  e  $S \subset M$  subvariedade de  $M$  transversal às folhas de  $F$  em todo ponto. Uma vizinhança tubular folheada de  $S$  em  $M$  é uma vizinhança tubular  $(U,p)$  de  $S$  em  $M$  tal que:

$$p^{-1}(x) = \text{componente conexa a que } x \text{ pertence de } F_x \cap U$$

A Proposição 3.1 de [8] garante a existência de vizinhanças tubulares folheadas. Se  $M$  tem métrica e  $S$  é compacta é possível -

tomar  $\epsilon > 0$  conveniente tal que  $U = \{x \in M \mid d(x, S) < \epsilon\}$ .

Definição II.3.2 - Seja  $\alpha$  um elemento  $\Sigma$ -hiperbólico de  $\text{grad}_\Sigma f$  do tipo  $(u, s)$  e consideremos sua variedade instável  $W^u(\alpha)$  folheada pelas variedades instáveis  $W^u(x)$ , quando  $x \in \alpha$ . Sendo  $\alpha$  compacta e transversal às folhas de  $W^u(\alpha)$ , se  $u \geq 1$ , podemos tomar uma vizinhança tubular folheada  $\Omega$  de  $\alpha$  em  $W^u(\alpha)$ . Em  $\Omega$ , consideramos uma outra vizinhança tubular de  $\alpha$  em  $W^u(\alpha)$ ,  $\Omega_1 \subset \bar{\Omega}_1 \subset \Omega$ , cujo bordo seja transversal ao campo. Chamamos este bordo de domínio fundamental (instável) de  $W^u(\alpha)$ , denotando-o por  $D^u(\alpha)$ .

Analogamente, se  $s \geq 1$ , definimos o domínio fundamental (estável) de  $W^s(\alpha)$  denotado por  $D^s(\alpha)$ .

Verifica-se de modo natural a seguinte proposição:

Proposição II.3.3 - Sendo  $u \geq 1$ , um domínio fundamental (instável)  $D^u(\alpha)$  é uma subvariedade compacta de dimensão  $u + p - 1$  e fica definida uma função de classe  $C^{r-1}$

$$t_\alpha^u : W^u(\alpha) - \alpha \rightarrow \mathbb{R}$$

tal que sendo  $\phi_t$  o fluxo de  $\text{grad}_\Sigma f$  e  $x \in W^u(\alpha) - \alpha$ , então

$$\phi_{t_\alpha^u(x)}(x) \in D^u(\alpha).$$

Analogamente, se  $s \geq 1$  e  $D^s(\alpha)$  um domínio fundamental (estável), fica definida a função de classe  $C^{r-1}$

$$t_\alpha^s : W^s(\alpha) - \alpha \rightarrow \mathbb{R}$$

tal que  $\phi_{-t_{\alpha}^s(x)}(x) \in D^s(\alpha), \forall x \in W^s(\alpha) - \alpha$ .

Definição II.3.4 - Sejam  $\alpha$  um elemento  $\lambda$ -hiperbólico de  $\text{grad}_{\Sigma} f$  do tipo  $(u,s)$ , com  $u \geq 1$  e  $D^u = D^u(\alpha)$  um domínio fundamental instável. Chamamos de seção transversal ao campo por  $D^u$  uma subvariedade  $S^u$  tal que:

- i)  $S^u$  é uma subvariedade de  $M$ , relativamente compacta, transversal ao campo e de dimensão  $m + p - 1$ ;
- ii)  $(S^u, D^u, \rho, B^s)$ , onde  $\rho: S^u \rightarrow D^u$ , é um fibrado tal que  $\rho^{-1}(x) \subset F_x, \forall x \in D^u$  e a fibra tipo é a bola  $B^s \subset \mathbb{R}^s$ .

Evidentemente, se  $u = m$ , teremos  $S^u = D^u$  e  $\rho =$  identidade.

Da mesma forma, define-se seção transversal ao campo por  $D^s$ , quando  $s \geq 1$ .

Usaremos o  $\lambda$ - lema [ 6 ] na forma como está anunciando nos dois últimos tópicos da seguinte proposição:

Proposição II.3.5 - Sendo  $\alpha$  um elemento  $\lambda$ -hiperbólico de  $\text{grad}_{\Sigma} f$ , do tipo  $(u,s)$  com  $u \geq 1$ , variedade instável  $W^u = W^u(\alpha) \subseteq D^u = D^u(\alpha)$  um domínio fundamental instável, valem as seguintes propriedades:

- i) existe uma seção transversal  $S^u$  por  $D^u$ ;

ii) sendo  $\phi_t$  o fluxo definido por  $\text{grad}_\Sigma f \in S^u$  uma seção transversal por  $D^u$ , então  $\phi_{-t}(S^u)$  converge, em classe  $C^1$  a  $W^u(\alpha)$  para  $t \rightarrow +\infty$  e esta convergência é uniforme em partes compactas;

iii) nas condições de ii,

$$\left( \bigcup_{t > 0} \phi_{-t}(S^u) \right) \cup W^u$$

é uma vizinhança de  $W^u$ .

Definição II.3.6 - Se  $f \in C^r(M, \mathbb{R})$  é tal que todos os pontos singulares de  $X_f = \text{grad}_\Sigma f$  sejam  $\Sigma$ -hiperbólicos, então diz-se que  $X_f$  é um campo  $\Sigma$ -hiperbólico. Chamaremos de  $H^r \subset C^r(M, \mathbb{R})$  o conjunto destas funções.

#### II.4 $\Omega$ - estabilidade dos $\Sigma$ - gradientes $\Sigma$ -hiperbólicos

Neste parágrafo, demonstramos a proposição que diz: se  $f \in H^r$ , seu  $\Sigma$ - gradiente é um campo  $\Omega$ - estável por pequenas perturbações de  $f$ .

Proposição II 4.1 - Se  $f \in H^r$ , existe  $\epsilon > 0$  tal que: se  $g \in C^r(M, \mathbb{R})$  com  $\|g-f\|^r < \epsilon$  e se  $\Omega_\Sigma(f)$  e  $\Omega_\Sigma(g)$  são os conjuntos dos pontos não errantes (I.2.2), respectivamente, de  $\text{grad}_\Sigma f$  e  $\text{grad}_\Sigma g$ , então existe um homeomorfismo

$$h : \Omega_\Sigma(f) \rightarrow \Omega_\Sigma(g)$$

tal que: se  $\alpha(f) \in \Omega_{\Sigma}(f)$  é um elemento  $\Sigma$  - hiperbólico de  $\text{grad}_{\Sigma} f$  do tipo  $(u,s)$  (v. II.2.9), então sua imagem  $\alpha'(g) = h[\alpha(f)]$  é um elemento  $\Sigma$  - hiperbólico de  $\text{grad}_{\Sigma} g$  e do mesmo tipo  $(u,s)$ .

Demonstração - Dada  $f \in H^r$ , sabemos, por I.2.2 que  $\Omega_{\Sigma}(f) = V^p(f)$  = variedade dos pontos singulares. Seja  $d > 0$  o mínimo dos valores absolutos dos auto-valores do operador  $A_x$  (II.2.2) quando  $x \in V^p(f)$ . É possível tomar uma vizinhança - tubular folheada (II.3.1)  $(U, \pi)$  de  $V^p(f)$  em  $M^{m+p}$  e  $\epsilon > 0$  tal que, se  $g \in C^r(M, R)$  e  $\|g - f\|^r < \epsilon$ , então

i)  $V^p(g) \subset U$  variando continuamente em classe  $C^1$  com  $g$  (I.5.1)

ii) os auto-valores do operador  $A_y(g)$  definido pelo  $\text{grad}_{\Sigma} g$ , quando  $y \in V^p(g)$  diferem menos que  $\frac{d}{2}$  dos auto-valores de  $A_x(f)$ , logo são não nulos.

Assim sendo, temos, pela proposição II.2.5 que  $V^p(g)$  também é transversal às folhas. Definimos  $h$  da seguinte forma: se  $x \in V^p(f)$ ,  $h(x) = y$ , onde  $\{y\} = V^p(g) \cap \pi^{-1}(x)$ . Que  $h$  é um homeomorfismo decorre da transversalidade de  $V^p(g)$  como se pode ver ao considerar seu aspecto local. A inversa de  $h$  é dada pela restrição da projeção  $\pi$  a  $V^p(g)$ . A conservação do tipo de cada elemento  $\Sigma$  - crítico é consequência imediata da construção de  $h$ .

Observação II.4.2 - No caso de se ter  $r \geq 3$ , a demonstração da proposição anterior é dada imediatamente - pela isotopia entre  $V^p(f)$  e  $V^p(g)$  como foi visto em I.5.3 .



## CAPÍTULO III - ESTABILIDADE ESTRUTURAL

III.1 Introdução

Neste capítulo, estudamos uma classe de  $\Sigma$ -gradientes que são estruturalmente estáveis por pequenas perturbações da função em  $C^r(M, R)$ . Imitamos aqui a técnica de Palis-Smale usada na demonstração da estabilidade de Sistemas Dinâmicos de Morse-Smale, [5], [6], conforme exposição de G.L. Reis, P. Mendes e W.C. Melo em [7].

Continuamos, durante todo o capítulo, supondo que  $\Sigma$  seja uma distribuição integrável tangente à folheação  $F$  cujas folhas sejam todas compactas.

Demonstra-se, sem dificuldade, a seguinte proposição:

Proposição III.1.1 - Se  $f \in H^r$ , isto é, os elementos  $\Sigma$ -críticos de  $\text{grad}_\Sigma f$  são todos  $\Sigma$ -hiperbólicos e se  $x \in M$ , temos:

- i)  $V^p \cap F_x$  é constituída de um número finito ( $>0$ ) de pontos, onde  $V^p$  é a variedade dos pontos singulares de  $\text{grad}_\Sigma f$  e  $F_x$  a folha por  $x$ ;
- ii) os conjuntos  $\alpha$ - e  $\omega$ -limite de  $x$  estão contidos em  $F_x$ ;
- iii) conforme as notações introduzidas em II.3 e se

$\alpha_1, \dots, \alpha_k$  são todos os elementos  $\Sigma$ -críticos de  $\text{grad}_\Sigma f$ , então:

$$M = \bigcup_{i=1}^k W^u(\alpha_i) = \bigcup_{i=1}^k W^s(\alpha_i),$$

havendo, pelo menos, uma  $\Sigma$ - fonte e um  $\Sigma$ - poço.

A classe dos  $\Sigma$ - gradientes que vamos estudar é aquela dos campos que satisfazem ainda a uma condição sobre a posição relativa das variedades estáveis e instáveis dos elementos  $\Sigma$ -críticos e as folhas. Passamos a descrever esta condição.

Definição III.1.2 - Sendo  $M$  variedade diferenciável, três sub-variedades  $S_1, S_2, S_3$  de  $M$  se dizem em posição geral se estiverem satisfeitas as seguintes condições:

- i)  $S_i$  e  $S_j$  são transversais sempre que  $i \neq j$ ,  
 $1 \leq i, j \leq 3$ ;
- ii)  $S_i \cap S_k$  e  $S_j$  transversais, sempre que  $i, j, k$  são dois a dois distintos,  $1 \leq i, j, k \leq 3$ .

É de verificação imediata a seguinte propriedade:

Propriedade III.1.3 - Se  $S_1, S_2, S_3 \subset M$  estão em posição geral, então  $S_i \cap S_j$  e  $S_i \cap S_k$  são transversais em  $S_i$ , sempre que  $i, j, k$  são dois a dois distintos,  $1 \leq i, j, k \leq 3$ .

Definição III.1.4 - Uma função  $f \in C^r(M, \mathbb{R})$  pertence à classe  $S^r$  se, e só se, estiverem satisfeitas as seguintes condições:

- i)  $f \in H^r$  (isto é, os elementos  $\Sigma$ -críticos de  $\text{grad}_\Sigma f$  são todos  $\Sigma$ -hiperbólicos);
- ii) se  $\alpha_1, \alpha_2$  são elementos  $\Sigma$ -críticos de  $\text{grad}_\Sigma f$ , então  $W^s(\alpha_1), W^u(\alpha_2)$  e  $F$  estão em posição geral (III.1.2), qualquer que seja a folha  $F \subset M$ .

Com III.1.3, verifica-se imediatamente a seguinte propriedade:

Proposição III.1.5 -  $f \in S^r \iff$  em cada folha  $F$  da folheação  $\mathcal{F}$  dada por  $\Sigma$ , a restrição de  $\text{grad}_\Sigma f$  for um campo gradiente de Morse - Smale.

Nosso escopo neste capítulo é mostrar que se  $f \in S^r$ , seu  $\Sigma$ -gradiente é estruturalmente estável por perturbações de  $f$ . Para isto, passaremos a construir as famílias tubulares para este tipo de campo.

### III.2 Diagrama de fase para os $\Sigma$ -gradientes

Definição III.2.1 - Se  $f \in S^r$ , vamos chamar de diagrama de fase para  $f$ , o conjunto dos elementos  $\Sigma$ -críticos  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  de  $\text{grad}_\Sigma f$ , munido da ordem parcial abaixo definida.

Definição III.2.2 -  $\alpha_i \leq \alpha_j \iff W^S(\alpha_i) \cap W^U(\alpha_j) \neq \emptyset$ ,

$$1 \leq i, j \leq k.$$

Neste parágrafo, mostraremos que a relação definida em III.2.2 é, efetivamente, uma relação de ordem parcial.

Proposição III.2.3 - Sendo  $\alpha$  um elemento  $\Sigma$ -crítico qualquer de  $\text{grad}_\Sigma f$ , com  $f \in S^r$ , as aplicações abaixo definidas são sobrejetoras, de classe  $C^{r-1}$  e posto máximo:

$$p^u(\alpha) : W^u(\alpha) \rightarrow \alpha$$

se  $x \in W^u(\alpha)$ , e  $\{y\} = \alpha\text{-lim } x$ , então  $p^u(\alpha)(x) = y$  e

$p^s(\alpha) : W^s(\alpha) \rightarrow \alpha$  é tal que, se  $x \in W^s(\alpha)$  e  $\{y\} = \omega\text{-lim } x$ , então  $p^s(\alpha)(x) = y$ .

Demonstração: Começemos por  $p^u(\alpha)$ : se  $u=0$ , temos  $W^u(\alpha) = \alpha$

$p^u(\alpha)$  é a identidade, sendo obviamente satisfeitas as propriedades enunciadas. Se  $u \geq 1$ , seja  $D^u(\alpha)$  um domínio fundamental (II.3) de  $W^u(\alpha)$ . Então, em  $W^u(\alpha) - \alpha$ , a aplicação  $p^u(\alpha)$  é obtida pela composição do fluxo com a restrição a  $D^u(\alpha)$  da projeção da vizinhança tubular folheada. Enquanto na vizinhança tubular folheada,  $p^u(\alpha)$  coincide com a projeção estando, portanto satisfeitas as condições enunciadas. O caso de  $p^s(\alpha)$  é análogo.

Proposição III.2.4 - Se  $\alpha_1, \alpha_2$  são elementos  $\Sigma$ -críticos de  $f \in S^r$  tais que  $W^S(\alpha_1) \cap W^U(\alpha_2) \neq \emptyset$ , então a restrição de  $p^S(\alpha_1)$  ou de  $p^U(\alpha_2)$  a cada componente conexa de  $W^S(\alpha_1) \cap W^U(\alpha_2)$  é ainda sobrejetora.

Demonstração: Se  $s(\alpha_1)$  ou  $u(\alpha_2) = 0$ , a interseção acima se reduz a  $\alpha_1$  ou  $\alpha_2$ , respectivamente, e a proposição é trivialmente satisfeita. Caso contrário, verifica-se que a imagem de cada componente conexa de  $W^S(\alpha_1) \cap W^U(\alpha_2)$  por  $p^S(\alpha_1)$  (resp. por  $p^U(\alpha_2)$ ) é um aberto e fechado de  $\alpha_1$  (resp. de  $\alpha_2$ ), pois  $W^S(\alpha_1) \cap W^U(\alpha_2)$  deve ser transversal a cada folha (III.1.4, ii e III.1.2), sendo não vazio deve, portanto coincidir com  $\alpha_1$  (resp.  $\alpha_2$ ).

Proposição III.2.5 - Nas condições da proposição anterior, ou  $W^S(\alpha_1) \cap W^U(\alpha_2)$  tem somente pontos singulares e, então  $\alpha_1 = \alpha_2$ , ou somente pontos regulares e, então,  $u(\alpha_1) < u(\alpha_2)$ .

Demonstração: Com efeito, sendo ambas  $W^S(\alpha_1)$  e  $W^U(\alpha_2)$  invariantes pelo fluxo, se  $x \in W^S(\alpha_1) \cap W^U(\alpha_2)$ , toda sua órbita estará também aí. Logo, se  $x$  é regular,

$\dim[W^S(\alpha_1) \cap W^U(\alpha_2) \cap F_x] \geq 1$ , donde  $u(\alpha_1) \leq u(\alpha_2) - 1$  (levando em conta a transversalidade). Isto mostra que  $\alpha_1 \neq \alpha_2$  e então  $W^S(\alpha_1) \cap W^U(\alpha_2)$  só contém pontos regulares. Assim sendo, se  $W^S(\alpha_1) \cap W^U(\alpha_2)$  contiver algum ponto singular só conterá pontos singulares e  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha = W^S(\alpha) \cap W^U(\alpha)$ , c.q.d.

Proposição III.2.6 - A relação definida em III.2.2 é de ordem parcial.

Demonstração: A propriedade reflexiva é imediata. A propriedade de antissimétrica é consequência da proposição III.2.5. A propriedade transitiva é consequência de propriedade análoga para os gradientes de Morse - Smale, aplicada a uma folha que encontre os elementos  $\Sigma$ -críticos em questão, usando-se aqui a proposição III.2.4, para considerar esta folha. Estando demonstrada esta proposição, podemos traduzir para os  $\Sigma$ -gradientes, os conceitos de "cadeia de" e "ordem entre" elementos  $\Sigma$ -críticos, que passamos a definir:

Definição III.2.7 : Uma cadeia de elementos  $\Sigma$ -críticos é uma seqüência  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_j$  de elementos  $\Sigma$ -críticos de  $\text{grad}_{\Sigma} f$  tais que  $\alpha_{i-1} < \alpha_i$ ,  $1 \leq i \leq j$ . Diz-se que esta é uma cadeia que liga  $\alpha_0$  a  $\alpha_j$ .

Definição III.2.8 - O número inteiro  $j$  diz-se o comprimento da cadeia de elementos  $\Sigma$ -críticos

$\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_j$ .

Definição III.2.9: Se  $\alpha_1 < \alpha_2$  são dois elementos  $\Sigma$ -críticos, a ordem de  $\alpha_1$  em relação a  $\alpha_2$  é o número inteiro  $n$  obtido como o máximo dentre os comprimentos das cadeias que ligam  $\alpha_1$  a  $\alpha_2$ . Indica-se também  $n = \alpha_2 / \alpha_1$  e, por convenção, estabelece-se  $\alpha/\alpha = 0$ .

São imediatas, da proposição III.2.5, as seguintes propriedades:

Propriedade III.2.10 - O índice  $u$  de instabilidade é uma função estritamente crescente ao longo de uma cadeia.

Propriedade III.2.11 - Numa dada cadeia, um elemento  $\Sigma$ -crítico pode aparecer uma vez, no máximo.

A seguir, veremos que a ordem entre dois elementos  $\Sigma$ -críticos  $\alpha_1, \alpha_2$  está ligada ao aspecto da subvariedade  $W^S(\alpha_1) \cap W^u(\alpha_2)$ .

Definição III.2.12 - Sendo  $\alpha$  um elemento  $\Sigma$ -crítico com variedade instável  $W^u(\alpha)$ , definimos como bordo topológico  $\partial W^u(\alpha)$  a reunião dos bordos topológicos das variedades instáveis de cada um de seus pontos, como pontos singulares do campo restrito à cada folha, isto é (v. II.3)

$$\partial W^u(\alpha) = \bigcup_{x \in \alpha} \partial W^u(x)$$

Definição III.2.13 - O fecho topológico de  $W^u(\alpha)$  será o conjunto denotado e definido como segue:

$$\overline{W^u(\alpha)} = W^u(\alpha) \cup \partial W^u(\alpha).$$

Analogamente, se definem  $\partial W^S(\alpha)$  e  $\overline{W^S(\alpha)}$ .

Podemos, então, demonstrar as seguintes proposições:

Proposição III.2.14 - Se  $f \in S^r$  e  $\alpha$  e  $\beta$  são elementos  $\Sigma$ -críticos de  $\text{grad}_{\Sigma} f$  tais que  $W^u(\alpha) \cap \partial W^u(\beta) \neq \emptyset$ ,

então existe uma cadeia de elementos  $\Sigma$ -críticos ligando  $\alpha$  a  $\beta$ .

Demonstração: Aplicação de resultado análogo para elementos hiperbólicos aplicado a uma folha  $F_x$ , com  $x \in W^u(\alpha) \cap \partial W^u(\beta)$ .

Como consequência, temos a proposição seguinte:

Proposição III.2.15 - Se  $\alpha_1 \leq \alpha_2$  são elementos  $\Sigma$ -críticos de  $\text{grad}_\Sigma f$ , com  $f \in S^r$ , temos:

$$\alpha_1 \leq \alpha_2 \iff W^u(\alpha_1) \cap \overline{W^u(\alpha_2)} \neq \emptyset.$$

Uma primeira consequência dos fatos acima é a seguinte:

Proposição III.2.16 - Quando  $f \in S^r$ , as variedades instáveis e estáveis dos elementos  $\Sigma$ -críticos de  $\text{grad}_\Sigma f$  são mergulhadas.

Demonstração: Sai do fato destas variedades terem mergulhadas suas partes compactas e que, ainda  $W^u \cap \partial W^u = \emptyset$  (resp.  $W^s \cap \partial W^s = \emptyset$ ).

A importância da ordem relativa de dois elementos  $\Sigma$ -críticos está, afinal, demonstrada na última proposição deste parágrafo, a seguir:

Proposição III.2.17 - Se  $\alpha_0, \alpha_1$  são elementos  $\Sigma$ -críticos tais  $\alpha_1 / \alpha_0 = 1$  e se  $S^u(\alpha_1)$  é uma seção transversal por um domínio fundamental  $D^u(\alpha_1)$  de  $W^u(\alpha_1)$ , então tem-se,

$$\partial W^s(\alpha_0) \cap S^u(\alpha_1) = \emptyset$$



Demonstração: faz-se por redução ao absurdo, tomando-se  $x$  em  $\partial W^S(\alpha_0) \cap S^u(\alpha_1)$  e construindo, com base no que aconteceria em  $F_x$ , uma cadeia de comprimento  $\geq 2$  ligando  $\alpha_0$  a  $\alpha_1$ .

### III.3 $\Sigma$ - família tubular

Continuando no escopo de aplicar a técnica usada - por Palis-Smale, definiremos as  $\Sigma$ -famílias tubulares, apresentando antes o que chamamos de fibrações admissíveis.

Definição III.3.1 - Sejam, portanto,  $f \in S^F$ ,  $\alpha$  elemento  $\Sigma$ -crítico de  $\text{grad}_\Sigma f$  que não seja um  $\Sigma$ -poço, isto é, com  $u(\alpha) \geq 1$ . Diz-se que a família de subvariedades  $\{\pi^{-1}(x)\}_{x \in D^u(\alpha)}$  é uma fibração admissível relativamente a  $W^S(\alpha)$  se, e só se, estiverem satisfeitas as seguintes condições:

- a.  $D^u(\alpha)$  é um domínio fundamental de  $W^u(\alpha)$ ;
- b.  $\bigcup_{x \in D^u} \pi^{-1}(x) = S^u =$  seção transversal por  $D^u$ ;
- c. as  $\pi^{-1}(x)$  são subvariedades disjuntas e, para cada  $x \in D^u$ ,  $\pi^{-1}(x)$  é um disco de dimensão  $s$ , mergulhado na folha  $F_x$ , cuja interseção com  $W^u(\alpha)$  se faz, transversalmente, no único ponto  $x$ ;
- d. são contínuas as seguintes aplicações:
  - 1a.)  $\pi : S^u \rightarrow D^u$ , que a cada  $y \in \pi^{-1}(x)$  faz corresponder o ponto  $x$  e

- 2a.)  $S^u \rightarrow$  grasmanniana de  $S^u$ , que a cada  $y \in \pi^{-1}(x)$  faz corresponder o subespaço tangente:  $T_y(\pi^{-1}(x))$ .

Definimos, agora a  $\Sigma$ -família tubular:

Definição III.3.2 - Sendo  $f \in S^r$  e  $\alpha$  um elemento  $\Sigma$ -crítico qualquer de  $\text{grad}_\Sigma f$ , dizemos que  $\tau = \tau^S(\alpha)$  é uma  $\Sigma$ -família tubular de  $W^S(\alpha)$ , onde  $\tau = \{\tau_x\}_{x \in N^u}$  satisfaz:

- $N^u = N^u(\alpha)$  é uma vizinhança tubular folheada (II.3.1) de  $\alpha$  em  $W^u(\alpha)$ ;
- se  $x \in \alpha$ ,  $\tau_x =$  componente conexa de  $W^S(\alpha) \cap F_x$  a que  $x$  pertence ( $=W^S(x)$ );
- se  $x \in N^u(\alpha) - \alpha$  e, então,  $\alpha$  não é um  $\Sigma$ -poço,  $\tau_x = \phi_{-t} \left[ \pi_{\phi_t}^{-1} \right]$ , onde  $t = t_\alpha^u(x)$  é tal que  $\phi_t(x) \in D^u$  (como em II.3.3) e  $\{\pi^{-1}(y)\}_{y \in D^u}$  é uma fibração admissível (III.3.1) relativamente a  $W^S(\alpha)$ . Aqui  $\phi_t$  denota o fluxo determinado por  $\text{grad}_\Sigma f$ .

Proposição III.3.3 - Se  $\tau = \tau^S(\alpha)$  é uma  $\Sigma$ -família tubular de  $W^S(\alpha)$ , estão satisfeitas as seguintes propriedades:

- para cada  $x \in N^u$ , tem-se que  $\tau_x$  é uma subvariedade da folha  $F_x$ ;
- $\tau_x$  encontra  $W^S(\alpha)$  no único ponto  $x$  e o faz transversalmente na folha  $F_x$ ;
- $V = \bigcup_{x \in N^u} \tau_x$  é uma vizinhança tubular folheada de  $W^S(\alpha)$  em  $M^{m+p}$ ;
- São contínuas as seguintes aplicações:
  - $V \rightarrow N^u$ , que a cada  $y \in \tau_x$  faz corresponder  $x \in N^u$  e
  - $V \rightarrow$  grasmanniana de  $V$ , que a cada  $y \in \tau_x$  faz corresponder o subespaço tangente  $T_y(\tau_x)$ ;
  - $\phi_{-t}(\tau_x) = \tau_{\phi_t(x)}$ ; para qualquer  $t \geq 0$ .

Deixamos de expor os detalhes destas provas que usam, além das definições, o  $\lambda$ -lema como foi exposto em II.3.5 (ii e iii).

Definição III.3.4 - Um sistema de  $\Sigma$ -famílias tubulares relativas às variedades estáveis para  $f$  é um conjunto de  $\Sigma$ -famílias tubulares

$$\tau^{ks} = \left\{ \tau^s(\alpha_k) \right\}_{1 \leq k \leq n}, \text{ onde } \alpha_1, \dots, \alpha_n \text{ são}$$

os elementos  $\Sigma$ -críticos de  $\text{grad}_\Sigma f$  e  $\tau^s(\alpha_k)$  a  $\Sigma$ -família tubular relativa a  $W^s(\alpha_k)$ . Um tal sistema se diz compatível se, e só se

$$\tau_x^i \cap \tau_y^j \neq \emptyset \implies \begin{cases} \tau_x^i \subset \tau_y^j \\ \text{ou} \\ \tau_y^j \subset \tau_x^i \end{cases}$$

De maneira análoga, define-se um sistema de  $\Sigma$ -famílias tubulares relativas às variedades instáveis para  $f$ .

Estamos em condições de demonstrar um Teorema da  $\Sigma$ -família tubular para  $\Sigma$ -gradientes. Este é o teorema central deste capítulo e depois dele a técnica de Palis-Smale aplica-se para demonstrar a estabilidade estrutural quase que literalmente.

Teorema III.3.5 - (da  $\Sigma$ -família tubular). Sendo  $f \in \mathcal{S}^r$  existe  $\epsilon > 0$  tal que: se  $g \in C^r(M, R)$  é tal que  $\|g-f\|^r < \epsilon$ , então  $g$  admite um sistema de  $\Sigma$ -famílias tubulares  $\tau_g^{k,s}$  compatível e de forma que a seguinte aplicação:

$$\bigcup_{x \in N^u[\alpha_k(f)]} \tau_x^k(f) \longrightarrow W^u[\alpha_k(g)]$$

que a cada  $y \in \tau_x^k(f)$  faz corresponder o único ponto de  $\tau_x^k(f) \cap W^u[\alpha_k(g)]$ ,

é uma aplicação de classe  $C^{r-1}$  em cada  $\tau_x^i(f) \subset \tau_x^k(f)$ . Além disto, para um mesmo  $k$ , as subvariedades  $\tau_x^k(g)$  variam continuamente, em classe  $C^1$ , com  $g$  e esta variação é uniforme enquanto em partes compactas.

Demonstração: na qual seguimos o esquema do Teorema da família tubular para Sistemas Dinâmicos ou Difeomorfismos dividindo-o em duas etapas. A: em que se constrói, por indução sobre as diversas cadeias do diagrama de fase, um sistema de  $\Sigma$ -famílias tubulares para  $f$ ; B: em que se estende o processo de indução a uma vizinhança de  $f$  em  $C^r(M, R)$ .

Etapa A: construção, por indução, de um sistema compatível de  $\Sigma$ -famílias tubulares para  $f$  - para os  $\Sigma$ -poços de  $\text{grad}_\Sigma f$ , a  $\Sigma$ -família tubular é construída de modo único. Consideramos o diagrama de fase e procedemos por indução sobre a ordem dos elementos  $\Sigma$ -críticos em relação aos  $\Sigma$ -poços. Sendo  $k \geq 1$  inteiro, suponhamos já construídas as  $\Sigma$ -famílias tubulares para todos os elementos  $\Sigma$ -críticos em relação aos quais os  $\Sigma$ -poços tenham ordem  $\leq k-1$  e que já estejam satisfeitas as condições de compatibilidade exigidas no Teorema. Tomamos, a seguir, no diagrama de fase, uma  $\Sigma$ -sela  $\alpha_k$  imediatamente anterior a estas para as quais estejam construídas as  $\Sigma$ -famílias tubulares. Começamos por construir uma fibração admissível relativa a  $W^S(\alpha_k)$ . Tomamos uma vizinhança folheada  $\Omega_k$  de  $\alpha_k$  (em  $M^{m+p}$ ) que não encontre nenhuma das vizinhanças  $N^u(\alpha_j)$  que servem de conjuntos de índices para as  $\Sigma$ -famílias já construídas — eventualmente, tenhamos que diminuir algumas das  $N^u(\alpha_j)$  neste passo. Em  $\Omega_k$ , consideremos um domínio fundamental  $D^u = D^u(\alpha_k)$  e por  $D^u$  uma seção  $S^u = S^u(\alpha_k)$  também contida

em  $\Omega_k$ . Seja  $\alpha_k$  um elemento  $\lambda$ -crítico tal que  $\alpha_k/\alpha_{k-1} = \lambda$ . Então, por III.2.17, temos  $\partial W^S(\alpha_{k-1}) \cap S^u(\alpha_k) = \emptyset$ . Isto é,  $W^S(\alpha_{k-1})$  "não se acumula em  $S^u$ ". Se definirmos, para cada  $x \in W^S(\alpha_{k-1}) \cap S^u(\alpha_k)$ :

$$L_x = \tau_x^{k-1} \cap S^u(\alpha_k) \quad (\text{III.1})$$

temos que:

$$L_x = [\text{componente conexa de } x \text{ em } W^S(\alpha_{k-1}) \cap F_x] \cap S^u(\alpha_k) \quad (\text{III.2})$$

donde concluímos que

$$L_x \text{ é subvariedade de } M^{m+p}, \text{ contida em } F_x \quad (\text{III.3})$$

(subvariedade porque  $\tau_x^{k-1}$ , sendo invariante pelo fluxo, é transversal a  $S^u$ );

$$\dim L_x = \dim \tau_x^{k-1} + \dim S^u(\alpha_k) - \dim M \quad (\text{III.4})$$

Ora, por ii, em III.3.3, temos que

$$\begin{aligned} \dim \tau_x^{k-1} &= \dim F_x - \dim [W^u(\alpha_{k-1}) \cap F_x] = \\ &= m - u(\alpha_{k-1}) \end{aligned} \quad (\text{III.5})$$

E, de (III.4) e (III.5), tiramos

$$\dim L_x = s(\alpha_{k-1}) - 1 \quad (\text{III.6})$$

De (III.6) concluímos então que a dimensão de  $L_x$  independe do particular  $x \in W^S(\alpha_{k-1}) \cap S^u(\alpha_k)$  e que vale a seguinte desigualdade

$$\dim L_x \geq s(\alpha_k), \quad \forall x \in W^S(\alpha_{k-1}) \cap S^u(\alpha_k) \quad (\text{III.7})$$

Sendo assim, se considerarmos a vizinhança de  $W^S(\alpha_{k-1})$ , dada por

$$V_{k-1} = \bigcup_{y \in N^u(\alpha_{k-1})} \tau_y^{k-1} \quad (\text{III.8})$$

onde  $\tau^{k-1}$  é a  $\Sigma$ -família tubular relativa a  $W^S(\alpha_{k-1})$ , e se definimos

$$L_y = \tau_y^{k-1} \cap S^u(\alpha_k) \text{ para } y \in V_{k-1} \cap S^u(\alpha_k) \quad (\text{III.9})$$

podemos impor — eventualmente diminuindo a vizinhança  $N^u(\alpha_{k-1})$  de índices — que:

- i.  $L_y$  seja subvariedade de  $F_y$
  - ii.  $\dim L_y = s(\alpha_{k-1}) - 1 \geq s(\alpha_k)$ .
- (III.10)

Para estas verificações, convém lembrar que, de início, tomamos  $S^u$  contida numa vizinhança tubular folheada  $\Omega_k$  de  $\alpha_k$  e que a interseção de cada folha com esta vizinhança é um número finito de bolas todas difeomorfas.

Vejamos, agora, o que as subvariedades  $L_y$  determinam no domínio fundamental  $D^u(\alpha_k)$ :

consideramos, de início, o caso em que  $x \in W^S(\alpha_{k-1}) \cap D^u(cW^S(\alpha_{k-1}) \cap S^u)$  e vejamos como é a interseção  $L_x \cap D^u$ . Afirmamos o seguinte:

- i.  $L_x \cap D^u$  é subvariedade de  $F_x$ ;
  - ii.  $\dim(L_x \cap D^u) = \dim L_x - s(\alpha_k) \geq 0$
- }  $\forall x \in W^S(\alpha_{k-1}) \cap D^u \quad (\text{III.11})$

As afirmações em (III.11) são conseqüência da transversalidade em  $F_x$  das subvariedades  $D^u \cap F_x$  e  $W^S(\alpha_{k-1}) \cap F_x$  (cada componente conexa desta) e esta transversalidade é conseqüência da posição geral de  $W^S(\alpha_{k-1})$ ,  $W^u(\alpha_k)$  e  $F_x$  e do fato de cada componente conexa de  $W^S(\alpha_{k-1}) \cap F_x$  ser invariante pelo fluxo enquanto  $D^u$  é transversal ao

fluxo.

Estando verificadas as condições (III.11) para pontos de  $W^S(\alpha_{k-1})$  e dada a variação  $C^1$ -contínua das subvariedades  $\tau_x^{k-1}$  (parte iv da proposição III.3.3), é possível tomar  $N^u(\alpha_{k-1})$  suficientemente pequena de modo que as transversalidades em questão <sup>se</sup> mantenham (mais de uma vez consideramos as folhas como discos em  $\Omega_k$ ) quando se fizer  $y$  percorrer  $V_{k-1} \cap D^u$  (III.8). Assim, podemos reescrever as propriedades acima para estes pontos, isto é:

$$\left. \begin{array}{l} \text{i. } L_y \cap D^u \text{ é subvariedade} \\ \text{ii. } \dim(L_y \cap D^u) = s(\alpha_{k-1}) - s(\alpha_k) - 1 \geq 0 \end{array} \right\} \forall y \in V_{k-1} \cap D^u \quad (\text{III.12})$$

Para prosseguir, consideremos dois casos: aquele em que  $\dim(L_y \cap D^u) = 0$  e aquele em que  $\dim(L_y \cap D^u) > 0$ . Se  $\dim(L_y \cap D^u) = 0$ , então  $\dim L_y = s(\alpha_k)$  e isto significa que  $L_y$  tem a dimensão apropriada para participar de uma fibração admissível. Tomamos, então, em  $S^u(\alpha_k) \cap V_{k-1}$  estas  $L_y$  como fibras admissíveis, definindo a projeção  $\pi$  da seguinte forma: se  $x \in S^u(\alpha_k) \cap V_{k-1}$ ,

$$\pi(x) = z, \text{ onde } \{z\} = L_y \cap D^u \text{ e } x \in L_y \quad (\text{III.13})$$

Se  $\dim(L_y \cap D^u) > 0$ , temos ainda que "fibrar" estas subvariedades e, para isto, lançamos mão, novamente, das vizinhanças tubulares folheadas. Como, em  $W^S(\alpha_{k-1}) \cap S^u$ , a subvariedade  $W^S(\alpha_{k-1}) \cap D^u$  é transversal às folhas, podemos considerar uma vizinhança tubular folheada  $(B_1, p_1)$  de  $W^S(\alpha_{k-1}) \cap D^u$  em  $W^S(\alpha_{k-1}) \cap S^u$ .

Temos então, definida a projeção  $p_1: B_1 \rightarrow W^S(\alpha_{k-1}) \cap D^u$ , cujas fibras  $p_1^{-1}(x)$  satisfazem às seguintes propriedades:

- i.  $p_1^{-1}(x) \subset F_x$  (porque a projeção é coerente com a folheação, v.II.3.1),
- ii.  $\dim p_1^{-1}(x) = \dim[W^S(\alpha_{k-1}) \cap S^u] - \dim[W^S(\alpha_{k-1}) \cap D^u] =$  (III.14)  
 $= s(\alpha_k).$

De ii em (III.14), vê-se que a fibra  $p_1^{-1}(x)$  tem a dimensão exata para participar de uma fibração admissível. Precisamos agora estender esta fibração a todo o  $V_{k-1} \cap S^u$  e vamos fazê-lo recorrendo outra vez às vizinhanças tubulares folheadas. Como  $B_1$  é transversal às folhas em  $V_{k-1} \cap S^u$ , é possível tomar a vizinhança tubular folheada  $(B, p)$  de  $B_1$  em  $V_{k-1} \cap S^u(\alpha_k)$ .

Novamente, diminuindo a vizinhança de índices  $N^u(\alpha_{k-1})$ , se for necessário, podemos admitir que para todo  $x \in B$  estejam satisfeitas as seguintes condições:

- i.  $p_x = p | L_x \cap B$  é um difeomorfismo de  $L_x \cap B$  sobre sua imagem  $p(L_x \cap B) \subset B_1 \cap F_x \subset W^S(\alpha_{k-1}) \cap F_x$ ;
- ii.  $p(L_x \cap D^u)$  está suficientemente  $C^1$ -próximo de  $W^S(\alpha_{k-1}) \cap D^u \cap F_x$  de forma que a restrição  $p_{1x} = p_1 | p(L_x \cap D^u)$  seja um difeomorfismo de  $p(L_x \cap D^u)$  sobre  $W^S(\alpha_{k-1}) \cap D^u \cap F_x$ . (III.15)

Com auxílio dos difeomorfismos descritos acima em (III.15) conseguimos "levantar" a fibração dada por  $p_1$  em  $B_1$  a todo o  $B$  de modo coerente. Podemos, afinal:

$$\begin{aligned} \pi: B &\longrightarrow B \cap D^u \\ x &\longrightarrow [p_x^{-1} \circ p_{1x}^{-1} \circ p_1 \circ p](x) \end{aligned}$$

Verifica-se que esta  $\pi$  satisfaz as condições requeridas para definir uma fibração admissível na parte  $B$  de  $S^u$ .



Repetimos este processo em relação a todos os elementos  $\Sigma$ -críticos  $\alpha_{k-1}$  tais que  $\alpha_k/\alpha_{k-1}=1$ . Desta forma, construímos a fibração admissível numa reunião (finita) de abertos disjuntos de  $S^u(\alpha_k)$  do tipo  $B \subset V_{k-1} \cap S^u$  que chamamos de  $B_{k-1}$ . Agora, passamos a considerar um elemento  $\Sigma$ -crítico  $\alpha_{k-2}$  tal que  $\alpha_k/\alpha_{k-2}=2$ . A variedade estável  $W^s(\alpha_{k-2})$  em  $S^u(\alpha_k)$  só pode acumular-se em  $B_{k-1}$ . Ora, em  $B_{k-1}$ , a fibração que acabamos de construir respeita as  $\Sigma$ -famílias tubulares dos  $\alpha_{k-1}$  o que, por hipótese de indução, já garante a compatibilidade. Passamos agora a considerar em  $S^u$  o complementar de  $B_{k-1}$  onde o comportamento de  $W^s(\alpha_{k-2})$  permite-nos repetir o processo de fibração utilizado em  $B_{k-1}$  por não se acumular aí.

Procedendo desta forma com todos os elementos  $\alpha_{k-2}$  de ordem 2 em relação a  $\alpha_k$ , estendemos a projeção  $\pi$  a um aberto  $B_{k-1} \cup B_{k-2}$  de  $S^e(\alpha_k)$ . Este processo, se continuado, permite-nos definir  $\pi$  em toda a seção  $S^u$  visto que todo ponto de  $D^u(\alpha_k)$  pertence a alguma  $W^s(\alpha)$  com  $\alpha$  localizado no diagrama de  $\text{grad}_\Sigma f$  entre  $\alpha_k$  e os  $\Sigma$ -poços.

Assim, fica construído o sistema compatível de  $\Sigma$ -famílias tubulares para  $f$  o que encerra a etapa A da demonstração.

Etapa B - determinação do  $\epsilon$  - começamos tomando  $\epsilon_0 > 0$  como na proposição II.4.1 de modo que, em  $C^r(M, R)$ , na bola de centro  $f$  e raio  $\epsilon_0$  esteja satisfeita a  $\Omega$ -estabilidade para os  $\Sigma$ -gradientes. Se  $g$  está nesta bola, indicamos por  $\alpha_k(g)$  os elementos  $\Sigma$ -críticos de  $\text{grad}_\Sigma g$ . Retomando, agora, o processo de indução da etapa A, vemos que quanto aos  $\Sigma$ -poços de  $g$  suas  $\Sigma$ -famílias tubulares já estão definidas e, em suas partes compactas, variam continuamente e de maneira uni-

fome em classe  $C^1$  com  $g$ .

Sejam, então  $k \geq 1$  e  $\epsilon_{k-1} > 0$  tais que: se  $g$  está na bola de centro  $f$  e raio  $\epsilon_{k-1}$  em  $C^r(M, R)$ , então:

1º já estão construídas as  $\Sigma$ -famílias tubulares para os elementos  $\Sigma$ -críticos de  $g$  em relação aos quais os  $\Sigma$ -poços tenham ordem  $\leq k-1$ ;

2º estão satisfeitas as condições do Teorema até este passo, bem como a situação de posição geral entre as variedades estáveis, instáveis de elementos  $\Sigma$ -críticos em relação aos quais os  $\Sigma$ -poços tenham ordem  $\leq k-1$  e as folhas

Mostraremos que se pode tomar  $\epsilon_k$ ,  $0 < \epsilon_k \leq \epsilon_{k-1}$  tal que se  $\|g-f\|^r < \epsilon_k$  o mesmo seja possível até ordem  $k$ .

Na etapa A, tomada a  $\Sigma$ -sela  $\alpha_k(f)$  consideramos uma vizinhança tubular folheada  $\Omega_k$  de  $\alpha_k$  e uma seção transversal  $S^u(\alpha_k)$  por um domínio fundamental  $D^u$ .

Pois bem, começamos por tomar  $0 < \epsilon_k \leq \epsilon_{k-1}$  tal que, para  $\|g-f\|^r < \epsilon_k$  estejam satisfeitas as condições enunciadas a seguir:

- i.  $\alpha_k(g) \in \Omega_k$ , onde  $\alpha_k(g)$  é a  $\Sigma$ -sela de  $\text{grad}_\Sigma g$  correspondente a  $\alpha_k(f)$  pelo homeomorfismo  $h$  de II.4.1;
- ii. que  $S^u[\alpha_k(f)]$  seja ainda seção transversal a  $\text{grad}_\Sigma g$  pelo domínio fundamental

$$D^u[\alpha_k(g)] = W^u[\alpha_k(g)] \cap S^u[\alpha_k(f)];$$

- iii. que também as  $W^S[\alpha_{k-1}(g)]$  não se acumulem em  $S^u[\alpha_k(f)]$  — o que é possível pois as  $W^S[\alpha_{k-1}(f)]$  não se acumulam em  $S^u[\alpha_k(f)]$  e as  $W^S[\alpha_{k-1}(g)]$  variam continuamente em suas partes compactas com  $g$  — onde os  $\alpha_{k-1}(f)$  são elementos  $\Sigma$ -críticos de ordem 1 em

- relação a  $\alpha_k$  e  $\alpha_{k-1}(g)$  seus correspondentes para  $\text{grad}_\Sigma g$ .
- iv. que  $S^u[\alpha_k(f)]$  estejam satisfeitas as hipóteses de posição geral entre  $W^u[\alpha_k(g)]$ ,  $W^s[\alpha_{k-1}(g)]$  e as folhas;
- v. que esta situação de posição geral se conserve por iteração para tempos positivos quaisquer - isto é possível graças à limitação uniforme do  $\lambda$ -lema (II.3.5) que varia continuamente com o campo;
- vi. para levantar a fibração de  $W^s[\alpha_{k-1}(f)]$  a um aberto da seção  $S^u$ , na etapa A, tomou-se uma vizinhança tubular folheada  $(B, p)$  em  $V_{k-1} \cap S^u$ . Esta condição impõe que  $B$  esteja contida na vizinhança de  $W^s[\alpha_{k-1}(g)]$  fibrada pela  $\Sigma$ -família tubular para todo  $\|g-f\|^r < \epsilon_k$ ;
- vii. que  $B$  seja vizinhança de  $W^s[\alpha_{k-1}(g)] \cap S^u \cap V_{k-1}$  em  $S^u \cap V_{k-1}$  e que as  $\tau^{k-1}(g)$  mantenham, em  $B$ , as transversalidades entre si exigidas para as de  $f$ . Que sejam também mantidas as transversalidades entre  $\tau^{k-1}(g)$  e  $W^u[\alpha_{k-1}(f)]$  em  $B$  e por iteração para tempos positivos para qualquer  $g$  com  $\|g-f\|^r < \epsilon$ .

A esta altura, se  $W^s[\alpha_{k-1}(f)] \cap S^u$  tinha a dimensão apropriada, isto é, se

$$\dim\{W^s[\alpha_{k-1}(f)] \cap S^u \cap F_x\} = s(\alpha_k),$$

o mesmo se dará com  $g$  (pela hipótese de conservação das transversalidades) e, então, a fibração obtida da família  $\tau^{k-1}(g)$  pode ser tomada como fibração admissível. Se ao contrário, esta dimensão for  $> s(\alpha_k)$ , prosseguimos introduzindo mais exigências às anteriores e que, eventualmente, diminuam o  $\epsilon_k$  ( $\epsilon_k > 0$ ):

viii. a projeção  $p: B \longrightarrow B_1 \subset W^S[\alpha_{k-1}(f)] \cap S^u$  quando restrita a  $W^S[\alpha_{k-1}(g)] \cap B$  é um difeomorfismo, para qualquer  $g$ ,  $\|g-f\|^r < \epsilon_k$  — isto é possível ainda pela variação  $C^1$ -contínua de  $W^S[\alpha_{k-1}(g)]$  uniforme nas partes compactas, este difeomorfismo será denotado por  $p_g$ , para cada  $g$ . Isto é:

$$p_g = p \mid W^S[\alpha_{k-1}(g)] \cap B; \quad (\text{III.26})$$

ix. que  $W^u[\alpha_k(g)]$  esteja suficientemente  $C^1$ -próxima de  $W^u[\alpha_k(f)]$  em  $S^u$  de forma que a imagem

$$(+)= p_g \left\{ W^S[\alpha_{k-1}(g)] \cap W^u[\alpha_k(g)] \cap B \right\} \quad (\text{III.27})$$

esteja tão próxima de  $W^S[\alpha_{k-1}(f)] \cap D^u$  que a restrição de  $p_1: B_1 \longrightarrow W^S[\alpha_{k-1}(f)] \cap D^u$  à imagem (+) em (III.27) seja ainda um difeomorfismo,  $\forall g$  com  $\|g-f\|^r < \epsilon_k$ . Podemos, então  $p_{1g} = p_1 \mid (+)$ . Estabelecidas estas condições, tomada  $g$  tal que  $\|g-f\|^r < \epsilon_k$ , podemos definir em  $W^S[\alpha_{k-1}(g)] \cap S^u$  uma fibração admissível a partir daquela construída para  $f$  e que varie continuamente, em classe  $C^1$ , com  $g$ , pondo:

$$\begin{aligned} \pi_g: W^S[\alpha_{k-1}(g)] \cap S^u \cap W^u[\alpha_k(f)] \cap B &\longrightarrow W^S[\alpha_{k-1}(g)] \cap W^u[\alpha_k(g)] \cap B \\ \pi_g &= p_g^{-1} \circ p_{1g}^{-1} \circ p_1 \circ p \end{aligned} \quad (\text{III.28})$$

Daqui, estendemos a fibração  $\pi_g$  a todo o aberto  $B$  de  $S^u$ , de modo compatível com as  $\tau^i(g)$ ,  $i \leq k-1$ , que encontrem  $B$ , do mesmo modo como fizemos com  $f$ , onde, ao invés de  $(B, p)$ , usamos  $(B, p_g^{-1} \circ p)$ . Basta, para isto, verificar que  $(B, p_g^{-1} \circ p)$  é também uma vizinhança tubular folheada de  $W^S[\alpha_{k-1}(g)] \cap B$  em  $S^u$ . Como o processo de indução é finito, chegamos a um  $\epsilon > 0$  para o

qual está satisfeito o Teorema  $\Sigma$ -família tubular, c.q.d.

Com este teorema, pretendemos mostrar que se  $f \in S_{\Sigma}^R$ , então,  $\text{grad}_{\Sigma} f$  é estruturalmente estável por pequenas perturbações de  $f$ . A esta altura, entretanto, já podemos deduzir o seguinte corolário:

Corolário III.3.6 -  $S_{\Sigma}^R$  é aberto em  $C^R(M, R)$ .

Demonstração: se  $f \in S_{\Sigma}^R$  e  $\epsilon > 0$  é dado como no Teorema III.3.5, então a bola de centro  $f$  e raio  $\epsilon$  em  $C^R(M, R)$  também está em  $S_{\Sigma}^R$ .

III.4 Estabilidade Estrutural - a construção do homeomorfismo que leva trajetórias do  $\Sigma$ -gradiente de  $f$  nas trajetórias do  $\Sigma$ -gradiente de  $g$  será feita por um número finito de etapas, o que será possível graças às duas proposições seguintes:

Proposição III.4.1 - Sejam dados  $(U_i)_{1 \leq i \leq s}$  cobertura aberta de  $M^{m+p}$  e  $\eta > 0$  um número real positivo, então existe  $\delta > 0$  tal que se  $f \in C^R(M, R)$ , com  $\|f\|^R < \delta$ , é possível escrever:

$$f = f_1 + \dots + f_s, \text{ com} \quad (\text{III.29})$$

$$\|f_i\|^R < \eta \text{ e } f_i = 0 \text{ em } M - U_i, 1 \leq i \leq s \quad (\text{III.30})$$

Demonstração: Com efeito, basta tomar uma partição da unidade  $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq s}$  subordinada à cobertura dada e se  $M \geq \max_{1 \leq i \leq s} \{\|\lambda_i\|^R\}$ , tomar  $0 < \delta \leq \eta/M$ . Definimos, para  $i, 1 \leq i \leq s$ ,  $f_i = \lambda_i^i f$ , c.q.d.

Observa-se que, sendo satisfeitas as condições (III.29) e (III.30) teremos, para os  $\Sigma$ -gradientes que:

$$\text{grad}_{\Sigma} f = \text{grad}_{\Sigma} f_1 + \dots + \text{grad}_{\Sigma} f_s \quad (\text{III.31})$$

$$|\text{grad}_\Sigma f_i|^{(r-1)} < \eta \text{ e } \text{grad}_\Sigma f_i = 0 \text{ em } M-U_i, \quad 1 \leq i \leq s \quad (\text{III.32})$$

Proposição III.4.2 - Sendo  $f \in S^r$  (III.1.4) e  $\phi$  o fluxo dado por  $\text{grad}_\Sigma f$ , existem  $\eta > 0$  e  $\Omega_k = \Omega_k[\alpha_k(f)]$ -vizinhanças tubulares folheadas dos elementos  $\Sigma$ -críticos de  $f$ ,  $k=1, \dots, n$  e um inteiro  $J > 0$  tais que

$$(\phi_j(\Omega_k))_{\substack{0 \leq j \leq J \\ 1 \leq k \leq n}} \text{ seja cobertura de } M^{m+p} \quad (\text{III.33})$$

e para cada  $g$ , com  $\|g-f\|^r < \eta$ , e cada  $k$ ,  $1 \leq k \leq n$  se tenha:

$$\phi_j(\Omega_k) \subset \tau_g^{ks} \cap \tau_g^{ku}, \quad j=0, \dots, J \quad (\text{III.34})$$

onde  $\tau_g^{ks}$  é a vizinhança de  $W^s[\alpha_k(g)]$  obtida como reunião das fibras da  $\Sigma$ -família tubular de  $\text{grad}_\Sigma g$ ; e, finalmente, se  $x, y \in \phi_j(\Omega_k)$  então,  $\tau^{ks}(x)$  e  $\tau^{ku}(y)$  se interceptam transversalmente, num único ponto, quer as fibras consideradas  $\tau^{ks}(x)$  e  $\tau^{ku}(y)$  pelos pontos,  $x$  e  $y$ , respectivamente, sejam ambas relativas à mesma função quer sejam relativas a duas funções quaisquer da bola de centro  $f$  e raio  $\eta$ .

Demonstração: Inicialmente, consideramos  $\eta > 0$  dado no Teorema  $\Sigma$ -família tubular (III.3.5) relativamente às variedades estáveis e instáveis. Então, para cada  $\alpha_k(f)$ , sejam,  $\tau_f^{ks}$  e  $\tau_f^{ku}$  as vizinhanças de  $W^s[\alpha_k(f)]$  e  $W^u[\alpha_k(f)]$ , respectivamente. Então podemos tomar uma vizinhança tubular folheada  $\Omega_k$  de  $\alpha_k(f)$  tal que:

$$\alpha_k \subset \bar{\Omega}_k \subset \bar{\bar{\Omega}}_k \text{ (compacto)} \subset \tau_f^{ks} \cap \tau_f^{ku}; \quad (\text{III.36})$$

em  $\bar{\bar{\Omega}}_k$  as fibras de  $\tau_f^{ks}$  e  $\tau_f^{ku}$  encontram-se (III.37)

transversalmente;

Assim construídas as  $\Omega_k$ , teremos que  $(\phi_j(\Omega_k))_{j=0,1,\dots, k=1,\dots,n}$  é uma cobertura aberta da variedade compacta  $M^{m+p}$  (III.1.1) donde podemos extrair a subcobertura finita  $(\phi_j(\Omega_k))_{j=0,1,\dots,J, k=1,\dots,n}$ , para um conveniente inteiro  $J > 0$ . Como  $\phi_j$  é um difeomorfismo e as  $\Sigma$ -famílias tubulares são invariantes pelo fluxo, temos que:

$$\phi_j(\bar{\Omega}_k) \subset \tau_f^{ks} \cap \tau_f^{ku}, \quad j=0,1,\dots,n; \quad \forall k, \quad 1 \leq k \leq n,$$

e que, em  $\phi_j(\bar{\Omega}_k)$ , as fibras  $\tau_f^{ks}(x)$  e  $\tau_f^{ku}(y)$  se encontram transversalmente num único ponto.

Ora, como as fibras das  $\Sigma$ -famílias tubulares variam continuamente em classe  $C^1$  e esta continuidade é uniforme nas partes compactas, é possível considerar  $\eta > 0$ , eventualmente menor que aquele tomado no início pelo Teorema da  $\Sigma$ -família tubular, de forma que sendo  $g$ ,  $\|g-f\|^r < \eta$ , de tenham satisfeitas as condições (III.34) e (III.35) no compacto  $\bigcup_{j=0}^J \phi_j(\bar{\Omega}_k)$ , para cada  $k$ ,  $1 \leq k \leq n$ .

Estamos, agora em condições de demonstrar o teorema central deste capítulo.

Teorema III.4.3 (da Estabilidade Estrutural): Sendo  $f \in S^r$ , existe  $\epsilon > 0$  tal que se  $\|g-f\|^r < \epsilon$ , então  $\text{grad}_\Sigma f$  e  $\text{grad}_\Sigma g$  são topologicamente equivalentes. O homeomorfismo que leva as trajetórias de  $\text{grad}_\Sigma f$  nas de  $\text{grad}_\Sigma g$  pode ser construído de modo a deixar invariantes as folhas.

Demonstração: A construção do homeomorfismo é, formalmente, a mesma de Palis-Smale. Partimos da cobertura  $(\phi_j(\Omega_k))$  e do  $\eta > 0$  da proposição III.4.2. Na proposição III.4.1, consideramos  $\eta' = \frac{\eta}{n \cdot J} > 0$ , don

de tiramos  $\delta > 0$  tal que se  $\|g-f\|^r < \delta$ , então se pode escrever

$$g = f + \sum_{\substack{0 \leq j \leq J \\ 1 \leq k \leq n}} g_{jk}, \quad (\text{III.38})$$

onde  $\|g_{jk}\|^r < \eta'$  e  $g_{jk} = 0$  em  $M-W$ , onde  $W$  é um aberto tal que  $\bar{W} \subset \phi_j(\Omega_k)$ .

O modo como tomamos  $\eta'$ , nos mostra que, para cada  $j_0, k_0$  —  $0 \leq j_0 \leq J, 1 \leq k_0 \leq n$ , a função

$$f + \sum_{\substack{0 \leq j \leq j_0 \\ 1 \leq k \leq k_0}} g_{jk}$$

ainda dista de  $f$  menos que  $\eta$ , satisfazendo, portanto, ainda as condições da proposição III.4.2. Pela transitividade da estabilidade estrutural basta tomar, então, duas funções  $g_1, g_2$  da bola de centro  $f$  e raio  $\eta$  e tais que  $g_1 - f = g_2 - f = 0$  em  $M-W$ ,  $W$  aberto e  $\bar{W} \subset \phi_j(\Omega_k)$ ,  $j$  e  $k$  fixados  $0 \leq j \leq J, 1 \leq k \leq n$ .

Tomadas estas  $g_1, g_2$  e construído o homeomorfismo de  $M^{m+p}$  que leve trajetórias de  $\text{grad}_\Sigma g_1$  nas de  $\text{grad}_\Sigma g_2$  fica demonstrado o teorema.

Este homeomorfismo, por sua vez, é construído em duas etapas por meio de um fluxo contínuo (não necessariamente um  $\Sigma$ -gradiente). Chamamos de  $\psi_t^1, \psi_t^2$  os fluxos definidos pelos  $\Sigma$ -gradientes de  $g_1$  e  $g_2$ , respectivamente. Pomos

$$V = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \phi_t(\Omega_k) \quad (\text{III.39})$$

sendo  $\phi$  o fluxo de  $\text{grad}_\Sigma f$ . É claro que  $V$  contém o saturado de  $W$



por  $\psi_t^1$  ou  $\psi_t^2$ . O fluxo auxiliar é definido por:

$$\tilde{\psi}_t(x) = \begin{cases} \tau_{g_1}^{ks}[\psi_t^1(x)] \circ \tau_{g_2}^{ku}[\psi_t^2(x)], & \text{se } x \in V \\ \psi_t^1(x) = \psi_t^2(x), & \text{se } x \in M - V \end{cases} \quad (\text{III.40})$$

Verifica-se que  $\tilde{\psi}_t$  está bem definido e é um fluxo contínuo em  $M^{m+p}$ , levando (III.35) em conta. E, ainda, que se  $x$  não está no saturado de  $W$ , então  $\psi_t^1(x) = \psi_t^2(x) = \tilde{\psi}_t(x)$ . Definê-se, na primeira etapa, um homeomorfismo  $h_1: M \rightarrow M$ , pondo:

$$h_1(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{\psi}_t[\psi_{-t}^1(x)], \quad x \in M^{m+p} \quad (\text{III.41})$$

Verifica-se de maneira análoga à de Palis-Smale, que  $h_1$  está bem definido e é contínuo. Da mesma forma, vê-se que

$$\bar{h}_1(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \psi_t^1[\tilde{\psi}_{-t}(x)], \quad x \in M^{m+p} \quad (\text{III.42})$$

está bem definido e é contínuo.

De (III.41) e (III.42), mostra-se que

$$h_1 \psi_t^1 = \tilde{\psi}_t h_1 \quad \text{e} \quad \bar{h}_1 \tilde{\psi}_t = \psi_t^1 \bar{h}_1, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Isto é,  $h_1$  é um homeomorfismo ( $\bar{h}_1 = (h_1)^{-1}$ ) e leva trajetórias de  $\psi^1$  em trajetórias de  $\tilde{\psi}$ . De maneira análoga, construímos  $h_2: M \rightarrow M$  levando trajetórias de  $\tilde{\psi}$  em trajetórias de  $\psi^2$ . O homeomorfismo procurado é composto destes dois. Isto encerra a demonstração do teorema de estabilidade estrutural, c.q.d.

CAPÍTULO IV :  $\Sigma$ -GRADIENTES EM DIMENSÃO 2

Neste capítulo damos uma caracterização dos  $\Sigma$ -gradientes cujas singularidades sejam  $\Sigma$ -simples num fibrado com grupo estrutural discreto (0.2.2) de dimensão 2. A seguir, provamos que tais funções formam um conjunto aberto e denso em  $C^r(M^2, R)$  quando a folheação apresentar alguma folha compacta. A proposição seguinte é consequência imediata do Teorema de Thom para jatos [12].

Proposição IV.1 - Sejam  $M^2$  variedade diferenciável conexa, compacta, munida de uma folheação diferenciável  $F$  (de condimensão 1);  $J^2(M^2, R)$  o fibrado dos jatos de 2ª ordem de  $M^2$  em  $R$ ;  $W \subset J^2(M^2, R)$  dado por

$$W = \{j^2 f_p \in J^2(M^2, R) \mid d(f|_{F_p})_p = 0 \text{ e } d^2(f|_{F_p})_p = 0\} \quad (VI.1)$$

onde  $F_p$  é a folha de  $F$  por  $p$ . Então  $W$  é uma subvariedade fechada de  $J^2(M^2, R)$  e, sendo  $r \geq 3$ , o conjunto das funções  $f \in C^r(M^2, R)$  tais que  $j^2 f \in W$  é aberto e denso em  $C^r(M^2, R)$ .

Demonstração :  $W$  é subvariedade fechada pois se  $j^2 f_p \in J^2(M^2, R)$  e  $(U, x, y)$  é uma carta local de  $M^2$  tal que  $p \in U$ , a folheação em  $U$  seja dada por  $y = \text{constante}$  e  $\pi : J^2(M^2, R) \rightarrow M^2$  seja a projeção natural, então

$$W \cap \pi^{-1}(U) = \{j^2 g_q \in J^2(H^2, R) \mid q \in U, g_x(q) = g_{xx}(q) = 0\}$$

Então  $W$  é uma subvariedade mergulhada, fechada de dimensão 6 do fibrado  $J^2(M^2, R)$  cuja dimensão é 8. A parte final da proposição IV.1 é uma aplicação do teorema que enunciaremos a seguir, cuja prova segue dos Teoremas de Transversalidade que se encontram em [3];

Teorema de Thom para jatos ([12]). Sejam  $X$  uma variedade (com ou sem bordo) de classe  $C^r$ ,  $r \geq 1$ ,  $Y$  uma variedade  $C^{2r+2}$ ,  $W$  uma variedade  $C^{r-k}$  ( $Y$  e  $W$  sem bordo). Dada uma aplicação  $G \in C^{r-k}(W; J^k(X, Y))$  consideremos o conjunto

$$C_G^r(X, Y) = \{f \in C^r(X, Y) \mid j^k f \notin G\}$$

e admitamos que

- (1)  $X, Y$  e  $W$  têm dimensão finita
- (2)  $r > \max\{\dim X + \dim Y - \dim J^k(X, Y), k\}$

Nestas condições  $C_G^r(X, Y)$  é residual (e portanto denso) em  $C^r(X, Y)$ . Se  $X$  e  $W$  são compactos, ou se  $X$  é compacto,  $G = i : W \rightarrow J^k(X, Y)$  é inclusiva e  $W$  é fechada, então  $C_G^r(X, Y)$  é aberto.

Este teorema se aplica ao nosso caso, onde  $X = M^2$  e  $Y = R$  são variedades  $C^\infty$ ,  $W = J^2(M^2, R)$  é uma subvariedade  $C^\infty$  fechada e  $k=2$ . Consideremos, agora, o caso em que a folheação de  $M^2$  seja dada por uma fibração com grupo estrutural discreto, isto é:

Definição IV.2 - Sejam  $g : R \rightarrow R$  a translação  $g(x) = x + 2\pi$ ,

$\Psi: S^1 \rightarrow S^1$  um difeomorfismo de  $\text{Dif}^\infty(S^1)$  e  $\phi: \pi_1(S^1) \rightarrow \text{Dif}^\infty(S^1)$  o homomorfismo do grupo fundamental  $\pi_1(S^1)$  em  $\text{Dif}^\infty(S^1)$  definido, como em (0.6) por  $\phi(g) = \Psi$ . Consideremos em  $R \times S^1$  a folheação  $\tilde{F}$  dada pela 2ª projeção e a relação de equivalência dada em (0.5):

$$(x_1, t_1) \sim (x_2, t_2) \iff \exists n \in \mathbb{Z} \mid x_2 = x_1 + 2n\pi \text{ e } t_2 = \Psi^n(t_1) \quad (\text{IV.2})$$

Na variedade quociente  $M^2 = R \times S^1 / \sim$ , a folheação  $\tilde{F}$  determina, por passagem ao quociente, uma folheação  $F_\Psi$  que se diz induzida por  $\Psi$ . A folha  $F$  de  $F_\Psi$  obtida como quociente de  $\tilde{F}_t = R \times \{t\}$  se diz folha relativa a t e indica-se por  $F_t$ .

Definição IV.3 - Se  $\Psi: S^1 \rightarrow S^1$  é um difeomorfismo,  $t \in S^1$  e  $F_t$  é a folha de  $F_\Psi$  relativa a  $t$ , diz-se que  $F_t$  é uma folha trivial se, e só se,  $F_t$  admite uma vizinhança em  $M^2$  na qual a folheação seja trivialmente dada por um produto. Neste caso, diz-se também que  $t$  é trivial.

Sendo  $\Psi \in \text{Dif}^\infty(S^1)$  vamos distinguir três casos:

1º -  $\Psi$  inverte a orientação - então  $\Psi$  admite 2 pontos fixos  $p, q \in S^1$ . Os demais pontos periódicos, se existirem, são de período 2 e formam um conjunto  $F_1 \cup F_2$  em que cada  $F_i$  é um fechado de cada um dos arcos de  $S^1 - \{p, q\}$  e são homeomorfos entre si. Os pontos não periódicos formam um conjunto enumerável de pares de arcos abertos cujos bordos são pontos periódicos - este conjunto pode ser vazio. A órbita de cada ponto não periódico é formada por duas seqüências monotônicas e tem como  $\alpha$ - e  $\omega$ -limites órbitas periódicas. Os pontos triviais (IV.3) neste caso são os

pontos não periódicos e pontos periódicos que pertençam ao interior de  $F_1 \cup F_2$  (portanto de período 2);

2º -  $\Psi$  preserva a orientação e tem número de rotação racional  $p/q$  ( $q > 0$ ,  $p$  e  $q$  inteiros primos entre si): então existe, pelo menos, um ponto periódico. Todos os pontos periódico. Todos os pontos periódicos são de período  $q$ . Os pontos triviais são, novamente, os não periódicos (cujas órbitas são formadas por  $q$  seqüências monotônicas e os  $\alpha$ - e  $\omega$ -limites são órbitas periódicas) e pontos periódicos interiores ao fechado dos pontos periódicos.

3º -  $\Psi$  preserva a orientação e tem número de rotação irracional - como estamos em classe  $C^\infty$ , todas as órbitas de  $\Psi$  serão densas em  $S^1$ .

Os resultados sobre o difeomorfismo de  $S^1$  que estamos usando neste capítulo podem ser encontrados em [10]. Verifica-se ainda que vale a seguinte propriedade.

Proposição IV.4 - Se  $\Psi$  preserva a orientação, então a variedade  $M^2$  obtida como em IV.2 é o toro e se  $\Psi$  inverte a orientação então  $M^2$  é a garrafa de Klein.

Definição IV.5 - Seja  $M^2$  uma variedade nemamiana munida de uma folheação (de codimensão 1). Se  $f \in C^r(M^2; \mathbb{R})$ , com  $r \geq 3$ , e se  $p \in M^2$  é um ponto singular  $\Sigma$ -simples de  $\text{grad}_\Sigma f$ , diz-se que  $p$  é um ponto  $\Sigma$ -quase hiperbólico se, e só se, estiverem satisfeitas as seguintes condições em  $p$ :

$$d(f|_{F_p})_p = 0, \quad d^2(f|_{F_p})_p = 0 \quad \text{e} \quad d^3(f|_{F_p})_p \neq 0 \quad (\text{IV.3})$$

onde  $F_p$  é a folha que passa por  $p$ .

Definição IV.6 - Seja  $M^2$  variedade obtida como em IV.2 com a folheação induzida por  $\Psi$  e munida de uma métrica reimanniana diferenciável. Definimos duas classes de funções de  $C^r(M^2, R)$ , quando  $r \geq 3$ :

$G^r = \{f \in C^r(M, R) \mid \text{grad}_\Sigma f \text{ só admite singularidades } \Sigma\text{-simples}\}$   
e definimos  $S^r \subset G^r$ , pondo que  $f \in S^r$  se, e só se,  $f \in G^r$  e satisfaz, ainda, às seguintes condições:

i. os pontos singulares de  $\text{grad}_\Sigma f$  são  $\Sigma$ -hiperbólicos exceto, eventualmente, um número finito deles que são  $\Sigma$ -quase-hiperbólicos:

ii. os pontos  $\Sigma$ -quase-hiperbólicos só aparecem em folhas triviais e, no máximo, um em cada folha.

Na linguagem dos jatos utilizada na proposição IV.1, podemos descrever algumas destas condições da seguinte forma:

Proposição IV.7 - Se  $f \in G^r$  e  $p$  é um ponto singular de  $\text{grad}_\Sigma f$ , então  $p$  é  $\Sigma$ -hiperbólico se, e só se,  $j^2 f_p \notin W$  (IV.1). Se  $p$  é tal que  $j^2 f_p \in W$  e se  $r \geq 3$ , então  $p$  é  $\Sigma$ -quase-hiperbólico se, e só se

$$j^2 f \in \bar{W}_p.$$

A verificação é imediata desde que se considerem em torno de  $p$  coordenadas nas quais a folheação seja dada como projeção e em  $J^2(M^2, R)$  as respectivas coordenadas admissíveis.

O próximo teorema dá uma caracterização dos  $\Sigma$ -gradientes estruturalmente estáveis em  $G^r$  nos casos em que o difeomor-

fismo  $\Psi$  apresenta algum ponto periódico ( $1\varphi$  e  $2\varphi$ ).

**Teorema IV.8** - Sejam:  $\forall \text{Dif}^\infty(S^1)$  com algum ponto periódico,  $M^2$  o fibrado com a folheação induzida por  $\Psi$  munido de uma métrica reimanniana diferenciável e  $f \in C^r$  com  $r \geq 3$ . Então  $\text{grad}_\Sigma f$  é estruturalmente estável por perturbações  $C^r$  de  $f$  se, e só se,  $f \in S^r$ .

**Demonstração:** etapa A: em que mostramos que se  $f \in S^r$  então seu  $\Sigma$ -gradiente é estruturalmente estável. Com efeito, seja dada  $f \in S^r$ , consideremos o número  $\delta > 0$  dado pelo teorema I.5.1 de modo a garantir que se  $g$  é tal que  $\|g-f\|^r < \delta$ , então  $g \in C^r$  também e a subvariedade  $V^1(g)$  dos pontos singulares de  $\text{grad}_\Sigma g$  varia continuamente em classe  $C^{r-1}$  com  $g$ .

Sejam  $p_1, \dots, p_k \in V^1(f)$  os pontos singulares  $\Sigma$ -quase hiperbólicos de  $\text{grad}_\Sigma f$ . Cada  $p_j$ ,  $1 \leq j \leq k$ , pode ser tomado como origem de um sistema de coordenadas  $(x_j, s_j)$ , definido em  $U_j$  e de modo que:

- i. a folheação em  $U_j$  é dada pela projeção  $(x_j, s_j) \rightarrow s_j$ ;
- ii.  $V^1(f) \cap U_j$  é dada pelo gráfico de uma função  $C^{r-1}$   $s_j = s_j(x_j)$ , com  $s_j(0) = s_j'(0) = 0$  e  $s_j''(0) \neq 0$ ;
- iii. os pontos de  $U_j$  tais que  $f_{xx} = 0$  são dados pelo gráfico de uma função  $C^{r-2}$   $x_j = x_j(s_j)$ ;
- iv. em  $U_j$  os gráficos de  $s_j = s_j(x_j)$  e  $x_j = x_j(s_j)$  se encontram na origem (onde o fazem transversalmente).

Diminuindo, se preciso for, o  $\delta > 0$  de partida, é possível impor que, num aberto  $U_j$  que seja ainda vizinhança de  $p_j$  e

tal que  $\bar{U}_j \subset U_j$  estejam satisfeitas as seguintes condições para  $g$  tal que  $\|g-f\|^r < \delta$ :

- i.  $\bar{U}_j$  está contido na vizinhança da folha (trivial) por  $p_j$  em que a folheação seja dada por um produto; o saturado (pela folheação) de  $\bar{U}_j$  não encontra a reunião dos saturados dos demais  $\bar{U}_k$ ,  $k \neq j$ ;
- ii. em cada  $\bar{U}_j$  se tenha  $g_{xxx} \neq 0$ ; as curvas  $g_x = 0$  e  $g_{xx} = 0$  são, ainda, obtidas como gráficos de funções, interceptando-se transversalmente e num único ponto  $p_j(g)$ .

Observamos que a condição ii implica que, em  $\bar{U}_j$ , a curva  $g_{xx} = 0$  é transversal às folhas.

Fixados os  $U_j$  satisfazendo as condições acima, vemos que os pontos de  $V^1(f)$  que não estão na reunião dos  $U_j$  formam uma reunião finita de arcos compactos (com ou sem bordo) transversais às folhas. Seja  $B$  uma vizinhança tubular folheada destes arcos. É possível impor que para  $\|g-f\|^r < \delta$  (onde o  $\delta > 0$  pode ser menor que o tomado anteriormente) se tenha que os pontos de  $V^1(g)$  que não estão na reunião dos  $U_j$  formam arcos contidos em  $B$  e são ainda transversais às folhas.

Isto já mostra que se  $g$  é tal que  $\|g-f\|^r < \delta$  então  $g \in S^r$ . Fixamos, então, uma tal  $g$  e vamos construir um homeomorfismo  $h: M^2 \rightarrow M^2$  que leva as trajetórias do  $\lfloor$ -gradiente de  $f$  nas do  $\lfloor$ -gradiente de  $g$ .

Pomos, de início,  $h(p_j) = p_j(g)$ . A seguir, definimos



uma correspondência entre as folhas que encontram  $\bar{U}_j$  por meio de um homeomorfismo auxiliar que definimos entre os arcos de  $f_{xx}=0$  e  $g_{xx}=0$ , levando  $p_j$  em  $p_j(g)$  e de modo que o sinal de  $f_x$  e  $g_x$  seja o mesmo em pontos correspondentes e que em cada extremo destes arcos o homeomorfismo preserve as folhas. Esta correspondência entre as folhas estabelecidas para  $j=1,2,\dots,k$  determina uma aplicação  $\bar{h}$  numa reunião finita de arcos de  $S^1$  formados todos por pontos triviais de  $\Psi$  e em seus iterados (por  $\Psi$ ). Pela construção, é evidente que  $\bar{h}$  é a identidade nos bordos desses arcos. Estendemos  $\bar{h}$  a todo o  $S^1$  definindo-o como identidade no complementar destes arcos.

Voltando a  $M^2$ , definimos  $h$  em  $\bar{U}_j$  levando a curva  $f_x=0$  na curva  $g_x=0$ , respeitando a correspondência entre as folhas estabelecida por  $\bar{h}$  e de forma que  $f_{xx}$  e  $g_{xx}$  tenham o mesmo sinal em pontos correspondentes. Nos demais pontos de  $V^1(f)$ , definimos  $h$  pondo para cada  $p \in V^1(f)$ :

$$h(p) = V^1(g) \cap (\text{componente conexa de } p \text{ em } B \cap F_p)$$

Estendemos  $h$  de  $V^1(f)$  a toda  $M^2$  pela razão do comprimento de arco. Para isto, observamos que cada ponto  $p$  de  $M^2 - V^1(f)$  pertence a um arco compacto de  $F_p$  cujo bordo é formado por pontos de  $V^1(f)$ . Com efeito, ainda que  $F_p$  não seja compacta ela apresenta folhas compactas em seu fecho. E estas, certamente, não são triviais devendo, portanto, apresentar pontos em que  $V^1(f)$  lhes seja transversal. As demais propriedades requeridas para  $h$  decorrem da construção e do fato de ser  $r \geq 3$ .

etapa B - tomemos  $f \in C^r$  tal que seu  $\{$ -gradiente seja estruturalmente estável por perturbações  $C^r$  de  $f$  e mostremos que

$\epsilon > 0$   
 $f \in S^r$ . Tomamos de modo que esteja satisfeita a proposição I.5.1 e a propriedade de estabilidade estrutural. Na bola  $B_\epsilon(f)$ , de centro  $f$  e raio  $\epsilon$ , em  $C^r(M, R) - B_\epsilon(f) \subset G^r$  - tomamos, pela proposição IV.1, uma função  $g$  tal que  $j^2 g \notin W$  em  $J^2(M^2, R)$ . Pela proposição IV.7, vemos que  $j^2 g \notin W$  significa que os pontos singulares de  $\text{grad}_\Sigma g$  se constituem de um número finito de pontos  $\Sigma$ -quase hiperbólicos (que são, na respectiva folha, do tipo "fonte-poço", isto é  $\alpha$ - e  $\omega$ -limites de trajetórias) e um número finito de arcos de pontos  $\Sigma$ -hiperbólicos, sendo, portanto, cada arco do tipo  $\Sigma$ -fonte ou  $\Sigma$ -poço (II.2.9). Segue-se, então, que  $V^1(f)$  contém pontos  $p_1, \dots, p_k$  do tipo "fonte-poço nas respectivas folhas e que cada componente conexa de  $V^1(f) - \{p_1, \dots, p_k\}$  é um  $\Sigma$ -poço ou uma  $\Sigma$ -fonte. Mostremos que os pontos  $p_1, \dots, p_k$  são  $\Sigma$ -quase hiperbólicos e que os demais são  $\Sigma$ -hiperbólicos.

Com efeito, se algum  $p_j$ ,  $1 \leq j \leq k$ , não fosse  $\Sigma$ -quase hiperbólico, poderíamos tomá-lo como origem de um sistema de coordenadas  $(U, x, y)$  no qual a folheação seja dada por  $y = \text{constante}$  e de modo que nenhum  $p_i$  ( $i \neq j$ ) esteja em  $U$ . Para  $\alpha$  suficientemente pequeno e com uma escolha conveniente de sinal, poderíamos construir uma função  $g_\alpha$  por meio de uma perturbação local do tipo  $\alpha x^3$  de modo que  $\text{grad}_\Sigma g_\alpha$  apresentasse  $k+2$  pontos singulares do tipo "fonte-poço" e com  $\|g_\alpha - f\|^r < \epsilon$ , o que seria absurdo. Analogamente, se  $p_0 \in V^1(f) - \{p_1, \dots, p_k\}$  fosse um ponto singular não  $\Sigma$ -hiperbólico, com uma perturbação do tipo  $\alpha x^2$  construiríamos uma função cujo  $\Sigma$ -gradiente tivesse também  $k+2$  pontos do ti-

po "fonte-poço". Concluimos, portanto, que os pontos singulares de  $\text{grad}_\Sigma f$  satisfazem à propriedade i na definição IV.6 de  $S^r$ .

Finalmente, seja  $p_j$ ,  $1 \leq j \leq k$ , um ponto  $\Sigma$ -quase hiperbólico de  $f$ . Tomamos  $p_j$  como origem de um sistema de coordenadas de uma carta  $(U, x, y)$  onde a folheação seja dada por  $y = \text{constante}$  e de modo que nenhum outro  $p_i$ ,  $i \neq j$ , pertença a  $U$ . Dado  $\alpha$  suficientemente pequeno e por meio de uma perturbação local do tipo  $f \circ \phi_\alpha$ , com  $\phi_\alpha(x, y) = (x, y - \alpha)$  podemos obter funções  $g_\alpha$  arbitrariamente próximas de  $f$  na topologia  $C^r$  e para as quais o único ponto  $\Sigma$ -quase hiperbólico de  $U$  apareça na folha  $y = \alpha$ , enquanto os demais coincidem com os de  $\text{grad}_\Sigma f$ . Isto nos mostra que o  $\text{grad}_\Sigma f$ , por ser estruturalmente estável, não pode apresentar 2 pontos  $p_i \neq p_j$  na mesma folha ou algum  $p_j$  em folha não trivial. Isto encerra a demonstração do teorema IV.8.

Como conseqüência das proposições IV.1 e IV.7 e da seguinte observação: se uma folha de  $F$  é não trivial, então ela é aproximado por folhas triviais, demonstra-se por intermédio de perturbações locais dos tipos utilizados na etapa B da demonstração do teorema anterior, o seguinte resultado:

Teorema II.9 - Sejam:  $\Psi \in \text{Dif}^\infty(M^2)$  com algum ponto periódico,  $M^2$  o fibrado com a folheação induzida por  $\Psi$  munido de uma métrica riemanniana diferenciável. Então a classe  $S^r$  é aberta e densa em  $C^r(M^2, \mathbb{R})$ , onde  $r \geq 3$ .

No caso de  $\Psi$  não ter ponto periódico, a variedade obtida em IV.2 é o toro e a folheação  $F_\Psi$  é tal que toda folha é densa em  $T^2$ . Para este caso, não são válidos os teoremas

IV.8 e IV.9. Ao invés disso, com técnicas análogas às já utilizadas, provamos o seguinte resultado:

**Teorema IV.10** - Se  $f \in C^r$ , então  $\text{grad}_\Sigma f$  é estruturalmente estável se, e só se  $V^1(f)$  é formado exclusivamente por pontos  $\Sigma$ -hiperbólicos. A classe das funções cujos  $\Sigma$ -gradientes são estruturalmente estáveis não é densa em  $C^r(M^2, \mathbb{R})$ ,  $r \geq 3$ .

Demonstração - Seja  $X$  o campo de vetores de  $M^2$  obtido como quociente do campo  $(1,0)$  em  $\mathbb{R} \times S^1$  (suspensão de  $\psi$ ). Se  $f \in C^r$  é tal que  $j^2 f \cap W$  em  $J^2(M^2, \mathbb{R})$ , então o número de pontos  $p \in M^2$  tais que  $J^2 f_p \in W$  é par. Com efeito, basta considerar a variação do sinal de  $df_p(X_p) = d(f|_{F_p})_p(X_p)$  ao longo da variedade  $V^1(p)$  dos pontos singulares de  $\text{grad}_\Sigma f$ . Então, se  $j^2 f \cap W \neq \emptyset$  sejam  $p, q$  pontos distintos desta interseção. Por meio de uma perturbação local do tipo  $f \cdot \phi_\alpha$  (como a que utilizamos na etapa B da demonstração do teorema IV.8) em torno de um destes pontos, podemos aproximar  $f$  por funções cujos  $\Sigma$ -gradientes apresentem os pontos  $\Sigma$ -quase hiperbólicos  $p$  e  $q$  ora em folhas distintas ora na mesma folha devido à densidade de cada folha. Isto mostra que se  $\text{grad}_\Sigma f$  é estruturalmente estável seus pontos singulares têm que ser  $\Sigma$ -poços ou  $\Sigma$ -fontes. Argumento análogo ao do teorema IV.8 mostra que estes têm que ser  $\Sigma$ -hiperbólicos.

Reciprocamente, se  $V^1(f)$  é formado exclusivamente por pontos  $\Sigma$ -hiperbólicos, tomamos uma vizinhança tubular folheada  $B$  de  $V^1(f)$  e um número  $\epsilon > 0$  tal que:

$\|g-f\|^r < \epsilon \Rightarrow V^1(g) \subset B$  e é ainda transversal às folhas.

Dada uma tal função  $g$ , definimos  $h: V^1(f) \rightarrow V^1(g)$ , pondo para  $p \in V^1(f)$ :  $h(p) = V^1(g) \cap (\text{componente de } p \text{ em } B_n F_p)$ . Esta aplicação se estende a um homeomorfismo de  $M^2$  pelo comprimento de arco. As verificações sendo análogas às da etapa A do teorema IV.8.

Finalmente, para mostrar que o conjunto das funções  $f$  cujos  $\lfloor$ -gradientes são estruturalmente estáveis não são densos, basta mostrar, tendo em vista a proposição IV.1 que existe uma função  $f$  tal que  $j^2 f \not\equiv W$  e  $j^2 f \cap W \neq \emptyset$ .

Seja  $(U, \phi)$  uma carta local de  $M^2$  e  $\beta: M^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tais que:

- i.  $\phi(U) \supset [-3, 3] \times [-3, 3]$ ;
- ii.  $\phi(p) = (x, y)$  e a folheação em  $U$  é dada por  $y = \text{constante}$ ;
- iii.  $\beta \in C^r(M^2, \mathbb{R})$  e  $\beta$  se anula fora de  $\phi^{-1}([-3, 3] \times [-3, 3])$  e vale 1 em  $\phi^{-1}([-2, 2] \times [-2, 2]) = U_1 \subset U$ .

Começamos definindo  $g \in C^r(M^2, \mathbb{R})$  da seguinte maneira:

$$g(p) = \begin{cases} 0 & \text{se } p \notin \phi^{-1}([-3, 3] \times [-3, 3]) \\ \beta(p) \left[ \frac{x^3}{3} + xy^2 - x \right] & \text{se } p \in \phi^{-1}([-3, 3] \times [-3, 3]) \text{ e } \phi(p) = (x, y). \end{cases}$$

Temos, então, o seguinte:

- i.  $j^2 g \not\equiv W$  e
- ii.  $j^2 g_{p_1}, j^2 g_{p_2} \in W$  onde  $p_1, p_2 \in U_1$  são os pontos tais que  $\phi(p_1) = (0, -1)$  e  $\phi(p_2) = (0, 1)$ .

Podemos, então, aproximar  $g$  por uma função  $f \in C^r(M^2, \mathbb{R})$  tal que  $j^2 f \not\equiv W$  e  $j^2 f \cap W \neq \emptyset$ , c.q.d.

BIBLIOGRAFIA

- [1] THOM, R. - Généralisation de la Théorie de Morse aux Variétés Feuilletées - Ann. de l'Institut Fourier, 14 (1969) fasc. 1, 173-189.
- [2] OLIVA, W.M. - Steady Motions of Lagrangian Systems - Bol. da Soc. Brasil. de Matem., vol.2, nº 2 (1971), 37-53.
- [3] Abraham, R. - Transversal Mappings and Flows (N.Y), 1967.
- [4] Pugh, C., Shub M. - Linearization of Normally Hyperbolic Diffeomorphisms and Flows - Invent. math, 10 (1970), 187-198.
- [5] Palis, J; Smale, S. - Structural Stability Theorems - Global Analysis (Proc. Symp. Pure Math., vol. XIV, 1968) 223-231.
- [6] Palis, J. - On Morse - Smale Dynamical Systems - Topology, vol 8 (1969), 385-405
- [7] Palis, J. - Seminário de Sistemas Dinâmicos X (1971) IMPA.
- [8] Wood, J.W. - Foliations on 3-manifolds - Ann. of Math. (2) 89 (1969), 336-358.
- [9] Haefliger, A. - Variétés feuilletées - Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 16 (1962), 367-397.
- [10] Nitecki, Z. - Differentiable Dynamics, The M.I.T. Press, 1971.
- [11] Oliva, W.M. - Propriedades genéricas dos campos de Appell - Ann. Acad. brasil. Ciênc., 592-R (1972) vol. 44.
- [12] Thom, R. - Les singularités des applications différentiables - Ann. l'Inst. Fourier, Grenoble 6 (1956), 43-87.

## I N D I C E

Cap. 0 - Introdução e Exemplos . . . . .	1
0.1 - Introdução. . . . .	1
0.2 - Exemplos. . . . .	3
Cap. I - $\Sigma$ -gradientes. . . . .	9
I.1 - Notações. . . . .	9
I.2 - Pontos singulares de $\text{grad}_{\Sigma} f$ . . . . .	10
I.3 - Cálculo em coordenadas locais . . . . .	12
I.4 - A condição de singularidades $\Sigma$ -simples e "g <sub>e</sub> nérica" . . . . .	16
I.5 - Variação contínua dos pontos singulares $\Sigma$ -simples . . . . .	23
Cap. II - $\Omega$ -Estabilidade . . . . .	29
II.1 - Introdução . . . . .	29
II.2 - Ponto singular $\Sigma$ -hiperbólico . . . . .	29
II.3 - Subvariedades invariantes. . . . .	33
II.4 - $\Omega$ -estabilidade dos $\Sigma$ -gradientes $\Sigma$ -hiperbó- licos. . . . .	37
Cap. III - Estabilidade Estrutural . . . . .	40
III.1 - Introdução. . . . .	40
III.2 - Diagrama de fase para os $\Sigma$ -gradientes . . . . .	42
III.3 - $\Sigma$ -família tubular . . . . .	48
III.4 - Estabilidade Estrutural . . . . .	60
Cap. IV - $\Sigma$ -gradientes em dimensão 2 . . . . .	65
Bibliografia . . . . .	77