O TEOREMA DE MERCER PARA OPERADORES A VALORES NUM ESPAÇO DE HILBERT

sâmi elias arbex

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, para a obtenção do Título de Mestre em Matemática

ORIENTADOR: PROF. DR. CHAIM SAMUEL HÖNIG

Durante a elaboração deste trabalho, o autor recebeu apoio financeiro do B.N.D.E., contratos FUNTEC nº 100 e nº 154 e FINEP convênio 184/CT

← SÃO PAULO, 1974 →

P R E F Á C I O

OBJETIVO

No caso clássico considera-se a equação integral de Fredholm de $2^{\underline{a}}$ espécie com núcleo hermitiano e contínuo

$$\text{(I)} \qquad \lambda x(t) = y(t) + \int_a^b K(t,s)x(s)ds$$

onde são dados: $\lambda \in \mathbb{C}$; $y \in C([a,b])$; $K \in C([a,b] \times [a,b])$ com $K(t,s) = \overline{K(s,t)}$ $\forall t,s \in [a,b]$ e procura-se a função incognita $x \in C([a,b])$. Considera-se então $E = C_{L_2}([a,b])$, que é o espaço pré-hilbertiano das funções contínuas definidas em $[a,b]$ a valores complexos, munido da norma L_2 e o operador $k: x \in E \longmapsto kx \in E$ definido por $\forall\ t \in [a,b]$, $(kx)(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)ds$, que, diante das hipóteses feitas sobre o núcleo K, é hermitiano e compacto. Sendo (λ_n) a sequência dos autovalores não nulos de k e (e_n) a sequência ortonormal correspondente de autovetores, o Teorema de Mercer nos diz que *"Se o núcleo hermitiano e contínuo K é tal que o operador k por ele definido é positivo, então $K(t,s) = \sum_n \lambda_n e_n(t)\,\overline{e_n(s)}$ a série sendo absolutamente e uniformemente convergente em $[a,b] \times [a,b]$".*

O objetivo deste trabalho é estudar a equação (I), chegando às alternativas de Fredholm, bem como verificar a validade do Teorema de Mercer no caso em que as funções x e y que aparecem em (I) estão definidas num espaço compacto X e tomam valores num espaço de Hilbert H, sendo contínuas, e com núcleo K, que a cada par $(t,s) \in X \times X$ associa continuamente $K(t,s)$, um operador de H, que terá que ser de Hilbert-Schmidt.

MOTIVAÇÃO

A motivação para este problema foi alcançada pelo nosso orientador Prof. Dr. Chaim Samuel Hönig ao considerar sistemas diferenciais da forma:

$$(L) \qquad L[y] \equiv y' + Ay = f$$

$$(F) \qquad F[y] = 0$$

onde são dados $f \in C([a,b];C^n)$; $A \in C([a,b];L(C^n))$; $F \in L(C([a,b];C^n);C^n)$ da forma $F[y] = \alpha \cdot y(a) + \beta \cdot y(b)$ com $\alpha,\beta \in L(C^n)$ e procura-se a função incognita $y \in C^{(1)}([a,b];C^n)$.

Para tais sistemas vale o seguinte

Teorema: Se para cada $f \in C([a,b]);C^n)$ o sistema (L) + (F) tem uma e uma só solução, então existe uma função $G:[a,b] \times [a,b] \longrightarrow L(C^n)$, tal que: $y \in C^{(1)}([a,b];C^n)$ é solução de (L)+(F) se, e somente se, $\forall\, t \in [a,b]$, $y(t) = \int_a^b G(t,s)f(s)ds$.

Admitindo-se satisfeita a hipótese do teorema acima enunciado, bem como que o problema (L) + (F) é auto-adjunto, isto é, $\forall\, u,v \in C^{(1)}([a,b];C^n)$ se $F(u) = F(v) = 0$, então $(L[u]|v) = (u|L[v])$

o produto interno sendo o de $C_{L_2}([a,b];C^n)$, o que ainda é equivalente a dizer que G é hermitiano, transformamos o "problema de auto-valores" da resolução do sistema

$$L[y] - \lambda y = f \qquad \lambda \in C$$

$$F[y] = 0$$

no problema da resolução da equação integral:

$$\text{(II)} \qquad y(t) - \lambda \int_a^b G(t,s)y(s)ds = g(t)$$

$$\text{onde } g(t) = \int_a^b G(t,s)f(s)ds$$

Se, para isto, desejarmos trabalhar com coordenadas, sendo $G_{ij}: [a,b]\times[a,b] \longrightarrow C$ as funções coordenadas de G, isto é, tais que $\forall\ t,s \in [a,b]\times[a,b], G(t,s) = \left(G_{ij}(t,s)\right)_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}; y_i: [a,b] \longrightarrow C$, e que $\forall\ t \in [a,b]\ y(t) = (y_i(t))_{1\le i\le n}$ e k_{ij} o operador integral de núcleo G_{ij}, a equação (II) dá, então, origem ao sistema:

$$y_i(t) - \lambda \sum_{j=1}^{n} (k_{ij}y_j)(t) = g_i(t) \qquad 1 \le i \le n$$

ou à equação matricial

$$y(t) - \lambda(ky)(t) = g(t)$$

onde k é a matriz de operadores $(k_{ij})_{ij}$.

O tratamento intrínseco do problema, isto é, a consideração do núcleo G e k como operadores e não como matrizes de operadores é sugerida, então, pelo incoveniente de se trabalhar com muitos índices o que fatalmente ocorre no devenvolvimento da teoria quando trabalhamos com coordenadas, por exemplo ao se considerar autofunções para a matriz (k_{ij}).

APRESENTAÇÃO

No Capítulo 1 apresentamos conceitos e resultados de Análise Funcional que serão utilizados, sendo os mais triviais sem menção explícita, nos capítulos subsequentes. Destacamos neste capítulo o Teorema espectral para operadores hermitianos-compactos definidos num espaço pré-hilbertiano e o Teorema de decomposição polar de um operador compacto em espaços de Hilbert.

No Capítulo 2 apresentamos a teoria existente dos operadores de Hilbert-Schmitd em espaços de Hilbert para com base nela chegarmos a uma definição de tais operadores em espaços pré-hilbertianos, bem como aos resultados correspondentes.

No Capítulo 3 damos um conceito de somabilidade uniforme e o Teorema de Dini generalizado para famílias somáveis, que são utilizados na demonstração do teorema que exibe uma base ortonormal de $C_{L_2}(X;H)$ em termos de uma base de $C_{L_2}(X)$, suposta existente, e de uma base do espaço de Hilbert H (X é compacto). Terminamos o capítulo apresentando os resultados correspondentes ao caso contínuo da representação integral dos operadores de Hilbert-Schmidt.

No Capítulo 4 apresentamos os resultados de que se compõe o nosso objetivo.

Agradeço a todos que colaboraram direta ou indiretamente na feitura deste trabalho, especialmente ao meu orientador Prof. Dr. Chaim Samuel Hönig, e ao colega Prof. Francisco Miraglia Neto com quem discutimos diversos tópicos e de quem obtivemos a maior boa vontade, bem como valiosas sugestões, sem as quais este trabalho fatalmente perderia grande parte do seu valor.

ÍNDICE

C A P Í T U L O 1

PRELIMINARES

Para as notações, definições e demonstrações não apresentadas neste capítulo, referimos o leitor ao texto do Prof. Chaim Samuel Hönig "Análise Funcional e Aplicações", também citado na bibliografia do capítulo.

PRODUTO INTERNO

1.1 - E denotará um espaço pré-hilbertiano sobre C; se $x,y \in E$ indicaremos por $(x|y)$ o produto interno de x por y e por $\|x\| = (x|x)^{1/2}$ a norma de x. Com estas notações valem as seguintes propriedades:

a) desigualdade de Cauchy-Schwarz

$\forall\ x,y \in E, \qquad |(x|y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$

b) $\forall\ y \in E$, a aplicação $f_y : x \in E \longmapsto (x|y) \in C$ é linear, contínua e $\|f_y\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|f_y(x)\| = \|y\|$

c) Se $(x_i)_{i \in I}$ é uma família somável de elementos de E, então para todo $y \in E$ a família $[(x_i|y)]_{i \in I}$ é somável e vale $(\sum_{i \in I} x_i|y) = \sum_{i \in I} (x_i|y)$

d) Se $x_n \xrightarrow{E} x$ e $y_n \xrightarrow{E} y$, então $(x_n|y_n) \longrightarrow (x|y)$

Seja $(e_\alpha)_{\alpha\in A}$ uma família ortonormal (termo que será abreviado por o.n.) de E e $(\lambda_\alpha)_{\alpha\in A}$ uma família de C.

e) $(\lambda_\alpha e_\alpha)_{\alpha\in A}$ somável $\Longrightarrow \forall\ \beta\in A$, $(\sum_{\alpha\in A} \lambda_\alpha e_\alpha | e_\beta) = \lambda_\beta$

f) $x = \sum_{\alpha\in A} x_\alpha e_\alpha$ e $y = \sum_{\alpha\in A} y_\alpha e_\alpha \Longrightarrow (x|y) = \sum_{\alpha\in A} x_\alpha \overline{y_\alpha}$

g) Desigualdade de Bessel: $\forall\ x\in E$, a família $\left[|(x|e_\alpha)|^2\right]_{\alpha\in A}$ é somável e $\sum_{\alpha\in A} |(x|e_\alpha)|^2 \leq \|x\|^2$

h) $x = \sum_{\alpha\in A} (x|e_\alpha)e_\alpha \Longleftrightarrow \|x\|^2 = \sum_{\alpha\in A} |(x|e_\alpha)|^2$

i) (Fischer-Riez) Se E é completo, então:

$(|\lambda_\alpha|^2)_{\alpha\in A}$ somável $\Longrightarrow (\lambda_\alpha e_\alpha)_{\alpha\in A}$ somável

j) Se E é completo, então $\forall\ x\in E$, a família $\left[(x|e_\alpha)e_\alpha\right]_{\alpha\in A}$ é somável.

1.2 - Seja $\{e_\alpha|\alpha\in A\}$ um sistema o.n. de um espaço pré-hilbertiano E

a) São equivalentes as seguintes propriedades:

(i) $\forall\ x\in E$, a família $(x_\alpha e_\alpha)_{\alpha\in A}$ é somável e $x = \sum_{\alpha\in A} x_\alpha e_\alpha$ (onde $x_\alpha = (x|e_\alpha)$)

(ii) $\forall\ x,y\in E$, $(x|y) = \sum_{\alpha\in A} x_\alpha \overline{y_\alpha}$

(iii) $\forall\ x\in E$, $\|x\|^2 = \sum_{\alpha\in A} |x_\alpha|^2$

(iv) $\forall\ x\in E$, $\forall\ \varepsilon>0$, $\exists F\subset A$ F finito, $\exists(\lambda_\alpha)\in C^F$, tal que

$$\|x - \sum_{\alpha\in F} \lambda_\alpha e_\alpha\| < \varepsilon$$

(v) Se $f:E \longrightarrow C$ é linear e contínua e $\forall\ \alpha\in\Lambda$, $f(e_\alpha) = 0$ então $f = 0$

b) Definição: Se um sistema o.n. $\{e_\alpha | \alpha\in\Lambda\}$ de E satisfaz as propriedades equivalentes do item a) diremos que ele é um sistema ortonormal completo ou uma base hilbertiana de E.

OPERADORES COMPACTOS E OPERADORES HERMITIANOS

1.3 - Sejam E e F espaços normados e $A:E \longrightarrow F$ uma aplicação linear e contínua

a) São equivalentes as seguintes propriedades:

(i) A leva e a bola unitária de E num conjunto relativamente compacto de F

(ii) A leva os conjuntos limitados de E em conjuntos relativamente compactos de F

(iii) Toda sequência limitada (x_n) de pontos de E contém uma subsequência (x_{r_n}) tal que a sequência (Ax_{r_n}) é convergente em F.

b) Dizemos que uma aplicação linear $A:E \longrightarrow F$ é compacta se ela satisfaz as condições equivalentes do item anterior.

1.4 - Sejam E e F espaços normados e L(E,F) o espaço das aplicações lineares e contínuas de E em F. Valem as seguintes propriedades:

a) O conjunto das aplicações lineares compactas de E em F é um subespaço vetorial de $L(E,F)$.

b) Sejam E_1 e F_1 espaços normados e $u \in L(E_1,E)$ e $v \in L(F,F_1)$. Se $A \in L(E,F)$ é compacta, então $(v \circ A \circ u) \in L(E_1,F_1)$ é compacta.

c) Se $A \in L(E,F)$ é de posto finito, isto é, $A(E)$ tem dimensão finita, então A é compacta.

d) Se F é um espaço de Banach e $A \in L(E,F)$ é tal que existe uma sequência de operadores compactos $A_n \in L(E,F)$ com $\|A - A_n\| \longrightarrow 0$, então A é compacta (onde se $B \in L(E,F)$ escrevemos $\|B\| = \sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|Bx\|$).

1.5 - Seja E um espaço pre-hilbertiano e $A: E \longrightarrow E$ uma transformação linear

a) <u>Definição</u>: dizemos que uma transformação linear A^* de E é adjunta de A, sse, $\forall\ x,y \in E$, $(Ax|y) = (x|A^*y)$.

b) <u>Definição</u>: dizemos que A é hermitiana, sse, $\forall\ x,y \in E$, $(Ax|y) = (x|Ay)$

c) Se E for um espaço complexo, são equivalentes as seguintes propriedades:

(i) A é hermitiana

(ii) $\exists A^*$ e $A^* = A$

(iii) $(Ax|x) \in \mathbb{R}$; $\forall\ x \in E$

d) Os autovalores de um operador hermitiano são reais e autovetores correspondentes a autovalores distintos são ortogonais.

e) Definição: Dizemos que um operador (simétrico, quando E é um espaço real) A é positivo, se, $\forall\, x \in E$, $(Ax|x) \geq 0$.

TEOREMA ESPECTRAL PARA OPERADORES HERMITIANOS-COMPACTOS

1.6 - Teorema. Seja E um espaço pré-hilbertiano (real ou complexo) e $A: E \longrightarrow E$ um operador hermitiano compacto com $A \neq 0$. Existe uma sequência (finita ou infinita) de autovalores não nulos de A e uma sequência ortonormal (e_n) de autovetores correspondentes, tal que:

(λ_n) contém todos os autovalores não nulos de A

$\forall n$, $|\lambda_n| \geq |\lambda_{n+1}|$ e se (λ_n) é infinita, $\lim\limits_{n\to+\infty} |\lambda_n| = 0$

$\forall x \in E$, $Ax = \sum\limits_n \lambda_n (x|e_n) e_n$ e

$\forall x,y \in E$, $(Ax|y) = \sum\limits_n \lambda_n x_n \overline{y_n}$

Observação: Não explicitamos o conjunto onde varia o índice **n** do teorema anterior para abranger o caso finito e o infinito.

1.7 - Seja A um operador hermitiano compacto de um espaço pré-hilbertiano E. Então A é positivo, **sse**, todos os seus autovalores são positivos.

1.8 - Seja E um espaço de Hilbert. Dada uma sequência o.n. (e_n) de E e (λ_n) com $\lambda_n \in \mathbb{R}$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n = 0$. Então o operador A de E definido por $Ae_n = \lambda_n e_n$ e zero no complemento ortogonal do subespaço gerado pela sequência (e_n) é hermitiano compacto. (Além disso se $\lambda_n \geq 0$ então, A é positivo).

1.9 - Seja E um espaço de Hilbert. Para todo operador compacto positivo A de E, existe um operador compacto positivo B de E tal que $B^2 = A$. (B é chamado raiz quadrada de A e indicado por $A^{1/2}$).

1.10 - Com as notações de 1.6, dado $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$ com $\forall n$ $\lambda \neq \lambda_n$ então $\forall y \in E$ a equação $(\lambda - A)x = y$ tem uma e uma só solução $x \in E$ dada por:

$$x = \frac{1}{\lambda} y + \frac{1}{\lambda} \sum_n \lambda_n \frac{(y|e_n)}{\lambda - \lambda_n} e_n ,$$

a série convergindo em E.

1.11 - Com as notações de 1.6: dado um autovalor $\lambda \neq 0$ do operador A uma condição necessária e suficiente para que a equação $(\lambda - A)x = y$ tenha solução é que y seja ortogonal a todo autovetor de A associado a λ. Neste caso as soluções x da equação acima são da forma:

$$x = \frac{1}{\lambda} y + \frac{1}{\lambda} \sum_{\lambda_n \neq \lambda} \lambda_n \frac{(y|e_n)}{\lambda - \lambda_n} e_n + z$$

onde z é qualquer autovetor associado a λ (isto é $Az = \lambda z$), a série convergindo em E.

DECOMPOSIÇÃO POLAR DE UM OPERADOR COMPACTO

1.12 - Teorema - Sejam H_1 e H_2 espaços de Hilbert e $A: H_1 \longrightarrow H_2$ um operador compacto. Então $A = U \cdot T$ onde $T: H_1 \longrightarrow H_1$ é um operador compacto positivo e U é uma isometria de $T(H_1)$ em H_2.

<u>prova</u>: seja $B = A^* \cdot A : H_1 \longrightarrow H_1$; então B como produto de operadores compactos é compacto; além disso $\forall f \in H_1$, $(Bf|f) = (A^*Af|f) = (Af|Af) \geq 0$, $\therefore$ B é positivo. Seja T o operador compacto positivo de H_1, tal que $T^2 = B$, cuja existência é garantida pelo resultado do enunciado em 1.9. (o operador T será indicado $T = (A^*A)^{1/2} = \text{abs}(A)$).

Comparando $\|Af\|$ e $\|Tf\|$, temos:

$$\|Af\|^2 = (Af|Af) = (A^*Af|f) = (T^2f|f),$$

mas T sendo positivo, de acordo com 1.5c) é hermitiano, $\therefore$ $(T^2f|f) = (Tf|Tf) = \|Tf\|^2$, $\therefore$ os operadores A e T são metricamente iguais, isto é, $\forall f \in H_1$, $\|Af\| = \|Tf\|$.

Podemos agora definir U sobre a imagem de T; assim se $g \in T(H_1)$, $g = Tf$ com $f \in H_1$, colocamos por definição $Ug = Af \in H_2$. U está bem definida, pois se $g = Tf_1 = Tf_2$, então $\|A(f_1 - f_2)\| = \|T(f_1 - f_2)\| = 0$, $\therefore$ $Af_1 = Af_2$. Além disso U é uma isometria, pois se $g = Tf$, temos $\|Ug\| = \|Af\| = \|Tf\| = \|g\|$.

1.13 - <u>Definição</u>. Com as notações de 1.12, a sequência dos autovalores não nulos de $T = \text{abs}(A)$, cuja existência é garantida por 1.6. será chamada "sequência característica de A".

1.14 - <u>Teorema</u>: Se um operador $A : H_1 \longrightarrow H_2$, $A \neq 0$ é compacto, existem sequências o.n. (finitas ou não) (e_n) e (f_n) em H_1 e H_2 respectivamente e uma sequência (λ_n) de números reais, com $\lambda_n > 0$ e $\lim_{n \to +\infty} \lambda_n = 0$ quando (λ_n) é infinita, tais que:

$$\forall g \in H_1, Ag = \sum_n \lambda_n (g|e_n) f_n$$

<u>prova</u>: por 1.12 A=UT onde T é um operador compacto positivo; sejam (λ_n) e (e_n) as sequências de autovalores não nulos e autovetores correspondentes, respectivamente, do operador T, tais que $\forall\ g \in H_1$, $Tg = \sum_n \lambda_n (g|e_n) e_n$ conforme 1.6. Por 1.7. $\forall\ n, \lambda_n > 0$ e fazendo $f_n = Ue_n$, temos a tese.

<u>Corolário</u>: No teorema, se $H_1 = H_2 = H$ e $A: H \longrightarrow H$ é um operador hermitiano compacto então T=A e tomando U como a identidade vemos que (λ_n) é a sequência dos autovalores não nulos de A, e que $\forall n, f_n = e_n$ e $Ae_n = \lambda_n e_n$.

1.15 - <u>Teorema</u>: Se (e_n) e (f_n) forem sequências o.n. em H_1 e H_2 respectivamente e (λ_n) uma sequência de números reais, com $\lambda_n > 0$ e $\lim\limits_{n \to +\infty} \lambda_n = 0$, então existe um único operador compacto $A: H_1 \to H_2$, tal que $\forall\ g \in H_1$, $Ag = \sum_n \lambda_n (g|e_n) f_n$. (Neste caso, (λ_n) é a sequência característica de A.)

<u>prova</u>:

$$\forall g \in H_1,\ \sum_{n=p}^{q} \|\lambda_n (g|e_n) f_n\|^2 \leq \sup_{p \leq n \leq q} |\lambda_n|^2 \sum_{n=p}^{q} |(g|e_n)|^2 \leq \|g\|^2 \sup_{p \leq n \leq q} |\lambda_n|^2$$

$\therefore$ a expressão $Ag = \sum_n \lambda_n (g|e_n) f_n$ define Ag $\forall\ g \in H_1$ e evidentemente, $A \in L(H_1, H_2)$.

Para cada $k \in N$ definimos $A_k \in L(H_1, H_2)$ por

$$\forall\ g \in H_1,\ A_k g = \sum_{n=1}^{k} \lambda_n (g|e_n) f_n$$

$$\|(A-A_k)g\|^2 = \sum_{n \geq k+1} \lambda_n^2\ |(g|e_n)|^2 \leq \Lambda_k^2 \sum_{n \geq k+1} |(g|e_n)|^2 \leq \Lambda_k^2\ \|g\|^2$$

onde $\Lambda_k = \sup\{\lambda_{k+1} : i \geq 0\}$

$$\therefore \text{ como } \lim_{k\to+\infty} \Lambda_k = 0, \ \|A-A_k\| = \sup_{\|g\|\leq 1} \|(A-A_k)g\| \leq \Lambda_k \longrightarrow 0$$

$\therefore$ A como limite na norma de operador de operadores de posto finito é compacto, conforme 1.4.c) e 1.4.d).

1.16 - Teorema: Se $A \in L(H_1, H_2)$ é compacto, então $\|A\| = \sup_n \lambda_n$ onde (λ_n) é a sequência característica de A.

prova:

$$1.14 \Longrightarrow \forall\, g \in H_1, \ Ag = \sum_n \lambda_n (g|e_n) f_n$$

$$\|Ag\|^2 = \sum_n \lambda_n^2 \ |(g|e_n)|^2 \leq \sup_n \lambda_n \|g\|^2, \ \therefore \|A\| = \sup_{\|g\|\leq 1} \|Ag\| \leq \sup_n \lambda_n$$

$$\text{mas } Ae_n = \lambda_n f_n, \ \therefore \|A\| = \sup_{\|g\|\leq 1} \|Ag\| \geq \|Ae_n\| = \lambda_n \ \therefore \|A\| \geq \sup_n \lambda_n$$

1.17 - Um operador $A \in L(H_1, H_2)$ é compacto se, e somente se, é limite na norma de operador de operadores de postos finitos.

BIBLIOGRAFIA DO CAPÍTULO 1

1. CHAIM SAMUEL HÖNIG, "ANÁLISE FUNCIONAL E APLICAÇÕES", volumes I e II, Instituto de Matemática e Estatística, da Universidade de São Paulo, 1970.

2. I.M.GEL'FAND e N.Ya.VILENKIN, "GENERALIZED FUNCTIONS", volume 4, Academic Press, 1964.

CAPÍTULO 2

OPERADORES DE HILBERT-SCHMIDT

2.1 - Notações: para este capítulo usaremos as seguintes notações:

H_1 e H_2 espaços de Hilbert complexos;

$(\eta_i)_{i\in I}$ base o.n. de H_1; $(\psi_j)_{j\in J}$ base o.n. de H_2;

E, F e G espaços pré-hilbertianos complexos;

L(E,F) espaço das aplicações A, lineares e contínuas de E em F, munido da norma $\|A\| = \sup\limits_{\|g\|\leq 1} \|Ag\|$.

OPERADORES DE HILBERT-SCHMIDT EM ESPAÇOS DE HILBERT

2.2 - Lema. Se $A\in L(H_1,H_2)$, então:

$$\sum_{i\in I} \|A\eta_i\|^2 = \sum_{i,j} |(A\eta_i|\psi_j)|^2 = \sum_{j\in J} \|A^*\psi_j\|^2$$

as somas sendo independentes das bases (η_i) e (ψ_j) e podendo ser $+\infty$.

prova: pela igualdade de Parseval, $\forall\ i\in I$, $\|A\eta_i\|^2 = \sum\limits_j |(A\eta_i|\psi_j)|^2$

$\therefore \sum\limits_i \|A\eta_i\|^2 = \sum\limits_{i,j} |(A\eta_i|\psi_j)|^2 = \sum\limits_{i,j} |(\eta_i|A^*\psi_j)|^2 = \sum\limits_j \|A^*\psi_j\|^2$ e como (η_i) e (ψ_j) são quaisquer, temos também a independência das bases.

2.3 - Lema. Se $A \in L(H_1,H_2)$ e $\sum_{i\in I} \|A\eta_i\|^2 < +\infty$, então

$$\|A\| \leq \left(\sum_{i\in I} \|A\eta_i\|^2\right)^{1/2}$$

prova: $\forall\ g \in H_1$, $\|Ag\|^2 = \sum_j |(Ag|\psi_j)|^2 = \sum_j |(g|A^*\psi_j)|^2 \leq$

$$\leq \|g\|^2 \sum_j \|A^*\psi_j\|^2 = \|g\|^2 \sum_i \|A\eta_i\|^2 \ \therefore\ \|A\| = \sup_{\|g\|\leq 1} \|Ag\| \leq$$

$$\leq \left(\sum_{i\in I} \|A\eta_i\|^2\right)^{1/2}$$

2.4 - Lema. Se $A \in L(H_1,H_2)$ é compacto e (λ_n) é a sequência característica de A, então:

$$\sum_{i\in I} \|A\eta_i\|^2 = \sum_n \lambda_n^2 \qquad \text{(a soma podendo ser } +\infty)$$

prova: com as notações de 1.14, temos

$$\forall\ g \in H_1,\ Ag = \sum_n \lambda_n (g|e_n) f_n\ ,\ \therefore \text{ se } (\phi_\ell)_{\ell\in\Lambda}$$

é uma base o.n. de H_1 que contém a sequência o.n. (e_n) vemos que $A\phi_\ell = 0$ para todo ϕ_ℓ diferente de todos os e_n, $\therefore$

$$\sum_{i\in I} \|A\eta_i\|^2 = \sum_{\ell\in\Lambda} \|A\phi_\ell\|^2 = \sum_n \|Ae_n\|^2 = \sum_n \lambda_n^2.$$

2.5 - Teorema. Seja $A \in L(H_1,H_2)$. São equivalentes os seguintes enunciados:

a) Para toda base o.n. $(\phi_\ell)_{\ell\in\Lambda}$ de H_1, $\sum_{\ell\in\Lambda} \|A\phi_\ell\|^2 < +\infty$;

b) A é compacto e $\sum_n \lambda_n^2 < +\infty$, onde (λ_n) é a sequência característica de A.

c) Existem sequências o.n. (e_n) e (f_n) em H_1 e H_2 respectivamente e uma sequência (λ_n) satisfazendo $\lambda_n \in \mathbb{R}, \lambda_n > 0$ e $\sum_n \lambda_n^2 < +\infty$, tal que

$$\forall\ g \in H_1,\ Ag = \sum_n \lambda_n (g|e_n) f_n$$

a) $\Longrightarrow$ b) seja $(\phi_\ell)_{\ell\in\Lambda}$ uma base o.n. de H_1; como $\sum_{\ell\in\Lambda} \|A\phi_\ell\|^2 < +\infty$, temos que: existe uma sequência o.n. $(e_n) \subset (\phi_\ell)_{\ell\in\Lambda}$ tal que $A\phi_\ell = 0$ para todo ϕ_ℓ diferente de todos os e_n; definimos então para cada $k \in \mathbb{N}^*$ um operador $A_k \in L(H_1,H_2)$ por

$$\begin{cases} A_k e_n = Ae_n & \text{se} \quad 1 \le n \le k \\ A_k e_n = 0 & \text{se} \quad n > k \\ A_k \phi_\ell = 0 \text{ para todos os } \phi_\ell \neq e_n\ \forall n \end{cases}$$

Pelo lema 2.3, temos $\|A-A_k\|^2 \le \sum_{\ell\in\Lambda} \|(A-A_k)\phi_\ell\|^2 = \sum_n \|(A-A_k)e_n\|^2 =$

$$= \sum_{n\ge k+1} \|Ae_n\|^2 \longrightarrow 0 \text{ quando } k \longrightarrow +\infty$$

$\therefore$ A, como limite em $L(H_1,H_2)$ de operadores de posto finito, é compacto. O Lema 2.4 termina a prova.

b) $\Longrightarrow$ a) evidente a partir dos Lemas 2.4 e 2.2.

b) $\Longrightarrow$ c) e c) $\Longrightarrow$ b) resultam imediatamente de 1.14 e 1.15.

__Corolário__. Nas hipóteses do teorema 1.15. Se $\sum_n \lambda_n^2 < +\infty$, existe um único operador $A \in L(H_1,H_2)$ satisfazendo as condições equivalentes acima enunciadas.

2.6 - __Definição__. Um operador $A \in L(H_1,H_2)$ é de Hilbert-Schmidt de

H_1 em H_2 se, e somente se, A satisfaz as condições equivalentes do Teorema 2.5. Indicaremos por $\mathcal{H}(H_1,H_2)$ o conjunto de tais operadores e se $H_1 = H_2 = H$ pomos $\mathcal{H}(H) = \mathcal{H}(H,H)$; se $A\in\mathcal{H}(H_1,H_2)$, escrevemos $|||A||| = \left(\sum_{\ell\in\Lambda} \|A\phi_\ell\|^2\right)^{1/2}$ onde $(\phi_\ell)_{\ell\in\Lambda}$ é uma base o.n. qualquer de H_1.

2.7 - Teorema. Seja $A\in\mathcal{H}(H_1,H_2)$

a) $A^*\in\mathcal{H}(H_2,H_1)$ e $|||A||| = |||A^*|||$.

b) $\mathcal{H}(H_1,H_2)$ é um espaço vetorial e $|||\cdot|||$ é uma norma.

c) Se H é um espaço de Hilbert, então:

$$X\in L(H_2,H) \Longrightarrow X\circ A\in\mathcal{H}(H_1,H) \text{ e } |||X\circ A||| < |||A|||.\|X\|$$

$$X\in L(H,H_1) \Longrightarrow A\circ X\in\mathcal{H}(H,H_2) \text{ e } |||A\circ X||| < |||A|||.\|X\|$$

d) $\|A\| \leq |||A|||$

e) $|||A||| = (\sum_n \lambda_n^2)^{1/2}$ onde (λ_n) é a sequência característica de A.

prova:

a) Imediata a partir do Lema 2.2 e da Definição 2.6.

b) se $A,B\in\mathcal{H}(H_1,H_2)$ e $a\in\mathbb{C}$

$$|||aA||| = \left(\sum_{i\in I} \|aA\eta_i\|^2\right)^{1/2} = |a| \left(\sum_i \|A\eta_i\|^2\right)^{1/2} = |a|\ |||A|||.$$

usando a desigualdade de Minkowsky, temos:

$$|||A+B||| = \left(\sum_{i\in I} \|A\eta_i + B\eta_i\|^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_i \|A\eta_i\|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_i \|B\eta_i\|^2\right)^{1/2} =$$

$= |||A||| + |||B|||$; se $|||A||| = 0$, então $\forall\ i\in I$, $A\eta_i = 0$ e como (η_i) é base o.n., $A = 0$.

c) $|||X\circ A||| = \left(\sum_i \|X(A\eta_i)\|^2\right)^{1/2} \leq \|X\|\left(\sum_i \|A\eta_i\|^2\right)^{1/2} = \|X\| \times |||A|||$

a outra desigualdade é de prova análoga.

d) imediata a partir do lema 2.3 e definição 2.6.

e) imediata a partir do lema 2.4 e definição 2.6.

2.8 - Teorema. $\mathcal{H}(H_1,H_2)$ é um espaço de Banach

prova: Seja (A_n) uma sequência de Cauchy em $\mathcal{H}(H_1,H_2)$; pelo teorema 2.7.d) (A_n) é uma sequência de Cauchy em $L(H_1,H_2)$, $\therefore$ $\exists$ $A\in L(H_1,H_2)$ tal que $A_n \xrightarrow{L(H_1,H_2)} A$, $\therefore$ $\forall$ $g\in H_1$, $A_n g \longrightarrow Ag$. Sendo $I_1 \subset I$, I_1 finito, temos:

$$\sum_{i\in I_1} \|A\eta_i\|^2 = \sum_{i\in I_1} \|(\lim_{n\to\infty} A_n)\eta_i\|^2 = \sum_{i\in I_1} (\lim_{n\to\infty} \|A_n\eta_i\|^2) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \sum_{i\in I_1} \|A_n\eta_i\|^2 \leq \lim_{n\to+\infty} |||A_n|||^2 < +\infty, \; \therefore \; A\in\mathcal{H}(H_1,H_2)$$ como

(A_n) é de Cauchy em $\mathcal{H}(H_1,H_2)$, $\forall$ $\varepsilon>0$, $\exists$ $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$m,n \geq N_\varepsilon \Longrightarrow |||A_n - A_m||| < \varepsilon$; para $m \geq N_\varepsilon$ temos,

$$\sum_{i\in I_1} \|(A-A_m)\eta_i\|^2 = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i\in I_1} \|(A_n-A_m)\eta_i\|^2 \leq \varepsilon^2$$

$\therefore$ $A_n \longrightarrow A$ em $\mathcal{H}(H_1,H_2)$.

2.9 - Teorema. Se $F(H_1,H_2)$ é o espaço dos operadores de postos finito de H_1 em H_2 com a topologia de $\mathcal{H}(H_1,H_2)$, temos $\mathcal{H}(H_1,H_2) = \overline{F(H_1,H_2)}$.

prova: evidentemente $\mathcal{H}(H_1,H_2) \supset F(H_1,H_2)$ e como pelo teorema 2.8., $\mathcal{H}(H_1,H_2)$ é completo, $\mathcal{H}(H_1,H_2) \supset \overline{F(H_1,H_2)}$; reciprocamente se

$A\in\mathcal{H}(H_1,H_2)$ da demonstração de que a) $\Longrightarrow$ b) no teorema 2.5., vemos que a sequência (A_k) de operadores de posto finito de H_1 em H_2 tende a A na norma de $\mathcal{H}(H_1,H_2)$ pois

$$|||A-A_k|||^2 = \sum_{\ell\in\Lambda} \|(A-A_k)\phi_\ell\|^2 = \sum_{n\geq k+1} \|Ae_n\|^2 \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0.$$

2.10 - Lema. Se $A,B\in\mathcal{H}(H_1,H_2)$, então $\sum_{i\in I}(A\eta_i|B\eta_i) = \sum_{j\in J}(B^*\psi_j|A^*\psi_j)$ as famílias sendo absolutamente somáveis e as somas independentes das bases (η_i) e (ψ_j).

prova: $\forall\, i\in I$, $|(A\eta_i|B\eta_i)| \leq \|A\eta_i\|.\|B\eta_i\| \leq \frac{1}{2}(\|A\eta_i\|^2 + \|B\eta_i\|^2)$

$\therefore \sum_{i\in I}|(A\eta_i|B\eta_i)| \leq \frac{1}{2}(|||A|||^2 + |||B|||^2)$ e $\forall A,B\in\mathcal{H}(H_1,H_2)$ a família $[(A\eta_i|B\eta_i)]_{i\in I}$ é absolutamente somável.

$$\sum_{i\in I}(A\eta_i|B\eta_i) = \sum_{i,j}(A\eta_i|\psi_j)(\psi_j|B\eta_i) = \sum_{i,j}(\eta_i|A^*\psi_j)(B^*\psi_j|\eta_i) = \sum_{j\in J}(B^*\psi_j|A^*\psi_j)$$

e como as base o.n. (η_i) e (ψ_j) são quaisquer, concluímos que as somas são independentes delas.

2.11 - Definição. Se $A,B\in\mathcal{H}(H_1,H_2)$ definimos $(A|B) = \sum_{\ell\in\Lambda}(A\phi_\ell|B\phi_\ell)$, onde $(\phi_\ell)_{\ell\in\Lambda}$ é uma base o.n. qualquer de H_1.

2.12 - Teorema.

a) a função que a cada par $A,B\in\mathcal{H}(H_1,H_2)$ associa $(A|B)\in\mathbb{C}$ é um produto interno em $\mathcal{H}(H_1,H_2)$, tal que $(A|A) = |||A|||^2$.

b) Se $A\in\mathcal{H}(H_1,H_2)$ e $\forall\, g\in H_1$, $Ag = \sum_n \lambda_n(g|e_n)f_n$, onde (λ_n) (e_n) e (f_n) são como no Teorema 2.5.c), então $(A|B) = \sum_n(Ae_n|Be_n)$.

c) $A,B\in\mathcal{H}(H_1,H_2) \Rightarrow (A|B) = (B^*|A^*)$.

d) $\mathcal{H}(H_1,H_2)$ é um espaço de Hilbert.

<u>prova</u>: a) $(A|A) = \sum_{i\in I} (A\eta_i|A\eta_i) = \sum_{i\in I} \|A\eta_i\|^2 = |||A|||^2$

se $a,b\in\mathbb{C}$, $(aA|bB) = \sum_{i\in I} (aA\eta_i|bB\eta_i) = a.\bar{b} \sum_i (A\eta_i|B\eta_i) = a\bar{b}(A|B)$

$(A|B) = \sum_i (A\eta_i|B\eta_i) = \sum_i \overline{(B\eta_i|A\eta_i)} = \overline{(B|A)}$.

$(A_1+A_2|B) = \sum_i ((A_1+A_2)\eta_i|B\eta_i) = \sum_i (A_1\eta_i|B\eta_i) + \sum_i (A_2\eta_i|B\eta_i) =$
$= (A_1|B) + (A_2|B)$.

b) Se $(\phi_\ell)_{\ell\in\Lambda}$ é uma base de H_1 que contém o sistema o.n. (e_n), então da representação de A, $\forall\, g\in H_1$, $Ag = \sum_n \lambda_n (g|e_n) f_n$ concluímos que:

$A\,\phi_\ell = 0$ para todos os ϕ_ℓ diferentes de todos os e_n

$$\therefore\ (A|B) = \sum_{\ell\in\Lambda} (A\phi_\ell|B\phi_\ell) = \sum_n (Ae_n|Be_n).$$

c) imediata a partir do Lema 2.10 e definição 2.11.

d) imediata a partir dos Teoremas 2.8 e 2.12a).

<u>Comentário</u>. As condições b) e c) do Teorema 2.5 nos dizem como caracterizar um operador de Hilbert-Schmidt dentre os operadores compactos de $L(H_1,H_2)$ pela sua representação dada no Teorema 1.14, e os **Teoremas** 2.7e) e 2.12b) nos mostram como calcular a norma e o produto interno, respectivamente, em termos dessa representação.

<u>OPERADORES DE HILBERT-SCHMIDT EM ESPAÇOS PRÉ-HILBERTIANOS</u>

2.13 - <u>Notação</u>. Denotaremos por $\hat{E}$ o completado de E e por $\hat{A}$ a extensão contínua de A a $\hat{E}$. Teremos $\hat{A}\in L(\hat{E},\hat{F})$.

<u>Comentário</u>. Precisamos da noção de operador de Hilbert-Schmidt em espaços pré-hilbertianos. A primeira idéia é definir: "Se $A \in L(E,F)$ então A é de Hilbert-Schmidt se, e somente se, $\hat{A} \in L(\hat{E},\hat{F})$". Queremos, no entanto, que os operadores de Hilbert-Schmidt formem uma subclasse dos operadores compactos (como no caso de espaços completos, o que decorre da condição b) do Teorema 2.5), o que não acontece se usarmos a definição acima, como mostra o seguinte exemplo:

Seja $l_2^o(\mathbb{N})$ o espaço pré-hilbertiano das sequências quase nulas de números complexos, com produto interno $(x|y) = \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i \bar{y}_i$ onde $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $y = (y_i)_{i \in \mathbb{N}} \in l_2^o(\mathbb{N})$; sendo $e_n = (\delta_{n,i})_{i \in \mathbb{N}} \in l_2^o(\mathbb{N})$, definimos $A: l_2^o(\mathbb{N}) \longrightarrow l_2^o(\mathbb{N})$ por $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $Ae_n = \frac{e_n}{n}$ e se $x = \sum_{n=1}^{N} x_n e_n$, $Ax = \sum_{n=1}^{N} \frac{x_n}{n} e_n$. A é obviamente linear e hermitiano.

a) <u>A é contínuo</u>, pois

$$\|Ax\| = \left\|A\left(\sum_{n=1}^{N} x_n e_n\right)\right\| = \left\|\sum_{n=1}^{N} \frac{x_n}{n} e_n\right\| = \left(\sum_{n=1}^{N} \left(\frac{|x_n|}{n}\right)^2\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}\right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{n=1}^{N} |x_n|^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right)^{1/2} \cdot \|x\|, \therefore \|A\| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right)^{1/2}$$

b) <u>A não é compacto</u>, pois a sequência $(x_N)_{N \in \mathbb{N}}$ onde:

$x_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} e_n$ é limitada em $l_2^o(\mathbb{N})$, pois $\|x_N\| = \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right)^{1/2}$

no entanto, sendo $Ax_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} e_n$, a sequência $(Ax_N)_{N \in \mathbb{N}} \longrightarrow \left(\frac{1}{N^2}\right)_{N \in \mathbb{N}}$

no espaço de Hilbert $l_2(\mathbb{N}) = \widehat{l_2^o(\mathbb{N})}$ das sequências de números complexos de quadrado somável e $\left(\frac{1}{N^2}\right)_{N \in \mathbb{N}} \in l_2(\mathbb{N}) - l_2^o(\mathbb{N})$, donde se con clui que $(Ax_N)_{N\in\mathbb{N}}$ não admite subsequência convergente em $l_2^o(\mathbb{N})$.

c) $\hat{A}\in H(l_2(\mathbb{N}))$

Se $\hat{x} = \sum_{N\in\mathbb{N}} x_n e_n \in l_2(\mathbb{N})$, $\hat{A}\hat{x} = \sum_{N\in\mathbb{N}} \frac{x_n}{n} e_n$ e como $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma base o.n. de $l_2(\mathbb{N})$, $x_n = (x|e_n)$ e $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^2} < +\infty$, pelo teorema 2.5c) e definição 2.6, $\hat{A}\in H(l_2(\mathbb{N}))$.

2.14 - <u>Definição</u>. Um operador $A\in L(E,F)$ é de Hilbert-Schmidt de E em F se, e somente se, A é compacto e $\hat{A}\in H(\hat{E},\hat{F})$ de acordo com a definição 2.6.

Indicaremos por $H(E,F)$ o conjunto de tais operadores e se E=F pomos $H(E,E) = H(E)$.

Se $A,B\in H(E,F)$ escreveremos $(A|B) = (\hat{A}|\hat{B})$ e $|||A||| = |||\hat{A}|||$.

2.15 - <u>Teorema</u>. Sejam $A,B\in H(E,F)$

a) $H(E,F)$ é um espaço vetorial.

b) $(A|B)$ define um produto interno em $H(E,F)$.

c) $X\in L(F,G) \Longrightarrow X\circ A\in H(E,G)$ e $|||X\circ A||| \leq \|X\| \cdot |||A|||$

$X\in L(G,E) \Longrightarrow A\circ X\in H(G,F)$ e $|||A\circ X||| \leq \|X\| \cdot |||A|||$

d) $\|A\| \leq |||A|||$

<u>prova</u>: usando a propriedade universal das extensões contínuas, ou seja "dado um operador $A\in L(E,F)$, existe um único operador $\hat{A}\in L(\hat{E},\hat{F})$ tal que $i_F\circ A = \hat{A}\circ i_E$ onde $i_F:E \longrightarrow \hat{E}$ é a imersão", demonstra-se facilmente:

$$\text{(i)}\quad a\in C \Longrightarrow \widehat{aA} = a\hat{A}$$

$$\text{(ii)}\quad \widehat{A+B} = \hat{A} + \hat{B}$$

(iii) $X \in L(F,G) \Longrightarrow \widehat{X \circ A} = \hat{X} \circ \hat{A}$

(iv) $X \in L(G,E) \Longrightarrow \widehat{A \circ X} = \hat{A} \circ \hat{X}$

a) $a \in C \Longrightarrow aA \in H(E,F)$ pois aA é compacto e $\widehat{aA} = a\hat{A} \in H(\hat{E},\hat{F})$.

$A+B \in H(E,F)$, pois $A+B$ é compacto e $\widehat{A+B} = \hat{A}+\hat{B} \in H(\hat{E},\hat{F})$.

b) as demonstrações são óbvias, por exemplo

$\forall\, A_1, A_2, B \in H(E,F), (A_1+A_2|B) = (\widehat{A_1+A_2}|\hat{B}) = (\hat{A}_1+\hat{A}_2|\hat{B}) = (\hat{A}_1|\hat{B}) + (\hat{A}_2|\hat{B}) =$

$= (A_1|B) + (A_2|B)$.

c) Se $X \in L(F,G)$, $X \circ A$ é compacto como composto de um operador contínuo X com um compacto A, e como $\widehat{X \circ A} = \hat{X} \circ \hat{A}$ pelo teorema 2.7c) $\widehat{X \circ A} \in H(\hat{E},\hat{F})$ e $|||X \circ A||| = |||\widehat{X \circ A}||| = |||\hat{X} \circ \hat{A}||| \le \|\hat{X}\|\ |||\hat{A}||| = \|X\|\ |||A|||$.

d) usando o teorema 2.7d) $\|A\| = \|\hat{A}\| \le |||\hat{A}||| = |||A|||$.

2.16 - <u>Teorema</u>. $\widehat{H(E,F)} = H(\hat{E},\hat{F})$

<u>prova</u>: Consideremos a imersão que a $A \in H(E,F)$ associa $\hat{A} \in H(\hat{E},\hat{F})$; como $|||A||| = |||\hat{A}|||$ a menos das identificações habituais $H(E,F) \subset H(\hat{E},\hat{F})$ e como $H(\hat{E},\hat{F})$ é completo temos $\widehat{H(E,F)} \subset H(\hat{E},\hat{F})$.

Reciprocamente se $A \in H(\hat{E},\hat{F})$ de acordo com a condição c) do Teorema 2.5 existem sequências o.n. $(\hat{e}_n)$ e $(\hat{f}_n)$ em $\hat{E}$ e $\hat{F}$ respectivamente e uma sequência (λ_n) de números reais com $\lambda_n > 0$ e $\sum_n \lambda_n^2 < +\infty$, tal que $\forall\, g \in \hat{E}$, $Ag = \sum_n \lambda_n (g|\hat{e}_n)\hat{f}_n$.

Para cada $k \in \mathbb{N}$ seja $A_k: \hat{E} \longrightarrow \hat{F}$ definido por $\forall\, g \in \hat{E}$, $A_k g = \sum_{n=1}^{k} \lambda_n (g|\hat{e}_n)\hat{f}_n$ e pela demonstração de que a) $\Longrightarrow$ b) no Teorema 2.5 vemos que $|||A-A_k|||^2 = \sum_n \|(A-A_k)\hat{e}_n\|^2 \longrightarrow 0$ quando $k \longrightarrow +\infty$.

Por outro lado como $\hat{f}_n \in \hat{F}$, para cada n, existe uma sequência $(f_{n,i})$ em F tal que $f_{n,i} \xrightarrow{\hat{F}} \hat{f}_n$.

Dado $\varepsilon>0$ $\exists K\in\mathbb{N}$ tal que $|||A-A_K||| < \frac{\varepsilon}{2}$; consideremos então a sequência de operadores $A_{K,i}: E \longrightarrow F$ definidos por

$\forall\, g\in E,\ A_{K,i}g = \sum_{n=1}^{K} \lambda_n (g|\hat{e}_n) f_{n,i}$ que são de posto finito,

$\therefore\ A_{K,i}\in H(E,F)$ para todo i; para cada $1 \leq n \leq K$ $\exists I_n\in\mathbb{N}$ tal que $i \geq I_n \Longrightarrow \|f_{n,i} - \hat{f}_n\| < \dfrac{\varepsilon}{2(\sum_n \lambda_n^2)}$ e seja $I = \max\{I_n\in\mathbb{N}\ ;\ 1\leq n\leq K\}$

se $(\hat{\phi}_\ell)_{\ell\in\Lambda}$ for uma base de $\hat{E}$ que contém o sistema o.n. $(\hat{e}_n)$, vemos que $A_K\hat{\phi}_\ell = A_{K,I}\hat{\phi}_\ell = 0$ para todos os $\hat{\phi}_\ell$ diferentes de todos os $\hat{e}_n$ e para todos os $\hat{e}_n$ para $n > K$, portanto,

$$|||A_K-A_{K,I}|||^2 = \sum_{\ell\in\Lambda} \|(A_K-A_{K,I})\hat{\phi}_\ell\|^2 = \sum_{n=1}^{K}\|(A_K-A_{K,I})\hat{e}_n\|^2 =$$

$$= \sum_{n=1}^{K}\|\lambda'_n\hat{f}_n - \lambda_n f_{n,I}\|^2 = \sum_{n=1}^{K}\lambda_n^2\,\|\hat{f}_n-f_{n,I}\|^2 < \sum_{n=1}^{K}\lambda_n^2\,\frac{\varepsilon^2}{4(\sum_n\lambda_n^2)} \leq \frac{\varepsilon^2}{4}$$

$\therefore\ |||A-A_{K,I}||| \leq |||A-A_k||| + |||A_K-A_{K,I}||| < \varepsilon$ e levando em conta que $H(E,F)\subset H(\hat{E},\hat{F})$, concluimos que $H(E,F)$ é denso em $H(\hat{E},\hat{F})$, o que termina a prova.

Corolário. Se $F(E,F)$ indica o espaço dos operadores de posto finito de E em F, então, pela demonstração do teorema, temos que dado $A\in H(\hat{E},\hat{F})$ e $\varepsilon > 0$, existe $A_{K,I}\in F(E,F)$ satisfazendo $|||A-A_{K,I}||| < \varepsilon$, ou seja $F(E,F)$ é denso em $H(\hat{E},\hat{F})$ e $\therefore\ \widehat{F(E,F)} = \widehat{H(E,F)} = H(\hat{E},\hat{F})$.

2.17 - Lema. Se $A:E \longrightarrow F$ é um operador compacto, então:

a) $\hat{A}(\hat{E}) \subset F$.

b) se $E = F$ então A e $\hat{A}$ têm os mesmos autovalores não nulos e os mesmos autovetores correspondentes a eles.

prova:

a) seja $\hat{y} = \hat{A}\hat{x}\in\hat{A}(\hat{E}) \subset \hat{F}$; existe uma sequência de Cauchy (x_n) de

E tal que $x_n \xrightarrow{\hat{E}} \hat{x}$, $\therefore$ $Ax_n \xrightarrow{\hat{F}} \hat{A}\hat{x} = \hat{y}$ e como (x_n) é limitada em E e A é compacto, (Ax_n) admite uma subsequência convergente em F, $\therefore$ $\hat{y} \in F$.

b) se $\hat{e} \in \hat{E}$ é tal que $\hat{A}\hat{e} = \lambda\hat{e}$ com $\lambda \neq 0$, então pelo item a) $\hat{A}\hat{e} \in E$, $\therefore$ $\hat{e} \in E$, $\therefore A\hat{e} = \lambda\hat{e}$ o que significa que $\hat{e}$ também é autovetor de A correspondente ao mesmo autovalor λ; e como todos os autovetores (resp. autovalores) de A são autovetores (resp. autovalores) de $\hat{A}$, segue a igualdade.

2.18 - <u>Teorema</u>. Se $A, B \in H(E)$ com A hermitiano e (λ_n) e (e_n) são as sequências de autovalores não nulos e dos autovetores correspondentes de A, tal que $\forall\ x \in E$, $Ax = \sum_n \lambda_n (x|e_n) e_n$ dadas pelo Teorema 1.6, Então,

a) $|||A||| = \left(\sum_n \lambda_n^2\right)^{1/2} = \left(\sum_n \|Ae_n\|^2\right)^{1/2}$

b) $(A|B) = \sum_n (Ae_n|Be_n)$

<u>prova</u>: A hermitiano compacto acarreta $\hat{A}$ hermitiano compacto e pelo corolário do Teorema 1.14 e Lema 2.17 vemos que a sequência (λ_n) dos autovalores não nulos de A é a sequência característica de $\hat{A}$, e $\forall\ \hat{x} \in \hat{E}$, $\hat{A}\hat{x} = \sum_n \lambda_n (\hat{x}|e_n) e_n$. Posto isto,

a) pelo Teorema 2.7e), temos $|||A||| = |||\hat{A}||| = \left(\sum_n \lambda_n^2\right)^{1/2} = \left(\sum_n \|Ae_n\|^2\right)^{1/2}$

b) pelo Teorema 2.12b), temos: $(A|B) = (\hat{A}|\hat{B}) = \sum_n (Ae_n|Be_n)$.

2.19 - <u>Teorema</u>. Seja $A \in L(E)$, um operador hermitiano. São eqüivalentes:

a) $A \in H(E)$.

b) A é compacto e $\sum\limits_n \lambda_n^2 < +\infty$ onde (λ_n) é a sequência dos autovalores não nulos de A.

<u>prova</u>: a) $\Longrightarrow$ b) segue da definição 2.14 e do Teorema 2.18a).

b) $\Longrightarrow$ a) pela definição 2.14 basta mostrar que $\hat{A} \in H(\hat{E})$ o que é imediato levando-se em conta a condição b) do Teorema 2.5 e a observação na prova do Teorema anterior.

<u>Comentário</u>: o Teorema 2.19 nos dá um critério para reconhecer um operador de Hilbert-Schmidt dentre os operadores hermitianos e compactos de $L(E)$ através de sua representação dada no Teorema 1.6, e o Teorema 2.18 nos dá a norma e o produto interno em termos dessa representação.

Terminaremos o capítulo apresentando um teorema que nos dá uma base para $H(E,F)$ a partir de bases de E e F.

2.20 - <u>Lema</u>. Para cada par $(f,e) \in F \times E$ definimos o operador $f \otimes e' : E \longrightarrow F$ por: $\forall\, x \in E$, $(f \otimes e')(x) = (x|e)f$, então

a) $\forall\, (f,e) \in F \times E$, $f \otimes e' \in H(E,F)$.

b) Se $f_\alpha, f_\beta \in F$ e $e_\alpha, e_\beta \in E$ então $(f_\alpha \otimes e'_\alpha | f_\beta \otimes e'_\beta) = (f_\alpha | f_\beta)(e_\beta | e_\alpha)$

c) Se $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ e $(f_\beta)_{\beta \in B}$ são famílias em F, $(e_\alpha)_{\alpha \in A}$ e $(e_\beta)_{\beta \in B}$ são famílias em E e (λ_α) e (λ_β) famílias de nºs complexos tais que $(\lambda_\alpha (f_\alpha \otimes e'_\alpha))_{\alpha \in A}$ e $(\lambda_\beta (f_\beta \otimes e'_\beta))_{\beta \in B}$ são somáveis em $H(E,F)$, então $\left(\sum\limits_{\alpha \in A} \lambda_\alpha f_\alpha \otimes e'_\alpha \,\middle|\, \sum\limits_{\beta \in B} \lambda_\beta f_\beta \otimes e'_\beta\right) = \sum\limits_{\substack{\alpha \in A \\ \beta \in B}} \lambda_\alpha \overline{\lambda_\beta} (f_\alpha | f_\beta)(e_\beta | a_\alpha)$, isto é, a família do segundo membro é somável e vale a igualdade.

d) Se $(f_\beta)_{\beta \in B}$ e $(e_\alpha)_{\alpha \in A}$ são sistemas ortonormais em F e E, respectivamente, então $(f_\beta \otimes e'_\alpha)_{\substack{\alpha \in A \\ \beta \in B}}$ é um sistema ortonormal em $H(E,F)$.

e) Se $(f,e) \in F \times E$ e $A \in \mathcal{H}(E,F)$, então $(A|f \otimes e') = (Ae|f)$

prova: a) $f \otimes e'$ é de posto finito.

b) Se $(\hat{x}_\ell)_{\ell \in \Lambda}$ é uma base o.n. de $\hat{E}$, temos

$$(f_\alpha \otimes e'_\alpha | f_\beta \otimes e'_\beta) = (\widehat{f_\alpha \otimes e'_\alpha} | \widehat{f_\beta \otimes e'_\beta}) = \sum_{\ell \in \Lambda} ((\widehat{f_\alpha \otimes e'_\alpha})(\hat{x}_\ell) | (\widehat{f_\beta \otimes e'_\beta})(\hat{x}_\ell)) =$$

$$= \sum_{\ell \in \Lambda} \left[(\hat{x}_\ell | e_\alpha) f_\alpha | (\hat{x}_\ell | e_\beta) f_\beta) \right] = (f_\alpha | f_\beta) \sum_{\ell \in \Lambda} (\hat{x}_\ell | e_\alpha)(e_\beta | \hat{x}_\ell) =$$

$$= (f_\alpha | f_\beta)(e_\beta | e_\alpha).$$

c) imediata à partir de 1.1c) e do item anterior.

d) imediata à partir do item b).

e) Se $(\hat{x}_\ell)_{\ell \in \Lambda}$ é base o.n. de $\hat{E}$, temos

$$(A|f \otimes e') = (\hat{A} | \widehat{f \otimes e'}) = \sum_{\ell \in \Lambda} \left(\hat{A}\hat{x}_\ell | (\widehat{f \otimes e'})(\hat{x}_\ell) \right) = \sum_{\ell \in \Lambda} \left(\hat{A}\hat{x}_\ell | (\hat{x}_\ell | e) f \right) =$$

$$= \sum_{\ell \in \Lambda} \left(\hat{A}[(e|\hat{x}_\ell)\hat{x}_\ell] \middle| f \right) = \left(\hat{A} \sum_{\ell \in \Lambda} (e|\hat{x}_\ell)\hat{x}_\ell \middle| f \right) = (\hat{A}e|f) = (Ae|f).$$

2.21 - Teorema. Se $(e_\alpha)_{\alpha \in A}$ e $(f_\beta)_{\beta \in B}$ são bases o.n. dos espaços de Hilbert H_1 e H_2 respectivamente, então $(f_\beta \otimes e'_\alpha)_{\substack{\alpha \in A \\ \beta \in B}}$ é base o.n. de $\mathcal{H}(H_1,H_2)$.

prova: pelo item d) do Lema anterior, a família $(f_\beta \otimes e'_\alpha)_{\alpha,\beta}$ é um sistema o.n. de $\mathcal{H}(H_1,H_2)$.

Se $A \in \mathcal{H}(H_1,H_2)$ e $\forall\, \alpha \in A$, $\forall\, \beta \in B$, $(A|f_\beta \otimes e'_\alpha) = 0$ então pelo item e) do lema anterior, $(Ae_\alpha|f_\beta) = (A|f_\beta \otimes e'_\alpha) = 0$; como (f_β) é base o.n. de H_2 temos $\forall\, \alpha \in A$, $Ae_\alpha = 0$ e portanto $A=0$. Como $\mathcal{H}(H_1,H_2)$ é um espaço de Hilbert, concluimos a tese.

2.22 - Corolário. Se $(e_\alpha)_{\alpha \in A}$ e $(f_\beta)_{\beta \in B}$ são bases o.n. dos espaços pré-hilbertianos E e F, respectivamente, então $(f_\beta \otimes e'_\alpha)_{\substack{\alpha \in A \\ \beta \in B}}$ é uma base o.n. de $\mathcal{H}(\mathbf{E},\mathbf{F})$.

prova: (e_α) e (f_β) também são bases o.n. de $\hat{E}$ e $\hat{F}$, respectivamente, $\therefore$ $(f_\beta \otimes e'_\alpha)$ é base o.n. de $\mathcal{H}(\hat{E},\hat{F})$ pelo teorema, e como $\forall\ \alpha,\beta$, $f_\beta \otimes e'_\alpha \in \mathcal{H}(E,F)$, segue a tese.

BIBLIOGRAFIA DO CAPÍTULO 2

1. I.M.GEL'FAND e N.Ya.VILENKIN, "GENERALIZED FUNCTIONS", volume 4, Academic Press, 1964.
2. N. DUNFORD e J.T.SCHWARTZ, "LINEAR OPERATOR", volume II, Interscience Publishers, Inc., New York, 1967.
3. R. SCHATTEN, "A THEORY OF CROSS-SPACES", ANNALS OF MATHEMATICS STUDIES, volume 26.

CAPÍTULO 3

REPRESENTAÇÃO INTEGRAL DE OPERADORES DE HILBERT-SCHMIDT

3.1 - Comentário. O conceito de somabilidade uniforme, o Teorema de Dini para famílias somáveis e o Teorema que exibe uma base o.n. de $C_{L_2}(X;H)$ à partir de uma base de $C_{L_2}(X)$ a serem apresentados neste capítulo nos pareceram interessantes, bem como as suas amplitudes maiores do que para nos servir neste trabalho. Além disso, verificamos outras propriedades para a somabilidade uniforme, como por exemplo um critério de Cauchy, que não foram apresentadas por não terem sido usadas.

TEOREMA DE DINI PARA FAMÍLIAS SOMÁVEIS

3.2. - Definição. Seja X um conjunto e $(x_k)_{k\in K}$ uma família de funções de X num espaço normado $(E,\| \ \|)$. Diremos que a família $(x_k)_{k\in K}$ é uniformemente somável para a função $x:X \longrightarrow E$ se, e somente se, $\forall\ \varepsilon>0$, $\exists F_\varepsilon \subset K$ com F_ε finito, tal que $\forall\ F' \subset K$ com F' finito e $F' \supset F_\varepsilon$, temos $\forall\ s\in X$ $\| x(s) - \sum_{k\in F'} x_k(s) \| < \varepsilon$.

3.3 - Teorema. Se X é um espaço topológico e $(x_k)_{k\in K}$ é uma família de funções contínuas de X num espaço normado $(E,\| \ \|)$, uniforme mente somável para a função $x:X \longrightarrow E$, então x é contínua.

<u>prova</u>: seja $s_0 \in X$; dado $\varepsilon>0$, pela Definição 3.2 $\exists F_\varepsilon = F \subset K$ com F finito, tal que $\forall\, s \in X$, $\| x(s) - \sum_{k \in F} x_k(s) \| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Como a função $\sum_{k \in F} x_k$ é contínua em s_0, existe uma vizinhança V_{s_0} de s_0 em X, tal que $\forall\, s \in V_{s_0}$, $\| \sum_{k \in F} x_k(s) - \sum_{k \in F} x_k(s_0) \| < \frac{\varepsilon}{3}$, portanto $\forall\, s \in V_{s_0}$, $\| x(s) - x(s_0) \| \leq \| x(s) - \sum_{k \in F} x_k(s) \| +$

$$+ \| \sum_{k \in F} x_k(s) - \sum_{k \in F} x_k(s_0) \| + \| \sum_{k \in F} x_k(s_0) - x(s_0) \| < \varepsilon.$$

3.4 - <u>Teorema</u>. Se X é um espaço pré-compacto e $(x_k)_{k \in K}$ é uma família de funções contínuas de X em $\mathbb{R}$, satisfazendo $\forall\, k \in K$, $\forall\, s \in X$, $x_k(s) \geq 0$, e se existe uma função contínua $x:X \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $\forall s \in X$, $x(s) = \sum_{k \in K} x_k(s)$ então a família $(x_k)_{k \in K}$ é uniformemente somável para a função x.

<u>prova</u>: dado $\varepsilon>0$ para cada $s \in X$, existe $F_s \subset K$ com F_s finito, tal que $|x(s) - \sum_{k \in F_s} x_k(s)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Pelas hipóteses de continuidade, existe uma vizinhança V_s para cada $s \in X$, de s em X, tal que $\forall\, t \in V_s$,

$$|x(t) - x(s)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{e} \quad \left| \sum_{k \in F_s} x_k(t) - \sum_{k \in F_s} x_k(s) \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Como X é pré-compacto existem $s_1, \ldots, s_n$ em X, tal que $\bigcup_{1 \leq i \leq n} V_{s_i} \supset X$. Seja $F = F_\varepsilon = \bigcup_{1 \leq i \leq n} F_{s_i}$. $\forall\, t \in X$, $\exists i$: $t \in V_{s_i}$, portanto se $F' \subset K$ com F' finito e $F' \supset F$, temos:

$$|x(t) - \sum_{k \in F'} x_k(t)| = x(t) - \sum_{k \in F'} x_k(t) \leq x(t) - \sum_{k \in F_{s_i}} x_k(t) =$$

$$= |x(t) - \sum_{k\in F_{s_i}} x_k(t)| \le |x(t) - x(s_i)| + |x(s_i) - \sum_{k\in F_{s_i}} x_k(s_i)| +$$

$$+ |\sum_{k\in F_{s_i}} x_k(s_i) - \sum_{k\in F_{s_i}} x_k(t)| < \varepsilon. \qquad \text{c.q.d.}$$

3.5 - Notações. No que segue neste capítulo usaremos as seguintes notações:

- X e Y espaços compactos, isto é, pré-compactos e de Hausdorff;
  H_1, H_2 e H espaços de Hilbert complexos;
  $(h_{1,i})_{i\in I}$ base o.n. de H_1; $(h_{2,j})_{j\in J}$ base o.n. de H_2.
  $(h_k)_{k\in K}$ base o.n. de H.
- $C(X;H)$: espaço vetorial das funções contínuas definidas em X a valores em H; $C(X) = C(X;\mathbb{C})$;
- Admitiremos fixada uma medida positiva μ sobre X, isto é, uma aplicação linear de $C(X)$ em $\mathbb{C}$, satisfazendo $\forall f\in C(X), f\ge 0 \Rightarrow \mu(f)\ge 0$.
- Dada a função $f\in C(X)$, por simplicidade, a integral de f sobre X relativa a μ, isto é, o número complexo $\mu(f)$, será denotada por $\int_X f(s)ds$ sem referência explícita à medida μ fixada.
- Admitiremos também que $\mu(X) = \int_X 1\, ds > 0$ e que está fixada uma medida positiva sobre Y satisfazendo a mesma condição.
- Se $x\in C(X;H)$ denotaremos por $\int_X x(s)ds$ a integral da função x sobre X relativa a μ, ou seja o vetor de H, tal que $\forall\, h\in H$, $(\int_X x(s)ds|h) = \int_X (x(s)|h)ds$ cuja existência é garantida pelo Teorema de Riesz.
- $E=C_{L_2}(X;H_1)$: espaço $C(X;H_1)$ munido do produto interno $\forall x,y\in C(X;H_1)$, $(x|y)=\int_X (x(s)|y(s))ds$; em particular $C_{L_2}(X)=C_{L_2}(X;\mathbb{C})$.

$\cdot F = C_{L_2}(Y;H_2)$.

3.6 - Observação -Só usaremos as propriedades mais elementares da integral, razão pela qual não as explicitaremos, referindo, no entanto, o texto de N.Bourbaki (referência 3, da bibliografia deste capítulo). A seguir apresentaremos um Teorema que relaciona a somabilidade uniforme e a integração.

3.7 - Teorema. Seja $(x_k)_{k\in K}$ uma família de $C(X;H)$ uniformemente somável para $x\in C(X;H)$. Se $I = \int_X x(s)ds$ e $\forall\, k\in K, I_k = \int_X x_k(s)ds$, então a família $(I_k)_{k\in K}$ é somável em H e $\sum_{k\in K} I_k = I$.

prova: Dado $\varepsilon>0$ $\exists$ $F = F_\varepsilon \subset K$ com F finito, tal que $\forall\, F'\supset F$ com F' finito e $F'\subset K$, $\forall\, s\in X$, $\| x(s) - \sum_{k\in F'} x_k(s) \| < \frac{\varepsilon}{\mu(X)}$

$$\| I - \sum_{k\in F'} I_k \| = \| \int_X x(s)ds - \sum_{k\in F'} \int_X x_k(s)ds \| = \| \int_X (x(s) - \sum_{k\in F'} x_k(s))ds \| \leq$$

$$\leq \int_X \| x(s) - \sum_{k\in F'} x_k(s) \| ds \leq \sup_{s\in X} \| x(s) - \sum_{k\in F'} x_k(s) \| .\mu(X) \leq \varepsilon.$$

EXISTÊNCIA DE BASE PARA $C_{L_2}(X;H)$

3.8. Teorema. Se existe uma base o.n. $(\eta_\delta)_{\delta\in D}$ de $C_{L_2}(X)$, então a família $(\eta_\delta h_k)_{\substack{\delta\in D\\ k\in K}}$ é uma base o.n. de $C_{L_2}(X;H)$, onde $\forall\, \delta\in D$, $\forall\, k\in K$, $\forall\, s\in X$, $(\eta_\delta h_k)(s) = \eta_\delta(s).h_k$.

prova: a) $(\eta_{\delta_1} h_{k_1} | \eta_{\delta_2} h_{k_2}) = \int_X (\eta_{\delta_1} h_{k_1}(s) | \eta_{\delta_2} h_{k_2}(s))\, ds =$

$$= (h_{k_1}|h_{k_2}) \int_X \eta_{\delta_1}(s).\overline{\eta_{\delta_2}(s)}ds = (h_{k_1}|h_{k_2})(\eta_{\delta_1}|\eta_{\delta_2}) = \delta_{k_1,k_2}.\delta_{\delta_1,\delta_2}$$

portanto a família $(\eta_\delta h_k)_{\substack{\delta\in D\\ k\in K}}$ é ortonormal.

b) Seja $x\in C_{L_2}(X;H)$ e $\varepsilon>0$; para cada $k\in K$ seja $x_k\in C_{L_2}(X)$ defi nida por $\forall\ s \in X,\ x_k(s) = (x(s)|h_k)$.

c) Para cada $s\in X$, $x(s)\in H$ e como $(h_k)_{k\in K}$ é base o.n. de H, temos:

$$\| x(s) \|^2 = \sum_{k\in K} |(x(s)|h_k)|^2 = \sum_{k\in K} |x_k(s)|^2$$

d) Aplicando o Teorema 3.4 à família $(|x_k|^2)_{k\in K}$ e à função $\|x\|^2$ obtemos uma somabilidade uniforme na igualdade em c), portanto $\exists\ F = F_\varepsilon \subset K$ com F finito, tal que

$$\forall\ s\in X\ ,\ \left|\ \| x(s) \|^2 - \sum_{k\in F} |x_k(s)|^2 \right| < \frac{\varepsilon^2}{4\mu(X)}$$

e) Pela condição (iv) do Teorema da base 1.2a), como $(\eta_\delta)_{\delta\in D}$ é a base o.n. de $C_{L_2}(X)$, temos:

$\forall\ k\in F, \exists\ D_k \subset D$ com D_k finito, $\exists\ (\lambda_{k,\delta})_{\delta\in D_k} \in \mathbb{C}^{D_k}$, tal que:

$\| x_k - \sum_{\delta\in D_k} \lambda_{k,\delta}\, \eta_\delta \| < \dfrac{\varepsilon}{2|F|}$, onde $|F|$ = número de elementos de F

portanto, $\| \sum_{k\in F} (x_k - \sum_{\delta\in D_k} \lambda_{k,\delta}\, \eta_\delta) h_k \| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

f) $\forall\ s\in X$, $\| (x - \sum_{k\in F} x_k h_k)(s) \|^2 = \| x(s) - \sum_{k\in F} x_k(s) h_k \|^2 =$

$= \| x(s) - \sum_{k\in F} (x(s)|h_k) h_k \|^2 = \| x(s) \|^2 - \sum_{k\in F} |(x(s)|h)|^2 =$

$= \| x(s) \|^2 - \sum_{k\in F} |x_k(s)|^2$, portanto pelo item d),

$\sup_{s\in X} \| (x - \sum_{k\in F} x_k h_k)(s) \|^2 \le \dfrac{\varepsilon^2}{4\mu(X)}$, portanto,

$$\| x - \sum_{k\in F} x_k h_k \|^2 = \int_X \| (x - \sum_{k\in F} x_k h_k)(s) \|^2 ds \le \frac{\varepsilon^2}{4} .$$

g) De e) e f) segue que:

$$\| x - \sum_{\substack{\delta \in D_k \\ k \in F}} \lambda_{k,\delta} \eta_\delta h_k \| \leq \| x - \sum_{k \in F} x_k h_k \| + \| \sum_{k \in F} \left(x_k - \sum_{\delta \in D_k} \lambda_{k,\delta} \eta_\delta \right) h_k \| < \varepsilon$$

e pela condição (iv) do Teorema 1.2a) concluímos a tese.

3.9 - Corolário. Na hipótese do teorema, a família

$\left(\eta_\delta (h_{2,j} \otimes h'_{1,i}) \right)_{\delta \in D, i \in I, j \in J}$ é uma base o.n. de $C_{L_2}(X; H(H_1, H_2))$.

prova: imediata à partir do Teorema 2.21.

3.10 - Corolário. Se existem bases o.n. $(\eta_\delta)_{\delta \in D}$ e $(\psi_\nu)_{\nu \in N}$ de $C_{L_2}(X)$ e $C_{L_2}(Y)$, respectivamente, então a família

$\left((\psi_\nu \cdot \eta_\delta)(h_{2,j} \otimes h'_{1,i}) \right)_{\substack{\nu,\delta \\ i,j}}$ é uma base o.n. de $C_{L_2}(Y \times X; H(H_1, H_2))$.

prova: por um corolário do Teorema de Stone-Weierstrass $(\psi_\nu \cdot \eta_\delta)_{\substack{\nu \in N \\ \delta \in D}}$ é uma base o.n. de $C_{L_2}(Y \times X)$ (ver referência 2, da bibliografia deste capítulo), e pelo teorema segue o resultado.

3.11 - Lema. Para cada par $(f,e) \in F \times E$, definimos a função: $P_{(f,e)}: Y \times X \longrightarrow H(H_1, H_2)$ por: $\forall\ (t,s) \in Y \times X, P_{(f,e)}(t,s) = f(t) \otimes (e(s))'$. Então:

a) $\forall\ (f,e) \in F \times E,\ P_{(f,e)} \in C_{L_2}(Y \times X; H(H_1, H_2)) = G$

b) Se $f_1, f_2 \in F$ e $e_1, e_2 \in E$, então

$$\left(P_{(f_1,e_1)} \middle| P_{(f_2,e_2)} \right)_G = \left(f_1 \otimes e'_1 \middle| f_2 \otimes e'_2 \right)_{H(E,F)}$$

prova:

a) seja $(t_o,s_o)\in Y\times X$, $|||P_{(f,e)}(t,s) - P_{(f,e)}(t_o,s_o)||| =$

$= |||f(t)\otimes e(s)' - f(t_o)\otimes e(s_o)'||| \leq |||(f(t)-f(t_o))\otimes(e(s)-e(s_o))'||| +$

$+ |||f(t_o)\otimes(e(s)-e(s_o))'||| + |||(f(t)-f(t_o))\otimes e(s_o)'||| \overset{2.20b)}{=}$

$= \|f(t)-f(t_o)\|.\|e(s)-e(s_o)\| + \|f(t_o)\|.\|e(s)-e(s_o)\| +$

$+ \|f(t)-f(t_o)\|.\|e(s_o)\|$ e como e e f são contínuas, segue a tese.

b) $(P_{(f_1,e_1)}|P_{(f_2,e_2)}) = \int_X\int_Y \left(P_{(f_1,e_1)}(t,s)|P_{(f_2,e_2)}(t,s)\right)dtds =$

$= \int_X\int_Y (f_1(t)\otimes e_1(s)'|f_2(t)\otimes e_2(s)')dtds \overset{2.20b)}{=}$

$= \int_X\int_Y (f_1(t)|f_2(t)).(e_2(s)|e_1(s))dtds =$

$= (\int_X (e_2(s)|e_1(s))ds).\int_Y (f_1(t)|f_2(t))dt = (e_2|e_1)(f_1|f_2) =$

$\overset{2.20b)}{=} (f_1\otimes e_1'|f_2\otimes e_2')$.

<u>Notação</u>. Pelo lema anterior vemos que se $(f,e)\in F\times E$, há uma correspondência isométrica entre $f\otimes e'\in H(E,F)$ e $P_{(f,e)}\in C_{L_2}(Y\times X;H(H_1,H_2))$. No que segue neste trabalho, usaremos também $f\otimes e'$ para denotar a função $P_{(f,e)}$, ficando claro, pelo contexto, qual dos significados está sendo usado. Analogamente se $e\in E$ e $h\in H_2$, $h\otimes e'$ denotará também a função de $C_{L_2}(X;H(H_1,H_2))$ definida por $\forall\ s\in X, (h\otimes e')(s) = h\otimes(e(s))'$. Posto isto, podemos reenunciar os Corolários 3.9 e 3.10 do Teorema 3.8.

3.12 - <u>Corolário</u>. Se existe uma base $(\eta_\delta)_{\delta\in D}$ de $C_{L_2}(X)$, então:

$$\left\{\eta_\delta(h_{2,j}\otimes h_{1,i}')\right\}_{\delta,i,j} = \left\{(\eta_\delta h_{2,j})\otimes h_{1,i}'\right\} = \left\{h_{2,j}\otimes(\overline{\eta_\delta} h_{1,i})'\right\}$$

é uma base o.n. de $C_{L_2}(X;\mathcal{H}(H_1,H_2))$.

3.13 - Corolário. Se existem bases o.n. $(\eta_\delta)_{\delta\in D}$ de $C_{L_2}(X)$ e $(\psi_\nu)_{\nu\in N}$ de $C_{L_2}(Y)$, então:

$$\left[\eta_\delta\psi_\nu\ (h_{2,j}\otimes h'_{1,i})\right] = \left[(\eta_\delta h_{2,j})\otimes(\bar{\psi}_\nu h_{1,i})'\right]$$

é uma base o.n. de $C_{L_2}(Y\times X;\mathcal{H}(H_1,H_2))$, ou seja existem bases $(e_\alpha) = (\eta_\delta h_{2,j})$ e $(f_\beta) = (\bar{\psi}_\nu h_{1,i})$ de E e F tais que $(f_\beta\otimes e'_\alpha)$ é uma base de $C_{L_2}(Y\times X;\mathcal{H}(H_1,H_2))$.

OPERADORES DE HILBERT-SCHMIDT DEFINIDOS POR NÚCLEOS CONTÍNUOS

3.14 - Comentário. Classicamente a motivação para o estudo dos operadores de Hilbert-Schmidt é essencialmente o fato de que tais operadores quando definidos em certos espaços de funções são exatamente aqueles que tem uma representação integral com um núcleo de quadrado integrável, mais precisamente se Ω é um subconjunto mensurável de $\mathbb{R}^n$ e $L_2(\Omega)$ é o espaço das funções mensuráveis em Ω e de quadrado integrável, a correspondência que a associa a cada $K\in L_2(\Omega\times\Omega)$ o operador $k\in\mathcal{H}(L_2(\Omega))$ definido por $\forall\ f\in L_2(\Omega)$, $\forall\ t\in\Omega$, $(kf)(t) = \int_\Omega K(t,s)f(s)ds$ é um isomorfismo entre os espaços $L_2(\Omega\times\Omega)$ e $\mathcal{H}(L_2(\Omega))$ (ver referência 1, da bibliografia deste capítulo). Não estabeleceremos tal correspondência por via direta no nosso contexto, por não estarmos trabalhando com espaços completos, mas apresentaremos os resultados correspondentes ao caso contínuo, ou sejam: existe uma inclusão isométrica $i:C_{L_2}(Y\times X;\mathcal{H}(H_1,H_2)) \longrightarrow \mathcal{H}(E,F)$; quais quer que sejam as bases o.n. $(e_\alpha)_{\alpha\in A}$ de E e $(f_\beta)_{\beta\in B}$ de F, a família $(f_\beta \otimes e'_\alpha)_{\substack{\alpha\in A\\ \beta\in B}}$ é uma base o.n. de $C_{L_2}(Y\times X; H(H_1,H_2))$ e de $H(E,F)$ e finalmente $H(\hat{E},\hat{F}) = \widehat{H(E,F)} = \widehat{C_{L_2}(Y\times X;H(H_1,H_2))}$.

3.15 - Lema. Seja $K\in C_{L_2}(Y\times X; L(H_1,H_2))$; consideremos para cada $x\in E$, a função $kx: Y \longrightarrow H_2$ definida por $\forall\, t\in Y, (kx)(t) = \int_X K(t,s)x(s)ds$.

a) $\forall\, x\in E$, $kx\in C(Y;H_2)$.

b) sendo k a aplicação que a cada $x\in E$ associa $kx\in F$, temos: $k\in L(E,F)$.

(Neste caso diremos que k é o operador definido pelo núcleo K).

prova:

a) seja $t_0\in Y$; como K é uniformemente contínua em $Y\times X$, existem vizinhanças U e V das diagonais de $X\times X$ e $Y\times Y$, respectivamente, tais que: $(t_1,t_2)\in V$ e $(s_1,s_2)\in U$ acarreta $\| K(t_1,s_1) - K(t_2,s_2)\| < \varepsilon$. Portanto, para a vizinhança de t_0, $V_0 = \{t\in Y: (t_0,t)\in V\}$, temos: $\forall\, t\in V_0$, $\forall\, s\in X$, $\| K(t,s) - K(t_0,s)\| < \varepsilon$. Portanto, $\forall\, t\in V_0$, $\| kx(t) - kx(t_0)\| =$

$$= \left\| \int_X \left[K(t,s)-K(t_0,s)\right]x(s)ds \right\| \leq \int_X \|K(t,s)-K(t_0,s)\| . \| x(s)\| ds \leq$$

$$\leq \left[\int_X \| K(t,s)-K(t_0,s)\|^2 ds\right]^{1/2} \left[\int_X \|x(s)\|^2 ds\right]^{1/2} \leq \| x\| . \mu(X)^{1/2}\, \varepsilon$$

onde usamos a desigualdade de Hölder.

b) k é evidentemente linear. $\forall x\in E$, $\|kx\|^2 = \int_Y \|kx(t)\|^2 dt =$

$$= \int_Y \left\| \int_X K(t,s)x(s)ds \right\|^2 dt \leq \int_Y \left[\int_X \| K(t,s)\| . \| x(s)\| ds\right]^2 dt \leq$$

$$\leq \int_Y \left[\int_X \|K(t,s)\|^2 ds\right] . \left[\int_X \|x(s)\|^2 ds\right] dt =$$

$$= \left[\int_Y \int_X \| K(t,s)\|^2 dsdt\right] . \int_X \|x(s)\|^2 ds = \|K\|^2 . \|x\|^2 .$$

Portanto, k é contínua e $\|k\| \leq \|K\|$.

3.16 - Lema. Seja $F_1 = C_\infty(Y;H_2)$ o espaço $C(Y;H_2)$ das funções contínuas de Y em H_2 com a norma da convergência uniforme, ou seja, se $y \in F_1$ $\|y\| = \sup\limits_{t\in Y} \| y(t) \|$.

Pelo item a) do lema anterior vemos que para cada $x \in E$, $kx \in F_1$; usaremos a notação k_1 para o operador que a cada $x \in E$ associa $k_1 x = kx \in F_1$, para ressaltar que o espaço de chegada é F_1 e não F. Nestas condições temos que $k_1 \in L(E,F_1)$.

prova: $\forall\ x \in E$, $\| k_1 x\| = \sup\limits_{t\in Y} \| k_1 x(t) \| = \sup\limits_{t\in Y} \left\| \int_X K(t,s)x(s)ds \right\| \leq$

$$\leq \| x \| . \sup_{t\in Y} \left[\int_X \| K(t,s) \|^2 ds\right]^{1/2} .$$

3.17 - Teorema. Com as notações de 3.15 e 3.16. Se para cada par $(t,s) \in Y\times X$, $K(t,s) \in L(H_1,H_2)$ é compacto, então $k_1 \in L(E,F_1)$ é compacto.

prova: Sendo B a bola unitária de $C_{L_2}(X;H_1) = E$ e B_1 a bola unitária de H_1, usaremos o Teorema de Áscoli para mostrar que $k_1 B$ é relativamente compacto em F_1.

a) $k_1 B$ é equicontínuo. Da demonstração do Lema 3.15a) vemos que $\forall\ t_0 \in Y$, $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists V_0$ vizinhança de t_0 em Y, tal que: $\forall\ x \in E$ e $\forall t \in V_0$, $\| k_1 x(t) - k_1 x(t_0) \| \leq \| x\| \, \mu(X)^{1/2} . \varepsilon$, portanto, $\forall x \in B$, e $t \in V_0$, $\| k_1 x(t) - k_1 x(t_0) \| \leq \mu(X)^{1/2} . \varepsilon$, pois $\| x\| \leq 1$ ou seja $k_1 B$ é equicontínuo em t_o.

b) $\forall\ t_o \in Y, (k_1 B)(t_o)$ é relativamente compacto em H_2. Mostraremos equivalentemente que dado $\varepsilon > 0$, $\exists A_\varepsilon \subset H_2$ com A_ε relativamente compacto, tal que $\forall x \in B, \exists h_x \in A_\varepsilon : d(h_x, (k_1 x)(t_o)) < \varepsilon$ ~~$d(A_\varepsilon, (k_1 B)(t_o)) < \varepsilon$, onde $d(A_\varepsilon, (k_1 B)(t_o))$ indica a distância em H_2, entre os conjuntos A_ε e $(k_1 B)(t_o)$~~.

i) A função que a cada $s \in X$ associa $K(t_o, s) \in L(H_1, H_2)$ é uniformemente contínua em X, portanto, existe uma vizinhança U da diagonal de $X \times X$, tal que $\forall\ (s_1, s_2) \in U$, $\| K(t_o, s_1) - K(t_o, s_2) \| < \dfrac{\varepsilon}{\mu(X)^{1/2}}$. Para cada $s \in X$ consideremos a vizinhança $U_s = \{s' \in X : (x, x') \in U\}$ de s, e como X é pré-compacto existem $s_1, \ldots, s_n$ em X, tal que $\bigcup_{1 \leq i \leq n} V_{s_i} = X$. Seja $C_1 = U_{s_1}$ e $C_k = U_{s_k} - \bigcup_{1 \leq i \leq k-1} C_i$ para $k = 2, \ldots, n$, portanto $\bigcup_{1 \leq i \leq n} C_i = X$ e $C_i \cap C_j = \emptyset$ se $i \neq j$ e $\forall s \in C_i, \| K(t_o, s) - K(t_o, s_i) \| < \dfrac{\varepsilon}{\mu(X)^{1/2}}$ para $i = 1, \ldots, n$.

(ii) Seja $A_\varepsilon = \mu(X)^{1/2} . \sum_{i=1}^{n} K(t_o, s_i) B_1$; como por hipótese $K(t_o, s_i)$ é compacto, $K(t_o, s_i) B_1$ é relativamente compacto em H_2 e portanto A_ε também.

(iii) $\forall\ x \in B$, $\| \int_{C_i} x(s) ds \| \leq \int_{C_i} \| x(s) \| ds \leq \| x \| . \mu(X)^{1/2} \leq \mu(X)^{1/2}$,

portanto para $1 \leq i \leq n$ $\int_{C_i} x(s) ds \in \mu(X)^{1/2} B_1$

seja $h_x = \sum_{i=1}^{n} K(t_o, s_i) \left(\int_{C_i} x(s) ds \right) \in A_\varepsilon$.

(iv) $\forall x \in B$, $\| h_x - (kx)(t_o) \| =$

$$= \left\| \sum_{i=1}^{n} K(t_o, s_i) \left[\int_{C_i} x(s) ds \right] - \sum_{i=1}^{n} \int_{C_i} K(t_o, s) x(s) ds \right\| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \int_{C_i} \| K(t_o, s_i) - K(t_o, s) \| . \| x(s) \| ds \leq \frac{\varepsilon}{\mu(X)^{1/2}} . \sum_{i=1}^{n} \int_{C_i} \| x(s) \| ds =$$

$$= \frac{\varepsilon}{\mu(X)^{1/2}} \int_X \| x(s)\| ds \leq \varepsilon.$$

3.18 - Corolário. Com as notações do Teorema, o operador $k \in L(E,F)$ é compacto.

prova: a inclusão i de F_1 em F é contínua e $k = i \circ k_1$.

3.19 - Teorema. Com as notações de 3.15. Se X e Y são tais que existem bases o.n. para $C_{L_2}(X)$ e $C_{L_2}(Y)$ e se $K \in C_{L_2}(Y \times X; \mathcal{H}(H_1,H_2))$, então $k \in \mathcal{H}(E,F)$ e $|||k||| = \| K \|$.

prova: Sejam $(e_\alpha)_{\alpha \in A}$ e $(f_\beta)_{\beta \in B}$ bases o.n. de E e F, respectivamente, tais que $(f_\beta \otimes e'_\alpha)_{\substack{\alpha \in A \\ \beta \in B}}$ é base o.n. de $C_{L_2}(Y \times X; \mathcal{H}(H_1,H_2))$, cuja existência é garantida pelas hipóteses feitas e pelo corolário 3.13. Então,

$$|||k|||^2 = \sum_{\alpha \in A} \|ke_\alpha\|^2 = \sum_{\alpha,\beta} |(ke_\alpha | f_\beta)|^2 = \sum_{\alpha,\beta} \left| \int_Y (ke_\alpha(t) | f_\beta(t)) dt \right|^2 =$$

$$= \sum_{\alpha,\beta} \left| \int_Y \left(\int_X K(t,s) e_\alpha(s) ds \,\Big|\, f_\beta(t) \right) dt \right|^2 = \sum_{\alpha,\beta} \left| \int_X \int_Y (K(t,s) e_\alpha(s) | f_\beta(t)) ds dt \right|^2 =$$

$$= \sum_{\alpha,\beta} \left| \int_Y \int_X (K(t,s) | f_\beta(t) \otimes e'_\alpha(s)) ds dt \right|^2 = \sum_{\alpha,\beta} |(K | f_\beta \otimes e'_\alpha)|^2 = \|K\|^2.$$

3.20 - Corolário. Se K_1, $K_2 \in C_{L_2}(Y \times X; \mathcal{H}(H_1,H_2))$ definem o mesmo operador k, então $K_1 = K_2$.

3.21 - Corolário. A aplicação i que a cada $K \in C_{L_2}(Y \times X; \mathcal{H}(H_1,H_2))$ associa $i(K) = k \in \mathcal{H}(E,F)$ é uma isometria.

3.22 - Corolário. Se $(e_\alpha)_{\alpha \in A}$ e $(f_\beta)_{\beta \in B}$ são bases o.n. quaisquer de E e F, respectivamente, então $(f_\beta \otimes e'_\alpha)_{\substack{\alpha \in A \\ \beta \in B}}$ é uma base o.n. de $\mathcal{H}(E,F)$.

<u>prova</u>: 3.21 $\Longrightarrow$ $i : C_{L_2}(Y\times X; \mathcal{H}(H_1,H_2)) \longrightarrow \mathcal{H}(E,F)$ é uma isometria; $\forall\ \alpha\in A$, $\forall\ \beta\in B$, $f_\beta \otimes e'_\alpha \in C_{L_2}(Y\times X;\mathcal{H}(H_1,H_2))$ e 2.22. fornece que a família $(f_\beta\otimes e'_\alpha)_{\substack{\alpha\in A\\ \beta\in B}}$ é base o.n. de $\mathcal{H}(E,F)$.

3.23 - <u>Corolário</u>. $\mathcal{H}(\hat{E},\hat{F}) = \widehat{\mathcal{H}(E,F)} = \widehat{C_{L_2}(Y\times X;\mathcal{H}(H_1,H_2))}$.

3.24 - <u>Comentário</u>. No caso clássico demonstra-se que se $K\in C([a,b]\times[a,b])$ e $\forall (t,s)\in[a,b]\times[a,b]$, $K(t,s) = \overline{K(s,t)}$ o operador hermitiano compacto k definido pelo núcleo K é tal que $\sum_n \lambda_n^2 < +\infty$, onde (λ_n) é a sequência dos autovalores não nulos de k (ver referência 1. da bibliografia do capítulo 1). De acordo com o Teorema 2.19, isto equivale a dizer que $k\in\mathcal{H}(C_{L_2}([a,b]))$. Em vista disto, não perderíamos nada em generalidade se de início considerássemos núcleos K para os quais os operadores k correspondentes fossem de Hilbert-Schmidt. O corolário 3.21 mostra, então, que a menos da continuidade, estamos trabalhando na situação mais geral possível ao considerar núcleos $K\in C_{L_2}(Y\times X;\mathcal{H}(H_1,H_2))$.

3.25 - <u>Teorema</u>. Dado $K\in C_{L_2}(Y\times X;\mathcal{H}(H_1,H_2))$, definimos $K^* : X\times Y \longrightarrow \mathcal{H}(H_2,H_1)$ por $\forall\ (s,t)\in X\times Y$, $K^*(s,t) = [K(t,s)]^*$

Nestas condições, temos:

a) $K^*\in C_{L_2}(X\times Y;\mathcal{H}(H_2,H_1))$ e $\|K^*\| = \|K\|$.

b) Se $k\in\mathcal{H}(E,F)$ é o operador de núcleo K, então existe $k^*\in\mathcal{H}(F,E)$, que é o operador de núcleo K^*.

c) Se $X=Y$ e $H_1=H_2$, então $k = k^* \Longleftrightarrow K = K^* \Longleftrightarrow$ $\Longleftrightarrow \forall\ (t,s)\in X\times X$, $K(t,s) = [K(s,t)]^*$

(Neste caso temos $\forall (t,s) \in X \times X$, $|||K(t,s)||| = |||K(s,t)|||$).

<u>prova</u>: a) imediata à partir de 2.7a), que garante que:

$\forall (t,s) \in Y \times X$, $|||K(t,s)||| = |||K(t,s)^*||| = |||K^*(s,t)|||$.

b) $\forall\ (x,y) \in E \times F$, $(kx|y) = \int_Y (kx(t)|y(t))dt =$

$$= \int_Y \left(\int_X K(t,s)x(s)ds \,|\, y(t) \right) dt = \int_Y \int_X (x(s)\,|K(t,s)^* y(t))dsdt =$$

$$= \int_X (x(s)\,|\int_Y K^*(s,t)y(t)dt)ds \;=\; (x|k^*y).$$

c) se $k=k^*$, por 3.20, $K=K^*$

se $K=K^*$, por definição, $k=k^*$.

<u>BIBLIOGRAFIA DO CAPÍTULO 3</u>

1. AGMON, SHMUEL, "Lectures on Eliptic Boundary Value Problems", D.Van Nostrand Company, Inc.

2. SCHWARTZ, LAURENT, "Topologie générale et analyse fonctionnelle", Hermann, Paris, 1970.

3. BOURBAKI, NICOLAS, "Integração - livre VI - fascicule XIII", Hermann, Paris, 1965.

CAPÍTULO 4

O TEOREMA DE MERCER

4.1 - Notações:

X espaço compacto para o qual existe uma base o.n. de $C_{L_2}(X)$;

H espaço de Hilbert complexo;

$(h_i)_{i\in I}$ base o.n. de H;

$E = C_{L_2}(X;H)$.

EQUAÇÃO INTEGRAL DE FREDHOLM DE 2ª ESPÉCIE

Consideremos a equação integral de Fredholm de 2ª espécie

$$\forall\ t\in X,\ \lambda x(t) = y(t) + \int_X K(t,s)x(s)ds$$

onde são dados $\lambda\in\mathbb{C}$; $y\in E$; $K\in C_{L_2}(X\times X;\mathcal{H}(H))$, $K\neq 0$, $K=K^*$, e procura-se a função incógnita $x\in E$.

Sendo k o operador de núcleo K, definido por $\forall\ x\in E$, $\forall t\in X$, $(kx)(t) = \int_X K(t,s)x(s)ds$, pelos Teoremas 3.19 e 3.20, vemos que $k\in\mathcal{H}(E)$, $|||k||| = ||K||$, $k\neq 0$ e $k^*=k$. Seja então, (λ_n) a sequência dos autovalores não nulos de k e (e_n) a sequência o.n. de autovetores correspondentes aos λ_n, dadas no Teorema 1.6, e tais que:

$\forall\ x \in E,\ kx = \sum_n \lambda_n (x|e_n) e_n.$

4.2 - Lema. $\forall\ t \in X,\ \sum_n \lambda_n^2 \| e_n(t) \|^2 \leq \int_X |||K(t,s)|||^2 ds.$

prova: $\forall\ t \in X,\ ke_n(t) \in H,\ \therefore\ \| ke_n(t) \|^2 = \sum_{i \in I} |(ke_n(t)|h_i)|^2,$

$$\therefore\ \forall\ N \in \mathbb{N},\ \sum_{n=1}^{N} \lambda_n^2 \| e_n(t) \|^2 = \sum_{n=1}^{N} \|ke_n(t)\|^2 = \sum_{n=1}^{N} \sum_{i \in I} |(ke_n(t)|h_i)|^2 =$$

$$= \sum_{n,i} \left| \left(\int_X K(t,s) e_n(s) ds \middle| h_i \right) \right|^2 = \sum_{n,i} \left| \int_X (K(t,s) e_n(s) | h_i) ds \right|^2 \underset{\text{2.20e)}}{=}$$

$$= \sum_{n,i} \left| \int_X (K(t,s) | h_i \otimes e_n'(s)) ds \right|^2 = \sum_{n,i} |(K(t,\cdot) | h_i \otimes e_n')|^2$$

e como $(h_i \otimes e_n')_{n,i}$ é um sistema o.n. de $C_{L_2}(X; \mathcal{H}(H))$, usando a desigualdade de Bessel, temos

$$\sum_{n,i} |(K(t,\cdot)|h_i \otimes e_n')|^2 \leq \|K(t,\cdot)\|^2_{C_{L_2}(X;\mathcal{H}(H))} = \int_X |||K(t,s)|||^2 ds$$

4.3 - Teorema. $\forall\ x \in E$, a série $\sum_n \|\lambda_n (x|e_n) e_n\|$ é uniformemente convergente em X, e $\therefore$ a série $kx = \sum_n \lambda_n (x|e_n) e_n$ converge uniformemente em X.

prova: Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz e o Lema 4.2, $\forall t \in X$,

$$\sum_{n=p}^{q} \|\lambda_n (x|e_n) e_n(t)\| \leq \left(\sum_{n=p}^{q} \|\lambda_n e_n(t)\|^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{n=p}^{q} |(x|e_n)|^2 \right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \left(\int_X |||K(t,s)|||^2 ds \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{n=p}^{q} |(x|e_n)|^2 \right)^{1/2} \leq M. \left(\sum_{n=p}^{q} |(x|e_n)|^2 \right)^{1/2},$$ onde $M = \sup_{t \in X} \left(\int_X |||K(t,s)|||^2 ds \right)^{1/2}$

4.4 - Corolário. $\forall\ \lambda \in \mathbb{C},\ \lambda \neq 0,\ \forall\ n\ \lambda \neq \lambda_n;\ \forall\ y \in E$, a equação $\lambda x - kx = y$ tem uma única solução $x \in E$ dada por:

$$\forall\ t \in X,\ x(t) = \frac{1}{\lambda} y(t) + \frac{1}{\lambda} \sum_n \lambda_n \frac{(y|e_n)}{\lambda - \lambda_n} e_n(t)$$

a série sendo absolutamente e uniformemente convergente em X.

<u>prova</u>: 1.10 garante que existe uma única solução $x \in E$, dada por: $x = \frac{1}{\lambda} y + \frac{1}{\lambda} \sum_n \lambda_n \frac{(y|e_n)}{\lambda - \lambda_n} e_n$ a série convergindo em E. Mas como $k=k^*$ e $\lambda x - kx = y$, vem

$\frac{(y|e_n)}{\lambda-\lambda_n} = \frac{\lambda(x|e_n) - (x|ke_n)}{\lambda - \lambda_n} = (x|e_n)$, donde pelo Teorema, segue a tese.

4.5 - <u>Corolário</u>. Se $\lambda \in \mathbb{C}$ é tal que $\exists n_o : \lambda = \lambda_{n_o}$, a equação $\lambda x - kx = y$ tem solução se, e somente se, $y \perp z$, $\forall\ z \in E$ com $kz = \lambda z$. Quando existem, as soluções são dadas por:

$$\forall t \in X,\ x(t) = \frac{1}{\lambda} y(t) + \frac{1}{\lambda} \sum_{n \neq n_o} \frac{(y|e_n)}{\lambda - \lambda_n} e_n(t) + z(t)$$

onde z é qualquer autovetor de E associado a λ, a série convergindo absolutamente e uniformemente em X.

<u>prova</u>: análoga à de 4.4, à partir de 1.11.

<u>O TEOREMA DE MERCER</u>

4.6 - <u>Teorema</u>. A série $\sum_n \lambda_n^2 \|e_n(s)\|^2$ converge uniformemente em X para $\int_X |||K(t,s)|||^2 dt$.

<u>prova</u>: Pela definição 2.6, $\forall (t,s) \in X \times X$, $|||K(t,s)|||^2 = \sum_{i \in I} \|K(t,s)h_i\|^2$, $\therefore$ pelo Teorema 3.7, de Dini, $\sum_{i \in I} \|K(t,s)h_i\|^2$ é uniformemente somável para $|||K(t,s)|||^2$ em $X \times X$, $\therefore$ usando os Teoremas 3.7 e 3.25.c)

e o Teorema 4.3, temos $\forall$ s$\in$X, $\int_X |||K(t,s)|||^2 dt = \sum_{i\in I}\int_X \|K(t,s)h_i\|^2 dt =$

$$= \sum_{i\in I}\int_X (K(t,s)h_i|K(t,s)h_i)dt = \sum_{i\in I}\int_X (K(s,t)[K(t,s)h_i]|\ h_i)dt =$$

$$= \sum_{i\in I}\left(\int_X K(s,t)[K(t,s)h_i]dt|h_i\right) = \sum_{i\in I}(k[K(\cdot,s)h_i](s)|h_i) =$$

$$= \sum_{i\in I}\left(\sum_n \lambda_n (K(\cdot,s)h_i|e_n)e_n(s)|h_i\right) = \sum_{i\in I}\sum_n \lambda_n (K(\cdot,s)h_i|e_n)(e_n(s)|h_i) =$$

$$= \sum_{i\in I}\sum_n \lambda_n \int_X (K(r,s)h_i|e_n(r))dr \times (e_n(s)|h_i) =$$

$$= \sum_{i\in I}\sum_n \lambda_n (h_i|\int_X K(s,r)e_n(r)dr) \times (e_n(s)|h_i) =$$

$$= \sum_{i\in I}\sum_n \lambda_n^2\ |(e_n(s)|h_i)|^2 = \sum_n \sum_{i\in I} \lambda_n^2 |(e_n(s)|h_i)|^2 = \sum_n \lambda_n^2\ \|e_n(s)\|^2$$

$\therefore\ \forall$ s$\in$X, $\sum_n \lambda_n^2 \|\ e_n(s)\|^2 = \int_X |||K(t,s)|||^2\ ds$, $\therefore$ pelo Teorema de Dini, temos a tese.

4.7. Corolário. $\lim\limits_{N\to+\infty}\int_X |||K(t,s) - \sum_{n=1}^N \lambda_n e_n(t)\otimes e_n'(s)|||^2 dt = 0$ uniformemente para s$\in$X.

prova: $\int_X |||K(t,s) - \sum_{n=1}^N \lambda_n e_n(t)\otimes e_n'(s)|||^2 dt =$

$= \int_X |||K(t,s)|||^2 dt - \sum_{n=1}^N \lambda_n^2\ \|e_n(s)\|^2$, que resulta por cálculo direto, ou levando em conta que $\forall$ s$\in$X, o sistema $\frac{1}{\|e_n(s)\|}(e_n(\cdot)\otimes e_n'(s))$ para $1 \leq n \leq N$, tal que $e_n(s) \neq 0$, é o.n. em $C_{L_2}(X;\mathcal{H}(H))$ e que

$$\left(K(\cdot,s)\ |\ \frac{e_n(\cdot)\otimes e_n'(s)}{\|e_n(s)\|}\right) = \frac{1}{\|e_n(s)\|} = \int_X (K(t,s)|e_n(t)\otimes e_n'(s))dt =$$

<u>2.20e)</u> $\frac{1}{\|e_n(s)\|}\int_X (K(t,s)e_n(s)|e_n(t))dt \overset{K=K^*}{=}$

$= \frac{1}{\|e_n(s)\|}\int_X (e_n(s)|K(s,t)e_n(t))dt = \lambda_n$, e aplicando que se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é o.n. num espaço pré-hilbertiano E e $x\in E$, $\|x - \sum_{n=1}^{N}(x|f_n)f_n\|^2 =$ $= \|x\|^2 - \sum_{n=1}^{N}|(x|f_n)|^2$. Aplicando o Teorema a tese é imediata.

4.8. <u>Corolário</u>. $K=\sum_n \lambda_n e_n \otimes e_n'$, a série convergindo em $C_{L_2}(X\times X;\mathcal{H}(H))$.

<u>prova</u>: $\lim_{N\to+\infty} \|K - \sum_{n=1}^{N}\lambda_n e_n\otimes e_n'\|^2 =$

$= \lim_{N\to+\infty}\int_X\int_X |||K(t,s) - \sum_{n=1}^{N}\lambda_n e_n(t)\otimes e_n'(s)|||^2 dtds =$

$= \int_X\left\{\lim_{N\to+\infty}\int_X |||K(t,s) - \sum_{n=1}^{N}\lambda_n e_n(t)\otimes e_n'(s)|||^2 dt\right\}ds = 0$, onde usamos a convergência uniforme dada no coloário anterior.

4.9 - <u>Teorema</u> (MERCER). Se o núcleo Hermitiano $K\in C_{L_2}(X\times X;\mathcal{H}(H))$ é tal que o operador k, por ele definido, é positivo, e se além disso, sendo $(h_i)_{i\in I}$ uma base o.n. de H, ele é tal que a função que a cada $t\in X$ associa $\sum_{i\in I}(K(t,t)h_i|h_i)$ é contínua em X, então,

$$\forall\ (t,s)\in X\times X,\ K(t,s) = \sum_n \lambda_n e_n(t)\otimes e_n'(s),$$

a série convergindo absolutamente e uniformemente em $X\times X$.

<u>prova</u>: a) $\forall\ t\in X$, $K(t,t) \geq 0$.

Por absurdo, se $\exists t_0\in X$ e $\exists h_0\in H$ tal que $(K(t_0,t_0)h_0|h_0) < 0$, então existe uma vizinhança V de t_0 em X tal que $\forall (t,s)\in V\times V$, $\mathcal{R}(K(t,s)h_0|h_0) < -\delta < 0$, onde $\mathcal{R}z$ é usado para indicar a parte real de $z \in \mathbb{C}$; pelo Teorema de Urysohn, existe uma função $x \in C(X;[0,1])$ tal que $x(t_0)=1$ e $x(t)=0 \ \forall\, t \notin V$; consideremos então a função $\tilde{x} \in C(X;[0,h_0])$, onde $[0,h_0] \subset H$, definida por $\forall\, t \in X$, $\tilde{x}(t) = x(t)h_0$;

$$\therefore (k\tilde{x}|\tilde{x}) = R(k\tilde{x}|\tilde{x}) = R\int_X (k\tilde{x}(s)|\tilde{x}(s))ds =$$

$$= R\int_X\int_X (K(s,t)\tilde{x}(t)|\tilde{x}(s)dtds = \int_X\int_X R(K(s,t)[x(t)h_0] \mid x(s)h_0)dtds =$$

$$= \int_X\int_X \Big[R(K(s,t)h_0|h_0)\Big]x(t)\ x(s)\ dtds \le -\delta \left[\int_X x(s)ds\right]^2 < 0,$$ o que é absurdo, pois por hipótese k é positivo.

b) Dado um número finito $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ de autovalores de k, então $\tilde{K}_N = K - \sum_{n=1}^{N} \lambda_n e_n \otimes e'_n$ é o núcleo de um operador $\tilde{k}_N$, que é positivo.

$\forall\, x \in E$, $(\tilde{k}_N x|x) = (kx|x) - (k_N x|x)$, onde k_N é o operador de núcleo $\sum_{n=1}^{N} \lambda_n e_n \otimes e'_n$; mas, $(k_N x|x) = \int_X (k_N x(t)|x(t))\ dt =$

$$= \int_X \left(\int_X \sum_{n=1}^{N} \lambda_n (e_n(t) \otimes e_n(s)')\ x(s)\ ds \mid x(t)\right) dt =$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \int_X\int_X \Big(x(s)|e_n(s)\Big)\Big(e_n(t)|x(t)\Big)\ dsdt =$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \lambda_n |(x|e_n)|^2,$$ portanto, $$(\tilde{k}_N x|x) = (kx|x) - \sum_{n=1}^{N} \lambda_n |(x|e_n)|^2 =$$

$$= \left(k(x - \sum_{n=1}^{N} x_n e_n) \mid x - \sum_{n=1}^{N} x_n e_n\right) \ge 0,$$ onde $x_n = (x|e_n)$.

c) $\forall\, t \in X$, $\sum_n \lambda_n \|e_n(t)\|^2 \le M < +\infty$.

De a) e b) $\forall\, N \in \mathbb{N}$, $\forall\, t \in X$, $K(t,t) - K_N(t,t) = \tilde{K}_N(t,t) \ge 0$, onde

$$K_N = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n e_n \otimes e'_n, \quad \therefore \sum_{n=1} \lambda_n \|e_n(t)\|^2 = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \sum_{i \in I} (e_n(t)|h_i)(h_i|e_n(t)) =$$

$$= \sum_{i\in I}\left(\sum_{n=1}^{N}\lambda_n(e_n(t)\otimes e_n(t)')h_i\middle|h_i\right) = \sum_{i\in I}(K_N(t,t)h_i|h_i) \leq \sum_{i\in I}(K(t,t)h_i|h_i),$$

que por hipótese é limitada por um número $M < +\infty$.

d) $\forall\ (t,s)\in X\times X,\ K(t,s) = \sum_n \lambda_n e_n(t)\otimes e_n(s)'$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz; $\forall\ (t,s)\in X\times X$

$$\sum_{n=p}^{q} |||\lambda_n e_n(t)\otimes e_n(s)'||| = \sum_{n=p}^{q}\lambda_n \|e_n(t)\|\times\|e_n(s)\| \leq$$

$$\leq \left(\sum_{n=p}^{q}\lambda_n\|e_n(s)\|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n=p}^{q}\lambda_n\|e_n(t)\|^2\right)^{1/2} \leq M^{1/2}\left(\sum_{n=p}^{q}\|e_n(s)\|^2\right)^{1/2},$$

e como pelo item c) $\forall\ s\in X$, a série $\sum_n \lambda_n\|e_n(s)\|^2$ converge, temos que $\forall\ s\in X$, a série $\sum_n \lambda_n e_n(t)\otimes e_n(s)'$ converge uniformemente em $t\in X$, portanto, $\forall\ s\in X$, $|||K(t,s) - \sum_{n=1}^{N}\lambda_n e_n(t)\otimes e_n(s)'|||^2$ converge uniformemente em $t\in X$ para $|||K(t,s) - \sum_n \lambda_n e_n(t)\otimes e_n(s)'|||^2$, $\therefore$, pelo corolário 4.7, $\int_X |||K(t,s) - \sum_n \lambda_n e_n(t)\otimes e_n(s)'|||^2\,dt =$

$= \lim_{N\to+\infty}\int_X |||K(t,s) - \sum_{n=1}^{N}\lambda_n e_n(t)\otimes e_n(s)'|||^2\,dt = 0$, e como $\forall\ s\in X$, a função $t\in X \longrightarrow |||K(t,s) - \sum_n \lambda_n e_n(t)\otimes e\ (s)'|||$ é contínua, temos

$$\forall\ (t,s)\in X\times X,\ K(t,s) = \sum_n \lambda_n e_n(t)\otimes e_n(s)'$$

e) $\sum_n \lambda_n\|e_n(t)\|^2$ converge uniformemente em X.

Pelo item anterior, $\forall\ t\in X$, $\forall i\in I$, $(K(t,t)h_i|h_i) \overset{2.20e)}{=}$

$= (K(t,t)|h_i\otimes h_i') = \left(\sum_n \lambda_n e_n(t)\otimes e_n(t)'\middle|h_i\otimes h_i'\right) =$

$= \sum_n \lambda_n(e_n(t)\otimes e_n(t)'|h_i\otimes h_i') \overset{2.20b)}{=} \sum_n \lambda_n|(e_n(t)|h_i)|^2$, portanto,

$$\forall t\in X,\ \sum_n \lambda_n \|e_n(t)\|^2 = \sum_n \lambda_n \sum_{i\in I} |(e_n(t)|h_i)|^2 = \sum_{i\in I} (K(t,t)h_i|h_i)$$

e como por hipótese esta última soma é contínua, do **Teorema** de Dini, segue que a série $\sum_n \lambda_n \| e_n(t) \|^2$ converge uniformemente em X.

f) Pelo item anterior, levando em conta que $\forall\ (t,s)\in X_\times X$,

$$\sum_{n=p}^{q} |||\lambda_n e_n(t)\otimes e_n(s)'||| \leq \left(\sum_{n=p}^{q} \lambda_n \|e_n(t)\|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{n=p}^{q} \lambda_n \|e_n(s)\|^2\right)^{1/2},$$

resulta que $\sum_n |||\lambda_n e_n(t)\otimes e_n(s)'|||$ converge uniformemente em $X_\times X$, portanto

$$\forall (t,s)\in X_\times X\ ,\ K(t,s) = \sum_n \lambda_n e_n(t)\otimes e_n(s)',$$

a série sendo absolutamente e uniformemente convergente em $X_\times X$.

4.10 - <u>Teorema</u>. Seja $K\in C_{L_2}(X\times X;\mathcal{H}(H))$, tal que a tese do Teorema de Mercer seja verificada. Então,

a) $\sum_n \lambda_n \|e_n(t)\|^2$ é uniformemente convergente em X;

b) a função que a $t\in X$ associa $\sum_{i\in I} (K(t,t)h_i|h_i)$ é contínua em X;

c) $\sum_n \lambda_n < +\infty$.

<u>prova</u>: a) $\sum_n |||\lambda_n e_n(t)\otimes e_n(t)'||| = \sum_n \lambda_n \|e_n(t)\|^2$;

b) Da demonstração do item e) do Teorema anterior,

$\sum_n \lambda_n \|e_n(t)\|^2 = \sum_{i\in I} (K(t,t)h_i|h_i)$, e como, pelo item anterior, a soma $\sum_n \lambda_n \|e_n(t)\|^2$ é contínua, segue o resultado.

C) Pelo item a), $\int_X \sum_n \lambda_n \|e_n(t)\|^2 dt =$

$$= \sum_n \lambda_n \int_X \|e_n(t)\|^2 dt = \sum_n \lambda_n \|e_n\|^2 = \sum_n \lambda_n$$

4.11 - <u>Corolário</u>. Se o núcleo hermitiano $K \in C_{L_2}(X \times X; H(H))$ é tal que o operador k, por ele definido, é positivo, então são equivalentes as seguintes proposições:

a) A função que a cada $t \in X$ associa $\sum_{i \in I} (K(t,t)h_i | h_i)$ é contínua em X.

b) a série $\sum_n \lambda_n \|e_n(t)\|^2$ é uniformemente convergente em X.

c) $\forall (t,s) \in X \times X$, $K(t,s) = \sum_n \lambda_n e_n(t) \otimes e_n(s)'$, a série convergindo absolutamente e uniformemente em $X \times X$.

<u>prova</u>: Imediata a partir de 4.10 e da demonstração do Teorema 4.9.

4.12 - <u>Exemplos</u>. Seja $\ell_2(\mathbb{N})$ o espaço de Hilbert das sequências $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, tais que $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < +\infty$ munido do produto interno $(x|y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$, e portanto da norma $\|x\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\right)^{1/2}$, e seja $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ a sua base canônica, onde $e_i = (\delta_{i,n})_{n \in \mathbb{N}}$.

Para cada $x \in \ell_2(\mathbb{N})$, seja A_x o operador de $\ell_2(\mathbb{N})$ definido por $\forall y \in \ell_2(\mathbb{N})$, $A_x(y) = x.y = (x_n y_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Então,

a) $\forall x \in \ell_2(\mathbb{N})$, $A_x \in H(\ell_2(\mathbb{N}))$ e $|||A_x||| = \|x\|_2$

De fato, $\forall x \in \ell_2(\mathbb{N})$, $|||A_x|||^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \|A_x e_i\|_2^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \|x \cdot e_i\|_2^2 =$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 = \|x\|_2^2.$$

Portanto, o operador A que a cada $x \in \ell_2(\mathbb{N})$ associa $A_x \in \mathcal{H}(\ell_2(\mathbb{N}))$ é uma inclusão isométrica e toda função contínua de $X \times X$ em $\ell_2(\mathbb{N})$ é exemplo de um núcleo $K \in C(X \times X; \mathcal{H}(\ell_2(\mathbb{N})))$.

b) $\forall\ (t,s) \in X \times X$, seja $K(t,s) = \left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_2(\mathbb{N}) \subset \mathcal{H}(\ell_2(\mathbb{N}))$.

Portanto $\sum_{i=1}^{\infty} (K(t,t)e_i | e_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = +\infty$, o que mostra que as condições equivalentes do corolário 4.11 não se deduzem das hipóteses feitas nele.

c) Se $K \in C(X \times X; \ell_1(\mathbb{N}))$ é tal que $\forall\ t,s \in X \times X$, as coordenadas de $K(t,s)$ são positivas, isto é, $\forall\ i \in \mathbb{N}$, $(K(t,s)e_i | e_i) \geq 0$, então $\sum_{i=1}^{\infty} (K(t,t)e_i | e_i) = \|K(t,t)\|_1$ é contínua para $t \in X$, e $\therefore$, temos exemplos de núcleos que satisfazem as condições equivalentes do corolário 4.11.

4.13 - Exemplo. Seja $H = L_2([a,b])$ e $A: [a,b]^4 \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função, satisfazendo, $\forall\ (t,s) \in [a,b]^2$, $A(t,s,\cdot,\cdot) \in L_2([a,b]^2)$ e que a função $(t,s) \in [a,b]^2 \longmapsto A(t,s,\cdot,\cdot) \in L_2([a,b]^2)$ é contínua.

Para cada par $(t,s) \in [a,b]^2$, seja $K(t,s)$ o operador de H definido por: $\forall\ h \in H$ e "para quase todo" (expressão abreviada por p.q.t) $u \in [a,b]$,

$$[K(t,s)h](u) = \int_a^b A(t,s,u,v) \cdot h(v)\, dv$$

As hipóteses sobre A, foram feitas para que

$K \in C([a,b]^2; \mathcal{H}(H))$. De fato,

a) a integral acima existe, pois $h \in H$ e $\forall\ (t,s) \in [a,b]^2$ e p.q.t. $u \in [a,b]$, $A(t,s,u,\cdot) \in H$.

b) $\forall\ (t,s) \in [a,b]^2$, $\forall\ h \in H$, $K(t,s)h \in H$, pois

$$\int |[K(t,s)h](u)|^2 du = \int \left| \int A(t,s,u,v)h(v)dv \right|^2 du \leq$$

$$\leq \int \left(\int |A(t,s,u,v)| \cdot |h(v)| dv \right)^2 du \leq$$

$$\leq \int \left(\int |A(t,s,u,v)|^2 dv \right) \left(\int |h(v)|^2 dv \right) du = \|h\|^2 \cdot \|A(t,s,\cdot,\cdot)\|^2 .$$

c) $\forall\ (t,s) \in [a,b]^2$, $K(t,s) \in \mathcal{H}(H)$

Seja $(h_i)_{i \in \mathbb{N}}$ uma base o.n. de H; $\forall\ N \in \mathbb{N}$,

$$|||K(t,s)|||^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \|K(t,s)h_i\|^2 = \sum_{i,j} |(K(t,s)h_i|h_j)|^2 =$$

$$= \sum_{i,j} \left| \int [K(t,s)h_i](u) \cdot \overline{h_j(u)} du \right|^2 =$$

$$= \sum_{i,j} \left| \int \int A(t,s,u,v)h_i(v)\ \overline{h_j(u)} dv\ du \right|^2 = \sum_{i,j} |(A(t,s,\cdot,\cdot)|h_i \otimes h_j')|^2$$

e como $(h_i \otimes h_j')_{i,j}$ é uma base o.n. de $L_2([a,b]^2)$, temos que

$|||K(t,s)||| = \|A(t,s,\cdot,\cdot)\|$.

d) $K \in C([a,b]^2; \mathcal{H}(H))$

Com demonstração análoga à do item anterior, temos: $\forall\ (t,s), (t_0,s_0) \in [a,b]^2$,

$|||K(t,s) - K(t_0,s_0)||| = \|A(t,s,\cdot,\cdot) - A(t_0,s_0,\cdot,\cdot)\|$ e pela hipótese obtemos a continuidade de K.

Posto isto, consideremos então a equação vetorial de Fredholm de 2ª espécie com núcleo K.

$$\lambda x(t) = f(t) + \int_a^b K(t,s)x(s)ds$$

Se quizermos trabalhar somente com funções a valores complexos para recair no caso clássico para duas variáveis, teremos a equação

$$\lambda x(t)(u) = f(t)(u) + \int_a^b \int_a^b A(t,s,u,v)x(s)(v)dvds$$

mas, pelas hipóteses feitas, vemos que o núcleo A pode **apresentar** descontinuidades nas variáveis u e v, caso no qual a redução não é completa.

4.14 - Exemplo. a) Seja $H = L_2[c,d]$ e $K \in C([a,b]\times[c,d]^2)$.

Para cada $t \in [a,b]$, seja $A(t)$ o operador de H defenido por: $\forall\ h \in H$, $\forall\ x \in [c,d]$, $[A(t)h](x) = \int_c^d K(t,x,y)h(y)dy$.

Evidentemente $\forall\ h \in H$, $A(t)h \in H$ e $\forall\ t \in [a,b]$, $A(t)$ é linear e com cálculo análogo ao feito em 4.13 c), temos que:

$\forall\ t \in [a,b]$, $A(t) \in \mathcal{H}(H)$ e $|||A(t)|||^2 = \iint |K(t,x,y)|^2 dxdy = \|K(t,\cdot,\cdot)\|^2$

e $\forall\ t,t_0 \in [a,b]$, $|||A(t) - A(t_0)||| = \|K(t,\cdot,\cdot) - K(t_0,\cdot,\cdot)\|$, donde se conclui que $A \in C([a,b],\mathcal{H}(H))$.

b) Consideremos, então, o problema diferencial

$$\begin{cases} L[u] \equiv u'' + Au = f \quad (u''(t) + A(t)u(t) = f(t) \text{ para } t \in [a,b]) \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$$

onde são dados $f \in C([a,b];H)$ e $A \in C([a,b],\mathcal{H}(H))$ definido como acima e procura-se a função incógnita $u \in C^{(2)}([a,b];H)$. Admitindo que

$\forall\ f\in C([a,b];H)$ o problema admite uma e uma só solução, então existe uma função $G:[a,b]\times[a,b] \longrightarrow L(H)$, tal que: $y\in C^{(1)}([a,b];H)$ é solução do problema se, e somente se, $y(t) = \int_a^b G(t,s)ds$ (ver texto do Prof. Chaim Samuel Hönig , "The abstrat Rieman-Stieltjes integral and its aplications to Linear Differential Equations with generalized boundary conditions" — Notas do IME, USP, São Paulo, 1973). Admitiremos ainda que $G\in C([a,b]\times[a,b];\mathcal{H}(H))$.

c) O problema acima é auto-adjunto se, e somente se $\forall\ u,v\in C^{(2)}([a,b];H)$ com $u(a) = u(b) = v(a) = v(b) = 0$ temos $(L[u]|v) = (u|L[v])$ o produto interno sendo o de $C_{L_2}([a,b];H)$, o que é equivalente a dizer que $G = G^*$. Desenvolvendo $(L[u]|v) = (u|L[v])$ e usando integração por partes, vemos que em termos do núcleo K, a condição fica

$$\forall\ (t,x,y)\in[a,b]\times[c,d]^2,\ K(t,x,y) = \overline{K(t,y,x)}.$$

Desta forma transformamos o"problema de autovetores" da resolução do sistema

$$L[u] \quad \lambda u = f \qquad \lambda\in C$$
$$u(a) = u(b) = 0$$

na equação vetorial de Fredholm de 2ª espécie com núcleo hermitiano G e podemos, então, aplicar os resultados aqui obtidos.

BIBLIOGRAFIA DO CAPÍTULO 4

1. CHAIM SAMUEL HÖNIG, "ANÁLISE FUNCIONAL E APLICAÇÕES", volume II do Instituto de Matemática e Estatística, USP, 1970.